

54
2ej-



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**“ANALISIS, DISEÑO E IMPLEMENTACION
DE UN SISTEMA DE CONTROL DIGITAL:
TECNICAS ADAPTABLES.”**

T E S I S

Que para obtener el título de
**INGENIERO MECANICO
E L E C T R I C I S T A**
P r e s e n t a :
JOSE JOB FLORES GODOY

Director
DR. YU TANG



México, D. F.

Enero 1992.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice.

I. Introducción	I-1
II. Análisis y diseño de un controlador digital en el dominio de la frecuencia	II-1
2.1 Formulación del problema	II-1
2.2 Métodos clásicos y modernos de diseños de controladores digitales en el dominio de la frecuencia	II-1
2.2.1 Métodos Clásicos	II-2
2.2.1.1 Redes de Adelanto	II-2
2.2.1.2 Redes de Atraso	II-3
2.2.1.3 Redes de Adelanto-Atraso	II-3
2.2.2 Métodos Modernos	II-3
2.2.2.1 Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG, Linear Quadratic Gaussian)	II-4
2.2.2.2 Control Óptimo H_2	II-4
2.2.2.3 Control Óptimo H_∞	II-5
2.3 Método de diseño de controladores digitales vía interpolación de su respuesta en frecuencia	II-5
2.3.1 Antecedentes	II-5
2.3.2 Planteamiento del problema	II-6
2.3.3 Diseño del controlador	II-7
2.3.3.1 El filtro Lagrange	II-9
2.3.4 Implementación del controlador a través del filtro Lagrange	II-17
2.3.4.1 Procedimiento de diseño para un controlador de interpolación Lagrange	II-19
2.3.5 Ejemplo Numérico	II-20
III. Control adaptable de un proceso térmico de laboratorio	III-1
3.1 Esquema del control adaptable	III-1
3.1.1 Sistemas Adaptables a un Modelo de Referencia (Model-Reference Adaptive Systems, MRAS)	III-1
3.1.2 Reguladores Sintonizados por sí mismos (Self-Tuning Regulators, STR)	III-2
3.2 Identificación de la respuesta en frecuencia	III-3
3.2.1 Consideraciones sobre la planta y propósito	III-3
3.2.2 Estructura del identificador	III-4
3.2.3 Algoritmo de estimación	III-5
3.2.4 Análisis de convergencia	III-11

3.3 Compensación adaptable de la respuesta en frecuencia	III-12
3.3.1 Algoritmo de identificación adaptable de la respuesta en frecuencia	III-12
3.3.2 Control adaptable	III-13
3.4 Resultados de experimentos	III-14
3.4.1 Descripción del proceso térmico de laboratorio	III-14
3.4.2 Descripción de la implementación del controlador	III-15
3.4.3 Especificaciones de diseño	III-16
3.4.3 Resultados de experimentos	III-16
IV. Diseño de un controlador de precompensación adaptable simple	IV-1
4.1 Introducción	IV-1
4.2 Controlador de precompensación	IV-2
4.2.1 Objetivo de control	IV-2
4.2.3 Controlador	IV-3
4.3 Ley de adaptación y análisis de convergencia	IV-4
4.3.1 Ley de adaptación	IV-4
4.3.2 Análisis de convergencia	IV-6
4.3.3 Algoritmo de precompensación adaptable	IV-6
4.4 Resultados de simulaciones	IV-7
4.5 Implementación del controlador digital adaptable en el microcontrolador MC68HC11	IV-11
4.6 Resultados de experimentos realizados en un proceso térmico	IV-13
V. Conclusiones	V-1
BI. Bibliografía	BI-1
Apéndice A	A-1

I. Introducción.

Como parte fundamental en el desarrollo de un sistema industrial se encuentra el diseño de la etapa de control. Esta es importante debido a que se encarga de garantizar un comportamiento adecuado del proceso en presencia de perturbaciones externas, comportamientos del proceso que no fueron considerados, ya sea, por que en un principio se pensó que las contribuciones debidas a algunas dinámicas eran despreciables o por el simple desconocimiento de la naturaleza del proceso en sí. Otra causa puede ser que se tenga alguna contribución externa indeseable (ruido).

Los objetivos básicos en la etapa de control son: Análisis del proceso a controlar, el diseño del mecanismo que garantice el comportamiento deseado y finalmente su implementación. Todos los pasos anteriores son importantes en igual medida ya que sin un análisis adecuado no se puede obtener un diseño e implementación correcta. Así para cada caso.

Para lograr alcanzar los objetivos anteriores, es necesario utilizar la herramienta adecuada. Si bien las herramientas de análisis han llegado a una madurez en el sentido de que se tiene una gran variedad de posibilidades para hacer este trabajo, las herramientas de diseño no la tienen todavía y es aquí en donde se debe enfrentar el diseñador con su experiencia y las herramientas disponibles para lograr sus objetivos. Por otra parte gracias a los avances de los últimos años se tiene una gran variedad de dispositivos por medio de los cuales una vez hecho el diseño del controlador, este se puede construir.

El objetivo de este trabajo es el presentar algunos métodos alternativos de diseño que faciliten la solución a los problemas que se pueden encontrar en la vida diaria.

En particular se utiliza como idea principal la posibilidad de variar los parámetros del controlador a diseñar de acuerdo a como se presenten variaciones en el proceso de interés. A este concepto se le conoce como adaptabilidad. Una ventaja de este tipo de esquemas es que una vez implementado si por alguna causa (envejecimiento de los componentes, no-linealidades, etc.) se presenta variaciones en el proceso, no hay necesidad de reajustar el controlador para obtener el desempeño deseado.

Como parte de los objetivos a desarrollar, se pretende introducir el concepto de adaptabilidad en los controladores como el siguiente paso natural a seguir en su diseño.

Para lograr los objetivos se utilizaran dos técnicas en particular, una en el dominio de la frecuencia y otra en el dominio del tiempo.

En ambas técnicas primero se diseñaran los controladores fijos y después se les añadirá la ley de adaptación.

En la primera técnica se parte de la idea de compensar la respuesta en frecuencia de un proceso. Para esto se divide su respuesta en frecuencia en bandas y sólo se compensaran aquellas en que sea necesario.

En la segunda técnica se ataca el problema de regulación que se presenta en procesos ante perturbaciones, no-linealidades o variaciones en la dinámica del proceso debidos al envejecimiento de los componentes. En lo que se refiere a la implementación, para el primer diseño se utiliza una computadora PC con una tarjeta de conversión analógica-digital y digital-analógica debido a la complejidad del algoritmo de control. Para el segundo diseño se utiliza un microprocesador de propósito específico ya que el algoritmo es significativamente más sencillo que el primero.

Los resultados obtenidos al implementar los controladores son satisfactorios en el sentido de que, con equipo modesto se obtienen los desempeños deseados. Siendo esta una característica importante debido a que en la industria se busca utilizar equipo lo más simple que se pueda con la finalidad de que el costo económico sea lo menor posible y los resultados obtenidos sean los deseados.

El primer diseño se inspira en el diseño cuantitativo de realimentación [11] y está relacionado con la idea de usar algunos puntos de la traza de Nyquist de la planta para sintonizar al controlador [12].

El segundo diseño se inspira en la idea de control inverso utilizado en procesamiento digital de señales [26], [27]. Así como en [29] donde se ataca el problema de forma similar.

Finalmente la tesis se presenta de la siguiente manera, el capítulo II describe el análisis de el controlador de interpolación para el caso no adaptable, se presentan también los resultados de las simulaciones obtenidas, en el capítulo III se presentan el análisis, diseño e implementación del controlador digital adaptable en el dominio de la frecuencia, junto con los resultados de los experimentos realizados. En el capítulo IV se presentan el análisis, diseño e implementación del controlador digital adaptable en el dominio del tiempo, así como los resultados obtenidos en simulaciones y experimentos. Finalmente las conclusiones se encuentran en el capítulo V.

II. Análisis y diseño de un controlador digital en el dominio de la frecuencia.

2.1 Formulación del problema.

Dada una planta cuya función de transferencia está descrita por $P(z)$, se desea encontrar un controlador tal que su comportamiento en malla cerrada satisfaga un conjunto de restricciones definidas en el dominio de la frecuencia. Estas restricciones pueden ser: ancho de banda, margen de fase, margen de ganancia, frecuencia de resonancia, pico de resonancia, banda de rechazo, banda de transición, etc. Si las restricciones impuestas están especificadas en el dominio del tiempo será necesario expresar estas condiciones en el dominio de la frecuencia [1].

2.2 Métodos clásicos y modernos de diseños de controladores digitales en el dominio de la frecuencia.

Cronológicamente los métodos frecuenciales fueron los primeros en ser utilizados debido a sus características [2]; Los métodos clásicos no necesitan un modelo matemático muy preciso del proceso. Los datos del modelo pueden ser obtenidos por mediciones directas y estas mediciones son independientes de la complejidad del proceso en sí. Finalmente los cálculos necesarios son muy simples. En lo que respecta a los métodos modernos los cálculos son significativamente más complicados, pero por otra parte, se gana en que el controlador es resultado de un procedimiento sistemático, cosa que no sucede con los métodos clásicos. Algunos de los métodos que se pueden mencionar son:

Métodos Clásicos

- Redes de adelanto.
- Redes de atraso.
- Redes de adelanto-atraso.

Métodos Modernos

- Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG, Linear Quadratic Gaussian)
- Control Óptimo H_2
- Control Óptimo H_∞

2.2.1 Métodos Clásicos.

Para la aplicación de los métodos clásicos es necesario hacer una transformación del plano z al plano ω para poder aplicar las técnicas desarrolladas en sistemas continuos; Esta transformación está definida como [3]:

$$\omega = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (2.1)$$

donde T_s es el tiempo de muestreo.

De modo que si se tiene un sistema $P(z)$, se le aplica la transformación (2.1), se diseña el controlador $C(\omega)$ y se transforma al plano z , y así se obtiene a $C(z)$. Esta transformación presenta problemas de distorsión ya que la regla de correspondencia entre las frecuencias del plano z y del plano ω está dada por [4]:

$$\omega = jv = j \frac{2}{T_s} \tan \frac{\Omega T_s}{2} \quad (2.2)$$

donde v corresponde a la frecuencia continua y Ω corresponde a la frecuencia digital.

La distorsión que se presenta no es muy notoria si se trabaja en un rango de frecuencias cercano al origen, pero se vuelve más notable conforme la frecuencia aumenta. Por lo que, si se quiere trabajar en frecuencias altas, es necesario escalar la transformación de modo que el punto de coincidencia entre la frecuencia digital y la frecuencia analógica sea más cercano a las frecuencias en que se desea trabajar. La transformación (2.1) con preescalamiento está dada por la ecuación:

$$\omega = \frac{\Omega_d}{\tan\left(\frac{\Omega_d T_s}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1} \quad (2.3)$$

donde Ω_d es el valor de la frecuencia digital que coincide con la frecuencia analógica.

Algunas características de los compensadores clásicos se enuncian a continuación:

2.2.1.1 Redes de Adelanto: Están definidas por la función de transferencia:

$$C_1(\omega) = \frac{1 + aT_1\omega}{1 + T_1\omega} \quad \therefore a > 1 \quad (2.4)$$

donde $1/T_1$ es el valor del polo al que se coloca la frecuencia de corte de la red de adelanto, de modo que se tendrá al cero con menor valor que el polo. Esto causa un adelanto de fase y una amplificación en alta frecuencia limitada por la presencia del polo. Una red de adelanto siempre incrementa la frecuencia de la ganancia de cruce y en consecuencia el ancho de banda del sistema completo, esto significa que se incrementa la velocidad de respuesta del sistema.

2.2.1.2 Redes de Atraso: Están definidas por la función de transferencia:

$$C_2(\omega) = \frac{1 + bT_2\omega}{1 + T_2\omega} \quad \therefore \quad b < 1 \quad (2.5)$$

donde $1/T_2$ es el valor del polo al que se coloca la red. En este caso se tiene al cero después del valor del polo, por lo que se tendrá un atraso de fase y atenuación en amplitud. Esta red es utilizada por su característica de magnitud. Este compensador siempre reduce la frecuencia de la ganancia de cruce. Por lo tanto el ancho de banda del sistema se reduce y la respuesta del sistema se vuelve más lenta.

2.2.1.3 Redes de Adelanto-Atraso: Este caso en particular es una combinación de las redes antes descritas; se aprovechan las características de ambas redes, de modo que se obtenga el desempeño deseado.

La metodología para el diseño de controladores utilizando estas técnicas es prueba y error. Existen algunas sugerencias para seleccionar los valores de los parámetros [1], [5], [6] pero no son únicas por lo que se tienen que hacer algunas iteraciones para encontrar el controlador que cumpla con las restricciones pedidas.

2.2.2 Métodos Modernos.

Una de las grandes ventajas de estos métodos sobre los anteriores es que ahora se incluye el concepto de perturbación en los procesos. Lo que permite tener un mejor resultado en cuanto a desempeño y robustez. Además se puede encontrar el controlador por medio de procedimientos sistemáticos, y la solución del problema es más sencilla. Sin embargo los cálculos necesarios para encontrar esta solución son mucho más complejos que para los métodos clásicos, por lo que aquí se hace necesario contar con equipo de cálculo más avanzados. Entre los métodos modernos podemos mencionar a los siguientes:

2.2.2.1 Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG, Linear Quadratic Gaussian)

[7]: En este método lo que se desea es obtener un controlador tal que sea óptimo en el sentido del siguiente criterio:

$$J_1 = E \left\{ \int_0^t (x^T(\tau) Q_1 x(\tau) + u^T(\tau) Q_2 u(\tau)) d\tau \right\} + E \{ x^T(t) Q_0 x(t) \} \quad (2.6)$$

$$J_2 = E \{ \hat{x}(t) - x(t) \} \{ \hat{x}(t) - x(t) \}^T$$

Para minimizar ambos criterios, hay que resolver una ecuación Ricatti para cada caso de modo que al minimizar a J_1 se obtiene como resultado a la matriz de ganancia para la realimentación de estados y al minimizar a J_2 , como resultado se obtiene a la matriz de ganancia del observador óptimo para estimar a los estados del sistema. Al observador óptimo se le conoce también como filtro Kalman.

2.2.2.2 Control Óptimo H_2 [8]: Con este método se pretende encontrar un controlador C , tal que se minimice la función de la integral del error cuadrático:

$$\min_C \|e\|_2^2 = \min_C \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.7)$$

donde $e(j\omega)$ es el error definido como:

$$e(j\omega) = r(j\omega) - y(j\omega) \quad (2.8)$$

siendo $r(j\omega)$ el vector de señales de referencia, $y(j\omega)$ es el vector de señales medidas.

En este criterio, lo que se acota es la cantidad de energía que debe tener el error $e(j\omega)$.

Finalmente, el objetivo de diseño del controlador es tal que la energía del error resultante ante una perturbación d sea minimizado para el peor comportamiento de la familia de plantas, definidas como:

$$\Pi = \left\{ p : \frac{|p(j\omega) - \bar{p}(j\omega)|}{|p(j\omega)|} \leq \bar{l}_m(j\omega) \right\} \quad (2.9)$$

donde $p(j\omega)$ son las perturbaciones de la planta nominal en la que se tiene una cota de la perturbación definida por T_m , y $p(j\omega)$ es el modelo nominal de la planta.

El peor comportamiento de la planta será aquel que proporcione el máximo error; por lo tanto, éste es el que se debe minimizar, de modo que la ecuación que describe lo anterior es:

$$\min_c \max_{p \in \Pi} \int_0^{\infty} e^2 dt = \min_c \max_{p \in \Pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|1 + p(j\omega)C(j\omega)|^2} |v|^2 d\omega \quad (2.10)$$

donde v es el vector de señales de entrada.

Una vez resuelto el problema de optimización anterior se obtiene el controlador $C(j\omega)$.

2.2.2.3 Control Optimo H_{∞} [8]: Según este criterio lo que acota es el valor pico que se puede tener en cualquier frecuencia del error $e(j\omega)$.

$$\min_c \max_{p \in \Pi} |e(j\omega)|_{\infty} = \min_c \max_{p \in \Pi} \sup_{\omega} |e(j\omega)| < 1 \quad (2.11)$$

donde $p(j\omega)$ está descrita por la ecuación (2.9)

2.3 Método de diseño de controladores digitales vía interpolación de su respuesta en frecuencia [9],[10].

2.3.1 Antecedentes.

Como se ha mencionado en la sección anterior, existen diferentes métodos para diseñar controladores o compensadores que satisfagan especificaciones dadas en el dominio de la frecuencia. Esta sección pretende proporcionar un método alternativo de diseño, tal que dado un comportamiento descrito en el dominio de la frecuencia de un proceso, y como restricciones un conjunto arbitrario de puntos en el dominio de la frecuencia, se encuentre el controlador digital que satisfaga estas condiciones. Esto se hará al interpolar el controlador entre los puntos del conjunto de restricciones. El esquema del controlador estará formado por un banco de compensadores, cada uno de los cuales compensará la respuesta en frecuencia en malla abierta del proceso en una banda en particular. Este método puede ser considerado como una extensión de los métodos convencionales, en donde la

respuesta en frecuencia de la planta en malla abierta es compensada en algunos puntos críticos (frecuencia de cruce de ganancia, frecuencia de cruce de fase, etc.). El tratamiento hecho en este diseño está inspirado en el diseño cuantitativo de realimentación [11] y está relacionado con la idea de usar algunos puntos de la traza de Nyquist de la planta para sintonizar al controlador [12].

2.3.2 Planteamiento del problema.

Considérese una planta discreta de una sola entrada y una sola salida (SISO) lineal e invariante en el tiempo (LIT) descrita por:

$$y_t = G_p(q) u_t + d_t \quad (2.12)$$

donde u_t , y_t son la entrada y la salida de la planta respectivamente, d_t representa el efecto de las perturbaciones a la salida, $G_p(q)$ es la función de transferencia de la planta, y q es el operador corrimiento discreto. Las especificaciones de diseño están dadas en términos de un comportamiento deseado en malla cerrada descrito por:

$$\begin{aligned} G_d(e^{j\Omega}) & \quad \therefore \\ \Omega & \triangleq \{\omega_k\}_{k=0}^L \quad \therefore \\ L \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq \omega_k & < \frac{\pi}{T_s} \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde T_s es el tiempo de muestro y $G_d(e^{j\Omega})$ es la función de transferencia de la respuesta deseada valuada en el conjunto de puntos Ω .

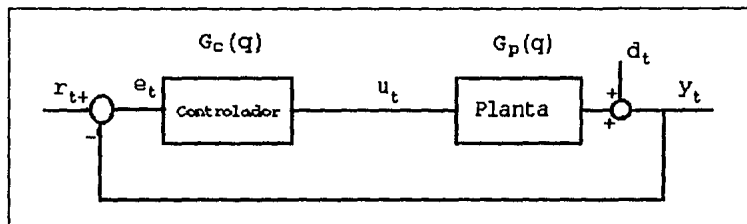
El problema es diseñar un controlador, tal que su respuesta en frecuencia en malla cerrada coincida con el conjunto de puntos Ω , que son la respuesta en frecuencia de malla cerrada deseada.

Existen muchas formas de obtener una respuesta en frecuencia deseada. Puede ser escogida de forma que se cumplan algunas restricciones especificadas en el dominio del tiempo como pueden ser el error en estado estable, rechazo a perturbaciones, tiempo de levantamiento, etc.

En este caso se debe conocer el número de polos en el semiplano derecho de la planta para que el resultado sea estable. También es posible obtener el comportamiento deseado como resultado de seguir algún tipo de procedimiento frecuencial como sería LQG [4], H_2 o H_∞ [13].

2.3.3 Diseño del controlador.

Se considerará el esquema de control con realimentación unitaria como se muestra en la ilustración siguiente:



Ilustr. 1

Sea $G_c(q)$ la función de transferencia del controlador tal que la respuesta en frecuencia deseada esté definida por:

$$G_d(e^{j\omega}) = \frac{G_p(e^{j\omega})G_c(e^{j\omega})}{1 + G_p(e^{j\omega})G_c(e^{j\omega})}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2.14)$$

Si se define a $G_o(e^{j\omega})$ como a la respuesta en frecuencia deseada en lazo abierto, entonces se tiene que:

$$G_o(e^{j\omega}) = \frac{G_d(e^{j\omega})}{1 - G_d(e^{j\omega})}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2.15)$$

entonces la ecuación (2.14) se puede expresar como:

$$G_c(e^{j\omega}) = G_p(e^{j\omega})G_o(e^{j\omega}), \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2.16)$$

Los controladores que satisfagan la ecuación (2.16) serán llamados controladores de interpolación. Es evidente que para cada frecuencia $\omega \in \Omega$, la ecuación (2.16) se puede expresar como dos ecuaciones algebraicas que proporcionan información acerca de la traza de Nyquist de la planta y del comportamiento deseado en el conjunto de Ω :

$$G_p(e^{j\omega h}) \triangleq A(k) + jB(k) \quad (2.17)$$

$$G_o(e^{j\omega h}) \triangleq A^*(k) + jB^*(k)$$

el sistema anterior puede ser resuelto de modo que proporcione los $L + 1$ puntos de la respuesta en frecuencia del controlador:

$$G_c(e^{j\omega h}) \triangleq C(k) + jD(k) \quad (2.18)$$

después de resolver el sistema:

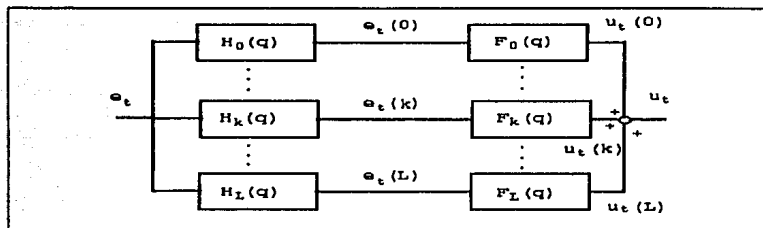
$$\begin{bmatrix} C(k) \\ D(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{A^2(k) + B^2(k)} \begin{bmatrix} A(k) & B(k) \\ -B(k) & A(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^*(k) \\ B^*(k) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

En la ecuación (2.19) se ha considerado que la respuesta en frecuencia de la planta en el conjunto de puntos Ω es diferente de cero. Además, es necesario hacer notar que como la función de transferencia de la planta es de coeficientes reales se cumple que:

$$B(0) = B^*(0) = D(0) \quad (2.20)$$

Para obtener un controlador que satisfaga la ecuación de coincidencia de la respuesta en frecuencia (2.19), se propone un esquema de compensadores por banda. Esto es, primero la señal de error e , será pasada a través de un banco de filtros paso-banda de modo que descompongan a la señal en sus componentes espectrales. Las señales obtenidas se alimentan a un banco de compensadores conectados en paralelo, cada uno de los cuales está diseñado para compensar la respuesta en malla abierta de la planta en su banda correspondiente.

La señal de control se obtiene como lo muestra la **Ilustr. 2**.



Ilustr. 2

Las ecuaciones que nos llevan a describir el comportamiento de la estructura del controlador anterior están dadas por:

$$\begin{aligned}
 u_t &= \sum_{k=0}^L u_t(k), \\
 u_t(k) &= F_k(q) e_t(k), \\
 e_t(k) &= H_k(q) e_t, \\
 e_t &= r_t - y_t,
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde $H_k(q)$ es el filtro paso-banda con frecuencia central ω_k , y $F_k(q)$ es el compensador de banda que cumpla con la ecuación de coincidencia (2.19).

Para hacer el filtro paso-banda necesario se ha escogido un filtro de interpolación de tipo Lagrange, por medio del cual se puede obtener un modelo parametrizado que interpole el conjunto de puntos Ω . Una descripción del filtro Lagrange y las condiciones que garanticen la estabilidad del sistema se dan a continuación:

2.3.3.1 El filtro Lagrange [14], [15].

Sea $G(z)$ una función de transferencia, con coeficientes reales y analítica para las siguientes condiciones:

$$|z| < \rho_0 \quad \therefore \quad 0 < \rho_0 < 1 \tag{2.22}$$

y sea su respuesta a impulso:

$$\{g_i\}_{i=0}^m \quad (2.23)$$

Se quiere aproximar la función de transferencia mediante una función de transferencia interpolada por medio de un polinomio de Lagrange [16] definido como:

$$G'(z) = \sum_{k=0}^{N-1} G(z_k) I_k(z) \quad \therefore$$

$$Z \triangleq \{z_k = e^{j\omega_k}\}_{k=0}^{N-1} \quad \therefore \quad (2.24)$$

$$0 \leq \omega_k < \frac{2\pi}{T_s}$$

donde el conjunto Z es un conjunto de N puntos diferentes alrededor del círculo unitario e $I_k(z)$ es el filtro de interpolación definido por la ecuación,

$$I_k(z) = \frac{\prod_{m=0}^{N-1} (1 - z_m z^{-1})}{\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N-1} (1 - z_m z^{-1})} \frac{1}{1 - z_k z^{-1}} \quad (2.25)$$

Como se puede ver, la respuesta en frecuencia de la ecuación (2.25) satisface la condición:

$$I_k(z_m) = \begin{cases} 1 & \text{para } m = k \\ 0 & \text{para } m \neq k \end{cases} \quad (2.26)$$

Ya que la función de transferencia $G(z)$ tiene coeficientes reales, la información de la respuesta en el intervalo $[0, \pi]$ es suficiente para encontrar la respuesta en frecuencia completa. Se considerará el caso en donde los puntos de interpolación z_k están simétricamente separados alrededor del círculo unitario con respecto al eje real con $z_0 = 1$. El caso en que se tenga un valor de $z_0 \neq 1$ puede ser tratado de forma similar.

Sea Z_s el conjunto de puntos por interpolar que están separados simétricamente uno de otro alrededor del círculo unitario con respecto al eje real (N impar), se tiene que:

$$Z_s = \{z_k = e^{j\omega_k} \mid \omega_0 = 0, \omega_k = \omega_{N-k}, \forall k \in [1, 2, \dots, L]\} \quad \therefore \quad (2.27)$$

$$L \triangleq \frac{N-1}{2}$$

Si se define el conjunto de ecuaciones,

$$A(k) = \operatorname{Re}\{G(z_k)\}, \quad B(k) = \operatorname{Im}\{G(z_k)\},$$

$$\alpha(k) = \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left\{ \prod_{m=0}^{N-1} (1 - z_m z_k^{-1}) \right\}, \quad (2.28)$$

$$\beta(k) = \frac{1}{N} \operatorname{Im} \left\{ \prod_{m=0}^{N-1} (1 - z_m z_k^{-1}) \right\}.$$

Después de algunos cálculos simples se obtiene el conjunto de ecuaciones como se puede ver a continuación.

$$\alpha(0) = \frac{2^L}{N} \prod_{m=1}^L [1 - \cos(\omega_m)], \quad \beta(0) = 0;$$

$$\alpha(k) = \frac{2^L}{N} \cos\left(\frac{N}{2} \omega_k\right) \left[\cos\left(\frac{3}{2} \omega_k\right) - \cos\left(\frac{1}{2} \omega_k\right) \right] \prod_{m=1}^L [\cos(\omega_k) - \cos(\omega_m)],$$

$$\beta(k) = -\frac{2^L}{N} \sin\left(\frac{N}{2} \omega_k\right) \left[\cos\left(\frac{3}{2} \omega_k\right) - \cos\left(\frac{1}{2} \omega_k\right) \right] \prod_{m=1}^L [\cos(\omega_k) - \cos(\omega_m)],$$

para $k = 1, 2, \dots, L$.

(2.29)

Se puede ver que el filtro cumple con las siguientes propiedades:

$$A(k) = A(N-k), \quad B(k) = -B(N-k), \quad (2.30)$$

$$\alpha(k) = \alpha(N-k), \quad \beta(k) = -\beta(N-k).$$

De las ecuaciones (2.24), (2.25), (2.28) y (2.29) se tiene que:

$$G^I(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{A(k) + jB(k)}{\alpha(k) + j\beta(k)} \frac{H_c(z)}{1 - z_k z^{-1}} \right] \quad (2.31)$$

donde $H_c(z)$ es un filtro peine definido como:

$$H_c(z) = \frac{(1 - z^{-1}) \prod_{m=1}^L (1 - 2\cos(\omega_m)z^{-1} + z^{-2})}{N} \quad (2.32)$$

El modelo de interpolación (2.31) se puede expresar en términos de coeficientes reales combinando los términos k y $N - k$ como lo muestra la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{A(k) + jB(k)}{\alpha(k) + j\beta(k)} \frac{1}{1 - z_k z^{-1}} \right. \\ & \left. + \frac{A(N-k) + jB(N-k)}{\alpha(N-k) + j\beta(N-k)} \frac{1}{1 - z_{N-k} z^{-1}} \right] H_c(z) = \\ & \left[\frac{C(k) + jD(k)}{1 - z_k z^{-1}} + \frac{C(k) - jD(k)}{1 - z_k z^{-1}} \right] \frac{H_c(z)}{\alpha^2(k) + \beta^2(k)}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde

$$\begin{aligned} C(0) &= A(0), & D(0) &= 0, \\ \begin{bmatrix} C(k) \\ D(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha(k) & \beta(k) \\ -\beta(k) & \alpha(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(k) \\ B(k) \end{bmatrix} & \text{para } k = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{A(k) + jB(k)}{\alpha(k) + j\beta(k)} \frac{1}{1 - z_k z^{-1}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{A(N-k) + jB(N-k)}{\alpha(N-k) + j\beta(N-k)} \frac{1}{1 - z_{N-k} z^{-1}} \right] H_c(z) = \\
 & \left[\frac{2C(k) - 2[C(k)\cos(\omega_k) + D(k)\sin(\omega_k)]z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_k)z^{-1} + z^{-2}} \right] \dots \\
 & \quad \dots \frac{H_c(z)}{\alpha^2(k) + \beta^2(k)}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

De las ecuaciones (2.31) - (2.35) se tiene que:

$$G^l(z) = \sum_{k=0}^L [c(k) + d(k)z^{-1}] H_k(z), \tag{2.36}$$

Donde los coeficientes son calculados a partir de la ecuación (2.34) y la expresión (2.37).

$$\begin{aligned}
 c(0) &= C(0), & d(0) &= 0, \\
 \begin{bmatrix} c(k) \\ d(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2\cos(\omega_k) & -2\sin(\omega_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(k) \\ D(k) \end{bmatrix} \\
 &\text{para } k = 1, 2, \dots, L.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

El filtro paso banda $H_k(z)$ con frecuencia central en ω_k está definido por la expresión:

$$H_0(z) = \frac{H_c(z)}{\alpha(0)} \frac{1}{1 - z^{-1}},$$

$$H_k(z) = \frac{H_c(z)}{\alpha^2(k) + \beta^2(k)} \frac{1}{1 - 2\cos(\omega_k)z^{-1} + z^{-2}}, \quad (2.38)$$

para $k = 1, 2, \dots, L$.

Para finalizar, si se tiene una respuesta deseada en los puntos de interpolación Z_k , definidos en la ecuación (2.27), el modelo de interpolación se puede obtener a partir de las ecuaciones (2.36), (2.34), (2.37), (2.38) y (2.32).

Algunas de las propiedades más importantes se mencionan a continuación:

Proposición 2.1: Sea $G(z)$ una función de transferencia que cumple con las condiciones (2.27), y $G^I(z)$ el modelo de interpolación definido por (2.36), (2.34), (2.37), (2.38) y (2.32). Entonces:

i) $G^I(z)$ es un polinomio en z^{-1} de grado $N - 1$.

ii) $G^I(z)$ interpola a $G(z)$ en los puntos z_k como se muestra a continuación:

$$G^I(z_k) = G(z_k)$$

$$z_k = e^{j\omega_k} \quad (2.39)$$

para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

iii) El error de aproximación está acotado por:

$$\|G^I - G\|_{\infty} = \sup_{\omega \in Z_k} |G^I(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})| \leq M \rho_0^N, \quad (2.40)$$

donde

$$M = M(N, \rho_0, G) > 0 \quad (2.41)$$

y crece de forma lineal con respecto a N y es mucho mayor que la unidad. ■■■

Se puede ver que la ecuación (2.40) tenderá a cero conforme N tienda a infinito. Esto significa que el error de aproximación se podrá hacer tan pequeño como se desee haciendo lo suficientemente grande a N .

Si se define el filtro paso-banda normalizado como:

$$H'_k(z) = f_k(z)H_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, L, \quad (2.42)$$

siendo $f_k(z)$ los factores de normalización definidos como:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= 1 \\ f_k(z) &= 2(\alpha(k) - [\alpha(k)\cos(\omega_k) - \beta(k)\sin(\omega_k)]z^{-1}) \\ &\text{para } k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Se puede verificar que se cumple

$$\begin{aligned} H'_0(z) &= I_0(z), \\ H'_k(z) &= I_k(z) + I_{N-k}(z), \\ &\text{para } k = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde $I_k(z)$ es el filtro de interpolación definido en (2.25) y (2.26).

Nota 2.1: Un caso particular se tiene cuando los puntos de interpolación están equiespaciados alrededor del círculo unitario. Para este caso, la implementación es de un muestreador frecuencial del modelo de interpolación [16]. En este caso se puede demostrar que la ecuación (2.29) se simplifica a:

$$\alpha(k) = 1, \quad \beta(k) = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, L, \quad (2.45)$$

y el filtro peine (2.32) se reduce a:

$$H_c(z) = \frac{1 - z^{-1}}{N} \quad (2.46)$$

Nota 2.2: Como se presenta una cancelación de polos y ceros en el círculo unitario en (2.25), para evitar inestabilidad en el filtro, en la implementación de (2.38), (2.42) y (2.43), z debe ser sustituida por:

$$z = \frac{z}{\mu} \quad (2.47)$$

donde μ es un escalar marginalmente menor a uno, de modo que la cancelación de polos y ceros se dé dentro del círculo:

$$|z| = \mu \quad (2.48)$$



Corolario 2.1: Considérese la planta (2.12) y un controlador de interpolación estable y estabilizante que cumple con la ecuación (2.16). El sistema en lazo cerrado será estable si se tienen L puntos de interpolación definidos como [15]:

$$L \geq \left\lceil \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\ln(M_c M)}{\ln(\rho_0)} \right) \right\rceil \quad (2.49)$$

donde $\lceil \bullet \rceil$ indica la parte entera, ρ_0 se define en (2.22) y depende de $G_c(q)$, M se definió en la **Proposición 2.1** y M_c [15] es mayor que cero y es una constante que depende de la planta y del controlador.



La estabilidad del controlador que se pide para el **Corolario 2.1** excluye aquellas plantas que no satisfagan la propiedad de paridad interlazada [17]. Esto

es debido a consecuencia de usar un filtro de respuesta a impulso finita (FIR) para interpolar al controlador estabilizante como se vera en la subsección siguiente.

2.3.4 Implementación del controlador a través del filtro Lagrange.

Se utilizará un filtro Lagrange para implementar el controlador definido en (2.21), lo que nos lleva a:

$$G_c(q) = \sum_{k=0}^L [c(k) + d(k)q^{-1}]H_k(q), \quad (2.50)$$

donde $H_k(q)$ son los filtros paso-banda con frecuencia central ω_k , definidos por:

$$\begin{aligned} H_0(q) &= H_c(q) \frac{1}{1 - \mu q^{-1}}, \\ H_k(q) &= H_c(q) \frac{1}{1 - 2\mu \cos(\omega_k)q^{-1} + \mu^2 q^{-2}}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

para $k = 1, 2, \dots, L$.

siendo $H_c(q)$ el filtro peine:

$$H_c(q) = (1 - \mu q^{-1}) \prod_{m=1}^L (1 - 2\mu \cos(\omega_m)q^{-1} + \mu^2 q^{-2}) \quad (2.52)$$

donde μ se define en la Nota 2.2. Los coeficientes del controlador $c(k)$ y $d(k)$ son calculados a partir de la respuesta en frecuencia del controlador en Ω (2.13) (vea (2.19)):

$$c(0) = \frac{C(0)}{\alpha(0)}, \quad d(0) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} c(k) \\ d(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \mu[\beta(k)\sin(\omega_k) - \alpha(k)\cos(\omega_k)] \end{bmatrix} \dots \quad (2.53)$$

$$\dots \begin{bmatrix} \beta(k) \\ -\mu[\beta(k)\cos(\omega_k) - \alpha(k)\sin(\omega_k)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(k) \\ D(k) \end{bmatrix}$$

para $k = 1, 2, \dots, L$.

donde $\alpha(k)$ y $\beta(k)$ son constantes definidas como:

$$\alpha(0) = 2^L \prod_{m=1}^L [1 - \cos(\omega_m)], \quad \beta(0) = 0;$$

$$\alpha(k) = 2^L \cos\left(\frac{2L+1}{2}\omega_k\right) \left[\cos\left(\frac{3}{2}\omega_k\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\omega_k\right) \right] \prod_{m=k}^L [\cos(\omega_k) - \cos(\omega_m)],$$

$$\beta(k) = -2^L \sin\left(\frac{2L+1}{2}\omega_k\right) \left[\cos\left(\frac{3}{2}\omega_k\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\omega_k\right) \right] \dots$$

$$\dots \prod_{m=k}^L [\cos(\omega_k) - \cos(\omega_m)],$$

para $k = 1, 2, \dots, L$.

(2.54)

Finalmente el controlador de interpolación implementado con el filtro Lagrange es:

$$u_i = \sum_{k=0}^L u_i(k),$$

$$u_i(k) = c(k)e_i(k) + d(k)e_{i-1}(k), \quad (2.55)$$

$$e_i(k) = H_k(q)e_i,$$

$$e_i = r_i - y_i$$

Para finalizar con esta subsección se hará un resumen del procedimiento de diseño:

2.3.4.1 Procedimiento de diseño para un controlador de interpolación Lagrange.

Parámetros de diseño:

$L + 1$ puntos de frecuencia.

Conjunto de puntos Ω definidos en (2.13).

Factor de estabilidad de los filtro μ (vea (2.51) y (2.52)).

Cota mínima σ de la magnitud de la respuesta en frecuencia de la planta para limitar el valor de la señal de control.

Datos:

Planta que cumple con (2.17).

Especificaciones en el dominio de la frecuencia:

Respuesta en frecuencia descada en malla cerrada definida en (2.13).

1^{er} Paso:

Se calcula la respuesta en frecuencia del controlador en Ω usando (2.19).

2^{do} Paso:

Se calculan los coeficientes del controlador utilizando (2.53).

3^{er} Paso:

Se implementa el controlador a través de (2.55)

2.3.5 Ejemplo Numérico.

El procedimiento de diseño se ilustrará al controlar una planta de primer orden con retardo, la cual es una buena aproximación de muchos procesos industriales [4]. La función de transferencia está dada por:

$$G(s) = \frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s + 1}, \quad (2.56)$$

donde K_p , τ y T_p son la ganancia estática del proceso, el tiempo muerto y la constante de tiempo, respectivamente. Sus valores fueron encontrados a partir de experimentos hechos en un modelo térmico de laboratorio y los valores obtenidos fueron:

$$\begin{aligned} K_p &= 1, \\ T_p &= 2, \\ \tau &= 1. \end{aligned} \quad (2.57)$$

La función de transferencia a impulso de la planta con un retén de orden cero cuando se utiliza un tiempo de muestreo de un cuarto de segundo está dada por:

$$\begin{aligned} T_s &= 0.25 \text{ s}, \\ G_p(q) &= \frac{0.1175q^{-5}}{1 - 0.8825q^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

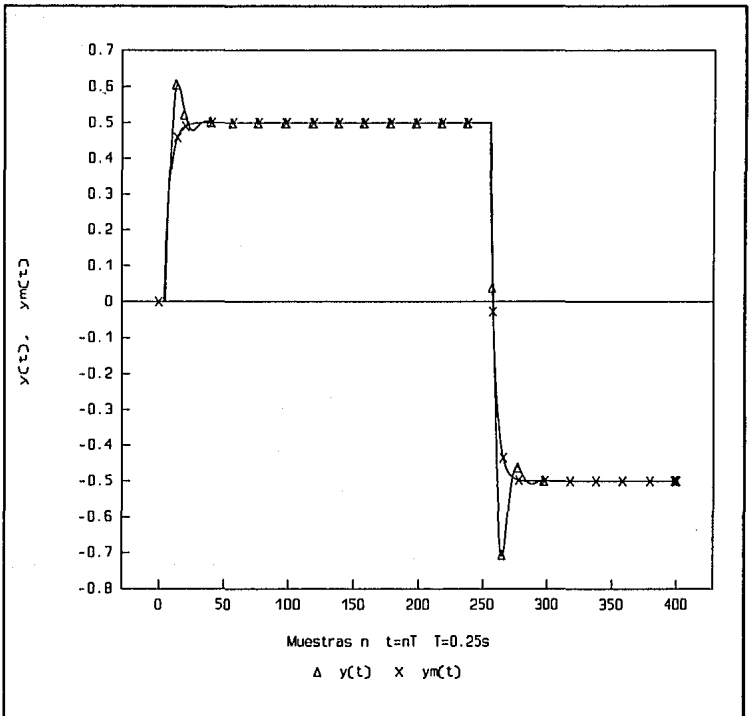
Las especificaciones fueron dadas en términos de una función de transferencia con la respuesta en frecuencia deseada en lazo cerrado:

$$G_d(q) = \frac{0.1106q^{-5}}{1 - 0.7788q^{-1}}, \quad (2.59)$$

en 3 puntos de frecuencia $\Omega = \{0, 5.0265, 10.0531\}$, la que corresponde a un sistema con constante de tiempo igual a 1, y ganancia en estado estable igual a 0.5. Los parámetros del controlador se dan en la siguiente tabla:

k	Frec. ω_k	Resp. Frec. Planta		Coef. Controlador	
		$A(k)$	$B(k)$	$c(k)$	$d(k)$
0	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
1	5.027	0.069	-0.080	2.123	-0.639
2	10.053	0.063	-0.019	2.124	1.703

En la siguiente gráfica se puede ver la respuesta deseada en malla cerrada y la respuesta obtenida con el controlador y la planta ante una entrada escalón. El sobrepaso que se presenta es debido a que el tiempo muerto es muy grande (4 muestras).



Ilustr. 3

III. Control adaptable de un proceso térmico de laboratorio [18].

3.1 Esquema del control adaptable.

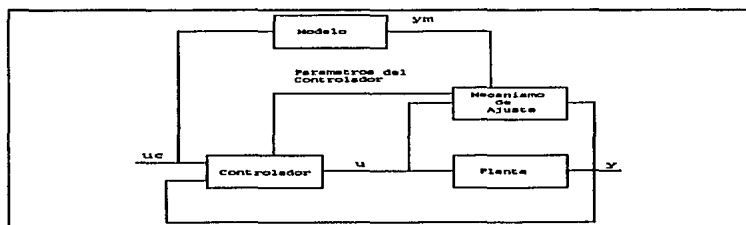
Se ha definido a los controladores adaptables como aquellos controladores en los cuales cambian su dinámica conforme los cambios que se presenten en las dinámicas de la planta a controlar.

Dentro de los esquemas de control adaptable existen dos técnicas básicas [19]. Una, calcula los parámetros del controlador directamente cuando varía la planta, mientras que la otra primero identifica los parámetros de la planta de acuerdo a una estructura especificada, y a partir de estos valores se ajusta el controlador. Este tipo de control adaptable se llama indirecto.

Como ejemplo de un control adaptable directo se tiene el siguiente esquema:

3.1.1 Sistemas Adaptables a un Modelo de Referencia (Model-Reference Adaptive Systems, MRAS).

Este esquema fue originalmente propuesto para resolver problemas en los que las especificaciones se dan en función de un modelo de referencia que proporciona el comportamiento ideal del proceso ante una señal de comando. Un diagrama de bloques de un sistema MRAS se tiene en la siguiente ilustración.



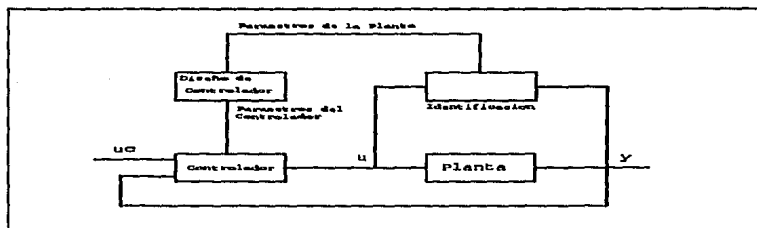
Ilustr. 4

En este caso el modelo de referencia se encuentra en paralelo con el sistema. El regulador se puede considerar de dos lazos: uno interno que es el lazo de retroalimentación del proceso y el regulador. Los parámetros del regulador son ajustados por el lazo externo de modo que el error entre las salidas del proceso y de el modelo de referencia y_m sea pequeño. El lazo externo también es un lazo del regulador. El problema consiste en determinar el mecanismo de ajuste de modo que el sistema sea estable, y esta a su vez determina que el error e tienda a cero.

Como ejemplo de un controlador adaptable indirecto se tiene el siguiente esquema:

3.1.2 Reguladores Sintonizados por sí mismos (Self-Tuning Regulators, STR).

El esquema descrito anteriormente es de los llamados directos porque la regla de ajuste de los parámetros del regulador se modifican directamente. Un esquema diferente se obtiene si los parámetros del regulador se ajustan a partir de la estimación de algunos parámetros de el proceso y una regla diseño que haga uso de estos parámetros. Un diagrama de bloques de este esquema se presenta en la siguiente ilustración.



Ilustr. 5

Este regulador adaptable también se puede considerar compuesto de dos lazos, el lazo interno formado por la retroalimentación de el regulador y el proceso. Los parámetros de el regulador se ajustan por medio de el lazo

externo, que se compone de un estimador recursivo de parámetros y una regla de diseño que usa estos últimos.

Como se puede observar, ambos esquemas son muy parecidos, aunque el esquema **MRAS** se originó a partir de un problema de un servomecanismo determinístico y el esquema **STR** de un problema de regulación estocástica.

Sin importar cuales fueron los orígenes que motivaron la creación de cada uno de estos esquemas, se puede ver que ambos tienen en común los dos lazos, uno interno que es la retroalimentación de el proceso y el regulador. Los parámetros se ajustan usando el lazo externo en ambos casos. Sin embargo el ajuste de parámetros hecho por el lazo externo para el caso **MRAS** se hace de manera directa, mientras que el caso **STR**, el ajuste de parámetros se hace vía estimación del proceso y una regla de diseño. Si bien existen diferencias entre los dos esquemas, estas no son fundamentales ya que los sistemas descritos como **STR** pueden ser modificados de modo que los parámetros del regulador se modifiquen directamente.

3.2 Identificación de la respuesta en frecuencia.

Como se vio en el capítulo anterior se puede obtener un controlador de interpolación si conocemos el comportamiento de la planta y un conjunto de restricciones definidas en el dominio de la frecuencia. Pero si la dinámica de la planta varía y se quiere seguir cumpliendo con las especificaciones deseadas es necesario que el controlador sea adaptable. Esto significa que se ajustaran los parámetros del controlador acuerdo y como cambie la dinámica de la planta.

El siguiente procedimiento necesita la respuesta en frecuencia de la planta en un conjunto de puntos Ω . En control adaptable, esto se logra al hacer una identificación en línea. Entre muchos algoritmos existentes [20], [21], [22], se utilizará el siguiente esquema para identificar la respuesta en frecuencia de la planta en el conjunto de puntos Ω (2.13).

3.2.1 Consideraciones sobre la planta y propósito [14].

Considérese a una planta lineal e invariante en el tiempo descrita en la ecuación (2.12). Supóngase que la planta es asintóticamente estable, es decir,

$$|g_t| \leq M_g \rho_0^t \quad \text{para } t \geq 0 \quad (3.1)$$

donde $M_g > 0$, y $0 < \rho_0 < 1$. Esto significa que su función de transferencia sea analítica en:

$$|z| > \rho_0 \quad (3.2)$$

sin polos repetidos en:

$$|z| = \rho_0 \quad (3.3)$$

y que se cumplan las siguientes restricciones:

$$\sup |G_p(z)| \leq M_g \frac{\rho}{\rho - \rho_0},$$

(3.4)

$$\text{para } \rho \in (\rho_0, 1)$$

$$|z| = \rho$$

El propósito es estimar la respuesta en frecuencia de un número de puntos arbitrarios definidos en la ecuación (2.13) donde la frecuencia inicial es cero. Para lograr esto se considerará la parametrización de la respuesta en frecuencia de la planta dada en la ecuación (2.17).

El problema de identificación entonces es estimar los parámetros $A(k)$ y $B(k)$ a partir de las mediciones de la entrada y la salida. Los pasos a seguir son:

Disñar un esquema de identificación (una estructura de identificación y un algoritmo de identificación).

Escoger una entrada con las propiedades deseadas para lograr la convergencia de los parámetros.

3.2.2 Estructura del identificador.

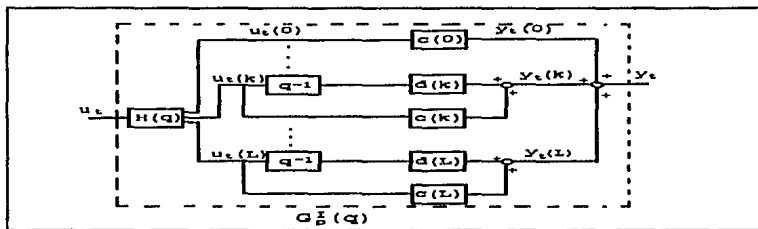
Se considerará un identificador implementado por un filtro Lagrange. Sea el modelo de interpolación definido por las ecuaciones (2.36), (2.38) y (2.32). A partir de (2.34) y (2.37) se tiene que la representación de $\{c(k), d(k)\} \rightarrow \{A(k), B(k)\}$ está dado por:

$$A(0) = c(0), \quad B(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} A(k) \\ B(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{2[\alpha^2(k) + \beta^2(k)]} \begin{bmatrix} \alpha(k) + \beta(k) \cot(\omega_k) & \beta(k) \csc(\omega_k) \\ \beta(k) - \alpha(k) \cot(\omega_k) & -\alpha(k) \csc(\omega_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

para $k = 1, 2, \dots, L$.

Por lo tanto, el problema de identificar los $L + 1$ puntos de la respuesta en frecuencia se reduce a estimar los parámetros $c(k)$ y $d(k)$ del modelo de interpolación (2.36), una representación del esquema se puede ver a continuación.



Ilustr. 6

3.2.3 Algoritmo de estimación.

Se utilizará el algoritmo de gradiente normalizado para estimar los parámetros $c(k)$ y $d(k)$. A continuación se explica brevemente en que consiste este algoritmo.

3.2.3.1 Algoritmo de gradiente normalizado [19].

Esta técnica es un algoritmo simplificado del principio de mínimos cuadrados formulado por Gauss y es particularmente simple si el modelo tiene la característica de ser lineal en los parámetros. Para este caso el estimado que sea el mínimo cuadrado se puede obtener de forma analítica.

El principio de mínimos cuadrados fue formulado por Gauss para determinar las órbitas de los planetas. De acuerdo al principio, los parámetros desconocidos deben ser escogidos de modo que:

"La suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores medidos y los valores calculados, multiplicados por números que proporcionan el grado de precisión deseado, sea mínima."

El modelo matemático que describe lo anterior se puede expresar como:

$$y(t) = \varphi_1(t) c_1 + \varphi_2(t) c_2 + \dots + \varphi_n(t) c_n = \varphi^T(t) c \quad (3.6)$$

donde y es la variable observada, c_1, c_2, \dots, c_n son los parámetros desconocidos, y $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ son funciones conocidas que pueden depender a su vez de otras variables conocidas. El modelo está indexado con una variable t , que normalmente denota tiempo. A las variables φ_i se les llama variables de regresión o regresores, y el modelo (3.6) se le llama como el modelo de regresión. Los vectores:

$$\begin{aligned} \varphi^T(t) &= [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \dots \quad \varphi_n(t)] \\ c^T &= [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \end{aligned} \quad (3.7)$$

son definidos para simplificar la notación. Si se tienen pares de mediciones y regresores $\{(y(i), \varphi(i)), i = 1, 2, \dots, t\}$ a partir de experimentos, el problema es el determinar los parámetros de tal forma que las aproximaciones obtenidas con (3.6) sean lo más cercanas posibles a las mediciones de las variables $y(i)$ en el sentido del criterio de mínimos cuadrados. Como las variables medidas son lineales en los parámetros φ , y el criterio es cuadrático, el problema tiene solución analítica. Si se define a la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(t)]^T \\
 E(t) &= [\varepsilon(1) \ \varepsilon(2) \ \dots \ \varepsilon(n)]^T \\
 \Phi(t) &= \begin{pmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(t) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$P(t) = (\Phi^T(t) \Phi(t))^{-1} = \left(\sum_{i=1}^t \varphi(i) \varphi^T(i) \right)^{-1}$$

donde los residuos $\varepsilon(i)$ se definen como:

$$\varepsilon(i) = y(i) - \hat{y}(i) = y(i) - \varphi^T(i) c \tag{3.9}$$

El error mínimo cuadrático se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 V(c, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \varepsilon(i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (y(i) - \varphi^T(i) c)^2 \\
 &= \frac{1}{2} E^T(t) E(t) = \frac{1}{2} \|E\|^2 \quad \therefore
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$E(t) = Y(t) - \hat{Y}(t) = Y(t) - \Phi(t) c$$

La solución al problema de mínimos cuadrados se proporciona en el siguiente corolario.

Corolario 3.1: La función de (3.10) será mínima para los parámetros \hat{c} tal que,

$$\Phi(t)^T \Phi(t) \hat{c}(t) = \Phi^T Y(t) \tag{3.11}$$

Si la matriz $\Phi^T \Phi$ es no-singular, el mínimo será único y dado por:

$$\hat{\zeta}(t) = (\Phi^T(t)\Phi(t))^{-1}\Phi^T(t)Y(t) \quad (3.12)$$

■ ■ ■

Para el caso de controladores adaptables las observaciones son obtenidas de forma secuencial en tiempo real. Es conveniente en hacer que los cálculos sean recursivos de modo que se reduzca el tiempo de cálculo. Los cálculos pueden ser hechos de modo que los resultados obtenidos en el tiempo $t-1$ pueden ser utilizados para obtener el estimado al tiempo t .

La solución a (3.12) de forma recursiva se puede expresar como: Sea $\hat{\zeta}(t-1)$ el mínimo cuadrado estimado basado en las mediciones al tiempo $t-1$. Se asume que la matriz $\Phi^T\Phi$ es invertible para todo t . A partir de la definición de $P(t)$ que:

$$P(t)^{-1} = P(t-1)^{-1} + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (3.13)$$

El mínimo cuadrado estimado $\hat{\zeta}(t)$ está dado por (3.12). De (3.12) y (3.13) se obtiene que la estimación recursiva de mínimos cuadrados al tiempo t se expresa como:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(t) &= \hat{\zeta}(t-1) + K(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\zeta}(t-1)] \\ K(t) &= P(t)\varphi(t) = P(t-1)\varphi(t)[I + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]^{-1} \\ P(t) &= [I - K(t)\varphi^T(t)]P(t-1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

El algoritmo puede ser simplificado para evitar tantas operaciones a costa de un velocidad de convergencia lenta. Una solución sencilla es la propuesta por Kaczmarz como se muestra a continuación. Para describir el algoritmo, se considera al parámetro desconocido como un elemento de \mathbb{R}^n . Una medición

$$y(t) = \varphi^T(t)\zeta \quad (3.15)$$

determina la proyección del vector de parámetros ζ sobre el vector $\varphi(t)$. A partir de esta interpretación se puede ver que se necesitaran n mediciones para que el vector ζ sea determinado de forma unívoca.

Considérese que el estimado $\hat{z}(t-1)$ y que la nueva medición (3.15) se tienen disponibles. Como la medición $y(t)$ proporciona información solo en la dirección de $\varphi(t)$ es válido ajustar al parámetro por medio de:

$$\hat{z}(t) = \hat{z}(t-1) + \alpha \varphi(t) \quad (3.16)$$

en donde el parámetro α se escoge como:

$$y(t) = \varphi^T(t) \hat{z}(t) = \varphi^T(t) \hat{z}(t-1) + \alpha \varphi^T(t) \varphi(t) \quad \therefore$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi^T(t) \varphi(t)} [y(t) - \varphi^T(t) \hat{z}(t-1)] \quad (3.17)$$

Finalmente la formula para actualizar el parámetro esta dada por:

$$\hat{z}(t) = \hat{z}(t-1) + \frac{\varphi(t)}{\varphi^T(t) \varphi(t)} [y(t) - \varphi^T(t) \hat{z}(t-1)] \quad (3.18)$$

En la práctica para evitar el posible problema que $\varphi(t) = 0$, el algoritmo de proyección se modifica de la siguiente forma:

$$\hat{z}(t) = \hat{z}(t-1) + \frac{\gamma \varphi(t)}{\beta + \varphi^T(t) \varphi(t)} [y(t) - \varphi^T(t) \hat{z}(t-1)] \quad \therefore$$

$$\beta \geq 0, \quad 0 < \gamma < 2 \quad (3.19)$$

■■■

Regresando al procedimiento de diseño, sea

$$c(k) = [c(k) \quad d(k)]^T \quad (3.20)$$

el vector de parámetros de la banda k , y $\hat{z}_i(k)$ su estimado al instante t , que es actualizado por:

$$\hat{z}_{i+1}(k) = \hat{z}_i(k) + \gamma(k) \frac{\varphi_i(k) \varepsilon_i(k)}{1 + \varphi_i^T(k) \varphi_i(k)}, \quad (3.21)$$

para $k = 0, 1, \dots, L$,

donde

$$\begin{aligned} \varphi_i(k) &\triangleq [u_i(k) \ u_{i-1}(k)]^T, \\ u_i &= H_k(q) u_i, \end{aligned} \quad (3.22)$$

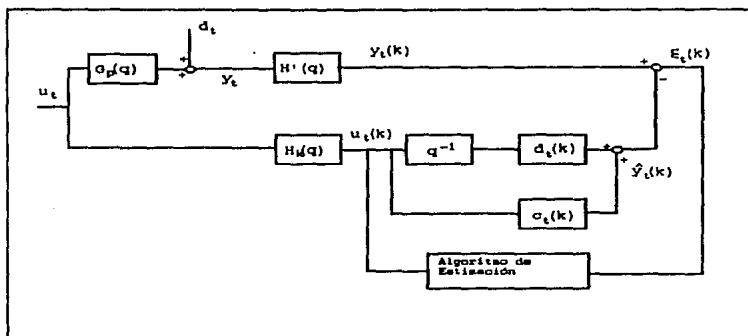
y el regresor es:

$$\varepsilon_i(k) \triangleq y_i(k) - \hat{y}_i(k), \quad (3.23)$$

con

$$\begin{aligned} y_i(k) &= H'_k(q) y_i(k), \\ \hat{y}_i(k) &= \varphi_i^T(k) \hat{z}_i(k), \end{aligned} \quad (3.24)$$

es el error de estimación, donde $H'_k(q)$ son los filtros paso-banda normalizados definidos en (2.42) y (2.43). $\gamma(k)$ es un parámetro de diseño, $0 < \gamma(k) < 2$ y se puede ver su representación en el siguiente esquema.



Ilustr. 7

Nota 3.1: El uso de el filtro paso-banda normalizado en (3.24) tiene el fin de que el lóbulo principal de la respuesta en frecuencia del $H'_k(q)$ sea uno en la parametrización.

3.2.4 Análisis de convergencia.

La razón de esta sección es establecer las condiciones de la señal de entrada para poder lograr la convergencia de los parámetros estimados a los verdaderos. Primero, se define la riqueza de una señal en términos de su energía en una banda de frecuencia.

Definición 3.1: Sea la transformada de Fourier de una señal x , definida por:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e^{-j\omega i} \quad (3.25)$$

Se dice que x_i es una señal rica en la banda de frecuencia k , cuya frecuencia central es ω_k y de ancho de banda $2\bar{\omega}_k$, si para alguna constante positiva $\sigma(k)$ se cumple:

$$\int_{\omega_1 - \bar{\omega}_k}^{\omega_2 + \bar{\omega}_k} |\chi(e^{-j\tau})|^2 d\tau \geq \sigma(k) \quad (3.26)$$

■■■

Sea el vector de error paramétrico $\bar{z}_k(k)$ definido como

$$\begin{aligned} \bar{z}_k &= \hat{z}_k(k) - z(k) \\ &= [\hat{z}_k(k) \quad \hat{d}_k(k)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

su comportamiento esta dado por el siguiente teorema [14].

Teorema 3.1: Considérese el esquema de identificación (2.36), (2.38), (2.32), (3.5) - (3.24). Supóngase que la planta (2.12) satisface a (3.1). Entonces:

i) Si u_k es una señal rica en la banda de frecuencia k entonces:

$$\bar{z}_k(k) \rightarrow z(k) \triangleq \{c \in \mathbb{R}^2 \mid |c| \leq R_k\} \quad (3.28)$$

exponencialmente, donde $R_k = R_k(N, \gamma_0(k), d_0)$ es una constante positiva, y d_0 es la cota de las perturbaciones d_k .

ii) Si u_k es una señal senoidal con frecuencia $\omega = \omega_k$ y $d_k(k) = 0$, entonces $\bar{z}_k(k) \rightarrow 0$ exponencialmente.

■■■

3.3 Compensación adaptable de la respuesta en frecuencia.

3.3.1 Algoritmo de identificación adaptable de la respuesta en frecuencia.

Parámetros de diseño:

$\gamma(k)$ = ganancia de adaptación $k = 0, 1, \dots, L$

Entradas:

Señales u_k, y_k .

Salidas:

Estimado de la respuesta en frecuencia en el tiempo t : $\{A_i(k), B_i(k)\}_{k=0}^L$.

1^{er} Paso:

Actualizar el parámetro $\zeta_i(k)$ utilizando la ecuación (3.21).

2^{do} Paso:

Calcular el estimado de la respuesta en frecuencia de la planta al tiempo t $\{A_i(k), B_i(k)\}_{k=0}^L$ usando (3.5).

3.3.2 Control adaptable.

Ahora se considerará el siguiente problema de control adaptable: dada una planta estable, lineal e invariante con el tiempo, y una respuesta en frecuencia deseada en un conjunto de puntos, diseñese un controlador adaptable tal que la respuesta en frecuencia en lazo abierto coincida asintóticamente en el conjunto de puntos deseados.

Se solucionó el problema al combinar el procedimiento de diseño del controlador con el algoritmo de identificación adaptable. En la práctica, se pueden conocer las cotas de la respuesta en frecuencia de la planta. Esta información se incorpora en el diseño del controlador adaptable como se muestra en el siguiente algoritmo:

Información a priori:

$$\begin{aligned} A_{\min}(k) &\leq A(k) \leq A_{\max}(k) , \\ B_{\min}(k) &\leq B(k) \leq B_{\max}(k) , \end{aligned} \quad (3.29)$$

para $k = 0, 1, \dots, L$.

Para cada tiempo de muestreo:

1^{er} Paso:

Identifíquese la respuesta en frecuencia de la planta en el conjunto de puntos Ω $\{A_i(k), B_i(k)\}_{k=0}^L$ usando el algoritmo de identificación adaptable de la respuesta en frecuencia

2^{do} Paso:

Haga las siguientes asignaciones:

$$A(k) = \begin{cases} A_{\max}(k), & \text{si } A_f(k) > A_{\max}(k) \\ A_{\min}(k), & \text{si } A_f(k) < A_{\min}(k) \\ A_f(k), & \text{para otro caso} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$B(k) = \begin{cases} B_{\max}(k), & \text{si } B_f(k) > B_{\max}(k) \\ B_{\min}(k), & \text{si } B_f(k) < B_{\min}(k) \\ B_f(k), & \text{para otro caso} \end{cases}$$

3^{er} Paso:

Actualícense los coeficientes del controlador utilizando los pasos 1 - 3 de procedimiento de diseño para un controlador de interpolación de Lagrange (ver página II-19).

3.4 Resultados de experimentos.

Los experimentos fueron realizados en un proceso térmico de laboratorio que a continuación se describe.

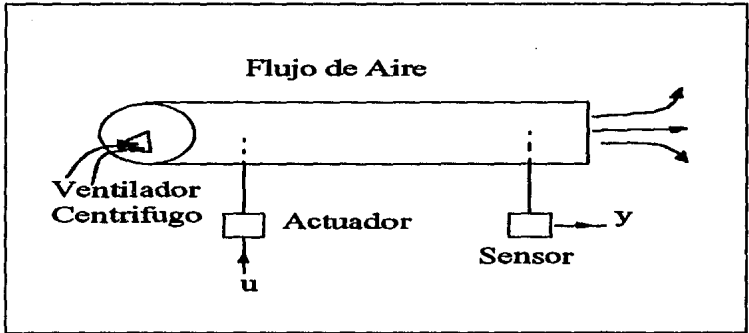
3.4.1 Descripción del proceso térmico de laboratorio [23].

El equipo utilizado es un proceso térmico PT326 fabricado por Feedback Instruments LTD., tiene las características básicas de una planta grande como son: un retardo en el sistema, comportamiento no lineal en algunos rangos y una respuesta no muy rápida.

En este equipo, se hace circular aire a temperatura ambiente a través de una rejilla que se calienta y finalmente por un tubo de plástico. El proceso consiste en calentar el aire que fluye por el tubo a una temperatura deseada. Además el proceso cuenta con un controlador de tipo proporcional, que se puede, o no conectar al proceso. Para este experimento en particular no se utilizó esa parte.

A la entrada de el ventilador se tiene una garganta que se puede variar de modo que se modifique la dinámica de la planta y se maneja de forma manual, como actuador para calentar la rejilla se tiene un tiristor que se encarga de la etapa de potencia, y como sensor se tiene un termistor que mide la temperatura del aire y proporciona como salida una señal de voltaje.

Una representación esquemática del proceso se tiene a continuación:



Ilustr. 8

El intercambiador de calor presenta algunas no linealidades debidos al actuador y al sensor que se manifiestan como variaciones de la ganancia estática del proceso en diferentes rangos de operación.

3.4.2 Descripción de la implementación del controlador.

Para implementar el controlador digital adaptable se usó una computadora PC con una tarjeta de conversión Analógica-Digital, Digital-Analógica LabMaster [24]. El algoritmo fue programado en Turbo Pascal.

3.4.3 Especificaciones de diseño.

Como se mencionó anteriormente, la planta presenta algunas no linealidades que son reflejadas en el valor de la ganancia estática, de modo lo primero que se hizo fue el identificar este comportamiento. En la ? se muestra el valor identificado de la ganancia estática $A(0)$ en diferentes rangos de operación cuando la planta fue excitada por una señal aleatoria uniformemente distribuida entre el intervalo de $[0,1]$ más una componente de corriente directa (ver Ilustr. 9).

En todos los experimentos el tiempo de muestreo se escogió de $T_s = 0.25$ s, lo cual proporciona una frecuencia de Nyquist de 12.56 rad/s. Las especificaciones en el dominio de la frecuencia fueron dadas en términos de la respuesta en frecuencia de un comportamiento en lazo cerrado descrito por:

$$G_d(q) = \frac{0.02q^{-1}}{1 - 0.92q^{-1}} \quad (3.31)$$

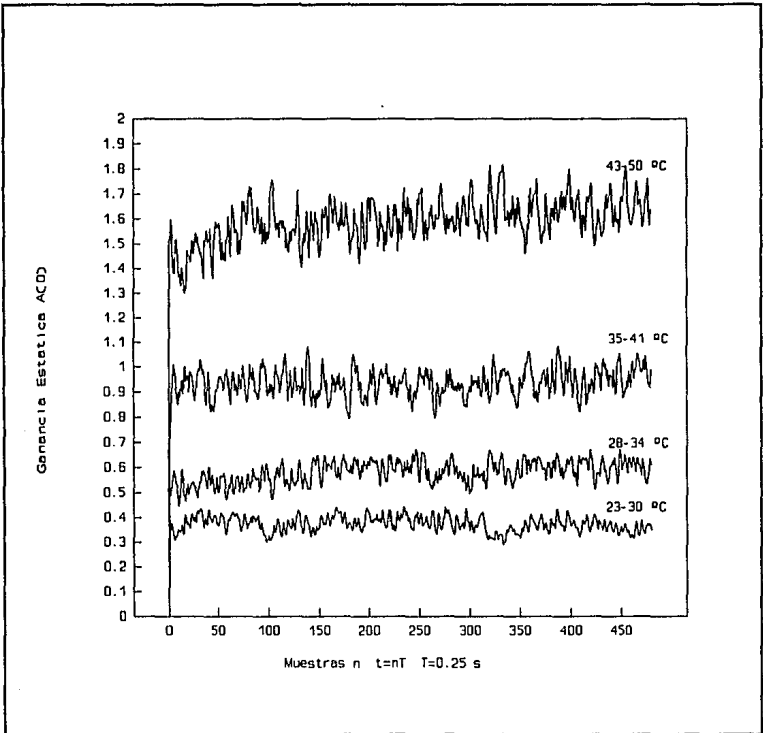
en $L + 1 = 4$ frecuencias $\Omega = \{0, 1, 5, 10\}$, que corresponden a un sistema de primer orden con constante de tiempo igual a 3 s, y una ganancia en estado estable igual a 0.25 . La respuesta en frecuencia descada en malla abierta se obtuvo con (2.15) y (2.17).

k	Frec. ω_k	Gen. Adap.	Datos a priori de la planta.			
		$\gamma(k)$	$A_{min}(k)$	$A_{max}(k)$	$B_{min}(k)$	$B_{max}(k)$
0	0.0	0.1	0.5	2.5	-----	-----
1	1.0	0.1	-1.0	5.0	-1.0	5.0
2	5.0	0.1	-1.0	5.0	-1.0	5.0
3	10.0	0.1	-1.0	5.0	-1.0	5.0

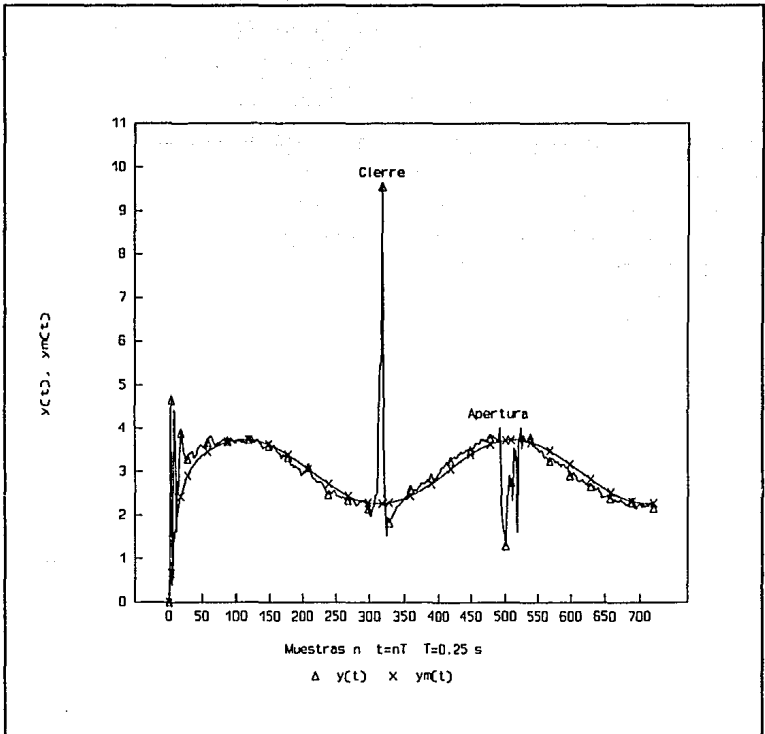
3.4.3 Resultados de experimentos.

El propósito del primer experimento es el mostrar el comportamiento del sistema con el control adaptable cuando la dinámica de la planta cambia. En este experimento, el intercambiador de calor trabaja en el rango de

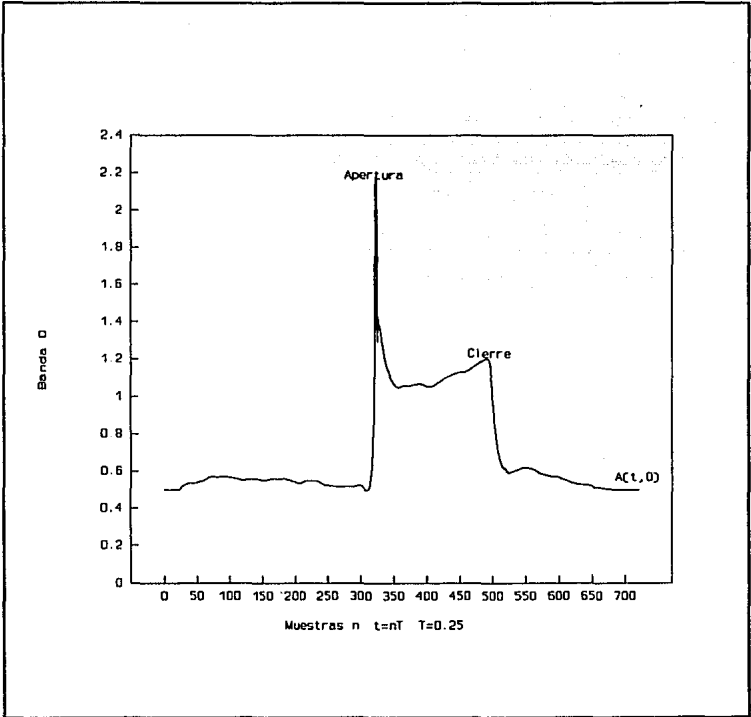
temperaturas de 23° C a 30° C. Durante la operación la dinámica de la planta se varia al cerrar la garganta de 170° a 40° y después se regresa la garganta a su condición inicial de 170° de abertura. El resultado se puede ver en **Ilustr. 10 a Ilustr. 14**



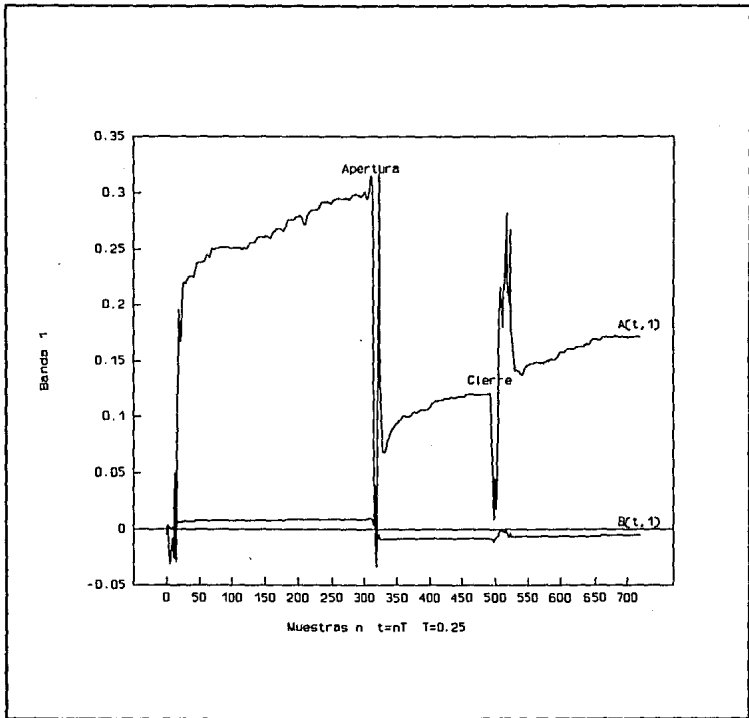
Ilustr. 9



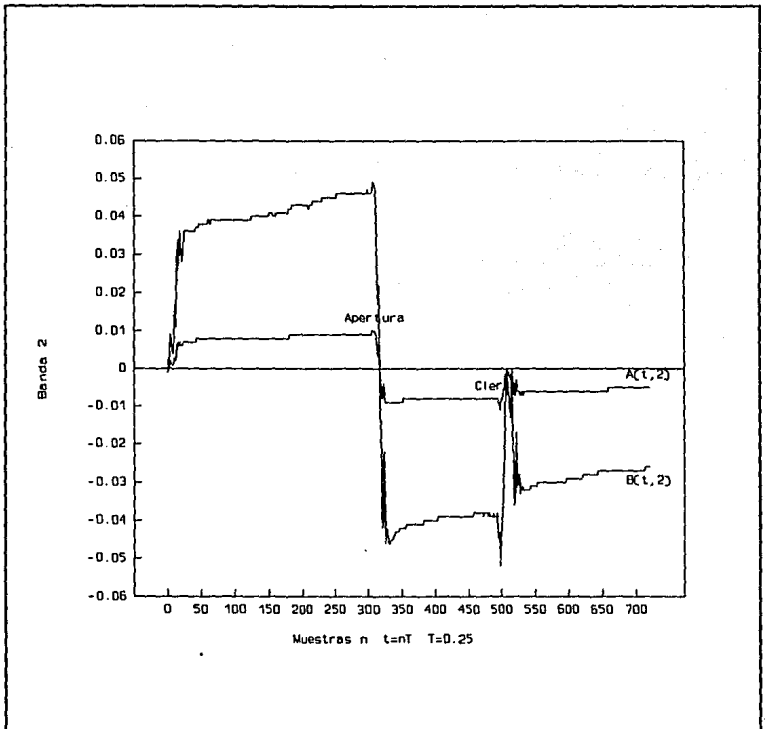
Ilustr. 10



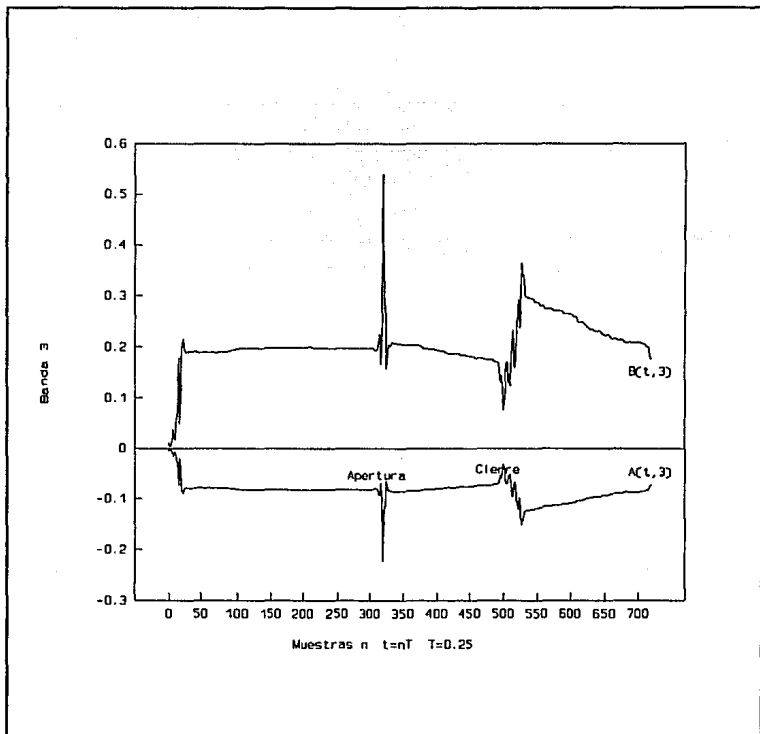
Ilustr. 11



Ilustr. 12



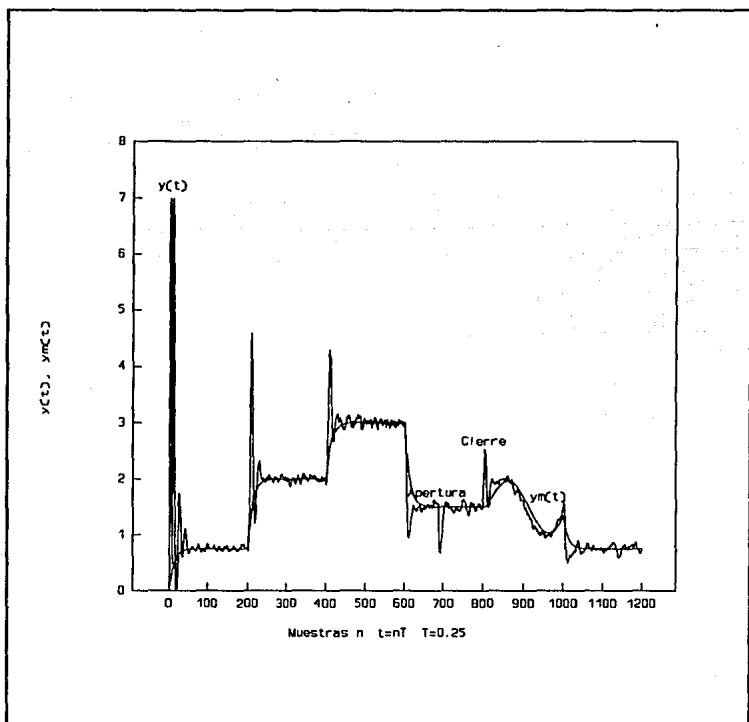
Ilustr. 13



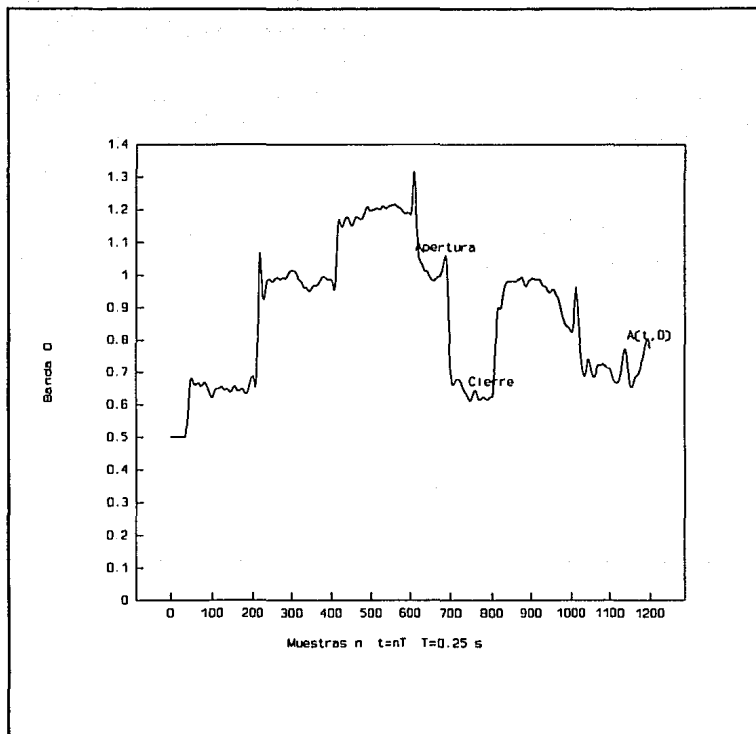
Ilustr. 14

La **Ilustr. 10** muestra la respuesta de la planta en malla cerrada y la respuesta deseada ($G_d(q)r_t$) ante la señal referencia $r_t = 12 + 3\text{Sen}(0.0628t)$. La respuesta en frecuencia de la planta en el conjunto de puntos Ω se muestra en **Ilustr. 11** a **Ilustr. 14**.

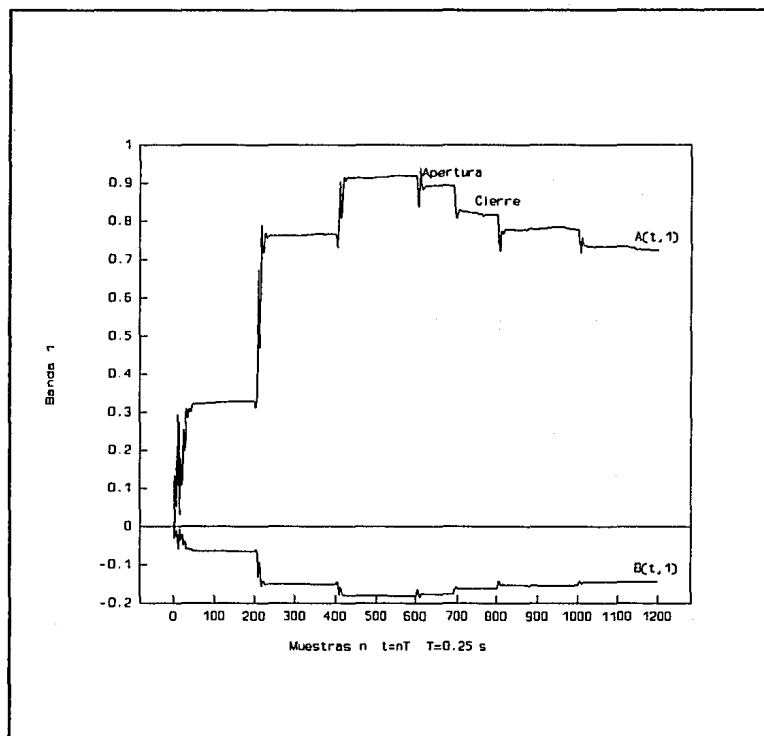
El siguiente experimento muestra el comportamiento del sistema en malla cerrada ante diferentes rangos de operación. En este caso también se varió la dinámica de la planta al abrir la garganta de 20° a 40° y regresarla a su condición inicial de 20° , los resultados se muestran en **Ilustr. 15** a **Ilustr. 19**.



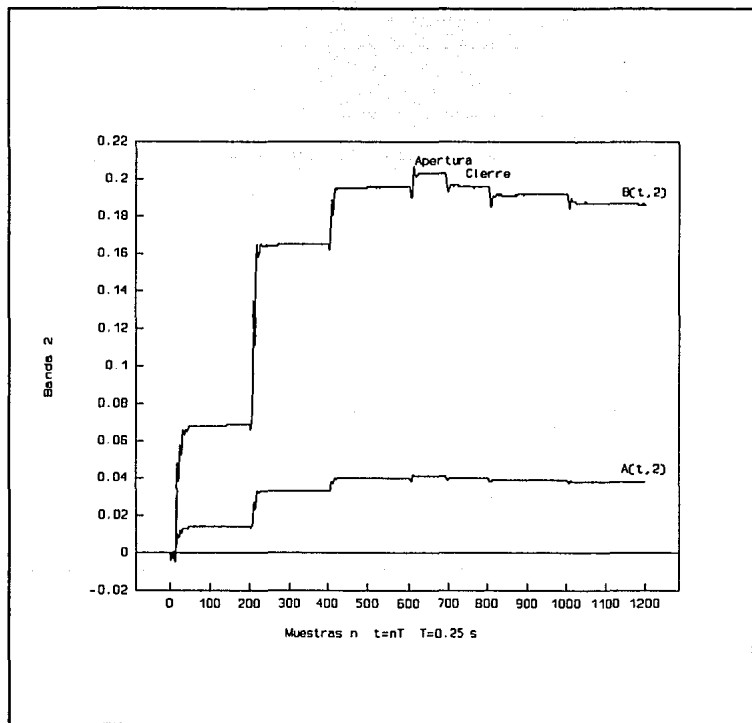
Ilustr. 15



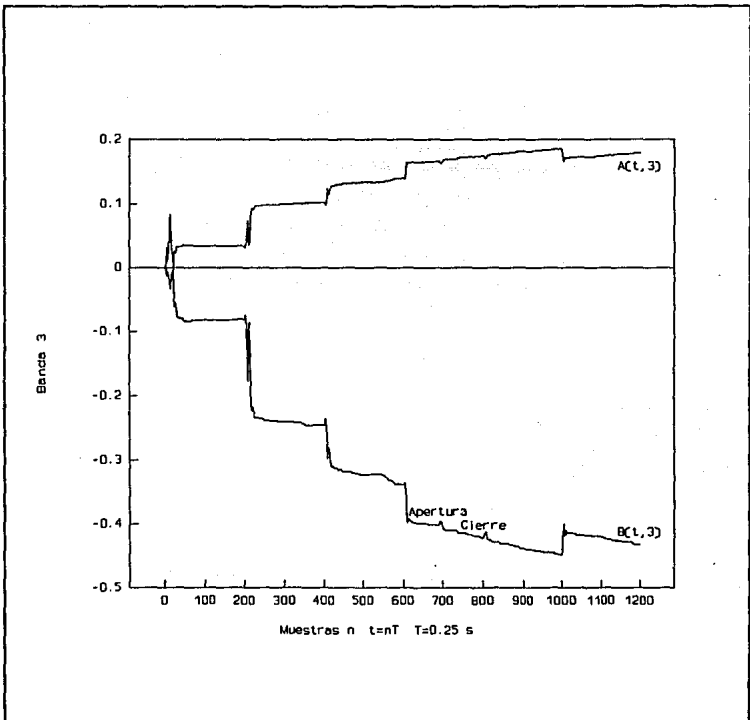
Ilustr. 16



Ilustr. 17



Ilustr. 18



Ilustr. 19

La **Ilustr. 15** muestra la respuesta en malla cerrada de la planta en diferentes puntos de operación. Se puede ver que la respuesta en frecuencia de la planta en el conjunto Ω (**Ilustr. 16 a Ilustr. 19**) varía de un conjunto de valores de convergencia a otro de acuerdo al cambio de la señal de referencia.

IV. Diseño de un controlador de precompensación adaptable simple [25].

4.1 Introducción.

En muchos problemas de control de procesos, se requiere mantener la salida del proceso alrededor de un valor fijo a pesar de la presencia de ruidos e incertidumbres sobre el mismo (no-linealidades, variaciones en parámetros del proceso, etc.). Esto se logra mediante reajustar el controlador cada vez que se detecte un deterioro en el desempeño del sistema de control. El ajuste del controlador no es una tarea fácil, y necesita cierta experiencia para realizarlo. En este capítulo se propone una solución a este problema a través de una precompensación adaptable, la cual se puede añadir al sistema de control existente sin modificación de la configuración del sistema.

La precompensación que se considera aquí consiste en estimar la ganancia estática del sistema de control existente (el proceso más el controlador), y usarlo para el ajuste del controlador de precompensación, cuya función de transferencia sea inversa a la función de transferencia del sistema en malla cerrada en el estado estacionario, de modo que se cancelen las contribuciones del proceso con las contribuciones del controlador de precompensación. El esquema de control considerado aquí es suficientemente simple que puede ser entendido por un ingeniero de aplicación, e implementarse en un microprocesador de velocidad y costo reducido.

Las ventajas de esta precompensación adaptable, aparte de su simplicidad son:

- No hay problema de excitación de señal siempre y cuando la referencia sea diferente de cero.

- Se puede conectar este controlador adaptable a un sistema de control existente con el fin de mejorar el desempeño sin modificar la configuración del sistema en cuestión.

El lazo de precompensación no interviene en la estabilidad del sistema.

Al tipo de solución propuesto se le llama control inverso y ha sido desarrollado e implementado en procesamiento digital de señales en donde el objetivo es el de cancelar el ruido que se presente en una señal [26].

El control inverso ha sido aplicado usando otro tipo de esquemas en donde sólo se invierte la planta para obtener el controlador [27], [28], [29]. Este

esquema presenta el problema de que si la planta es de fase no mínima, el controlador resultante será inestable. Otro problema que presenta este tipo de control es que al invertir el proceso se puede obtener una función de transferencia no causal. En tal caso, hay que añadir un lazo de retardo con el cual se obtiene una solución aproximada.

4.2 Controlador de precompensación.

4.2.1 Objetivo de control.

Considérese al proceso:

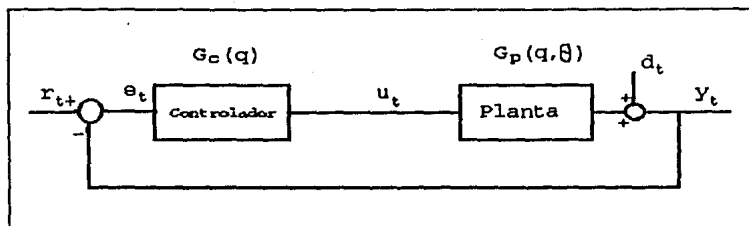
$$y_t = G_p(q, \theta)u_t + d_t \quad (4.1)$$

donde u_t , y_t son la entrada y la salida de la planta, respectivamente, d_t representa los efectos de perturbaciones reflejados a la salida, $G_p(q, \theta)$ es la función de transferencia de la planta, y θ es el vector de parámetros de la planta que varían con el tiempo de manera más lenta que la respuesta de la planta y para simplificar el análisis se suponen son constantes por tramos. El proceso (4.1) está controlado por un controlador estabilizante $G_c(q)$,

$$u_t = G_c(q)e_t \quad (4.2)$$

$$e_t = r_t - y_t$$

donde e_t es el error de seguimiento, y r_t es la señal de referencia a seguir como se muestra en la siguiente figura:



Ilustr. 20

Como el sistema en malla cerrada es estable, el comportamiento del sistema en malla cerrada en estado estable puede ser aproximado por la siguiente función de transferencia:

$$M(q) = b^* q^{-m} \quad (4.3)$$

donde b^* es el valor de la ganancia estática del sistema dada por:

$$b^* = \frac{G_c(1)G_p(1,\theta)}{1 + G_c(1)G_p(1,\theta)} \quad (4.4)$$

y q^{-m} es el retardo del proceso. La salida y_t en estado estacionario es:

$$y_t = b^* r_{t-m} \quad (4.5)$$

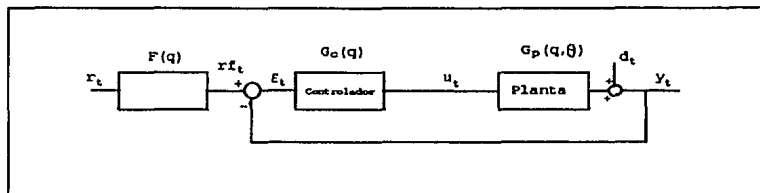
El objetivo de control es minimizar el error de seguimiento (4.2) en presencia de la variación de los parámetros θ reflejada en la ganancia estática b^* (4.4).

4.2.3 Controlador.

Para lograr el objetivo de control, se considerará el diseño de un control de precompensación simple, cuyo objetivo es el de compensar la variación en la ganancia estática.

Dada la dinámica del sistema en malla cerrada aproximada mediante un retardo puro y una ganancia (4.3), el controlador de precompensación a obtener será para este caso la inversión del sistema en malla cerrada. Al realizar la inversión del modelo en estado estacionario obtendremos una función que requerirá adelantos de

la señal de referencia. Es condición necesaria para el diseño conocer los adelantos que sean necesarios. El esquema que se propone es el siguiente:



Ilustr. 21

El controlador $F(q)$ está dado como la inversión de la función de transferencia del sistema en malla cerrada en estado estacionario (4.3), de modo que:

$$F(q) = M^{-1}(q) = \frac{1}{b^*} q^m \quad (4.6)$$

La ley de control está dada por:

$$\begin{aligned} u_t &= G_c(q) e_t, \\ e_t &= r_f_t - y_t, \\ r_f_t &= \frac{1}{b^*} r_{t,m} \end{aligned} \quad (4.7)$$

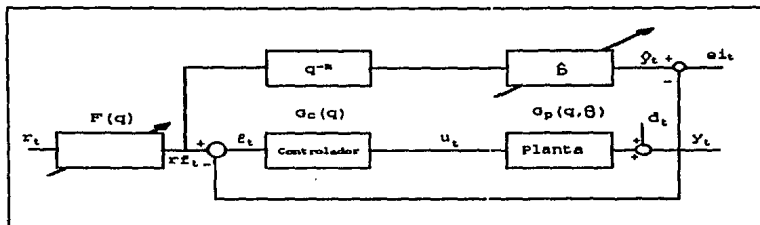
Esta ley de control está lista para su implementación si se conociera la ganancia estática b^* . Como esta última varía con el tiempo, es necesario estimar el parámetro en línea.

4.3 Ley de adaptación y análisis de convergencia.

4.3.1 Ley de adaptación.

La ley de adaptación a usar es la del gradiente normalizado y el control adaptable es de tipo indirecto [19], ya que primero se identificará el valor de la

ganancia estática del sistema y una vez hecho esto se calculará el controlador con la ecuación (4.6). El esquema propuesto es el siguiente:



Ilustr. 22

Dada la aproximación del sistema en malla cerrada en estado estacionario (4.3), se define la salida estimada como:

$$\hat{y}_t = \hat{b}_t r_{t-m} \quad (4.8)$$

donde \hat{b}_t es el parámetro estimado de la ganancia estática b^* , y la salida y_t en el estado estacionario esta dada por:

$$y_t = b^* r_{t-m} \quad (4.9)$$

Si se define el error de identificación como:

$$e_t = \hat{y}_t - y_t \quad (4.10)$$

entonces el algoritmo de gradiente normalizado está dado como:

$$\hat{b}_{t+1} = \hat{b}_t - \gamma \frac{r_{t-m} e_t}{1 + r_{t-m}^2} \quad (4.11)$$

donde $0 < \gamma < 2$ es la ganancia de adaptación.

Es necesario saber si en realidad el algoritmo de adaptación converge al valor verdadero, por lo que se necesita analizar la condición de convergencia.

4.3.2 Análisis de convergencia.

Si se define el error de parámetro identificado como:

$$\hat{b}_t = b_t - b^* \quad (4.12)$$

y si se combinan las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) se obtiene que:

$$\begin{aligned} e_i &= \hat{b}_t r_{i-m} - b^* r_{i-m} \\ &= \hat{b}_t r_{i-m} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ley de adaptación (4.11) se tiene:

$$\hat{b}_{t+1} = \hat{b}_t - \gamma \frac{r_{i-m}^2}{1 + r_{i-m}^2} \hat{b}_t \quad (4.14)$$

Restando b^* a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene:

$$\hat{b}_{t+1} = \left(1 - \gamma \frac{r_{i-m}^2}{1 + r_{i-m}^2} \right) \hat{b}_t \quad (4.15)$$

De la ecuación anterior podemos ver que el comportamiento será decreciente ya que el término entre paréntesis es menor a la unidad para toda $r_{i-m} \neq 0$, esto significa que $\hat{b}_t \rightarrow b^*$ conforme $t \rightarrow \infty$ como se puede ver en (4.12).

4.3.3 Algoritmo de precompensación adaptable.

Finalmente se proporciona un algoritmo por medio del cual se puede implementar el controlador. En la práctica, se pueden conocer las cotas de la ganancia estática que es nuestro parámetro a adaptar, y esta información se puede incorporar al diseño como se muestra a continuación:

Parámetro de diseño:

γ = ganancia de adaptación.

$\hat{\delta}_0$ = condición inicial del parámetro estimado que debe ser diferente de cero.

Entradas:

Señales r_f , y_f .

Salidas:

Valor estimado de la ganancia estática $\hat{\delta}$.

Información a priori:

$$\hat{\delta} = \begin{cases} b_{\min}, & \text{si } \hat{\delta}_t < b_{\min} \\ b_{\max}, & \text{si } \hat{\delta}_t > b_{\max} \end{cases} \quad (4.16)$$

Para cada tiempo hacer:

1^{er} Paso:

Actualizar el valor del parámetro $\hat{\delta}$ utilizando la ecuación (4.11).

2^{do} Paso:

Calcular el valor de la señal r_f utilizando la ley de control (4.7).

4.4 Resultados de simulaciones.

A manera de ejemplo se procederá a mostrar unas simulaciones de modo que se puedan ver claramente las ventajas de este controlador. Se usó una planta de primer orden con retardo descrita en (2.56) donde se varió la ganancia estática del proceso y los valores utilizados fueron:

$$K_p = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 25 \text{ [s]}, \\ 0.2, & 25 \leq t \end{cases} \quad (4.17)$$

$$T_p = 1 \text{ [s]}$$

$$\tau = 0.1 \text{ [s]}$$

Se usó un control de tipo proporcional de modo que se tiene:

$$G_c = K, \quad (4.18)$$

$$K = 1$$

Los valores de ganancia en estado estable para el sistema en malla cerrada son:

$$b^* = \begin{cases} 0.667, & 0 \leq t < 25 \text{ [s]} \\ 0.167, & 25 \leq t \end{cases} \quad (4.19)$$

y siendo la excitación del sistema r , una señal cuadrada que varía entre 1 y 2.

Con los datos anteriores se define el sistema analógico a mejorar, los parámetros que se deben especificar para el módulo de identificación son la ganancia de adaptación, la condición inicial del parámetro, las cotas de la ganancia estática y el tiempo de muestreo:

$$\gamma = 0.1$$

$$\hat{b}_0 = 1$$

$$b_{\min} = 0.1 \quad (4.20)$$

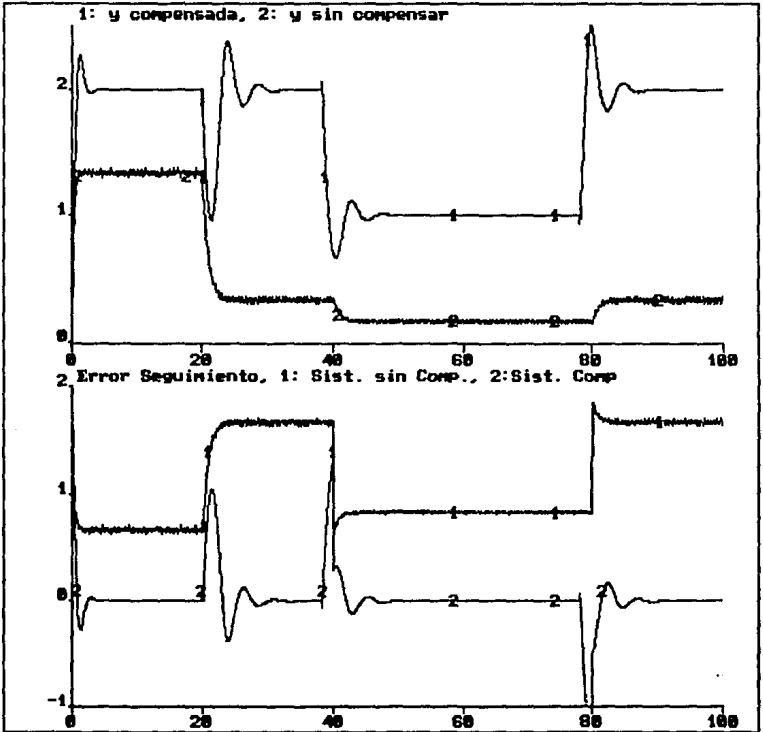
$$b_{\max} = 2$$

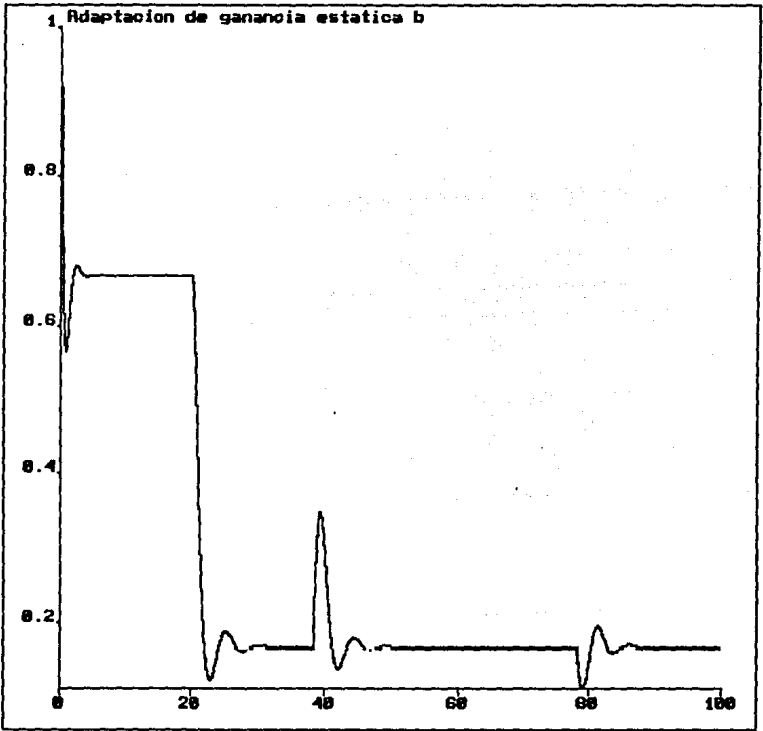
$$T_s = 0.05 \text{ [s]}$$

Una vez teniendo esta información se puede hacer la simulación y los resultados se muestran en la *Ilustr. 23* y en la *Ilustr. 24*.

En la gráfica superior de la *Ilustr. 23* se pueden ver los comportamientos de la salida y , del sistema original y del sistema compensado, y en la gráfica inferior se

puede ver el comportamiento del error de seguimiento en ambos casos. El sistema original siempre tiene error en estado estable y este empeora cuando varía el valor del parámetro K_p , mientras en el sistema con el precompensador se obtiene el desempeño deseado, esto es debido a la adaptación del parámetro $\hat{\tau}$, como se puede ver en la Ilustr. 24.





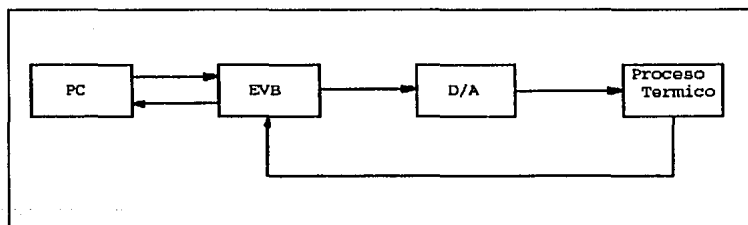
Ilustr. 24

4.5 Implementación del controlador digital adaptable en el microcontrolador MC68HC11.

Se implementó el algoritmo de control anterior en un microcontrolador MC68HC11 y se utilizó para controlar la temperatura de un flujo de aire de un proceso térmico de laboratorio.

El algoritmo de control fue programado en un microcontrolador MC68HC11 por contar con los recursos necesarios para esta aplicación como son: convertidores analógico-digitales, timer, interfase de comunicaciones, etc. Se utilizó la tarjeta de evaluación MC68HC11EVB [30] la cual tiene la circuitería necesaria para que funcione el microcontrolador a excepción del convertidor digital-analógico que tuvo que ser alambrada aparte.

La tarjeta de evaluación se conecta a una computadora PC a través del puerto serie, de modo que se pueden cargar programas o leer datos de la tarjeta. Esquemáticamente se tiene:



Ilustr. 25

La aritmética utilizada para la implementación del algoritmo fue de punto fijo. El tamaño de la palabra fue de 16 bits, siendo los 8 bits más significativos la parte entera y los 8 bits menos significativos la parte fraccionaria. Se escogió este tamaño de palabra debido a la naturaleza del proceso a controlar que fue un intercambiador de calor como el descrito en la sección 3.4.1 (pág III-14).

4.6 Resultados de experimentos realizados en un proceso térmico.

Como se mencionó anteriormente, se controló un proceso térmico de laboratorio con el algoritmo desarrollado en la sección 4.3.3, se hicieron dos experimentos.

En el primero y segundo experimento se varió la dinámica del proceso al abrir la garganta de la entrada de aire de 60° a 90° y después a 120° con la finalidad de ver como se reflejan estos cambios en la ganancia estática del proceso.

En el primer experimento se dejó trabajar al proceso sin la precompensación adaptable para ver cual era su desempeño. En el segundo experimento se añadió la precompensación adaptable y se obtuvo su desempeño.

Se utilizaron los siguientes valores para la ganancia de adaptación, la condición inicial del parámetro a adaptar, el tiempo de muestreo y las cotas de la ganancia estática del proceso.

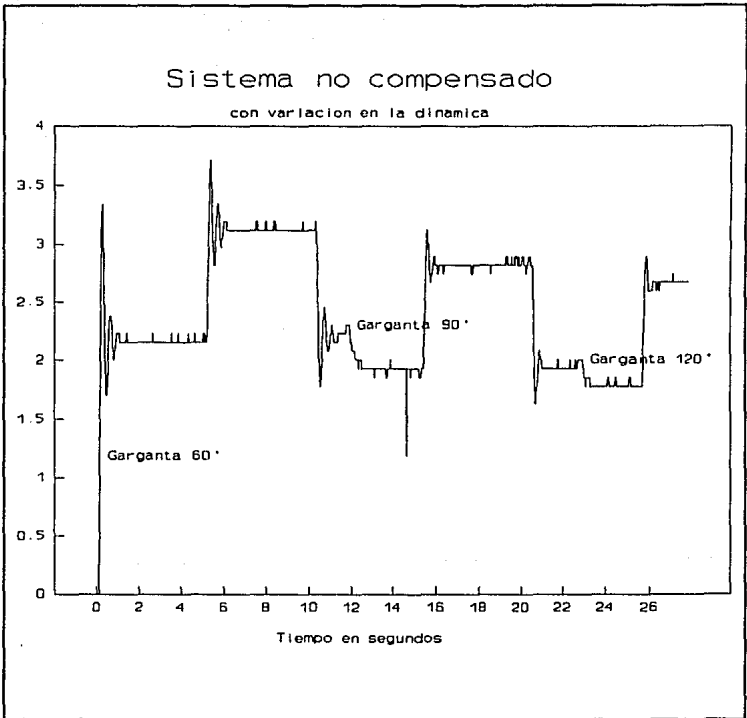
(4.21)

Como señal de excitación para ambos experimentos se utilizo una onda cuadrada generada desde el microcontrolador que varía entre 3 y 4.

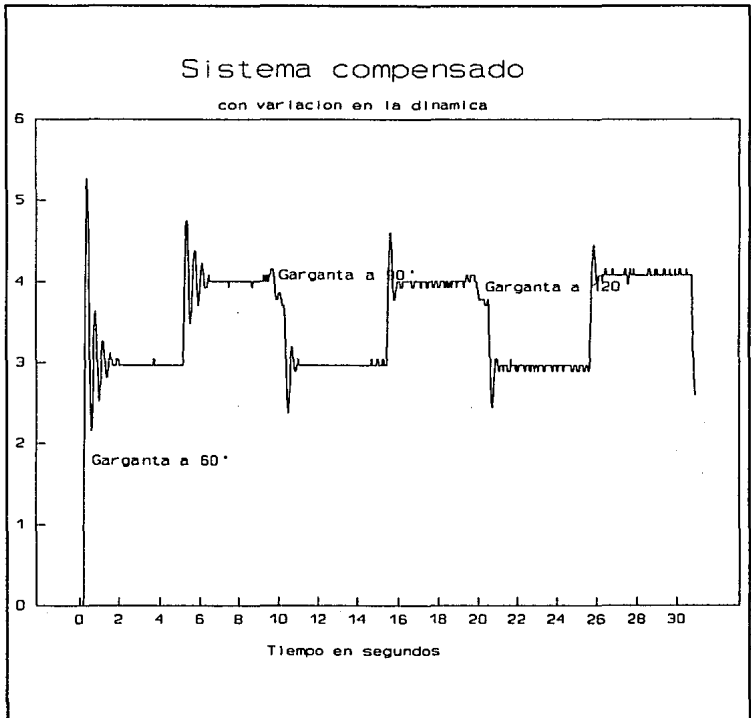
Los resultados fueron los siguientes:

Para el primer experimento, se puede observar en la *Ilustr. 27* que el desempeño es pobre en estado estable ya que para todo tiempo se tiene error de regulación y éste empeora cuando la dinámica cambia.

Para el segundo experimento, se utilizo la precompensación adaptable y los resultados se pueden ver en la *Ilustr. 28*, en donde se observa que se corrige el error en estado estable debido a la adaptación del parámetro $\hat{\delta}$ como se puede ver en la *Ilustr. 29*.



Ilustr. 27



Ilustr. 28

V. Conclusiones.

Como se ha visto este trabajo propone dos procedimientos alternativos para el diseño de controladores digitales adaptables que son sistemáticos, por lo que no se necesita prueba y error.

Los algoritmos pueden ser implementados en equipos modestos y los resultados obtenidos con el proceso térmico de laboratorio son satisfactorios. Esto es importante, ya que muchos de los procesos industriales pueden ser aproximados por modelos de 1^{er} orden con retardo.

Con lo que respecta a los trabajos que quedan por hacer, se pueden mencionar:

Encontrar alguna estructura de identificación más robusta con respecto al ruido que se presente y con respecto al cambio de la señal de referencia, de modo que no se tengan que ajustar los parámetros por perturbaciones que no influyen en la dinámica del proceso.

Extender la posibilidad de utilizar un esquema que identifique más elementos para el precompensador de modo que se pueda utilizar el precompensador para atacar problemas de seguimiento y no sólo de regulación.

BI. Bibliografía.

- [1]. Chen C. T. *Analysis & Synthesis of Linear Control Systems*.
- [2]. A. MacFarlane, "The Development of Frequency-Response Methods in Automatic Control", IEEE Tras. Automatic Control, Vol. 24, pp. 250-265, Abril 1979.
- [3]. Franklin & Powell. *Digital Control of Dynamics Systems*. 2nd Edition 1990. Addison Wesley
- [4]. Åström & Wittenmark. *Computer Controlled Systems*. 2nd Edition 1990. Prentice Hall.
- [5]. B. Kuo, *Automatic Control Systems*, Third Edition, Prentice Hall 1975.
- [6]. G. Franklin, J. Powell, A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Second Edition, Addison Wesley 1991.
- [7]. Anderson & Moore, *Optimal Control, Linear Quadratic Methods*. 1st Edition 1990. Prentice Hall.
- [8]. Morari & Zafiriou. *Robust Process Control*. 1st Edition 1989. Prentice Hall
- [9]. Y. Tang, J. Job Flores, "Frequency response compensation via interpolation". Presentado en European Control Conference (ECC'91), Grenoble, Francia 1991.
- [10]. Y. Tang, J. Job Flores. "Diseño de controlador digital basado en la compensación de la respuesta en frecuencia". Presentado en 4o. Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA), Puebla, México 1990.
- [11]. Horowitz & Sidi, "Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances", Int. J. Control, Vol 16, pp 287-309, 1972.
- [12]. Åström & Hagglund. "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins". Automatica, Vol. 20, pp 645-651, 1984.
- [13]. Dorato. *Ed. Robust Control*. IEEE Press, 1987.
- [14]. Y. Tang, J. F. Capistrán. "Adaptive frequency response identification using the Lagrange filter". Presentado en American Control Conference (ACC, 1990), San Diego, USA 1990.
- [15]. Y. Tang. "A Frequency Domain Approach to Robust Adaptive Control". Proc. ACC., Pittsburgh, USA 1988.

- [16]. Rabiner & Gold. *Theory & Application of Digital Signal Processing*. 1st Edition. Prentice Hall 1975.
- [17]. M. Vidyasagar. *Control Systems Synthesis: A Factorization Approach*. MIT Press 1985.
- [18]. Y. Tang, J. Job Flores, "*Adaptive Frequency Response Compensation: Experiments on a Heat Exchanger*". Presentado en International Federation of Automatic Control (IFAC) International Symposium Intelligent Tuning and Adaptive Control (ITAC 91), Singapur, Singapur 1991.
- [19]. Åström & Wittenmark. *Adaptive Control*. 1st Edition 1989. Addison Wesley.
- [20]. L. Ljung, K. Glover, "*Frequency domain versus time domain methods in systems identification*", *Automatica*, Vol. 17, pp 71-76, 1981
- [21]. P. J. Parker, R. R. Bitmead, "*Adaptive frequency response identification*", Proc. 26th CDC, Los Angeles, USA. 1987
- [22]. R. L. Kosut, "*Adaptive control via parameter set estimation*", *Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing*, Vol. 2, p 371-399, 1988.
- [23]. Feedback Instruments LTD., *Process Trainer PT326*, Instructional Manual D326.
- [24]. Y. Tang, R. Ortega, C. Verde, L. Alvarez Icaza, G. Espinoza, *Apuntes de prácticas de laboratorio de control digital*. División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería (DEPFI), UNAM 1991.
- [25]. J. Job Flores, Y. Tang. "*Diseño de un controlador de precompensación adaptable simple*." Presentado en el X Congreso de la Asociación de México de Control Automático 1991 (AMCA), México 1991. Por presentarse en el V Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA), Cuba 1992.
- [26]. B. Widrow, "*Adaptive Noise Cancelling: Principles and Applications*," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 63, No. 12, 1975.
- [27]. B. Widrow & S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Englewood, N. J. Prentice-Hall, 1985.
- [28]. R. Ortega, R. Kelly, "*On the stability-inequality conditions of a simple robust adaptive servo controller*," 24th Control and Decision Conference (CDC), Florida, USA 1985.
- [29]. Y. Tang, R. Ortega, R. Kelly, "*Adaptive control of a heat exchanger*," *IEEE Cont. Syst. Magazine*. Vol 7, 1987.
- [30]. Motorola, *MC68HC11EVB Evaluation Board User's Manual*.

Apéndice A.

*

- * Programa de precompensacion adaptable
- * Con senal cuadrada de 3 y 4.

- * Declaracion de variables de Circuito

PORTC	equ	\$1003
DDRC	equ	\$1007
OPTION	equ	\$1039
ADCTL	equ	\$1030
ADRL	equ	\$1031
TMSK1	equ	\$1022
TFLG1	equ	\$1023
TMSK2	equ	\$1024
TOC1	equ	\$1016
TCNT	equ	\$100E

- * Declaracion de Variables a usar

offset	equ	\$0000	;1 byte
rf1	equ	\$0001	;3 bytes
rf2	equ	\$0004	;3 bytes
rf3	equ	\$0007	;3 bytes
rf4	equ	\$000A	;3 bytes
rfm	equ	\$000D	;3 bytes
ParB	equ	\$0010	;2 bytes
BinV	equ	\$0012	;2 bytes
yy	equ	\$0014	;2 bytes
gamma	equ	\$0016	;3 bytes
aux	equ	\$0019	;3 bytes
Cont	equ	\$001C	;2 bytes
Ban	equ	\$001E	;1 bytes
AA	equ	\$0030	;3 bytes
BB	equ	\$0033	;3 bytes
SalMult	equ	\$0036	;3 bytes
SDA	equ	\$0039	;2 bytes
EAD	equ	\$0041	;2 bytes

* Declaracion de Constantes

```
Periodo equ $F000 ;Periodo de 50 Hz
ParBMin equ $000C ;cota minima de parametro
ParBMax equ $0200 ;cota maxima de parametro
```

* Declaracion de pseudovector de interrupciones

```
PVTOC1 equ $00DF
```

* Subrutinas de BUFFALO a usar en el programa

```
.outlbyt equ $FFB8 ;Despliega en el monitor un byte
* ;apuntado por el indice X, despues de
* ;pasarlo a ASCII. El indice X es
* ;incrementado a al terminar la subrutina

.outcrlf equ $FFC4 ;manda un regreso de carro

.outsto equ $FFCA ;manda al monitor una cadena
* ;de caracteres que se carga con el
* ;apuntador X
```

* Programa principal

```
org $C000

lds #80

ldaa #7E ;Se carga el pseudovector de
staa PVTOC1 ;interrupciones para el Timer Output
ldx #SVTOC1 ;Compare 1
stx PVTOC1+1

ldaa #90 ;Se configura el ADC y el puerto C
staa OPTION
ldaa #ff
staa DDRC
ldaa #20
staa ADCTL

ldaa #80 ;Se configura interrupcion por Output
staa TMSK1 ;Compare
```

```

ldaa    TFLG1
anda    #$FF
staa    TFLG1

ldd     #$0000    ;Valor del parametro gamma de adapt.
std     gamma+1  ;0.1 base diez
ldaa    #$80
staa    gamma

ldd     #$0100    ;Valor inicial de parametro adaptar b
std     ParB

ldd     #$0000    ;Condiciones iniciales
std     rf1+1
std     rf2+1
std     rf3+1
std     rf4+1
std     rfm+1
std     aux+1
std     Cont
std     SDA
staa    rf1
staa    rf2
staa    rf3
staa    rf4
staa    rfm
staa    Ban
staa    aux

otra    inc     aux    ;Se inicializa al convertido A/D
        jsr     SBRDAOUT
        ldaa    aux
        cmpa   #$00
        bne    otra

        ldd     TCNT    ;Se inicia las interrupciones
        addd   #Periodo
        std     TOC1
        cli

vuelta  nop
        bra    vuelta

```

* Servicio a Interrupcion por tiempo de muestreo y algoritmo de control

```

SVTOC1      ldd      TCNT
            ldaa     #$80      ;Servicio de interrupcion por tiempo
            staa    TFLG1     ;de muestreo
            ldd      TOC1
            addd    #Periodo
            std      TOC1

*Algoritmo de control
            jsr      SBRADIN   ;Lectura de dato de la planta
            ldd      EAD
            std      yy
            jsr      SBRBINV   ;Calculo de la senal de control
            ldd      rfi+1
            std      SDA
            jsr      SBRADAPTA ;Actualizacion del parametro
            jsr      SBRCorr    ;Actualizacion de los datos
            jsr      SBRDAOUT   ;Salida de senal de control

            ldx     #ParB      ;Manda a monitor el parametro
            jsr     .outlbyt
            jsr     .outlbyt

            ldx     #ESP
            jsr     .outsto

            ldx     #yy        ;Manda a monitor la senal de la planta
            jsr     .outlbyt
            jsr     .outlbyt
            jsr     .outcrif

            rti
    
```

* Fin de programa principal

* Subrutina que adapta al parametro b con la siguiente funcion

* $b(t+1) = b(t) + \text{gama}(\text{rfm}(yy - \text{rfm})) / (1 + \text{rfm}^2)$

```

SBRADAPTA  ldd      rfm+1
            std      AA+1
            ldd      ParB
            std      BB+1
            ldaa     #$00
            staa    AA
    
```

```

ResyMul:      staa    BB
              jsr    SBRMULT
              ldd    yy
              cpd    Sa1Mult+1
              bis    ResyMul
              subd   Sa1Mult+1
              std    aux+1
              ldaa   #$80
              staa   aux
              bra    OtraMu
              ldd    Sa1Mult+1
              subd   yy
              std    aux+1
              ldaa   #$00
              staa   aux
              ldd    rfm+1
              std    AA+1
              ldaa   rfm
              staa   AA
              ldd    aux
              std    BB
              ldaa   aux+2
              std    BB+2
              jsr    SBRMULT
              ldd    Sa1Mult
              std    AA
              ldaa   Sa1Mult+2
              staa   AA+2
              ldd    gamma
              std    BB
              ldaa   gamma+2
              staa   BB+2
              jsr    SBRMULT
              ldd    Sa1Mult
              std    aux
              ldaa   Sa1Mult+2
              staa   aux+2
              ldd    rfm+1
              std    AA+1
              std    BB+1
              ldaa   #$00
              staa   AA
              staa   BB
              jsr    SBRMULT
              inc    Sa1Mult+1
              ldd    aux+1
              ldx    Sa1Mult+1
              idiv

```

```

xgdx
cmpa      #$00
bne      SatDiv
stab     aux+1
xgdx
ldx      Sa1Mult+1
fdiv
xgdx
staa     aux+2
bra      Signo
SatDiv:  ldd      #$FFFF
Signo:   std      aux+1
        ldaa     aux
        eora     Sa1Mult
        staa     aux
        cmpa     #$00
        beq      SUMA
        ldd      ParB
        subd     aux+1
        std      ParB
SUMA:    bra      FinAdapta
        ldd      ParB
        addd     aux+1
        std      ParB

        cpd      #ParBMin ;Compara con las cotas
        bpl      FinAdapt
        ldd      #ParBMin
        std      ParB
        ldd      ParB
        cpd      #ParBMax
        bmi      FinAdapt
        ldd      #ParBMax
        std      ParB
FinAdapta
rts

```

* Subrutina para multiplicar numeros de 16 bits con y byte de signo

```

SBRMULT:  ldaa     AA+1      ; multiplicacion de los 8 bits
        beq      ZERO      ; mas significativos.
        ldab     BB+1
        beq      ZERO
        mul

        cmpa     #$00      ; si los 8 bits mas significativos de
        bne     SATURA    ; la multiplicacion son diferentes de

```



```

*                                     ; cero el resultado es saturado
                                     ; Se guardan los 8 LSB
                                     pshb
                                     bra SIGUE
ZERO: 1dab #00
      pshb
SIGUE: 1daa AA+2 ; Se operan los bits fraccionarios
      beq ZERO1
      1dab BB+2
      beq ZERO1
      mul
      psha
      bra SIGUE1
ZERO1: 1daa #00
      psha
SIGUE1: 1daa AA+2 ; Se operan lo LSB de AA y MSB BB
      beq ZERO2
      1dab BB+1
      beq ZERO2
      mul
      pshb
      psha
      bra SIGUE2
ZERO2: 1dd #0000
      pshb
      psha
SIGUE2: 1daa AA+1 ; Se operan MSB AA y LSB BB
      beq ZERO3
      1dab BB+2
      beq ZERO3
      mul
      std SaIMult+1
      bra SIGUE3
ZERO3: 1dd #0000
      std SaIMult+1
SIGUE3: 1pula ; Se hacen las sumas de resultados
      pulb ; parciales
      add SaIMult+1
      bcs SATURA
      std SaIMult+1

```

```

                pulb
                pu1a
                addd      Sa1Mult+1
                bcc      FIN
SATURA:      ldd      #$FFFF ; Si hubo saturacion por alguna causa
FIN:          std      Sa1Mult+1
                ldaa    AA      ; Se obtiene el signo del resultado
                eora    BB
                staa    Sa1Mult
                rts
    
```

* Subrutina para obtener la inversa de un numero de 16 bits no signado
 * Parametro b

```

SBRBINV      clic
                ldd      Cont
                addd    #$1
                std      Cont
                ldd      #$0100 ; periodo alto y bajo de la senal cuadrada
                cpd      Cont
                bne     Esc
                ldd      #$0000
                std      Cont
                ldaa    #$1
                eora    Ban
                staa    Ban
Esc          ldaa    Ban
                cmpa    #$00
                bne     Divide

                ldd      #$0300
                ldx      ParB
                idiv
                xgdx
                cmpa    #$00
                bne     SatDiv1
                stab    rf1+1
                xgdx
                ldx      ParB
                fddiv
                xgdx
                staa    rf1+2
                bra     FinBinv
SatDiv1     ldd      #$FFFF
                std      aux+1
    
```

```

Divide      ldd      #$0400
            ldx      ParB
            idiv
            xgdx
            cmpa
            bne      SatDiv2
            stab     rf1+1
            xgdx
            ldx      ParB
            fdiv
            xgdx
            staa     rf1+2
SatDiv2     bra      FinBinv
            ldd      $FFFF
            std      aux+1

FinBinv     ldaa     #$00
            staa     rf1
            rts
    
```

* Subrutina para Correr los resultados

```

SBRCorr     ldaa     #$00
            staa     offset
            ldx      #rf4
            ldym     #rfm
OtroCorr:   ldd      offset,X
            std      offset,Y
            ldaa     offset+2,X
            staa     offset+2,Y
            dey
            dey
            dey
            dex
            beq     FinCorr
            dex
            dex
            bra     OtroCorr
FinCorr:    rts
    
```

* Subrutina para sacar por el convertidor D/A una señal

```

SBRDAOUT    ldd      SDA
            std      AA+1
            ldd      #$1840      ;Factor de escala
            std      BB+1
    
```

```

ldaa #$00
staa AA
staa BB
jsr SBRMULT
ldaa Sa1Mult+1
staa PORTC
rts

```

* Subrutina para leer dato de A/D

```

SBRADIN      ldaa  #$20
espera      staa  ADCTL
            ldaa  ADCTL
            anda  #$80
            beq  espera
            ldaa  ADR1
            ldab  #$00
            std  AA+1
            ldd  #$0013      ;Factor de escala
            std  BB+1
            stab AA
            stab BB
            jsr  SBRMULT
            ldd  Sa1Mult+1
            std  EAD
            rts

```

* Letreros a desplegar

```

ESP      fcc  ' '
          fcb  $04
          end

```