



01162 20/01

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

ESTIMACION DE GASTO BASE
MEDIANTE TECNICAS DE FILTRADO

JOSE LUIS ACOSTA RODRIGUEZ

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA
HIDRAULICA

CIUDAD UNIVERSITARIA
1989.

TESIS C. N.
FALLA DE CRIGES



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En el presente trabajo se propone un método basado en un sistema lineal de parámetros constantes (SLPC), que permite estimar el gasto base en ríos perennes y efluentes, a partir de datos hidrométricos exclusivamente. La identificación de la función de respuesta en la frecuencia del SLPC, o simplemente filtro, se hace con base en las propiedades de operaciones elementales en el dominio de la frecuencia. Los parámetros del filtro se obtienen en el dominio del tiempo minimizando el error cuadrado medio de los gastos observados y el gasto base estimado, solamente en el periodo de estiaje. Finalmente, la estimación del gasto base, propiamente dicha, se obtiene de la antitransformada de Fourier del producto de las transformadas del filtro y del gasto total. Dos ejemplos de aplicación muestran la bondad y eficiencia computacional del método.

I N D I C E

pag

1. INTRODUCCION	1
2. GASTO BASE	3
2.1. Elementos que conforman el hidrograma de escurrimiento en el cauce	8
2.2. Maneras tradicionales de estimación del gasto base	13
3. METODO ALTERNATIVO DE ESTIMACION DEL GASTO BASE	19
3.1. Hipótesis de un método alternativo de estimación del gasto base	20
3.2. Sistema Lineal de Parámetros Constantes (SLPC) para la estimación del gasto base	20
3.3. Características dinámicas de un SLPC para la estimación del gasto base	21
3.4. Función de transferencia de un SLPC	24
3.5. Función de respuesta en la frecuencia	24
4. IDENTIFICACION DE UNA FUNCION DE FILTRADO PARA LA ESTIMACION DEL GASTO BASE	29
4.1. Frecuencia de corte	31
4.2. Parámetro de atenuación	42
4.3. parámetro de traslación	49
4.4. Estructura del filtro	51

5. ESTIMACION DE GASTO BASE	55
5.1. Planteamiento del problema de optimización	56
5.2. Técnica de optimización a utilizar	62
5.3. Ejemplos de aplicación	64
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	69

REFERENCIAS

APENDICE A. Elementos matemáticos relacionados con la metodología

APENDICE B. Programa de cómputo y ejemplos de aplicación

1. INTRODUCCION

La separación de un hidrograma en componentes de escurrimiento directo y gasto base, es un problema que ha sido atacado principalmente con técnicas empíricas. Lo anterior se debe a que su principal aplicación, esto es, la determinación de hidrogramas unitarios, es poco sensible a los errores que puedan cometerse al estimar el volumen de escurrimiento directo. Sin embargo, en corrientes que son efluentes y perennes, la estimación del gasto base puede requerir una mayor precisión. Considérese por ejemplo, la simulación numérica del flujo en un acuífero que será explotado mediante la operación de un campo de pozos cercano a un río. Si el río es el efluente, entonces el acuífero alimenta a la corriente, y ésta actúa como un sumidero distribuido a lo largo del tramo de interés (Pinder y Gray, 1977). Esta condición de frontera del acuífero no está restringida a ser un gasto; bien podría ser el nivel del agua del río, pero esa información raramente se encuentra disponible. Por el contrario, la información hidrométrica es mucho más común y fácil de obtener. De aquí surge la necesidad de estimar el gasto base, que es aquel que el acuífero provee a la corriente efluente, a partir de datos hidrométricos exclusivamente. En el presente trabajo se propone un método para estimar el gasto base en ríos efluentes, considerando solamente los gastos totales escurridos. La técnica, basada en un sistema lineal de parámetros constantes, adapta los parámetros para cada cuenca particular mediante optimización. se presenta la

aplicación de la metodología a dos casos particulares en corrientes mexicanas.

[The text in this block is extremely faint and illegible, appearing to be a series of lines of text that have been scanned with very low contrast or are otherwise obscured. It seems to contain several paragraphs of a document.]

2. GASTO BASE

El proceso de conversión de la lluvia en escurrimiento está regido por las condiciones prevalecientes en la cuenca al momento de la tormenta, entre ellas podemos señalar temperatura, condiciones de humedad y características físicas del suelo, cobertura vegetal, características geométricas y geológicas de la cuenca, etc. La distribución de la lluvia precipitada sobre la cuenca se lleva a cabo de diversas formas, una parte se transforma en escurrimiento superficial observable a la salida de la cuenca y el resto lo constituye la evaporación, infiltración, transpiración, intercepción y detención.

La componente de la precipitación que excede a la velocidad de infiltración local forma una película de agua en la superficie (superficie de detención) hasta que inicia el flujo sobre la superficie del terreno en forma de pequeños brazos que convergen a otros más grandes los cuales llegan al cauce principal de la cuenca. En la figura 2.1 se muestra una lluvia distribuida uniformemente sobre un tiempo t_0 con intensidad igual a i (LT^{-1}). Esta lluvia es separada en cuatro componentes de i_1 a i_4 , donde la suma de ellas es igual a i para cualquier tiempo t .

Del total de lluvia precipitada, una parte se detiene en las hojas de los árboles, sucediendo en ocasiones que para tormentas pequeñas la mayor parte de la lluvia sea interceptada por la vegetación sin presentarse escurrimiento superficial. Las plantas a

DISTRIBUCION DE LA PRECIPITACION

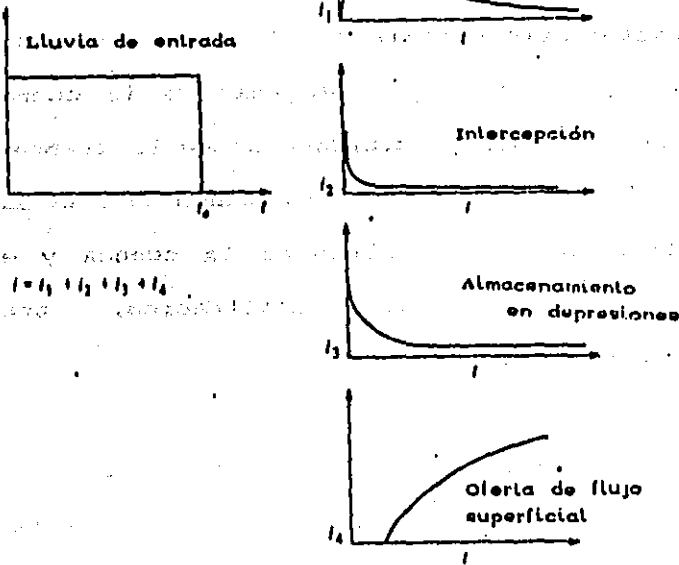


Figura 2.1. Elementos de la precipitación para una lluvia de intensidad i uniforme (Viessman, et al, 1977).

su vez producen lo que se conoce como transpiración denominada de manera ingenieril, al igual que la evaporación, como "pérdida". Del agua precipitada que alcanza a llegar al suelo una parte se infiltra en el terreno y el resto escurre superficialmente. En la figura 2.2 se muestra de manera detallada los elementos involucrados en el proceso lluvia-escorrimento en la cuenca, la cual es introducida con la finalidad de ilustrar los factores anteriormente mencionados.

LLUVIA-ESCURRIMIENTO

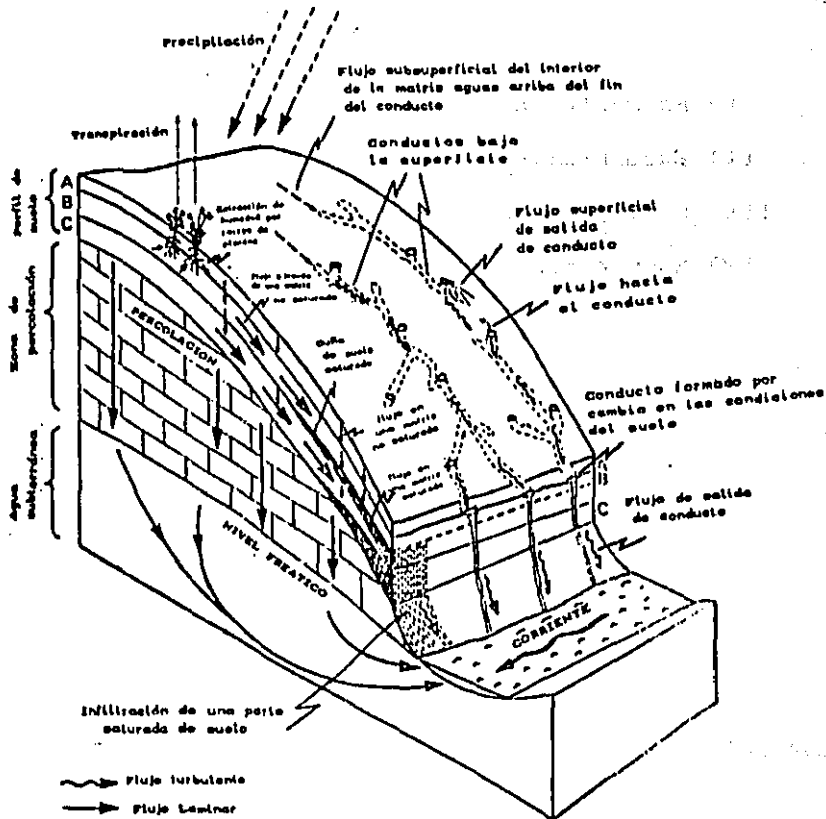


Figura 2.2. Componentes de la precipitación y escurrimiento (Kirkby, 1985; de Atkinson, 1978)

El conocimiento de la distribución tanto temporal como espacial del escurrimiento, es esencial en muchos aspectos de manejo del agua y en la planeación ambiental (Viessman, et al, 1977).

Las propiedades del escurrimiento con respecto al tiempo pueden ser mostradas en un hidrograma, el cual esta compuesto por cuatro elementos

- i) Escurrimiento directo o superficial.
- ii) Escurrimiento subsuperficial.
- iii) Precipitación sobre el cauce.
- iv) Escurrimiento base.

Para la mayoría de los trabajos prácticos el hidrograma se considera compuesto únicamente por dos elementos de los cuatro anteriores

- i) Escurrimiento directo.
- ii) Escurrimiento base.

incluyéndose el flujo subsuperficial y la precipitación sobre el cauce dentro del escurrimiento directo. Esto es mayormente válido en el caso de cuencas grandes donde la respuesta de la cuenca a la excitación de la lluvia es del orden de días.

La contribución superficial por efecto de la tormenta y la subterránea por efecto del acuífero hacia el cauce, son conocidos, respectivamente, como gasto directo y gasto base. El gasto base se define como el flujo que aporta el acuífero a la corriente. Su estimación es un problema de interés en la hidrología superficial y subterránea; en la primera por ser requerida en el análisis de

hidrogramas para la aplicación del concepto de hidrograma unitario y en la segunda por ser aplicable como condición de frontera en la simulación del funcionamiento de acuíferos (Pinder y Gray, 1977).

Dado que no existe una forma precisa para distinguir el escurrimiento base de un hidrograma, las formas de estimarlo son empíricas (sin base científica), y en gran medida regidas por la costumbre e intuición del analista.

El gasto base se representa de manera cualitativa como una curva suave, de respuesta lenta y de gastos menores que los observados en el registro histórico. Por lo tanto, es deseable englobar estos tres aspectos en su estimación. Un método alternativo de estimación del escurrimiento base debe, al menos conceptualmente, ser representado por una curva más suave comparada con el escurrimiento directo y sin cambios bruscos de pendiente. Por otra parte, se ha probado de manera experimental en campo, que la velocidad del agua aportada por el acuífero a la corriente es de orden mucho menor al del escurrimiento superficial, pudiendo en ocasiones tardar varios meses o años en que el acuífero responda a la excitación de una tormenta, de esta forma, se justifica un defasamiento de la respuesta del acuífero con respecto a la excitación de la tormenta. Finalmente, el método de estimación del gasto base debe proporcionar valores menores o iguales al gasto observado.

2.1. ELEMENTOS QUE CONFORMAN EL HIDROGRAMA DE ESCURRIMIENTO EN EL CAUCE

Considerando una corriente perenne, se tienen cuatro condiciones generales que causan la modificación del hidrograma de flujo base (Viessman, et al. 1977) establecido antes de la tormenta, las cuales son representadas por las siguientes desigualdades

condición 1	$i < f$	condición 3	$i > f$
	$F < S_0$		$F < S_0$
condición 2	$i < f$	condición 4	$i > f$
	$F > S_0$		$F > S_0$

donde:

i , es la intensidad de la lluvia [LT^{-1}]

f , velocidad de infiltración [LT^{-1}]

F , capacidad de infiltración del suelo [L]

S_0 , deficiencia de humedad del suelo [L]

La condición 1 produce un hidrograma similar al mostrado en la figura 2.3a. Se tiene un pequeño aumento en el gasto directo provocado por la precipitación que cae directamente sobre el cauce, sin embargo, no ocurre escurrimiento sobre el terreno

porque $i < f$. Como además la capacidad de campo (FC) no es alcanzada, no hay escurrimiento subsuperficial y las condiciones del acuífero no se modifican por efecto de la tormenta, por lo que no aumenta el flujo base. El efecto de la tormenta se reduce únicamente a satisfacer parte de la deficiencia de humedad del suelo. La capacidad de campo es la cantidad de agua guardada en el suelo después que el exceso de agua gravitacional ha sido drenada.

La condición 2 no produce escurrimiento directo, a pesar de que las componentes de flujo subsuperficial y base son sumadas a la precipitación sobre el cauce. El hidrograma podría ser modificado, ya que la capacidad de campo en la cuenca es excedida. La figura 2.3b ilustra esta condición. Obsérvese que la desviación del hidrograma de escurrimiento total del hidrograma base original es muy pequeña bajo estas condiciones.

La figura 2.3c ilustra el caso donde el escurrimiento directo inicia dado que $i > f$. En esta situación, el flujo subsuperficial y la contribución del acuífero son cero mientras la deficiencia de humedad del suelo exista, aunque sea para un nivel reducido. La contribución de precipitación sobre el cauce constituye también en este caso una pequeña componente del escurrimiento en el cauce.

Finalmente la condición 4 es mostrada en la figura 2.3d. En ésta se ilustra el hidrograma de escurrimiento del cauce donde la intensidad de la lluvia excede la velocidad de infiltración y la capacidad de campo de la cuenca es alcanzada. Este caso podría ser típico de tormentas largas.

ESCURRIMIENTO EN EL CAUCE

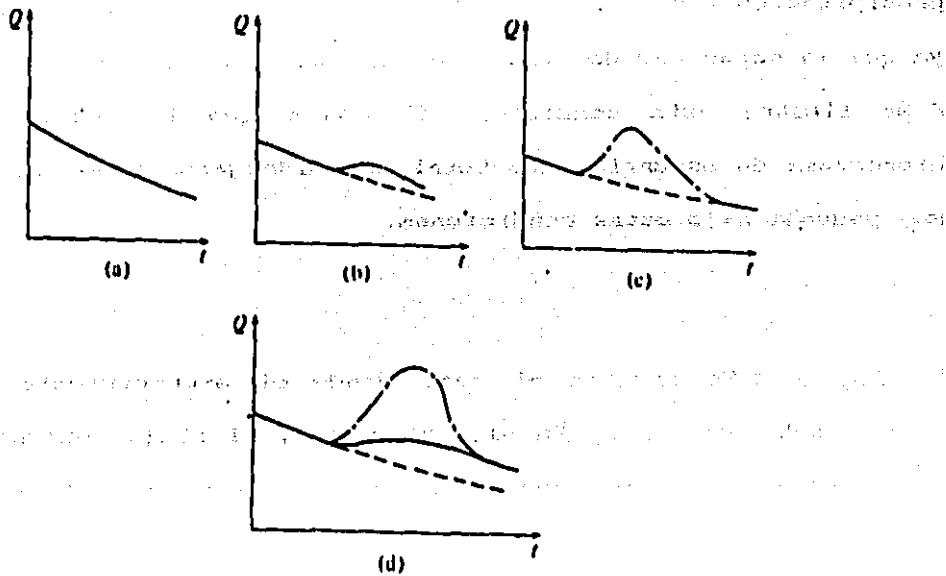


Figura 2.3. Efectos de la tormenta en la forma del hidrograma de escurrimiento en el cauce. (Vlössman, et al, 1977).

La forma del hidrograma de escurrimiento en el cauce puede verse modificada también por la manera como se presenta la precipitación en la cuenca; esto es, por variaciones en la intensidad de la lluvia cuando se presenta la tormenta, por el lugar donde se presente la precipitación y por la configuración de la cuenca. En las figuras 2.4a-d se ilustra cómo la forma del hidrograma de escurrimiento en el cauce puede ser modificado por las variaciones en el área donde se presenta la lluvia y por la configuración de la cuenca.

En la figura 2.4a se muestra el efecto típico que tendrá una precipitación que se presenta en la parte superior de una determinada cuenca; el caso contrario es mostrado en la figura 2.4b.

La figura 2.4c muestra el hidrograma típico de una cuenca de rápida respuesta; esto es, una red de drenaje en la cuenca que permite el vaciado del agua en exceso en poco tiempo, el caso contrario se ilustra en la figura 2.4d. Estos son los efectos relacionados con la geometría de la cuenca.

ESCURRIMIENTO EN EL CAUCE

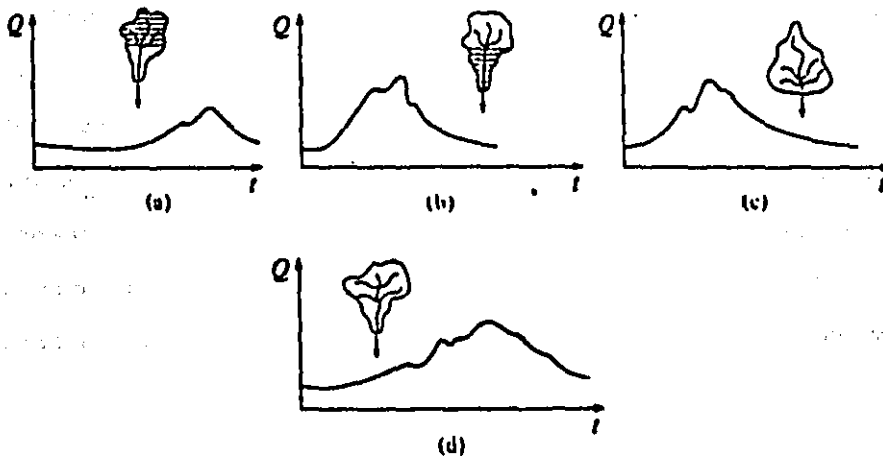


Figura 2.4. Efectos de la tormenta y características de la cuenca en la forma del hidrograma de escurrimiento en el cauce. (Viessman, et al, 1977)

Como se señaló anteriormente, el flujo subsuperficial y la precipitación sobre el cauce son considerados, para aplicaciones prácticas, como parte del escurrimiento directo, puesto que son de pequeña magnitud. El efecto de la precipitación sobre el cauce principia al iniciarse la lluvia y termina junto con la tormenta. El flujo subsuperficial inicia una vez alcanzada la deficiencia de humedad del suelo y termina aproximadamente con el escurrimiento directo. El hidrograma base puede o no incrementarse durante el periodo de la tormenta. Los aspectos anteriores son ilustrados en la figura 2.8. El cambio en la forma del flujo base después de una tormenta particular es normalmente observado en periodos de días para cuencas pequeñas y en meses o años para cuencas grandes.

COMPONENTES DEL HIDROGRAMA

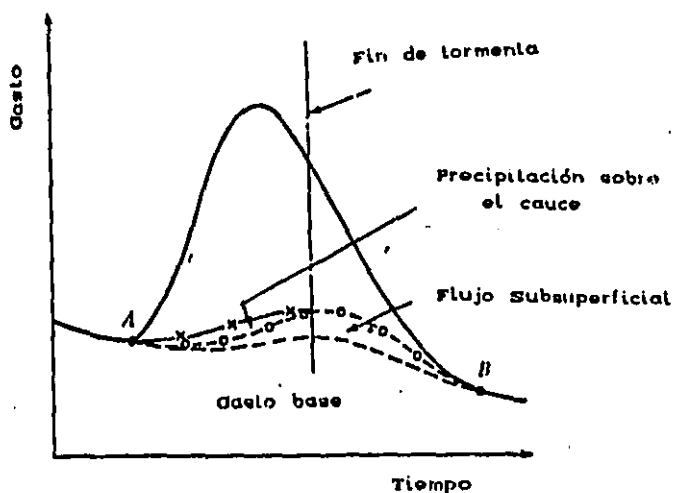


Figura 2.5. Componentes del hidrograma de escurrimiento en el cauce (Viessman, et al, 1977).

2.2 MANERAS TRADICIONALES DE ESTIMACION DEL GASTO BASE

El gasto base se ha estimado tradicionalmente de las tres siguientes formas.

Método 1. Prolongar la recesión anterior a la tormenta hasta un punto bajo el pico del hidrograma, e interceptar desde ahí, con una línea recta, un punto sobre la curva de recesión del hidrograma localizado N días después del pico. Este razonamiento se sustenta en que, a medida que aumenta el escurrimiento directo (fig. 2.6), se produce un flujo del cauce hacia las orillas, debiendo disminuir así el gasto base.

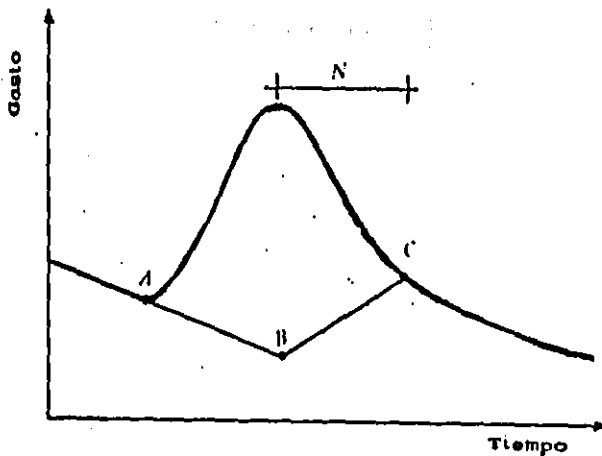


Figura 2.6. Estimación de gasto base con el método 1.

La regla empírica para determinar el punto donde termina el escurrimiento directo (punto C, fig. 2.6) es

$$N = Co A^{0.2} \quad (2.1)$$

donde: N = número de días
 A = área de la cuenca en Km^2
 Co = constante

Sin embargo, se recomienda (Linsley, et al, 1977) estimar el valor de N bajo la observación de un cierto número de hidrogramas, sin olvidar que el tiempo base total no debe ser largo en exceso y el aporte de agua subterránea no debe ser muy grande.

Método 2. Trazar una línea recta desde el inicio del escurrimiento directo (fig. 2.7) hasta un punto ubicado sobre la curva de recesión del hidrograma, calculado con el mismo criterio de método 1, o con base en la experiencia.

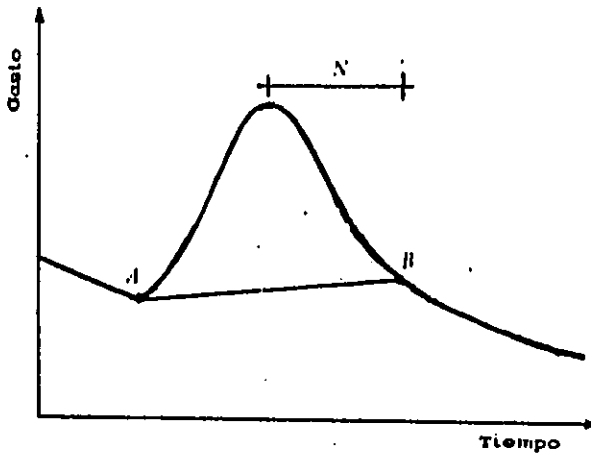


Figura 2.7. Estimación de gasto base con el método 2.

Método 3. Trazar una curva que responda de manera similar a la excitación de la lluvia sobre el escurrimiento directo, pero en forma menos brusca, (fig. 2.8). Esta curva se construye proyectando hacia atrás la línea de recesión del agua subterránea hasta un punto debajo del punto de inflexión de la curva de recesión del hidrograma. Posteriormente, se traza un segmento arbitrario ascendente desde el punto de ascenso del hidrograma hasta conectarse con la recesión antes proyectada, la cual está regida por la experiencia de analista. Este tipo de separación

puede representar algunas ventajas cuando el aporte de agua subterránea es relativamente grande y llega a la corriente rápidamente (Linsley, et al, 1977) como en terrenos con calizas.

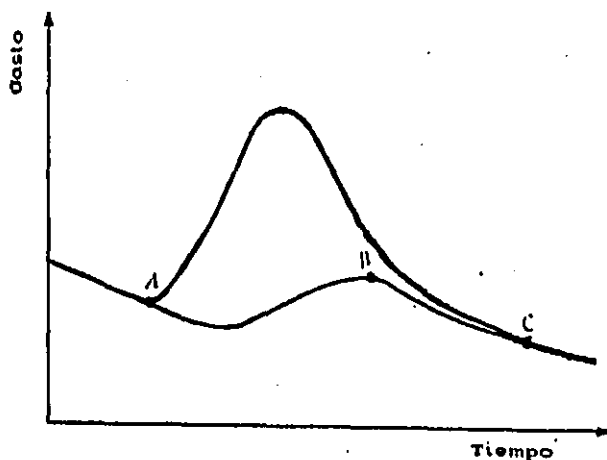


Figura 2.8. Estimación del gasto base con el método 3.

Los métodos 1 y 2 son igualmente arbitrarios y su respuesta no corresponde a lo que de manera conceptual se define como gasto base. El método 3 parte del comportamiento cualitativo del fenómeno pero la respuesta proporcionada por el analista no necesariamente es conceptual dado que no se tiene un procedimiento estandar para el trazado de la curva que representa el gasto base. En el método 1 por ejemplo, el prolongar la recesión no justifica mejores resultados de los métodos 2 o 3 dado que no pueden ser comparados objetivamente. Finalmente, los procedimientos antes descritos son de aplicación directa para el análisis de

hidrogramas de tormentas aisladas, complicándose la metodología para cuando se tienen tormentas traslapadas, conocidos también como hidrogramas complejos.

...the ... of
... ..
... ..

3. METODO ALTERNATIVO DE ESTIMACION DEL GASTO BASE

Como se discutió en el capítulo 2, la estimación del gasto base en las formas tradicionales no responde conceptualmente a lo que se define como tal, lo cual motiva la búsqueda de un método alternativo que satisfaga en forma cualitativa el comportamiento del fenómeno y que además sea aplicable independientemente de la forma del hidrograma en cuestión. La formulación de un método conceptual para la estimación del gasto base requiere que considere la física del problema en forma simplificada, lo cual lo diferencia de los métodos estrictamente empíricos.

Las características deseables de un método conceptual para la estimación del gasto base son:

- i) Que sea una curva suave
- ii) Que su respuesta sea lenta
- iii) Que coincida su respuesta con los valores observados en el estiaje.

Una característica adicional, es que el método dependa exclusivamente de información hidrométrica y sea de uso general a partir de ella.

3.1. HIPOTESIS DE UN METODO ALTERNATIVO DE ESTIMACION DEL GASTO BASE

a. Existe un sistema lineal de parámetros constantes (SLPC) mediante el cual puede obtenerse una estimación del gasto base partiendo exclusivamente de datos hidrométricos.

b. Si se satisface la condición de que el gasto base estimado en estiaje por medio del SLPC es cercano al observado en dicho rango, entonces lo que se obtiene para época de avenidas es gasto base.

3.2. SISTEMA LINEAL DE PARAMETROS CONSTANTES (SLPC) PARA LA ESTIMACION DEL GASTO BASE

Un sistema ideal es aquel que tiene parámetros constantes y es lineal entre dos puntos de interés claramente definidos llamados el punto de entrada y el punto de salida o respuesta. Se dice que un sistema es de parámetros constantes, si todas las propiedades fundamentales del sistema son invariantes respecto al tiempo y que es lineal si la respuesta característica es aditiva y homogénea.

El término aditivo significa que la salida a una suma de entradas es igual a la suma de las salidas producidas por cada entrada individualmente. El término homogéneo significa que la salida producida por una constante multiplicada por una entrada es igual

a la constante multiplicada por la salida producida por la entrada únicamente.

Si definimos x como una entrada y $f(x)$ la salida o respuesta de un sistema, la linealidad puede ser expresada en términos matemáticos por

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) , \quad \text{propiedad aditiva} \quad (3.1)$$

$$f(cx) = c f(x) \quad \text{propiedad homogénea} \quad (3.2)$$

donde: x_1, x_2 , son entradas arbitrarias al sistema
 c , es una constante

Un modelo para la estimación del gasto base representado por un SLPC y que además responda conceptualmente al comportamiento del fenómeno puede ser llamado "Modelo de Caja Negra Conceptualmente Basado".

3.3. CARACTERISTICAS DINAMICAS DE UN SLPC PARA LA ESTIMACION DEL GASTO BASE

Las características dinámicas de un SLPC para la estimación del gasto base en el dominio del tiempo pueden describirse por la función de peso $h(\tau)$, la cual es definida como la salida del sistema para cualquier tiempo para un impulso unitario de entrada

aplicado un tiempo τ anterior. La utilidad de la función de peso como una descripción del sistema es debido a los siguientes factores. Para un gasto de entrada arbitrario $q(t)$, la salida del sistema $q_b(t)$ está dada por la integral de convolución

$$q_b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) q(t-\tau) d\tau \quad (3.3)$$

donde: $q(t)$, gasto observado

$q_b(t)$, gasto base

$h(\tau)$, función de peso

t , tiempo

τ , variable muda de integración

Esto es, el valor de la salida $q_b(t)$ está dado como una suma (infinita) lineal pesada sobre los datos anteriores a la entrada $q(t)$.

Para que un SLPC sea físicamente realizable, el sistema debe responder únicamente a entradas anteriores (Hsu, 1977). Esto es

$$h(\tau) = 0 \quad \text{para} \quad \tau < 0 \quad (3.4)$$

con lo cual la ecuación (3.3) se transforma en

$$q_b(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) q(t-\tau) d\tau \quad (3.5)$$

Por otra parte, interesa la realización del evento para un intervalo de tiempo prefijado, esto es

$$q(t-\tau) = 0 \quad , \quad \text{para } \tau > t \quad (3.6)$$

lo cual aplicado a la ecuación (3.5) produce

$$q_b(t) = \int_0^t h(\tau) q(t-\tau) d\tau \quad (3.7)$$

La expresión (3.7) es utilizada para la representación de varios fenómenos en el dominio del tiempo, por ejemplo el caso del hidrograma unitario donde $h(\tau)$ es también una función de peso que realiza una función de filtrado (Dooge, 1973).

El sistema lineal de parámetros constantes (SLPC) debe ser estable en la frontera, por lo que debe cumplirse que la función de peso $h(\tau)$ sea absolutamente integrable o convergente (Bendat y Piersol, 1971), esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau < \infty \quad (3.8)$$

3.4. FUNCION DE TRANSFERENCIA DE UN SLPC

Un sistema lineal de parámetros constantes puede caracterizarse por una función de transferencia $H(p)$, la cual se define como la transformada de Laplace de $h(\tau)$. Esto es,

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (3.9)$$

donde: $p = a + ib$, en el plano complejo, dado que p es compleja, entonces $H(p)$ será compleja, $i = \sqrt{-1}$.

Para que el SLPC sea estable, considerando que es físicamente realizable, $H(p)$ no debe tener polos en el lado derecho del plano complejo p . Dicho de otra manera, la función debe de ser analítica en la región antes señalada. El SLPC tiene la propiedad de que preserva la frecuencia, modificando únicamente la amplitud y la fase (Bendat y Piersol, 1971).

3.5. FUNCION DE RESPUESTA EN LA FRECUENCIA

Si un SLPC es físicamente realizable y es estable, entonces las características dinámicas del sistema pueden describirse por una "función de respuesta en la frecuencia" $H(\omega)$, la cual se define por la transformada de Fourier de $h(\tau)$ y se expresa por

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-i2\pi\omega\tau} d\tau \quad (3.10)$$

donde: $e^{-i2\pi\omega\tau} = \cos(2\pi\omega\tau) - i \sin(2\pi\omega\tau)$

el lado izquierdo de la ecuación es conocido como la representación polar y el lado derecho la cartesiana en el campo complejo.

La ecuación (3.10) es un caso particular de la ecuación (3.9) para $p = a + ib$, $a = 0$ y $b = 2\pi\omega$. El cambio en el límite inferior de la integral (3.10) obedece a que $h(\tau) = 0$ para $\tau < 0$.

Para un sistema estable, físicamente realizable, la función de respuesta en la frecuencia puede sustituir a la función de transferencia sin ninguna alteración de la información.

Una relación importante de la función de respuesta en la frecuencia de un sistema lineal de parámetros constantes (SLPC) para el gasto base se obtiene de tomar la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (3.3) (apendice A.7); la cual, para nuestro problema, es equivalente a la ecuación (3.7) bajo las consideraciones (3.4) y (3.8), de donde se obtiene

$$q_b(\omega) = H(\omega) Q(\omega) \quad (3.11)$$

donde

$$Q(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\{q(t)\} = \int_0^t q(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.12)$$

con $\omega = p$ de la ecuación (3.10).

La ecuación (3.7) comparada con la ecuación (3.11), muestra la ventaja de trabajar en el dominio de las frecuencias, puesto que es más fácil multiplicar en la frecuencia que obtener la convolución en el tiempo.

La función de respuesta en la frecuencia es en general una función de variable compleja y debe ser tratada de manera conveniente en términos de magnitud y ángulo de fase asociado. La cual expresada en forma polar es

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-i\phi(\omega)} \quad (3.13)$$

donde $H(\omega)$ es llamado el factor de ganancia y $\phi(\omega)$ el factor de fase del sistema.

Si se satisface que el SLPC es físicamente realizable, la función de respuesta en la frecuencia, el factor de ganancia y el factor de fase de dicho sistema satisface las siguientes propiedades de simetría

$$HC(-\omega) = H^M(\omega) \quad (3.14)$$

$$|HC(-\omega)| = |HC(\omega)| \quad (3.15)$$

$$\phi(-\omega) = -\phi(\omega) \quad (3.16)$$

donde: H^M , representa la función conjugada de H.

Además, si un sistema descrito por $H_1(\omega)$ es seguido por un segundo descrito por $H_2(\omega)$, y no hay carga o realimentación entre los dos sistemas, entonces el sistema total puede ser descrito por $H(\omega)$ donde

$$H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) \quad (3.17)$$

$$|H(\omega)| = |H_1(\omega)| |H_2(\omega)| \quad (3.18)$$

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) \quad (3.19)$$

En un sistema como el anterior llamado en cascada, donde no hay carga o realimentación los factores de ganancia se multiplican y los factores de fase se suman.

Es importante observar que la función de respuesta en la frecuencia de un SLPC es una función de la frecuencia únicamente y no del tiempo o sistema de excitación.

Para el problema de estimar el gasto base partiendo de un registro histórico de datos hidrométricos exclusivamente, la función de respuesta en la frecuencia $H(\omega)$ realizará un filtrado en dicho dominio, por lo que en adelante se denotará simplemente por el filtro $H(\omega)$.

Page 10
Date: 10/10/10
Page 11
Date: 10/10/10
Page 12
Date: 10/10/10

10/10/10
10/10/10
10/10/10

10/10/10
10/10/10
10/10/10

10/10/10
10/10/10

10/10/10
10/10/10

10/10/10
10/10/10
10/10/10
10/10/10

4. IDENTIFICACION DE UNA FUNCION DE FILTRADO PARA LA ESTIMACION DEL GASTO BASE

El tratamiento de diversos problemas en el dominio de la frecuencia es una práctica usual en diversos campos de la ingeniería (eléctrica, hidráulica, etc.), principalmente para el análisis de señales digitales (Tostado Bojorquez, 1988). La razón de utilizar transformación de Fourier para el problema del gasto base obedece fundamentalmente a la facilidad de identificar, para este fenómeno, una función de filtrado en este dominio a diferencia del dominio del tiempo. El encontrar una función ponderadora (filtro) de los datos originales que responda conceptualmente a la definición de gasto base, permitirá la obtención de éste de una manera sistemática para cualquier hidrograma que defina claramente periodos de avenida y estiaje. El filtro debe lograr que la respuesta al dominio del tiempo sea una curva suave, de respuesta lenta y apegada de manera cercana en época de estiaje.

En la presente sección se hace uso de un algoritmo denominado transformada rápida de Fourier (FFT) para el cálculo de la transformada y antitransformada de Fourier (apéndice A.11), donde por restricción del método (Cooley y Tukey, 1965), el número total de datos debe ser igual a 2^N , donde N es una potencia entera. En esta sección se utiliza un hidrograma compuesto de $2^{10}=1024$ datos.

(figura 4.1). Donde el año de interés es el del centro y los años anterior y posterior se introducen para cumplir con el requerimiento señalado.

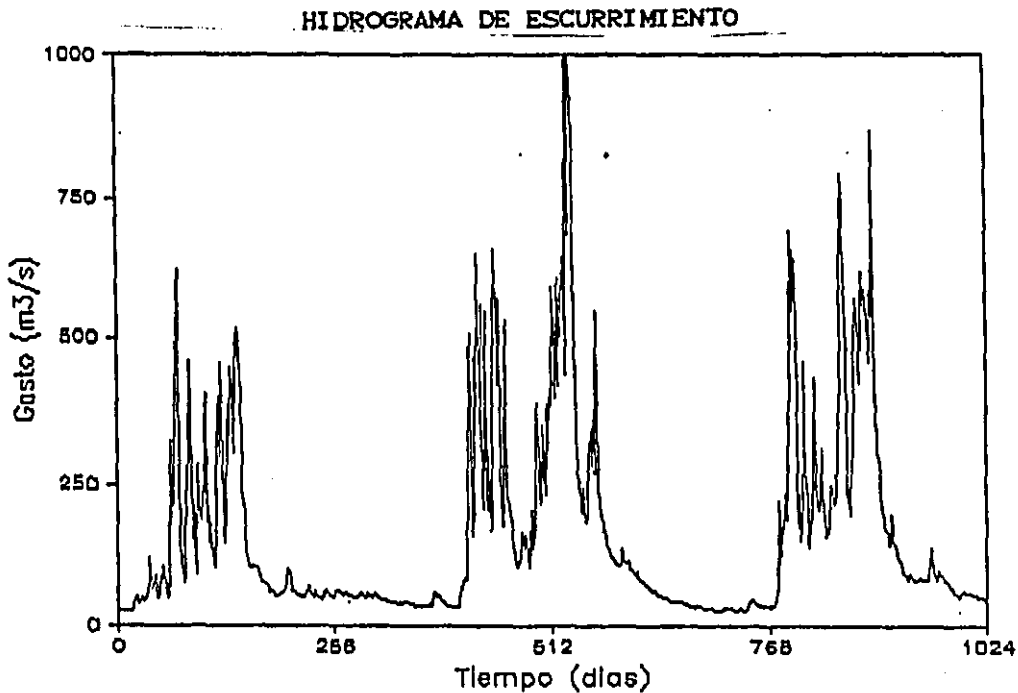


Figura 4.1. Información hidrométrica, estación Mezcala, Río Balsas, del 29 de abril de 1940 al 7 de feb. de 1942.

Las hipótesis expresadas en el capítulo 3, se refieren estrictamente a los periodos de estiaje, presentados antes de las épocas de avenidas del año de interés hasta el estiaje posterior del mismo.

Con la finalidad de fundamentar la estructura de la función ponderadora en la frecuencia (función de peso o filtro), en las secciones 4.1, 4.2 y 4.3 se ejemplifica la manera de introducir los efectos deseados conceptualmente.

4.1. FRECUENCIA DE CORTE

La introducción de una frecuencia de corte en la función ponderadora (filtro) en el dominio de la frecuencia, se basa en que el gasto base, conceptualmente definido, es una función que responde a una frecuencia menor que el gasto observado. Por lo que es deseable identificar una curva que oscile de manera suave entre los periodos de avenida y estiaje.

Al introducir una frecuencia de corte en el dominio de la frecuencia, se afecta la función de respuesta al dominio del tiempo, esto es, se ignora la información posterior o anterior a la frecuencia de corte, según sea un filtro pasabajas o pasaaltas (apéndice A.9). En el problema particular del gasto base, se ha observado (figura 4.2) que gran parte de la variabilidad del fenómeno se tiene para frecuencias bajas, lo cual justifica el uso de un filtro pasabajas.

TRANSFORMADA DE FOURIER

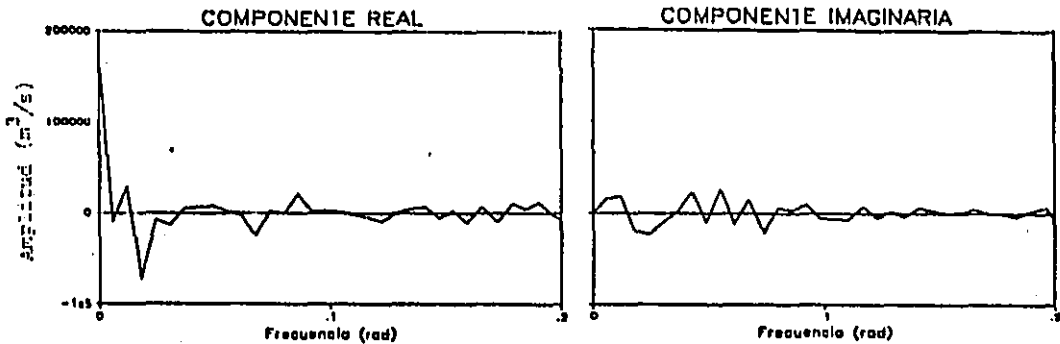


Figura 4.2. Variabilidad de la transformada de Fourier del registro histórico de la figura 4.1 (rango: 0-0.2).

La figura 4.2 es la transformada de Fourier del gasto total mostrado en la figura 4.1. Adicionalmente, se observa que la parte real del gasto total parte de un valor positivo en el origen y de cero en la parte imaginaria. Lo anterior es explicable por ser el gasto total una variable de tipo real y porque su transformada de Fourier en el origen solo tiene parte real (apéndice A.8).

El proceso de transformación de la información en el dominio de la frecuencia se representa por la expresión 3.11 y se ilustra en el diagrama mostrado en la figura 4.3.

DIAGRAMA DE ENTRADA SALIDA



Figura 4.3. Ilustración de la realización de la expresión 3.11

Si al total de ordenadas de la transformada de Fourier se le aplica un filtro unitario, la respuesta al dominio del tiempo (salida) es idéntica a la función de entrada. Al introducir una frecuencia de corte, el filtro transmite solo una banda limitada de frecuencias y por lo tanto, la información de entrada aplicada es distorsionada por el sistema. Este tipo de filtros son denominados como ideales.

Para la identificación de una frecuencia de corte de la expresión (3.11) se tiene que

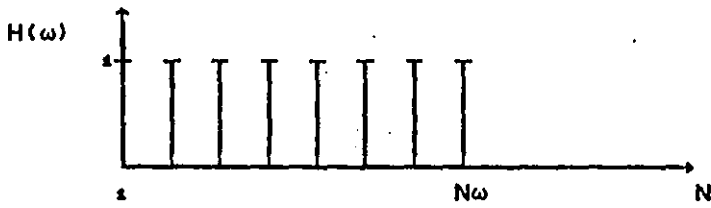
$$q_b(\omega) = HC(\omega) Q(\omega)$$

en la que se consideró un filtro como el siguiente

$$HC(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.1)$$

donde ω_c = frecuencia de corte

El parámetro ω es utilizado aquí para el caso de la transformada de Fourier como función continua. Sin embargo, el gasto total es una función discretizada en intervalos de tiempo de un día, por lo que en la representación del filtro en forma esquemática se define un parámetro discreto denominado $N\omega$. La figura que ilustra al filtro 4.1 es



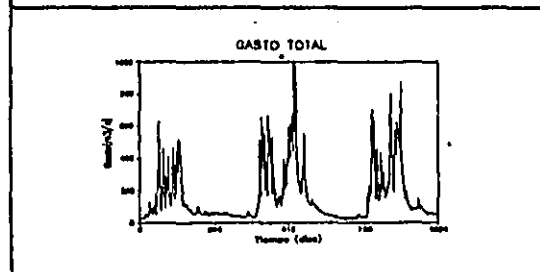
donde se consideró $N = N(\omega)$ y $N\omega = N(\omega_c)$ y $N\omega$ se obtiene de

$$N\omega = \begin{cases} 1 & , \text{ para } \omega_c = 0 \\ \text{INT} \left(\frac{\omega_c (N-1)}{\pi} \right) + 2 & , \text{ otro caso} \end{cases} \quad (4.2)$$

la función $\text{INT}(\cdot)$ es la parte entera del argumento y N es equivalente al total de ordenadas de la transformada rápida de Fourier (1024).

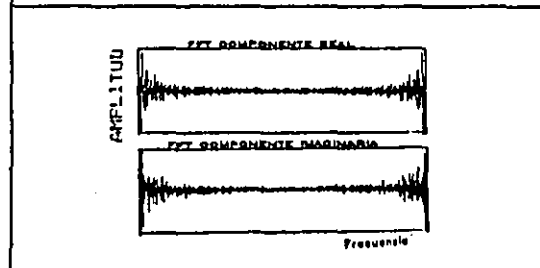
La identificación de una frecuencia de corte que oscile en forma aproximada a los periodos de avenida y estiaje, puede ser obtenida variando la frecuencia de corte ω_c , la cual está relacionada con un número ($N\omega$) de ordenadas del caso discreto. Para hacer más explícito el procedimiento llevado a cabo, se hace una representación esquemática del proceso.

REPRESENTACION ESQUEMATICA DEL PROCESO



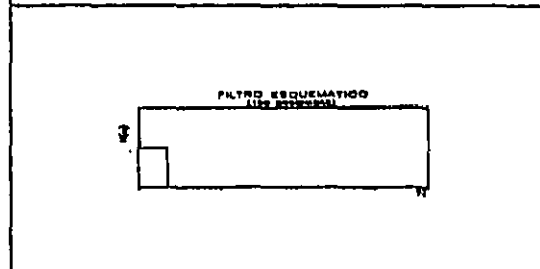
FUNCION DE ENTRADA. Serie histórica discreta con 1024 días.

Dominio del tiempo.



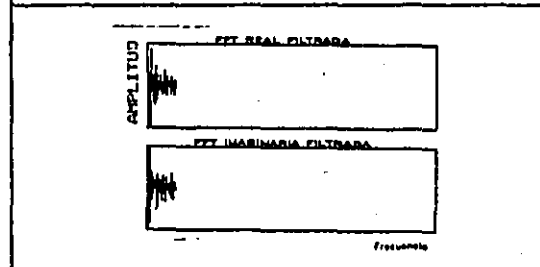
TRANSFORMADA DE FOURIER DEL GASTO TOTAL. Función con 1024 ordenadas en el rango $[0, 2\pi)$.

Dominio de la frecuencia.



FUNCION DE FILTRADO. Filtro ideal para la transformada de Fourier

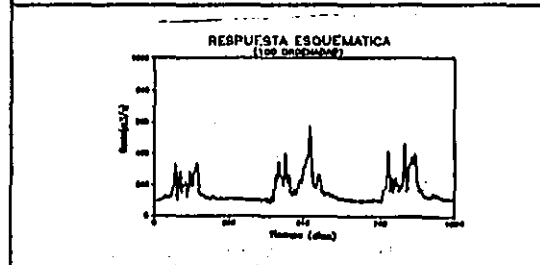
$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & 1 \leq N \leq 100 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$



TRANSFORMADA DE FOURIER FILTRADA.

Respuesta al filtro ideal $H(\omega)$.

Dominio de la frecuencia.



FUNCION DE SALIDA. Respuesta al dominio del tiempo (antitransformada de Fourier) de la transformada de Fourier filtrada.

A continuación se muestran las respuestas para distintas frecuencias de corte (ω_c) en donde se siguió la secuencia de la representación esquemática para su obtención. Los filtros utilizados son ilustrados en la figura correspondiente, los cuales tienen un peso $H(\omega)=1$. Un caso singular es el filtro de una ordenada en el origen con peso $H(\omega) = 1$, donde la respuesta de la transformada de Fourier filtrada al dominio del tiempo es la media del gasto total.

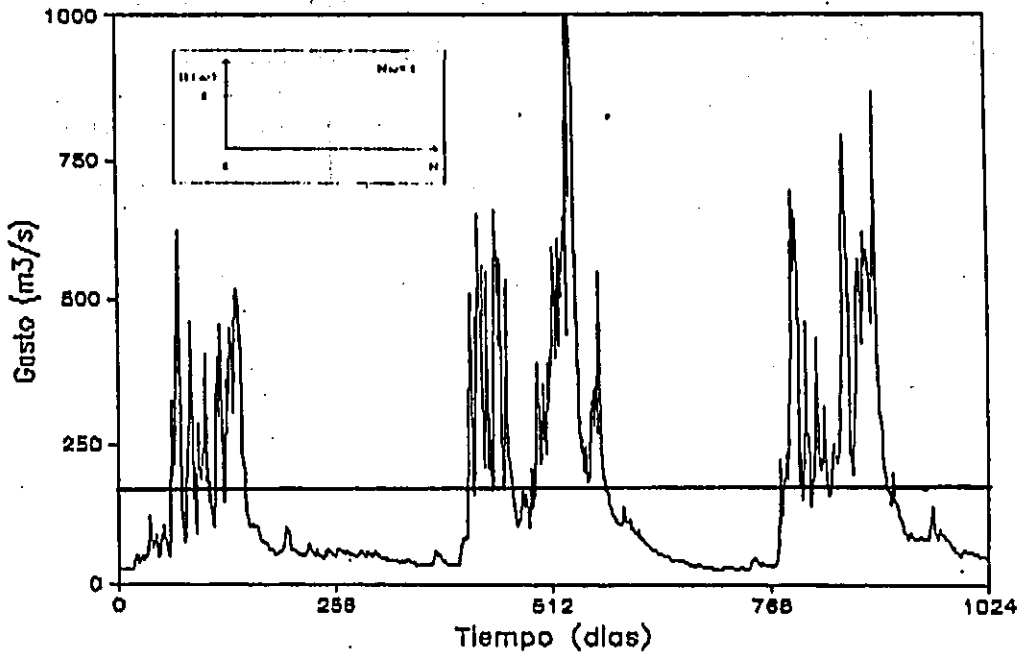


Figura 4.4. Respuesta de un filtro pasabajas para una frecuencia de corte de $\omega_c = 0$ (1 ordenada).

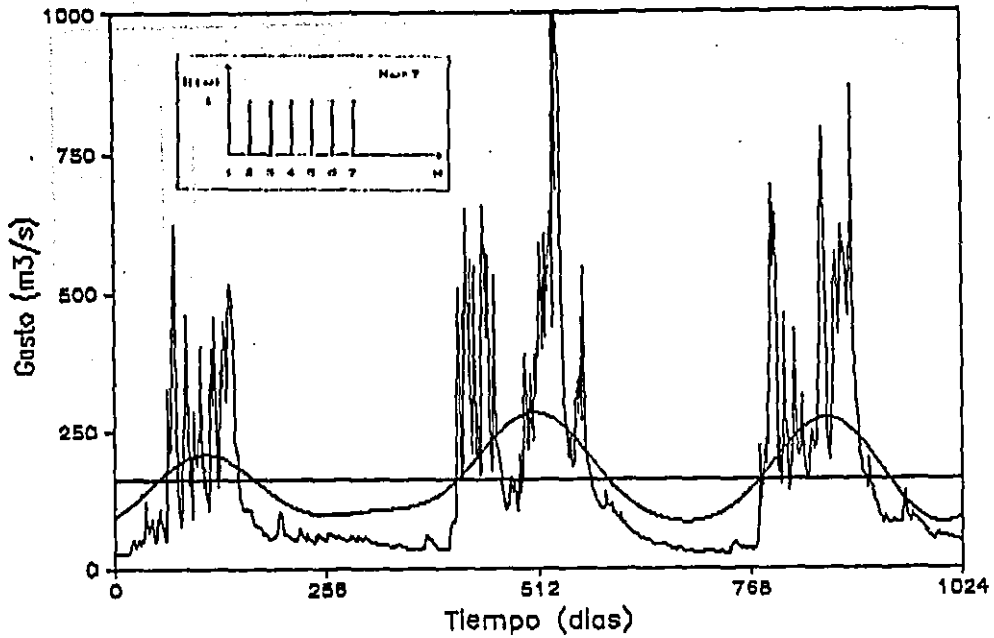


Figura 4.5. Respuesta de un filtro pasabajas para una frecuencia de corte aproximada de un año (7 ordenadas).

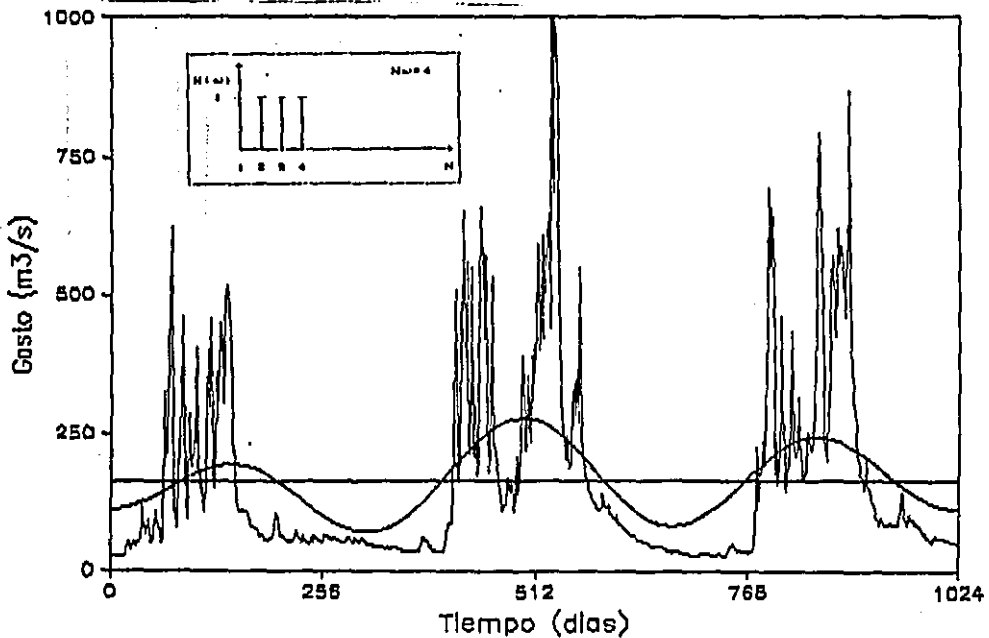


Figura 4.6. Respuesta de un filtro pasabajas para una frecuencia de corte aproximada de dos años (4 ordenadas).

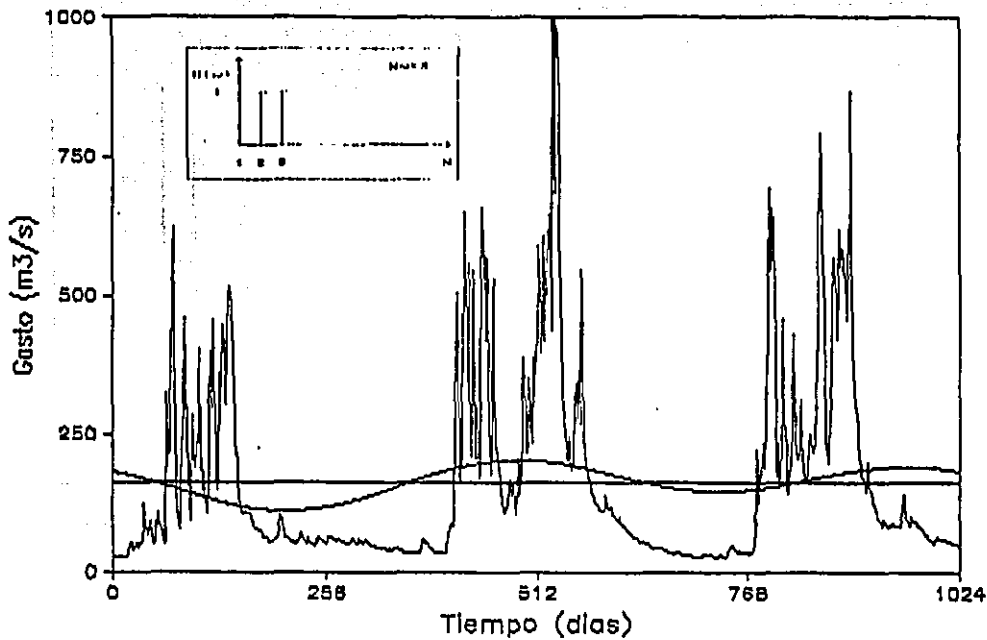


Figura 4.7. Respuesta de un filtro pasabajas para una frecuencia de corte aproximada de tres años (3 ordenadas).

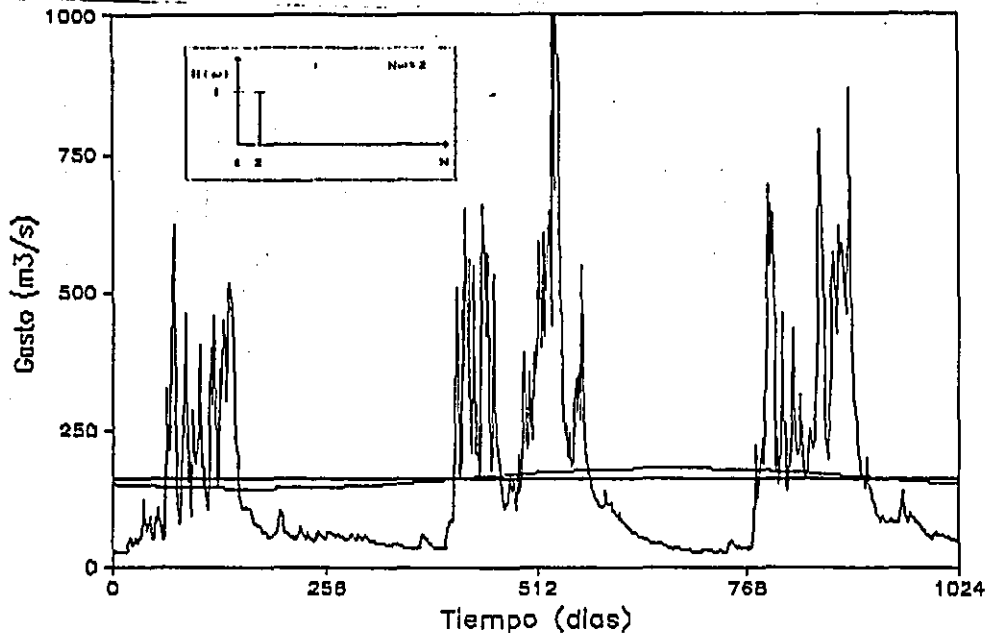


Figura 4.8. Respuesta de un filtro pasabajas para una frecuencia de corte aproximada de cuatro años (2 ordenadas).

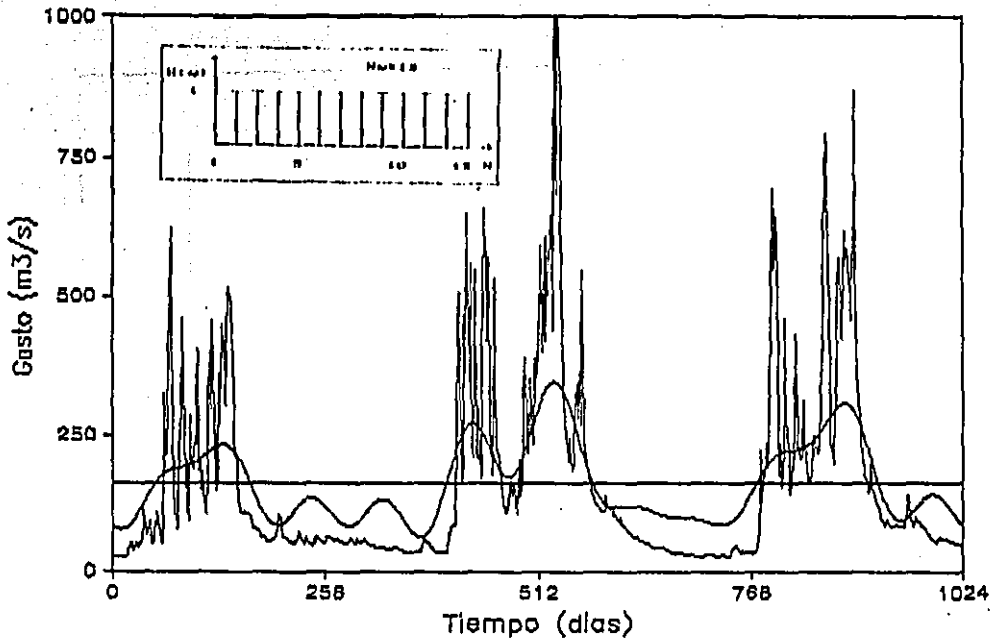


Figura 4.9. Respuesta de un filtro pasabajas para una frecuencia de corte aproximada de seis meses (13 ordenadas).

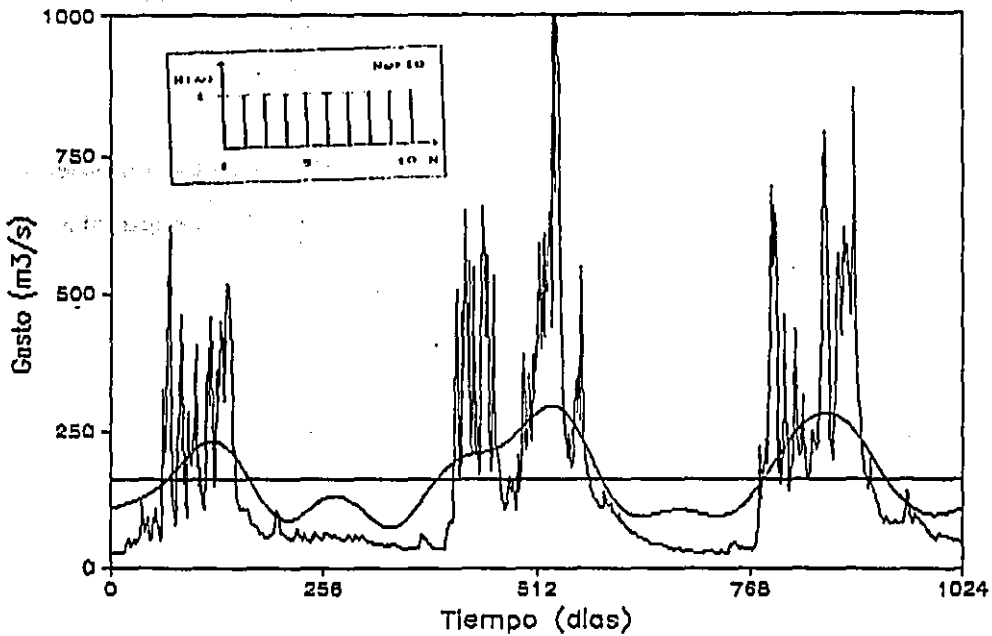


Figura 4.10. Respuesta de un filtro pasabajas para una frecuencia de corte aproximada de ocho meses (10 ordenadas).

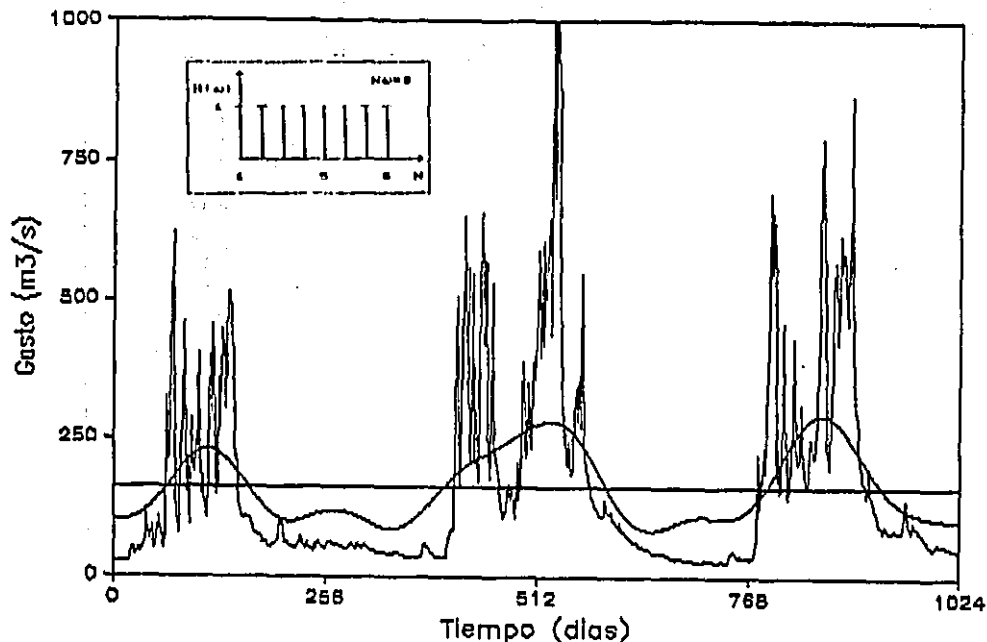


Figura 4.11. Respuesta de un filtro pasabajas para una frecuencia de corte aproximada de diez meses (8 ordenadas).

En la figura 4.5 se observa como la respuesta oscila suavemente entre avenida y estiaje, ubicándose los picos de la respuesta muy cerca del centro de la época de avenidas.

En la figura 4.8 se aprecia como la respuesta sufre un defasamiento del centro del primer y tercer pico y su aproximación en el estiaje es menor.

Las figuras 4.7 y 4.8 responden con una frecuencia distinta a la del "gasto base" en este caso particular y su amplitud se reduce considerablemente.

En las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 se observa que la respuesta al dominio del tiempo de la función filtrada en el dominio de la frecuencia presenta varios picos, lo cual no corresponde al caso particular de "gasto base" de la figura 4.1. Que pretende ser identificada por el modelo.

Del análisis anterior se concluye que la frecuencia de corte asociada de manera más cercana al gasto base de la figura 4.1 es la de aproximadamente un año (7 ordenadas), puesto que presenta una oscilación claramente definida entre avenida y estiaje.

Adicionalmente se observa:

i) existe solo una frecuencia de corte para cada hidrograma particular, la cual apega la respuesta al dominio del tiempo en forma aproximada a los periodos de avenida y estiaje.

ii) Para un filtro $H(\omega) = 1$ para cualquier frecuencia de corte mayor que cero, la respuesta oscila sobre la media del gasto observado.

iii) La respuesta subestima en avenidas y sobreestima en el estiaje por efecto de la reducción de amplitud..

Los puntos ii) y iii) están relacionados por el hecho de que la transformada de Fourier de la ordenada en el origen al dominio del

tiempo es la media del gasto total y la transformada de cualquier ordenada fuera del origen, también al dominio del tiempo, es equivalente a una armónica de periodo $2\pi/\omega_c$, por lo que la respuesta debe oscilar respecto a la media. por lo tanto, como solo se considera un segmento de la transformada del gasto total en la función de filtrado, la respuesta es de menor amplitud a la del gasto total.

4.2. PARAMETRO DE ATENUACION

De la figura 4.4 de la sección anterior se observa que es necesario introducir un parámetro atenuador que reduzca la media de la respuesta al dominio del tiempo, buscando que la curva se acerque a los periodos de estiaje a considerar en el año de interés. Lo anterior se fundamenta además en la hipótesis 2 del método, la cual señala que el gasto base estimado debe ser cercano al observado en periodo de estiaje.

Para identificar la forma de la función atenuadora es necesario observar el efecto que se tiene para diferentes configuraciones del filtro $H(\omega)$.

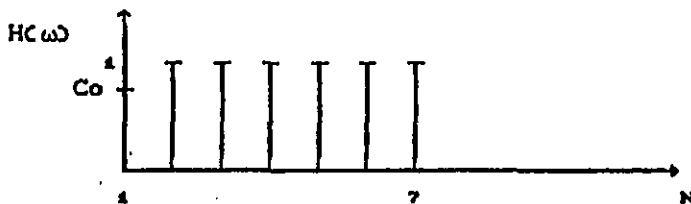
a) FILTRO ATENUADOR DE LA MEDIA SIN REDUCCION DE AMPLITUD

Para lograr una reducción en la media de la respuesta del sistema, la cual se refleje en un descenso vertical, exclusivamente, de una

curva como la mostrada en la figura 4.5 basta multiplicar por un valor menor que uno a la ordenada en el origen de la transformada de Fourier, esto es

$$H(\omega) = \begin{cases} C_0 & , \omega = 0 & , C_0 < 1 \\ 1 & , 0 < \omega < \omega_c \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.3)$$

La forma del filtro para el caso de ω_c aproximadamente igual a un año se ilustra en la siguiente figura



Se observa que la ordenada en cero es la única que se afecta. Por ser un caso discreto se presentan las ordenadas del filtro por barras. Los resultados de este filtro para valores de $C_0 = 0.8$, 0.6 y 0.4 son presentados de manera compacta en la figura 4.12 y son comparadas con $C = 1$ (para todas las ordenadas). observandose que la función de respuesta al dominio del tiempo sufre un cambio que se expresa por un descenso Δq idéntico para cada ordenada. Adicionalmente, se incluye la media del gasto total representado por una línea recta.

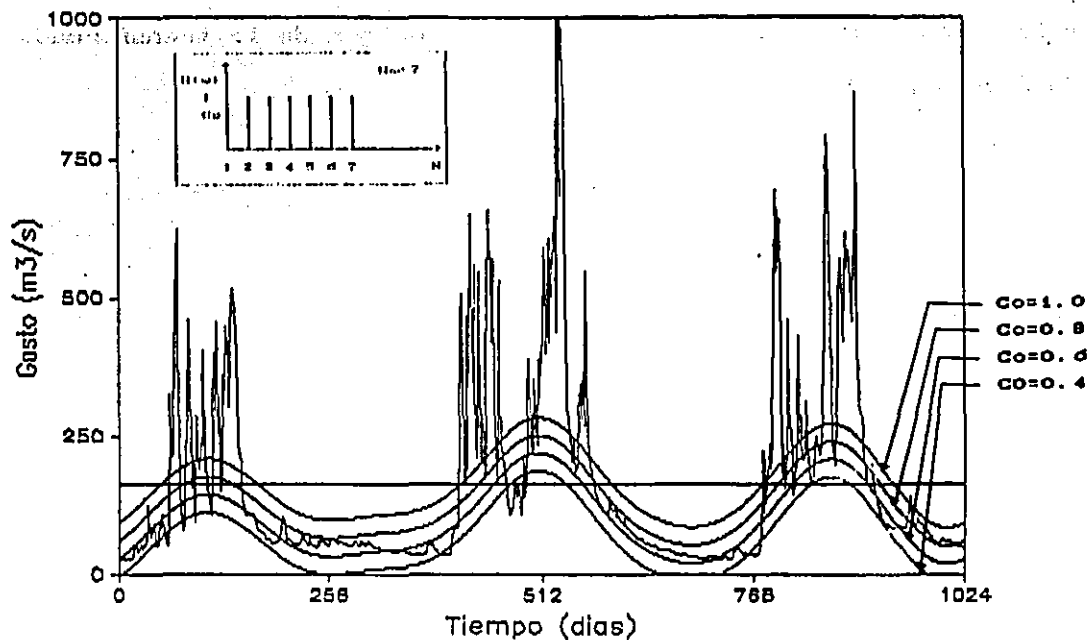


Figura 4.12. Respuesta del filtro pasabajas atenuado ($C_o = 0.8$, 0.6 y 0.4) sobre la ordenada en el origen, frecuencia de corte aproximada de un año (7 ordenadas).

b) FILTRO REDUCTOR DE LA MEDIA CON REDUCCION DE AMPLITUD

La reducción en la media, en el dominio del tiempo, puede lograrse, como se observó en el inciso anterior, al afectar por un valor menor a la unidad a la ordenada en el origen de la transformada de Fourier. El efecto reductor de la amplitud se logra al multiplicar las ordenadas fuera del origen por un factor menor a la unidad.

La transformada de Fourier de cualquier ordenada fuera del origen es una curva que oscila alrededor del eje horizontal. Considerando

una ordenada única fuera del origen multiplicada por un factor menor a la unidad, con lo que se obtiene una curva en el dominio del tiempo que oscila con el mismo periodo de la ordenada multiplicada por la unidad, pero con menor amplitud.

Si en el dominio de la frecuencia se considera la ordenada en el origen y un conjunto de ordenadas fuera de él y se transforman al dominio del tiempo, la respuesta oscilará sobre la media de los datos en dicho dominio. La media de los datos en el dominio del tiempo es la transformada de la ordenada en cero del dominio de la frecuencia. Por lo tanto, el multiplicar por un valor $C < 1$ en el dominio de la frecuencia, se obtiene una respuesta al dominio del tiempo de menor amplitud que para $C = 1$.

El filtro que provoca el efecto deseado en esta sección se define por

$$HC(\omega) = \begin{cases} C & , 0 < \omega < \omega_c , C < 1 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.4)$$

el cual se ilustra (para $N\omega = 7$) por la siguiente figura



Los resultados de este filtro son presentados en la figura 4.13 para $C = 0.8$, 0.6 y 0.4 , los cuales son comparados con $C = 1$. Donde se observa que la respuesta muestra un descenso, el cual no es equidistante a todos los puntos como en el inciso anterior, siendo en este caso, las ordenadas de la curva de $C = 1$ multiplicadas por el nuevo valor de $C < 1$. Esta característica se conoce como "propiedad homogénea" y resulta útil considerar este efecto, como se observará en el capítulo 5, para hacer más operativo el algoritmo de cálculo.

En la figura 4,13 se observa como, para $C = 0.4$, los valores de la respuesta del filtro pasabajas son cercanos a los del gasto total.

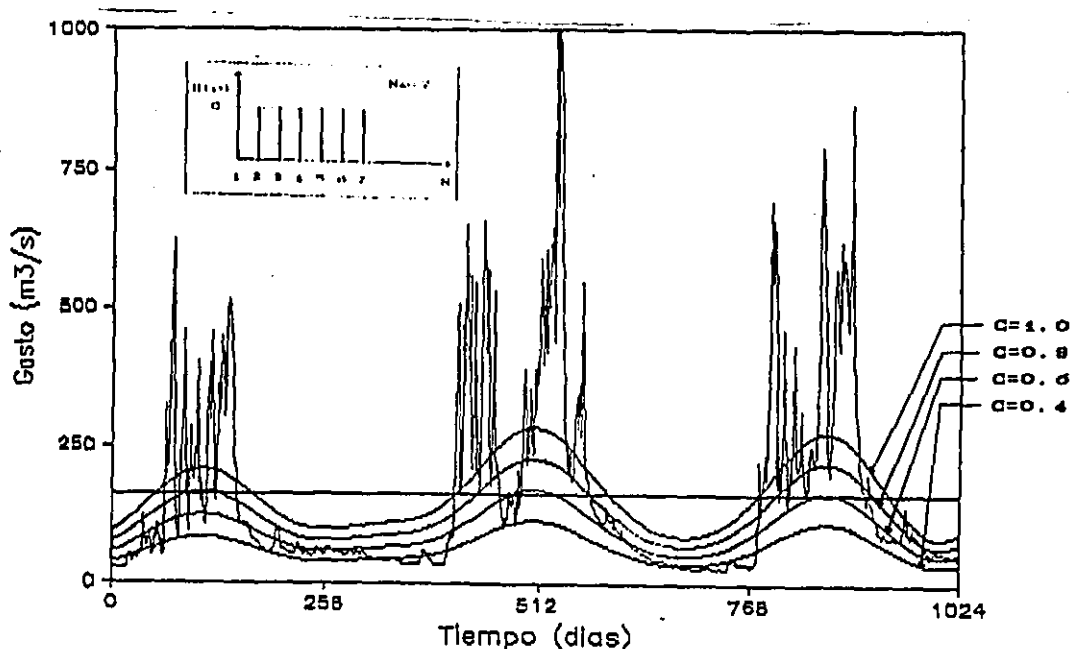


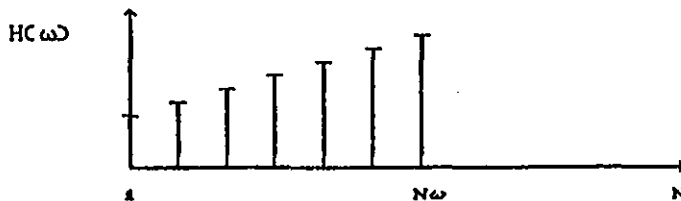
Figura 4.13. Respuesta del filtro pasabajas atenuado ($C = 0.8$, 0.6 y 0.4) para todas las ordenadas.

La terminología de transformada y antitransformada de Fourier puede crear confusión para el lector no familiarizado con el tema, por lo que es conveniente realizar comentarios al respecto. El término, "TRANSFORMADA DE FOURIER", denota una operación de cambio de dominio en el tratamiento del problema, en este caso (cálculo del gasto base) del dominio del tiempo al de la frecuencia y que esta definida matemáticamente por una expresión dada. El término, "ANTITRANSFORMADA DE FOURIER" es la función inversa de la transformada de Fourier previamente definida, lo cual significa que una, es la transformada de la otra, en este caso se pasa del dominio de la frecuencia al del tiempo.

c) OTROS FILTROS

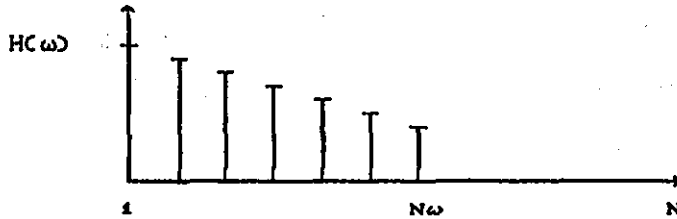
Diferentes configuraciones de filtros pueden ser propuestos y probados. Sin embargo, intuitivamente puede preverse el resultado de algunos de ellos.

Un filtro que reduzca la media y amplitud y de mayor peso a las frecuencias altas dentro de un intervalo $0 \leq \omega \leq \omega_c$ en forma lineal se representa por



donde $H(\omega) \leq 1$ en toda ordenada

el caso contrario es



donde $H(\omega) \leq 1$ en toda ordenada

Un filtro más difícil de predecir en términos de efecto sería



donde $H(\omega) \leq 1$ para que reduzca la media y amplitud de los datos al dominio del tiempo.

En general las posibles combinaciones de peso en las ordenadas son múltiples para el caso del último filtro y no existe un criterio para prever el resultado de su aplicación. En el capítulo 5 se considera el planteamiento de un modelo con un filtro de estructura "no definida" como el anterior, esto con la finalidad de obtener algunas conclusiones.

De esta sección se puede concluir que el efecto provocado por un filtro como el del inciso b) es más conveniente que el del inciso a), dado que se apega mejor en época de estiaje. Esto es observable en las figuras 4.12 y 4.13.

4.3. PARAMETRO DE TRASLACION

La introducción de un parámetro de traslación, se fundamenta en que la respuesta de un acuífero a una tormenta particular es mucho más lenta que la respuesta de la cuenca a la misma excitación. El escurrimiento superficial, conformado por la lluvia en exceso, se observa, a la salida de la cuenca, en periodos de tiempo cortos, del orden de horas o días. Por el contrario, el flujo en el acuífero es lento, de característica laminar, respondiendo en días, meses y en algunos casos en años. Esto justifica un defasamiento entre el pico de la avenida y el pico del gasto base.

En el problema del gasto base las unidades de τ (parámetro de traslación) son en días y su valor dependerá en forma aproximada, del número de días del centro de la época de avenidas al punto donde inicie la curva de vaciado del hidrograma en cuestión. Esto se fundamenta en que la curva de vaciado, que es parte de la curva de recesión del hidrograma, se conforma prácticamente de aporte que proviene del acuífero a la corriente (Eagleson, 1970).

La manera de introducir un efecto de traslación en el tiempo es por medio de la función $e^{-i\omega\tau}$ (Koopmans, 1974), la cual traslada la curva un intervalo τ en forma horizontal exclusivamente.

Los efectos provocados por el término $e^{-i\omega\tau}$ son:

- $-i\omega\tau$; $\tau > 0$, traslado de la señal hacia adelante
- $-i\omega\tau$; $\tau < 0$, traslado de la señal hacia atrás
- $-i\omega\tau$; $\tau = 0$, señal sin traslado

En la figura 4.14 se muestra como una función puede ser desplazada en un intervalo de tiempo (τ) prefijado.

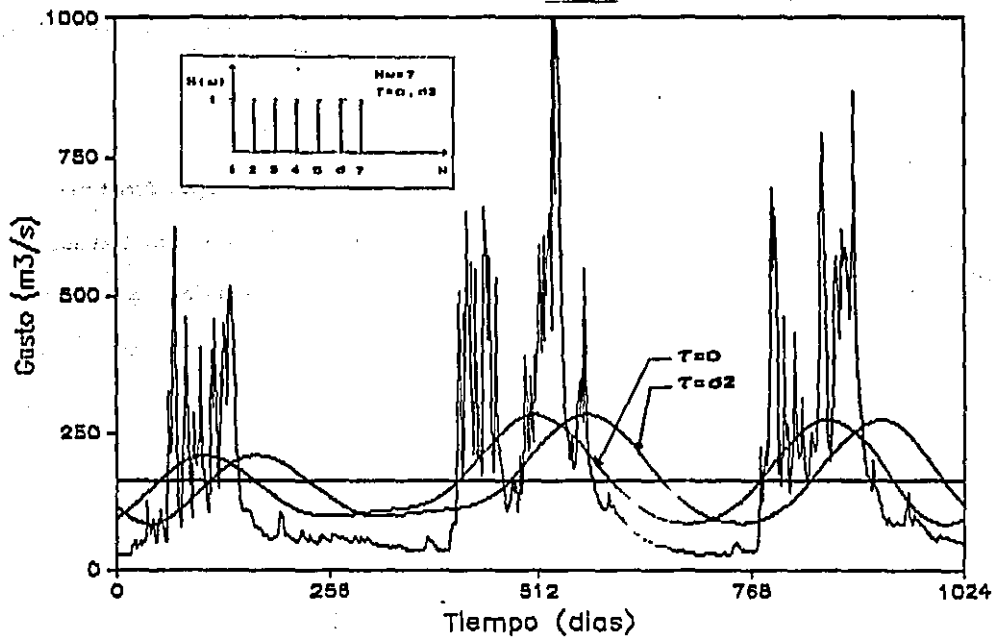


Figura 4.14. Respuesta del filtro pasabajos defasado con $C = 1$, parámetro de traslación $\tau = 02$, $\omega_c \cong \pi/305$ (7 ordenadas).

4.4. ESTRUCTURA DEL FILTRO

En las secciones 4.1, 4.2 y 4.3 se ha mostrado la manera de introducir los efectos deseables de un filtro para la estimación del gasto base, el cual debe responder en forma conceptual y estandarizada para cualquier tipo de hidrograma que muestre claramente, periodos de avenidas y estiaje. Este filtro dependerá, en su estructura paramétrica, de las características de cada hidrograma particular.

Del análisis realizado en las secciones 4.1, 4.2 y 4.3, se concluye preliminarmente, que la estructura de un filtro que responde en forma deseada a las hipótesis del capítulo 3 y además de manera conceptual es

$$H(\omega) = \begin{cases} C e^{-i\omega T} & , & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & , & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.8)$$

el cual depende como se observa de tres parámetros.

ω_c = es una frecuencia de corte que permite recuperar la información anual, asociada a una banda de frecuencia.

C = es un parámetro de atenuación que representa la relación entre la media del gasto en estiaje y la media del gasto total.

τ = es un parámetro de traslación que permite que la respuesta sea lenta a la excitación de la lluvia.

El filtro expresado por 4.5, obedece a la representación compleja de $H(\omega)$ la cual es

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-i\omega} \quad (4.6)$$

la cual hace equivalente al parámetro C con el módulo del filtro en la frecuencia ω , esto es

$$C = |H(\omega)| \quad (4.7)$$

τ , es un parámetro que se introduce para dar el efecto de traslación.

Otra posibilidad, es que el valor de C esté relacionado con un cierto peso de acuerdo con cada valor de ω , lo cual significa que C sea función de ω ($C(\omega)$). Esto incrementaría el número de parámetros de los cuales depende el filtro. Este tipo de filtro se analiza en el capítulo posterior.

En la figura 4.15, se muestra el resultado de combinar los tres efectos en la función de filtrado $H(\omega)$, donde se observa, preliminarmente, una aplicación de la metodología.

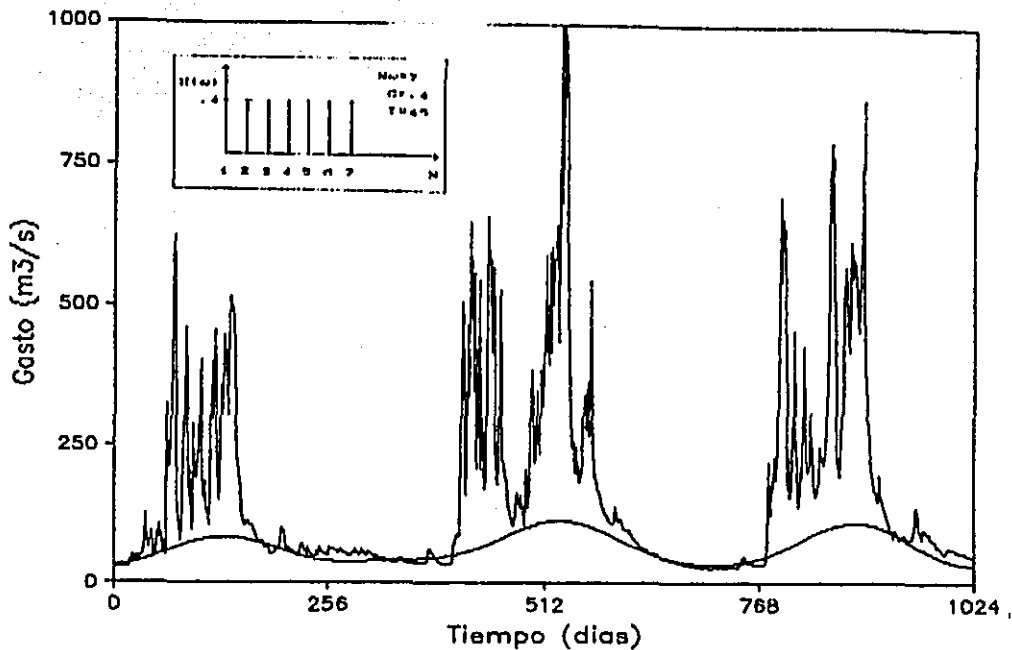
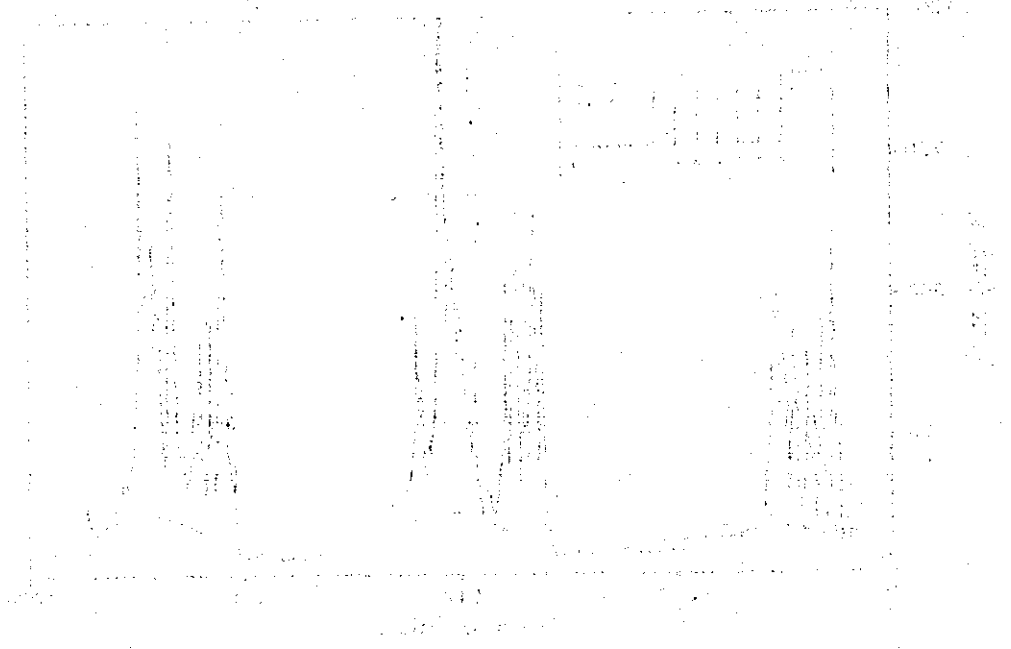


Figura 4.15. Respuesta del filtro pasabajas $C = 0.4$, $\tau = 45$, $\omega_c \cong \pi/365$ (7 ordenadas).

Los valores de los parámetros en éste caso son: $\omega_c \cong \pi/365$ (7 ordenadas en la función de filtrado), $C = 0.4$, $\tau = 45$. Sin embargo, la búsqueda de una solución que se apegue en forma más cercana a las hipótesis de estimación de gasto base propuesto, resultaría tediosa si el usuario debiera proponer valores de los parámetros sin base alguna. Por lo que es deseable recurrir a técnicas apropiadas de búsqueda de solución. La estimación de los parámetros se convierte en lo subsecuente, en un problema de optimización.



The following information is being provided for your information and is not intended to be used as a basis for any action.

The information provided herein is for informational purposes only and is not intended to be used as a basis for any action. It is provided for your information and is not intended to be used as a basis for any action. The information provided herein is for informational purposes only and is not intended to be used as a basis for any action. It is provided for your information and is not intended to be used as a basis for any action.

5. ESTIMACION DE GASTO BASE

Las técnicas de optimización son una herramienta de conceptualización y análisis de diversos problemas, las cuales ayudan al ingeniero a obtener resultados en una forma sistemática. Para tal efecto, han sido propuestas Numerosas metodologías .

En la estimación del gasto base por medio de la metodología propuesta se requiere conocer los valores de los parámetros del filtro $H(\omega)$ que representen de manera más precisa el modelo y sus hipótesis. Para lo cual se requiere llevar a cabo un proceso de optimización de parámetros para la función $H(\omega)$, La cual se expresa por

$$H(\omega) = \begin{cases} C e^{-i\omega t}, & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases} \quad (5.1)$$

El filtro (5.1) considera un peso C idéntico para cada ordenada de la transformada de Fourier en el intervalo $0 \leq \omega \leq \omega_c$. El gasto base estimado se obtiene antitransformando (3.11)

$$\hat{q}_b(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ H(\omega) Q(\omega) \} \quad (5.2)$$

siendo $\mathcal{F}^{-1} \{ \cdot \}$ el operador inverso de la transformada de Fourier. Considerando la forma general del filtro (5.1), se tiene

$$\hat{q}_b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_c} Q(\omega) C e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \quad (5.3)$$

para el caso discreto

$$\hat{q}_b(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Q_k C e^{i(2\pi k/N)(t-\tau)} \quad (5.4)$$

donde $N\omega$ se obtiene de la ecuación (4.2)

$$N\omega = \begin{cases} 1 & , \omega_c = 0 \\ \text{INT}\left(\frac{\omega_c(N-1)}{\pi}\right) + 2 & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Valores preliminares de los parámetros del filtro (5.1) pueden ser obtenidos por: C igual a la media del gasto en el estiaje entre la media del gasto total, τ igual a la mitad del tiempo base y $N\omega$ igual al número de ordenadas relacionada con la frecuencia de corte ω_c aproximadamente de un año para hidrogramas unimodales.

5.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION

Para la estimación de parámetros, utilizando técnicas de optimización, se requiere definir una función objetivo a optimizar y especificar las restricciones a las cuales se encuentran sujetas la función objetivo y sus variables.

Los parámetros del filtro (5.1), para cada estación hidrométrica en particular que cumpla con la condición de ser perenne y efluente, pueden ser estimados en forma preliminar, como se señaló anteriormente, y realizar un refinamiento de los mismos por medio de la minimización del error medio cuadrático del gasto base observado y el gasto base estimado (Blackie y Eeles, 1985), pero exclusivamente en periodo de estiaje.

$$\forall t \sum_{\text{estiaje}} (q(t) - \hat{q}_b(t))^2 = \min \quad (5.5)$$

o considerando la forma 5.3

$$\text{Min}_{(C, \tau, \omega_c)} \forall t \sum_{\text{estiaje}} \left\{ q(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_c} \alpha(\omega) C e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right\}^2 \quad (5.6)$$

La optimización clásica de (5.6) conduce a un conjunto de tres ecuaciones simultáneas no lineales, que contienen términos combinados en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Esto sugiere emplear un método de búsqueda (Hendrickson, et al, 1988) y realizar la optimización en el dominio del tiempo, ya que se trata de comparar a $\hat{q}_b(t)$ con $q(t)$ en el periodo de estiaje. El estimado $\hat{q}_b(t)$ se obtiene de (5.4) mediante la transformada rápida de Fourier (FFT) en tiempo discreto, la ecuación (5.6) puede reescribirse como

$$\text{Min}_{(C, \tau, N, \omega)} \forall t \in \text{Estiaje} \left\{ q(t) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Q_k C e^{i(2\pi k/N)(t-\tau)} \right\}^2 \quad (5.7)$$

En la ecuación (5.7), N es el número de gastos medios diarios considerados; se recomienda usar tres años para calcular el gasto base del año intermedio. Los datos se centran y se rellenan de ceros en ambas fronteras, o bien, se recortan de ambos lados, ya que N debe ser una potencia exacta de dos para poder aplicar el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (Cooley y Tukey, 1965), de donde N = 1024. La anterior mejora considerablemente el estimado en las fronteras del año hidrológico de interés. k = 0, 1, 2, ..., N-1 es un contador y $Q_k \equiv Q(k\Delta\omega)$, siendo $\Delta\omega = \frac{\pi}{N-1}$ el intervalo que separa a dos ordenadas consecutivas de la transformada discreta de Fourier.

La función objetivo (5.7) puede minimizarse sujeta a la condición

$$\hat{q}_b(t) \leq q(t) \quad , \quad \forall t \in \text{Estiaje} \quad (5.8)$$

o bien, puede permitirse un cierto margen de tolerancia de tal forma que el error relativo sea menor que un cierto porcentaje α :

$$q(t) - \hat{q}_b(t) \leq \alpha q(t) \quad , \quad \forall t \in \text{Estiaje} \quad (5.9)$$

Las restricciones en las variables C, τ y $N\omega$ son:

$$\left. \begin{aligned} 0 < C < 1 \\ \tau \geq 0 \\ N\omega > 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

La versión discreta (5.4) para valores de referencia C_0 , τ_0 y $N\omega_0$ es

$$\hat{q}_b^{(0)}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N\omega_0-1} Q_k C_0 e^{i(2\pi k/N)(t-\tau_0)} \quad (5.11)$$

Por otra parte, la transformada de Fourier es un operador lineal, esto es, para una constante C_0 , se cumple que

$$\mathcal{F}\{C_0 q(t)\} = C_0 Q(\omega); \quad Q(\omega) \text{ de 3.12} \quad (5.12)$$

entonces, para $N\omega_0$ fijo, la optimización sobre el parámetro C , puede obtenerse directamente en el dominio del tiempo, ya que de (5.2), (5.11) y (5.12)

$$\frac{C}{C_0} \hat{q}_b^{(0)}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{C}{C_0} H_0(\omega) Q(\omega) \right\} \quad (5.13)$$

siendo $H_0(\omega)$ la versión discreta del filtro (5.1), definido por

$$H_0(\omega) = \begin{cases} C_0 e^{-i(2\pi k/N)\tau_0}, & 0 \leq k \leq N\omega_0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (5.14)$$

Así, mientras $N\omega_0$ permanezca fijo, no es necesario calcular otra

antitransformada de Fourier para optimizar sobre el parámetro C, ya que cualquier incremento δC estimado por el método de búsqueda, puede evaluarse directamente en el dominio del tiempo

$$\hat{q}_b^n(t) = \left[1 + \frac{\delta C}{C_0} \right] \hat{q}_b^{n-1}(t) \quad , N_{\omega_0} \text{ fijo} \quad (5.15)$$

donde el superíndice n denota el n-ésimo estimado del gasto base para un valor N_{ω_0} particular.

Análogamente, para N_{ω_0} fijo, la propiedad de traslación en el tiempo que posee la transformada de Fourier

$$\mathcal{F} \{ q(t+\delta\tau) \} = Q(\omega) e^{i\omega\delta\tau} \quad (5.16)$$

puede invocarse para optimizar sobre τ , y evaluar el incremento $\delta\tau$ estimado por el método de búsqueda, directamente en el dominio del tiempo

$$\hat{q}^n(t) = \hat{q}^{n-1}(t+\delta\tau) \quad , N_{\omega_0} \text{ fijo} \quad (5.17)$$

Combinando (5.15) y (5.16), se obtiene que mientras N_{ω_0} permanezca fijo, no es necesario antitransformar con respecto a Fourier cuando se tienen incrementos δC y $\delta\tau$, siendo el problema de optimización restringido

$$\text{Min}_{(\delta C, \delta \tau)} \sum_{i \in \text{estilaje}} \left\{ q(t) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_{wo}-1} Q_k \left[1 + \frac{\delta C}{C_0} \right] e^{i(2\pi k/N)(t - \tau_0 + \delta \tau)} \right\}^2$$

, N_{wo} fijo (5.18)

equivalente a

$$\text{Min}_{(\delta C, \delta \tau)} \sum_{i \in \text{estilaje}} \left\{ q(t) - \left[1 + \frac{\delta C}{C_0} \right] \hat{q}_b^{n-1}(t + \delta \tau) \right\}^2, \quad N_{wo} \text{ fijo (5.19)}$$

Cuando se alcanza un óptimo local con la ecuación (5.18), es necesario volver a la optimización completa (5.7) con los últimos valores de C y τ obtenidos con (5.19). Si N_{wo} no cambia, el óptimo global ha sido encontrado y la estimación de los parámetros así como del gasto base está completa; de otra manera, es necesario comenzar otra optimización restringida usando la ecuación (5.11) una sola vez y la ecuación (5.18) cuantas veces sea necesario. Este enfoque es posible ya que el estimado preliminar de $N_{wo} = 7$ para hidrogramas unimodales. El cual permanece inalterado en la gran mayoría de los casos.

La formulación para un filtro que considere pesos distintos para cada ordenada, es análoga a la obtenida considerando (5.1), variando únicamente la restricción sobre las variables del filtro. C en 5.7 se convierte en $C = C(\omega)$ y (5.7) queda sujeta a

$$\begin{array}{l}
 N\omega > 0 \\
 \tau \geq 0 \\
 0 \leq C_0 \leq 1 \\
 0 \leq C_1 \leq 1 \\
 \vdots \\
 0 \leq C_{N\omega} \leq 1
 \end{array}$$

(B.20)

Como se observa, el número de parámetros del filtro $HC(\omega)$ aumenta. Esta formulación corresponde a filtros como los mostrados en la sección 4.2.c.

5.2. TECNICA DE OPTIMIZACION A UTILIZAR

La técnica de optimización a utilizar se define con base en las características de la función objetivo y sus restricciones. En el problema de estimación del gasto base aquí definido, se tiene una función objetivo no lineal (cuadrática) con restricciones lineales. Por lo tanto, la técnica de búsqueda de los parámetros óptimos debe ser de característica no lineal.

Un algoritmo de búsqueda de soluciones que ha mostrado buenos resultados (Hendrickson, et al, 1988) en este tipo de funciones, es el Rosenbrock restringido (Kuester y Mize, 1978). Donde se optimiza una función no lineal multivariada y sus restricciones

pueden ser además no lineales. El método se expresa por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.22)$$

sujeta a:

$$G_k < X_k < H_k; \quad K = 1, 2, \dots, M \quad (5.23)$$

Las funciones X_{n+1}, \dots, X_M son funciones de las variables independientes X_1, \dots, X_n , las cuales son denominadas como variables implícitas.

Los límites superior e inferior H_k, G_k pueden ser constantes o funciones de las variables independientes. El algoritmo utiliza una técnica de búsqueda secuencial de la solución y requiere que el punto de inicio (valores iniciales de los parámetros), satisfaga las restricciones y no esté en la frontera.

Para el caso de interés, la función objetivo es 5.7 auxiliada por 5.11 y 5.19 y las restricciones son 5.10, las cuales se adecúan como:

$$\begin{aligned} C_{\min} &< C < C_{\max} \\ \tau_{\min} &< \tau < \tau_{\max} \\ N\omega_{\min} &< n\omega < N\omega_{\max} \end{aligned}$$

donde los límites son datos de entrada.

5.3. EJEMPLOS DE APLICACION

El programa elaborado para adecuar el algoritmo Rosenbrock restringido considerando un filtro como el definido por (5.1) es incluido en el apéndice B. La consideración de esta formulación se basa en los resultados obtenidos en el capítulo 4.

Se probó el planteamiento de dar un mayor grado de libertad al filtro $H(\omega)$ buscando lograr un mayor beneficio en la minimización de la función objetivo. Sin embargo, la ganancia obtenida en la función objetivo es marginal y el tiempo de proceso aumenta considerablemente, por lo que no se justifica su aplicación.

Para ilustrar la aplicabilidad de la metodología, considérese la estación hidrométrica Mezcala en el Río Balsas (figura 4.1), que cuenta con registros desde 1938. Sea el año de 1941 el de interés. Aplicando el algoritmo Rosenbrock (1960), a las ecuaciones (5.7) y (5.9) con $\alpha = 0.1$ y parámetros iniciales de $C_0 = 0.39$, $\tau_0 = 35$ y $N_{\omega_0} = 7$. Los resultados son mostrados en la figura 5.1.

Como puede observarse, la estimación corresponde conceptualmente al fenómeno físico en ríos efluentes, y tiene la ventaja de que puede constituir una estandarización menos arbitraria que las técnicas actualmente empleadas, mediante un algoritmo de cómputo.

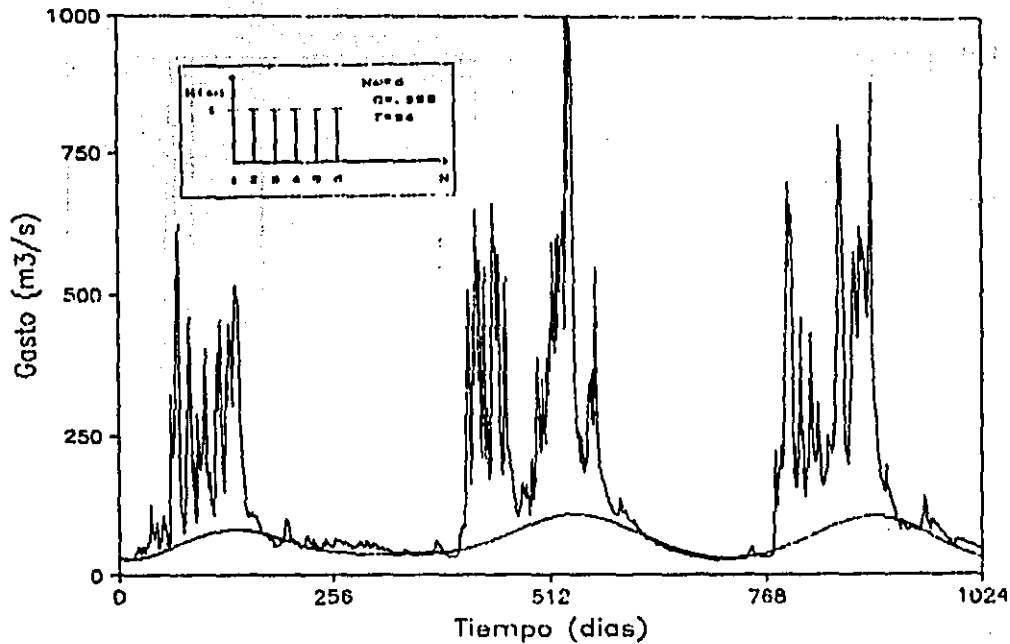


Figura. 5.1. Gasto base estimado en la estación hidrométrica Mezcala $N_w = 6$, $\tau = 34$ y $C = .388$.

Un segundo ejemplo es mostrado en la figura (5.2), éste corresponde a la estación hidrométrica Puente Colgante en el río Grijalva del estado de Chiapas. El estimado corresponde al registro del 28 de abril de 1954 al 7 de febrero de 1957.

Los resultados de las figuras 5.1 y 5.2 son mostrados en el apéndice B. Estas, permiten observar la bondad del método para apegarse a la hipótesis planteadas en el capítulo 3, en ellas destaca el apego de la curva de gasto base estimado en la recesión del hidrograma.

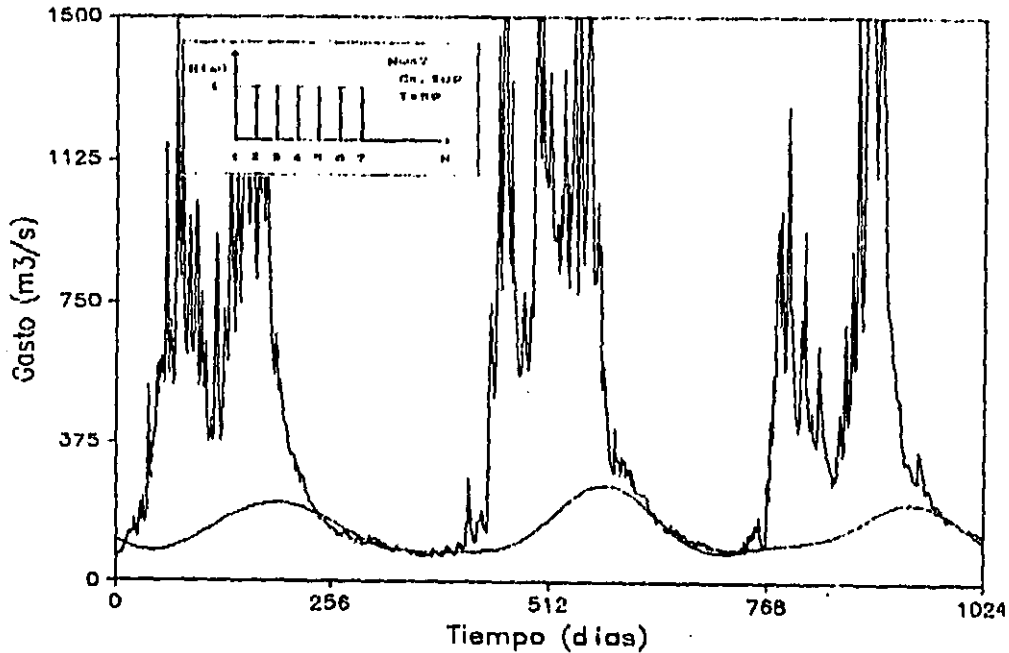


Figura B.2. Gasto base estimado en la estación hidrométrica Puente Colgante, del río Grijalva. $N_w = 7$, $\tau = 50$ y $C = .309$.

Por otra parte, conviene destacar tres aspectos importantes del código de cómputo para la estimación del gasto base.

- El proceso de solución del modelo fue escrito en lenguaje de programación FORTRAN para microcomputador en un compilador Fortran 77 versión 3.31.

- El programa requiere un archivo de control para el problema de optimización y los datos hidrométricos en cuestión.

- La información del proceso de optimización y la numérica del gasto base estimado, es guardada en un archivo independiente, la cual puede ser utilizada en la manera deseada.

En el apéndice B se incluye el listado del programa, datos de corrida y resultado de la optimización.

1. The first part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full. The list includes names such as Mr. J. B. Smith, Mr. W. H. Jones, and Mr. C. D. Brown, among others.

2. The second part of the document is a report on the work of the committee during the year. It describes the various projects and activities that were undertaken, and the progress that was made. The report is written in a clear and concise style, and it provides a detailed account of the committee's work.

3. The third part of the document is a list of recommendations for the future. These recommendations are based on the findings of the committee's work, and they provide a guide for the work of the committee in the coming year. The recommendations are clear and specific, and they are designed to ensure that the committee's work is as effective as possible.

RECEIVED BY SECRETARY
JANUARY 15 1954

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha desarrollado una nueva alternativa de estimación de gasto base que aporta, a diferencia de las demás, una respuesta conceptual del fenómeno, la cual requiere únicamente de información hidrométrica aplicada en este caso para gastos medios diarios.

El gasto total es una función que contiene exactamente la misma información tanto en su representación natural en el dominio del tiempo, como en su transformada de Fourier, definida en el dominio de la frecuencia. Esto permite recuperar selectivamente la información en algún punto específico de una cuenca para obtener una estimación del gasto base, conformándose a las características esenciales del fenómeno: una curva suave, de respuesta lenta y con gastos menores o iguales a los observados en el estiaje.

Se ha presentado la identificación básica de un filtro ideal que transforma el gasto total en gasto base, y se aplica un procedimiento de optimización para la estimación sistemática de sus parámetros. Los ejemplos de aplicación muestran la potencialidad del método para dos casos específicos.

La aplicación de esta metodología resultaría de interés en problemas de simulación numérica de acuíferos, dado que proporcionaría una condición de frontera de una manera estandar a diferencia de los métodos tradicionales.

Se recomienda la aplicación de esta metodología para aquellos casos en que la hipótesis de corrientes perennes y efluentes se cumplan.

El presente estudio se realizó en el marco de un convenio de colaboración entre el Instituto de Estudios Científicos y Tecnológicos y el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de los Andes, en el cual se investigó el comportamiento de las corrientes de agua en un sistema de drenaje urbano, considerando la hipótesis de corrientes perennes y efluentes.

Los resultados obtenidos demuestran que la metodología propuesta es adecuada para el análisis de este tipo de sistemas, permitiendo determinar con precisión el caudal de las corrientes y su comportamiento temporal.

Se concluye que la aplicación de esta metodología es recomendable para el estudio de sistemas de drenaje urbano, siempre y cuando se cumplan las hipótesis de corrientes perennes y efluentes.

INSTITUTO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

REFERENCIAS

Bendat, J. S. y A. G. Piersol, "Random Data: Analysis and Measurement Procedures", Wiley, 1971.

Blackie, J. R. y C. W. O. Eeles, "Lumped Eatchment Models" en Anderson, M. G. y T. P. Burt (Eds) "Hydrological Forecasting", Wiley, 1985.

Cooley, J. W. y J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", Mathematics of Computation, 19: 297-301, 1955.

Dooge, J. C. I., "Linear Theory of Hydraulic Systems", Tech. Bull. No 1488, usda Agricultural Research service, Beltsville, Maryland, 1973.

Eagleson, P. S., "Dynamic Hydrology", McGraw-Hill, 1970.

Hendrickson, J. D., S. Sorooshian y L. E. Brazil "Comparison of Newton-Type and Direct Search Algorithms for Calibration of conceptual Rainfall-Runoff Models", Water Resources Research, 24(5): 891-700, 1988.

Hildebrand, F. B., "Advanced Calculus for Applications", Prentice-Hall, 1976.

Hsu, H. P., - "Analisis de Fourier", Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

Kirby, M. J., "Hillslope Hydrology", en Anderson, M. G. y T. P. Burt (Eds) "Hidrological Forecasting", Wiley, 1985.

Koopmans, L. H., "The Spectral Analysis of Time Series", Academic Press, 1974.

Kuester, J. L. y J. H. Mize, "Optimization Techniques with Fortran", McGraw-Hill, 1973.

Linsley, R. K. Jr., M. A. Kohler y J. L. H. Paulus, "Hidrologia para Ingenieros" McGraw-Hill, 1977.

Pinder, G. F. y W. Gray, "Finite Elements Simulation in Surface and Subsurface Hydrology", Academic Press, 1977.

Rosenbrock, H. H., "An Automatic Method of Finding the Greatest or Least Value of a función", Computer Journal, 3: 175-184, 1960.

Stearns, S. D., "Digital Signal Analysis", Hayden Book Company, 1975.

Tostado Bojorquez, M. "Analisis Espectral de Oleaje", Tesis de Maestría, DEPMI-UNAM, 1988.

Vlössman, W.Jr., J. W. Knapp, G. L. Lewis y T. E. Harbaugh, "Introduction to Hidrology", Harper and Row, Publishers, 1977.

A P E N D I C E

A

I N D I C E

A. ELEMENTOS MATEMATICOS RELACIONADOS CON LA METODOLOGIA

A.1. PERIODICIDAD DE FUNCIONES

A.2. ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES ARBITRARIAS

A.3. SERIES DE FOURIER

A.4. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

A.5. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

A.6. LA INTEGRAL DE CONVOLUCION

A.7 TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA CONVOLUCION

A.8 TRANSFORMADA DE FOURIER DE DOS CASOS DE INTERES

A.9 FILTROS IDEALES

A.10 LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER (FFT)

A.11 ALGORITMO DE COOLEY Y TUKEY PARA EL CALCULO DE LA FFT

APENDICE A. ELEMENTOS MATEMATICOS RELACIONADOS CON LA METODOLOGIA

En el presente apéndice se pretende introducir aspectos matemáticos relacionados con el análisis de Fourier y algunos detalles no expresados en el desarrollo de la metodología de estimación del gasto base, puesto que resultaría tedioso o podría distraer la atención del lector.

A.1. PERIODICIDAD DE FUNCIONES

Los fenómenos de la naturaleza, en general, pueden ser representados hipotéticamente por expresiones matemáticas, las cuales buscan aproximarse al comportamiento físico o conceptual del problema. Una representación de un fenómeno a través de ecuaciones matemáticas es, en todo caso, una aproximación a la naturaleza, y las soluciones obtenidas de un modelo, son estrictamente solución de dichas expresiones. La solución será más apropiada mientras mejor se apegue al comportamiento del fenómeno. Muchas soluciones de los modelos que pretenden aproximarse al comportamiento de los procesos naturales son de características periódicas o combinaciones de ellas.

La obtención del gasto base mediante la metodología propuesta en este trabajo esta relacionada con una función periódica, cuya oscilación tiene que ver con la frecuencia de corte ω_c . Es por ello que interesa hacer referencia a la periodicidad de funciones.

Sea $f(t)$ una función definida para toda $t > 0$ y $T > 0$, f es periódica con periodo T para todo valor de t si

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{(A.1.1)}$$

La constante mínima que satisface la ecuación (A.1.1) se le llama periodo de la función. Mediante la repetición de la ecuación (A.1.1), se tiene

$$f(t+nT) = f(t) \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{(A.1.2)}$$

Como funciones periódicas podemos citar al seno, coseno, tangente, etc.

A.2. ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES ARBITRARIAS

Se dice que dos funciones $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$ son ortogonales en el intervalo $t \in [a, b] \longleftrightarrow$

$$\langle \phi_m(t) , \phi_n(t) \rangle = \int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = 0 \quad \text{(A.2.1)}$$

En forma más general, se dice que dos funciones $\phi_m(t)$, $\phi_n(t)$ son ortogonales con respecto a una función de peso $r(t)$, en el intervalo $[a, b] \longleftrightarrow$

$$\int_a^b r(t) \phi_m(t) \phi_n(t) dt = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

Finalmente se dice que un conjunto de funciones es ortogonal, si se cumple que las funciones que constituyen el dominio de ϕ_k son todas ellas ortogonales por pares.

Lo anterior puede ser representado por

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = 0, \quad m \neq n \quad (\text{A.2.3})$$

$$\int_a^b r(t) \phi_m(t) \phi_n(t) dt = 0, \quad m \neq n \quad (\text{A.2.4})$$

Sin embargo, en lo anterior puede haber persistido la duda y surge nuevamente la pregunta ¿ que es la ortogonalidad ?

Por ejemplo, dos vectores son ortogonales si el producto interno (producto punto) de sus componentes escalares es igual a cero (nulo).

Considérese

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1t_1 + A_2t_2 + A_3t_3 \\ B &= B_1t_1 + B_2t_2 + B_3t_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.5})$$

sí, $A \cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$; entonces son ortogonales.

Los vectores A y B pueden ser imaginados en un espacio tridimensional (3-D) y relacionados en forma indirecta con la perpendicularidad (el producto punto de dos vectores perpendiculares es igual a cero).

Considérese ahora el caso en el cual A y B tienen un número infinito de componentes

$$\left. \begin{aligned} A &= A_{11} + A_{12} + \dots + A_{1n} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} A_{1i} \\ B &= B_{11} + B_{12} + \dots + B_{1n} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} B_{1i} \end{aligned} \right\} \quad \text{(A. 2. 6)}$$

aquí es difícil imaginar a los vectores A y B, ya que el espacio de A y B es infinito-dimensional (no contable). Sin embargo, la ortogonalidad puede ser expresada en forma análoga al caso de (3-D)

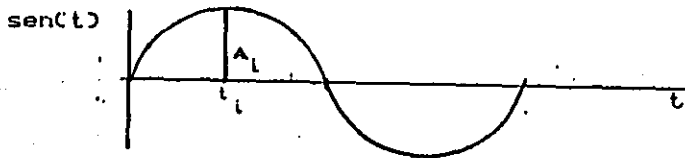
$$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} A_i B_i = 0 \quad \text{(A. 2. 7)}$$

A y B definidas en un espacio no contable.

Una representación de un vector A en un espacio infinito no contable puede hacerse por

$$A \left\{ \begin{array}{c} A_t \\ \begin{array}{c} | \\ \hline t_1 \quad | \quad t_2 \quad | \quad t_3 \quad \dots \quad | \quad t_n \quad \dots \\ \hline A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_n \quad \dots \end{array} \end{array} \right\}$$

La representación de un vector de componentes infinitas nos permite intuir en "funciones como vector". La idea es que una función $f(t)$ puede ser expresada por un número infinito de A_i y t_i con $dt \rightarrow 0$. Por ejemplo la función $\text{sen}(t)$



Se tiene el caso de un espacio dimensional no contable.

Haciendo una analogía con $A \cdot B = \sum_{i=1}^{\infty} A_i B_i = 0$ para el caso de dos funciones continuas $f(t)$ y $g(t)$, la ortogonalidad se define por

$$f(t) \cdot g(t) = \int_a^b f(t) g(t) dt = 0, \quad f(t) \neq g(t) \quad (\text{A. 2. 8})$$

la cual es la condición de ortogonalidad de funciones

En forma más general, se dice que dos funciones son ortogonales respecto a $r(t)$ si

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0, \quad f(t) \neq g(t) \quad (\text{A.2.9})$$

obsérvese que

$$\int_a^b f(t) f(t) dt \neq 0 \quad (\text{A.2.10})$$

puesto que puede interpretarse como el producto interno de dos vectores idénticos.

La ortogonalidad de funciones puede expresarse en forma resumida para el intervalo $a < t < b$, para dos funciones arbitrarias $\phi_m(t)$, $\phi_n(t)$ pertenecientes al conjunto ϕ_k por

$$\int \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ S_n, & m = n \end{cases} \quad (\text{A.2.11})$$

A.3. SERIES DE FOURIER

Una función periódica (de periodo $2D$) que converge en el intervalo ampliado $(-l, D)$, puede desarrollarse en series de Fourier, las cuales pueden ser de tipo seno, coseno o completas (seno + coseno).

La serie coseno de Fourier se expresa por

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) \quad (\text{A. 3.1})$$

donde

A_n = coeficiente de la serie coseno de Fourier

ω_0 = frecuencia angular fundamental

n = n-ésimo término de la serie

La serie seno de Fourier esta dada por

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad (\text{A. 3.2})$$

donde B_n = coeficiente de la serie seno de Fourier.

La serie completa esta representada por

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad (\text{A. 3.3})$$

la cual es equivalente a

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)) \quad (\text{A. 3.4})$$

Las funciones seno y coseno que conforman las series de Fourier tienen las siguientes propiedades que pueden ser demostradas por medio de cálculo elemental

propiedad 1

$$\int_{-l}^l \cos(m\omega_0 t) dt = 0, \text{ para } m \neq 0 \quad (\text{A.3.5})$$

propiedad 2

$$\int_{-l}^l \sin(m\omega_0 t) dt = 0, \forall m \quad (\text{A.3.6})$$

otras propiedades basadas en la ortogonalidad son

propiedad 3

$$\int_{-l}^l \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ l & , m = n \end{cases} \quad (\text{A.3.7})$$

propiedad 4

$$\int_{-l}^l \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ l & , m = n \end{cases} \quad (\text{A.3.8})$$

propiedad B

$$\int_{-l}^l \text{sen}(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = 0, \forall n \quad (\text{A.3.9})$$

Estas relaciones prueban que las funciones 1, $\cos(\omega t)$, $\cos(2\omega t)$, ..., $\cos(n\omega t)$, ..., $\text{sen}(\omega t)$, $\text{sen}(2\omega t)$, ..., $\text{sen}(n\omega t)$, ... forman un conjunto completo de funciones ortogonales en el intervalo $(-l, l)$.

Los coeficientes de la serie de Fourier en el intervalo $(-l, l)$ pueden ser evaluados haciendo uso de las relaciones de ortogonalidad (Hildebrand, 1976).

Considere la ecuación (A.3.4) multiplicada en ambos lados por $\cos(m\omega t)$ e integrando entre $(-l, l)$

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(t) \cos(m\omega t) dt &= A_0 \int_{-l}^l \cos(m\omega t) dt + \\ &+ \int_{-l}^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) \right] \cos(m\omega t) dt + \\ &+ \int_{-l}^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(n\omega t) \right] \cos(m\omega t) dt \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

la cual es equivalente a

$$\begin{aligned}
 \int_{-l}^l f(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= A_0 \int_{-l}^l \cos(m\omega_0 t) dt + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-l}^l \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-l}^l \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \quad (\text{A. 3.11})
 \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho se elimina por la propiedad (A. 3.5), del segundo término del mismo lado sobrevivirá únicamente para $n = m$ por la propiedad (A. 3.7) y el tercer término se elimina por la propiedad (A. 3.9), con lo cual se tiene

$$\int_{-l}^l f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = A_m \int_{-l}^l \cos(m\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = A_m l \quad (\text{A. 3.12})$$

donde

$$A_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \quad (\text{A. 3.13})$$

como el índice es mudo, puede ser intercambiado m por n , con lo cual

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.3.14})$$

Haciendo un desarrollo análogo como el realizado anteriormente para obtener A_n , pero multiplicando por $\text{sen}(m\omega_0 t)$, se tiene

$$\int_{-l}^l f(t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt = l B_m \quad (\text{A.3.15})$$

cambiando m por n y despejando

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.3.16})$$

Si se integra (A.3.4) en $(-l, l)$ y se aplican las propiedades (A.3.5) y (A.3.6) del lado derecho de la expresión resulta

$$\int_{-l}^l f(t) dt = A_0 \int_{-l}^l dt = A_0 [t]_{-l}^l = 2l A_0 \quad (\text{A.3.17})$$

entonces,

$$A_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \quad (\text{A.3.18})$$

Las expresiones (A.3.14), (A.3.15) y (A.3.18) son válidas para las ecuaciones (A.3.1), (A.3.2) y (A.3.3) teniendo periodo de $2l$.

La representación en el campo complejo de la ecuación (A.3.4) puede ser lograda considerando

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2} \left[e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} \right] \quad (\text{A.3.19})$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{1}{2i} \left[e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} \right] \quad (\text{A.3.20})$$

sustituyendo (A.3.19) y (A.3.20) en (A.3.4) se tiene

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{1}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) + B_n \frac{1}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \right] \quad (\text{A.3.21})$$

considerando $\frac{1}{i} = -i$, se tiene

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (A_n - iB_n) e^{in\omega t} + \frac{1}{2} (A_n + iB_n) e^{-in\omega t} \right] \quad (\text{A.3.22})$$

haciendo

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= A_0 \\ C_n &= \frac{1}{2} (A_n - iB_n) \\ C_{-n} &= \frac{1}{2} (A_n + iB_n) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.23})$$

se obtiene

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n e^{in\omega t} + C_{-n} e^{-in\omega t} \right] \quad (\text{A. 3. 24})$$

lo cual es igual a

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-in\omega t} \quad (\text{A. 3. 25})$$

lo cual finalmente se expresa por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \quad (\text{A. 3. 26})$$

La ecuación (A. 3. 26) se denomina "forma compleja de la serie de Fourier".

Los coeficientes se evalúan por

$$C_0 = A_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt \quad (\text{A. 3. 27})$$

para el n-ésimo término se obtiene el coeficiente

$$C_n = \frac{1}{2} (A_n - iB_n) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{T} \left[\int_{-T}^T f(t) \cos(n\omega t) dt - \right. \right. \\ \left. \left. - i \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin(n\omega t) dt \right] \right\} \quad (\text{A. 3. 28})$$

lo cual puede expresarse como

$$C_n = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (\text{A. 3. 29})$$

Para el $(-n)$ -ésimo término se tiene

$$C_{-n} = \frac{1}{2\tau} (A_n + iB_n) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) e^{in\omega_0 t} dt \quad (\text{A. 3. 30})$$

si $f(t)$ es real, entonces $C_n = C_{-n}^*$, donde $*$ indica el conjugado complejo.

Observando las ecuaciones (A. 3. 27), (A. 3. 29) y (A. 3. 30) se tiene, si $f(t)$ es real, que los coeficientes de (A. 3. 28) pueden ser evaluados por (A. 3. 29) únicamente

$$C_n = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

dado que cumple con (A. 3. 27) para $n = 0$ y con (A. 3. 30) cambiando n por $-n$.

El concepto de ortogonalidad de funciones se ve modificado para el caso de la variable compleja. El conjunto de funciones complejas $f(t)$ es ortogonal en el intervalo $a < t < b$, si

$$\int_a^b f_n(t) f_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & , \text{ para } n \neq m \\ S_n & , \text{ para } n = m \end{cases} \quad (\text{A.3.31})$$

$f_m^*(t)$ es el conjugado complejo de $f_m(t)$.

A.4. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Las series de Fourier constituyen un elemento muy poderoso en el tratamiento de problemas que involucran funciones periódicas. Sin embargo, muchos problemas de la práctica son de características no periódicas, es por ello que interesa considerar dentro del análisis de Fourier un método que incluya funciones no periódicas.

Previamente se define la medida de ω en radianes, la variación de ω será en un periodo de 2π (ciclo completo) y la frecuencia angular fundamental estará dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\ell} \quad (\text{A.4.1})$$

con la expresión anterior, hacemos equivalente el periodo 2ℓ de $f(t)$ con un periodo de 2π en la representación de Fourier de donde

$$2\ell = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (\text{A.4.2})$$

Considérese la función $f(t)$ con periodo $2l$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \quad (\text{A.4.3})$$

cuyo coeficiente se evalúa por

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (\text{A.4.4})$$

la función $f(t)$ se convierte en una función no periódica cuando $2l \rightarrow \infty$.

Sustituyendo C_n en $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) e^{-in\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{in\omega_0 t} \quad (\text{A.4.5})$$

se introduce τ para evitar confusión con t . De (A.4.2) se tiene que $\frac{1}{2l} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ de donde (A.4.5) se modifica a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-l}^l f(\tau) e^{-in\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{in\omega_0 t} \quad (\text{A.4.6})$$

de (A.4.1) se observa que si $2l \rightarrow \infty$ entonces, $\omega_0 = 0$.

Para evitar el problema de que ω_0 se anule, se considera lo siguiente.

Sea $\omega_0 = \Delta\omega$, la función $f(t)$ debe ser finita cuando $2l \rightarrow \infty$. Lo anterior es equivalente a decir que para cualquier armónica $n\omega_0 = n\Delta\omega \rightarrow \omega$ (ω , valor finito). Esto significa que

cuando, $n \rightarrow \infty$
 entonces, $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow 0$

con lo cual la expresión (A.4.8) se convierte en

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(\tau) e^{-in\Delta\omega\tau} d\tau \right] e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (\text{A.4.7})$$

En el caso límite, $2l \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ y $n\Delta\omega \rightarrow \omega$. La sumatoria en (A.4.7) se convierte en una integral sobre ω , es decir, la función no periódica se transforma en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.4.8})$$

definiendo

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.4.9})$$

la ecuación anterior es conocida como la transformada de Fourier de $f(t)$. Sustituyendo (A.4.9) en (A.4.8) se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A. 3.10})$$

Las expresiones (A. 4. 9) y (A. 4.10) son la representación de Fourier de la función $f(t)$ no periódica. Obsérvese que (A. 4.10) es análoga a (A. 3.21) y (A. 4. 9) es análoga a (A. 3.29).

Las consideraciones incluidas en (A. 4.7) no están basadas en una base matemática rigurosa, pero resulta de mucha utilidad para el campo de la ingeniería.

La expresión (A. 4.10) constituye la transformada de Fourier de $f(t)$ y se simboliza comúnmente por

$$F(\omega) = \mathcal{F} [f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A. 4.11})$$

La operación inversa (antitransformada de Fourier) se expresa por

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A. 4.12})$$

la cual nos permite obtener $f(t)$ cuando se tiene $F(\omega)$. Las ecuaciones (A. 4.11) y (A. 4.12) se conocen como par de transformadas de Fourier.

La condición para que $F(\omega)$ exista está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (\text{A. 4.13})$$

la cual garantiza la convergencia de la función $F(\omega)$.

A.5. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

El tratamiento sistemático de señales digitales es una herramienta común en el campo de la ingeniería, dado que un computador permite un rápido procesamiento de señales discretas, por lo cual resulta importante obtener expresiones de la transformada de Fourier para el caso discreto.

La expansión en una serie de Taylor de una función analítica $y(t)$ alrededor de un punto a está dada por

$$y(t) = y(a) + y'(a)(t-a) + y''(a) \frac{(t-a)^2}{2!} + \dots + y^{(n-1)}(a) \frac{(t-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} + R_n \quad (\text{A. 5.1})$$

el término R_n se evalúa según Lagrange por

$$R_n = y^{(n)}(\xi) \frac{(t-a)^n}{n!} \quad (\text{A. 5.2})$$

Considerando la función que representa la transformada de Fourier

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.5.3})$$

con

$$g(t) = f(t) e^{-i\omega t} \quad (\text{A.5.4})$$

una expansión de $g(t)$ en serie de Taylor alrededor de ξ será

$$g(t) = g(\xi) + g'(\xi)(t-\xi) + g''(\xi) \frac{(t-\xi)^2}{2!} + \dots \quad (\text{A.5.5})$$

considerando una aproximación de orden cero

$$g(t) = g(\xi) + O(1), \quad O(1) = \text{error de truncado} \quad (\text{A.5.6})$$

con lo cual $g(t)$ se puede aproximar como

$$g(t) = g(\xi) = f(\xi) e^{-i\omega\xi} \quad (\text{A.5.7})$$

si la función $g(t)$ es periódica en un rango T , cumple con

$$g(t+T) = g(t) \text{ y} \quad (\text{A.5.8})$$

$$g(t) = g(t+nT); \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.5.9})$$

en este caso

$$g(t) = f(\xi+nT) e^{-i\omega(\xi+nT)} \quad (\text{A.5.10})$$

sustituyendo (A.5.10) en $FC(\omega)$

$$FC(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+nT) e^{-i\omega\xi+nT} dt \quad (\text{A.5.11})$$

descomponiendo la exponencial

$$FC(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+nT) e^{-i\omega nT} \right] e^{-i\omega\xi} dt \quad (\text{A.5.12})$$

de la propiedad de desplazamiento de la transformada de Fourier aplicada sobre lo que esta entre paréntesis rectangulares

$$FC(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-i\omega nT} e^{i\omega\xi} \right] e^{-i\omega\xi} dt \quad (\text{A.5.13})$$

eliminando términos

$$FC(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-i\omega nT} dt \quad (\text{A.5.14})$$

En forma discreta $FC(\omega)$ puede ser representada cambiando la integral de (A.5.14) por una sumatoria

$$FC(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega nT}, \quad f_n = f(nT) \quad (\text{A.5.15})$$

Si las pruebas se realizan para N casos ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$), entonces

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\omega n T} \quad (\text{A.5.16})$$

para la k-ésima ordenada de ω (ω_k), ω_k es proporcional a ω_0 de la forma

$$\omega_k = \frac{k}{M} \omega_0 \quad (\text{A.5.17})$$

donde

M = número de ordenadas de $F(\omega)$

$k = 0, 1, 2, \dots, M-1$

Cuando el número de ordenadas de $F(\omega)$ es igual al número de términos de f_n ($M=N$), se tiene

$$\omega_k = \frac{k}{N} \omega_0 ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{A.5.18})$$

haciendo $\omega_0 = \Delta\omega$

$$\omega_k = \frac{k}{N} \Delta\omega \quad (\text{A.5.19})$$

Por otra parte, $\frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, entonces $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$; con lo cual (A.5.19) se vuelve

$$\omega_k = \frac{k2\pi}{NT} \quad (\text{A. 5.20})$$

sustituyendo en (A.5.16) se obtiene para la k-ésima ordenada de $FC(\omega)$

$$F_k = FC(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-in(k2\pi T/NT)} \quad (\text{A. 5.21})$$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink2\pi/N}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{A. 5.22})$$

lo cual es la transformada discreta de Fourier de f_n .

La transformada inversa para el caso discreto se obtiene de la siguiente manera.

Multiplicando ambos lados de (A.5.22) por $e^{ink2\pi/N}$

$$F_k e^{ink2\pi/N} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink2\pi/N} \right] e^{ink2\pi/N} \quad (\text{A. 5.23})$$

lo cual se puede escribir como

$$F_k e^{ink2\pi/N} = \frac{N}{N} e^{ink2\pi/N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink2\pi/N} \quad (\text{A. 5.24})$$

introduciendo el exponente en la sumatoria

$$F_k e^{ink2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink2\pi/N} e^{ink2\pi/N} \quad (\text{A. 5. 25})$$

eliminando términos

$$F_k e^{ink2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \quad (\text{A. 5. 26})$$

aplicando sumatoria de $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ en ambos lados

$$\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ink2\pi/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{N} f_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_n \quad (\text{A. 5. 27})$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ink2\pi/N} = N f_n \quad (\text{A. 5. 28})$$

con lo que finalmente se obtiene f_n por

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ink2\pi/N} \quad (\text{A. 5. 29})$$

Las ecuaciones (A.5.22) y (A.5.29) constituyen la transformada y antitransformada (transformada inversa) de Fourier del caso discreto con una aproximación, en f_n , de orden cero.

A.6. LA INTEGRAL DE CONVOLUCION

Una representación de diversos fenómenos de la naturaleza, por ejemplo la que sustenta la teoría del hidrograma unitario, viene dada por la integral de convolución, la cual se representa en el dominio del tiempo como

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.6.1})$$

donde se expresa que $f(t)$ puede ser obtenida mediante la convolución en t de las funciones $h(\tau)$ y $g(t-\tau)$.

A.7. TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA CONVOLUCION

Para la obtención de la ecuación (3.11) se obvió el procedimiento a seguir al tomar en ambos lados la transformada de Fourier de la ecuación (3.3). Sin embargo, resulta importante denotar este proceso.

La transformada de Fourier de $f(t)$ se define por la ecuación (A.4.11), pero ésta viene definida por (A.6.1). Tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación (A.6.1) se tiene

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A. 7.1})$$

cambiando el orden de integración

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau \quad (\text{A. 7.2})$$

La transformada de Fourier cumple la propiedad de desplazamiento

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) e^{-i\omega t} dt = G(\omega) e^{-i\omega\tau} \quad (\text{A. 7.3})$$

donde $G(\omega)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$.

Sustituyendo (A.7.3) en (A.7.2) se obtiene

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{A. 7.4})$$

$$F(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] G(\omega) \quad (\text{A. 7.5})$$

aplicando la ecuación (A.4.11) se tiene

$$F(\omega) = H(\omega) G(\omega) \quad (\text{A.7.6})$$

La expresión (A.7.6) permite observar que la transformada de Fourier de la convolución de $h(\tau)$ y $g(t-\tau)$ es el producto de $H(\omega)$ y $G(\omega)$. Lo anterior resulta ventajoso ya que el tratamiento del problema en el dominio de la frecuencia está representado por una expresión más sencilla que en el dominio del tiempo para la identificación de la función de filtrado $H(\omega)$.

A.8. TRANSFORMADA DE FOURIER DE DOS CASOS DE INTERES

a) TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA ORDENADA DE VALOR C EN EL ORIGEN

$$\text{Sea } \mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.8.1})$$

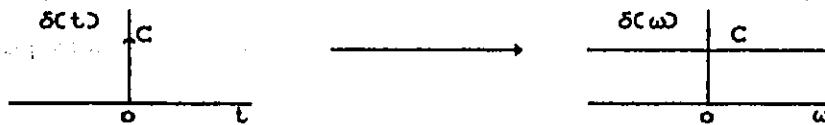
$$\text{donde } \delta(t) = \begin{cases} C, & t=0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

La ecuación (A.8.1) no es la definición integral acostumbrada de los cursos de cálculo elemental, sino una interpretación distinta, donde se integra $\delta(t)$ para todos aquellos valores de t en los cuales $\delta(t) = \phi(0)$; esto es $\delta(t)$ no es nula (Hsu, 1987).

Bajo la interpretación anterior resulta

$$\delta(\omega) = \mathcal{F} [\delta(t)] = C e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = C \quad (\text{A. 8.2})$$

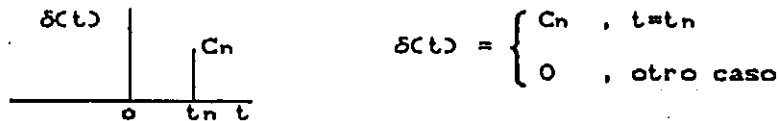
Lo anterior se ilustra por medio de la siguiente figura



donde se observa que la transformada de Fourier de una ordenada en el origen no tiene parte imaginaria.

b) TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA ORDENADA FUERA DEL ORIGEN

El problema es ilustrado en la siguiente figura



bajo la misma consideración del inciso a)

$$\delta(\omega) = \mathcal{F} [\delta(t)] = C_n e^{-i\omega t} \Big|_{t=t_n} = C_n e^{-i\omega t_n} \quad (\text{A. 8.3})$$

descomponiendo en parte real e imaginaria

$$\delta(\omega) = C_n \cos(\omega t_n) - C_n i \text{sen}(\omega t_n) \quad (\text{A. 8.4})$$

Se observa que la transformada de Fourier de una ordenada en el origen es una función oscilante respecto al eje ω , tanto para la parte real como para la imaginaria.

Cualquier combinación mayor de dos ordenadas, conducirá a una transformada cuya función será oscilante en términos de senos y cosenos..

A.9. FILTROS IDEALES

Dentro de un sistema lineal, la función ponderadora (función de peso, filtro) esta directamente relacionada con un efecto de filtrado, ya sea en el dominio del tiempo con $h(t)$ o en el dominio de la frecuencia con $H(\omega)$.

La función compleja $H(\omega)$ se puede representar en forma polar como

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\theta(\omega)} \quad (\text{A.9.1})$$

donde $|H(\omega)|$ representa el módulo de $H(\omega)$ y se conoce como la amplitud de respuesta. El ángulo $\theta(\omega)$ es el argumento de ω ($\theta(\omega) = \arg(\omega)$) y es conocido como la fase de respuesta.

La operación de filtrado puede provocar que la transmisión de la función de entrada a la función de salida sea distorsionada. Para que un sistema de transmisión no provoque distorsión, se requiere

que la forma de la onda de salida sea una réplica exacta de la forma de la onda de entrada, aunque la amplitud de la respuesta puede ser diferente.

Para un sistema sin distorsión debe cumplirse

$$|H(\omega)| = k_1 \quad , \quad \text{constante (independiente de } \omega)$$

$$\theta(\omega) = \omega k_2 \quad , \quad \text{función lineal de } \omega$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias.

El valor de $|H(\omega)|$ permite recuperar la información de la onda de entrada y tiene un efecto atenuador si $|H(\omega)| < 1$.

El término $e^{i\theta(\omega)}$ está relacionado con un efecto de traslación de la onda dependiendo si

$$e^{i\theta(\omega)}, \theta(\omega) = 0 \quad ; \quad \text{onda sin traslación}$$

$$e^{i\theta(\omega)}, \theta(\omega) = \omega k_2 > 0 \quad ; \quad \text{onda con traslación negativa}$$

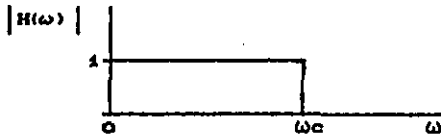
$$e^{i\theta(\omega)}, \theta(\omega) = \omega k_2 < 0 \quad ; \quad \text{onda con traslación positiva}$$

De las observaciones anteriores de $|H(\omega)|$ y $e^{i\theta(\omega)}$ se tiene que, si $|H(\omega)| = 1$ y $e^{i\theta(\omega)} = 1$ ($\theta(\omega) = 0$), entonces, $H(\omega) = 1$ y la forma de la onda de salida es idéntica a la de entrada.

Un filtro que distorsiona la forma de la onda de entrada es conocido como "ideal". La distorsión en la forma de la onda se

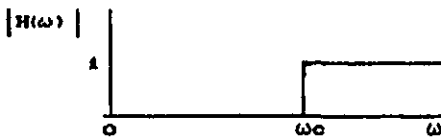
puede provocar por la introducción de al menos una frecuencia de corte. Los filtros ideales más conocidos son los siguientes.

a) FILTRO PASABAJAS



Este filtro recupera únicamente la información contenida en el rango $0 < \omega < \omega_c$ y deja de lado la información para $\omega > \omega_c$.

b) FILTRO PASAALTAS



Este filtro, a diferencia del anterior, solo transfiere frecuencias mayores o iguales que ω_c . Es decir, $\omega > \omega_c$.

c) FILTRO PASABANDAS



Este filtro solo permite recuperar la información contenida en la banda definida por $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$.

El filtro utilizado en la estimación del gasto base, por medio de la metodología propuesta en este trabajo, es de características pasabajas, ya que se encuentra definido en el intervalo $0 \leq \omega \leq \omega_c$.

A.10. LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

La transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT) no es la definición de una nueva función, es únicamente un algoritmo que permite obtener la transformada de Fourier conocida de una manera más rápida. El algoritmo correspondiente puede ser utilizado para propósitos generales (Bendat y Piersol, 1971).

La forma discreta de la transformada de Fourier para la k -ésima ordenada esta dada por

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink2\pi/N}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{(A.10.1)}$$

para simplificar la notación anterior se define

$$W(u) = e^{-i2\pi u/N} \quad \text{(A.10.2)}$$

obsérvese que

$$\left. \begin{aligned} W(N) &= 1, \quad \text{dado que } e^{-i2\pi} = 1 \\ W(u+v) &= e^{-i2\pi u/N} e^{-i2\pi v/N} = W(u) W(v) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10.3})$$

haciendo $F_k = F(k)$ y $f_n = f(n)$, $F(k)$ se puede expresar como

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W(kn), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{A.10.4})$$

El procedimiento de la transformada rápida de Fourier (FFT) puede estar basado en la descomposición de N en un producto de factores (distintos de la unidad) de la forma

$$N = \prod_{i=1}^p r_i = r_1 r_2 r_3 \dots r_p \quad (\text{A.10.5})$$

Un procedimiento general de solución para la ecuación (A.10.4) es el siguiente (Bendat y Piersol, 1971).

Los índices k y n de la ecuación (A.10.4) se pueden evaluar por

$$\left. \begin{aligned} k &= \sum_{v=0}^{p-1} k_v \prod_{i=0}^v r_i, \quad \text{donde } k_v = 0, 1, 2, \dots, r_{v+1}-1 \\ &\quad r_0 = 1 \\ n &= \sum_{v=0}^{p-1} n_v \prod_{i=0}^v r_{m+i-i}, \quad \text{donde } n_v = 0, 1, 2, \dots, r_{p-v}-1 \\ &\quad r_{p+1} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10.6a})$$

la ecuación (A.10.6a) puede ser interpretada como

$$\left. \begin{aligned} k &= k_0 + k_1 r_1 + k_2 r_1 r_2 + \dots + k_{p-1} (r_1 r_2 \dots r_{p-1}) \\ n &= n_0 + n_1 r_1 + n_2 r_1 r_2 + \dots + n_{p-1} (r_1 r_2 \dots r_{p-1}) \end{aligned} \right\} \text{(A.10.6b)}$$

donde

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= 0, 1, 2, \dots, r_1 - 1 & n_0 &= 0, 1, 2, \dots, r_p - 1 \\ K_1 &= 0, 1, 2, \dots, r_2 - 1 & n_1 &= 0, 1, 2, \dots, r_{p-1} - 1 \\ &\vdots & &\vdots \\ K_{p-1} &= 0, 1, 2, \dots, r_p - 1 & n_{p-1} &= 0, 1, 2, \dots, r_1 - 1 \end{aligned} \right\} \text{(A.10.7)}$$

con lo cual

$$F(k) = F(k_0, k_1, k_2, \dots, k_{p-1}) =$$

$$\sum_{n_0=0}^{r_1-1} \sum_{n_1=0}^{r_2-1} \dots \sum_{n_{p-2}=0}^{r_2-1} \sum_{n_{p-1}=0}^{r_1-1} f(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) W(k_n) \quad \text{(A.10.8)}$$

donde

$$W(k_n) = W \left(k \left[n_0 + n_1 r_1 + \dots + n_{p-1} (r_1 r_2 \dots r_{p-1}) \right] \right) \quad \text{(A.10.9)}$$

k se evalúa de (A.10.6b).

una manera alternativa de escribir k es

$$k = Ck_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-1} r_1 r_2 \dots r_{v-1} + C(r_1 r_2 \dots r_v) \\ Ck_v + k_{v+1} r_{v+1} + \dots + k_{p-1} r_{v+1} r_{v+2} \dots r_{p-1} \quad (\text{CA.10.10})$$

un término importante de (CA.10.8) es

$$K(n_{p-v} C r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}) \quad (\text{CA.10.11})$$

si sustituimos k de (CA.10.10) se tiene

$$K(n_{p-v} C r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}) = Ck_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-1} r_1 r_2 \dots r_{v-1} \\ n_{p-v} C r_p r_{p-1} \dots r_{v+1} + C(r_1 r_2 \dots r_v) C(r_{v+1} r_{v+2} \dots r_{p-1}) n_{p-v} \\ Ck_v + k_{v+1} r_{v+1} + \dots + k_{p-1} r_{v+1} r_{v+2} \dots r_{p-1} \quad (\text{CA.10.12})$$

$N = C(r_1 r_2 \dots r_v) C(r_{v+1} r_{v+2} \dots r_{p-1})$ y el segundo término del lado derecho se vuelve una potencia entera de N , de donde $W(\cdot)$ de cualquier potencia entera de N es igual a la unidad para $v = 1, 2, 3, \dots, p$. Por lo que (CA.10.8) se puede escribir como

$$W[k(n_{p-v} C r_p r_{p-1} \dots r_{v+1})] = \\ = W[Ck_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-1} r_1 r_2 \dots r_{v-1} n_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}] \quad (\text{CA.10.13})$$

para $v = 1$ de (A.10.13)

$$\begin{aligned}
 W[K(n_{p-1} r_p r_{p-1} \dots r_2)] &= W[k_0 n_{p-1} r_p r_{p-1} \dots r_2] \\
 &= W\left[\frac{k_0 n_{p-1} N}{r_1}\right] = e^{-i2\pi k_0 n_{p-1} / r_1} \quad \text{(A.10.14)}
 \end{aligned}$$

para $v = 2, 3, \dots, p$ la ecuación (A.10.13) se vuelve el producto de dos factores

$$\begin{aligned}
 &W[K n_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}] = \\
 &W[k_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-2} r_1 r_2 \dots r_{v-2}] n_{p-v} (r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}) \\
 &W[k_{v-1} r_1 r_2 \dots r_{v-1} n_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}] \quad \text{(A.10.15)}
 \end{aligned}$$

como se observa, en el segundo término solo falta el factor r_v ; por lo cual éste puede ser escrito como

$$W\left(\frac{k_{v-1} n_{p-v} N}{r_v}\right) = e^{-i2\pi k_{v-1} n_{p-v} / r_v} \quad \text{(A.10.16)}$$

si además denotamos por $T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2})$ al primer término del producto (A.10.15), la ecuación (A.10.15) queda como

$$W(kn) = \prod_{v=1}^p T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) W\left(\frac{k_{v-1} n_{p-1} N}{r_v}\right) \quad \text{(A.10.17)}$$

donde

$$T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) = \begin{cases} 1, & \text{para } v = 1 \\ W[k_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-2} r_1 r_2 \dots r_{v-2}] & \text{CA.10.18)} \\ (n_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}) \end{cases}, v = 2, 3, \dots, p$$

considerando (CA.10.8a) en (CA.10.8) se tiene

$$F(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = \sum_{n_0=0}^{r_p-1} T(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}) W\left(\frac{k_{p-1} n_0 N}{r_p}\right) \\ + \sum_{n_1=0}^{r_{p-1}-1} T(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}) W\left(\frac{k_{p-2} n_1 N}{r_{p-1}}\right) \\ + \dots \\ + \sum_{n_{p-2}=0}^{r_2-1} T(k_0) W\left(\frac{k_1 n_{p-2} N}{r_2}\right) \\ + \sum_{n_{p-1}=0}^{r_1-1} f(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) W\left(\frac{k_0 n_{p-1} N}{r_1}\right)$$

CA.10.19)

La ecuación (CA.10.19) indica que la transformada de Fourier puede ser calculada en p iteraciones. Considerando la suma más interior de (CA.10.19) se tiene

$$A_1(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}) = \sum_{n_{p-1}=0}^{r_1-1} f(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) \\ W\left(\frac{k_0 n_{p-1} N}{r_1}\right)$$

CA.10.20)

$$A_2 C(k_0, k_1, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}) = \sum_{n_{p-2}=0}^{r_2-1} A_1 C(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}) T C(k_0) W \left[\frac{k_1 n_{p-2} N}{r_2} \right] \quad \text{CA.10.21}$$

generalizando

$$A_v C(k_0, k_1, \dots, k_{v-1}, n_0, n_1, \dots, n_{p-v}) = \sum_{n_{p-v}=0}^{r_v-1} A_{v-1} C(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}, n_0, n_1, \dots, n_{p-v}) T C(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) W \left[\frac{k_{v-1} n_{p-v} N}{r_v} \right] \quad \text{CA.10.22}$$

para el último paso se tiene

$$F C(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = A C(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = \sum_{n_0=0}^{r_p-1} A_{p-1} C(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}, n_0) T C(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}) W \left[\frac{k_{p-1} n_0 N}{r_p} \right] \quad \text{CA.10.23}$$

Como se observa, en el procedimiento descrito anteriormente para el cálculo de la FFT, N puede estar dado por p factores r_p . En general puede tenerse: $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \dots \neq r_p$, por lo que el algoritmo más general será para r 's distintas que conformen una N dada. También puede pensarse en $N = b^p$, donde b es una base y p una potencia, ambos enteros. La restricción es que $b \neq 1$ ($b = 2, 3, \dots$); este es el caso de $r_1 = r_2 = \dots = r_p = b$.

A.11. PROCEDIMIENTO DE COOLEY Y TUKEY PARA EL CALCULO DE LA FFT

El procedimiento de Cooley y Tukey (1965) corresponde al caso particular de $N = 2^p$, siendo necesario incluir ceros a la secuencia de datos para satisfacer este requerimiento. El método requiere trabajar con un sistema binario.

Las ecuaciones (A.10.8b) se transforman para este caso en

$$\left. \begin{aligned} k &= k_0 + 2k_1 + 2^2k_2 + \dots + 2^{p-1}k_{p-1} \\ n &= n_0 + 2n_1 + 2^2n_2 + \dots + 2^{p-1}n_{p-1} \end{aligned} \right\} \quad \text{CA.11.1)}$$

donde k y n son números binarios.

Como $r_v = 2$, (A.10.16) se vuelve

$$W\left(\frac{k_{v-1} n_{p-v} N}{r_v}\right) = e^{-i\pi k_{v-1} n_{p-v}} \quad \text{CA.11.2)}$$

donde $W(\cdot)$ de (A.11.2) toma valores únicamente en el rango $[0,1]$

La ecuación (A.10.18) se expresa por

$$T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) = \begin{cases} 1, & \text{para } v = 1 \\ W[(k_0 + 2k_1 + \dots + 2^{v-2}k_{p-v})2^{p-v}n_{p-v}] & \text{para } v = 2, 3, \dots, p \end{cases} \quad \text{CA.11.3)}$$

La ecuación (A.10.8) para el caso de $p = 2$ es

$$F(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) =$$

$$\sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \dots \sum_{n_{p-2}=0}^1 \sum_{n_{p-1}=0}^1 f(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) W(kn) \quad (\text{A.11.4})$$

donde

$$W(kn) = \prod_{v=1}^p T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) e^{-ink_{v-1} n_{p-v}} \quad (\text{A.11.5})$$

El primer paso se calcula de (A.10.20) y queda

$$A_1(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}) = \sum_{n_{p-1}=0}^1 f(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) e^{-ink_0 n_{p-1}} \quad (\text{A.11.6})$$

El v -ésimo paso, para $v = 2, 3, \dots, p-1$, se obtiene de (A.10.22), el cual se evalúa de

$$A_v(k_0, k_1, \dots, k_{v-1}, n_0, n_1, \dots, n_{p-v-1}) = \sum_{n_{p-v}=0}^1 A_{v-1}(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}, n_0, \dots, n_{p-v-1}) T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) e^{-ink_{v-1} n_{p-v}} \quad (\text{A.11.7})$$

Para el último paso de la ecuación (A.10.23) se obtiene

$$F(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = A_p(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = \sum_{n_0=0}^1 A_{p-1}(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}, n_0) T(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}) e^{-j\pi k_{p-1} n_0} \quad (\text{A.11.8})$$

El procedimiento anterior, para $N = 2^p$, es conocido como el algoritmo de la transformada rápida de Fourier de Cooley y Tukey. Como se observa, se pueden derivar algoritmos para la obtención de la FFT para cualquier número b (base).

A P E N D I C E

B

I N D I C E

B. PROGRAMA DE COMPUTO Y EJEMPLOS DE APLICACION

B.1. PROGRAMA DE COMPUTO

B.2. EJEMPLOS

En este apéndice se presenta el listado del programa de estimación del gasto base adecuado al algoritmo de optimización de Rosenbrock para la estimación de parámetros del filtro pasabajas y los resultados del ejemplo.

B.1. PROGRAMA DE COMPUTO

```

$LARGE
PROGRAM QBASEN
C
C VERSION 3 PARAMETROS
C *****
C *
C * PROGRAMA 'QBASE'. CALCULO DEL GASTO BASE EN CORRIENTES *
C * PEREÑNES Y EFLUENTES A TRAVES DE TECNICAS DE FILTRADO *
C * MEDIANTE UN FILTRO PASABAJAS. *
C *
C *
C * JOSE LUIS ACOSTA RODRIGUEZ *
C * NOV DE 1988, HERMOSILLO SON *
C *
C *****
C
C
C COMMON A(4100)
C COMMON KOUNT,KEK
C COMMON/CREA/TANO,NBIS,INDAT,ITER
C DIMENSION QB(4100),AA(4100),CGR(3),CHR(3),XOPT(3),XOPG(3)
C *,XL(3)
C CHARACTER*13 DATROSEN,SALROSEN,ENTRAD
C INTEGER OPNUM,CGNM,CHNM,TKT,P
C REAL QMED
C COMPLEX A,AA
C
C WRITE(*,105)
C READ(*,85) DATROSEN
C
C ***** APERTURA DE UNIDADES *****
C
C OPEN(UNIT=4,FILE=DATROSEN,STATUS='OLD')
C OPEN(2,FILE='PRN',STATUS='OLD')
C OPEN(UNIT=3,FILE='SALROSEN',STATUS='NEW')
C OPEN(1,FILE='CON',STATUS='OLD')
C
C ***** ELECCION DE UNIDAD DE SALIDA *****
C
C WRITE(*,345)
C READ(*,346)NO
C WRITE(NO,31)
C

```

```

C ***** LECTURA DE DATOS DE OPTIMIZACION *****
C
N=2
P=2
TKT=0
READ(4,1111)NW1
WRITE(NO,1111)NW1
10 READ(4,2) (XL(K),K=1,P)
WRITE(NO,2) (XL(K),K=1,P)
NW=NW1
TAU=XL(1)
C=XL(2)
C
READ(4,88)NW1,NW1,NW2,NW2
WRITE(NO,88)NW1,NW1,NW2,NW2
READ(4,66)ALPHA
WRITE(NO,66)ALPHA
C
READ(4,43)CGNW
WRITE(NO,43)CGNW
READ(4,151)(CGR(K),K=1,P)
WRITE(NO,151)(CGR(K),K=1,P)
READ(4,43)CHNW
WRITE(NO,43)CHNW
READ(4,151)(CHR(K),K=1,P)
WRITE(NO,151)(CHR(K),K=1,P)
C
C ***** LECTURA DE DATOS HIDROMETRICOS *****
C
WRITE(*,106)
READ(*,85)ENTRAD
C
CALL LECTUR(ENTRAD,NDATOT,NB,QR,QMED)
C
C ***** INICIA ITERACION DE OPTIMIZACION *****
C
DO 48 NWCONT=CGNW-1,CHNW
IF(NWCONT.EQ.NW)THEN
GOTO 48
ELSEIF(NWCONT.EQ.CGWN-1)THEN
NWCON=NW
ELSE
NWCON=NWCONT
ENDIF
C
WRITE(*,83)NWCON
C
C ***** OPTIMIZACION DE TAU Y C PARA NW *****
C

```

```

CALL RSNBRK(XL,CGR,CHR,KIKO,NWCON,FUINI,XOPT,NWOPT,QB,
*QBRD,SALROSEN,MM1,MM2,MM2,ALPHA,NDATOT,NB,NX,AA,NO)
C
C      KIKO=0
C
C      IF (TKT.EQ.0)THEN
C      FOING=FUINI
C      TXT=1
C      ENDDIF
C
C      CALL OPTIMUN(XOPT,FUINI,XOPG,N,TKT,FOING,NWOPT,NWOPTG)
C
C      XL(1)=TAU
C      XL(2)=C
C      FUINI=FUINI*100
48  CONTINUE
C
C
C      ***** RESULTADO FINAL DE OPTIMIZACION *****
C
C      WRITE(NO,908)
C      WRITE(NO,937)FOING
C      WRITE(NO,459)NWOPTG
C      WRITE(NO,919)XOPG(1)+1,XOPG(2)
C
C      ***** IMPRESION OPCIONAL DEL GASTO BASE *****
C
C      DO 34 JL=1,NB
C      A(JL)=AA(JL)
34  CONTINUE
C      CALL FILFREQ(NB,NDATOT,XOPG,N,NWOPTG)
C      CALL FFTM(NX,NB)
C      WRITE(3,1233)INT(XOPG(1)+1)
C
C      1240 WRITE(*,1239)
C      READ(*,1236)OPNUM
C      IF(OPNUM.EQ.1)THEN
C      DO 1234 JL=1,1024
C      WRITE(3,1232)REAL(A(JL))
1234 CONTINUE
C
C      ELSEIF(OPNUM.NE.2)THEN
C      WRITE(*,*) 'OPCION ERRONEA'
C      GOTO 1240
C      ENDDIF
C
C
C      ***** FORMAS DE IMPRESION Y LECTURA *****
C
C      105  FORMAT(/,T10,'ARCH. DE DATOS DEL ALGORITMO =? ',5)

```

```

85   FORMAT(A13)
345  FORMAT(/,T10,' NUMERO DEL DISPOSITIVO DE SALIDA',//,
*    T10,' 1) MONITOR ',/,
*    T10,' 2) IMPRESORA',/,
*    T10,' 3) DISCO (ARCHIVO SALROSEN)',//,
*    T10,' DE OPCION ',/$)
346  FORMAT(I2)
31   FORMAT(T10,' ARCHIVO DE ENTRADA DATROSEN',/)
1111 FORMAT(I10,$)
2    FORMAT(2F10.3)
88   FORMAT(4I5)
66   FORMAT(F10.2)
43   FORMAT(I10,$)
151  FORMAT(2F10.2)
83   FORMAT(/T10,' ITERACION CON NW= ',I4)
106  FORMAT(////,T10,' ARCH. DE GASTO MEDIO DIARIO A LEEB..(Qt.EXT)',/$)
1233 FORMAT(/,' TAU=' ,I6)
1239 FORMAT(T10,' DESEA GUARDAR INFORMACION NUMERICA',//,
* T10,' 1) SI',/,
* T10,' 2) NO',/,
* T10,' OPCION=' $)
1236 FORMAT(I2)
1232 FORMAT(F7.2)
908  FORMAT(///T10,' VALORES FINAL DE OPTIMIZACION',/)
937  FORMAT(/T10,' OPTIMO DE LA FUNCION OBJ = ',F10.2,/)
459  FORMAT(/,T10,' NW = ',I5,$)
919  FORMAT(/,T10,' TAU = ',F10.3,' C = ',F10.3)

```

C
C

STOP
END

C
C
C
C
C

SUBROUTINE BSNBRK(X,CGR,CHR,KIKO,NWCON,FUIN,XOP,NWOPT,
*QR,QMED,SALROSEN,NM1,NM2,NM2,ALPHA,NDATOT,NB,NX,AA,
*NO)

C

COMMON VEC(4100)
COMMON KOUNT,KKK
DIMENSION X(7),E(7),V(7,7),SA(7),D(7),G(7),H(7),AL(7),
*PH(7),A(7,7),B(7,7),BX(7),DA(7),VV(7,7),EINT(7),VM(7),
*XOP(7),XIP(7),AA(4100),CGR(7),CHR(7),QB(4100),QR(4100)
CHARACTER*13 SALROSEN
INTEGER P,PR,B,C
REAL LC
COMPLEX VEC,AA
NP=2

```

C
WRITE(NO,13)
13  FORMAT(//,10X,30HROSENBRCK HILLCLIMB PROCEDURE)
ND=0
M=-1
P=2
L=2
LOOPY=100
PR=1
ND=0
NDATA=0
NSTEP=1

C
DO 64 I=1,P
IF(I.EQ.1)THEN
E(I)=0.5*X(I)
ELSE
E(I)=0.5*Y(I)
ENDIF
64  CONTINUE

C
IF(ND-1) 30,20,30
20  DO 300 KA=1,NDATA
67  READ(4,67) DA(KA)
67  FORMAT(6F10.4)
300  CONTINUE

C
30  LAP=PR-1
LOOP=0
ISW=0
INIT=0
KOUNT=0
TERM=0.0
DELY=1.0E-1
F1=0.0
NPAR=NDATA
N=L
DO 40 K=1,L
40  AL(K)=(CH(X,DA,N,NPAR,E,CHR)-CG(X,DA,N,NPAR,K,CGR))*0.0001
DO 60 I=1,P
DO 60 J=1,P
V(I,J)=0.0
IF(I-J) 60,61,60
61  V(I,J)=1.0
60  CONTINUE
DO 65 KK=1,P
EINT(KK)=E(KK)
65  CONTINUE
C
1000 DO 70 J=1,P

```

```

IF(NSTEP.EQ.0) E(J)=RINT(J)
SA(J)=2.0
70 D(J)=0.0
FBEST=F1
80 I=1
IF(INIT.EQ.0)GOTO 120
90 DO 110 K=1,P
110 X(K)=X(K)+E(I)*V(I,K)
DO 50 K=1,L
50 H(K)=F0
120 F1=F(X,DA,N,NPAR,NW1,NM1,NW2,MM2,AA,MP,
*ALPHA,QR,NWCON,KIKO,QRED,NDATOT,NB,NX)
C
DELY=0.02*F1
DO 499 J=1,L
XC=CX(X,DA,N,NPAR,J)
LC=CG(X,DA,N,NPAR,J,CGR)
UC=CH(X,DA,N,NPAR,J,CHR)
IF(XC.LE.LC) GOTO 501
IF(XC.GE.UC) GOTO 501
IF(XC.LT.LC+AL(J)) GOTO 501
IF(XC.GT.UC-AL(J)) GOTO 501
499 CONTINUE
CALL OPTIMON(X,F1,XOP,N,KOKA,FUIN,NWCON,NWOPT)
501 WRITE(NO,987)NWCON,X(1),X(2),F1
WRITE(*,987)NWCON,X(1),X(2),F1
987 FORMAT(5X,110,3F16.4)
WRITE(NO,988)NWCON,INT(X(1)+1),X(2)
988 FORMAT(5X,2I15,F13.3)
F1=H*F1
IF(ISW.EQ.0) F0=F1
ISW=1
IF(ABS(FBEST-F1)-DELY)122,122,125
122 TEBH=1.0
GOTO 450
125 CONTINUE
C
J=1
C
130 XC=CX(X,DA,N,NPAR,J)
LC=CG(X,DA,N,NPAR,J,CGR)
UC=CH(X,DA,N,NPAR,J,CHR)
IF(XC.LE.LC) GOTO 420
IF(XC.GE.UC) GOTO 420
IF(F1.LT.F0) GOTO 420
IF(XC.LT.LC+AL(J)) GOTO 140
IF(XC.GT.UC-AL(J)) GOTO 140
H(J)=F0
GOTO 210
C

```



```

140 CONTINUE
C
    BW=AL(J)
C
    IF(XC.LR.LC.OR.UC.LE.XC) GOTO 150
    IF(LC.LT.XC.AND.XC.LT.LC+BW) GOTO 160
    IF(UC-BW.LY.XC.AND.XC.LT.UC) GOTO 170
    PH(J)=1.0
    GOTO 210
C
150 PH(J)=0.0
    GOTO 190
160 PW=(LC+BW-XC)/BW
    GOTO 180
170 PW=(XC-UC+BW)/BW
180 PH(J)=1.0-3.0*PW+4.0*PW*PW-2.0*PW*PW*PW
C
190 FI=R(J)+(FI-R(J))*PH(J)
C
210 CONTINUE
    IF(J.EQ.L) GOTO 220
    J=J+1
    GOTO 130
C
220 INIT=1
    IF(FI.LT.F0) GOTO 420
    D(I)=D(I)+R(I)
    R(I)=3.0*R(I)
    F0=FI
    IF(SA(I).GE.1.5) SA(I)=1.0
C
230 DO 240 JJ=1,P
    IF(SA(JJ).GE.0.5) GOTO 440
240 CONTINUE
C
    ROTACION DE EJES (AXES ROTATION)
C
    DO 250 R=1,P
    DO 250 C=1,P
250 VV(C,R)=0.0
    DO 260 R=1,P
    KR=R
    DO 260 C=1,P
    DO 265 K=KR,P
265 VV(R,C)=D(K)*V(K,C)+VV(R,C)
260 B(R,C)=VV(R,C)
    BMAG=0.0
    DO 280 C=1,P
    BMAG=BMAG+B(1,C)*B(1,C)
280 CONTINUE

```

```

      BMAG=SQRT(BMAG)
      BX(1)=BMAG
      DO 310 C=1,P
310   V(1,C)=B(1,C)/BMAG
      C
      DO 390 R=2,P
      C
      IR=R-1
      DO 390 C=1,P
      SUMVN=0.0
      DO 320 KK=1,IR
      SUMAV=0.0
      DO 330 KJ=1,P
330   SUMAV=SUMAV+V(R,KJ)*V(KK,KJ)
320   SUMVN=SUMAV+V(KK,C)+SUMVN
390   B(R,C)=V(R,C)-SUMVN
      DO 340 R=2,P
      BBMAG=0.0
      DO 350 K=1,P
350   BBMAG=BBMAG+B(R,K)*B(R,K)
      BBMAG=SQRT(BBMAG)
      DO 340 C=1,P
340   V(R,C)=B(R,C)/BBMAG
      LOOP=LOOP+1
      LAP=LAP+1
      IF(LAP.EQ.PR) GOTO 450
      GOTO 1000
      C
      IF(INIT.EQ.0) GOTO 450
      DO 430 IX=1,P
430   X(IX)=X(IX)-B(IX)*V(IX,IX)
      E(I)=-0.5*X(I)
      IF(SA(I).LT.1.5) SA(I)=0.0
      GOTO 230
      C
      440 CONTINUE
      IF(I.EQ.P) GOTO 80
      I=I+1
      GOTO 90
      C
      450 GOTO 666
      C450 WRITE(NO,3)
      C3  FORMAT(//,2X,5HSTAGE,8X,8HFUNCTION,12X,12X,8HPROGRESS,9X,
      C   *16HLATERAL PROGRESS)
      C   WRITE(NO,4) LOOP,PO,BMAG,BBMAG
      C4  FORMAT(1H,15,3E20.8)
      C   WRITE(NO,14) KOONT
      C14  FORMAT(/,2X,33HNUMBER OF FUNCTION EVALUATIONS = ,I8)
      C   WRITE(NO,5)
      C5  FORMAT(/,2X,25HVALOBS OF X AT THIS STAGE)

```

```

C PRINT CURRENT VALUES OF X
C WRITE(NO,6) (JH,X(JH),JH=1,P)
C6 FORMAT (/,2X,3(2HX(,I2,4H) = ,1PE14.6,4X))
C
666 LAP = 0
IF (INIT.EQ.0) GO TO 470
IF (TERM.EQ.1.0) GO TO 480
IF (LOOP.GE.LOOPY) GO TO 480
GO TO 1000

C
470 WRITE (NO,7)
7 FORMAT (///,2X,81HTHE STARTING POINT MUST NOT VIOLATE THE CONSTRA
*INTS. IT APPEARS TO HAVE DONE SO.)
480 CONTINUE
490 GOTO 777
C490 WRITE (NO,8)
C8 FORMAT (///,2X,29HFINAL DIRECTION VECTOR MATRIX)
C DO 500 J=1,P
C500 WRITE (NO,9) (J,I,V(J,I), I=1,P)
C9 FORMAT (/,2X,3(2HV(,I2,1H,,I2,4H) = ,F10.8,4X))
C WRITE (NO,11)
C11 FORMAT (///,2X,16HFINAL STRP SIZES)
C WRITE (NO,12) (J,R(J), J=1,P)
C12 FORMAT (/,2X,3(2HS(,I2,4H) = ,1PE14.6,4X))
C
777 WRITE(NO,908)
908 FORMAT(///T10, ' VALORES OPTIMOS DE LA ITERACION',/)
WRITE(NO,937)PUIN
937 FORMAT(T10, ' OPTIMO DE LA FUNCION OBJ = ',F10.2,/)
WRITE(NO,459)NWOPT
WRITE(NO,919)XOP(1)+1,XOP(2)
459 FORMAT(/,T10, ' NW = ',I5,9)
919 FORMAT(/,T10, ' TAU = ',F10.3, ' C = ',F10.3)
C
RETURN
END

C
C
C
C
C
FUNCTION F(X,DA,N,NPAR,NM1,NM2,NM3,AA,WP,
*ALPHA,QR,NWCON,KIKO,QKED,NDATOT,NB,NX)
C
COMMON A(4100)
COMMON KOUNT,KEK
DIMENSION X(N),DA(NPAR),AA(4100),QR(4100)
REAL SU
COMPLEX A,AA
INTEGER TO,WO

```

```

IF(KKK.EQ.0)THEN
CALL CHRADO(NDATOT,NB,NX)
CALL FFT(NX,NB,AA)
ENDIF
IF(INT(NWCON).EQ.WO)GOTO 20
DO 34 JL=1,NB
A(JL)=AA(JL)
34 CONTINUE
WO=NWCON
TO=INT(X(1)+1)
CO=X(2)
CH=X(4)
KIKO=0
20 IF(KIKO.NE.0)THEN
CALL FILTIEM(N,X,NB,NDATOT,CO,TO,WO,KIKO,CM,QMED)
ELSE
CALL FILFREQ(NB,NDATOT,X,N,NWCON)
CALL FFTM1(NX,NB)
ENDIF
KKK=KKK+1
CALL SUMA(MM1,MM1,MM2,MM2,SU,QR,MP,ALPHA)
KIKO=KIKO+1
F=SU
C
COUNT=COUNT+1
RETURN
END
C
C
FUNCTION CK(X,DA,N,NPAR,X)
C
DIMENSION X(N),DA(NPAR)
C
CX=X(X)
C
RETURN
END
C
C
C
FUNCTION CG(X,DA,N,NPAR,K,CGR)
C
DIMENSION X(N),DA(NPAR),CGR(N)
C
CG=CGR(K)
RETURN
END
C
C
C

```

```

C      FUNCTION CH(X,DA,N,NPAR,K,CHR)
C
C      DIMENSION X(N),DA(NPAR),CHR(N)
C
C      CH=CHR(K)
C      RETURN
C      END
C
C
C
C      SUBROUTINE OPTIMON(X,F1,XOP,N,KOKA,FUIN,NWCON,NWOPT)
C
C      DIMENSION X(N),XOP(N)
C
C      IF(KOKA.EQ.0)THEN
C          FUIN=F1
C          GOTO 45
C      ELSEIF(F1.LE.FUIN)THEN
C          FUIN=F1
C          DO 34 JL=1,N
C              XOP(JL)=X(JL)
C              NWOPT=NWCON
C34      CONTINUE
C          ENDIF
C45      KOKA=1
C50      RETURN
C      END
C
C
C
C
C      SUBROUTINE SOMA(NN1,MM1,NW2,NW2,SU,QR,NP,ALPHA)
C
C      *****
C      *   SUBROUTINA PARA LA SUMA DE LOS ERRORES AL CUADRADO   *
C      *****
C
C      COMMON A(4100)
C      DIMENSION QR(4100)
C      COMPLEX A
C      REAL QR,SU,GGG
C
C      SU=0.0
C      KONGGG=0
C      GGGAU=0.6
C
C      DO 5 I=1,NP
C          IF(I.EQ.1)THEN
C              NN=NN1

```

```

ELSE
  NN=NN2
  NN=NN2
ENDIF
DO 9 JL=NN,NN
  SU=SU+((QR(JL)-REAL(A(JL)))/QR(JL))**2
  SU=SU+((QR(JL)-REAL(A(JL)))*I)**2
  GGG=QR(JL)-REAL(A(JL))
  KROP=-ALPHA*QR(JL)
  IF(GGG.GT.KROP)GOTO 9
  KONGGG=KONGGG+1
  GGGAUX=GGGAUX+GGG
9 CONTINUE
5 CONTINUE
IF(KONGGG.EQ.0)THEN
  GOTO 851
ELSE
  GGGAUX=GGGAUX/KONGGG
  SU=SU+SU**(1+ABS(GGGAUX)/QR(JL))
ENDIF
851 RETURN
END

C
C
C
C
SUBROUTINE LECTOR(ENTRAD,NDATOT,NB,QR,QNED)
C
C *****
C *  ROTINA PARA LA LECTURA DE DATOS DEL ARCHIVO DEL GASTO *
C *  TOTAL, LOS CUALES SON INTRODUCIDOS EN LA VARIABLE COMPLEJA *
C *  "A", TENIENDO EN SU PARTE REAL EL ARCHIVO DE DATOS LEIDO *
C *  Y EN SU PARTE IMAGINARIA CEROS. *
C *****
C
COMMON A(4100)
COMMON KOUNT,KKK
COMMON/CBBA/IAHO,NBIS,INDAT,ITER
DIMENSION Q(10),QR(4100)
COMPLEX A
CHARACTER*13 ENTRAD
INTEGER ANO,CONTA1,CONTA,UNO,CADA10,UNOAUN,CADAUN,ULTIMO
REAL INCADA,NDATO,QR
OPEN(UNIT=5,FILE=ENTRAD,STATUS='OLD')

C
C LECTURA DE DATOS DEL ARCHIVO
C
WRITE(*,*) ' SE LEEN LOS DATOS DEL ARCHIVO...> ',ENTRAD
READ (5,115)NDAT,ANO
ITER=0

```

```

IAÑO=ANO
INDAT=NDAT
CON=0
NDATOT=0
CONTA1=10
CON=CON+1
CONTA=1
INICIA=1
UHO=0
950 ITER=ITER+1
    INCADA=FLOAT(NDAT)/10.
    CADA10=INT(INCADA)
    UNOAU=MOD(NDAT,10)
    CADAUN=0
    ULTIMO=0
    NDATOT=NDATOT+NDAT
C
    DO 241 I=1,(CADA10+1)
        CONTA=CONTA+CADAUN
        CONTA1=CONTA1+CADAUN
        IF (I.EQ.(CADA10+1)) THEN
            ULTIMO=10-UNOAU
            CONTA1=CONTA1-ULTIMO
        ENDIF
        READ (5,246) (Q(K),K=1,10-ULTIMO)
        X=0
        DO 333 J=CONTA,CONTA1
            X=X+1
            A(J)=CMPLX(Q(K),0.0)
            QR(J)=Q(K)
            QHED=QHED+QR(J)
333     CONTINUE
        CADAUN=10
241     CONTINUE
    READ (5,112,END=900)NDAT,ANO
    CONTA=CONTA+1
    CONTA1=CONTA+10
    GOTO 950
900     CLOSE(5)
        QHED=QHED/NDATOT
C
C     ***** FORMAS DE IMPRESION Y LECTURA *****
C
115     FORMAT (////,23X,14,24X,14,/)
246     FORMAT (T10,10(1X,F7.2))
345     FORMAT(/,13)
112     FORMAT(/23X,14,24X,14,/)
C
    RETURN
    END

```

C
C
C

SUBROUTINE CERBADO(NDATOT,NB,N)

C
C
C
C
C
C
C

* RUTINA PARA EL CERADO DE LA VARIABLE COMPLEJA "A" A PARTIR *
* DEL ULTIMO VALOR DEL ARCHIVO LEIDO DEL GASTO TOTAL, HASTA EL *
* VALOR DEL NUMERO BINARIO INMEDIATO *

C
C
C

COMMON A(4100)
COMPLEX A
REAL NDATA

C
C
C

CERBADO

C
C
C

NDATO=FLOAT(NDATOT)
RN=ALOG(NDATO)/ALOG(2.)
IRN=INT(RN)
N=IRN
NB=2**IRN
APRO=MOD(ALOG(NDATO),ALOG(2.))
IF (ABS(APRO) .GE. 1.0E-36) THEN
 IRN=INT(RN+1)
 N=IRN
 NB=2**IRN
 DO 500 I=NDATOT+1,NB
 A(I)=CMPLX(0.0,0.0)

500

CONTINUE
ENDIF
RETURN
END

C
C
C

SUBROUTINE FFT(N,NB,AA)

C
C
C
C
C
C

* RUTINA QUE CALCULA LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER *
* SEGUN EL ALGORITMO DE COOLEY-TUCKEY *

C
C
C
C
C1

COMMON A(4100)
COMPLEX A,AA,0,N,T
DIMENSION AA(4100)
WRITE(*,*) ' CALCULO DE LA FFT'
DIVIDE TODOS LOS ELEMENTOS POR NB
DO 1 J=1,NB
A(J)=A(J)/NB


```

C   REORDENA LA SECUENCIA DE ACUERDO CON LA FIG. 12.8
    NBD2=NB/2
    NBM1=NB-1
    J=1
    DO 4 L=1,NBM1
    IF(L .GE. J)GOTO 2
    T=A(J)
    A(J)=A(L)
    A(L)=T
2   K=NBD2
3   IF (K .GE. J)GOTO 4
    J=J-K
    K=K/2
    GOTO 3
4   J=J+K
C   CALCULO DE LA FFT DE ACUERDO CON LA FIG. 12.5
    PI=3.141592653589793
    DO 6 N=1,N
    U=(1.0,0.0)
    NR=2**N
    K=NR/2
    W=CMPLX(COS(PI/K),-SIN(PI/K))
    DO 5 J=1,K
    DO 5 L=J,NB,NR
    LPK=L+K
    T=A(LPK)*U
    A(LPK)=A(L)-T
5   A(L)=A(L)+T
6   U=U*W
    DO 7 JL=1,NB
    AA(JL)=A(JL)
7   CONTINUE
    RETURN
    END

C
C
C
C   SUBROUTINE FFTM1(N,NB)
C
C   *****
C   *   ROTINA QUE CALCULA LA ANTITRANSFORMADA DE FOURIER VIA FFT *
C   *****
C
C   COMMON A(4100)
C   COMPLEX A,U,W,T
C   WRITE(*,*) '   CALCULO DE LA FFTM1'
C   DIVIDE TODOS LOS ELEMENTOS POR NB
    DO 1 J=1,NB
1   A(J)=A(J)/NB
C   REORDENA LA SECUENCIA DE ACUERDO CON LA FIG. 12.8

```

```

NBD2=NB/2
NBM1=NB-1
J=1
DO 4 L=1,NBM1
IF(L .GE. J)GOTO 2
T=A(J)
A(J)=A(L)
A(L)=T
2 K=NBD2
3 IF (K .GE. J)GOTO 4
J=J-K
K=K/2
GOTO 3
4 J=J+K
C CALCOLO DE LA FFT DE ACUERDO CON LA FIG. 12.5
PI=3.141592653589793
DO 6 M=1,N
U=(1.0,0.0)
NR=2**M
K=NR/2
W=CMPLX(COS(PI/K),SIN(PI/K))
DO 6 J=1,K
DO 5 L=J,NB,MB
LPK=L+K
T=A(LPK)*U
A(LPK)=A(L)-T
5 A(L)=A(L)+T
6 U=U*W
RETURN
END

```

C
C
C
C

SUBROUTINE FILFREQ(NB,NDATOT,X,N,NWCON)

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

*****
*  RUTINA AUXILIAR PARA UN FILTRADO DE NATURALEZA          *
*  COMPLEJA PARA FC=Nw                                     *
*****

```

```

NW=NWCON
X(1)=Tdu
X(2)=C
X(4)=CN DE VERSION 4 PARAM. (NO OPERA)

```

```

COMMON A(4100)
DIMENSION X(N)
COMPLEX A,BT,ARHEN,BTM

```

```

REAL DW,LAMDA,BETA
BETA=X(2)
BT=CMPLX(BETA,0.0)
IF(N.EQ.4)THEN
  II=2
  BTM=CMPLX(X(4),0.0)
  A(1)=BTM*A(1)
ELSE
  II=1
ENDIF
  DO 10 I=II,NWCON
    DW=3.141592653589793/(NDATOT-1)
    LAMDA=(I-1)*DW
    ARMWNI=2*INT(X(1)+1)*LAMDA
    ARMEN=CMPLX(COS(ARMWNI),-SIN(ARMWNI))
    A(I)=BT*A(I)*ARMEN
10 CONTINUE
  DO 11 I=NWCON+1,NB
    A(I)=(0.0,0.0)
11 CONTINUE
C
  RETURN
  END
C
C
C
C
SUBROUTINE FILTIBN(N,X,NB,NDATOT,CO,TO,WO,XIKO,CM,QMED)
C
C *****
C *  Rutina para filtrado en el dominio del tiempo para C y TAU *
C *  Variables con Nc FIJO *
C *****
C
C  NW=NO
C  X(1)=TAU
C  X(2)=C
C
C
C  COMMON A(4100)
C  DIMENSION X(N),AUX(4100)
C  COMPLEX A,AUX,CTC,DQ
C  INTEGER WO,TO,DTAU
C  REAL*8 COTO
C  IF(XIKO.NE.1)GOTO 6
C  DO 5 JL=1,NB
C    AUX(JL)=A(JL)
5 CONTINUE
6 DTAU=INT(X(1)-TO)+1
COTO=X(2)/CO

```

```
MM=MM1          CTC=CNPLI(COTO,0.0)
DQ1=(I(4)-CM)*QNEB
DQ=CNPLI(DQ1,0.0)
IF(DTAU.LT.0)GOTO 15
DO 10 JL=1,NB
  IF(JL.GT.DTAU)THEN
    A(JL)=AUX(JL-DTAU)*CTC+DQ
  ELSE
    A(JL)=AUX(NB-DTAU+JL)*CTC+DQ
  ENDIF
10 CONTINUE
GOTO 30
15 DO 20 JL=1,NB
  IF(JL.LE.(NB+DTAU))THEN
    A(JL)=AUX(JL-DTAU)*CTC+DQ
  ELSE
    A(JL)=AUX(JL-NB-DTAU)*CTC+DQ
  ENDIF
20 CONTINUE
30 RETURN
END
```

B.2. EJEMPLOS

Para la corrida del código se requiere de 2 archivos, uno para la optimización restringida de Rosenbrock y otro que corresponde a la información hidrométrica.

ARCHIVO I

FORMATO	PARAMETROS
(3F10.2)	CXCK), K = 1, ..., P)
(S15)	NP, NN1, MM1, NN2, MM2
(F5.2)	ALPHA
(3F10.2)	(CGRCK), K = 1, ..., P)
(3F10.2)	(CHRCK), K = 1, ..., P)

donde:

X, vector de inicio de variables independientes, donde

$X(1) = Nw-1$, $X(2) = \tau$ y $X(3) = C$

K, punto índice

NP, número de periodos de estiaje

NN1, valor índice del inicio del primer periodo de estiaje

MM1, valor índice del final del primer periodo de estiaje

NN2, valor índice del inicio del segundo periodo de estiaje

MM2, valor índice del final del segundo periodo de estiaje

ALPHA, coeficiente de error en la optimización

CGR, vector límite inferior de las restricciones

CHR, vector límite superior de las restricciones

ARCHIVO II

FORMATO	PARAMETROS
(////,23X,I4,24X,I4,/))	NDAT, ANO
(T10,10C1X,F7.2)	(Q(K), K = 1, ..., 10)

donde:

NDAT, número de datos del año

ANO, año de información

Q, gasto medio diario registrado en la estación hidrométrica

K, punto índice

DATOS DE LA CORRIDA (ARCHIVO I)

123456789012345678901234567890

7	35.000	.390
200	400 600 775	
.10		
5	.10	.01
7	80.00	.99

DATOS HIDROMETRICOS (ARCHIVO II)

FUNCION EN EL TIEMPO: Q(t)
ARCHIVO.....MEZCALA.DAT

NO. DE DATOS= 256

A/O = 1940

28.15	28.15	28.15	28.15	28.15	28.15	28.15	28.15	28.15	28.15
28.15	28.15	28.15	28.15	28.15	28.15	28.58	38.70	40.50	41.40
51.00	51.00	49.80	40.50	40.50	41.40	51.00	51.00	49.80	41.40
51.00	51.00	51.00	52.20	70.34	78.80	123.40	93.28	77.39	75.98
64.98	77.39	78.80	91.80	87.36	62.32	51.00	51.00	54.60	78.80
50.32	81.62	105.28	91.80	90.32	75.98	62.32	54.60	74.57	49.80
57.00	323.80	235.00	255.83	211.52	225.50	268.10	394.66	481.18	586.36
622.82	456.20	271.73	147.68	111.36	106.80	103.76	77.39	97.72	153.26
235.09	249.67	314.08	435.22	459.82	351.22	240.43	182.66	153.26	204.86
114.40	96.24	121.60	286.25	220.74	193.76	189.29	189.29	232.64	246.59
235.09	336.74	401.90	187.08	204.86	158.63	151.47	182.66	140.04	125.20
132.40	111.36	106.80	180.45	336.74	317.62	398.28	297.14	365.70	456.20
365.70	286.25	211.52	167.58	149.59	178.24	358.46	304.36	317.62	351.22
445.34	409.14	418.92	418.92	304.36	409.14	428.70	507.28	514.12	497.48
497.48	477.92	425.44	405.52	297.14	237.35	211.52	218.36	193.76	171.61
128.80	123.40	111.36	106.80	111.36	106.80	106.80	108.32	111.36	106.80
108.32	106.80	106.80	106.80	99.20	91.80	88.84	84.40	80.21	77.39
77.39	77.39	75.98	75.98	75.98	75.98	70.34	63.65	63.65	63.65
63.65	63.65	60.99	57.00	53.40	53.40	53.40	53.40	53.40	54.60
59.66	59.66	59.66	59.66	60.99	70.34	74.57	91.80	100.72	93.28
99.20	90.32	75.98	63.65	63.65	63.65	63.65	63.65	57.00	58.33
58.33	55.80	55.80	53.40	53.40	52.20	51.00	53.40	53.40	52.20
53.40	63.65	62.32	69.98	70.34	63.65	59.66	57.00	57.00	55.80
51.00	63.65	57.00	57.00	54.60	51.00	51.00	51.00	51.00	48.60
48.60	49.80	57.00	51.00	51.00	57.00	63.65	57.00	57.00	54.60
54.60	53.40	53.40	51.00	51.00	51.00				

NO. DE DATOS= 365

A/O = 1941

62.20	63.80	62.20	62.20	62.20	62.20	60.60	60.60	58.80	58.80
55.20	55.20	57.00	60.60	58.80	58.80	55.20	55.20	55.20	55.20
55.20	50.40	50.40	50.40	50.40	50.40	52.00	55.20	55.20	57.00
60.60	58.80	55.20	55.20	52.00	50.40	52.00	60.60	60.60	55.20
55.20	55.20	50.40	50.40	53.60	57.00	57.00	55.20	53.60	52.00
50.40	49.05	47.70	46.35	46.35	47.70	47.70	47.70	46.35	45.00
45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	43.80	42.60	42.60	41.40	41.40
42.60	41.40	41.40	40.27	40.27	39.14	41.40	40.27	39.14	40.27
39.14	41.40	43.80	43.80	45.00	43.80	43.80	41.40	40.27	39.14
39.14	39.14	38.00	38.00	37.00	37.00	37.00	37.00	37.00	37.00
36.00	36.00	36.00	37.00	37.00	37.00	37.00	37.00	36.00	36.00
36.00	36.00	37.00	39.14	37.00	39.14	45.00	57.00	60.60	60.60
55.20	52.00	53.60	50.40	49.05	46.35	43.80	43.80	41.40	40.27
39.14	36.00	36.00	36.00	35.00	34.00	34.00	34.00	35.00	34.00
34.00	34.00	35.00	35.00	35.00	37.00	43.80	72.00	68.67	81.10
84.40	82.75	88.14	84.40	90.00	149.40	232.05	467.06	506.88	463.44
383.80	171.80	162.35	222.00	467.06	340.36	387.42	647.76	604.41	517.74
438.10	347.60	558.46	380.18	229.40	208.80	322.26	492.40	546.65	208.80
206.40	300.84	293.80	219.20	171.80	189.00	391.04	496.02	658.62	579.14
582.75	582.75	420.00	474.30	568.31	562.08	264.05	222.00	189.00	179.20
224.47	514.12	528.60	336.74	226.94	224.47	208.80	204.00	194.07	184.10
157.85	138.40	138.40	124.40	110.67	110.67	104.80	116.40	112.54	126.40
153.54	162.35	164.60	144.74	142.40	136.40	162.35	142.40	136.40	116.40
106.80	144.74	206.40	181.65	136.40	155.60	167.00	268.10	329.50	387.42
325.88	304.36	234.70	219.20	232.05	351.22	311.40	256.67	264.05	234.70
387.42	322.26	322.26	398.28	383.80	448.86	423.62	589.97	543.04	423.62
398.28	463.44	597.19	420.00	604.41	528.60	503.26	582.75	586.36	597.19
644.14	608.02	438.10	644.14	1042.02	730.99	683.96	1063.76	1060.14	958.88
893.72	861.18	644.14	510.50	405.52	351.22	311.40	272.15	246.67	246.67
256.67	204.00	201.54	246.67	219.20	201.54	184.10	189.00	196.60	216.40
300.84	315.02	340.36	343.98	279.72	340.36	365.70	269.32	372.94	546.65
365.70	264.05	240.00	213.60	194.07	189.00	184.10	171.80	169.40	164.60
157.85	147.07	142.40	138.40	132.40	128.40	126.40	122.40	120.40	118.40
114.40	112.54	110.67	110.67	108.80	108.80	108.80	116.40	138.40	130.40
118.40	114.40	112.54	114.40	114.40	116.40	112.54	102.80	101.00	101.00
99.20	95.60	95.60	95.60	91.87	99.00	88.14	91.87	84.40	81.10
81.10	81.10	77.80	75.87	73.84					

NO. DE DATOS= 365

A/O = 1942

73.94	72.00	70.34	67.00	65.40	65.40	63.80	63.80	63.80	62.20
62.20	62.20	60.60	58.80	55.20	55.20	53.60	53.60	53.60	53.60
52.00	52.00	52.00	52.00	50.40	50.40	50.40	47.70	47.70	45.00
45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	43.80	43.80	43.80	42.60	42.60
42.60	42.60	41.40	41.40	41.40	40.27	40.27	39.14	38.00	38.00
37.00	37.00	37.00	36.00	36.00	36.00	34.00	32.40	34.00	34.00
34.00	34.00	34.00	33.20	33.20	33.20	32.40	32.40	32.40	31.60
31.60	31.60	30.94	30.94	30.94	29.60	29.60	29.60	29.60	28.16
28.16	28.16	28.16	28.16	28.16	26.72	26.72	26.72	26.72	26.72
28.16	29.60	32.40	30.27	29.60	29.60	29.60	29.60	30.27	30.27
29.60	29.60	29.60	28.88	28.88	28.88	28.88	28.88	28.16	28.16
28.16	30.27	31.60	30.94	29.60	28.88	28.88	28.16	28.16	28.16
28.16	30.94	36.00	38.00	41.40	43.80	45.00	47.70	47.70	42.60
40.27	38.00	38.00	36.00	36.00	36.00	38.00	36.00	36.00	35.00
35.00	35.00	34.00	34.00	34.00	34.00	33.20	33.20	32.40	34.00
34.00	35.00	37.00	41.40	50.40	84.40	140.40	222.00	186.55	124.40
179.20	162.35	186.55	204.00	232.05	189.00	204.00	250.00	391.04	401.90
517.74	694.82	546.85	557.48	658.62	611.63	640.52	477.92	430.86	184.10
174.27	232.05	155.60	162.35	181.65	234.70	304.36	459.82	279.72	243.34
260.00	201.54	151.47	140.40	167.00	206.40	191.54	196.60	279.72	430.86
387.42	333.12	237.35	213.60	206.40	204.00	208.80	222.00	311.40	276.20
234.70	204.00	184.10	167.00	160.10	162.35	171.80	179.20	184.10	234.70
250.00	237.35	234.70	224.47	216.40	224.47	234.70	264.05	286.76	405.52
401.90	594.14	716.54	792.46	759.88	687.88	615.24	528.60	467.06	318.64
237.35	222.00	208.80	196.60	224.47	272.15	325.88	359.82	521.36	532.21
571.92	532.21	477.92	438.10	423.62	535.82	618.85	589.97	553.87	586.36
586.36	561.09	557.48	524.98	481.54	459.82	510.50	561.09	600.80	662.24
868.40	539.43	401.90	365.70	333.12	300.84	300.84	276.20	264.05	232.05
206.40	196.60	186.55	174.27	169.40	169.40	162.35	155.60	147.07	147.07
196.60	164.60	155.60	149.40	147.07	138.40	136.40	126.40	122.40	118.40
114.40	108.80	99.20	95.60	95.60	95.60	90.00	82.75	90.00	95.60
91.87	91.87	88.14	84.40	81.10	81.10	82.75	82.75	84.40	84.40
86.27	86.27	84.40	84.40	82.75	81.10	81.10	81.10	81.10	81.10
84.40	91.87	99.20	116.40	138.40	136.40	116.40	99.20	95.60	91.87
90.00	82.75	91.87	99.20	99.20	95.60	91.87	90.00	90.00	90.00
84.40	84.40	81.10	81.10	77.80	77.80	75.87	72.00	72.00	67.00
67.00	67.00	63.80	60.60	60.60					

NO. DE DATOS= 38

A/O = 1943

57.00	57.00	53.60	53.60	52.00	60.60	60.60	60.60	63.80	63.80
60.60	60.60	60.60	60.60	60.60	60.60	57.00	57.00	57.00	57.00
55.20	55.20	53.60	53.60	53.60	53.60	52.00	52.00	52.00	50.40
50.40	49.05	49.05	49.05	47.70	47.70	46.35	46.35		

DATOS DE LA CORRIDA (ARCHIVO I)

123456789012345678901234567890

7	57.000	.310
280 405 640 742		
.10		
5	.10	.01
7	80.00	.99

DATOS HIDROMETRICOS (ARCHIVO II)

FUNCION EN EL TIEMPO: Q(t)
 ARCHIVO.....> PUNYR54

No. DE DATOS= 255

A/O = 1954

73.25	71.17	70.72	75.80	74.61	73.36	77.63	81.26	79.46	96.51
101.20	103.10	101.80	124.40	128.30	125.00	132.50	133.50	131.10	132.60
146.10	166.80	157.60	127.10	123.40	138.50	157.10	175.90	211.50	189.40
186.20	223.70	175.60	168.50	158.00	175.10	196.90	289.60	523.30	379.90
299.10	278.70	353.30	375.00	363.30	402.80	387.20	502.40	571.60	582.20
502.60	591.70	555.70	582.00	603.50	575.90	532.00	559.60	1164.90	894.00
643.20	714.70	558.50	700.90	653.80	645.00	573.70	529.10	572.00	1026.50
1537.30	1113.80	909.10	938.00	817.20	978.80	1346.80	1249.30	791.30	713.80
643.80	629.00	612.00	810.60	787.80	975.80	919.50	631.10	647.70	616.50
618.90	716.10	929.50	1013.90	994.30	785.00	587.40	525.10	560.30	774.40
668.30	614.60	571.50	518.40	561.80	640.80	468.10	416.50	396.00	377.70
395.00	428.00	438.40	386.50	378.80	444.90	694.70	926.50	893.00	702.40
553.80	493.50	447.60	411.00	379.40	435.30	553.30	728.20	659.60	668.30
670.90	620.80	592.00	1203.00	1162.00	1109.70	858.20	822.90	806.30	923.10
672.60	1023.20	1150.10	1044.60	912.60	907.80	747.90	1026.50	949.00	1255.00
1229.70	1229.80	1183.50	1265.10	1104.30	1007.80	954.20	1014.50	1319.80	1392.50
1151.80	1118.50	1126.80	962.40	863.10	812.10	946.90	1153.30	1259.90	1146.10
1033.90	1361.50	1429.30	1233.90	1076.80	964.20	1002.40	1349.00	1120.00	978.50
909.60	826.30	755.00	697.60	659.10	622.50	595.00	573.80	556.10	682.50
648.70	603.90	536.60	512.50	541.30	533.30	510.50	472.30	446.90	434.40
425.10	424.00	413.00	400.60	369.20	358.00	350.10	344.50	339.60	344.10
343.40	337.00	327.30	309.30	296.90	313.00	308.40	296.10	295.00	265.00
286.80	283.00	280.00	278.90	253.40	246.50	243.30	240.10	238.00	225.20
217.30	217.10	212.30	209.70	204.80	200.40	193.60	191.40	191.40	184.90
181.30	177.80	171.90	167.50	168.80	165.70	164.50	163.00	160.90	159.30
158.60	155.50	150.20	146.00	142.70					

No. DE DATOS= 365

A/O = 1955

145.00	144.90	144.10	143.00	137.10	136.00	129.90	123.50	126.00	128.80
125.40	127.50	124.00	129.60	129.80	132.90	134.90	130.00	126.00	131.00
122.10	117.30	115.00	113.60	115.60	116.00	115.90	113.90	107.00	110.90
115.40	117.30	116.40	116.10	111.00	104.90	104.00	104.10	104.90	105.00
105.20	105.90	102.50	113.00	123.30	118.50	119.00	115.90	116.30	113.90
116.00	118.40	116.00	112.50	114.10	103.80	110.60	107.00	101.70	93.43
91.00	98.83	101.40	97.28	98.59	100.20	96.68	92.95	90.21	87.78
86.11	86.39	86.34	83.22	82.01	84.66	89.74	90.09	90.76	96.49
89.66	87.90	87.39	86.81	86.30	85.79	85.21	84.69	84.11	83.66
82.92	82.49	81.99	81.41	80.36	76.97	78.30	80.50	82.00	79.30
75.86	73.05	75.41	78.11	74.06	71.13	72.79	73.93	70.27	77.60
77.31	71.19	70.30	71.59	72.86	73.29	73.41	72.68	70.26	70.55
88.60	89.25	86.29	81.35	82.09	78.29	75.28	74.05	73.74	73.25
72.55	73.16	83.13	83.30	82.60	85.56	97.44	94.51	92.30	90.73
90.74	84.89	84.58	79.54	80.53	74.30	71.55	74.74	81.84	105.10
100.90	95.22	103.60	93.54	89.29	88.64	91.51	99.45	141.30	158.40
154.00	274.10	209.70	171.20	145.50	142.90	121.40	110.90	107.40	108.80
117.00	156.10	165.10	166.50	164.40	173.10	191.00	189.80	151.40	158.50
148.40	147.40	136.80	156.60	388.80	656.50	746.90	623.20	593.50	609.50
497.20	513.10	650.40	836.10	1119.00	1448.50	1327.70	920.40	786.10	1215.50
1701.30	1693.80	1716.20	1651.50	1548.80	1120.10	1003.30	1057.50	854.60	927.50
1332.10	806.30	878.90	817.20	799.90	727.20	728.00	657.80	613.30	577.60
559.40	557.50	567.60	597.40	695.10	770.20	779.10	680.40	618.60	605.10
584.30	571.90	624.30	743.10	745.60	712.40	735.10	1328.20	1374.10	1291.40
1710.20	1627.80	1575.00	1203.90	1134.80	1238.20	2829.50	2176.00	1176.70	1083.70
1077.00	1104.10	1057.30	1070.40	1268.70	1353.60	1243.50	1119.30	984.90	917.60
917.50	917.00	915.50	942.90	959.90	890.90	831.00	894.40	1036.20	927.10
933.90	1129.00	1358.50	1103.60	1110.80	1001.10	849.10	1070.30	795.10	1036.10
937.10	1081.50	1182.10	1392.40	1773.20	1340.80	1206.80	1070.00	898.60	778.10
2127.00	1829.40	1333.90	1113.20	1039.00	965.40	856.30	945.80	933.30	1118.10
1533.20	1704.70	2060.60	1657.10	1377.90	1219.80	1150.40	1033.20	863.50	806.10
807.90	807.10	811.60	1015.30	917.80	856.90	904.60	900.60	675.60	520.90
526.90	577.90	545.60	508.20	453.00	429.30	430.10	380.60	340.60	316.30
316.80	301.40	297.60	304.30	415.70	344.30	328.00	327.40	328.20	324.50
291.50	310.30	337.40	324.90	327.90	328.40	298.50	286.80	295.50	306.10
297.30	303.90	305.40	267.90	292.90	261.90	275.50	252.10	246.00	244.10
243.00	241.90	240.10	239.00	238.30					

No. DE DATOS= 366

A/O = 1956

236.70	236.00	235.00	235.40	232.40	231.00	229.50	225.00	218.60	203.40
188.00	199.10	197.40	189.60	184.90	182.10	188.20	174.70	163.10	160.80
168.40	168.00	166.70	169.50	168.50	159.60	158.90	158.10	152.00	145.00
138.00	148.60	142.00	137.60	147.90	155.60	146.00	143.10	139.50	131.40
138.00	138.60	145.10	135.40	137.00	138.90	127.70	120.20	125.50	128.40
128.40	126.00	124.70	117.20	116.00	112.90	112.40	115.40	116.40	113.30
114.50	105.20	102.00	102.00	112.30	111.30	108.60	113.40	110.50	110.00
109.50	111.10	111.90	107.70	107.80	103.50	100.30	97.93	105.60	102.00
96.69	99.29	94.30	94.69	94.50	93.90	93.39	92.91	92.75	92.50
94.30	92.11	91.69	91.29	91.10	90.70	90.11	89.85	89.60	89.40
89.25	88.90	88.55	88.50	88.55	89.48	89.15	89.37	90.60	91.47
91.46	84.70	84.02	85.26	89.99	90.79	89.26	98.44	96.45	98.67
91.72	113.80	102.10	97.75	97.50	116.90	126.00	120.00	130.40	119.10
127.40	136.80	129.60	160.00	156.40	149.80	147.40	178.10	150.20	130.00
115.20	106.80	102.00	99.50	98.50	105.00	124.30	269.80	248.90	224.50
352.70	437.50	375.80	419.90	550.50	502.80	583.40	825.60	844.30	941.00
951.00	809.90	695.80	996.30	767.50	733.80	761.10	574.00	586.50	780.70
1103.80	1266.10	1046.10	734.30	743.60	745.00	669.00	603.20	608.10	536.90
465.10	429.30	445.80	429.20	405.70	466.00	546.80	709.60	693.50	613.00
632.70	940.90	685.70	522.00	498.20	500.70	443.90	419.70	428.80	414.70
459.80	423.90	394.30	382.50	381.00	373.30	369.10	439.60	633.50	638.50
505.50	473.30	455.40	428.40	393.70	381.00	361.30	343.90	340.40	330.90
327.60	316.50	302.50	298.80	288.50	265.10	289.80	279.50	273.90	304.40
338.40	386.60	429.60	453.00	416.40	360.80	342.00	349.60	499.80	693.70
635.10	484.90	425.00	443.40	502.30	487.40	675.40	892.90	772.40	608.10
578.60	585.40	946.00	1705.00	1404.50	1114.60	937.80	806.30	731.30	685.50
864.70	1188.90	1872.20	2297.30	2261.30	2072.10	1634.90	1693.00	1528.50	1693.40
1752.90	1611.90	1494.60	1448.90	1262.10	1111.40	1092.20	1311.90	1410.40	1432.50
1522.80	1643.40	1600.30	1396.30	1287.30	1335.40	1111.90	973.60	867.30	771.70
733.10	719.60	717.00	698.20	677.30	649.50	620.90	588.50	585.80	563.90
542.40	504.40	501.00	490.10	477.50	493.90	464.90	386.70	371.00	357.50
350.90	321.10	327.70	326.10	319.10	321.00	329.40	319.30	309.30	304.50
283.60	280.60	278.40	272.90	277.30	283.90	271.40	356.00	347.10	337.20
333.30	313.60	291.70	283.60	266.50	248.80	247.00	246.60	254.60	255.30
250.50	244.60	222.60	218.00	212.60	213.40	204.00	214.20	217.00	212.10
207.00	202.50	201.10	200.00	193.80	190.50	185.90	186.00	184.90	172.50
169.00	176.90	175.10	177.10	175.00	172.40				

No. DE DATOS= 38

A/O = 1957

170.80	169.60	168.80	167.70	166.30	164.60	163.00	161.20	158.80	156.70
154.50	152.50	151.10	150.40	149.30	148.10	146.90	145.50	144.70	146.60
149.90	148.80	145.00	142.70	141.50	141.20	140.50	139.60	139.00	137.90
136.20	133.30	131.80	131.50	130.80	129.80	129.80	129.00		

