UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANUALIDADES CONTINGENTES PARA UNA SOLA VIDA

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

MIRZA ERIKA CASTREJON ALVARADO

MEXICO, D. F. 1989

I N D I C E

ANUALIDADES CONTINGENTES

Pág.

INTRODUCCION

El presente trabajo intenta analizar más a fondo las anualidades contingentes con el fin de ayudar a los estudiantes de la carrera de Actuaría a la mejor comprensión del tema.

Siendo la claridad un punto de capital importancia en toda obra, se ha procurado lograrla, tanto en la exposición como en la disposición y presentación del tema. Esta tesis se ha agrupado en capitulos, subdivididos en subcapítulos, lo cual puede contribuir al buen exito de estudio, y hasta facilitar al lector una visión clara para abarcar el conjunto de los diferentes asuntos que se exponen.

Como la simple teoría suele ser, de por sí, bastante árida, y como, por otra parte, la comprensión sólo se afianza mediante la resolución de ejercicios que impliquen la aplicación de las expresiones que paulatinamente se obtienen, se han resuelto algunos ejemplos, a modo de orientación para el lector. Para resolver los ejercicios se tomo la Tabla de Mortalidad CSO 1958 (The Commissioners 1958 Standard Ordinary Mortality Table) que se anexa al final de esta tesis.

Por otro lado, con el objetivo de proporcionar una mejor comprensión tanto en el desarrollo de las diferentes expresiones como en los ejemplos, se elaboraron gráficas permitiendo así una mayor claridad.

El Capítulo 1 define el concepto de anualidad, de anualidades ciertas y anualidades contingentes, así como todo lo que a esto se refiere. Posteriormente se da una breve reseña de las anualidades ciertas con el fin de que el lector palpe las diferencias entre las anualidades ciertas y las anualidades contingentes, las cuales son objeto de este estudio.

El Capítulo 2 expone los conceptos básicos tanto en el área probabilística como en tablas de mortalidad, con el objeto de hacer más comprensibles los capítulos posteriores, ya que lo que se presenta en este capítulo son las bases principales utilizadas en los cálculos de las expresiones para anualidades contingentes.

El Capítulo 3 expone a fondo las anualidades vencidas y anticipadas contingentes. Se definen todos los conceptos y se desarrollan las expresiones para obtener el valor presente de las anualidades vencidas vitalicias, diferidas, temporales, temporales-diferidas, así como las respectivas para las anualidades anticipadas. Los pagos correspondientes a este tipo de anualidades se realizan anualmente, mientras que el Capítulo 4 hace referencia a las anualidades vencidas y anticipadas en donde los pagos se realizan mensual, bimestral, trimestral o semes - tralmente.

Y finalmente el Capítulo 5 expone las anualidades vencidas y an - ticipadas variables tanto crecientes como decrecientes, en donde se - presenta el problema de calcular el valor presente de pagos anuales - que varían año con año en progresión geometrica ya sea en forma cre ciente o decreciente según sea el caso.

C A P I T U L O   1

ANUALIDADES

1.1 CONCEPTOS GENERALES.

Una anualidad se define como una serie de pagos periodicos de sumas generalmente iguales efectuados durante la existencia de una situación dada a intervalos iguales de tiempo.

El tiempo transcurrido entre cada pago sucesivo de la anualidad se conoce como "intervalo o frecuencia de pago"

El tiempo contado desde el principio del primer intervalo de pago hasta el final del último intervalo de pago se conoce como "plazo de la anualidad.

La suma de todos los pagos realizados durante el año se conoce como "renta anual".

A la suma de los valores presentes de cada pago, cada uno descontado al principio del plazo de la anualidad se le conoce como "valor presente de una anualidad" y se denota por "a".

A la suma de los montos compuestos de cada pago, cada uno acumulado al final del plazo de la anualidad se le conoce como "monto o valor acumulado de una anualidad" y se denota por "S".

Se consideran básicamente dos tipos de anualidades:

1) Anualidades ciertas.
2) Anualidades contingentes.

Las anualidades ciertas se definen como aquella serie de pagos periodicos sujetos a efectuarse dentro de un tiempo fijo determinado de acuerdo con las condiciones del problema independientemente de cualquier evento fortuito.

Como ejemplos de las anualidades ciertas se mencionan:

i) Los n pagos periódicos que deben efectuarse por concepto de la compra de un bien inmueble. Dichos pagos culminan al cubrir el monto de la deuda.

ii) Los pagos periódicos por concepto de la renta de un equipo X durante un tiempo t previamente establecido.

Las anualidades contingentes se definen como aquella serie de pagos cuyo plazo depende de la realizacion de un evento fortuito, el cual no puede ser fijado en un tiempo determinado.

Como ejemplos de las anualidades contingentes se mencionan:

i) El pago de la prima por concepto de un seguro de vida, el cual termina con el fallecimiento del asegurado.

ii) El pago que recibe un pensionista hasta su fallecimiento.

Las anualidades contingentes serán estudiadas con más detalle en capítulos posteriores. En este capitulo se dará una breve reseña de las anualidades ciertas, en donde la frecuencia de los pagos coincide con la convertibilidad de la tasa de interés.

1.2 ANUALIDADES CIERTAS ORDINARIAS.

En una anualidad cierta ordinaria, la serie de pagos comienzan a efectuarse un periodo después de la contratación hasta cubrir el total durante n años.

Si los pagos son anuales, se puede observar gráficamente de la siguiente manera:

```
                 1*        1        1             1         1

        --|--------|--------|-------|-------------|---------|---
          0        1        2       3  ......    n-1        n
   (momento de
   contratación)                                  *primer pago
```

Para calcular el valor presente de la anualidad se toma como punto de valuación el momento de la contratación (en la gráfica sería 0), y se denotará como $a_{\overline{n}|}$. Para encontrar su valor se toma la suma de los valores presentes al momento 0 a una tasa de interés i anual efectiva, así:

$$a_{\overline{n}|} = V + V^2 + V^3 + \ldots + V^{n-1} + V^n$$

Como $a_{\overline{n}|}$ se presenta como una progresión geométrica se tiene que:

$$a_{\overline{n}|} = V + V^2 + V^3 + \ldots + V^{n-1} + V^n$$

$$Va_{\overline{n}|} = V^2 + V^3 + V^4 + \ldots + V^n + V^{n+1}$$

$$a_{\overline{n}|} - Va_{\overline{n}|} = V + (V^2 - V^2) + (V^3 - V^3) + \ldots + (V^n - V^n) - V^{n+1}$$

$$a_{\overline{n}|} - Va_{\overline{n}|} = V - V^{n+1}$$

$$a_{\overline{n}|}(1-V) = V(1-V^n)$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{V(1-V^n)}{1-V} \qquad (1.1)$$

Multiplicando numerador y denominador por (1+i) se obtiene:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{V(1-V^n)(1+i)}{(1-V)(1+i)}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{\left[\dfrac{1}{1+i}\right]\left[1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}\right](1+i)}{\left[1 - \dfrac{1}{1+i}\right](1+i)}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{\dfrac{1+i}{1+i} - \dfrac{1}{(1+i)^n}}{\dfrac{1+i}{1} - \dfrac{1+i}{1+i}}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - V^n}{1+i-1} = \frac{1 - V^n}{i}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - V^n}{i} \qquad (1.2)$$

Los calculos anteriores consideran pagos unitarios, multiplicando (1.2) por la renta anual R, se obtiene el valor presente denotado por A.

$$A = RV + RV^2 + RV^3 + \ldots + RV^{n-1} + RV^n$$

$$A = R\,(V + V^2 + V^3 + \ldots + V^{n-1} + V^n)$$

$$A = R\, a_{\overline{n}|} \qquad (1.3)$$

EJEMPLO 1. Hallar el valor presente de una anualidad de $ 40,000 anuales durante 9 años al 2 1/2 %.

$$A = 40{,}000 \quad a_{\overline{9}|\,0.025}$$

$$A = (40{,}000)\left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1.025)^{9}}}{0.025}\right]$$

$$A = \$\ 318{,}834.63$$

EJEMPLO 2. El beneficiario de un seguro recibe de parte de la Compañía dos ofertas:

a) \$ 10'000,000.00 de contado.
b) Una anualidad de \$ 1'100,000.00 por año durante 12 años.

Diga cual es la mejor oferta, y encontrar la diferencia si el interés al cual se puede invertir el dinero es del 8% anual.

$$A = R\ a_{\overline{12}|\ 0.08}$$

$$A = (1'100{,}000.00)\left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1.08)^{12}}}{0.08}\right]$$

$$A = \$\ 8'289{,}685.8$$

Por lo tanto la oferta más conveniente son los 10'000,000.00 al contado ya que el valor presente de la anualidad es menor.
La diferencia es de 1'710,314.2.

Para calcular el monto de una anualidad ordinaria se toma como punto de valuación n, y se denota por $S_{\overline{n}|}$. Se puede observar gráficamente de la siguiente manera:

```
              1        1       1             1        1

 --|--------|--------|-------|------------|--------|---
   0        1        2       3  ......   n-1       n*
```

*punto de valuación

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + (1+i)^{2} + \dots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \qquad (1.4)$$

Como $s_{\overline{n}|}$ se presenta como una progresión geométrica donde $(1+i)$- es la razón se tiene:

$$(1+i)\, s_{\overline{n}|} = (1+i) + (1+i)^{2} + (1+i)^{3} + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n}$$

$$s_{\overline{n}|} - (1+i)\, s_{\overline{n}|} = 1 - (1+i)^{n}$$

$$s_{\overline{n}|} = \frac{1 - (1+i)^{n}}{1 - (1+i)}$$

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \qquad (1.5)$$

Los cálculos anteriores consideran pagos unitarios, multiplicando (1.5) por la renta anual R, se obtiene el monto de la anualidad denotado por S.

$$S = R\, s_{\overline{n}|} \qquad (1.6)$$

EJEMPLO 1. Una persona deposita \$ 2'500,000.00 al final de cada - año durante 10 años, en un banco que le abona interes del 8%; el monto resultante se deja depositado acumulandose a la misma tasa por los siguientes 5 años. ¿De cuánto se dispondrá al final de 15 años?

$$S = R\, s_{\overline{10}|\,0.08}$$

El valor del monto de la anualidad se puede obtener directamente- de las tablas financieras, correspondiendo en este caso al 8% de interés con una n=10, así:

$$s_{\overline{10}|\,0.08} = 14.48656$$

Por lo tanto:

$$S = (2'500,000)\ (14.48656)$$

$$S = \$\ 36'216,400.00$$

Usando la expresión para cálculo de montos se tiene:

$$S = P\ (1+i)^{n}$$

$$S = (36'216.400)\ (1+0.08)^{5}$$

$$S = (36'216.400)\ (1.4693281)$$

$$S = \$\ 53'213,774.00$$

Existe otra forma para calcular el valor de $s_{\overline{n|}}$. Tomando $a_{\overline{n|}}$ - se observa que puede ser igualado al monto de la anualidad, únicamente multiplicando $a_{\overline{n|}}$ por $(1+i)^{n}$. Se tiene que:

$$a_{\overline{n|}} = V + V^{2} + V^{3} + \ldots + V^{n-1} + V^{n}$$

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1$$

Multiplicando $a_{\overline{n|}}$ por $(1+i)^{n}$:

$$(1+i)^{n}\ a_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^{n}}{1+i} + \frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^{2}} + \frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^{3}} + \ldots + \frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}}$$

$$(1+i)^{n}\ a_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + (1+i) + 1$$

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n}\ a_{\overline{n|}} \qquad (1.7)$$

1.3 ANUALIDADES VALUADAS CON TASAS NOMINALES.

Como la convertibilidad de la tasa nominal coincide con la frecuencia de los pagos (m=p), para la valuación de las anualidades se tomará como periodo fundamental el de la convertibilidad de la tasa, así la tasa efectiva y la renta serán tomadas por periodo.

La expresión para valor presente será:

$$A = \frac{Ra}{p}\, a_{\overline{mn}|\, i'} \qquad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m} \qquad (1.8)$$

Para monto se tiene la expresión siguiente:

$$S = \frac{Ra}{p}\, s_{\overline{mn}|\, i'} \qquad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m} \qquad (1.9)$$

EJEMPLO 1. Un terreno se compra pagando $ 1'000,000.00 de contado y 300,000 mensuales durante 2 años. ¿Cuál es el precio equivalente en efectivo, si el interés es del 12% convertible mensualmente?

$$A = R\, a_{\overline{mn}|\, i'} \qquad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(12)}}{12} = \frac{0.12}{12} = 0.01$$

$$A = R\, a_{\overline{(12)(2)}|\, 0.01}$$

$$A = R\, a_{\overline{24}|\, 0.01}$$

$$A = (300,000)\left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1+0.01)^{24}}}{0.01}\right]$$

$$A = (300,000)\,(21.243387)$$

$$A = \$\ 6'373,016.10$$

Sumando a el valor presente obtenido el pago al contado, se obtiene el precio equivalente en efectivo:

$$6'373{,}016.10 + 1'000{,}000.00 = 7'373{,}016.10$$

EJEMPLO 2. Una empresa está formando un fondo de ahorro efectuando abonos de $ 2'500,000.00 anuales pagaderos trimestralmente, invirtiendolos al 4 1/2 % convertible trimestralmente. ¿Cuánto dinero habrá en el fondo al final de 9 años?

$$S = \frac{Ra}{p} \; s_{\overline{mn}|\, i'} \qquad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(4)}}{4} = \frac{0.045}{4} = 0.01125$$

$$S = \frac{2'500{,}00}{4} \; s_{\overline{(4)(9)}|\; 0.01125}$$

$$S = (625{,}000) \left[\frac{(1+0.01125)^{36} - 1}{0.01125} \right]$$

$$S = (625{,}000)\,(44.081433)$$

$$S = \$\ 27'550{,}896.00$$

1.4 CALCULO DE LA RENTA

Cuando la incógnita que se presenta es la renta, basta con despejarla de la expresión (1.3) para el caso del valor presente y de la expresión (1.6) para el caso del monto de la anualidad.

Los valores para $a_{\overline{n}|\, i}$ y $s_{\overline{n}|\, i}$ pueden ser obtenidos a partir de las tablas financieras.

Así se tienen las expresiones siguientes:

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|}} \qquad y \qquad R = \frac{S}{s_{\overline{n}|}}$$

$$Ra = \frac{Ap}{a_{\overline{mn}|\, i'}} \quad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$Ra = \frac{Sp}{S_{\overline{mn}|\, i'}} \quad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

EJEMPLO 1. Sustituir una serie de pagos de $ 300,000.00 al principio de cada año por el equivalente en pagos al final de cada 3 meses suponiendo intereses de 4% convertible trimestralmente.

$$Ra = \frac{(300,000)\ (4)}{a_{\overline{(4)(1)}|\, i'}} \quad ; \quad i' = \frac{0.04}{4} = 0.01$$

$$Ra = \frac{1'200,000}{a_{\overline{(4)(1)}|\, 0.01}} = \frac{1'200,000}{a_{\overline{4}|\, 0.01}}$$

Buscando en las tablas financieras $a^{-1}_{\overline{4}|\, 0.01}$ se obtiene que su valor es 0.2562811, así:

$$Ra = (1'200,000)\ (0.2562811)$$

$$Ra = 307,537.32$$

Así, los pagos trimestrales serían:

$$R = \frac{Ra}{4} = \frac{307,537.32}{4} = 76,884.33$$

Cuando se presenta el caso de obtener la renta para el monto de una anualidad, se debe calcular $1/S_{\overline{n}|\, i}$. Para obtener este valor a partir de las tablas se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{s_{\overline{n|}\,i}} = \frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}} - i \qquad (1.10)$$

Demostración:

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}} - i = \frac{1}{\dfrac{1 - V^{n}}{i}} - i = \frac{i}{1 - V^{n}} - i$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}} - i = \frac{i - i(1 - V^{n})}{1 - V^{n}} = \frac{i - i + iV^{n}}{1 - V^{n}} = \frac{iV^{n}}{1 - V^{n}}$$

Multiplicando numerador y denominador por $(1+i)^{n}$:

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}} - i = \frac{i\,V^{n}(1+i)^{n}}{(1 - V^{n})\,(1+i)^{n}} = \frac{i\left[\dfrac{1}{(1+i)^{n}}\right](1+i)^{n}}{\left[1 - \dfrac{1}{(1+i)^{n}}\right](1+i)^{n}}$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}} - i = \frac{i}{(1+i)^{n} - 1} = \frac{1}{s_{\overline{n|}\,i}}$$

EJEMPLO 2. Una persona efectuó pagos semestrales en un fondo al final de cada semestre y durante 5 años. Si el fondo tiene $10'000,000 al cabo de 10 años y el interes que se abonó fue del 7% convertible semestralmente. Cuál fue el pago periódico?

```
     R  R  R  R  R  R  R  R  R  R                    10'000,000

--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|------------------|-
  0     1     2     3     4     5     6      ......       10
```

$$Ra = \frac{Sp}{s_{\overline{mn}|\,i'}} \quad ; \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Para conocer el valor de S se debe obtener el valor presente de - los 10'000,000 a los 5 años.

$$P = S\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{-mn}$$

$$P = (10'000,000)\left[1 + \frac{0.07}{2}\right]^{-(5)(2)}$$

$$P = (10'000,000)\ (1 + 0.035)^{-10}$$

$$P = \frac{10'000,000}{1.410599}$$

$$P = 7'089,186.9$$

$$Ra = \frac{(7'089,186.9)(2)}{s_{\overline{(5)(2)}|\,0.035}} = \frac{14'178,374}{s_{\overline{10}|\,0.035}}$$

Para obtener el valor de $1/s_{\overline{n}|\,i}$ se utiliza la expresión (1.10):

$$\frac{1}{s_{\overline{10|}\,0.035}} = \frac{1}{a_{\overline{10|}\,0.035}} - 0.035 = 0.1202414 - 0.035$$

$$\frac{1}{s_{\overline{10|}\,0.035}} = 0.0852414$$

$$Ra = (14'178,374)\ (0.0852414) = 1'208,584.4$$

El pago periódico estaría dado por:

$$R = \frac{Ra}{2} = 604,292.2$$

1.5 CALCULO DE n.

Para calcular el valor de n se despeja de las formulas de valor - presente o de monto según sea el caso, y se resuelve la ecuación exponencial usando logaritmos, o bien, interpolando mediante el uso de las tablas respectivas.

EJEMPLO 1. Una persona adeuda $ 4'000,000.00 y acuerda pagarlos - con intereses al 4% convertible trimestralmente en pagos trimestrales- de 300,000 cada uno, durante el tiempo necesario. Si el primer pago lo hace 3 meses despues de recibido el dinero, determinar el número necesario de pagos completos.

$$A = R\,a_{\overline{mn|}\,i'} \quad ; \quad i' = \frac{0.04}{4} = 0.01$$

$$4'000,000 = 300,000\ a_{\overline{mn|}\,0.01}$$

$$\frac{4'000,000}{300,000} = \frac{1 - V^{n}}{0.01}$$

$$(0.01)(13.333...) = 1 - V^n$$

$$1 - 0.13333... = V^n$$

$$\log 0.86666... = n \log V$$

$$\frac{-0.0621479}{-0.00432137} = n$$

$$n = 14.381516$$

Por lo tanto son 14 pagos completos.

EJEMPLO 2. Cuántos pagos anuales completos de \$ 150,000.00 y que pago incompleto un año despues deben hacerse con el objeto de acumular al 6% anual, \$ 2'500,000.00.

$$S = R\, S_{\overline{n|}\, i}$$

$$2'500,000 = 150,000\ S_{\overline{n|}\, 0.06}$$

$$\frac{2'500,000}{150,000} = S_{\overline{n|}\, 0.06}$$

$$16.666... = S_{\overline{n|}\, 0.06}$$

En tablas de $S_{\overline{n|}\, 0.06}$ se observa que el valor 16.666... corresponde a una n entre 11 y 12.

Entonces, se tienen 11 pagos completos y una cantidad adicional que se paga en el periodo posterior al último pago completo. Para determinar el último pago se plantea una ecuación de valor:

$$150,000\ S_{\overline{11|}\, 0.06}\ (1 + 0.06) + X = 2'500,000$$

$$(150,000)(14.97164)(1.06) + X = 2'500,000$$

$$2'380490.7 + X = 2'500,000$$

$$X = 2'500,000 - 2'380,490.7$$

$$X = 119,509.3$$

1.6 CALCULO DE LA TASA DE INTERES.

El cálculo de la tasa de interes cuando son conocidos la renta, el termino n y el valor presente o el monto de la anualidad según sea el caso, puede realizarse mediante el procedimiento de interpolación.

EJEMPLO 1. Para liquidar una deuda de \$ 7'200,000.00 se efectúan pagos anuales de \$ 400,000 al final de cada año durante 30 años. Cuál es la tasa de interes involucrada en la operación?

$$A = R\,a_{\overline{n|}\,i}$$

$$7'200,000 = 400,000\;a_{\overline{30|}\,i}$$

$$\frac{7'200,000}{400,000} = a_{\overline{30|}\,i}$$

$$18 = a_{\overline{30|}\,i}$$

Buscando en las tablas de valor presente se observa que los valores que corresponden a 18 son:

$$a_{\overline{30|}\,0.04} = 17.29203$$

$$a_{\overline{30|}\,i} = 18$$

$$a_{\overline{30}|\,0.035} = 18.39205$$

Interpolando se tiene:

$$i = 0.04 + \frac{18 - 17.29203}{18.39205 - 17.29203}(0.035 - 0.04)$$

$$i = 0.04 + \frac{0.70797}{1.10002}(-0.005)$$

$$i = 0.04 - 0.0032179$$

$$i = 0.0367821$$

Por lo tanto la tasa de interes involucrada en la operación es del 3.68%.

EJEMPLO 2. Una persona ahorra \$ 100,000.00 mensuales durante 3 años, si al final de ese tiempo recibe \$ 4'200,000.00, encontrar la tasa efectiva mensual con la cual ha crecido esta suma de dinero.

$$S = R\, S_{\overline{mn}|\, i'}$$

$$4'200{,}000 = 100{,}000\, S_{\overline{(12)(3)}|\, i'}$$

$$\frac{4'200{,}000}{100{,}000} = S_{\overline{36}|\, i'}$$

$$42 = S_{\overline{36}|\, i'}$$

Buscando en las tablas de montos se observa que los valores que corresponden a 42 son:

$$S_{\overline{36}|\, 0.00833...} = 41.78182$$

$$S_{\overline{36|}\, i} = 42$$

$$S_{\overline{36|}\, 0.009166...} = 42.42312$$

Interpolando se tiene:

$$i = 0.00833... + \frac{42 - 41.78182}{42.42312 - 41.78182} (0.009166... - 0.00833...)$$

$$i = 0.00833... + \frac{0.21818}{0.6413} (0.000833...)$$

$$i = 0.00833... + 0.0002835$$

$$i = 0.00862$$

Por lo tanto la tasa efectiva mensual es del 0.86%.

C A P I T U L O 2

PROBABILIDAD Y TABLAS DE MORTALIDAD

2.1 PROBABILIDADES.

2.1.1 CONCEPTOS GENERALES.

La teoría de probabilidades ha sido manejada por el hombre desde los tiempos más remotos. Los juegos de azar marcan los primeros vestigios de cálculos de algunas probabilidades, actualmente se aplica en muchos y diversos campos por lo que se ha desarrollado una teoría matemática para su estudio.

Cuando se realizan experimentos reales, tales como lanzar una moneda, tirar dos dados, jugar a la ruleta, o se observa el lapso de vida de una persona, la teoría matemática de probabilidades toma un valor práctico y significativo.

Un fenómeno aleatorio se define como un fenómeno empírico, en donde al observarlo bajo determinadas condiciones, el resultado no siempre es el mismo, es decir, los diferentes resultados se presentan con regularidad estadística.

La frecuencia relativa con la que se observan los diferentes resultados de un fenómeno aleatorio en una serie de repeticiones todas ellas independientes, está representada por aquellos números comprendidos en el intervalo cerrado [0,1].

Un evento aleatorio se produce cuando la frecuencia relativa de una serie muy larga de observaciones, tiende a un valor límite estable conforme el número de observaciones tiende a infinito.

La probabilidad del evento aleatorio es el valor límite de las observaciones.

Si se tiene un recipiente que contenga 8 bolas, 2 negras y 6 - blancas, si despues de un número considerable de extracciones se ob - tiene una bola negra en una proporción determinada se puede decir que- la extracción de una bola del recipiente es un fenómeno aleatorio, y - la extracción de una bola negra es un evento aleatorio.

La teoría de probabilidades estudia mediante metodos matemáticos- y analíticos el comportamiento de los fenómenos aleatorios, indepen - dientemente del área de que se trate.

La probabilidad es la ciencia que estudia las propiedades de los- fenómenos aleatorios.

El espacio muestral se define como el conjunto de todos los re - sultados posibles, y se denota por S.

Si se tira un dado, el cual tiene sus caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral está representado por S = {1,2,3,4,5,6} que serían el conjunto de todos los resultados posibles.

Si se lanza una moneda al aire puede caer aguila (A), sol (S) o - bien de canto (C) por lo que el espacio muestral está representado - por S = {A,S,C}.

Un evento se define como un subconjunto del espacio muestral. Es- el resultado originado por algún experimento.

Así, el espacio muestral se considera un evento seguro, ya que es subconjunto de sí mismo y además contiene todos los resultados posi - bles, por ello se le denomina seguro.

Si el evento F nunca ocurre se tiene que la probabilidad de que - ocurra el evento F es 0 (P(F) = 0).

Si se tiene la certeza de que el evento F siempre ocurrirá, la - probabilidad de que ocurra el evento F es 1 (P(F) = 1).

2.1.2 CALCULO DE PROBABILIDADES.

El espacio muestral S es finito si la observación o experimento aleatorio tiene un número finito de resultados posibles, es decir, el tamaño de S es finito.

Si se tiene un espacio muestral finito S y se supone que cada uno de los eventos son igualmente probables, es decir que tienen la misma probabilidad de ocurrir, se dice entonces que el espacio muestral $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$ posee eventos igualmente probables si cada uno de ellos tiene la misma probabilidad, de tal forma que:

$$P[E_1] = P[E_2] = P[E_3] = \ldots = P[E_N] = \frac{1}{N}$$

Cada evento E_i tiene probabilidad $1/N$, ya que existen N eventos con la misma probabilidad de ocurrir, y la suma de las probabilidades es igual a 1, que vendría siendo el evento seguro.

La probabilidad de un evento F es igual a la multiplicación de $1/N$ que corresponde a la probabilidad de cada uno de los eventos de F por el número de eventos en F. Así la probabilidad de F es igual al cociente del tamaño de F entre el tamaño del espacio muestral S.

Así, para calcular la probabilidad de un evento cuando el espacio muestral es finito, y los eventos son igualmente probables, se utiliza la siguiente fórmula:

$$P[F] = \frac{\text{Posibilidades específicas (tamaño de F)}}{\text{Posibilidades totales (tamaño de S)}} = \frac{T[F]}{T[S]}$$

2.1.3 EJEMPLOS DE CALCULO DE PROBABILIDADES.

EJEMPLO 1. De una urna que contiene 8 bolas negras, 10 bolas blancas y 6 bolas rojas, una bola es sacada al azar. Cuál es la probabilidad que la bola a) sea blanca? b) sea roja? c) no sea blanca? d) no sea negra?

Si se denota por N a las bolas negras, B a las blancas y R a las-rojas, el espacio muestral está dado por:

S = {N,N,N,N,N,N,N,N,B,B,B,B,B,B,B,B,B,B,R,R,R,R,R,R}

Por lo tanto el tamaño de S es de 24 elementos.

a) En este caso F = {B,B,B,B,B,B,B,B,B,B} por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

b) En este caso F = {R,R,R,R,R,R} por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

c) En este caso F = {N,N,N,N,N,N,N,N,R,R,R,R,R,R} por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

d) En este caso F = {B,B,B,B,B,B,B,B,B,B,R,R,R,R,R,R} por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

EJEMPLO 2. De una urna que contiene 8 bolas negras, 6 bolas blancas y 4 bolas rojas se saca una bola negra y no se reemplaza, hallar - la probabilidad que otra bola que se saca de la urna sea: a) negra ; b) roja ; c) no blanca.

Denotando por N a las bolas negras, B a las blancas y R a las rojas, el espacio muestral, una vez que se extrajo la bola negra y no - fue reemplazada, sería:

S = {N, N, N, N, N, N, N, B, B, B, B, B, B, R, R, R, R}

a) En este caso F = {N, N, N, N, N, N, N} por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{7}{17}$$

b) En este caso F = {R, R, R, R} por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{4}{17}$$

c) En este caso F = {N, N, N, N, N, N, N, R, R, R, R} por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{11}{17}$$

EJEMPLO 3. Sea un número escogido de entre los enteros del 1 al 100, de manera que cada uno de ellos tenga la misma probabilidad de ser escogido. Cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea a) múltiplo de 7 ; b) múltiplo de 14

El espacio muestral está representado por los enteros del 1 al 100:

S = {1, . . . , 100}   T[S] = 100

a) En este caso F esta representado por los múltiplos de 7:

F = {7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98}

Por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$$

b) En este caso F está representado por los múltiplos de 14:

$F = \{14, 28, 42, 56, 70, 84, 98\}$

Por lo tanto:

$$P[F] = \frac{\text{Tamaño de F}}{\text{Tamaño de S}} = \frac{7}{100}$$

2.1.4 ESPERANZA MATEMATICA.

Sea n el número de ensayos y p la probabilidad de exito, el valor esperado de X, representado por E[X], es el número de exitos esperados en n ensayos y se define como E[X] = np.

La esperanza matemática puede definirse como E[X] = pS donde p es la probabilidad de que X reciba una cierta cantidad S.

Siendo pS la esperanza de que X reciba una cierta cantidad S dentro de n años, se puede calcular el valor presente de la esperanza matemática, suponiendo una tasa de interes i, por lo tanto:

$$\text{Valor presente de la esperanza} = \text{V.P.E.} = (1 + i)^{-n}\ pS$$

EJEMPLO 1. En una rifa se vendieron 1000 boletos, el premio consta de $ 25'000,000.00. Cuál es la esperanza matemática de X, si posee 4 boletos?

La probabilidad de que X gane el premio es de $\frac{4}{1000} = 0.004$

Su esperanza matemática está representada por:

$$E[X] = pS = (0.004)(25'000,000) = 100,000$$

EJEMPLO 2. Los registros de una universidad, indican que la probabilidad de que un estudiante de ingeniería se titule en 5 años es de 0.45. A X le prometieron $ 8'000,000.00 si se titula en 5 años. Suponiendo intereses del 3%, hallar el valor presente de su esperanza matemática.

$$V.P.E. = (1 + 0.03)^{-5} (0.45)(8'000,000)$$

$$V.P.E. = (0.8626087844)(0.45)(8'000,000)$$

$$V.P.E. = 3'105,391.62$$

2.2 TABLAS DE MORTALIDAD

2.2.1 INTRODUCCION

Una tabla de mortalidad es un resumen de registros que permiten conocer el número de vivos o muertos de un grupo suficientemente numeroso de personas. Para la construcción de una tabla de mortalidad se toma un grupo inicial de personas de una edad determinada (que usualmente se denomina edad cero, que corresponde al instante del nacimiento) y número arbitrario. Por medio de procedimientos y cálculos variados, se obtiene el número de personas que sobreviven en cada aniversario, así como las que fallecen en el transcurso de un año determinado.

Si se supone un grupo numeroso de recien nacidos, se podría pretender observar su comportamiento desde el momento del nacimiento, hasta la total extinción del grupo.

Sin embargo, los resultados del número de vivos y muertos en cada año, no podría ser del todo confiable, ya que el primer inconveniente radica en el hecho de que se necesitaría alrededor de un siglo para el registro de las observaciones, además existen factores que pueden alterar un comportamiento normal. Tales factores, pueden ser los progresos de la medicina; las obras sanitarias que se realizan en poblaciones; etc., los cuales contribuyen a prolongar la vida humana. Por otro lado, la industrialización desgasta al individuo disminuyendo así su vitalidad.

Entonces es imposible construir una tabla de mortalidad deduciendo a partir del número de sobrevivientes a cada edad, las probabilidades de vida y de muerte.

Por lo tanto, tomando un grupo inicial de edad cero, se determinan las probabilidades de vida o de muerte para cada edad y se deduce a partir de estas probabilidades el correspondiente número de sobrevivientes.

Las tablas de mortalidad son de gran utilidad para las Compañías de Seguros, ya que representan una base para fijar las tasas de contribución que serán asignadas a los asegurados.

2.2.2 FUNCION DE SOBREVIVENCIA.

Con el fin de obtener una medida numerica del comportamiento de la vida humana, se ha tomado como base funciones de probabilidad.

Observando el patrón normal de mortalidad, se tiene que durante la infancia el número de muertes es bastante considerable, tiende a bajar lentamente durante la niñez, incrementándose a traves de la adolescencia y la vida media, acelerándose conforme se acerca al final del espacio de vida, de tal manera que la edad en años (x) de un individuo se encuentra localizada entre el valor 0 y el limite superior del espacio de vida.

La probabilidad de que una nueva vida de edad 0 sobreviva a la edad x se toma como una función de x, es decir como una función de sobrevivencia, denotada por $S(x)$.

El observar el comportamiento de la vida se concluye que la probabilidad de sobrevivir a la edad x es mayor que la probabilidad de sobrevivir a la edad $x + t$, para $t>0$, por lo tanto es claro que $S(x)$ es una función decreciente conforme x toma valores más grandes, y además es una función continua en todo su intervalo.

Cuando $x=0$, $S(x)$ toma el valor de 1. Si x se toma al final del espacio de vida, denotado con w el punto final de dicho espacio, $S(w)=0$ ya que a edades avanzadas la probabilidad de sobrevivencia es extremadamente pequeña, siendo cero al llegar al final del espacio de vida, estableciendo que los valores para $S(x)$ cuando $x > w$ serán omitidos. Por lo tanto se concluye que "$S(x)$ es una función continua de x la cual decrece a partir de $S(0)=1$ hasta $S(w)=0$, y está definida en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant w$."

Una función de sobrevivencia puede ser cualquier expresión matemática siempre y cuando cumpla las condiciones anteriores, aunque no se ajuste exactamente a una curva típica de $S(x)$ marcada por la experiencia.

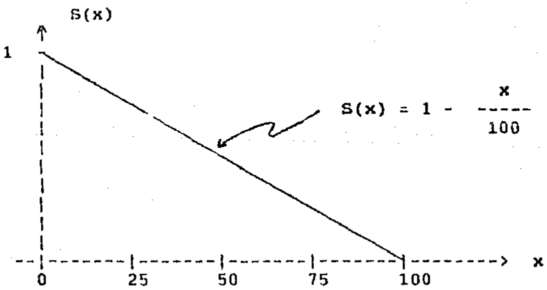
Un ejemplo simple que satisface las condiciones de la función de sobrevivencia es una función lineal:

$$S(x) = 1 - \frac{x}{100} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 100$$

Se puede verificar que esta función cumple con las condiciones necesarias.

Para $x=0$, $S(x)=1$. El valor de w es igual a 100, por lo tanto $S(100)=0$. Por otro lado es una función continua decreciente en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 100$.

Así, la gráfica correspondiente a $S(x) = 1 - \frac{x}{100}$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant 100$ sería:



A partir de la función anterior se pueden obtener medidas de mortalidad.

La probabilidad de que una persona de edad 0 sobreviva a la edad 20 sería:

$$S(20) = 1 - \frac{20}{100} = \frac{4}{5}$$

La probabilidad de que una persona de edad 0 sobreviva a la edad 54 sería:

$$S(54) = 1 - \frac{54}{100} = \frac{23}{50}$$

La probabilidad de que una persona de edad 0 muera entre la edad 20 y la 54 sería:

$$S(20) - S(54) = \frac{4}{5} - \frac{23}{50} = \frac{17}{50}$$

La probabilidad de que una persona de edad 20 sobreviva a la edad 54 puede calcularse como sigue: la probabilidad de que una persona de edad 0 sobreviva a la edad 54 es igual a la probabilidad de que sobreviva de la edad 0 a la edad 20 y la probabilidad de que sobreviva de la edad 20 a la 54, por lo tanto:

$$S(54) = S(15)\ p$$

Despejando p:

$$p = \frac{S(54)}{S(20)}$$

$$p = \frac{\frac{23}{50}}{\frac{4}{5}} = \frac{(23)(5)}{(50)(4)} = \frac{115}{200}$$

$$p = \frac{23}{40}$$

EJEMPLO 1. Verificar que la función $\dfrac{20,000 - 100\,x - x^2}{20,000}$ satisface las condiciones de S(x). Cuál es el valor de w ?

Se tiene que
$$S(x) = \frac{20,000 - 100\,x - x^2}{20,000}$$

Se debe obtener el valor de x para el cual S(x)=0, por lo tanto:

$$S(x) = \frac{20,000 - 100\,x - x^2}{20,000} = 0$$

$$20,000 - 100\,x - x^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10,000 + 80,000}}{-2}$$

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{900}}{-2}$$

$$x = \frac{100 \pm 300}{-2}$$

$$x = \frac{100 - 300}{-2} = \frac{-200}{-2} = 100$$

Por lo tanto $w = 100$

Usar la función anterior de sobrevivencia para calcular:

a) La probabilidad de sobrevivir del nacimiento a la edad 20

b) La probabilidad que una vida de edad 20 sobreviva a la edad 40

c) La probabilidad que una vida de edad 20 muera entre 30 y 40

a)

$$S(x) = \frac{20,000 - 100\,x - x^2}{20,000}$$

$$S(20) = \frac{20,000 - (100)(20) - (20)^2}{20,000}$$

$$S(20) = \frac{20,000 - 2000 - 400}{20,000}$$

$$S(20) = \frac{17,600}{20,000} = \frac{176}{200} = \frac{44}{50}$$

$$S(20) = 0.88$$

b) La probabilidad de que una persona de edad 20 sobreviva a la - edad 40 se calcula tomando en cuenta que la probabilidad de - que una vida de edad cero sobreviva a la edad 40 es igual a la probabilidad de que una vida de edad cero sobreviva a la edad- 20 y la probabilidad de que sobreviva de la edad 20 a la 40, - entonces:

$$S(40) = S(20)\ p$$

Para obtener el valor de p se debe calcular S(40):

$$S(40) = \frac{20,000 - (100)(40) - (40)^2}{20,000}$$

$$S(40) = \frac{20{,}000 - 4{,}000 - 1{,}600}{20{,}000} = \frac{14{,}400}{20{,}000} = \frac{36}{50}$$

$$S(40) = 0.72$$

Por lo tanto la solución al problema sería:

$$p = \frac{S(40)}{S(20)} = \frac{36}{44} = \frac{9}{11}$$

$$p = 0.82$$

c) En este caso la probabilidad de que una vida de edad cero muera entre la edad 30 y 40 es igual a la probabilidad de que una vida de edad cero sobreviva a la edad 20 y la probabilidad de que muera entre la edad 30 y 40, entonces:

$$S(30) - S(40) = S(20)\ p$$

Para obtener p se debe calcular S(30):

$$S(30) = \frac{20{,}000 - (100)(30) - (30)^2}{20{,}000}$$

$$S(30) = \frac{20{,}000 - 3{,}000 - 900}{20{,}000} = \frac{16{,}100}{20{,}000} = \frac{161}{200}$$

Por lo tanto la solución del problema sería:

$$\frac{161}{200} - \frac{36}{50} = \left[\frac{44}{50}\right] p$$

$$\frac{17}{200} = \left[\frac{44}{50}\right] p$$

$$p = \frac{\frac{17}{200}}{\frac{44}{50}} = \frac{(17)(50)}{(200)(44)} = \frac{850}{8,800} = \frac{17}{176}$$

$$p = \frac{17}{176}$$

EJEMPLO 2. Dada $S(x) = \frac{1}{10} \sqrt{100 - x}$, $0 \leqslant x \leqslant 100$

a) Encontrar la probabilidad de que una vida de edad 0 muera entre la edad 19 y la edad 36.

b) Encontrar la probabilidad que una vida de edad 19 muera antes de la edad 36

a) La probabilidad de que una vida de edad 0 muera entre la edad 19 y la edad 36 sería:

$$S(19) - S(36)$$

Por consiguiente se debe obtener los valores para S(19) y S(36).

$$S(19) = \frac{1}{10} \sqrt{100 - 19}$$

$$S(19) = \frac{9}{10}$$

$$S(36) = \frac{1}{10} \sqrt{100 - 36}$$

$$S(36) = \frac{8}{10}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$S(19) - S(36) = \frac{9}{10} - \frac{8}{10} = \frac{1}{10}$$

b) Primero se calculará la probabilidad de que una vida de edad 19 sobreviva a la edad 36.

$$S(36) = S(19)\ p$$

$$p = \frac{S(36)}{S(19)} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{9}$$

Así, la probabilidad que una vida de edad 19 muera antes de la edad 36 sería:

$$1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

EJEMPLO 3. Dada la función $\varphi(x) = -\frac{d}{dx} S(x)$ mostrar que:

a) $\int_0^w \varphi(y)\, dy = 1$

b) $\int_{x}^{x+n} \varphi(y)\, dy$ es la probabilidad de que una vida de edad - cero muera entre la edad x y la edad x+n.

c) $S(x) = 1 - \int_{0}^{x} \varphi(y)\, dy$

a) $$\int_{0}^{w} \varphi(y)\, dy = \int_{0}^{w} - \frac{d}{dx} S(x)\, dx = - S(x) \Big|_{0}^{w}$$

$$\int_{0}^{w} \varphi(y)\, dy = - [S(w) - S(0)] = - 0 + 1 = 1 \quad \text{q.d.}$$

b) $$\int_{x}^{x+n} \varphi(y)\, dy = \int_{x}^{x+n} - \frac{d}{dx} S(x)\, dx = - S(x) \Big|_{x}^{x+n}$$

$$\int_{x}^{x+n} \varphi(y)\, dy = - [S(x+n) - S(x)] = S(x) - S(x+n)$$

El resultado anterior representa la probabilidad de que una vida- de edad cero muera entre la edad x y la edad x+n.

c) $$1 - \int_{0}^{x} \varphi(y)\, dy = 1 - \int_{0}^{x} - \frac{d}{dx} S(x)\, dx = 1 + S(x) \Big|_{0}^{x}$$

$$1 - \int_{0}^{x} \varphi(y)\, dy = 1 + [S(x) - S(0)] = 1 + S(x) - 1 = S(x) \quad \text{q.d.}$$

2.2.3 LA TABLA DE MORTALIDAD Y SUS FUNCIONES ELEMENTALES.

Las funciones elementales contenidas en una tabla de mortalidad - corresponden al número de vivos, de muertos en todas las edades que - comprenden el espacio de vida, así como el cálculo de sus respectivas- probabilidades.

La función l_x representa el número de personas que sobreviven a - una determinada edad x.

La tabla comienza con un grupo inicial de determinada edad, la cual usualmente se le denomina edad cero, así l_0 representa el número de personas vivas a la edad cero, y a la vez, la base o raíz de la tabla.

La función d_x representa el número de personas que fallecen después de cumplir la edad x y antes de cumplir la edad x+1, por lo tanto:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Debe tomarse en cuenta que si se suman las personas que fallecieron a partir de la edad x año con año hasta la edad en que desaparece el grupo inicial, se obtiene el número de personas que había a la edad x, así:

$$l_x = \sum_{t=0}^{w-1-x} d_{x+t}$$

Como w representa la edad de la tabla en la cual ya no existen sobrevivientes se tiene que:

$$l_w = 0 \qquad l_{w-1} = d_{w-1}$$

l_x es una función decreciente ya que ha medida que pasa el tiempo, el grupo incial va disminuyendo a causa de la muerte.

Una tabla de mortalidad puede ser construída a partir de una función de sobrevivencia.

Si se supone una función de sobrevivencia:

$$S(x) = \frac{1}{10} \sqrt{100 - x}$$

Se puede calcular el número de sobrevivientes a cualquier edad, suponiendo l_0 o sea la raíz de la tabla igual a 1'000,000 se tiene:

$$l_1 = (1'000,000)\ S(1)$$

$$l_1 = (1'000,000) \left[\frac{1}{10}\right] \left[\sqrt{100 - 1}\right]$$

$$l_1 = (1'000,000) \left[\frac{\sqrt{99}}{10}\right]$$

$$l_1 = 994,987$$

Ahora se puede obtener el número de personas que fallecieron entre la edad cero y la edad 1, así:

$$d_1 = l_0 - l_1 = 1'000,000 - 994,987$$

$$d_1 = 5,013$$

De esta forma se puede calcular el número de vivos y de muertos a partir de una función de sobrevivencia con una determinada base, para cada una de las edades hasta llegar a la edad límite w.

Teniendo las funciones l_x y d_x se pueden obtener las probabilidades de vida y de muerte.

Se define p_x como la probabilidad que tiene una persona de edad x de sobrevivir a la edad x+1, así de acuerdo a los principios del cálculo de probabilidades se tiene:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Así, ${}_n p_x$ es la probabilidad que tiene una persona de edad x de sobrevivir a la edad x+n, por lo tanto:

$$ {}_{n}p_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} $$

La probabilidad que tiene una persona de edad x de no sobrevivir a la edad x+1 se denota por q_x, así:

$$ q_{x} = 1 - p_{x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_{x}} = \frac{l_{x} - l_{x+1}}{l_{x}} = \frac{d_{x}}{l_{x}} $$

Por lo tanto:

$$ q_{x} = \frac{d_{x}}{l_{x}} $$

La probabilidad que tiene una persona de edad x de no sobrevivir a la edad x+n se denota por ${}_{n}q_{x}$, así:

$$ {}_{n}q_{x} = 1 - {}_{n}p_{x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_{x}} = \frac{l_{x} - l_{x+n}}{l_{x}} = \frac{1}{l_{x}} \sum_{y=n}^{x+n-1} d_{y} $$

La probabilidad que tiene una persona de edad x de sobrevivir n años y morir en el año n+1 se denota ${}_{n/}q_{x}$, entonces:

$$ {}_{n/}q_{x} = \frac{d_{x+n}}{l_{x}} $$

La probabilidad que tiene una persona de edad x de morir entre la edad x+n y la edad x+n+m se denota ${}_{n/m}q_{x}$, entonces:

$$ {}_{n/m}q_{x} = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_{x}} $$

EJEMPLO 1. Dada $S(x) = 1 - 0.005\,x - 0.00005\,x^2$,construir las columnas l_x y d_x de la tabla de mortalidad correspondiente a las edades 0-2 usando una base de 100,000.

$$l_0 = 100,000$$

$$l_1 = (100,000)\,[1-(0.005)(1)-(0.00005)\,(1)^2]$$

$$l_1 = 99,495$$

$$d_0 = l_0 - l_1 = 100,000 - 99,495 = 505$$

$$l_2 = (100,000)\,[1-(0.005)(2)-(0.00005)\,(2)^2]$$

$$l_2 = 98,980$$

$$d_1 = l_1 - l_2 = 99,495 - 98,980 = 515$$

$$l_3 = (100,000)\,[1-(0.005)(3)-(0.00005)\,(3)^2]$$

$$l_3 = 98,455$$

$$d_2 = l_2 - l_3 = 98,980 - 98,455 = 525$$

EDAD x	lx	dx
0	100,000	505
1	99,495	515
2	98,980	525

EJEMPLO 2. Mostrar que:

a) $${}_{n/m}q_x = {}_{n}p_x - {}_{n+m}p_x$$

Demostración:

$${}_{n}p_x - {}_{n+m}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n+m}}{l_x}$$

$${}_{n}p_x - {}_{n+m}p_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$$

$${}_{n}p_x - {}_{n+m}p_x = {}_{n/m}q_x \qquad \text{q.d.}$$

b) $${}_{n/}q_x = {}_{n}p_x \, . \, q_{x+n}$$

Demostración:

$${}_{n}p_x \, . \, q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} = \frac{d_{x+n}}{l_x} = {}_{n/}q_x \qquad \text{q.d.}$$

c) $${}_{n+m}p_x = {}_{n}p_x \, . \, {}_{m}p_{x+n}$$

Demostración:

$${}_{n}p_x \, . \, {}_{m}p_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+n+m}}{l_{x+n}} = \frac{l_{x+n+m}}{l_x} = {}_{n+m}p_x$$

q.d.

C A P I T U L O 3

ANUALIDADES VENCIDAS Y ANTICIPADAS

3.1 CONCEPTOS GENERALES.

En una anualidad contingente los pagos se realizan durante un tiempo determinado, o bien, hasta que ocurra la muerte.

Cuando el pago periódico se realiza durante un tiempo determinado, es decir, cuando la anualidad termina despues de un número n de pagos aûn cuando la persona se encuentre con vida, se trata de una "Anualidad Contingente Temporal".

Cuando el pago periódico se realiza mientras la persona sobrevive se trata de una "Anualidad Vitalicia".

ANUALIDADES ANTICIPADAS. Son aquellas en las que el primer pago se realiza al principio del periódo o intervalo de pago. Una persona que ahora tiene x años el primer pago lo efectuará a la edad x, el segundo a la edad x+1 y así sucesivamente.

ANUALIDADES VENCIDAS. Son aquellas en las que el primer pago se efectúa un periodo despues de la operación, es decir, al final de cada intervalo de pago. Una persona que ahora tiene x años, el primer pago lo realizará a la edad x+1, el segundo a la edad x+2, y así sucesivamente.

ANUALIDADES DIFERIDAS. Son aquellas en las que el primer pago se efectûa al principio si se trata de una anualidad diferida anticipada, o bien al final si se trata de una anualidad diferida vencida, de un número (k) determinado de periodos. Una persona que ahora tiene x años el primer pago lo realizará a la edad x+k+1, el segundo a la edad x+k+2 y así sucesivamente tratandose de una diferida vencida. Ahora bien, si el primer pago lo realiza a la edad x+k, el segundo a la edad x+k+1, el tercero a la edad x+k+2 y así sucesivamente se trata de una diferida anticipada.

3.2 DOTAL PURO Y PRIMA NETA UNICA.

Un Dotal Puro es una promesa para pagar una cierta cantidad en una fecha futura determinada siempre y cuando la persona sobreviva para recibir dicha cantidad.

La Prima Neta Unica consiste en obtener el valor presente de un capital determinado pagadero dentro de n años, siempre que el asegurado este entonces con vida.

Supongase que el asegurado de edad x recibe un pago k al final de n años, estando aûn con vida. En este caso, la probabilidad que x sobreviva a la edad x+n es:

$$ {}_{n}p_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} $$

La esperanza será expresada como $k \; {}_{n}p_{x}$. Siendo V^{n} el valor presente de un peso pagadero dentro de n años, se define ${}_{n}E_{x}$ como el valor presente a la edad x de un dotal puro a n años de 1, por lo tanto:

$$ {}_{n}E_{x} = V^{n} \; {}_{n}p_{x} = V^{n} \frac{l_{x+n}}{l_{x}} \qquad (3.1) $$

${}_{n}E_{x}$ puede ser calculado directamente de las tablas de mortalidad. Sin embargo, para facilitar los cálculos, se pueden utilizar las tablas de valores conmutados.

Multiplicando el numerador y denominador de la expresión (3.1) por el factor V^{x} se tiene:

$$ {}_{n}E_{x} = V^{n} \frac{l_{x+n}}{l_{x}} = \frac{V^{x} V^{n} l_{x+n}}{V^{x} l_{x}} = \frac{V^{x+n} l_{x+n}}{V^{x} l_{x}} \qquad (3.2) $$

Observando los productos $V^{x+n} l_{x+n}$ y $V^{x} l_{x}$ de la expresión - (3.2) se puede concluir que el exponente de V es igual al subíndice de l, lo cual sugiere la definición de una función conmutada:

$$D_x = V^x l_x$$

Por lo tanto (3.2) se puede expresar de la siguiente manera:

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad (3.3)$$

Las funciones conmutadas simplifican la evaluación de funciones - más complejas que $_nE_x$. Los valores de D_x y de otras funciones conmutadas estan tabulados para todos los valores de x de todas las tablas de mortalidad.

$_nE_x$ es la prima neta unica para la edad x de un dotal puro a n - años de 1, que representa el pago único que el asegurado deberá apor - tar con el fin de recibir la suma de 1 al llegar al n-esimo año. La - palabra "neta" significa que no se toman en cuenta los gastos de ope - ración, y "única" significa que se paga de una sola vez al efectuar la operación.

EJEMPLO 1. Encontrar mediante la tabla de mortalidad CSO 1958 con interes del 3% el valor presente de una suma de $10'000,000.00 que serán recibidas por una persona que ahora tiene 20 años si llega con vida a los 40 años.

$$10'000,000 \; {}_{20}E_{20} = (10'000,000) \left[\frac{D_{40}}{D_{20}} \right]$$

$$10'000,000 \; {}_{20}E_{20} = (10'000,000) \left[\frac{2'833,001.8}{5'351,272.8} \right]$$

$$10'000,000 \; {}_{20}E_{20} = (10'000,000)\ (0.529407)$$

$$10'000,000 \; {}_{20}E_{20} = 5'294,070$$

Para comprobar el resulado anterior se tomarán las personas que se encuentran con vida a la edad 20, o sea, l_{20} y tomando el valor de la tabla de mortalidad CSO 1958, se obtienen 9'664,994 personas. Si cada una de dichas personas contribuyen con $ 5'294,070 invertido en un fondo al 3% de interes hasta el final de 20 años, al cabo del tiempo la cantidad acumulada será dividida en forma equitativa entre los sobrevivientes a la edad 40 y las ganancias deberán ser suficientes para proveer 10'000,000 a cada uno de los sobrevivientes.

Personas con vida a la edad 20	9'664,994
Contribución de cada miembro	x 5'294,070
Contribución total al fondo	5.1167×10^{13}
Factor de Acumulación	$\times (1.03)^{20}$
Acumulado total despues de 20 años	9.2413×10^{13}
Sobrevivientes a la edad 40 (l_{40})	$\div$ 9'241,359
	10'000,000

Los 10'000,000 que le corresponden a cada individuo incluyen una parte de lo que les correspondía a aquellos que no alcanzaron la edad 40. Esto se puede visualizar calculando el monto de la contribución (5'294,070) al 3% de interes a 20 años, lo que resulta una cantidad de 9'561,679. Con el beneficio anterior 5'294,070 a la edad 20 acumula en 20 años 10'000,000 usando como base la tabla de mortalidad CSO 1958 al 3%.

${}_nE_x$ se toma como factor de descuento de interes y sobrevivencia, correspondiendo a V^n los intereses unicamente.

Se puede usar como factor de acumulación de interes y sobrevivencia $1/{}_nE_x$, correspondiendo a $(1+i)^n$ los intereses únicamente.

EJEMPLO 2. Cuál es el valor de $ 1'000,000.00 a la edad 50 acumulado a la edad 65 con intereses al 3% con la condición de sobrevivencia dada por la tabla de mortalidad CSO 1958?

$$\frac{1}{{}_{15}E_{50}} = \frac{D_{50}}{D_{65}} = \frac{1'998,744}{995,687.8} = 2.0074003$$

$$(1'000,000)\,\frac{1}{{}_{15}E_{50}} = (1'000,000)(2.0074003) = 2'007,400.3$$

EJEMPLO 3. Si $S(x) = 1/10\ \sqrt{100 - x}$, cuál es el valor presente al 3% de un dotal puro a 17 años de 1 para una persona de edad 19?

$$ {}_{17}E_{19} = V^{17}\,\frac{l_{36}}{l_{17}} $$

Para calcular l_x a partir de la función de supervivencia se tiene:

$$l_x = k\ S(x)$$

Donde el valor de k denominado radix se toma del valor de l_0 de - la tabla de mortalidad CSO 1958, por lo tanto k=10'000,000.

Ahora se calcula l_{36} y l_{17} de la siguiente manera:

$$l_{36} = 10'000,000\ S(36)$$

$$l_{36} = (10'000,000)\ (1/10\ \sqrt{100 - 36}\ )$$

$$l_{36} = (10'000,000)\ (0.8)$$

$$l_{36} = 8'000.000$$

$$l_{17} = 10'000,000\ S(17)$$

$$l_{17} = (10'000,000)\ (1/10\ \sqrt{100 - 17}\ )$$

$$l_{17} = (10'000,000)\ (0.9110433)$$

$$l_{17} = 9'110,433$$

$$_{17}E_{19} = (1.03)^{-17}\ \frac{8'000,000}{9'110,433} = (0.6050)\ (0.87811414)$$

$$_{17}E_{19} = 0.5313$$

3.3 ANUALIDAD VITALICIA VENCIDA

Una anualidad vitalicia vencida de una pago anual de 1 a x, es - una serie de pagos anuales de 1, los cuales comienzan al final del - primer año y continúan efectuándose anualmente mientras x se encuentre con vida.

El valor presente de este tipo de anualidad denotado por a_x es igual a la suma de una serie de dotales puros.

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots + {}_{w-x}E_x = \sum_{n=1}^{w-x} {}_nE_x$$

$$a_x = V\ \frac{l_{x+1}}{l_x} + V^2\ \frac{l_{x+2}}{l_x} + V^3\ \frac{l_{x+3}}{l_x} + \dots + V^{w-x}\ \frac{l_{x+w-x}}{l_x}$$

$$a_x = \frac{V\,l_{x+1} + V^2\,l_{x+2} + V^3\,l_{x+3} + \dots + V^{w-x}\,l_w}{l_x} \qquad (3.4)$$

Multiplicando el numerador y denominador de (3.4) por V^x se tiene:

$$a_x = \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \ldots + v^{w} l_{w}}{v^{x} l_{x}}$$

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{w}}{D_x}$$

Definiendo una nueva función conmutada como:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_w = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t}$$

Entonces:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad (3.5)$$

El uso de funciones conmutadas facilitan el càlculo de a_x ya que tanto D_x como N_x se encuentran tabuladas para cualquier edad que se requiera.

a_x representa el valor presente y la prima neta ûnica de la anualidad.

EJEMPLO 1. Hallar la prima neta ûnica de una anualidad vitalicia-vencida de $ 1'000,000.00 anuales para una persona que tiene a) 25 años, b) 40 años, c) 55 años.

Utilizando la expresión (3.5) se tiene;

a) $$1'000,000\ a_{25} = (1'000,000)\left[\frac{N_{26}}{D_{25}}\right]$$

$$1'000,000\ a_{25} = (1'000,000)\left[\frac{108'616,225.2}{4'573,377.1}\right]$$

$$1'000,000\ a_{25} = 23'749,676.25$$

b) $$1'000,000\ a_{40} = (1'000,000)\left[\frac{N_{41}}{D_{40}}\right]$$

$$1'000,000\ a_{40} = (1'000,000)\left[\frac{54'886,345.6}{2'833,001.8}\right]$$

$$1'000,000\ a_{40} = 19'373,918.00$$

c) $$1'000,000\ a_{55} = (1'000,000)\left[\frac{N_{56}}{D_{55}}\right]$$

$$1'000,000\ a_{55} = (1'000,000)\left[\frac{22'392,847.7}{1'639,329.7}\right]$$

$$1'000,000\ a_{55} = 13'659,758.00$$

3.4 ANUALIDAD VENCIDA TEMPORAL A n AÑOS.

En este tipo de anualidad, la serie de pagos se realizan al final de cada intervalo de pago limitados a un máximo de n años si x perma -

nece con vida. Denotando el valor presente de esta anualidad como $a_{x:\overline{n}|}$, se calcula limitandose a los primeros n años.

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t}E_{x} = {}_{1}E_{x} + {}_{2}E_{x} + {}_{3}E_{x} + {}_{4}E_{x} + \ldots + {}_{n}E_{x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{V\, l_{x+1}}{l_x} + \frac{V^2\, l_{x+2}}{l_x} + \frac{V^3\, l_{x+3}}{l_x} + \ldots + \frac{V^n\, l_{x+n}}{l_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{V\, l_{x+1} + V^2\, l_{x+2} + V^3\, l_{x+3} + \ldots + V^n\, l_{x+n}}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por V^x se tiene:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{V^{x+1}\, l_{x+1} + V^{x+2}\, l_{x+2} + V^{x+3}\, l_{x+3} + \ldots + V^{x+n}\, l_{x+n}}{V^x\, l_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \sum_{t=1}^{w-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} - \sum_{t=n+1}^{w-x} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Por lo tanto:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.6)$$

EJEMPLO 1. Calcular el valor presente de una anualidad vencida temporal de \$ 1'000,000.00 anuales durante 25 años, para una persona de 50 años.

$$(1'000,000) \ a_{50:\overline{25}|} = (1'000,000) \ \frac{N_{51} - N_{76}}{D_{50}}$$

Buscando en la tabla de mortalidad CSO 1958 los valores conmutados resulta:

$$(1'000,000) \ a_{50:\overline{25}|} = (1'000,000) \ \frac{31'296,206.9 - 2'766.375.6}{1'998,744}$$

$$(1'000,000) \ a_{50:\overline{25}|} = (1'000,000) \ (14.27387965)$$

$$(1'000,000) \ a_{50:\overline{25}|} = 14'273,879.65$$

3.5 ANUALIDAD VITALICIA DIFERIDA n AÑOS.

En este tipo de anualidad los primeros n pagos son omitidos, de tal forma que el primer pago será efectuado a la edad x+n+1 y continuarán realizándose mientras la persona se encuentre con vida. El valor presente, denotado por $_{n/}a_x$, puede expresarse como la suma de dotales puros pagaderos a partir de la edad x+n+1, por lo tanto se tiene:

$$_{n/}a_x = \sum_{t=n+1}^{w-x} {}_tE_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \dots$$

$$_{n/}a_x = V^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + V^{n+2}\,{}_{n+2}p_x + V^{n+3}\,{}_{n+3}p_x + \dots$$

$$_{n/}a_x = \frac{V^{n+1} l_{x+n+1} + V^{n+2} l_{x+n+2} + V^{n+3} l_{x+n+3} + \dots}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por V^x resulta:

$$_{n/}a_x = \frac{V^{x+n+1} l_{x+n+1} + V^{x+n+2} l_{x+n+2} + V^{x+n+3} l_{x+n+3} + \dots}{V^x l_x}$$

Utilizando la función conmutada $D_x = V^x l_x$ se tiene:

$$_{n/}a_x = \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + D_{x+n+3} + \dots}{D_x}$$

Utilizando la función conmutada $N_x = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t}$ se tiene:

$$_{n/}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.7)$$

La expresión (3.7) puede ser calculada de otra manera. La anualidad vitalicia diferida a n años es equivalente a la diferencia entre -

la anualidad vitalicia vencida y una anualidad vitalicia vencida temporal a n años, así:

$$ {}_{n/}a_x = a_x - a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} $$

$$ {}_{n/}a_x = \frac{N_{x+1} - \left[N_{x+1} - N_{x+n+1} \right]}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+1} + N_{x+n+1}}{D_x} $$

$$ {}_{n/}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} $$

Otra forma de obtener (3.7) es tomar ${}_nE_x$ como factor de descuento. La serie de pagos que se efectúan despues de la edad x+n de una anualidad vitalicia diferida n años tiene el valor presente a_{x+n}. Descontando a la edad x el interes y la condición de sobrevivencia se tiene:

$$ {}_{n/}a_x = {}_nE_x \cdot a_{x+n} \qquad (3.7.A) $$

$$ {}_{n/}a_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} $$

EJEMPLO 1. A los 54 años de edad, M paga \$ 5'000,000.00 por una anualidad vitalicia cuyo primer pago tiene que hacerse a los 65 años de edad. Que pago anual se estipula?

En este problema el valor presente de la anualidad es conocido:

$$ {}_{10/}a_{54} = 5'000,000 $$

Se desconoce el pago anual, por lo tanto:

$$ 5'000,000 = Ra \; \frac{N_{54+10+1}}{D_{54}} $$

$$5'000,000 = Ra \left[\frac{N_{65}}{D_{54}} \right]$$

$$5'000,000 = Ra \left[\frac{10'606,827.5}{1'708,844.9} \right]$$

$$5'000,000 = Ra\ (6.2070156)$$

$$Ra = \frac{5'000,000}{6.2070156}$$

$$Ra = 805,540.00$$

EJEMPLO 2. Un hombre desea contratar una anualidad de $ 1'000,000 pagaderos a su hijo de 10 años al final de cada año durante su vida, con el primer pago al final de sus 21 años. Cuál es la cantidad que debe proporcionar asumiendo 3% de interes a partir de la tabla de mortalidad CSO 1958?

$$(1'000,000)\ {}_{10/}a_{10} = (1'000,000) \left[\frac{N_{10+10+1}}{D_{10}} \right]$$

$$(1'000,000)\ {}_{10/}a_{10} = (1'000,000) \left[\frac{N_{21}}{D_{10}} \right]$$

$$(1'000,000)\ {}_{10/}a_{10} = (1'000,000) \left[\frac{132'991,536.5}{7'296,488.1} \right]$$

$$(1'000,000)\ {}_{10/}a_{10} = (1'000,000)\ (18.22678728)$$

$$(1'000,000)\ {}_{10/}a_{10} = 18'226,787.28$$

3.6 ANUALIDAD TEMPORAL A m AÑOS DIFERIDA n AÑOS.

Este tipo de anualidad se define como la serie de pagos anuales - que comienzan a la edad $x+n+1$, es decir al final del año n y continúan hasta completar m pagos siempre y cuando la persona se encuentre con - vida. El valor presente se denota por ${}_{n/m}a_x$ y su cálculo resulta de- la suma de dotales puros que comienzan a la edad $x+n+1$ y terminan a la edad $x+n+m$, por lo tanto:

$$ {}_{n/m}a_x = \sum_{t=n+1}^{m+n} {}_tE_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \ldots + {}_{n+m}E_x $$

$$ {}_{n/m}a_x = \frac{V^{n+1}\, l_{x+n+1}}{l_x} + \frac{V^{n+2}\, l_{x+n+2}}{l_x} + \ldots + \frac{V^{n+m}\, l_{x+n+m}}{l_x} $$

Multiplicando numerador y denominador por V^x resulta:

$$ {}_{n/m}a_x = \frac{V^{x+n+1}\, l_{x+n+1} + V^{x+n+2}\, l_{x+n+2} + \ldots + V^{x+n+m}\, l_{x+n+m}}{V^x\, l_x} $$

Como $D_x = V^x\, l_x$ entonces:

$$ {}_{n/m}a_x = \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots + D_{x+n+m}}{D_x} $$

$$ {}_{n/m}a_x = \sum_{t=n+1}^{w-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} - \sum_{t=m+n+1}^{w-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} $$

$$ {}_{n/m}a_x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} \qquad (3.8) $$

La expresión (3.8) se puede obtener de otra manera. Si de una anualidad diferida por n años se resta una diferida por n+m años, se obtiene la anualidad temporal a m años diferida n años.

$$ {}_{n/m}a_x = {}_{n/}a_x - {}_{n+m/}a_x $$

A partir de la expresión (3.7) se tiene:

$$ {}_{n/m}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+m+1}}{D_x} $$

Por lo tanto:

$$ {}_{n/m}a_x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} $$

Tambien se puede obtener el mismo resultado restando de una anualidad temporal a n+m años una anualidad temporal a n años:

$$ {}_{n/m}a_x = a_{x:\overline{n+m}|} - a_{x:\overline{n}|} $$

A partir de la expresión (3.6) se tiene:

$$ {}_{n/m}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} $$

$$_{n/m}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+m+n+1} - N_{x+1} + N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$_{n/m}a_x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

EJEMPLO 1. A los 45 años una persona compra una anualidad a 15 - años de \$ 3'000,000.00 anuales, haciendose el primer pago a los 65 - años, hallar la prima neta única.

$$(3'000,000)\ _{19/15}a_{45} = (3'000,000)\left[\frac{N_{45+19+1} - N_{45+15+19+1}}{D_{45}}\right]$$

$$(3'000,000)\ _{19/15}a_{45} = (3'000,000)\left[\frac{N_{65} - N_{80}}{D_{45}}\right]$$

$$(3'000,000)\ _{19/15}a_{45} = (3'000,000)\left[\frac{10'606,827.5 - 1'395,657.9}{2'392,904.8}\right]$$

$$(3'000,000)\ _{19/15}a_{45} = (3'000,000)\ (3.849367346)$$

$$(3'000,000)\ _{19/15}a_{45} = 11'548,102.04$$

EJEMPLO 2. X, que ahora tiene 30 años, compra una anualidad de - \$ 2'500,000.00 anuales durante 25 años estipulándose el primer pago al cumplir 65 años de edad. Hallar la prima neta única.

$$(2'500,000)\ _{34/25}a_{30} = (2'500,000)\left[\frac{N_{30+34+1} - N_{30+25+34+1}}{D_{30}}\right]$$

$$(2'500,000)\ {}_{34/25}a_{30} = (2'500,000)\left[\frac{N_{65} - N_{90}}{D_{30}}\right]$$

$$(2'500,000)\ {}_{34/25}a_{30} = (2'500,000)\left[\frac{10'606,827.5 - 109,986.5}{3'905,782}\right]$$

$$(2'500,000)\ {}_{34/25}a_{30} = (2'500,000)\ (2.687513282)$$

$$(3'000,000)\ {}_{34/25}a_{30} = 6'718,783.20$$

3.7 ANUALIDAD VITALICIA ANTICIPADA.

Una anualidad vitalicia anticipada se define como la serie de pagos anuales que comienzan al principio del periodo o intervalo de pago y continúan efectúandose mientras la persona se encuentre con vida. El valor presente se denota por $\ddot{a}_x$ y su cálculo resulta de la suma de dotales puros al principio del periodo.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{w-x} {}_tE_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots$$

$$\ddot{a}_x = v^0 \frac{l_x}{l_x} + a_x = 1 + a_x$$

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{w-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

Por lo tanto

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{3.9}$$

EJEMPLO 1. Hallar el valor presente de una anualidad vitalicia anticipada de G 1'000,000.00 anuales para una persona que tiene 28 años.

$$(1'000,000) \quad \ddot{a}_{28} = (1'000,000) \frac{N_{28}}{D_{28}}$$

$$(1'000,000) \quad \ddot{a}_{28} = (1'000,000) \frac{99'890,529.1}{4'160,726.8}$$

$$(1'000,000) \quad \ddot{a}_{28} = (1'000,000)\ (24.00795195)$$

$$(1'000,000) \quad \ddot{a}_{28} = 24'007,951.95$$

EJEMPLO 2. Mostrar que $\ddot{a}_x = 1 + V\,p_x\ \ddot{a}_{x+1}$

Demostración:

$$1 + V\,p_x\ \ddot{a}_{x+1} = 1 + V\,p_x\,(1 + a_{x+1}) = 1 + V\,p_x + V\,p_x\ a_{x+1}$$

$$= 1 + V\,p_x + V\,p_x \left[\frac{V\,l_{x+2} + V^2\,l_{x+3} + V^3\,l_{x+4} + V^4\,l_{x+5} + \ldots}{l_{x+1}} \right]$$

$$= 1 + V\,\frac{l_{x+1}}{l_x} + p_x \left[\frac{V^2\,l_{x+2} + V^3\,l_{x+3} + V^4\,l_{x+4} + V^5\,l_{x+5} + \ldots}{l_{x+1}} \right]$$

$$= 1 + V\,\frac{l_{x+1}}{l_x} + \left[\frac{l_{x+1}}{l_x} \right] \left[\frac{V^2\,l_{x+2} + V^3\,l_{x+3} + V^4\,l_{x+4} + \ldots}{l_{x+1}} \right]$$

$$= 1 + V\,\frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{V^2\,l_{x+2} + V^3\,l_{x+3} + V^4\,l_{x+4} + \ldots}{l_x}$$

$$= 1 + \frac{V\,l_{x+1} + V^2\,l_{x+2} + V^3\,l_{x+3} + V^4\,l_{x+4} + \ldots}{l_x}$$

$$= 1 + a_x = \ddot{a}_x \qquad \text{q.d.}$$

3.8 ANUALIDAD ANTICIPADA TEMPORAL A n AÑOS.

Este tipo de anualidad se define como la serie de pagos que se realizan al principio de cada intervalo de pago limitados a un máximo de n-1 años si la persona permanece con vida. El valor presente se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y su cálculo resulta de la suma de dotales puros limitados a los primeros n años al principio del periodo.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_{n-1}E_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|} = 1 + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots - N_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (3.10)$$

EJEMPLO 1. Una persona cuya edad es 28 años, contrata una anualidad temporal a 30 años de \$ 1'500,000.00 anuales comenzando con el primer pago al momento de la contratación. Hallar la prima neta única.

$$(1'500,000)\ \ddot{a}_{28:\overline{30}|} = (1'500,000)\left[\frac{N_{28} - N_{28+30}}{D_{28}}\right]$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}_{28:\overline{30}|} = (1'500,000)\left[\frac{N_{28} - N_{58}}{D_{28}}\right]$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}_{28:\overline{30}|} = (1'500,000)\left[\frac{99'890,529.1 - 19'318,490.7}{4'160,726.8}\right]$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}_{28:\overline{30}|} = (1'500,000)\ (19.36489519)$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}_{28:\overline{30}|} = 29'047,342.79$$

EJEMPLO 2. Mostrar que $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_nE_x$

Demostración:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x - \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x$$

$$= \left[{}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_{n-1}E_x\right] - \left[{}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots + {}_nE_x\right]$$

$$= {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_{n-1}E_x - {}_1E_x - {}_2E_x - {}_3E_x - \ldots - {}_nE_x$$

$$= 1 - {}_nE_x \qquad \text{q.d.}$$

3.9 ANUALIDAD ANTICIPADA DIFERIDA n AÑOS.

En este tipo de anualidad los primeros n-1 años son omitidos, de tal forma que el primer pago será efectuado a la edad x+n y continuarán realizándose mientras la persona se encuentre con vida. El valor presente, denotado por ${}_{n/}\ddot{a}_x$, puede expresarse como la suma de dotales puros pagaderos a partir de la edad x+n, por lo que se tiene:

$${}_{n/}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{w-x} {}_tE_x = {}_nE_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \ldots.$$

$${}_{n/}\ddot{a}_x = v^n\,{}_np_x + v^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + v^{n+2}\,{}_{n+2}p_x + \ldots.$$

$$_{n/}\ddot{a}_x = V^n \frac{l_{x+n}}{l_x} + V^{n+1} \frac{l_{x+n+1}}{l_x} + V^{n+2} \frac{l_{x+n+2}}{l_x} + \ldots.$$

$$_{n/}\ddot{a}_x = \frac{V^n\, l_{x+n} + V^{n+1}\, l_{x+n+1} + V^{n+2}\, l_{x+n+2} + \ldots.}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por V^x resulta:

$$_{n/}\ddot{a}_x = \frac{V^{x+n}\, l_{x+n} + V^{x+n+1}\, l_{x+n+1} + V^{x+n+2}\, l_{x+n+2} + \ldots.}{V^x\, l_x}$$

Como $D_x = V^x\, l_x$ se tiene:

$$_{n/}\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots.}{D_x}$$

Si $N_x = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t}$ entonces $N_{x+n} = \sum_{t=n}^{w-x} D_{x+t}$

Por lo tanto:

$$_{n/}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \qquad (3.11)$$

EJEMPLO 1. Z desea comprar una anualidad anticipada de $3'250,000 anuales estipulándose el primer pago al cumplir 54 años. Si Z cuenta - con 38 años, calcular la prima neta única.

$$(3'250,000)\ {}_{16/}\ddot{a}_{38} = (3'250,000) \left[\frac{N_{38+16}}{D_{38}} \right]$$

$$(3'250,000)\ {}_{16/}\ddot{a}_{38} = (3'250,000)\left[\frac{N_{54}}{D_{38}}\right]$$

Buscando los valores para N_{54} y D_{38} en la tabla de mortalidad CSO 1958 se tiene:

$$(3'250,000)\ {}_{16/}\ddot{a}_{38} = (3'250,000)\left[\frac{25'741,022.3}{3'024,434.7}\right]$$

$$(3'250,000)\ {}_{16/}\ddot{a}_{38} = (3'250,000)\ (8.511019365)$$

$$(3'250,000)\ {}_{16/}\ddot{a}_{38} = 27'660,812.94$$

EJEMPLO 2. Mostrar que $\;{}_{n/}\ddot{a}_{x} = {}_{n-1/}a_{x}$

Demostración:

Se tiene que ${}_{n/}a_{x}$ es una anualidad vencida diferida n años en donde el primer pago se efectúa al inicio del año x+n+1.

Ahora si se toma una anualidad vencida diferida n-1 años el primer pago se efectúa al inicio del año x+n por lo que se tiene:

$${}_{n-1/}a_{x} = \sum_{t=n}^{w-x} {}_{t}E_{x}$$

$${}_{n-1/}a_{x} = {}_{n}E_{x} + {}_{n+1}E_{x} + {}_{n+2}E_{x} + \ldots.$$

$${}_{n-1/}a_{x} = \frac{V^{n}\, l_{x+n}}{l_{x}} + \frac{V^{n+1}\, l_{x+n+1}}{l_{x}} + \frac{V^{n+2}\, l_{x+n+2}}{l_{x}}$$

Multiplicando numerador y denominador por V^{x} resulta:

$$ {}_{n-1/}a_x = \frac{V^{x+n}\, l_{x+n} + V^{x+n+1}\, l_{x+n+1} + V^{x+n+2}\, l_{x+n+2} + \dots}{V^{x}\, l_x} $$

$$ {}_{n-1/}a_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \dots}{D_x} $$

$$ {}_{n-1/}a_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} $$

Por lo tanto por la expresión (3.11) se tiene que:

$$ {}_{n-1/}a_x = {}_{n/}\ddot{a}_x $$

3.10 ANUALIDAD ANTICIPADA DIFERIDA n AÑOS Y TEMPORAL A m AÑOS.

En este tipo de anualidad los primeros n-1 pagos son omitidos, de tal forma que el primer pago se realiza a la edad x+n y continuan hasta la edad x+n+m-1 mientras la persona se encuentre con vida. El valor presente se denota por ${}_{n/m}\ddot{a}_x$ y su cálculo se obtiene mediante la suma de dotales puros que comienzan en el año x+n y finalizan en el año x+n+m-1. Por lo tanto se tiene:

$$ {}_{n/m}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_{t}E_x = {}_{n}E_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \dots + {}_{n+m-1}E_x $$

$$ {}_{n/m}\ddot{a}_x = V^{n}\,{}_{n}p_x + V^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + V^{n+2}\,{}_{n+2}p_x + \dots + V^{n+m-1}\,{}_{n+m-1}p_x $$

$$ {}_{n/m}\ddot{a}_x = V^{n}\frac{l_{x+n}}{l_x} + V^{n+1}\frac{l_{x+n+1}}{l_x} + V^{n+2}\frac{l_{x+n+2}}{l_x} + \dots + V^{n+m-1}\frac{l_{x+n+m-1}}{l_x} $$

Multiplicando numerador y denominador por V^{x} resulta:

$$ {}_{n/m}\ddot{a}_x = \frac{V^{x+n}\,l_{x+n} + V^{x+n+1}\,l_{x+n+1} + \dots + V^{x+n+m-1}\,l_{x+n+m-1}}{V^{x}\,l_x} $$

Como $D_x = V^{x}\,l_x$ entonces:

$$ {}_{n/m}\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \dots + D_{x+n+m-1}}{D_x} $$

Como $N_{x+n} = \sum_{t=n}^{w-x} D_{x+t}$ y $N_{x+n+m} = \sum_{t=n+m}^{w-x} D_{x+t}$

Por lo tanto:

$$ {}_{n/m}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x} \qquad (3.12) $$

EJEMPLO 1. M desea comprar una anualidad contingente anticipada - temporal a 15 años de \$ 4'000,000.00 anuales para su padre que ahora - tiene 48 años y se estipula que el primer pago se hará a la edad de 55. Hallar la prima neta única.

$$(4'000,000)\ {}_{7/15}\ddot{a}_{48} = (4'000,000)\left[\frac{N_{48+7} - N_{48+7+15}}{D_{48}}\right]$$

$$(4'000,000)\ {}_{7/15}\ddot{a}_{48} = (4'000,000)\left[\frac{N_{55} - N_{70}}{D_{48}}\right]$$

Buscando los valores para N_x y D_x en la tabla de mortalidad CSO - 1958 se tiene:

$$(4'000,000)\ {}_{7/15}\ddot{a}_{48} = (4'000,000)\left[\frac{24'032,177.4 - 6'216,553.1}{2'151,660.7}\right]$$

$$(4'000,000)\ {}_{7/15}\ddot{a}_{48} = (4'000,000)\ (8.279941303)$$

$$(4'000,000)\ {}_{7/15}\ddot{a}_{48} = 33'119,765.21$$

EJEMPLO 2. Mostrar que ${}_{n/m}\ddot{a}_x = {}_{n-1/m}a_x$

Demostración:

${}_{n/m}\ddot{a}_x$ es la anualidad vencida diferida n años y temporal a m - años donde el primer pago se realiza en el año x+n y finaliza en el - año x+n+m-1.

${}_{n-1/m}a_x$ es una anualidad vencida diferida n-1 años y temporal a m años donde el primer pago se realiza en el año x+n y finaliza en el- año x+n+m-1, así:

$${}_{n-1/m}a_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_tE_x$$

$${}_{n-1/m}a_x = {}_{n}E_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \ldots + {}_{n+m-1}E_x$$

$${}_{n-1/m}a_x = {}_{n/m}\ddot{a}_x$$

C A P I T U L O 4

ANUALIDADES VENCIDAS Y ANTICIPADAS PAGADERAS m VECES AL AÑO

En la práctica, las anualidades no siempre son pagaderas anualmente, con frecuencia se puede presentar el caso donde los pagos se realizen en subperiodos de año, ya sea sobre la base mensual, bimestral, trimestral o bien semestral. Para diferenciar este tipo de anualidades, en su notación se agregará un superíndice (m), el cual indicará que los pagos se efectuarán m veces al año.

4.1 ANUALIDAD VITALICIA VENCIDA PAGADERA m VECES AL AÑO.

En este tipo de anualidad el primer pago (1/m) se realiza a la edad x + 1/m seguido de pagos iguales a intervalos de 1/m años. El valor presente de una anualidad anticipada se puede representar como:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \qquad (4.1)$$

Una anualidad vencida es igual a una anualidad anticipada diferida 1 año, así:

$$_{1/}\ddot{a}_x = a_x \qquad (4.2)$$

Para obtener una anualidad anticipada diferida por una fracción de año 1/m se interpola entre a_x y $\ddot{a}_x$:

```
---|--------|----------------------------|---
   0       1/m                           1
```

$$\ddot{a}_x \qquad\qquad {}_{1/m\,/}\ddot{a}_x \qquad\qquad\qquad a_x$$

$$_{1/m\,/}\ddot{a}_x = \frac{\frac{1}{m} - \ddot{a}_x}{a_x - \ddot{a}_x}$$

Sustituyendo la expresión (4.1) se tiene:

$$ {}_{1/m /}\ddot{a}_x = \frac{\frac{1}{m} - \left[1 + a_x\right]}{a_x - \left[1 + a_x\right]} $$

$$ {}_{1/m /}\ddot{a}_x = \frac{\frac{1}{m} - 1 - a_x}{a_x - 1 - a_x} = a_x + 1 - \frac{1}{m} $$

$$ {}_{1/m /}\ddot{a}_x = a_x + \frac{m - 1}{m} \qquad (4.3) $$

La expresión (4.3) es solo una aproximación, ya que no se consideró la influencia del interes y de la mortalidad. Teniendo en cuenta este error, se calculan las anualidades anticipadas diferidas (2/m, 3/m, 4/m, ..., (m-1)/m, 1) años, así:

$$ {}_{1/m /}\ddot{a}_x = a_x + \frac{m - 1}{m} $$

$$ {}_{2/m /}\ddot{a}_x = a_x + \frac{m - 2}{m} $$

$$ \vdots $$

$$ {}_{(m-1)/m /}\ddot{a}_x = a_x + \frac{1}{m} $$

$$ {}_{1/}\ddot{a}_x = a_x $$

Lo anterior representa m pagos de uno en los distintos subperiodos. Si se denota por $a_x^{(m)}$ la renta de uno al año, pagadera en intervalos de 1/m al final de cada subperiodo, m veces $a_x^{(m)}$ equivale a la suma de las m anualidades anteriores, entonces:

$$m\,a_x^{(m)} = a_x + a_x + \frac{1}{m} + \ldots + a_x + \frac{m-2}{m} + a_x + \frac{m-1}{m}$$

$$m\,a_x^{(m)} = m\,a_x + \frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \ldots + \frac{m-2}{m} + \frac{m-1}{m}$$

$$m\,a_x^{(m)} = m\,a_x + \frac{1 + 2 + \ldots + m-2 + m-1}{m}$$

Por conocimientos de algebra se sabe que:

$$1 + 2 + \ldots + m-2 + m-1 = \frac{m(m-1)}{2}$$

Por lo tanto:

$$m\,a_x^{(m)} = m\,a_x + \frac{m(m-1)}{2m}$$

$$m\,a_x^{(m)} = m\left[a_x + \frac{m-1}{2m}\right]$$

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} \qquad (4.4)$$

Lo anterior representa una aproximación del valor presente de una anualidad vitalicia vencida de 1 pagadera m veces al año a la edad x.

Para obtener una mayor aproximación de la expresión (4.4) se utiliza la fórmula de Euler-Maclaurin[1] :

$$\int_0^n u_x\,dx = \frac{1}{m}\left[u_{1/m} + u_{2/m} + u_{3/m} + \dots + u_1 + \dots + u_n\right] +$$

$$\frac{1}{2m}\left[u_n - u_0\right] - \frac{1}{12m^2}\left[u'_n - u'_0\right] - \dots \quad (4.5)$$

Suponiendo m=1 se tiene:

$$\int_0^n u_x\,dx = \left[u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_1 + \dots + u_n\right] +$$

$$\frac{1}{2}\left[u_n - u_0\right] - \frac{1}{12}\left[u'_n - u'_0\right] - \dots \quad (4.6)$$

Si se resta la expresión (4.6) de la expresión (4.5) se tiene:

$$\left[\frac{1}{m} \; u_{1/m} + u_{2/m} + u_{3/m} + \dots + u_1 + \dots + u_n + \frac{1}{2m}\left[u_n - u_0\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{12m^2}\left[u'_n - u'_0\right] - \dots\right] - \left[\sum_{x=1}^{n} u_x + \frac{1}{2}\left[u_n - u_0\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{12}\left[u'_n - u'_0\right] - \dots\right]$$

1 Consultar el anexo de este capítulo para ver su desarrollo.

$$\left[\frac{1}{m}\left[u_{1/m}+u_{2/m}+u_{3/m}+\ldots+u_{1}+\ldots+u_{n}\right]=\sum_{x=1}^{n}u_{x}+\right.$$

$$\frac{1}{2}\left[u_{n}-u_{0}\right]-\frac{1}{12}\left[u'_{n}-u'_{0}\right]-\frac{1}{2m}\left[u_{n}-u_{0}\right]+$$

$$\frac{1}{12m^{2}}\left[u'_{n}-u'_{0}\right]-\ldots$$

$$\frac{1}{m}\left[u_{1/m}+u_{2/m}+u_{3/m}+\ldots+u_{1}+\ldots+u_{n}\right]=\sum_{x=1}^{n}u_{x}+$$

$$\frac{m-1}{2m}\left[u_{n}-u_{0}\right]-\frac{m^{2}-1}{12m^{2}}\left[u'_{n}-u'_{0}\right]-\ldots \qquad (4.7)$$

El segundo miembro de la expresión (4.7) es la fórmula de - Woolhouse.

Si $u_t = V^{t}\,{}_{t}p_{x}$, el primer miembro de la expresión (4.7) representa la anualidad vencida pagadera m veces al año.

$$\frac{1}{m}\left[V^{1/m}\,{}_{1/m}p_{x}+V^{2/m}\,{}_{2/m}p_{x}+\ldots+V\,p_{x}+\ldots+V^{n}\,{}_{n}p_{x}\right]=a_{x}^{(m)}$$

Analizando el segundo miembro se tiene que para n = w-x:

$$\sum_{t=1}^{n}u_{t}=\sum_{t=1}^{w-x}V^{t}\,{}_{t}p_{x}=a_{x}$$

$$u_0 = V^0 \; {}_0p_x = \frac{l_{x+0}}{l_x} = 1$$

$$u_n = u_{w-x} = 0$$

Por otro lado se tiene que:

$$u'_t = \frac{d}{dt}\left[V^t \; {}_tp_x\right] = \frac{d}{dt}\left[V^t \frac{l_{x+t}}{l_x}\right]$$

$$u'_t = \frac{1}{l_x} \cdot \frac{d}{dt}\left[V^t \; l_{x+t}\right]$$

$$u'_t = \frac{1}{l_x}\left[V^t \frac{d}{dt} l_{x+t} + l_{x+t} \frac{d}{dt} V^t\right]$$

$$u'_t = \frac{1}{l_x}\left[V^t \cdot l_{x+t} \frac{d\, l_{x+t}}{dt\, l_{x+t}} + l_{x+t} \; V^t \log V\right]$$

$$u'_t = \frac{V^t \; l_{x+t}}{l_x}\left[\frac{d\, l_{x+t}}{dt\, l_{x+t}} + \log V\right]$$

Se tiene que :

$$\mu_{x+t} = - \frac{d \; l_{x+t}}{dt \; l_{x+t}} \quad \text{por lo tanto} \quad - \mu_{x+t} = \frac{d \; l_{x+t}}{dt \; l_{x+t}}$$

$$y \quad \log V = \log (1+i)^{-1} = - \log (1+i) = - \delta$$

Donde δ es la tasa instantánea de crecimiento o fuerza de interes.

Entonces:

$$u'_t = V^t \, {}_tp_x \left[-\mu_{x+t} - \delta \right]$$

$$u'_t = - u_t \left[\mu_{x+t} + \delta \right]$$

Como $u_n = 0$ y $u_0 = 1$, entonces:

$$u'_n - u'_0 = - u'_0 = u_0 \left[\mu_{x+0} + \delta \right] = u_0 \left[\mu_x + \delta \right]$$

$$u'_n - u'_0 = \mu_x + \delta$$

Por lo tanto el tercer termino del segundo miembro de la expresión (4.7) se expresa como:

$$- \frac{m^2 - 1}{12m^2} \left[u'_n - u'_0 \right] = - \frac{m^2 - 1}{12m^2} \left[\mu_x + \delta \right]$$

Finalmente se obtiene que:

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2 - 1}{12m^2} \left[\mu_x + \delta \right] \qquad (4.8)$$

En la práctica los dos primeros terminos de la expresión (4.8) proporcionan una aproximación lo suficientemente exacta, por lo que $a_x^{(m)}$ puede ser representada simplemente por:

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

EJEMPLO 1. Encontrar el valor presente de una anualidad que proporciona $ 500,000.00 al final de cada 3 meses durante toda la vida de una persona que cuenta con 50 años en este momento, utilizar la tabla-de mortalidad CSO 1958 al 3% de interes. Emplear la expresión (4.4).

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}$$

Como la anualidad proporciona $ 500,000.00 al final de cada 3 meses, quiere decir que al año proporciona (500,000)(4) = 2'000,000.

$$(2'000,000)\ \ddot{a}_{50}^{(4)} = (2'000,000)\left[\ddot{a}_{50} + \frac{4-1}{(2)(4)}\right]$$

$$(2'000,000)\ \ddot{a}_{50}^{(4)} = (2'000,000)\left[\frac{N_{51}}{D_{50}} + \frac{3}{8}\right]$$

$$(2'000,000)\ \ddot{a}_{50}^{(4)} = (2'000,000)\left[\frac{31'296,206.9}{1'998,744} + \frac{3}{8}\right]$$

$$(2'000,000)\ \ddot{a}_{50}^{(4)} = (2'000,000)\ [15.65793663 + 0.375]$$

$$(2'000,000)\ \ddot{a}_{50}^{(4)} = (2'000,000)\ (16.03293663)$$

$$(2'000,000)\ \ddot{a}_{50}^{(4)} = 32'065,873.26$$

EJEMPLO 2. Utilizando $\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{w-x} {}_{t/m}E_x$ llegar a la expresión (4.8).

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{w-x} {}_{t/m}E_x = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{w-x} \frac{D_{x+t/m}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m\,D_x} \sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t/m}$$

Para obtener una aproximación de $\sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t/m}$, ya que si $x+\frac{t}{m}$ es fracción no se encuentra el valor en tablas, se utiliza la fórmula de Woolhouse:

$$\frac{1}{m\,D_x} \sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t/m} = \frac{1}{D_x} \left[\sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} \cdot \frac{d\,D_x}{dx} - \ldots \right]$$

Utilizando el cálculo elemental se obtiene el valor de la derivada de D_x.

$$\frac{d\,D_x}{dx} = \frac{d\,V^x\,l_x}{dx} = V^x \frac{d\,l_x}{dx} + l_x \frac{d\,V^x}{dx}$$

$$\frac{d\,D_x}{dx} = (V^x) \left[-l_x \mu_x \right] + l_x \,(V^x \log V)$$

$$\frac{d\,D_x}{dx} = V^x\, l_x \left[-\mu_x - \delta \right]$$

$$\frac{d\,D_x}{dx} = -\,V^x\, l_x \left[\mu_x + \delta \right] = -\,D_x \left[\mu_x + \delta \right]$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{m\,Dx}\sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t/m} = \sum_{t=1}^{w-x}\frac{D_{x+t}}{D_x} + \left[\frac{m-1}{2m}\right]\left[\frac{D_x}{D_x}\right] + \left[\frac{m^2-1}{12m^2}\right]\left[\frac{-D_x\left[\mu_x+\delta\right]}{D_x}\right] - \ldots$$

$$\frac{1}{m\,Dx}\sum_{t=1}^{-x} D_{x+t/m} = a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{12m^2}\left[\mu_x+\delta\right]$$

EJEMPLO 3. Cuál es el valor presente de una anualidad vencida de-$ 200,000.00 mensuales, para una persona de 25 años de edad?. Utilizar la tabla de mortalidad CSO 1958 al 3% de interes. Emplear la expresión (4.8).

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left[\mu_x+\delta\right]$$

$$a_{25}^{(12)} = a_{25} + \frac{11}{24} - \frac{(12)^2-1}{(12)(12)^2}\left[\mu_{25}+\delta\right]$$

$$a_{25}^{(12)} = \frac{N_{26}}{D_{25}} + \frac{11}{24} - \frac{143}{1,728}\left[\mu_{25}+\delta\right]$$

$$a_{25}^{(12)} = \frac{108'616,225.2}{4'573,377.1} + \frac{11}{24} + \frac{143}{1,728}\left[\mu_{25}+\delta\right]$$

Para calcular μ_{25} se procede de la siguiente manera:

$$\mu_{25} = -\frac{1}{l_{25}} \frac{d\,l_{25}}{dx}$$

Para obtener la derivada de l_{25} se elabora la tabla de diferencias:

x	l_x	Δl_x	$\Delta^2 l_x$	$\Delta^3 l_x$	$\Delta^4 l_x$	$\Delta^5 l_x$
25	9'575,636	-18,481	-251	2	-96	97
26	9'557,155	-18,732	-249	-94	1	
27	9'538,423	-18,981	-343	-93		
28	9'519,442	-19,324	-436			
29	9'500,118	-19,760				
30	9'480,358					

Ahora utilizando la expresión que permite determinar el coeficiente diferencial de una función partiendo de sus diferencias:

$$D = \frac{1}{h}\left[- \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \right]$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\,l_{25}}{dx} = -18{,}481 + 125.5 + 0.6666 + 24 + 19.4$$

$$\frac{d\,l_{25}}{dx} = -\,18{,}311.433$$

$$\mu_{25} = -\frac{1}{9'575{,}636}\,(-18{,}311.433)$$

$$\mu_{25} = 0.00191$$

Para calcular δ se procede de la siguiente manera:

$$\delta = \log(1+i) = \log(1+0.03) = 0.01284$$

Por lo tanto:

$$a_{25}^{(12)} = 23.74967619 + 0.458333 - \frac{143}{1,728}(0.00191 + 0.01284)$$

$$a_{25}^{(12)} = 23.74967619 + 0.458333 - 0.001221$$

$$a_{25}^{(12)} = 24.20678819$$

Este resultado representa el valor presente de 1 peso, si se multiplica por 2'400,000 (resultado de multiplicar el pago mensual de - \$ 200,000.00 por 12), se obtendrá el valor presente necesario para resolver el problema, así:

$$(2'400,000)\ a_{25}^{(12)} = (2'400,000)\ (24.20678819)$$

$$(2'400,000)\ a_{25}^{(12)} = 58'096,291.66$$

4.2 ANUALIDAD VENCIDA DIFERIDA n AÑOS PAGADERA m VECES AL AÑO.

En este tipo de anualidad el primer pago 1/m será efectuado a la- edad x+n+1/m y continuarán realizandose a intervalos iguales de 1/m - años mientras la persona se encuentre con vida. El valor presente, denotado por ${}_{n/}a_x^{(m)}$,se calcula tomando como base la expresión (3.7.A) de tal forma que:

$$_{n/}a_x^{(m)} = {}_nE_x \cdot a_{x+n}^{(m)}$$

Utilizando $a_{x+n}^{(m)} = a_{x+n} + \dfrac{m-1}{2m}$ se tiene:

$$_{n/}a_x^{(m)} \fallingdotseq {}_nE_x \left[a_{x+n} + \frac{m-1}{2m}\right]$$

$$_{n/}a_x^{(m)} \fallingdotseq {}_nE_x \cdot a_{x+n} + \left[{}_nE_x\right]\left[\frac{m-1}{2m}\right]$$

Por la expresión (3.7.A) $_{n/}a_x = {}_nE_x \cdot a_{x+n}$, entonces:

$$_{n/}a_x^{(m)} \fallingdotseq {}_{n/}a_x + \left[{}_nE_x\right]\left[\frac{m-1}{2m}\right] \qquad (4.9)$$

EJEMPLO 1. Determinar $_{n/}a_x^{(m)}$ en función de conmutados.

Por la expresión (3.7) se tiene que $_{n/}a_x = \dfrac{N_{x+n+1}}{D_x}$ y por la-expresión (3.3) se tiene que $_nE_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$, por lo tanto:

$$_{n/}a_x^{(m)} \fallingdotseq \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}\left[\frac{m-1}{2m}\right]$$

$$_{n/}a_x^{(m)} \fallingdotseq \frac{N_{x+n+1} + \dfrac{m-1}{2m} \cdot D_{x+n}}{D_x} \qquad (4.10)$$

EJEMPLO 2. Utilizando la expresión (4.10) calcular el valor presente de una anualidad de $ 250,000.00 por mes para una persona de 20 años, siendo el primer pago a la edad 35.

$$ {}_{n/}a_x^{(m)} = \frac{N_{x+n+1} + \left[\frac{m-1}{2m}\right] D_{x+n}}{D_x} \qquad (4.10)$$

$$ {}_{15/}a_{20}^{(12)} = \frac{N_{20+15+1} + \left[\frac{12-1}{(12)(2)}\right] D_{20+15}}{D_{20}} $$

$$ {}_{15/}a_{20}^{(12)} = \frac{N_{36} + \left[\frac{11}{24}\right] D_{35}}{D_{20}} $$

$$ {}_{15/}a_{20}^{(12)} = \frac{70'021,352.7 + \left[\frac{11}{24}\right] (3'331,295.4)}{5'351,272.8} $$

$$ {}_{15/}a_{20}^{(12)} = \frac{71'548,196.43}{5'351,272.8} $$

$$ {}_{15/}a_{20}^{(12)} = 13.37031377 $$

Este resultado corresponde a una anualidad de un peso, el problema proporciona una anualidad de $ 250,000.00 mensuales lo que equivale a multiplicar (250,000)(12) = 3'000,000 para obtener el pago anual, entonces:

$$ (3'000,000)\ {}_{15/}a_{20}^{(12)} = (3'000,000)\ (13.37031377) $$

$$(3'000,000)\ {}_{15/}a^{(12)}_{20} = 40'110,941.31$$

4.3 ANUALIDAD VENCIDA TEMPORAL A n AÑOS PAGADERA m VECES AL AÑO.

En este tipo de anualidad el primer pago de $1/m$ se realiza a la edad de $x+1/m$ seguido por pagos iguales a intervalos de $1/m$ años limitados a un máximo de n años, si x permanece con vida. El valor presente de una anualidad vencida temporal a n años de uno pagadera m veces al año a la edad x se denota $a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ y se calcula tomando en cuenta que es igual a la diferencia entre una anualidad vencida pagadera m veces al año menos una anualidad vencida diferida n años pagadera m veces al año, gráficamente se vería como:

	x	$x+1/m$	$x+2/m$	...	$x+1$	$x+1+1/m$	...	$x+n$	$x+n+1/m$	...	$x+n+m$	...
$a^{(m)}_{x}$		1	1		1	1		1	1		1	...
${}_{n/}a^{(m)}_{x}$								1	1		1	...
$a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$		1	1		1	1		1				

(G.1)

Por lo tanto:

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = a^{(m)}_{x} - {}_{n/}a^{(m)}_{x}$$

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \left[a_{x} + \frac{m-1}{2m}\right] - \left[{}_{n/}a_{x} + {}_{n}E_{x}\left[\frac{m-1}{2m}\right]\right]$$

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq a_{x} + \frac{m-1}{2m} - {}_{n/}a_{x} - \frac{m-1}{2m}\ {}_{n}E_{x}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_x - {}_{n/}\ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_x - {}_{n/}\ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}\left[1 - {}_nE_x\right]$$

Utilizando el mismo razonamiento de la gráfica (G.1) se tiene que $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_x - {}_{n/}\ddot{a}_x$, entonces:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left[1 - {}_nE_x\right] \qquad (4.11)$$

EJEMPLO 1. Determinar $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ en función de conmutados.

Por la expresión (4.11) se tiene que:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left[1 - {}_nE_x\right]$$

Por la expresión (3.6) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$

y además ${}_nE_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$

por lo tanto:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\left[1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right]$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} - \left[\frac{D_{x+n}}{D_x}\right]\left[\frac{m-1}{2m}\right]$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m} D_x - \frac{m-1}{2m} D_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}\left[D_x - D_{x+n}\right]}{D_x} \qquad (4.12)$$

EJEMPLO 2. Utilizando la expresión (4.12) calcular el valor presente de una anualidad de \$ 1'500,000.00 bimestrales, para una persona de 38 años, hasta completar 20 años.

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}\left[D_x - D_{x+n}\right]}{D_x}$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{38:\overline{20}|} = (1'500,000)\left[\frac{N_{38+1} - N_{38+20+1} + \frac{6-1}{(2)(6)}\left[D_{38} - D_{38+20}\right]}{D_{38}}\right]$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{38:\overline{20}|} = (1'500,000)\left[\frac{N_{39} - N_{59} + \frac{5}{12}\left[D_{38} - D_{58}\right]}{D_{38}}\right]$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{38:\overline{20}|} = \frac{1'500,000}{3'024,434.7}\left[60'646,853.6 - 17'881,499 + \frac{5}{12}(3'024,434.7 - 1'436,991.7)\right]$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{38:\overline{20}|} = \frac{1'500,000}{3'024,434.7}\left[42'765,354.6 + \frac{5}{12}(1'587,443)\right]$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{38:\overline{20}|} = \frac{1'500,000}{3'024,434.7}(42'765,354.6 + 661,434.5834)$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{38:\overline{20}|} = 1'500,000\left[\frac{43'426,789.18}{3'024,434.7}\right]$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{38:\overline{20}|} = (1'500,000)(14.35864665)$$

$$(1'500,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{38:\overline{20}|} = 21'537,969.98$$

4.4 ANUALIDAD VENCIDA DIFERIDA k AÑOS, TEMPORAL A n AÑOS PAGADERA m - VECES AL AÑO.

Este tipo de anualidad se define como la serie de pagos de 1/m, - comenzando a la edad x+k+1/m y continúan hasta la edad x+n+k. El valor presente se denota ${}_{k/}a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ y su cálculo se reduce a la diferencia - entre una anualidad diferida k años pagadera m veces al año menos una- anualidad diferida n+k años pagadera m veces al año. Gráficamente se - vería como:

	x	x+1/m	x+1	x+1+1/m	x+k	x+k+1/m	x+n+k	x+n+k+1/m
${}_{k/}a^{(m)}_{x}$						1	1	1 ...
${}_{n+k/}a^{(m)}_{x}$								1 ...
${}_{k/}a^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil}$						1	1	

(G.2)

Por lo tanto:

$$ {}_{k/}a^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil} = {}_{k/}a^{(m)}_{x} - {}_{n+k/}a^{(m)}_{x} $$

$$ {}_{k/}a^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil} = \left[{}_{k/}a_{x} + {}_{k}E_{x}\,\frac{m-1}{2m} \right] - \left[{}_{n+k/}a_{x} + {}_{n+k}E_{x} \left[\frac{m-1}{2m}\right] \right] $$

$$ {}_{k/}a^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil} = {}_{k/}a_{x} + {}_{k}E_{x} \left[\frac{m-1}{2m}\right] - {}_{n+k/}a_{x} - {}_{n+k}E_{x} \left[\frac{m-1}{2m}\right] $$

$$ {}_{k/}a^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil} = {}_{k/}a_{x} - {}_{n+k/}a_{x} + \frac{m-1}{2m} \left[{}_{k}E_{x} - {}_{n+k}E_{x} \right] $$

Utilizando el mismo razonamiento de la gráfica (G.2) se tiene que ${}_{k/n}a_{x} = {}_{k/}a_{x} - {}_{n+k/}a_{x}$, entonces:

$$ {}_{k/}a^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil} = {}_{k/n}a_{x} + \frac{m-1}{2m} \left[{}_{k}E_{x} - {}_{n+k}E_{x} \right] \qquad (4.13) $$

EJEMPLO 1. Determinar ${}_{k/}a^{(m)}_{x:\overline{n}\rceil}$ en función de conmutados.

Por la expresión (4.13) se tiene:

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = {}_{k/n}\ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}\left[{}_kE_x - {}_{n+k}E_x \right] $$

Por la expresión (3.8) $\quad {}_{k/n}\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+k+1} - N_{x+n+k+1}}{D_x}$

Por otra parte $\quad {}_kE_x = \dfrac{D_{x+k}}{D_x} \quad$ y $\quad {}_{n+k}E_x = \dfrac{D_{x+n+k}}{D_x}$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+n+k+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\left[\frac{D_{x+k}}{D_x} - \frac{D_{x+n+k}}{D_x} \right] $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+n+k+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\left[\frac{D_{x+k} - D_{x+n+k}}{D_x} \right] $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+n+k+1} + \frac{m-1}{2m}\left[D_{x+k} - D_{x+n+k} \right]}{D_x} \qquad (4.14) $$

EJEMPLO 2. Utilizando la expresión (4.14) calcular el valor presente de una anualidad de $ 100,000.00 mensuales para una persona de 30 años, cuyo primer pago se realiza a la edad 40 y así mensualmente durante 10 años.

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+n+k+1} + \frac{m-1}{2m}\left[D_{x+k} - D_{x+n+k} \right]}{D_x} $$

$$(1'200{,}000)\ {}_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}|} = \frac{(1'200{,}000)}{D_{30}} \left[N_{30+10+1} - N_{30+10+10+1} + \frac{12-1}{(2)(12)} \left[D_{30+10} - D_{30+10+10} \right] \right]$$

$$(1'200{,}000)\ {}_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}|} = \frac{(1'200{,}000)}{D_{30}} \left[N_{41} - N_{51} + \frac{11}{24} \left[D_{40} - D_{50} \right] \right]$$

$$(1'200{,}000)\ {}_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}|} = \frac{1'200{,}000}{3'905{,}782} \left[54'886{,}345.6 - 31'296{,}206.9 + \frac{11}{24} (2'833{,}001.8 - 1'998{,}744) \right]$$

$$(1'200{,}000)\ {}_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}|} = \frac{1'200{,}000}{3'905{,}782} \left[23'590{,}138.7 + \frac{11}{24} (834{,}257.8) \right]$$

$$(1'200{,}000)\ {}_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}|} = (1'200{,}000) \left[\frac{23'972{,}506.86}{3'905{,}782} \right]$$

$$(1'200{,}000)\ {}_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}|} = (1'200{,}000)\ (6.137697101)$$

$$(1'200{,}000)\ {}_{10/}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{10}|} = 7'365{,}236.52$$

4.5 ANUALIDAD VITALICIA ANTICIPADA PAGADERA m VECES AL AÑO.

En este tipo de anualidad la serie de pagos de 1/m comienzan al principio del periodo o intervalo de pago y continúan efectuándose mientras la persona se encuentre con vida. Las anualidades anticipadas pagaderas m veces al año difieren de las anualidades vencidas pagaderas m veces al año $a_x^{(m)}$ únicamente por la cantidad de pagos iniciales de 1/m al principio del periodo. Por lo tanto se le agrega 1/m para obtener la anualidad anticipada, cuyo valor presente se denota $\ddot{a}_x^{(m)}$, por lo tanto:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m-1+2}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m+1}{2m} \qquad (4.15)$$

EJEMPLO 1. Determinar $\ddot{a}_x^{(m)}$ en función de conmutados.

Por la expresión (4.15) se tiene:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m+1}{2m}$$

Por la expresión (3.5) $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$, por lo tanto resulta:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m+1}{2m} \qquad (4.16)$$

EJEMPLO 2. Utilizando la expresión (4.16) calcular el valor presente de una anualidad anticipada de $ 3'000,000.00 semestrales para una persona de 45 años.

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m+1}{2m}$$

$$(6'000,000)\ \ddot{a}_{45}^{(2)} \doteq (6'000,000) \left[\frac{N_{45+1}}{D_{45}} + \frac{2+1}{(2)(2)} \right]$$

$$(6'000,000)\ \ddot{a}_{45}^{(2)} \doteq (6'000,000) \left[\frac{N_{46}}{D_{45}} + \frac{2+1}{(2)(2)} \right]$$

$$(6'000,000)\ \ddot{a}_{45}^{(2)} \doteq (6'000,000) \left[\frac{42'062,259.3}{2'392,904.8} + \frac{3}{4} \right]$$

$$(6'000,000)\ \ddot{a}_{45}^{(2)} \doteq (6'000,000)\ (18.32790753)$$

$$(6'000,000)\ \ddot{a}_{45}^{(2)} \doteq 109'967,445.2$$

Se puede obtener otra expresión para el cálculo del valor presente de una anualidad anticipada pagadera m veces al año tomando como base $a_x = \ddot{a}_x - 1$, por lo tanto se tiene:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m+1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \left[\ddot{a}_x - 1 \right] + \frac{m+1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \ddot{a}_x + \frac{-2m + m + 1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \ddot{a}_x + \frac{1 - m}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \ddot{a}_x - \frac{m - 1}{2m} \qquad (4.17)$$

4.6 ANUALIDAD ANTICIPADA DIFERIDA n AÑOS PAGADERA m VECES AL AÑO.

En este tipo de anualidad el primer pago de 1/m será efectuado a la edad x+n y continuarán realizandose mientras la persona se encuentre con vida. El valor presente, denotado por $_{n/}\ddot{a}_x^{(m)}$, se calcula tomando como base la expresión (3.7.A) de tal forma que:

$$_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq {}_nE_x \; \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

Utilizando $\ddot{a}_{x+n}^{(m)} \doteq a_{x+n} + \frac{m + 1}{2m}$ se tiene:

$$_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq {}_nE_x \left[a_{x+n} + \frac{m+1}{2m} \right]$$

$$_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq {}_nE_x \; a_{x+n} + {}_nE_x \; \frac{m+1}{2m}$$

Por la expresión (3.7.A) $_{n/}a_x = {}_nE_x \; a_{x+n}$, se tiene que:

$$ {}_{n/}\ddot{a}_{x}^{(m)} \doteq {}_{n/}a_{x} + \frac{m+1}{2m}\; {}_{n}E_{x} \qquad (4.18) $$

Se pueda obtener otra expresión para el cálculo del valor presente de una anualidad anticipada diferida n años pagadera m veces al año tomando $\ddot{a}_{x+n}^{(m)} \doteq \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m}$, por lo tanto:

$$ {}_{n/}\ddot{a}_{x}^{(m)} \doteq {}_{n}E_{x}\; \ddot{a}_{x+n}^{(m)} $$

$$ {}_{n/}\ddot{a}_{x}^{(m)} \doteq {}_{n}E_{x} \left[\ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \right] $$

$$ {}_{n/}\ddot{a}_{x}^{(m)} \doteq {}_{n}E_{x}\; \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\; {}_{n}E_{x} $$

Por la expresión (3.7.A) ${}_{n/}\ddot{a}_{x} = {}_{n}E_{x}\; \ddot{a}_{x+n}$, se tiene que:

$$ {}_{n/}\ddot{a}_{x}^{(m)} \doteq {}_{n/}\ddot{a}_{x} - \frac{m-1}{2m}\; {}_{n}E_{x} \qquad (4.19) $$

EJEMPLO 1. Determinar ${}_{n/}\ddot{a}_{x}^{(m)}$ en función de conmutados.

Por la expresión (4.18) se tiene:

$$ {}_{n/}\ddot{a}_{x}^{(m)} \doteq {}_{n/}a_{x} + \frac{m+1}{2m}\; {}_{n}E_{x} $$

Por la expresión (3.7) $\quad {}_{n/}a_x = \dfrac{N_{x+n+1}}{D_x}$ y

${}_nE_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$ por lo tanto:

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n+1} + \frac{m+1}{2m} D_{x+n}}{D_x} \qquad (4.20) $$

Ahora bien, si en vez de usar la expresión (4.18) se utiliza la -(4.19) se obtiene:

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq {}_{n/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \; {}_nE_x $$

Por la expresión (3.11) $\quad {}_{n/}\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+n}}{D_x}$ y $\quad {}_nE_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$,

por lo tanto:

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n} - \frac{m-1}{2m} D_{x+n}}{D_x} $$

EJEMPLO 2. Calcular el valor presente de una anualidad anticipada de $ 600,000.00 trimestrales, pra una persona de 37 años, cuyo primer-pago lo realiza a los 43 años.

a) Utilizar la expresión (4.20).
b) Utilizar la expresión (4.21).

a)

$$_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n+1} + \frac{m+1}{2m} D_{x+n}}{D_x}$$

$$(2'400,000)\ _{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'4000,000)\left[\frac{N_{37+6+1} + \frac{4+1}{(2)(4)} D_{37+6}}{D_{37}}\right]$$

$$(2'400,000)\ _{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'4000,000)\left[\frac{N_{44} + \frac{5}{8} D_{43}}{D_{37}}\right]$$

$$(2'400,000)\ _{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'4000,000)\left[\frac{46'932,042.3 + \frac{5}{8}(2'562,794)}{3'123,914.9}\right]$$

$$(2'400,000)\ _{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'4000,000)\left[\frac{48'533,788.55}{3'123,914.9}\right]$$

$$(2'400,000)\ _{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'4000,000)\ (15.536207)$$

$$(2'400,000)\ _{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq 37'286,896.8$$

b)

$$ {}_{n/}\ddot{a}_{x}^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n} - \frac{m-1}{2m} D_{x+n}}{D_x} $$

$$ (2'400,000)\ {}_{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'400,000) \left[\frac{N_{37+6} - \frac{4-1}{(2)(4)} D_{37+6}}{D_{37}} \right] $$

$$ (2'400,000)\ {}_{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'400,000) \left[\frac{N_{43} - \frac{3}{8} D_{43}}{D_{37}} \right] $$

$$ (2'400,000)\ {}_{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'400,000) \left[\frac{49'494,836.3 - \frac{3}{8} (2'562,794)}{3'123,914.9} \right] $$

$$ (2'400,000)\ {}_{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'400,000) \left[\frac{49'494,836.3 - 961,047.75}{3'123,914.9} \right] $$

$$ (2'400,000)\ {}_{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq (2'400,000)\ (15.536207) $$

$$ (2'400,000)\ {}_{6/}\ddot{a}_{37}^{(4)} \doteq 37'286,896.8 $$

4.7 ANUALIDAD ANTICIPADA TEMPORAL A n AÑOS PAGADERA m VECES AL AÑO.

Este tipo de anualidad se define como la serie de pagos de 1/m que se realizan al principio de cada intervalo de pago limitados hasta la edad x+n-1 si la persona de edad x permanece con vida. El valor presente, denotado por $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, se calcula tomando en cuenta que es igual a la diferencia entre una anualidad anticipada pagadera m veces al año menos una anualidad anticipada diferida n años pagadera m veces al año, por consiguiente:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_{n/}\ddot{a}^{(m)}_{x}$$

Utilizando las expresiones (4.15) y (4.18) se tiene:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \left[a_x + \frac{m+1}{2m} \right] - \left[{}_{n/}a_x + \frac{m+1}{2m}\, {}_{n}E_x \right]$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq a_x + \frac{m+1}{2m} - {}_{n/}a_x - \frac{m+1}{2m}\, {}_{n}E_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq a_x - {}_{n/}a_x + \frac{m+1}{2m} \left(1 - {}_{n}E_x\right)$$

Tomando en cuenta que $a_{x:\overline{n}|} = a_x - {}_{n/}a_x$, entonces:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq a_{x:\overline{n}|} + \frac{m+1}{2m} \left(1 - {}_{n}E_x\right) \qquad (4.22)$$

Se puede obtener otra expresión para este tipo de anualidad utilizando las expresiones (4.17) y (4.19):

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_{n/}\ddot{a}^{(m)}_{x}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \left[\ddot{a}_{x} - \frac{m-1}{2m}\right] - \left[{}_{n/}\ddot{a}_{x} - \frac{m-1}{2m}\,{}_{n}E_{x}\right]$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_{x} - \frac{m-1}{2m} - {}_{n/}\ddot{a}_{x} + \frac{m-1}{2m}\,{}_{n}E_{x}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_{x} - {}_{n/}\ddot{a}_{x} - \frac{m-1}{2m}\left[1 - {}_{n}E_{x}\right]$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left[1 - {}_{n}E_{x}\right] \qquad (4.23)$$

EJEMPLO 1. Determinar $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ en función de conmutados.

Utilizando la expresión (4.22):

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq a_{x:\overline{n}|} + \frac{m+1}{2m}\left[1 - {}_{n}E_{x}\right]$$

Por la expresión (3.6) $a_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x}}$

y ${}_{n}E_{x} = \dfrac{D_{x+n}}{D_{x}}$ se tiene:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x}} + \frac{m+1}{2m}\left[1 - \frac{D_{x+n}}{D_{x}}\right]$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m+1}{2m} - \frac{m+1}{2m}\,\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m+1}{2m}\left[D_x - D_{x+n}\right]}{D_x} \qquad (4.24)$$

Utilizando la expresión (4.23):

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left[1 - {}_{n}E_{x}\right]$$

Por la expresión $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$ y ${}_{n}E_{x} = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$ se tiene:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}\left[1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right]$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} + \frac{m-1}{2m}\,\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\left[D_x - D_{x+n}\right]}{D_x} \qquad (4.25)$$

EJEMPLO 2. Calcular el valor presente de una anualidad de \$ 850,000.00 bimestrales pagaderos al principio del periodo para una persona de 25 años durante 20 años.

a) Utilizar la expresión (4.24).
b) Utilizar la expresión (4.25).

a)

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m+1}{2m}\left[D_x - D_{x+n}\right]}{D_x}$$

$$(5'100,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{25:\overline{20}|} \doteq \frac{(5'100,000)}{D_{25}}\left[N_{25+1} - N_{25+20+1} + \frac{6+1}{(2)(6)}\left[D_{25} - D_{25+20}\right]\right]$$

$$(5'100,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{25:\overline{20}|} \doteq \frac{(5'100,000)}{D_{25}}\left[N_{26} - N_{46} + \frac{7}{12}\left[D_{25} - D_{45}\right]\right]$$

$$(5'100,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{25:\overline{20}|} \doteq \frac{5'100,000}{4'573,377.1}\left[108'616,225.2 - 42'062,259.3 + \frac{7}{12}(4'573,377.1 - 2'392,904.8)\right]$$

$$(5'100,000)\ \ddot{a}^{(6)}_{25:\overline{20}|} \doteq 75'636,039.55$$

4.8 ANUALIDAD ANTICIPADA DIFERIDA k AÑOS, TEMPORAL A n AÑOS, PAGADERA m VECES AL AÑO.

En este tipo de anualidad el primer pago 1/m se realiza al principio de la edad x+k y continuan hasta la edad x+k+n-1 mientras la persona de edad x se encuentre con vida. El valor presente, denotado por ${}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ y su cálculo se reduce a la diferencia entre una anualidad anticipada diferida k años pagadera m veces al año menos una anualidad anticipada diferida n+k años pagadera m veces al año, por consiguiente:

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_{k+n/}\ddot{a}^{(m)}_{x} $$

Utilizando la expresión (4.18) se tiene:

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \left[{}_{k/}a_{x} + \frac{m+1}{2m}\, {}_{k}E_{x} \right] - \left[{}_{k+n/}a_{x} + \frac{m+1}{2m}\, {}_{k+n}E_{x} \right] $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/}a_{x} + \frac{m+1}{2m}\, {}_{k}E_{x} - {}_{k+n/}a_{x} - \frac{m+1}{2m}\, {}_{k+n}E_{x} $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/}a_{x} - {}_{k+n/}a_{x} + \frac{m+1}{2m} \left[{}_{k}E_{x} - {}_{k+n}E_{x} \right] $$

Tomando en cuenta que ${}_{k/n}a_{x} = {}_{k/}a_{x} - {}_{n+k/}a_{x}$ resulta lo siguiente:

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/n}a_x + \frac{m+1}{2m}\left[{}_{k}E_x - {}_{k+n}E_x \right] \qquad (4.26) $$

Se puede obtener otra expresión para este tipo de anualidad utilizando (4.19), así:

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_x - {}_{k+n/}\ddot{a}^{(m)}_x $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \left[{}_{k/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\, {}_{k}E_x \right] - \left[{}_{k+n/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\, {}_{k+n}E_x \right] $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\, {}_{k}E_x - {}_{k+n/}\ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}\, {}_{k+n}E_x $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/}\ddot{a}_x - {}_{k+n/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\, {}_{k}E_x + \frac{m-1}{2m}\, {}_{k+n}E_x $$

Tomando en cuenta que ${}_{k/n}\ddot{a}_x = {}_{k/}\ddot{a}_x - {}_{k+n/}\ddot{a}_x$, resulta:

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/n}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\left[{}_{k}E_x - {}_{k+n}E_x \right] \qquad (4.27) $$

EJEMPLO 1. Determinar ${}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:n}$ en función de conmutados.

Utilizando la expresión (4.26):

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/n}a_{x} + \frac{m+1}{2m}\left[{}_{k}E_{x} - {}_{k+n}E_{x} \right] $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_{x}} + \frac{m+1}{2m}\left[\frac{D_{x+k}}{D_{x}} - \frac{D_{x+k+n}}{D_{x}} \right] $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_{x}} + \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{D_{x+k}}{D_{x}} - \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{D_{x+k+n}}{D_{x}} $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1} + \frac{m+1}{2m}\left[D_{x+k} - D_{x+k+n} \right]}{D_{x}} \qquad (4.28) $$

Utilizando (4.27) se obtendrá otra expresión conmutada:

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq {}_{k/n}\ddot{a}_{x} - \frac{m-1}{2m}\left[{}_{k}E_{x} - {}_{k+n}E_{x} \right] $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_{x}} - \frac{m-1}{2m}\left[\frac{D_{x+k}}{D_{x}} - \frac{D_{x+k+n}}{D_{x}} \right] $$

$$ {}_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n} - \frac{m-1}{2m}\left[D_{x+k} - D_{x+k+n} \right]}{D_{x}} \qquad (4.29) $$

EJEMPLO 2. Calcular el valor presente de una anualidad anticipada de $ 450,000.00 mensuales para una persona de 35 años, cuyo primer pago se realiza a los 45 años, limitándose a 12 años.

$$_{k/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n} - \frac{m-1}{2m}\left[D_{x+k} - D_{x+k+n}\right]}{D_x}$$

$$(5'400,000)\ _{10/}\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{12}|} \doteq \frac{5'400,000}{D_{35}}\left[N_{35+10} - N_{35+10+12} - \frac{12-1}{(2)(12)}\left[D_{35+10} - D_{35+10+12}\right]\right]$$

$$(5'400,000)\ _{10/}\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{12}|} \doteq \frac{5'400,000}{D_{35}}\left[N_{45} - N_{57} - \frac{11}{24}\left[D_{45} - D_{57}\right]\right]$$

$$(5'400,000)\ _{10/}\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{12}|} \doteq \frac{5'400,000}{3'331,295.4}\left[44'455,164.1 - 20'821,956 - \frac{11}{24}(2'392,904.8 - 1'503,465.3)\right]$$

$$(5'400,000)\ _{10/}\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{12}|} \doteq 37'648,405.78$$

A N E X O

RELACION ENTRE LOS OPERADORES D Y Δ .

La serie:

$$f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-I)!} f^{(n-1)}(x) + \ldots$$

representa el teorema de Taylor para series convergentes, y se puede escribir de la siguiente manera:

$$u_{x+rh} = u_x + rh\, D\, u_x + \frac{(rh)^2}{2!} D^2 u_x + \frac{(rh)^3}{3!} D^3 u_x + \ldots$$

$$u_{x+rh} = \left[I + rh\, D + \frac{(rh)^2}{2!} D^2 + \frac{(rh)^3}{3!} D^3 + \ldots \right] u_x$$

$$u_{x+rh} = e^{rhD} u_x$$

Por otra parte se tiene que:

$$u_{x+rh} = E^r u_x$$

por lo tanto:

$$E^r = e^{rhD}$$

resutando entonces:

$$hD = \log E = \log (I + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots$$

y

$$D\, u_x = \frac{I}{h} \left[\Delta u_x - \frac{\Delta^2}{2} u_x + \frac{\Delta^3}{3} u_x - \frac{\Delta^4}{4} u_x + \ldots \right]$$

Entonces:

$$D = \frac{I}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right]$$

$$D^2 = \frac{I}{h^2}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right]^2$$

$$= \frac{I}{h^2}\left[\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \dots\right]$$

Se tiene así, un metodo conveniente para expresar los coeficientes diferenciales de una función de x en terminos de las diferencias de la función.

EXPANSION DE EULER-MACLAURIN.

La fórmula de Euler-Maclaurin puede ser derivada de la expansión de operadores, por lo tanto:

$$\sum_{x=0}^{n-1} f(x) = f(0) + f(I) + \dots + f(n-I)$$

$$= F(n) - F(0), \text{ donde } f(x) = \Delta F(x).$$

Entonces:

$$f(x) = \Delta F(x),$$

$$F(x) = \Delta^{-1} f(x)$$

$$= (e^{D} - I)^{-1} f(x)$$

$$= \left[\left[I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \ldots \right] - I \right]^{-1} f(x)$$

$$= D^{-1} \left[I + \frac{D}{2!} + \frac{D^2}{3!} + \ldots \right]^{-1} f(x)$$

$$= D^{-1} \left[I - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{12} - \frac{D^4}{720} \ldots \right] f(x)$$

$$= \left[D^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{D}{12} - \frac{D^3}{720} \ldots \right] f(x)$$

$$= D^{-1} f(x) - \frac{1}{2} f(x) + \frac{D}{12} f(x) - \frac{D^3}{720} f(x) \ldots$$

$$= \int f(x)\, dx - \frac{1}{2} f(x) + \frac{I}{12} \frac{d\, f(x)}{dx} - \frac{I}{720} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \ldots$$

Valuando la integral de 0 a n se tiene:

$$F(n) - F(0) = \int_0^n f(x)\, dx - \frac{1}{2} \left[f(n) - f(0) \right] + \frac{1}{12} \left[f'(n) - f'(0) \right] - \frac{1}{720} \left[f'''(n) - f'''(0) \right] \ldots .$$

Para $F(n) - F(0)$ se puede escribir:

$$\sum_{x=0}^{n-1} f(x) \quad 6 \quad f(0) + f(I) + f(2) + \ldots + f(n-I)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^n f(x)\,dx = f(0) + f(I) + f(2) + \ldots + f(n-I) + \frac{1}{2}\left[f(n) - f(0)\right] - \frac{1}{12}\left[f'(n) - f'(0)\right] + \frac{1}{720}\left[f'''(n) - f'''(0)\right] \ldots$$

$$\int_0^n f(x)\,dx = \frac{1}{2} f(0) + f(I) + f(2) + \ldots + f(n-I) + \frac{1}{2} f(n) - \frac{1}{12}\left[f'(n) - f'(0)\right] + \frac{1}{720}\left[f'''(n) - f'''(0)\right] \ldots$$

Esta es una forma simple de la expansión de Euler-Maclaurin.

C A P I T U L O 5

ANUALIDADES CRECIENTES Y DECRECIENTES
(ANUALIDADES VARIABLES)

Dentro del concepto de anualidades, con frecuencia los pagos varían en progresión aritmetica, en forma creciente o decreciente según sea el caso, a esto se le conoce como anualidades variables.

Existen cierto tipo de anualidades en donde los pagos varían sin presentar un patrón regular, como ejemplo se podría citar una anualidad variable para (x) la cual provee pagos anuales de 1 por n años, seguido por pagos de 2 por el resto del tiempo de vida de (x), este valor presente es obviamente igual a la suma de valores presentes de una anualidad vitalicia vencida de 1 y una anualidad vencida diferida n años de 1, $a_x + {}_{n/}a_x$; sin embargo, en las siguientes secciones se calcularán los valores presentes de las anualidades vencidas y anticipadas tanto crecientes como decrecientes donde los pagos varían en progresión aritmética.

5.1 ANUALIDAD VARIABLE VITALICIA VENCIDA CRECIENTE.

Si se supone una progresión aritmética donde k es el primer termino y h la razón los pagos año tras año quedan establecidos como:

$$k,\ k+h,\ k+2h,\ k+3h, \ldots\ldots$$

Así el valor presente de una anualidad variable vitalicia creciente, denotada por $(Va)_x$, se calcula de la siguiente manera:

$$(Va)_x = k\,\frac{l_{x+1}}{l_x}\,V + (k+h)\,\frac{l_{x+2}}{l_x}\,V^2 + (k+2h)\,\frac{l_{x+3}}{l_x}\,V^3 + (k+3h)\,\frac{l_{x+4}}{l_x}\,V^4 + \ldots\ldots$$

$$(Va)_x = \frac{k\; l_{x+1}\,V + (k+h)\; l_{x+2}\,V^2 + (k+2h)\; l_{x+3}\,V^3 + \ldots\ldots}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por V^x:

$$(Va)_x = \frac{k\; l_{x+1}\,V\,V^x + (k+h)\; l_{x+2}\,V^2\,V^x + (k+2h)\; l_{x+3}\,V^3\,V^x + \ldots\ldots}{V^x\; l_x}$$

$$(Va)_x = \frac{k\; l_{x+1}\,V^{x+1} + (k+h)\; l_{x+2}\,V^{x+2} + (k+2h)\; l_{x+3}\,V^{x+3} + \ldots\ldots}{V^x\; l_x}$$

Tomando $V^x\,l_x = D_x$ resulta:

$$(Va)_x = \frac{k\,D_{x+1} + (k+h)\,D_{x+2} + (k+2h)\,D_{x+3} + (k+3h)\,D_{x+4} + \ldots\ldots}{D_x}$$

$$(Va)_x \, D_x = k\,D_{x+1} + k\,D_{x+2} + h\,D_{x+2} + k\,D_{x+3} + 2h\,D_{x+3} + k\,D_{x+4}$$
$$+ 3h\,D_{x+4} + \ldots.$$

Si se ordenan las D de tal forma que se sumen aquellas que tienen el mismo subíndice, resulta:

$$\begin{aligned}(Va)_x \, D_x = k\,D_{x+1} &+ k\,D_{x+2} + k\,D_{x+3} + k\,D_{x+4} + \ldots. \\ &+ h\,D_{x+2} + h\,D_{x+3} + h\,D_{x+4} + \ldots. \\ &\qquad\quad + h\,D_{x+3} + h\,D_{x+4} + \ldots. \\ &\qquad\qquad\qquad + h\,D_{x+4} + \ldots.\end{aligned}$$

Factorizando, se tiene:

$$\begin{aligned}(Va)_x \, D_x = k &\left[D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots. \right] \\ &+ h \left[D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots. \right] \\ &\qquad + h \left[D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots. \right] \\ &\qquad\qquad + h \left[D_{x+4} + \ldots. \right]\end{aligned}$$

Por valores conmutados se recordará que:

$$N_{x+1} = \sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t}$$

$$N_{x+2} = \sum_{t=2}^{w-x} D_{x+t}$$

$$\vdots$$

y así sucesivamente.

Por lo tanto:

$$(V\square)_x = k\,N_{x+1} + h\,N_{x+2} + h\,N_{x+3} + h\,N_{x+4} + \ldots.$$

$$(V\square)_x = k\,N_{x+1} + h\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots\right]$$

Definiendo una nueva función conmutada, dada por:

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots. = \sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t} \qquad (5.1)$$

$$S_{x+1} = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots. = \sum_{t=1}^{w-x} N_{x+t}$$

$$S_{x+2} = N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots. = \sum_{t=2}^{w-x} N_{x+t}$$

Y así sucesivamente, por lo tanto:

$$(V\ddot{a})_x \, D_x = k\,N_{x+1} + h\left[\sum_{t=2}^{w-x} N_{x+t}\right]$$

$$(V\ddot{a})_x \, D_x = k\,N_{x+1} + h\,S_{x+2}$$

$$(V\ddot{a})_x = \frac{k\,N_{x+1} + h\,S_{x+2}}{D_x} \qquad (5.2)$$

Otra forma de llegar a la expresión (5.2) es partir del hecho de que en este tipo de anualidad se proveen pagos de k a la edad $x+1$, $(k+h)$ a la edad $x+2$, $(k+2h)$ a la edad $x+3$ y así sucesivamente mientras el asegurado se encuentre con vida, gráficamente resulta lo siguiente:

$$\begin{array}{l|cccccccccccc}
\vdots & & & & & & & & & & & & h \\
h\ {}_{n/}\ddot{a}_x & & & & & & & & & h & h & \cdots & h \\
h\ {}_{n-1/}\ddot{a}_x & & & & & & & & h & h & h & \cdots & h \\
h\ {}_{n-2/}\ddot{a}_x & & & & & & & h & h & h & h & \cdots & h \\
\vdots & & & & & & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
h\ {}_{2/}\ddot{a}_x & & & & h & \cdots & & h & h & h & h & \cdots & h \\
h\ {}_{1/}\ddot{a}_x & & & h & h & \cdots & & h & h & h & h & \cdots & h \\
k\ \ddot{a}_x & & k & k & k & \cdots & & k & k & k & k & \cdots & k \\
\hline
 & x & x+1 & x+2 & x+3 & \cdots & & x+n-1 & x+n & x+n+1 & x+n+2 & \cdots & *
\end{array}$$

* Año en que fallece el asegurado (G.1)

Por lo tanto el valor presente de una anualidad variable vitalicia creciente corresponde a la suma de cada uno de los niveles de la gráfica anterior, así:

$$(v\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + \left[h\ {}_{1/}\ddot{a}_x + h\ {}_{2/}\ddot{a}_x + h\ {}_{3/}\ddot{a}_x + \cdots\right]$$

$$(v\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\left[{}_{1/}\ddot{a}_x + {}_{2/}\ddot{a}_x + {}_{3/}\ddot{a}_x + \cdots\right]$$

$$(v\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\left[\sum_{t=1}^{w-x} {}_{t/}\ddot{a}_x\right]$$

Sustituyendo las funciones conmutadas correspondientes se tiene:

$$(v\ddot{a})_x = k\left[\frac{N_{x+1}}{D_x}\right] + h\left[\sum_{t=1}^{w-x}\frac{N_{x+t+1}}{D_x}\right]$$

$$(v\ddot{a})_x = \frac{1}{D_x}\left[k\ N_{x+1} + h\sum_{t=1}^{w-x} N_{x+t+1}\right]$$

Como:

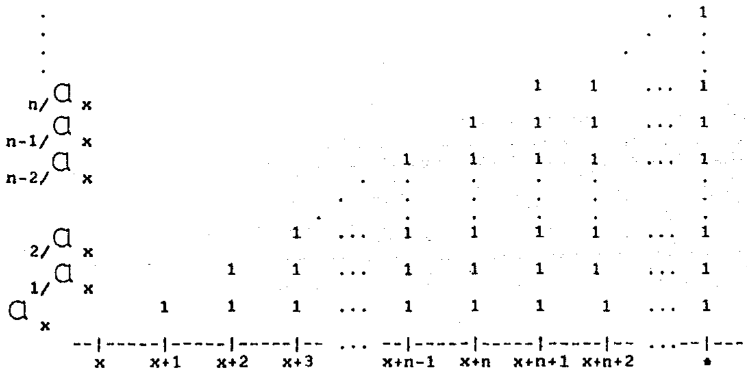
$$\sum_{t=1}^{w-x} N_{x+t+1} = N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \cdots = S_{x+2}$$

Por lo tanto:

$$(v\ddot{a})_x = \frac{1}{D_x}\left[k\ N_{x+1} + h\ S_{x+2}\right]$$

$$(v\ddot{a})_x = \frac{k\ N_{x+1} + h\ S_{x+2}}{D_x}$$

Cuando en la expresión (5.2) k=h=1 se tiene el valor presente a la edad x de una anualidad vitalicia vencida creciente denotada por $(Ia)_x$, la cual provee pagos de 1 a la edad x+1, 2 a la edad x+2, 3 a la edad x+3 y así sucesivamente, lo que representa una progresión aritmetica creciente cuya razón es de 1, gráficamene se tiene:



* Año en que fallece el asegurado (G.2)

Por lo tanto:

$$(Ia)_x = a_x + {}_{1/}a_x + {}_{2/}a_x + {}_{3/}a_x + \dots$$

$$(Ia)_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \sum_{t=1}^{w-x} {}_{t/}a_x$$

$$(Ia)_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \sum_{t=1}^{w-x} \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{1}{D_x}\left[N_{x+1} + \sum_{t=1}^{w-x} N_{x+t+1}\right]$$

$$(Ia)_x = \frac{1}{D_x}\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots\ldots\right]$$

$$(Ia)_x = \frac{1}{D_x}\left[S_{x+1}\right]$$

$$(Va)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} \qquad (5.3)$$

Tambien se puede obtener la expresión (5.3) haciendo k=h=1 en la expresión (5.2), así:

$$(Ia)_x = \frac{N_{x+1} + S_{x+2}}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots\ldots}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

EJEMPLO 1. Calcular el valor presente de una anualidad vencida para una persona de 28 años cuyo primer pago es de $ 1'000,000.00 incrementándose en $ 500,000.00 año tras año, mientras se encuentre con vida.

Utilizando la expresión (5.2)

$$(v\,a)_{28} = \frac{1'000,000\ N_{28+1} + 500,000\ S_{28+2}}{D_{28}}$$

$$(v\,a)_{28} = \frac{1'000,000\ N_{29} + 500,000\ S_{30}}{D_{28}}$$

Buscando los valores de las funciones conmutadas en la tabla de mortalidad CSO 1958 al 3% se tiene:

$$(v\,a)_{28} = \frac{(1'000,000)\ (91'698,461.8) + (500,000)\ (1,624'127,860.5)}{4'160,726.8}$$

$$(v\,a)_{28} = 217'212,625.4$$

EJEMPLO 2. Calcular el valor presente de una anualidad vencida para una persona de edad 42, cuyo primer pago en el primer año es de $ 800,000.00, el segundo año es de $ 1'200,000.00, el tercer año es de 1'600,000.00 y así sucesivamente mientras la persona se encuentre con vida.

Utilizando la expresión (5.2) se tiene:

$$(v\,a)_{x} = \frac{k\ N_{x+1} + h\ S_{x+2}}{D_{x}}$$

donde k = 800,000 y h = 400,000 (razón de la progresión aritmetica)

$$(v\,a)_{42} = \frac{800,000\ N_{42+1} + 400,000\ N_{42+2}}{D_{42}}$$

$$(Va)_{42} = \frac{800{,}000\ N_{43} + 400{,}000\ S_{44}}{D_{42}}$$

$$(Va)_{42} = \frac{(800{,}000)\ (49'494{,}836.3) + (400{,}000)\ (654'759{,}355.1)}{2'650{,}731.3}$$

$$(Va)_{42} = 113'742{,}049.6$$

EJEMPLO 3. Demostrar que:

$$(I\,a)_x = -(1+i)\ \frac{d}{di}\ a_x$$

Demostración:

$$-(1+i)\ \frac{d}{di}\ a_x = -(1+i)\ \frac{d}{di}\ \sum_{t=1}^{w-x} v^t\ {}_tp_x$$

$$= -(1+i)\ \frac{d}{di}\ \sum_{t=1}^{w-x} (1+i)^{-t}\ {}_tp_x = -(1+i)\ \frac{d}{di}\ \frac{{}_tp_x}{(1+i)^t}$$

$$= -(1+i)\ \sum_{t=1}^{w-x} \frac{(1+i)^t\ \frac{d}{di}\ {}_tp_x - {}_tp_x\ \frac{d\ (1+i)^t}{di}}{(1+i)^{2t}}$$

$$= -(1+i)\ \sum_{t=1}^{w-x} \frac{-\ {}_tp_x\ \ t\ (1+i)^{t-1}\ \frac{d\ (1+i)}{di}}{(1+i)^{2t}}$$

$$= -(1+i)\sum_{t=1}^{w-x}\left[-\frac{t\,(1+i)^{t-1}\;{}_tp_x}{(1+i)^{2t}}\right]$$

$$= -(1+i)\sum_{t=1}^{w-x}\left[-\,t\,(1+i)^{t-2t-1}\;{}_tp_x\right]$$

$$= -(1+i)\sum_{t=1}^{w-x}\left[-\,t\,(1+i)^{-(t+1)}\;{}_tp_x\right]$$

$$= \sum_{t=1}^{w-x}\left[(1+i)\;t\,(1+i)^{-(t+1)}\;{}_tp_x\right]$$

$$= \sum_{t=1}^{w-x}\left[t\,(1+i)^{-t-1+1}\;{}_tp_x\right] = \sum_{t=1}^{w-x}\left[t\,(1+i)^{-t}\;{}_tp_x\right]$$

$$= \sum_{t=1}^{w-x} t\;{}_tP_x\;V^t$$

$$= (1)\,\frac{l_{x+1}}{l_x}\,V + (2)\,\frac{l_{x+2}}{l_x}\,V^2 + (3)\,\frac{l_{x+3}}{l_x}\,V^3 + \ldots .$$

$$= \frac{(1)\,l_{x+1}\,V + (1+1)\,l_{x+2}\,V^2 + (1+2(1))\,l_{x+3}\,V^3 + \ldots .}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por V^x resulta:

$$= \frac{(1)\, l_{x+1} V^{x+1} + (1+1)\, l_{x+2} V^{x+2} + (1+2(1))\, l_{x+3} V^{x+3} + \ldots .}{V^{x}\, l_{x}}$$

$$= \frac{(1)\, D_{x+1} + (1+1)\, D_{x+2} + (1+2(1))\, D_{x+3} + (1+3(1))\, D_{x+4} + \ldots}{D_{x}}$$

Tratando únicamente el numerador se tiene que es igual a:

$$\begin{aligned}
= (1)\, D_{x+1} + (1)\, D_{x+2} &+ (1)\, D_{x+3} + (1)\, D_{x+4} + \ldots \\
(1)\, D_{x+2} &+ (1)\, D_{x+3} + (1)\, D_{x+4} + \ldots \\
&\ (1)\, D_{x+3} + (1)\, D_{x+4} + \ldots \\
&\phantom{+ (1)\, D_{x+3} +}\ (1)\, D_{x+4} + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= (1) & \left[D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots \right] \\
& (1) \left[D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots \right] \\
& \quad (1) \left[D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots \right] \\
& \qquad (1) \left[D_{x+4} + \ldots \right]
\end{aligned}$$

Volviendo a la demostración del problema, con lo anteriormente deducido el numerador y denominador quedan de la siguiente manera:

$$= \frac{N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots .}{D_{x}}$$

$$= \frac{S_{x+1}}{D_x} = (I\square)_x \qquad \text{q.d.}$$

5.2 ANUALIDADES VARIABLES VENCIDAS TEMPORALES A n AÑOS, CRECIENTES Y DECRECIENTES.

En este tipo de anualidad los pagos se limitan a un máximo n años siempre y cuando la persona de edad x se encuentre con vida, tratandose de una anualidad creciente el valor presente denotado por $(V\square)_{x:\overline{n}|}$ se calcula de la siguiente manera:

$$(V\square)_{x:\overline{n}|} = k \frac{l_{x+1}}{l_x} V + (k+h) \frac{l_{x+2}}{l_x} V^{2} + (k+2h) \frac{l_{x+3}}{l_x} V^{3} +$$

$$\ldots + (k+(n-2)h) \frac{l_{x+(n-1)}}{l_x} V^{n-1} + (k+(n-1)h) \frac{l_{x+n}}{l_x} V^{n}$$

$$(V\square)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \Big[k\, l_{x+1} V + (k+h)\, l_{x+2} V^{2} + (k+2h)\, l_{x+3} V^{3} + \ldots$$

$$+ (k+(n-2)h)\, l_{x+(n-1)} V^{n-1} + (k+(n-1)h)\, l_{x+n} V^{n} \Big]$$

Multiplicando numerador y denominador por V^{x} resulta:

$$(V a)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{V^{x}\, l_x}\left[k\, l_{x+1} V^{x+1} + (k+h)\, l_{x+2} V^{x+2} + (k+2h)\, l_{x+3} V^{x+3} + \dots \right.$$

$$\left. + (k+(n-2)h)\, l_{x+(n-1)} V^{x+(n-1)} + (k+(n-1)h)\, l_{x+n} V^{x+n}\right]$$

Como $D_x = V^x\, l_x$ entonces:

$$(V a)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\left[k\, D_{x+1} + (k+h)\, D_{x+2} + (k+2h)\, D_{x+3} + \dots + \right.$$

$$\left. (k+(n-2)h)\, D_{x+(n-1)} + (k+(n-1)h)\, D_{x+n}\right]$$

$$D_x\, (V a)_{x:\overline{n}|} = k\, D_{x+1} + k\, D_{x+2} + h\, D_{x+2} + k\, D_{x+3} + 2h\, D_{x+3} + \dots$$

$$k\, D_{x+(n-1)} + (n-2)h\, D_{x+(n-1)} + k\, D_{x+n} + (n-1)\, h\, D_{x+n}$$

Agrupando las D con el mismo subíndice:

$$
\begin{aligned}
D_x (Va)_{x:\overline{n}|} = {} & k D_{x+1} + k D_{x+2} + k D_{x+3} + k D_{x+4} + \dots + k D_{x+(n-1)} + k D_{x+n} \\
& \qquad h D_{x+2} + h D_{x+3} + h D_{x+4} + \dots + h D_{x+(n-1)} + h D_{x+n} \\
& \qquad\qquad h D_{x+3} + h D_{x+4} + \dots + h D_{x+(n-1)} + h D_{x+n} \\
& \qquad\qquad\qquad h D_{x+4} + \dots + h D_{x+(n-1)} + h D_{x+n} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h D_{x+(n-1)} + h D_{x+n} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h D_{x+n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_x (Va)_{x:\overline{n}|} = {} & k \left[D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \dots + D_{x+(n-1)} + D_{x+n} \right] \\
& \qquad h \left[D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \dots + D_{x+(n-1)} + D_{x+n} \right] \\
& \qquad\qquad h \left[D_{x+3} + D_{x+4} + \dots + D_{x+(n-1)} + D_{x+n} \right] \\
& \qquad\qquad\qquad h \left[D_{x+4} + \dots + D_{x+(n-1)} + D_{x+n} \right] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h \left[D_{x+(n-1)} + D_{x+n} \right] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h D_{x+n}
\end{aligned}
$$

$$D_x (Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[N_{x+2} - N_{x+n+1}\right] + h\left[N_{x+3} - N_{x+n+1}\right]$$

$$+ h\left[N_{x+4} - N_{x+n+1}\right] + \dots + h\left[N_{x+(n-1)} - N_{x+n+1}\right]$$

$$+ h\left[N_{x+n} - N_{x+n+1}\right]$$

Factorizando las h, resulta:

$$D_x (Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[N_{x+2} - N_{x+n+1} + N_{x+3} - N_{x+n+1}\right.$$

$$\left. + N_{x+4} - N_{x+n+1} + \dots + N_{x+(n-1)} - N_{x+n+1} + N_{x+n} - N_{x+n+1}\right]$$

$$D_x (Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots +\right.\right.$$

$$\left.\left. N_{x+(n-1)} + N_{x+n}\right] - (n-1)\, N_{x+n+1}\right]$$

$$D_x (Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots +\right.\right.$$

$$\left.\left. N_{x+(n-1)} + N_{x+n}\right] - n\, N_{x+n+1} + N_{x+n+1}\right]$$

$$D_x (Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots +\right.\right.$$

$$\left.\left. N_{x+(n-1)} + N_{x+n} + N_{x+n+1}\right] - n\, N_{x+n+1}\right]$$

Recordando las funciones conmutadas:

$$S_{x+2} = \sum_{t=2}^{w-x} N_{x+t}$$

$$S_{x+n+2} = \sum_{t=n+2}^{w-x} N_{x+t}$$

Por lo tanto $S_{x+2} - S_{x+n+2} = \sum_{t=2}^{n+1} N_{x+t}$, entonces:

$$D_x (V\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[\left(S_{x+2} - S_{x+n+2}\right) - n\,N_{x+n+1}\right]$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[S_{x+2} - S_{x+n+2} - n\,N_{x+n+1}\right]}{D_x} \qquad (5.4)$$

Otra forma de obtener la expresión (5.4) es tomando en cuenta que en este tipo de anualidad se proveen pagos de k a la edad x+1, (k+h) a la edad x+2, (k+2h) a la edad x+3 y así sucesivamente hasta el pago - (k+(n-1)h) a la edad x+n, gráficamente resulta lo siguiente:

$$\begin{array}{l|cccccccc}
h\;{}_{n-1/1}\ddot{a}_x & & & & & & & h & \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-1 \text{ elementos} \\
h\;{}_{n-2/2}\ddot{a}_x & & & & & \cdot & h & h & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
h\;{}_{2/n-2}\ddot{a}_x & & & & h & \cdots & h & h & \\
h\;{}_{1/n-1}\ddot{a}_x & & & h & h & \cdots & h & h & \\
k\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} & & k & k & k & \cdots & k & k & \\
\hline
 & x & x+1 & x+2 & x+3 & \cdots & x+n-1 & x+n & \qquad (G.3)
\end{array}$$

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad corres - ponde a la suma de cada uno de los niveles de (G.3), así:

$$(V\,a)_{x:\overline{n}|} = k\,a_{x:n} + h\;{}_{1/n-1}a_x + h\;{}_{2/n-2}a_x + \ldots + h\;{}_{n-2/2}a_x + h\;{}_{n-1/1}a_x$$

$$(V\,a)_{x:\overline{n}|} = k\,a_{x:n} + h\left[{}_{1/n-1}a_x + {}_{2/n-2}a_x + \ldots + {}_{n-2/2}a_x + {}_{n-1/1}a_x\right]$$

$$(V\,a)_{x:\overline{n}|} = k\,a_{x:n} + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/n-t}a_x\right]$$

Sustituyendo los valores conmutados correspondientes, se tiene:

$$(V\,a)_{x:\overline{n}|} = k\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right] + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t+1} - N_{x+t+n-t+1}}{D_x}\right]$$

$$(V\,a)_{x:\overline{n}|} = k\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right] + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right]$$

$$(V\,a)_{x:\overline{n}|} = k\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[\sum_{t=1}^{n-1} N_{x+t+1} - N_{x+n+1}\right]$$

$$(Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[\left[N_{x+2} - N_{x+n+1}\right] + \left[N_{x+3} - N_{x+n+1}\right] + \left[N_{x+4} - N_{x+n+1}\right] + \dots + \left[N_{x+n} - N_{x+n+1}\right]\right]$$

$$(Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots + N_{x+n}\right] - (n-1)\,N_{x+n+1}\right]$$

$$(Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots + N_{x+n}\right] - n\,N_{x+n+1} + N_{x+n+1}\right]$$

$$(Va)_{x:\overline{n}|} = k\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots + N_{x+n} + N_{x+n+1}\right] - n\,N_{x+n+1}\right]$$

$$(Va)_{x:\overline{n}|} = \frac{k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[S_{x+2} - S_{x+n+2} - n\,N_{x+n+1}\right]}{D_x}$$

Si en la expresión (5.4) k=h=1 se tiene una anualidad vencida creciente temporal a n años, cuyo valor presente denotado por $(Ia)_{x:\overline{n}|}$, la cual provee pagos de 1 a la edad x+1, 2 a la edad x+2,-

3 a la edad x+3 y así sucesivamente hasta llegar al pago de n a la edad x+n, lo que representa una progresión aritmetica creciente cuya razón es de 1, gráficamente se tiene:

$$
\begin{array}{l|ccccccc|l}
{}_{n-1/1}a_x & & & & & & 1 & \\
{}_{n-2/2}a_x & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & \cdot & \vdots & \vdots & \left.\right\} \text{ n-1 elementos} \\
{}_{2/n-2}a_x & & & 1 & \cdots & 1 & 1 & \\
{}_{1/n-1}a_x & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \\
a_{x:\overline{n}|} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \\
\hline
x & x+1 & x+2 & x+3 & \cdots & x+n-1 & x+n & \qquad (G.4)
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = a_{x:n} + {}_{1/n-1}a_x + {}_{2/n-2}a_x + \dots + {}_{n-2/2}a_x + {}_{n-1/1}a_x$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = a_{x:n} + \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/n-t}a_x$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + S_{x+2} - S_{x+n+2} - n\,N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} + S_{x+2} - \left[N_{x+n+1} + S_{x+n+2} \right] - n\,N_{x+n+1}}{D_x}$$

Como $N_{x+1} + S_{x+2} = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots = S_{x+1}$

y $N_{x+n+1} + S_{x+n+2} = N_{x+n+1} + N_{x+n+2} + N_{x+n+3} + \ldots = S_{x+n+1}$

Entonces:

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (5.5)$$

Tambien se puede obtener la expresión (5.5) haciendo k=h=1 en la-expresión (5.4), así:

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + S_{x+2} - S_{x+n+2} - n\,N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}{D_x}$$

Para obtener la expresión correspondiente al valor presente de - una anualidad variable vencida decreciente temoral a n años, denotado-por $(Da)_{x:\overline{n}|}$, donde decrece en progresión aritmetica a razón de h, - se toma la suma de n anualidades temporales, gráficamente se observa - de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{l|cccccccc}
h\,a_{x:\overline{1}|} & h & & & & & & \\
h\,a_{x:\overline{2}|} & h & h & & & & & \\
h\,a_{x:\overline{3}|} & h & h & h & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
h\,a_{x:\overline{n-2}|} & h & h & h & & \ddots & & \\
h\,a_{x:\overline{n-1}|} & h & h & h & & & h & \\
h\,a_{x:\overline{n}|} & h & h & h & & & h & h \\
\hline
x & x+1 & x+2 & x+3 & \ldots & & x+n-1 & x+n
\end{array}
\qquad (G.5)
$$

Por lo tanto el valor presente de una anualidad decreciente es igual a la suma de los niveles de (G.5), así:

$$(D\,a)_{x:\overline{n}|} = h\,a_{x:\overline{1}|} + h\,a_{x:\overline{2}|} + h\,a_{x:\overline{3}|} + \ldots + h\,a_{x:\overline{n-1}|} + h\,a_{x:\overline{n}|}$$

$$(D\,a)_{x:\overline{n}|} = h\left[a_{x:\overline{1}|} + a_{x:\overline{2}|} + a_{x:\overline{3}|} + \ldots + a_{x:\overline{n-1}|} + a_{x:\overline{n}|}\right]$$

$$(D\,a)_{x:\overline{n}|} = h\sum_{t=1}^{n} a_{x:\overline{t}|}$$

$$(D\,a)_{x:\overline{n}|} = h\sum_{t=1}^{n} \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x}$$

$$(D\,a)_{x:\overline{n}|} = \frac{h}{D_x}\left[\left[N_{x+1} - N_{x+2}\right] + \left[N_{x+1} - N_{x+3}\right] + \left[N_{x+1} - N_{x+4}\right] + \ldots + \left[N_{x+1} - N_{x+n}\right] + \left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right]\right]$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{h}{D_x}\left[n\,N_{x+1} - \left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots + N_{x+n} + N_{x+n+1} \right]\right]$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{h\left[n\,N_{x+1} - \left[S_{x+2} - S_{x+n+2} \right]\right]}{D_x} \qquad (5.6)$$

Si este tipo de anualidad decrece por 1 cada año, terminando con el n-esimo pago de 1, entonces en la expresión (5.6) h=1, por lo tanto:

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{n\,N_{x+1} - \left[S_{x+2} - S_{x+n+2} \right]}{D_x} \qquad (5.7)$$

Existe otro tipo de anualidad variable creciente en donde la variación de los pagos cesa al cabo de n años, es decir, provee incrementos de h cada año limitándose a n años con pagos constantes de $(k + (n-1)h)$ por el resto del tiempo de vida de una persona de edad x. El valor presente se denota por $(V_n\ddot{a}_x)$ donde n significa el número de periodo hasta el cual varían los pagos, gráficamente se observa de la siguiente manera:

	x	x+1	x+2	x+3	...	x+n-1	x+n	x+n+1	x+n+2	x+n+3 ...
$h\ {}_{n-1/}\ddot{a}_x$							h	h	h	h ...
$h\ {}_{n-2/}\ddot{a}_x$						h	h	h	h	h ...
					.	.	.	.	.	.
					.	.	.	.	.	.
					.	.	.	.	.	.
$h\ {}_{2/}\ddot{a}_x$				h		h	h	h	h	h ...
$h\ {}_{1/}\ddot{a}_x$			h	h		h	h	h	h	h ...
$k\ \ddot{a}_x$		k	k	k		k	k	k	k	k ...

(G.6)

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad está dado por la suma de los niveles de (G.6), así:

$$(V_{\overline{n}|}a)_x = k\, a_x + h\; {}_{1/}a_x + h\; {}_{2/}a_x + \dots + h\; {}_{n-2/}a_x + h\; {}_{n-1/}a_x$$

$$(V_{\overline{n}|}a)_x = k\, a_x + h\left[{}_{1/}a_x + {}_{2/}a_x + \dots + {}_{n-2/}a_x + {}_{n-1/}a_x \right]$$

$$(V_{\overline{n}|}a)_x = k\, a_x + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/}a_x \right]$$

$$(V_{\overline{n}|}a)_x = k\, a_x + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t+1}}{D_x} \right]$$

$$(V_{\overline{n}|}a)_x = k\, a_x + \frac{h}{D_x}\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots + N_{x+n-1} + N_{x+n} \right]$$

$$(V_{\overline{n}|}a)_x = k\,\frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{h}{D_x}\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots + N_{x+n-1} + N_{x+n} \right]$$

Recordando que:

$$S_{x+2} = \sum_{t=2}^{w-x} N_{x+t} \qquad y \qquad S_{x+n+1} = \sum_{t=n+1}^{w-x} N_{x+t}$$

Entonces:

$$(V_{\overline{n}|}a)_x = k\left[\frac{N_{x+1}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[S_{x+2} - S_{x+n+1} \right]$$

$$(V_{\overline{n}|}a)_x = \frac{k\ N_{x+1} + h\left[S_{x+2} - S_{x+n+1}\right]}{D_x} \qquad (5.8)$$

Si en la expresión (5.8) k=h=1 se trata de una anualidad vencida-creciente la cual provee incrementos de 1 cada año hasta el n-esimo - año con pagos constantes de n por el resto del tiempo de vida de una - persona de edad x, gráficamente se observa de la siguiente manera:

$_{n-1/}a_x$							1	1	1	1	...
$_{n-2/}a_x$						1	1	1	1	1	...
					.	.	.	.	.	.	
				.		.	.	.	.	.	
						.	.	.	.	.	
$_{2/}a_x$				1		1	1	1	1	1	...
$_{1/}a_x$			1	1		1	1	1	1	1	...
a_x		1	1	1		1	1	1	1	1	...
	x	x+1	x+2	x+3	...	x+n-1	x+n	x+n+1	x+n+2	x+n+3	...

(G.7)

El valor presente de este tipo de anualidad, denotado por - $(I_{\overline{n}|}a)_x$, está dado por la suma de los niveles de (G.7), así:

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = a_x + \left[{}_{1/}a_x + {}_{2/}a_x + \dots + {}_{n-2/}a_x + {}_{n-1/}a_x\right]$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = a_x + \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/}a_x$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = a_x + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = a_x + \frac{1}{D_x}\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots + N_{x+n-1} + N_{x+n}\right]$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{1}{D_x}\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots + N_{x+n-1} + N_{x+n}\right]$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \frac{N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots + N_{x+n-1} + N_{x+n}}{D_x}$$

Recordando que:

$$S_{x+1} = \sum_{t=1}^{w-x} N_{x+t} \qquad y \qquad S_{x+n+1} = \sum_{t=n+1}^{w-x} N_{x+t}$$

Entonces:

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1}}{D_x} \tag{5.9}$$

Tambien se puede obtener la expresión (5.9) haciendo k=h=1 en la-expresión (5.8), así:

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \frac{N_{x+1} + \left[S_{x+2} - S_{x+n+1}\right]}{D_x}$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \frac{\left[N_{x+1} + S_{x+2}\right] - S_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|\,x} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1}}{D_x}$$

EJEMPLO 1. Calcular el valor presente de una anualidad vencida para una persona de 25 años, la cual provee pagos anuales de \$ 750,000.00 el primer año, \$ 800,000.00 el segundo, \$ 850,000.00 el tercero, incrementándose el \$ 50,000.00 cada año hasta llegar a \$ 1'050,000.00.

$$(Va)_{x:\overline{n}|} = \frac{k\left[N_{x+1} - N_{x+n+1}\right] + h\left[S_{x+2} - S_{x+n+2} - n\,N_{x+n+1}\right]}{D_x}$$

Gráficamente resulta:

25	26	27	28	29	30	31	32
							50,000
						50,000	50,000
					50,000	50,000	50,000
				50,000	50,000	50,000	50,000
			50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
		50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
	750,000	750,000	750,000	750,000	750,000	750,000	750,000

Por lo tanto $k=750{,}000$, $h=50{,}000$ y $n=7$

Aplicando (5.4) resulta:

$$(Va)_{25:\overline{7}|} = \frac{1}{D_x}\left[750{,}000\left[N_{25+1} - N_{25+7+1}\right] + 50{,}000\left[S_{25+2} - S_{25+7+2} - 7\,N_{25+7+1}\right]\right]$$

$$(V a)_{25:\overline{7}|} = \frac{1}{D_x}\left[750,000 \left[N_{26} - N_{33} \right] + 50,000 \left[S_{27} - S_{34} - 7\, N_{33} \right] \right]$$

$$(V a)_{25:\overline{7}|} = \frac{1}{4'573,377.1} \Big[(750,000)(108'616,225.2 - 80'343,048.6)$$

$$+ (50,000)(1,923'932,814.7 - 1,280'284,934.9 - (7)(80'343,048.6) \Big]$$

$$(V a)_{25:\overline{7}|} = 5'524,847.15$$

EJEMPLO 2. Calcular el valor presente a la edad 33 de una serie de pagos comenzando con el primero de \$ 450,000.00 a la edad 34, incrementándose en \$ 100,000.00 cada año hasta llegar a la edad 43, de la edad 44 en adelante mientras la persona sobreviva los pagos serán constantes.

Utilizando la expresión (5.8), resulta:

$$(V_{\overline{n}|} a)_x = \frac{k\ N_{x+1} + h \left[S_{x+2} - S_{x+n+1} \right]}{D_x} \qquad (5.8)$$

Donde k=450,000 , h=100,000 y n=10

$$(V_{\overline{10}|} a)_{33} = \frac{450,000\ N_{33+1} + 100,000 \left[S_{33+2} - S_{33+10+1} \right]}{D_{33}}$$

$$(V_{\overline{10}|} a)_{33} = \frac{450,000\ N_{34} + 100,000 \left[S_{35} - S_{44} \right]}{D_{33}}$$

$$(V_{\overline{10}|}a)_{33} = \frac{1}{3'550,911.6}\Big[(450,000)(76'792,137) +$$

$$(100,000)(1,203'492,797.9 - 654'759,355.1)\Big]$$

$$(V_{\overline{10}|}a)_{33} = 25'185,027.37$$

EJEMPLO 3. Expresar en símbolos conmutados el valor presente de - una anualidad vencida de una vida de edad x la cual provee pagos anuales de 100 el primer año, 400 el segundo año, 700 el tercero, incre - mentándose en 300 cada año hasta llegar a 1,600, despues los pagos decrecen en 400 por año hasta llegar a 400, posteriormente los pagos son constantes.

Gráficamente el problema se observa de la siguiente manera:

							300						
						300	300						
					300	300	300						
				300	300	300	300	400					
			300	300	300	300	300	400	400				
		100	100	100	100	100	100	400	400	400	400	400	400 ...
	x	x+1	x+2	x+3	x+4	x+5	x+6	x+7	x+8	x+9	x+10	x+11	x+12 ...

Por lo tanto el valor presente será igual a la suma de cada uno - de los niveles de la gráfica anterior:

$$V.P. = \left[100\, a_{x:\overline{6}|} + 400\, {}_{6/}a_x\right] + \left[300\, {}_{1/5}a_x + 400\, {}_{6/2}a_x\right]$$

$$+ \left[300\, {}_{2/4}a_x + 400\, {}_{6/1}a_x\right] + \left[300\, {}_{3/3}a_x\right] + \left[300\, {}_{4/2}a_x\right]$$

$$+ \left[300\, {}_{5/1}a_x\right]$$

$$V.P. = 100\, a_{x:\overline{6}|} + 400\ {}_{6/}a_x + 300\left[{}_{1/5}a_x + {}_{2/4}a_x + {}_{3/3}a_x + {}_{4/2}a_x + {}_{5/1}a_x\right] + 400\left[{}_{6/2}a_x + {}_{6/1}a_x\right]$$

$$V.P. = (100)\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+7}}{D_x}\right] + (400)\left[\frac{N_{x+7}}{D_x}\right] + 300\sum_{t=1}^{5} {}_{t/6-t}a_x + 400\sum_{t=1}^{2} {}_{6/t}a_x$$

$$V.P. = (100)\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+7}}{D_x}\right] + (400)\left[\frac{N_{x+7}}{D_x}\right] + 300\sum_{t=1}^{5}\frac{N_{x+t+1} - N_{x+t+6-t+1}}{D_x} + 400\sum_{t=1}^{2}\frac{N_{x+7} - N_{x+6+t+1}}{D_x}$$

$$V.P. = (100)\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+7}}{D_x}\right] + (400)\left[\frac{N_{x+7}}{D_x}\right] + 300\sum_{t=1}^{5}\frac{N_{x+t+1} - N_{x+7}}{D_x} + 400\sum_{t=1}^{2}\frac{N_{x+7} - N_{x+t+7}}{D_x}$$

$$V.P. = (100)\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+7}}{D_x}\right] + (400)\left[\frac{N_{x+7}}{D_x}\right] + \frac{300}{D_x}\left[\left[N_{x+2} - N_{x+7}\right] + \left[N_{x+3} - N_{x+7}\right] + \left[N_{x+4} - N_{x+7}\right] + \left[N_{x+5} - N_{x+7}\right] + \left[N_{x+6} - N_{x+7}\right]\right] + \frac{400}{D_x}\left[\left[N_{x+7} - N_{x+8}\right] + \left[N_{x+7} - N_{x+9}\right]\right]$$

$$V.P. = (100)\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+7}}{D_x}\right] + (400)\left[\frac{N_{x+7}}{D_x}\right] + \frac{300}{D_x}\left[\left[N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + N_{x+5} + N_{x+6}\right] - (5)\, N_{x+7}\right] + \frac{400}{D_x}\left[(2)\, N_{x+7} - \left[N_{x+8} + N_{x+9}\right]\right]$$

$$V.P. = (100)\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+7}}{D_x}\right] + (400)\left[\frac{N_{x+7}}{D_x}\right] + \frac{300}{D_x}\left[\left[S_{x+2} - S_{x+7}\right] - (5)\, N_{x+7}\right] + \frac{400}{D_x}\left[(2)\, N_{x+7} - \left[S_{x+8} - S_{x+10}\right]\right]$$

$$V.P. = \frac{1}{D_x}\left[100\, N_{x+1} - 100\, N_{x+7} + 400\, N_{x+7} + 300\, S_{x+2} - 300\, S_{x+7} - 1{,}500\, N_{x+7} + 800\, N_{x+7} - 400\, S_{x+8} + 400\, S_{x+10}\right]$$

$$V.P. = \frac{1}{D_x}\left[100\ N_{x+1} - 400\ N_{x+7} + 300\ S_{x+2} - 300\ S_{x+7} - 400\ S_{x+8} + 400\ S_{x+10}\right]$$

Ahora se tiene que:

$$-\ 400\ N_{x+7} - 400\ S_{x+8} = -\ 400\left[N_{x+7} + S_{x+8}\right] = -\ 400\ S_{x+7}$$

y

$$-\ 300\ S_{x+7} - 400\ S_{x+7} = -\ 700\ S_{x+7}$$

Por lo tanto:

$$V.P. = \frac{1}{D_x}\left[100\ N_{x+1} + 300\ S_{x+2} - 700\ S_{x+7} + 400\ S_{x+10}\right]$$

5.3 ANUALIDAD VARIABLE VENCIDA DIFERIDA n AÑOS.

En este tipo de anualidad los n primeros pagos son omitidos, así que el primer pago de k para una persona de edad x, se realiza a la edad x+n+1, a la edad x+n+2 el pago corresponde a (k+h), a la edad x+n+3 el pago corresponde a (k+2h), y así sucesivamente mientras la persona se encuentre con vida. Gráficamente se observa de la siguiente manera:

	x	x+1	x+n	x+n+1	x+n+2	x+n+3	x+n+4	x+n+5	...	x+n+m	...	*
											.	h
$h \; {}_{n+m-1/}a_x$									.	h	...	h
$h \; {}_{n+4/}a_x$								h	...	h	...	h
$h \; {}_{n+3/}a_x$							h	h	...	h	...	h
$h \; {}_{n+2/}a_x$						h	h	h	...	h	...	h
$h \; {}_{n+1/}a_x$					h	h	h	h	...	h	...	h
$k \; {}_{n/}a_x$				k	k	k	k	k	...	k	...	k

(G.8)

* Año de fallecimiento de la persona de edad x.

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad, denotado por $(V \; {}_{n/}a)_x$, está dado por la suma de los niveles de (G.8), así:

$$(V \; {}_{n/}a)_x = k \; {}_{n/}a_x + h \; {}_{n+1/}a_x + h \; {}_{n+2/}a_x + h \; {}_{n+3/}a_x + h \; {}_{n+4/}a_x + \ldots + h \; {}_{n+m-1/}a_x + h \; {}_{n+m/}a_x + \ldots$$

$$(V \; {}_{n/}a)_x = k \; {}_{n/}a_x + h \left[{}_{n+1/}a_x + {}_{n+2/}a_x + {}_{n+3/}a_x + {}_{n+4/}a_x + \ldots + {}_{n+m-1/}a_x + {}_{n+m/}a_x + \ldots \right]$$

$$(V \; {}_{n/}a)_x = k \; {}_{n/}a_x + h \left[\sum_{t=1}^{\omega-x} {}_{n+t/}a_x \right]$$

$$(V \; {}_{n/}a)_x = k \; {}_{n/}a_x + h \left[\sum_{t=1}^{\omega-x} \frac{N_{x+n+t+1}}{D_x} \right]$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = k\left[\frac{N_{x+n+1}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[N_{x+n+2} + N_{x+n+3} + N_{x+n+4} + \dots\right]$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = \frac{k\,N_{x+n+1} + h\left[N_{x+n+2} + N_{x+n+3} + N_{x+n+4} + \dots\right]}{D_x}$$

Recordando los valores conmutados se tiene que:

$$S_{x+n+2} = \sum_{t=n+2}^{w-x} N_{x+t}$$

Por lo tanto:

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = \frac{k\;N_{x+n+1} + h\;S_{x+n+2}}{D_x} \qquad (5.10)$$

Otra forma de obtener la expresión (5.10) es tomando como base la expresión (3.7.A.), así:

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = {}_nE_x\;(V\ddot{a})_{x+n}$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = {}_nE_x\left[\frac{k\,N_{x+n+1} + h\,S_{x+n+2}}{D_{x+n}}\right]$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}\left[\frac{k\,N_{x+n+1} + h\,S_{x+n+2}}{D_{x+n}}\right]$$

$$(V\,{}_{n/}a)_x = \frac{k\,N_{x+n+1} + h\,S_{x+n+2}}{D_x}$$

Si en la expresión (5.10) k=h=1 se tiene el valor presente de una anualidad vencida diferida n años, donde el primer pago a la edad $x+n+1$ es 1, a la edad $x+n+2$ es 2, a la edad $x+n+3$ es 3, y así sucesivamente mientras la persona se encuentre con vida, gráficamente se observa de la siguiente manera:

	x	x+1	...	x+n	x+n+1	x+n+2	x+n+3	x+n+4	x+n+5	...	x+n+m	...	$
												.	1
											. 1	...	1
${}_{n+m-1/}a_x$									.		.		.
${}_{n+4/}a_x$									1	...	1	...	1
${}_{n+3/}a_x$								1	1	...	1	...	1
${}_{n+2/}a_x$							1	1	1	...	1	...	1
${}_{n+1/}a_x$						1	1	1	1	...	1	...	1
${}_{n/}a_x$					1	1	1	1	1	...	1	...	1

(8.9)

$ Año de fallecimiento de la persona de edad x.

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad, denotado por $(I\,{}_{n/}a)_x$, está dado por la suma de los niveles de (8.9), así:

$$(I\,{}_{n/}a)_x = {}_{n/}a_x + {}_{n+1/}a_x + {}_{n+2/}a_x + {}_{n+3/}a_x + {}_{n+4/}a_x + \dots + {}_{n+m-1/}a_x + {}_{n+m/}a_x + \dots$$

$$(I\,{}_{n/}a)_x = {}_{n/}a_x + \sum_{t=1}^{w-x} {}_{n+t/}a_x$$

$$(I\,{}_{n/}a)_x = {}_{n/}a_x + \sum_{t=1}^{w-x} \frac{N_{x+n+t+1}}{D_x}$$

$$(I\,{}_{n/}a)_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{1}{D_x}\left[N_{x+n+2} + N_{x+n+3} + N_{x+n+4} + \dots \right]$$

$$(I\,{}_{n/}a)_x = \frac{N_{x+n+1} + N_{x+n+2} + N_{x+n+3} + N_{x+n+4} + \dots}{D_x}$$

Recordando los valores conmutados se tiene que:

$$S_{x+n+1} = \sum_{t=n+1}^{w-x} N_{x+t}$$

Por lo tanto:

$$(I\,{}_{n/}a)_x = \frac{S_{x+n+1}}{D_x} \qquad (5.11)$$

Otra forma de obtener la expresión (5.11) es tomando como base - la expresión (3.7.A), así:

$$(I\,{}_{n/}a)_x = {}_nE_x\,(I\,a)_{x+n}$$

$$(I_{n/}a)_x = {}_nE_x \left[\frac{N_{x+n+1} + S_{x+n+2}}{D_{x+n}} \right]$$

$$(I_{n/}a)_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \left[\frac{N_{x+n+1} + S_{x+n+2}}{D_{x+n}} \right]$$

$$(I_{n/}a)_x = \frac{N_{x+n+1} + S_{x+n+2}}{D_x}$$

$$(I_{n/}a)_x = \frac{S_{x+n+1}}{D_x}$$

EJEMPLO 1. Calcular el valor presente de una anualidad vencida para una persona de 29 años cuyo primer pago a los 35 años es de $ 925,000.00, el segundo pago es de $ 950,000.00, el tercero de $ 975,000.00, y así sucesivamente mientras la persona se encuentre con vida.

Gráficamente se observa de la siguiente manera:

(miles)

AÑOS	29	30	31	....	35	36	37	38	39	40	41	42	43 ...
													25 ...
												25	25 ...
											25	25	25 ...
										25	25	25	25 ...
									25	25	25	25	25 ...
								25	25	25	25	25	25 ...
							25	25	25	25	25	25	25 ...
						925	925	925	925	925	925	925	925 ...

Por lo tanto, para calcular el valor presente se utiliza la expresión (5.10), así:

$$(V_{n/}a)_x = \frac{k\,N_{x+n+1} + h\,S_{x+n+2}}{D_x}$$

$$(V_{6/}a)_{29} = \frac{(925,000)\,N_{29+6+1} + (25,000)\,S_{29+6+2}}{D_{29}}$$

$$(V_{6/}a)_{29} = \frac{(925,000)\,N_{36} + (25,000)\,S_{37}}{D_{29}}$$

$$(V_{6/}a)_{29} = \frac{(925,000)(70'021,352.7) + (25,000)(1,060'118,797.1)}{4'031,340.5}$$

$$(V_{6/}a)_{29} = 22'640,786.9$$

EJEMPLO 2. Calcular el valor presente de una anualidad vencida para una persona de 30 años cuyo primer pago de 1 lo realiza al final de los 38 años, el segundo pago de 2 lo realiza al final de los 39 años, el tercer pago de 3 lo realiza al final de los 40 años y así sucesivamente mientras la persona se encuentre con vida.

Gráficamente se observa de la siguiente manera:

```
                                                              1 ...
                                                          1   1 ...
                                                      1   1   1 ...
                                                  1   1   1   1 ...
                                              1   1   1   1   1 ...
                                          1   1   1   1   1   1 ...
                                      1   1   1   1   1   1   1 ...

--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--
 30  31  32  33  34  35  36  37  38  39  40  41  42  43  44  45 ...
```

Por lo tanto para calcular el valor presente se utiliza la expresión (5.11), así:

$$(I_{n/}a)_x = \frac{S_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(I_{8/}a)_{30} = \frac{S_{30+8+1}}{D_{30}}$$

$$(I_{8/}a)_{30} = \frac{S_{39}}{D_{30}} = \frac{929'652,305.6}{3'905,782}$$

$$(I_{8/}a)_{30} = 238.02$$

5.4 ANUALIDAD VARIABLE VITALICIA ANTICIPADA CRECIENTE.

Si se supone que los pagos que una persona de edad x realiza por este tipo de anualidad, varían en forma creciente en progresión aritmetica donde k es el primer termino y h es la razón. Así los pagos año tras año quedan establecidos como:

$$k,\ k+h,\ k+2h,\ k+3h,\dots\dots$$

Así, el valor presente de una anualidad variable vitalicia anticipada creciente, denotada por $(V\ddot{a})_x$, se calcula de la siguiente manera:

$$(V\ddot{a})_x = k + (k+h)\frac{l_{x+1}}{l_x}V + (k+2h)\frac{l_{x+2}}{l_x}V^2 + (k+3h)\frac{l_{x+3}}{l_x}V^3 + \dots$$

$$(V\ddot{a})_x = \frac{k\,l_x + (k+h)\,l_{x+1}V + (k+2h)\,l_{x+2}V^2 + (k+3h)\,l_{x+3}V^3 + \dots}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por V^x se tiene:

$$(V\ddot{a})_x = \frac{k\,l_x V^x + (k+h)\,l_{x+1}V^{x+1} + (k+2h)\,l_{x+2}V^{x+2} + (k+3h)\,l_{x+3}V^{x+3} + \dots}{V^x\,l_x}$$

Como $D_x = V^x\,l_x$

$$(V\ddot{a})_x = \frac{k\,D_x + (k+h)\,D_{x+1} + (k+2h)\,D_{x+2} + (k+3h)\,D_{x+3} + \dots}{D_x}$$

$$D_x\,(V\ddot{a})_x = k\,D_x + (k+h)\,D_{x+1} + (k+2h)\,D_{x+2} + (k+3h)\,D_{x+3} + \dots$$

$$D_x (V\ddot{a})_x = k D_x + k D_{x+1} + h D_{x+1} + k D_{x+2} + h D_{x+2} + h D_{x+2} +$$

$$k D_{x+3} + h D_{x+3} + h D_{x+3} + h D_{x+3} + \ldots$$

Ordenando las D con iguales subíndices resulta:

$$\begin{aligned} D_x (V\ddot{a})_x = k D_x + k D_{x+1} &+ k D_{x+2} + k D_{x+3} + \ldots \\ h D_{x+1} &+ h D_{x+2} + h D_{x+3} + \ldots \\ & h D_{x+2} + h D_{x+3} + \ldots \\ & \qquad\quad h D_{x+3} + \ldots \end{aligned}$$

Factorizando se tiene:

$$\begin{aligned} D_x (V\ddot{a})_x = \; & k \left[D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots \right] \\ & h \left[D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots \right] \\ & h \left[D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots \right] \\ & h \left[D_{x+3} + \ldots \right] \end{aligned}$$

Recordando que:

$$N_x = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t}$$

$$N_{x+1} = \sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t}$$

$$\vdots$$

Por lo tanto:

$$D_x \, (V\ddot{a})_x = k\,N_x + h\,N_{x+1} + h\,N_{x+2} + h\,N_{x+3} + \ldots.$$

$$D_x \, (V\ddot{a})_x = k\,N_x + h\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots.\right]$$

Recordando que:

$$S_{x+1} = \sum_{t=1}^{w-x} N_{x+t}$$

Por lo tanto:

$$D_x \, (V\ddot{a})_x = k\,N_x + h\,S_{x+1}$$

$$(V\ddot{a})_x = \frac{k\,N_x + h\,S_{x+1}}{D_x} \qquad (5.12)$$

Otra forma de llegar a la expresión (5.12) es tomar en cuenta que en este tipo de anualidad se proveen pagos de k a la edad x, (k+h) a la edad x+1, (k+2h) a la edad x+2, (k+3h) a la edad x+3 y así sucesivamente mientras el asegurado se encuentre con vida, gráficamente resulta lo siguiente:

	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	...	$x+n-1$	$x+n$	$x+n+1$	$x+n+2$	...	*
											h
$h\ {}_{n+2/}\ddot{a}_x$									h	...	h
$h\ {}_{n+1/}\ddot{a}_x$								h	h	...	h
$h\ {}_{n/}\ddot{a}_x$							h	h	h	...	h
$h\ {}_{n-1/}\ddot{a}_x$						h	h	h	h	...	h
$h\ {}_{3/}\ddot{a}_x$				h	...	h	h	h	h	...	h
$h\ {}_{2/}\ddot{a}_x$			h	h	...	h	h	h	h	...	h
$h\ {}_{1/}\ddot{a}_x$		h	h	h	...	h	h	h	h	...	h
$k\ \ddot{a}_x$	k	k	k	k	...	k	k	k	k	...	k

* AÑO DE FALLECIMIENTO (G.10)

Por lo tanto el valor presente de una anualidad variable vitalicia anticipada creciente corresponde a la suma de los niveles de la gráfica (G.10):

$$(V\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\ {}_{1/}\ddot{a}_x + h\ {}_{2/}\ddot{a}_x + h\ {}_{3/}\ddot{a}_x + h\ {}_{4/}\ddot{a}_x + \ldots.$$

$$(V\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\left[{}_{1/}\ddot{a}_x + {}_{2/}\ddot{a}_x + {}_{3/}\ddot{a}_x + {}_{4/}\ddot{a}_x + \ldots.\right]$$

$$(V\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\left[\sum_{t=1}^{w-x} {}_{t/}\ddot{a}_x\right]$$

$$(V\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\left[\sum_{t=1}^{w-x} \frac{N_{x+t}}{D_x}\right]$$

$$(V\ddot{a})_x = k\left[\frac{N_x}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots\right]$$

$$(V\ddot{a})_x = \frac{k\,N_x + h\,S_{x+1}}{D_x}$$

Si en la expresión (5.12) k=h=1 se trata de una anualidad anticipada creciente la cual provee pagos de 1 a la edad x, de 2 a la edad x+2, de 3 a la edad x+3 y así sucesivamente mientras la persona se encuentre con vida. Gráficamente se observa de la siguiente manera:

	x	x+1	x+2	x+3	...	x+n-1	x+n	x+n+1	x+n+2	...	*
											1
											.
$_{n+2/}\ddot{a}_x$									1	...	1
$_{n+1/}\ddot{a}_x$								1	1	...	1
$_{n/}\ddot{a}_x$							1	1	1	...	1
$_{n-1/}\ddot{a}_x$						1	1	1	1	...	1
					.	.	.	.	.		.
$_{3/}\ddot{a}_x$				1	...	1	1	1	1	...	1
$_{2/}\ddot{a}_x$			1	1	...	1	1	1	1	...	1
$_{1/}\ddot{a}_x$		1	1	1	...	1	1	1	1	...	1
$\ddot{a}_x$	1	1	1	1	...	1	1	1	1	...	1

* AÑO DE FALLECIMIENTO (G.11)

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad, denotado por $(I\ddot{a})_x$, está dado por la suma de los niveles de (G.11), así:

$$(I\ddot{a})_x = \ddot{a}_x + {}_{1/}\ddot{a}_x + {}_{2/}\ddot{a}_x + {}_{3/}\ddot{a}_x + {}_{4/}\ddot{a}_x + \ldots.$$

$$(I\ddot{a})_x = \ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{w-x} {}_{t/}\ddot{a}_x$$

$$(I\ddot{a})_x = \ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{w-x} \frac{N_{x+t}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{N_x}{D_x} + \frac{1}{D_x}\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots.\right]$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{N_x + S_{x+1}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x} \qquad (5.13)$$

EJEMPLO 1. Calcular el valor presente de una anualidad anticipada para una persona de 15 años cuyo primer pago anual es de \$ 300,000.00- incrementándose a razón de \$ 100,000.00 por año mientras la persona se encuentre con vida.

Gráficamente se observa de la siguiente manera:

(miles)

							100	...
						100	100	...
					100	100	100	...
				100	100	100	100	...
			100	100	100	100	100	...
		100	100	100	100	100	100	...
	300	300	300	300	300	300	300	...
AÑOS	15	16	17	18	19	20	21	...

Utilizando la expresión (5.12) se tiene:

$$(v\ddot{a})_x = \frac{k\,N_x + h\,S_{x+1}}{D_x}$$

$$(v\ddot{a})_{15} = \frac{(300,000)\,N_{15} + (100,000)\,S_{16}}{D_{15}}$$

$$(v\ddot{a})_{15} = \frac{(300,000)(167'754,558.5) + (100,000)(3,395'931,142)}{6'253,773.3}$$

$$(v\ddot{a})_{15} = 62'349,474.96$$

5.5 ANUALIDADES VARIABLES ANTICIPADAS TEMPORALES A n AÑOS CRECIENTES Y DECRECIENTES.

En este tipo de anualidad los pagos se limitan a un máximo de n-1 años, si la persona de edad x permanece con vida. Tratándose de una - anualidad variable anticipada temporal a n años creciente, el valor -

presente, denotado por $(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$, se calcula de la siguiente manera:

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k + (k+h)\frac{l_{x+1}}{l_x}V + (k+2h)\frac{l_{x+2}}{l_x}V^2 + \ldots + (k+(n-1)h)\frac{l_{x+n-1}}{l_x}V^{n-1}$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x}\left[k\, l_x + (k+h)\, l_{x+1} V + (k+2h)\, l_{x+2} V^2 + \ldots + (k+(n-1)h)\, l_{x+n-1} V^{n-1} \right]$$

Multiplicando numerador y denominador por V^x resulta:

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{V^x\, l_x}\left[k\, l_x V^x + (k+h)\, l_{x+1} V^{x+1} + (k+2h)\, l_{x+2} V^{x+2} + \ldots + (k+(n-1)h)\, l_{x+n-1} V^{x+n-1} \right]$$

Recordando que $D_x = V^x l_x$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{k\, D_x + (k+h)\, D_{x+1} + (k+2h)\, D_{x+2} + \ldots + (k+(n-1)h)\, D_{x+n-1}}{D_x}$$

$$D_x (V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k\,D_x + k\,D_{x+1} + h\,D_{x+1} + k\,D_{x+2} + h\,D_{x+2} + h\,D_{x+2} + \dots$$

$$k\,D_{x+n-1} + (n-1)\,h\,D_{x+n}$$

Agrupando las D con el mismo subíndice, resulta:

$$\begin{aligned} D_x (V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = {} & k\,D_x + k\,D_{x+1} + k\,D_{x+2} + k\,D_{x+3} + \dots + k\,D_{x+n-1} \\ & h\,D_{x+1} + h\,D_{x+2} + h\,D_{x+3} + \dots + h\,D_{x+n-1} \\ & h\,D_{x+2} + h\,D_{x+3} + \dots + h\,D_{x+n-1} \\ & h\,D_{x+3} + \dots + h\,D_{x+n-1} \\ & \vdots \qquad \vdots \\ & h\,D_{x+n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x (V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = {} & k \left[D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{x+n-1} \right] \\ & h \left[D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{x+n-1} \right] \\ & h \left[D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{x+n-1} \right] \\ & h \left[D_{x+3} + \dots + D_{x+n-1} \right] \\ & \vdots \qquad \vdots \\ & h\,D_{x+n-1} \end{aligned}$$

$$D_x (V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k \left[N_x - N_{x+n} \right] + h \left[\left[N_{x+1} - N_{x+n} \right] + \left[N_{x+2} - N_{x+n} \right] + \left[N_{x+3} - N_{x+n} \right] + \dots + \left[N_{x+n-1} - N_{x+n} \right] \right]$$

$$D_x (V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k\left[N_x - N_{x+n}\right] + h\left[\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+n-1}\right] - (n-1)\,N_{x+n}\right]$$

$$D_x (V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k\left[N_x - N_{x+n}\right] + h\left[\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+n-1}\right] + N_{x+n} - n\,N_{x+n}\right]$$

$$D_x (V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k\left[N_x - N_{x+n}\right] + h\left[\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+n-1} + N_{x+n}\right] - n\,N_{x+n}\right]$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{k\left[N_x - N_{x+n}\right] + h\left[S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n}\right]}{D_x} \qquad (5.14)$$

Otra forma de obtener la expresión (5.14) es tomando en cuenta que en este tipo de anualidad se proveen pagos de k a la edad x, (k+h) a la edad x+1, (k+2h) a la edad x+2, y así sucesivamente hasta el pago (k+(n-1)h) a la edad x+n-1, gráficamente se puede observar de la siguiente manera:

	x	x+1	x+2	x+3	x+4		x+n-2	x+n-1
$h \; {}_{n-1/1}\ddot{a}_x$								h
$h \; {}_{n-2/2}\ddot{a}_x$							h	h
						.	.	.
$h \; {}_{4/n-4}\ddot{a}_x$					h	...	h	h
$h \; {}_{3/n-3}\ddot{a}_x$				h	h	...	h	h
$h \; {}_{2/n-2}\ddot{a}_x$			h	h	h	...	h	h
$h \; {}_{1/n-1}\ddot{a}_x$		h	h	h	h	...	h	h
$k \; \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	k	k	k	k	k	...	k	k

(G.12)

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad corres - ponde a la suma de cada uno de los niveles de la gráfica (G.12), así:

$$(v\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil} = k\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + h\;{}_{1/n-1}\ddot{a}_x + h\;{}_{2/n-2}\ddot{a}_x + h\;{}_{3/n-3}\ddot{a}_x + \dots + h\;{}_{n-1/1}\ddot{a}_x$$

$$(v\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil} = k\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + h\left[{}_{1/n-1}\ddot{a}_x + {}_{2/n-2}\ddot{a}_x + {}_{3/n-3}\ddot{a}_x + \dots + {}_{n-1/1}\ddot{a}_x\right]$$

$$(v\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil} = k\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/n-t}\ddot{a}_x\right]$$

$$(v\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil} = k\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t} - N_{x+t+n-t}}{D_x}\right]$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{D_x}\left[\left[N_{x+1} - N_{x+n}\right] + \left[N_{x+2} - N_{x+n}\right] + \left[N_{x+3} - N_{x+n}\right] + \dots + \left[N_{x+n-1} - N_{x+n}\right]\right]$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{D_x}\left[\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+n-1}\right] - (n-1)\,N_{x+n}\right]$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{D_x}\left[\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+n-1} + N_{x+n}\right] - n\,N_{x+n}\right]$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = k\left[\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[\left[S_{x+1} - S_{x+n+1}\right] - n\,N_{x+n}\right]$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{k\left[N_x - N_{x+n}\right] + h\left[S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n}\right]}{D_x}$$

Si en la expresión (5.14) $k=h=1$ se tiene una anualidad anticipada creciente temporal a n años la cual provee pagos de 1 a la edad x, 2 a la edad x+1, 3 a la edad x+2, 4 a la edad x+3 y así sucesivamente hasta llegar al pago de n-1 a la edad x+n-1, gráficamente se observa de la siguiente manera:

${}_{n-1/1}\ddot{a}_x$								1
${}_{n-2/2}\ddot{a}_x$							1	1
						⋰	⋮	⋮
${}_{4/n-4}\ddot{a}_x$					1	...	1	1
${}_{3/n-3}\ddot{a}_x$				1	1	...	1	1
${}_{2/n-2}\ddot{a}_x$			1	1	1	...	1	1
${}_{1/n-1}\ddot{a}_x$		1	1	1	1	...	1	1
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	1	1	1	1	1	...	1	1
	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$x+4$		$x+n-2$	$x+n-1$

(G.13)

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad, denotado por $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil}$, está dado pro la suma de cada uno de los niveles de (G.13), así:

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil} = \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + {}_{1/n-1}\ddot{a}_x + {}_{2/n-2}\ddot{a}_x + {}_{3/n-3}\ddot{a}_x + \dots + {}_{n-1/1}\ddot{a}_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil} = \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/n-t}\ddot{a}_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil} = \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t} - N_{x+t+n-t}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{D_x}\left[\left[N_{x+1} - N_{x+n}\right] + \left[N_{x+2} - N_{x+n}\right] + \left[N_{x+3} - N_{x+n}\right] + \ldots + \left[N_{x+n-1} - N_{x+n}\right]\right]$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{D_x}\left[\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+n-1}\right] - (n-1)\, N_{x+n}\right]$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{D_x}\left[\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+n-1} + N_{x+n}\right] - n\, N_{x+n}\right]$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} + \frac{1}{D_x}\left[S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\, N_{x+n}\right]$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n} + S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\, N_{x+n}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x + S_{x+1} - \left[N_{x+n} + S_{x+n+1}\right] - n\, N_{x+n}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n\, N_{x+n}}{D_x} \qquad (5.15)$$

Para obtener la expresiôn correspondiente al valor presente de una anualidad variable anticipada decreciente temporal a n años, donde decrece en progresiôn aritmetica a razôn de h, se toma la suma de n anualidades temporales, grâficamente se observa de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{llllllll}
h\,\ddot{a}_{x:\overline{1}|} & h & & & & & & \\
h\,\ddot{a}_{x:\overline{2}|} & h & h & & & & & \\
h\,\ddot{a}_{x:\overline{3}|} & h & h & h & & & & \\
h\,\ddot{a}_{x:\overline{4}|} & h & h & h & h & & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
h\,\ddot{a}_{x:\overline{n-2}|} & h & h & h & h & \ldots & h & \\
h\,\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} & h & h & h & h & \ldots & h & h \\
h\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} & h & h & h & h & \ldots & h & h \quad h \\
\hline
 & x & x+1 & x+2 & x+3 & \ldots & x+n-3 & x+n-2 \quad x+n-1
\end{array}
$$

(G.13)

Por lo tanto el valor presente de una anualidad variable anticipada decreciente temporal a n años, denotado por $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$, está dado por la suma de cada uno de los niveles de (G.13), así:

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = h\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + h\,\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} + h\,\ddot{a}_{x:\overline{n-2}|} + \ldots + h\,\ddot{a}_{x:\overline{1}|}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = h\left[\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} + \ddot{a}_{x:\overline{n-2}|} + \ldots + \ddot{a}_{x:\overline{1}|}\right]$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = h \sum_{t=1}^{n} \ddot{a}_{x:\overline{t}|}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = h \sum_{t=1}^{n} \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{h}{D_x}\left[\left[N_x - N_{x+1}\right] + \left[N_x - N_{x+2}\right] + \left[N_x - N_{x+3}\right] + \dots + \left[N_x - N_{x+n-1}\right] + \left[N_x - N_{x+n}\right] \right]$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{h}{D_x}\left[n\,N_x - \left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+n-1} + N_{x+n}\right] \right]$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{h\left[n\,N_x - \left[S_{x+1} - S_{x+n+1}\right]\right]}{D_x} \qquad (5.16)$$

Existe otro tipo de anualidad variable anticipada creciente en donde la variación de los pagos cesa al cabo de n años, es decir, provee incrementos de h cada año limitándose a n-1 años con pagos constantes de $(k+(n-1)h)$ por el resto del tiempo de vida de x. El valor presente se denota por $(V_{\overline{n|}}\ddot{a})_x$, gráficamente se observa de la siguiente manera:

$h\ {}_{n-1/}\ddot{a}_x$							h	h	h	h	h	...
$h\ {}_{n-2/}\ddot{a}_x$						h	h	h	h	h	h	...
					.	.	.	.	.	.	.	
					.	.	.	.	.	.	.	
					.	.	.	.	.	.	.	
$h\ {}_{3/}\ddot{a}_x$				h	...	h	h	h	h	h	h	...
$h\ {}_{2/}\ddot{a}_x$			h	h	...	h	h	h	h	h	h	...
$h\ {}_{1/}\ddot{a}_x$		h	h	h	...	h	h	h	h	h	h	...
$k\ a_x$	k	k	k	k	...	k	k	k	k	k	k	...
	x	x+1	x+2	x+3		x+n-2	x+n-1	x+n	x+n+1	x+n+2	x+n+3	

(G.14)

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad, está dado por la suma de cada uno de los niveles de (G.14), así:

$$(v_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\ {}_{1/}\ddot{a}_x + h\ {}_{2/}\ddot{a}_x + h\ {}_{3/}\ddot{a}_x + \dots + h\ {}_{n-1/}\ddot{a}_x$$

$$(v_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\left[{}_{1/}\ddot{a}_x + {}_{2/}\ddot{a}_x + {}_{3/}\ddot{a}_x + \dots + {}_{n-1/}\ddot{a}_x\right]$$

$$(v_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/}\ddot{a}_x\right]$$

$$(v_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + h\left[\sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t}}{D_x}\right]$$

$$(v_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = k\,\ddot{a}_x + \frac{h}{D_x}\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+n-1}\right]$$

$$(v_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = k\left[\frac{N_x}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[S_{x+1} - S_{x+n}\right]$$

$$(v_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = \frac{k\,N_x + h\left[S_{x+1} - S_{x+n}\right]}{D_x} \qquad (5.17)$$

Si en la expresión (5.17) k=h=1 se trata de una anualidad anticipada creciente la cual provee incrementos de 1 cada año hasta el año n-1 con pagos constantes de n por el resto del tiempo de vida de una persona de edad x, gráficamente se observa de la siguiente manera:

	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	…	$x+n-2$	$x+n-1$	$x+n$	$x+n+1$	$x+n+2$	$x+n+3$	
${}_{n-1/}\ddot{a}_x$							1	1	1	1	1	…
${}_{n-2/}\ddot{a}_x$						1	1	1	1	1	1	…
⋮					⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
${}_{3/}\ddot{a}_x$				1	…	1	1	1	1	1	1	…
${}_{2/}\ddot{a}_x$			1	1	…	1	1	1	1	1	1	…
${}_{1/}\ddot{a}_x$		1	1	1	…	1	1	1	1	1	1	…
$\ddot{a}_x$	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1	…

(G.15)

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad, denotado por $(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x$, está dado por la suma de cada uno de los niveles de (G.15), así:

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \ddot{a}_x + {}_{1/}\ddot{a}_x + {}_{2/}\ddot{a}_x + {}_{3/}\ddot{a}_x + \dots + {}_{n-1/}\ddot{a}_x$$

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/}\ddot{a}_x$$

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{N_{x+t}}{D_x}$$

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \ddot{a}_x + \frac{1}{D_x}\left[N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+n-1}\right]$$

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \frac{N_x}{D_x} + \frac{1}{D_x}\left[S_{x+1} - S_{x+n}\right]$$

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \frac{N_x + S_{x+1} - S_{x+n}}{D_x}$$

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x} \qquad (5.18)$$

EJEMPLO 1. Calcular el valor presente de una anualidad anticipada para una persona de 40 años la cual provee pagos anuales de $ 680,000.00 el primer año, $ 700,000.00 el segundo, $ 720,000.00 el tercero, incrementándose en $ 20,000.00 cada año hasta llegar a $ 860,000.00. Gráficamente se observa de la siguiente manera:

									20
								20	20
							20	20	20
		(miles)				20	20	20	20
					20	20	20	20	20
				20	20	20	20	20	20
			20	20	20	20	20	20	20
		20	20	20	20	20	20	20	20
	20	20	20	20	20	20	20	20	20
680	680	680	680	680	680	680	680	680	680
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49

Utilizando la expresión (5.14)

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{k\left[N_x - N_{x+n}\right] + h\left[S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n}\right]}{D_x}$$

$$(v\ddot{a})_{40:\overline{10}|} = \frac{1}{D_{40}} \left[(680{,}000) \left[N_{40} - N_{40+10} \right] + (20{,}000) \left[S_{41} - S_{40+10+1} - 10\, N_{40+10} \right] \right]$$

$$(v\ddot{a})_{40:\overline{10}|} = \frac{1}{D_{40}} \left[(680{,}000) \left[N_{40} - N_{50} \right] + (20{,}000) \left[S_{41} - S_{51} - 10\, N_{50} \right] \right]$$

$$(v\ddot{a})_{40:\overline{10}|} = \frac{1}{2'833{,}001.8} \left[(680{,}000)(57'719{,}347.4 - 33'294{,}950.9) + (20{,}000)(811'286{,}104.6 - 373'372{,}951.4 - (10)(33'294{,}950.9)) \right]$$

$$(v\ddot{a})_{40:\overline{10}|} = \frac{(680{,}000)(24'424{,}396.5) + (20{,}000)(104'963{,}644.2)}{2'833{,}001.8}$$

$$(v\ddot{a})_{40:\overline{10}|} = 6'603{,}547.69$$

EJEMPLO 2. Calcular el valor presente de una anualidad anticipada para una persona de 20 años comenzando con el primer pago de - $ 250,000.00, el segundo pago de $ 350,000.00, el tercero de - $ 450,000.00 así hasta llegar a $ 850,000.00, posteriormente los pagos seguirán siendo de $ 850,000.00 mientras la persona se encuentre con - vida.

Gráficamente se observa de la siguiente manera:

	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
							100	100	100	100	100	...
						100	100	100	100	100	100	...
(miles)					100	100	100	100	100	100	100	...
				100	100	100	100	100	100	100	100	...
			100	100	100	100	100	100	100	100	100	...
		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	...
	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	...
AÑOS	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	...

Por lo tanto se utiliza la expresión (5.17):

$$(V_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \frac{k\,N_x + h\left[S_{x+1} - S_{x+n}\right]}{D_x}$$

$$(V_{\overline{7}|}\ddot{a})_{20} = \frac{(250{,}000)\,N_{20} + (100{,}000)\left[S_{20+1} - S_{20+7}\right]}{D_{20}}$$

$$(V_{\overline{7}|}\ddot{a})_{20} = \frac{(250{,}000)\,N_{20} + (100{,}000)\left[S_{21} - S_{27}\right]}{D_{20}}$$

$$(V_{\overline{7}|}\ddot{a})_{20} = \frac{1}{5'351{,}272.8}\Big[(250{,}000)(138'342{,}809.3) + (100{,}000)(2{,}647'224{,}379.5 - 1{,}923'932{,}814.7)\Big]$$

$$(V_{\overline{7}|}\ddot{a})_{20} = 19'979{,}332.54$$

5.6 ANUALIDAD VARIABLE ANTICIPADA DIFERIDA n AÑOS.

En este tipo de anualidad los primeros n-1 pagos son omitidos, de tal forma que el primer pago de k para una persona de edad x se realiza a la edad x+n, el segundo pago de (k+h) se realiza a la edad x+n+1, el tercer pago de (k+2h) se realiza a la eddad x+n+2 y así sucesiva - mente mientras la persona se encuentre con vida. Gráficamente se ob - serva de la siguiente manera:

.												
$h\ {}_{n+m+1/}\ddot{a}_x$												h ...
$h\ {}_{n+m/}\ddot{a}_x$											h	h ...
.										.	.	.
$h\ {}_{n+5/}\ddot{a}_x$									h	...	h	h ...
$h\ {}_{n+4/}\ddot{a}_x$								h	h	...	h	h ...
$h\ {}_{n+3/}\ddot{a}_x$							h	h	h	...	h	h ...
$h\ {}_{n+2/}\ddot{a}_x$						h	h	h	h	...	h	h ...
$h\ {}_{n+1/}\ddot{a}_x$					h	h	h	h	h	...	h	h ...
$k\ {}_{n/}\ddot{a}_x$				k	k	k	k	k	k	...	k	k ...
	x	x+1	... x+n-1	x+n	x+n+1	x+n+2	x+n+3	x+n+4	x+n+5	...	x+n+m	x+n+m+1

(B.16)

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad, denotado por $(V\ {}_{n/}\ddot{a})_x$, está dado por la suma de los niveles de la gráfica (B.16), así:

$$(V\ {}_{n/}\ddot{a})_x = k\ {}_{n/}\ddot{a}_x + h\ {}_{n+1/}\ddot{a}_x + h\ {}_{n+2/}\ddot{a}_x + h\ {}_{n+3/}\ddot{a}_x + \ldots$$

$$(V\ {}_{n/}\ddot{a})_x = k\ {}_{n/}\ddot{a}_x + h\left[\ {}_{n+1/}\ddot{a}_x + {}_{n+2/}\ddot{a}_x + {}_{n+3/}\ddot{a}_x + \ldots\right]$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = k\ {}_{n/}\ddot{a}_x + h\left[\sum_{t=1}^{w-x}\ {}_{n+t/}\ddot{a}_x\right]$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = k\left[\frac{N_{x+n}}{D_x}\right] + h\left[\sum_{t=1}^{w-x}\frac{N_{x+n+t}}{D_x}\right]$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = k\left[\frac{N_{x+n}}{D_x}\right] + \frac{h}{D_x}\left[N_{x+n+1} + N_{x+n+2} + N_{x+n+3} + \ldots\right]$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = \frac{k\ N_{x+n} + h\ S_{x+n+1}}{D_x} \qquad (5.19)$$

Otra forma de obtener la expresión (5.19) es tomando como base - la expresión (3.7.A.), así:

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = {}_nE_x\ (V\ddot{a})_{x+n}$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}\left[\frac{k\ N_{x+n} + h\ S_{x+n+1}}{D_{x+n}}\right]$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = \frac{k\ N_{x+n} + h\ S_{x+n+1}}{D_x}$$

Si en la expresión (5.19) k=h=1 se tiene el valor presente de una anualidad anticipada diferida n años, donde el primer pago a la edad - x+n es 1, el segundo pago a la edad x+n+1 es 2, el tercer pago a la - edad x+n+2 es 3 y así sucesivamente mientras la persona se encuentre - con vida. Gráficamente se observa de la siguiente manera:

	x	$x+1$	...	$x+n-1$	$x+n$	$x+n+1$	$x+n+2$	$x+n+3$	$x+n+4$	$x+n+5$	...	$x+n+m$	$x+n+m+1$	
$\vdots$														
${}_{n+m+1/}\ddot{a}_x$													1	...
${}_{n+m/}\ddot{a}_x$												1	1	...
$\vdots$												$\vdots$	$\vdots$	
${}_{n+5/}\ddot{a}_x$										1	...	1	1	...
${}_{n+4/}\ddot{a}_x$									1	1	...	1	1	...
${}_{n+3/}\ddot{a}_x$								1	1	1	...	1	1	...
${}_{n+2/}\ddot{a}_x$							1	1	1	1	...	1	1	...
${}_{n+1/}\ddot{a}_x$						1	1	1	1	1	...	1	1	...
${}_{n/}\ddot{a}_x$					1	1	1	1	1	1	...	1	1	...

(G.17)

Por lo tanto el valor presente de este tipo de anualidad, denotado por $(I\,{}_{n/}\ddot{a})_x$, está dado por la suma de cada uno de los niveles - de la gráfica (G.17), así:

$$(I\,{}_{n/}\ddot{a})_x = {}_{n/}\ddot{a}_x + {}_{n+1/}\ddot{a}_x + {}_{n+2/}\ddot{a}_x + {}_{n+3/}\ddot{a}_x + \ldots$$

$$(I\,{}_{n/}\ddot{a})_x = {}_{n/}\ddot{a}_x + \sum_{t=1}^{w-x} {}_{n+t/}\ddot{a}_x$$

$$(I\,{}_{n/}\ddot{a})_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} + \sum_{t=1}^{w-x} \frac{N_{x+n+t}}{D_x}$$

$$(I\,{}_{n/}\ddot{a})_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} + \frac{1}{D_x}\left[N_{x+n+1} + N_{x+n+2} + N_{x+n+3} + \ldots \right]$$

$$(I_{n/}\ddot{a})_x = \frac{N_{x+n} + N_{x+n+1} + N_{x+n+2} + N_{x+n+3} + \ldots}{D_x}$$

$$(I_{n/}\ddot{a})_x = \frac{S_{x+n}}{D_x} \qquad (5.20)$$

Otra forma de obtener la expresión (5.20) es tomando como base la expresión (3.7.A.), así:

$$(I_{n/}\ddot{a})_x = {}_nE_x \; (I\ddot{a})_{x+n}$$

$$(I_{n/}\ddot{a})_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \left[\frac{S_{x+n}}{D_{x+n}}\right]$$

$$(I_{n/}\ddot{a})_x = \frac{S_{x+n}}{D_x}$$

EJEMPLO 1. Calcular el valor presente de una anualidad anticipada para una persona de 44 años, cuyo primer pago a los 50 años es de $ 1'500,000.00 incrementándose año con año en $ 100,000.00 mientras la persona se encuentre con vida.

Gráficamente se observa de la siguiente manera:

												100
											100	100
										100	100	100
									100	100	100	100
								100	100	100	100	100
							1500	1500	1500	1500	1500	1500
AÑOS	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55

Por lo tanto se utiliza la expresión (5.19):

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = \frac{k\,N_{x+n} + h\,S_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(V_{6/}\ddot{a})_{44} = \frac{(1'500{,}000)\,N_{44+6} + (100{,}000)\,S_{44+6+1}}{D_{44}}$$

$$(V_{6/}\ddot{a})_{44} = \frac{(1'500{,}000)\,N_{50} + (100{,}000)\,S_{51}}{D_{44}}$$

$$(V_{6/}\ddot{a})_{44} = \frac{(1'500{,}000)(33'294{,}950.9) + (100{,}000)(375'372{,}951.4)}{2'476{,}878.2}$$

$$(V_{6/}\ddot{a})_{44} = 35'318{,}539.88$$

T A B L A 1

TABLA DE MORTALIDAD CSO 1958

THE COMMISSIONER 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE
3%

x	l_x	d_x	q_x
0	10'000,000	70,800	0.00708
1	9'929,200	17,475	0.00176
2	9'911,725	15,066	0.00152
3	9'896,659	14,449	0.00146
4	9'882,210	13,835	0.00140
5	9'868,375	13,322	0.00135
6	9'855,053	12,812	0.00130
7	9'842,241	12,401	0.00126
8	9'829,840	12,091	0.00123
9	9'817,749	11,879	0.00121
10	9'805,870	11,865	0.00121
11	9'794,005	12,047	0.00123
12	9'781,958	12,325	0.00126
13	9'769,633	12,896	0.00132
14	9'756,737	13,562	0.00139
15	9'743,175	14,225	0.00146
16	9'728,950	14,983	0.00154
17	9'713,967	15,737	0.00162
18	9'698,230	16,390	0.00169
19	9'681,840	16,846	0.00174
20	9'664,994	17,300	0.00179
21	9'647,694	17,655	0.00183
22	9'630,039	17,912	0.00186
23	9'612,127	18,167	0.00189
24	9'593,960	18,324	0.00191
25	9'575,636	18,481	0.00193
26	9'557,155	18,732	0.00196
27	9'538,423	18,981	0.00199
28	9'519,442	19,324	0.00203
29	9'500,118	19,760	0.00208

T A B L A 1

TABLA DE MORTALIDAD CSO 1958

THE COMMISSIONER 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE
3%
(continuación)

x	l_x	d_x	q_x
30	9'480,358	20,193	0.00213
31	9'460,165	20,718	0.00219
32	9'439,447	21,239	0.00225
33	9'418,208	21,850	0.00232
34	9'396,358	22,551	0.00240
35	9'373,807	23,528	0.00251
36	9'350,279	24,685	0.00264
37	9'325,594	26,112	0.00280
38	9'299,482	27,991	0.00301
39	9'271,491	30,132	0.00325
40	9'241,359	32,622	0.00353
41	9'208,737	35,362	0.00384
42	9'173,375	38,253	0.00417
43	9'135,122	41,382	0.00453
44	9'093,740	44,741	0.00492
45	9'048,999	48,412	0.00535
46	9'000,587	52,473	0.00583
47	8'948,114	56,910	0.00636
48	8'891,204	61,794	0.00695
49	8'829,410	67,104	0.00760
50	8'762,306	72,902	0.00832
51	8'689,404	79,160	0.00911
52	8'610,244	85,758	0.00996
53	8'524,486	92,832	0.01089
54	8'431,654	100,337	0.01190
55	8'331,317	108,307	0.01300
56	8'223,010	116,849	0.01421
57	8'106,161	125,970	0.01554
58	7'980,191	135,663	0.01700
59	7'844,528	145,830	0.01859

T A B L A 1

TABLA DE MORTALIDAD CSO 1958

THE COMMISSIONER 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE
3%
(continuación)

x	l_x	d_x	q_x
60	7'698,698	156,592	0.02034
61	7'542,106	167,736	0.02224
62	7'374,370	179,271	0.02431
63	7'195,099	191,174	0.02657
64	7'003,925	203,394	0.02904
65	6'800,531	215,917	0.03175
66	6'584,614	228,749	0.03474
67	6'355,865	241,777	0.03804
68	6'114,088	254,835	0.04168
69	5'859,253	267,241	0.04561
70	5'592,012	278,426	0.04979
71	5'313,586	287,731	0.05415
72	5'025,855	294,766	0.05865
73	4'731,089	299,289	0.06326
74	4'431,800	301,894	0.06812
75	4'129,906	303,011	0.07337
76	3'826,895	303,014	0.07918
77	3'523,881	301,997	0.08570
78	3'221,884	299,829	0.09306
79	2'922,055	295,683	0.10119
80	2'626,372	288,848	0.10998
81	2'337,524	278,983	0.11935
82	2'058,541	265,902	0.12917
83	1'792,639	249,858	0.13938
84	1'542,781	231,433	0.15001
85	1'311,348	211,311	0.16114
86	1'100,037	190,108	0.17282
87	909,929	168,455	0.18513
88	741,474	146,997	0.19825
89	594,477	126,303	0.21246

T A B L A 1

TABLA DE MORTALIDAD CSO 1958

THE COMMISSIONER 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE
3%
(continuación)

x	l_x	d_x	q_x
90	468,174	106,809	0.22814
91	361,365	88,813	0.24577
92	272,552	72,480	0.26593
93	200,072	57,881	0.28930
94	142,191	45,026	0.31666
95	97,165	34,128	0.35124
96	63,037	25,250	0.40056
97	37,787	18,456	0.48842
98	19,331	12,916	0.66815
99	6,415	6,415	1.00000

T A B L A 2

TABLA DE MORTALIDAD CSO 1958

THE COMMISSIONER 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE
3%

COLUMNAS DE VALORES CONMUTADOS

x	D_x	N_x	S_x
0	10'000,000.0	288'963,016.7	6,979'643,888.8
1	9'640,000.0	278'963,016.7	6,690'680,872.1
2	9'342,751.4	269'323,016.7	6,411'717,855.4
3	9'056,844.9	259'980,265.3	6,142'394,838.7
4	8'780,215.6	250'923,420.4	5,882'414,573.4
5	8'512,546.9	242'143,204.8	5,631'491,153.0
6	8'253,451.8	233'630,657.9	5,389'347,948.2
7	8'002,642.6	225'377,206.1	5,155'717,290.3
8	7'759,766.4	217'374,563.5	4,930'340,084.2
9	7'524,487.1	209'614,797.1	4,712,965,520.7
10	7'296,488.1	202'090,310.0	4,503'350,723.6
11	7'075,397.6	194'793,821.9	4,301'260,413.6
12	6'860,868.5	187'718,424.3	4,106'466,591.7
13	6'652,644.7	180'857,555.8	3,918'748,167.4
14	6'450,352.6	174'204,911.1	3,737'890,611.6
15	6'253,773.3	167'754,558.5	3,563'685,700.5
16	6'062,760.0	161'500,785.2	3,395'931,142.0
17	5'877,107.8	155'438,025.2	3,234'430,356.8
18	5'696,688.0	149'560,915.4	3,078'992,331.6
19	5'521,418.1	143'864,227.4	2,929'431,416.2
20	5'351,272.8	138'342,809.3	2,785'567,188.8
21	5'186,111.0	132'991,536.5	2,647'224,379.5
22	5'025,845.1	127'805,425.5	2,514'232,843.0
23	4'870,385.5	122'779,580.4	2,386'427,417.5
24	4'719,592.6	117'909,194.9	2,263'647,837.1
25	4'573,377.1	113'189,602.3	2,145'738,642.2
26	4'431,602.4	108'616,225.2	2,032'549,039.9
27	4'294,093.7	104'184,622.8	1,923'932,814.7
28	4'160,726.8	99'890,529.1	1,819'748,191.9
29	4'031,340.5	95'729,802.3	1,719'857,662.8

TABLA DE MORTALIDAD CSO 1958

THE COMMISSIONER 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE
3%

COLUMNAS DE VALORES CONMUTADOS
(continuación)

x	D_x	N_x	S_x
30	3'905,782.0	91'698,461.8	1,624'127,860.5
31	3'783,944.4	87'792,679.8	1,532'429,398.7
32	3'665,686.8	84'008,735.4	1,444'636,718.9
33	3'550,911.6	80'343,048.6	1,360'627,983.5
34	3'439,488.9	76'792,137.0	1,280'284,934.9
35	3'331,295.4	73'352,648.1	1,203'492,797.9
36	3'226,149.5	70'021,352.7	1,130'140,149.8
37	3'123,914.9	66'795,203.2	1,060'118,797.1
38	3'024,434.7	63'671,288.3	993'323,593.9
39	2'927,506.2	60'646,853.6	929'652,305.6
40	2'833,001.8	57'719,347.4	869'005,452.0
41	2'740,778.0	54'886,345.6	811'286,104.6
42	2'650,731.3	52'145,567.6	756'399,759.0
43	2'562,794.0	49'494,836.3	704'254,191.4
44	2'476,878.2	46'932,042.3	654'759,355.1
45	2'392,904.8	44'455,164.1	607'827,312.8
46	2'310,779.5	42'062,259.3	563'372,148.7
47	2'230,395.8	39'751,479.8	521'309,889.4
48	2'151,660.7	37'521,084.0	481'558,409.6
49	2'074,472.4	35'369,423.3	444'037,325.6
50	1'998,744.0	33'294,950.9	408'667,902.3
51	1'924,383.0	31'296,206.9	375'372,951.4
52	1'851,312.7	29'371,823.9	344'076,744.5
53	1'779,488.9	27'520,511.2	314'704,920.6
54	1'708,844.9	25'741,022.3	287'184,409.4
55	1'639,329.7	24'032,177.4	261'443,387.1
56	1'570,891.7	22'392,847.7	237'411,209.7
57	1'503,465.3	20'821,956.0	215'018,362.0
58	1'436,991.7	19'318,490.7	194'196,406.0
59	1'371,420.2	17'881,499.0	174'877,915.3

TABLA DE MORTALIDAD CSO 1958

THE COMMISSIONER 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE
3%

COLUMNAS DE VALORES CONMUTADOS
(continuación)

x	D_x	N_x	S_x
60	1'306,723.8	16'510,078.8	156'996,416.3
61	1'242,859.2	15'203,355.0	140'486,337.5
62	1'179,823.4	13'960,495.8	125'282,982.5
63	1'117,613.4	12'780,672.4	111'322,486.7
64	1'056,231.5	11'663,059.0	98'541,814.3
65	995,687.8	10'606,827.5	86'878,755.3
66	935,994.9	9'611,139.7	76'271,927.8
67	877,163.6	8'675,144.8	66'660,788.1
68	819,219.7	7'797,981.2	57'985,643.3
69	762,208.4	6'978,761.5	50'187,662.1
70	706'256.4	6'216,553.1	43'208,900.6
71	651'545.5	5'510,296.7	36'992,347.5
72	598'314.8	4'858,751.2	31'482,050.8
73	546,819.2	4'260,436.4	26'623,299.6
74	497,308.1	3'713,617.2	22'362,863.2
75	449,933.5	3'216,309.1	18'649,246.0
76	404,778.5	2'766,375.6	15'432,936.9
77	361,872.0	2'361,597.1	12'666,561.3
78	321,222.8	1'999,725.1	10'304,964.2
79	282,844.4	1'678,502.3	8'305,239.1
80	246,818.8	1'395,657.9	6'626,736.8
81	213,275.5	1'148,839.1	5'231,078.9
82	182,350.6	935,563.6	4'082,239.8
83	154,171.2	753,213.0	3'146,676.2
84	128,818.2	599,041.8	2'393,463.2
85	106,305.0	470,223.6	1'794,421.4
86	86,577.7	363,918.6	1'324,197.8
87	69,529.5	277,340.9	960,279.2
88	55,007.3	207,811.4	682,938.3
89	42,817.6	152,804.1	475,126.9

T A B L A 2

TABLA DE MORTALIDAD CSO 1958

THE COMMISSIONER 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE
3%

COLUMNAS DE VALORES CONMUTADOS
(continuación)

x	D_x	N_x	S_x
90	32,738.4	109,986.5	322,322.8
91	24,533.4	77,248.1	212,336.3
92	17,964.9	52,714.7	135,088.2
93	12,803.4	34,749.8	82,373.5
94	8,834.3	21,946.4	47,623.7
95	5,861.0	13,112.1	25,677.3
96	3,691.7	7,251.1	12,565.2
97	2,148.5	3,559.4	5,314.1
98	1,067.1	1,410.9	1,754.7
99	343.8	343.8	343.8

C O N C L U S I O N E S

En la práctica este tema es una de las bases principales para el cálculo de las primas que serán asignadas al asegurado por la Compañía de Seguros respectiva.

Es muy frecuente encontrar casos en donde los pagos no son anuales por lo que fue importante encontrar expresiones para valores presentes cuando los pagos se realizan ya sea mensual, bimestral, trimestral o bien semestrales. Además se obtuvo la expresión para calcular el valor presente de las anualidades temporales a n años, diferidas k-años, pagaderas m veces al año.

En el capítulo 4, dentro del tema de anualidades vitalicias pagaderas m veces al año, se comenzó el análisis para encontrar el valor presente, a partir de la fórmula de Euler-Maclaurin, si el lector desea profundizar en el desarrollo de dicha fórmula puede consultar libros de métodos numéricos.

Es importante señalar que generalmente los pagos que se realizan por una anualidad no son iguales, por ello fué necesario analizar dentro del Capítulo 5, a detalle este tipo de variaciones.

La presente tesis intentó desarrollar en forma más amplia el estudio de las anualidades contingentes debido a que la poca bibliografía con que se cuenta plantea de manera muy breve este tema, por lo tanto este trabajo pretende ser una guía de fácil comprensión para aquellos estudiantes interesados en profundizar en este estudio.

B I B L I O G R A F I A

GONZALEZ GALE JOSE. "ELEMENTOS DE CALCULO ACTUARIAL". EDICIONES MACCHI. CUARTA EDICION.

CHESTER WALLACE JORDAN, J. "LIFE CONTINGENCIES". THE SOCIETY OF ACTUARIES, 1982. SEGUNDA EDICION.

PEREZ TEJADA LOPEZ FERNANDO ALONSO. "PROYECTO DE TEXTO PARA CALCULO ACTUARIAL I". 1985.

DE LA CUEVA BENJAMIN. "MATEMATICAS FINANCIERAS". EDITORIAL PORRUA, S.A. MEXICO, 1986.

HARRY FREEMAN. "FINITE DIFFERENCES FOR ACTUARIAL STUDENTS". INSTITUTE OF ACTUARIES. CAMBRIDGE, 1965.

WILLIAM FELLER. "INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES". VOL. I. EDITORIAL LIMUSA. MEXICO, 1983.

EMANUEL PARZEN. "TEORIA MODERNA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES". EDITORIAL LIMUSA. MEXICO, 1982.