# Universidad Nacional Autónoma de México

## FACULTAD DE CIENCIAS

# "GRAFICAS PERFECTAS Y TEORIA DE NUCLEOS"

T E S I S

Que para obtener el título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

CLARA ELENA VIDRIO AMOR

México, D. F. 1992

# CONTENIDO

## RESUMEN

El estudio de las relaciones entre gráficas perfectas y teoría de núcleos se inició en 1984 con la interesante conjetura planteada por Claude Berge y Pierre Duchet. "Una gráfica es perfecta si y solo si es núcleo-perfectible" [1].

Esta conjetura relaciona dos conceptos fundamentales de la teoría de gráficas; el concepto de de coloración y el concepto de núcleo.


## INTRODUCCION

Una gráfica (resp: digráfica) G consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices y denotados V(G), junto con una colección de pares no ordenados (resp: ordenados) de distintos elementos de V(G) llamados aristas (resp: flechas) y denotados A(G) (resp: F(G)).

Un clan de G es una subgráfica completa de G. Denotaremos $K_n$ al clan con n vértices. El complemento de una gráfica G será denotado $G^c$, el ciclo de longitud n por $C_n$. Una diagonal de un ciclo $C_n$ es una arista (resp: flecha) en $A(G) - A(C_n)$ (resp: $F(G) - F(C_n)$) con ambos extremos en $C_n$.

Las siguientes definiciones son necesarias para el estudio de las gráficas perfectas y de la teoría de núcleos :

Sea G una gráfica.

1) El número de independencia $\alpha(G)$ es el máximo número de vértices dos a dos no adyacentes en G.

2) El número de cubrimiento $\theta(G)$ es el número mínimo de clanes que cubren a los vértices de G.

3) El número de clan $\omega(G)$ es el máximo número de vértices dos a dos adyacentes en G.

4) El número cromático $\chi(G)$ es el número mínimo de colores necesarios para colorear todos los vértices de G de tal forma que cualesquiera dos vértices adyacentes tengan asignado distinto color.

Las gráficas perfectas fueron inventadas por Claude Berge en 1961 y están definidas como sigue :

"Una gráfica G es perfecta si para cada subgráfica inducida H de G se tiene que $\chi(H) = \omega(H)$.".

Claramente para cualquier gráfica se cumple que $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Nótese que en una gráfica perfecta (y en sus subgráficas inducidas) el problema de la coloración de vértices queda reducido a la coloración de sus subgráficas perfectas; en el sentido de que para conocer el número cromático de una gráfica perfecta (y en sus subgráficas inducidas) basta conocer el número cromático de sus subgráficas completas.

Por otra parte el concepto de núcleo de una digráfica fué introducido por John Von Neumann en 1944 [12].

Sea D una digráfica, $N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si :

a) N es un conjunto independiente (es decir, no hay flechas de D con ambos extremos en N).

b) N es un conjunto absorbente (es decir, para todo $z \in (V(D) - N)$ existe alguna flecha de z a N).

El concepto de gráfica núcleo-perfecta fué introducido por Victor Neumann en 1971 [11].

"Una digráfica D es núcleo-perfecta si toda subdigráfica inducida de D posee un núcleo.".

Es claro que los conceptos de coloración y de gráfica perfecta están definidos para gráficas y para su estudio es irrelevante la orientación de las aristas, mientras que los conceptos de núcleo y de digráfica núcleo-perfecta la orientación de las aristas es muy importante. Para relacionar los conceptos de coloración y de núcleo, Claude Berge y Pierre Duchet consideran lo siguiente :

Dada una gráfica G le podemos asociar de manera natural una digráfica D obtenida a partir de G orientando cada arista de G en al menos una de las direcciones. Una digráfica obtenida así es llamada una orientación de G.

Una orientación por pozos de G es una orientación D de G en la cual cada subgráfica completa de G tiene núcleo (también llamado pozo, esto es un vértice tal que desde cada otro vértice del clan hay una flecha hacia él).

Una gráfica G es núcleo-perfectible si toda orientación por pozos de G es una digráfica núcleo-perfecta.

Ejemplos :

1) $K_n$ Gráficas completas son núcleo-perfectibles.

2) $C_{2n}$ ciclos de longitud par son núcleo-perfectibles.

3) Gráficas bipartitas son núcleo-perfectibles.

4) $C_{2n+1}$ ciclos de longitud impar no son núcleo-perfectibles.

5) $C_{2n+1}{}^{c}$ el complemento de un ciclo de longitud impar no es núcleo-perfectible.

Nótese que en una gráfica núcleo-perfectible (y en cada una de sus subgráficas inducidas) el problema de la existencia de núcleo (para una orientación dada), queda reducido a la existencia de núcleo en cada una de sus subgráficas completas; en el sentido de que es suficiente saber que cada una de sus subgráficas completas tiene núcleo para que cada una de sus subgráficas inducidas tenga núcleo (en una orientación dada).

Así la relación entre los conceptos núcleo y coloración de vértices queda resuelta por los clanes (ésto es, encontrando el número cromático de los clanes) si y solo si el problema de la existencia de núcleos (para una orientación dada de G) queda resuelta para los clanes (ésto es, si la orientaciôn es por pozos).

La conjetura de Berge-Duchet plantea una caracterización para gráficas perfectas en términos de la existencia de núcleo en cada subdigráfica inducida de cierta orientación de la gráfica. Algunas otras caracterizaciones han sido obtenidas y otras están aún planteadas como problemas abiertos.

Una de las más importantes caracterizaciones de gráficas perfectas es el siguiente teorema dado por L. Lovasz en 1972. [9]

<u>TEOREMA:</u> Para cualquier gráfica G las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\chi(G_A) = \omega(G_A) \quad \forall\ A \subseteq V(G)$.

b) $\alpha(G_A) = \theta(G_A) \quad \forall\ A \subseteq V(G)$.

c) $\alpha(G_A) \cdot \omega(G_A) \geq |A| \ \forall\ A \subseteq V(G)$.

Una caracterización de gráficas perfectas en términos de subgráficas inducidas prohibidas es la siguiente conjetura planteada por Claude Berge en 1964.

Conjetura Fuerte de Gráficas Perfectas :

"Una gráfica es perfecta si no contiene como subgráficas inducidas ciclos de longitud impar ni su complemento.".

Existen algunas clases de gráficas perfectas que cumplen con esta conjetura :

1) Gráficas trianguladas.

2) Gráficas de Meyniel.

Los resultados recientes sobre digráficas núcleo-perfectas y las clases de digráficas núcleo-perfectas permiten sospechar que hay una relación entre la existencia de núcleos y la estructura de los ciclos impares dirigidos.

Enunciaremos algunas clases amplias de digráficas núcleo-perfectas :

1) Digráficas en las que cada ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos dos flechas simétricas. [4]

2) Digráficas en las que cada ciclo dirigido de longitud impar tiene dos diagonales con punta consecutiva. [6]

Estos resultados constituyen un importante punto de apoyo a la conjetura de Berge-Duchet. Y el hecho de que ésta es válida en un sentido para las gráficas que satisfacen la conjetura fuerte de gráficas perfectas.

Mas precisamente tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA: [10] Toda gráfica núcleo-perfectible no contiene como subgráficas inducidas ciclos de longitud impar ni sus complementos.

# PRELIMINARES

## TEORIA DE GRAFICAS

Una gráfica G consiste de un conjunto finito no vacio de objetos llamados vértices, V(G), con una colección de pares no ordenados de distintos elementos de V(G), a ésta colección, A(G) la llamaremos el conjunto de aristas de G.

Denotaremos $p = |V(G)|$ y $q = |A(G)|$ .

Si existe una arista a entre dos vértices u y v, es decir $a = (u,v) \in A(G)$ diremos que u es adyacente a v en G y lo denotaremos u $ady_G$ v. También diremos que a incide en u y en v.

El grado de un vértice u, $\delta_G(u)$, es el número de aristas que inciden en él.

Una trayectoria en una gráfica G es una sucesión de vértices adyacentes en donde no se repiten vértices (y por lo tanto, tampoco se repiten aristas). Una uv-trayectoria es una trayectoria que empieza en el vértice u y termina en el vértice v.

Una gráfica G es conexa si para cualquier par de vértices $u,v \in V(G)$, existe una uv-trayectoria. En caso de que la gráfica no sea conexa se dirá que es disconexa. A cada parte conexa de una gráfica disconexa se le llama componente conexa.

Una subgráfica de G es una gráfica H en donde $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Una subgráfica inducida H de una gráfica G es una subgráfica en donde $V(H) \subseteq V(G)$ y si dos vértices $u,v \in V(H)$ son adyacentes en G entonces también lo son en H.

### TIPOS DE GRAFICAS

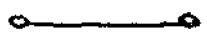
1. Gráficas Completas.

Una gráfica G se llama completa si para todo par de vértices $u,v \in V(G)$, $(u,v) \in A(G)$. Denotaremos $K_n$ a la gráfica completa con n vértices.

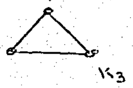
Ejemplos:

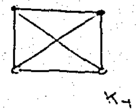


$K_1$



$K_2$




2. Ciclos.

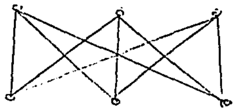
Un ciclo es una trayectoria cerrada, es decir que se repiten el primer y el último vértice. Denotaremos $C_n$ al ciclo con n vértices. Hay dos tipos de ciclos: Ciclos pares $C_{2n}$ y ciclos impares $C_{2n+1}$.

Sea C un ciclo $C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Una cuerda o diagonal del ciclo es una arista $(u_i, u_j)$ en donde $i \neq j-1$, $i \neq j$, $i \neq j+1$.

3. Gráficas bipartitas.

G es una gráfica bipartita si existe una partición de V(G) en dos conjuntos X,Y tales que toda arista tiene un extremo en X y otro en Y.

Ejemplo:

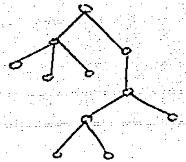


G es una gráfica bipartita completa y se denota $K_{(3,3)}$.

4. Arboles.

Un árbol es una gráfica tal que es conexa y aciclica (sin ciclos).

Ejemplos:



$G_2$.

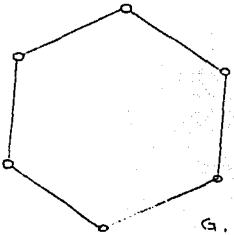
Un cactus de longitud tres es una gráfica conexa en donde los únicos ciclos son de longitud tres.

5. Complemento de una gráfica.

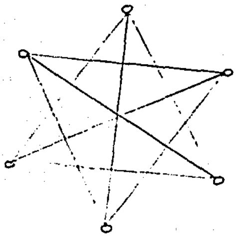
El complemento de una gráfica G, denotado $G^c$, se define de la siguiente forma :

a) $V(G^c) = V(G)$.
b) $x, y \in V(G^c)$   $x \text{ ady}_G \ y \Leftrightarrow x \text{ no ady}_G \ y$.

Ejemplo:



G,



$G^c$.

6. Gráfica de Meyniel.

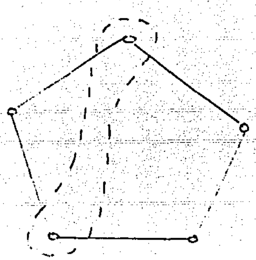
Una gráfica G es de Meyniel si todo ciclo de longitud impar al menos cinco, de G, tiene al menos dos diagonales.

DEFINICIONES

Sea G una gráfica:

1. Un conjunto $I \subseteq V(G)$ se llama *conjunto independiente* si para todo par de vértices $x, y \in I$ $(x,y) \notin A(G)$. Denotaremoa $\alpha(G)$ al número de independencia, es decir, al máximo número de vértices dos a dos no adyacentes.

Ejemplo:



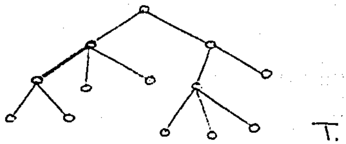
$\alpha(K_n) = 1$

$\alpha(C_5) = 2$
$\alpha(C_{2n+1}) = n$

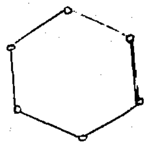
2. Un *clan* de G es una subgráfica de G tal que es completa. Denotaremos $\omega(G)$ al número de clan, es decir, al máximo número de vértices dos a dos adyacentes en G.

Ejemplo:

Sea T un árbol.
$\omega(T) = 2$




Sea C un ciclo.
$\omega(C) = 2$

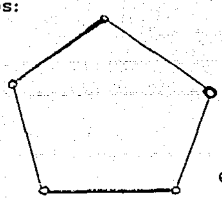


3. Un *cubrimiento* de G es una colección de subgráficas $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$ tales que:

a) $H_i$ es un clan, para toda $i$.
b) $H_i \cap H_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$.
c) Para todo $u \in V(G)$ existe $H_j$ tal que $u \in V(H_j)$.

Denotaremos $\theta(G)$ al número de cubrimiento de G, es decir al mínimo número de clanes que cubren a V(G).

Ejemplos:



$\Theta(C_{2n+1}) = n+1$

4. Una *buena coloración* de V(G) es una asignación de colores a los vértices de G tal que vértices adyacentes tengan diferente color. Denotaremos $\chi(G)$ al número cromático de G, es decir, al mínimo número de colores que se necesitan para obtener una buena coloración de V(G).

## TEORIA DE DIGRAFICAS

Una digráfica D consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, V(D), junto con una colección de pares ordenados de distintos elementos de V(D), a ésta colección, F(D), la llamaremos el conjunto de flechas de D.

Notación:

- Si $(u,v) \in F(D)$ la denotaremos uv-flecha.
- Sea $A \subseteq V(D)$. Sea $x \in (V(D) - A)$. Si existe una flecha de x a un elemento de A la denotaremos xA-flecha.

El ingrado de un vértice $v \in V(D)$, $\delta_D^-(v)$, es el número de vértices adyacentes hacia v.

El exgrado de un vértice $v \in V(D)$, $\delta_D^+(v)$, es el número de vértices desde v.

El grado de un vértice $v \in V(D)$, $\delta_D(v)$, es la suma del exgrado con el ingrado.

Sea D una digráfica y $x \in V(D)$ :

$\Gamma^+(x) = \{y \in V(D) \,/\, (x,y) \in F(D)\}$

$\Gamma^-(x) = \{y \in V(D) \,/\, (y,x) \in F(D)\}$

Sea $A \subseteq V(D)$ :

$\Gamma^+(A) = \{z \in V(D) \,/\,$ existe una Az- flecha $\}$

$\Gamma^-(A) = \{z \in V(D) \,/\,$ existe una zA- flecha $\}$.

Una digráfica H es subdigráfica de D si :

1) $V(H) \subseteq V(D)$.

2) $F(H) \subseteq F(D)$.

Una digráfica H es subdigráfica inducida de D si :

1) $V(H) \subseteq V(D)$.

2) Si $u, v \in V(H)$ son tales que $(u,v) \in F(D)$ entonces $(u,v) \in F(H)$.

Una trayectoria dirigida de una digráfica D es una sucesión de vértices $(x_0,\ldots,x_n)$ en donde $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ $i=0,1,\ldots,n-1$ y $x_i \neq x_j$ para toda $i,j \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Una digráfica D es fuertemente conexa si para todo par de vértices $u,v \in V(D)$ existe una uv-trayectoria dirigida y una vu-trayectoria dirigida.

A cada parte fuertemente conexa de una digráfica D se le llama componente fuertemente conexa.

La digráfica de condensación $D^*$ de D se define como sigue:

$V(D^*) = \{$ componentes fuertemente conexas de D $\}$.

$(C_i, C_j) \in F(D^*) \Leftrightarrow$ Existe $u \in C_i$, $v \in C_j$ tal que $(u,v) \in F(D)$.

Sea D una digráfica y $(u,v) \in F(D)$.

a) $(u,v)$ es una flecha simétrica de D si y sólo si $(v,u) \in F(D)$.

b) $(u,v)$ es una flecha asimétrica de D si y sólo si $(v,u) \notin F(D)$.

c) Definimos la parte simétrica de D, denotada Sim(D), como la subgráfica inducida por el conjunto de flechas simétricas de D.

d) Definimos la parte asimétrica de D, denotada Asim(D), como la subgráfica inducida por el conjunto de flechas asimétricas.

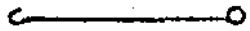
La gráfica subyacente a una digráfica D, se obtiene a partir de D cambiando sus flechas por aristas y quitando las aristas múltiples.

# 1.- GRAFICAS PERFECTAS.

Sea G una gráfica y $A \leq V(G)$. G es *α-perfecta* si $\alpha(G_A) = \theta(G_A)$ y es *χ-perfecta* si $X(G_A) = \omega(G_A)$.

Ejemplos:
1. Las gráficas completas son α-perfectas.


$K_1$

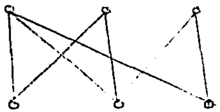

$K_2$

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha(K_1) = 1$ | $\alpha(K_2) = 1$ | $\alpha(K_n) = 1$ |
| $\theta(K_1) = 1$ | $\theta(K_2) = 1$ | $\theta(K_n) = 1$ |
| $X(K_1) = 1$ | $X(K_2) = 2$ | $X(K_n) = n$ |
| $w(K_1) = 1$ | $\omega(K_2) = 2$ | $\omega(K_n) = n$ |

2. Gráficas bipartitas son α-perfectas.

Sea G

$\alpha(G) = 3$
$\theta(G) = 3$
$X(G) = 2$
$\omega(G) = 2$

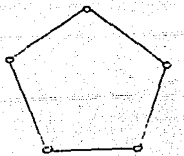

G.

En general, sea G una gráfica bipartita con particiones $V_1$ y $V_2$. Sea $p_1$ el número de vértices de $V_1$, y $p_2$ el número de vértices de $V_2$, sin perdida de generalidad supongamos que $p_1 \leq p_2$. Entonces :
$\alpha(G) = p_1$

$$\theta(G) = p_1$$
$$X(G) = 2$$
$$\omega(G) = 2$$

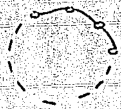
3. Ciclos de longitud impar mayor que tres sin cuerdas no son $\alpha$-perfectas ni $\chi$-perfectas.

$C_5$



$\alpha(C_5) = 2$
$\theta(C_5) = 3$
$\chi(C_5) = 3$
$\omega(C_5) = 2$

$C_n$



$\alpha(C_{2n+1}) = n$
$\theta(C_{2n1}) = n+1$
$\chi(C_{2n+1}) = 3$
$\omega(C_{2n+1}) = 2$

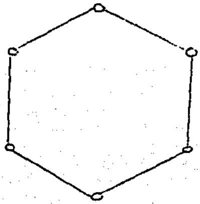
<u>TEOREMA</u> 1.1 [9] Una gráfica G es $\alpha$-perfecta si y sólo si $G^c$ es $\chi$-perfecta.

<u>Demostración.</u>

Es claro que $\alpha(G_A) = \omega(G_A^c)$ y $\theta(G_A) = \chi(G_A^c)$ se cumple para cualquier gráfica. $G^c$ es $\chi$-perfecta, $\Leftrightarrow$ $\chi(G_A^c) = \omega(G_A^c)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha(G_A) = \theta(G_A) \Leftrightarrow$ G es $\alpha$-perfecta.

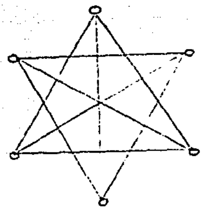
#

G



G es bipartita, por lo tanto es $\alpha$-perfecta.

$G^c$



$\chi(G^c) = 3$
$\omega(G^c) = 3$

Por lo tanto $G^c$ es $\chi$-perfecta.

<u>Corolario</u> <u>1.1.</u> Si G o $G^c$ contiene un ciclo de longitud impar mayor que tres sin cuerdas, entonces G no es $\alpha$-perfecta ni $\chi$-perfecta.

Conjetura fuerte de gráficas perfectas.

Sea G una gráfica, son equivalentes:

a) G es $\alpha$-perfecta.
b) G es $\chi$-perfecta.
c) G no contiene un conjunto A tal que $G_A$ o $G_A^c$ sea un ciclo elemental de longitud impar mayor que tres, y sin cuerdas.

Ya se demostró a) $\Rightarrow$ c) y b) $\Rightarrow$ c).

Ejemplos de gráficas $\alpha$-perfectas y $\chi$=perfectas.

**Graficas con un conjunto de articulacion.**

$A \subseteq V(G)$ es un *conjunto de articulación de G* si G-A aumenta el número de componentes conexas de G.

Teorema 1.2. [1] Sea G una gráfica conexa con un conjunto de articulación A tal que sea un clan, y cada parte relativa a A sea $\chi$-perfecta, entonces G es $\chi$-perfecta.

Demostración.

Sea G una gráfica que cumple con las hipótesis del teorema. Basta probar que $\omega(G) = \chi(G)$.

Supongamos que $\omega(G) = k$, ésto implica que existe un clan con k vértices en alguna parte $G_i$ rlativa a A. Por lo tanto $k = \omega(G_i) = \chi(G_i)$.

En otra parte $G_j$ relativa a A se cumple que $\chi(G_j) = \omega(G_j) \leq k$ Ya que $\omega(G) = k$ entonces G es k-coloreable, por lo tanto $k = \omega(G) \leq \chi(G) \leq k$ ésto implica que $\omega(G) = \chi(G)$ por lo tanto G es $\chi$-pefecta.

#

Teorema 1.3. [1] Sea G una gráfica conexa con un conjunto de articulación A tal que sea un clan, y cada parte relativa a A sea $\alpha$-perfecta, entonces G es $\alpha$-perfecta.

## Demostración.

Sea G una gráfica tal que cumple con las hipótesis del teorema. Basta probar que $\alpha(G) = \theta(G)$.

Sean $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_p$ las componentes conexas de G-A. Sea $A_i = \{ a / a \in A,\ \alpha(G_{C_i \cup a}) = \alpha(G_{C_i}) \}$.

Tenemos dos casos:

<u>caso 1.</u> $\bigcup_{i=1}^{p} A_i \neq A$. En éste caso existe un vértice $a \in A$ tal que $\alpha(G_{C_i \cup \{a\}}) = \alpha(G_{C_i}) + 1 \quad i = 1,2,\ldots,p$ entonces en $G_{C_i \cup \{a\}}$ existe un conjunto independiente $S_i$ que satisface:

$$|S_i| = \alpha(G_{c_i}) + 1$$

$$\{a\} \subseteq S_i \subseteq C_i \cup \{a\}$$

El conjunto $S_0 = \bigcup_{i=1}^{p} S_i$ es un conjunto independiente de G, y $|S_0| = \sum_{i=1}^{p} \alpha(G_{C_i}) + 1$

Tomemos la partición $\mathscr{C}$ de G en clanes. $\mathscr{C}$ está formada por A y los $\theta(G_{C_i})$ clanes de una mínima partición de $C_i \quad i=1,2,\ldots p$

Tenemos que:

$$\theta(G) \leq |\ \mathscr{C}\ | = \sum_{i=1}^{p} \theta(G_{C_i}) + 1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha(G_{C_i}) + 1 = |\ S_0| \leq \alpha(G)$$

y $\alpha(G) \leq \theta(G)$. Por lo tanto $\theta(G) = \alpha(G)$ es decir, G es $\alpha$-perfecta.

<u>caso 2.</u> $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = A$ Esto implica que para toda i se cumpe lo siguiente: $\alpha(G_{C_i \cup A}) = \alpha(G_{C_i})$ entonces:

$$\theta(G) \leq \sum_{i=1}^{p} \theta(G_{C_i \cup A_i}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha(G_{C_i \cup A_i} = \sum_{i=1}^{p} \alpha(G_{C_i}) \leq \alpha(G) \leq \theta(G)$$

Por lo tanto $\alpha(G) = \theta(G)$, es decir, G es $\alpha$-perfecta.

#

## Gráficas Trianguladas.

Una gráfica es *triangulada* si todo ciclo de longitud mayor que tres posee una cuerda.

<u>Obs:</u> Toda subgráfica de una gráfica triangulada es triangulada.

Ejemplos:

1. Arboles.

2. Cactus con ciclos de longitud tres.

<u>Teorema</u> <u>1.4</u> [1] Si G es una gráfica triangulada, entonces todo conjunto de articulación mínimo de G es un clan.

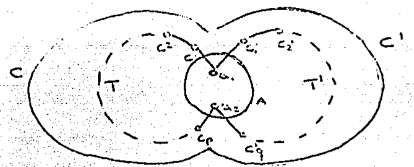
<u>Demostración:</u>

Sea A un conjunto de articulación mínimo de G. Sean C, C', C'',... las componentes conexas de G-A. Cada vértice $a \in A$ está unido a cada una de las componentes conexas, de otra forma $A - \{ a \}$ sería un conjunto de articulación más chico que A.

Sean $a_1$, $a_2 \in A$. Existe una $a_1a_2$- trayectoria. Sea $T = \{ a_1, c_1, c_2, \dots, c_p, a_2 \}$ con $c_1; c_2; \dots, c_p \in C$ tal trayectoria, y supongamos que es de longitud mínima.

Existe también una trayectoria T' de longitud mínima.

$T' = \{ a_1', c_1', c_2', \dots, c_q', a_2 \}$ con $c_1', c_2' \dots, c_q' \in C$




El ciclo T U T' no contiene cuerdas de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{ll} (a_1, c_i) & i\neq 1 \\ (c_i, c_j) & i\neq j \\ (a_2, c_i) & i\neq p \end{array}\right\} \quad \text{Ya que T es de longitud mínima.}$$

$(c_i, c_j')$ Ya que C y C' son componentes conexas diferentes de G-A.

$$\left.\begin{array}{ll} (a_2,\ c_j') & j\neq 1 \\ (c_i',\ c_j') & i\neq j \\ (a_1,\ c_j') & j\neq q \end{array}\right\} \quad \text{Ya que } T' \text{ es de longitud mínima.}$$

Como G es una gráfica triangulada, entonces $TUT'$, cuya longitud es almenos de cuatro, posee una cuerda, ésta cuerda debe ser $(a_1,\ a_2)$ . Por lo tanto todo par de vértices de A son adyacentes, lo que implica que A es un clan.

#

<u>Corolario</u> <u>1.2.</u> Para toda gráfica conexa, las siguientes propiedades son equivalentes:

a) G es triangulada.

b) G es un clan o todo conjunto mínimo de articulación de G es un clan.

<u>Demostración:</u>

a) ⇒ b) Se sigue del teorema 1.4.

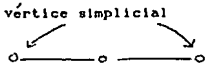
b) ⇒ a) Si el conjunto mínimo de articulación entre dos vértices no adyacentes no es un clan, entonces se puede encontrar un ciclo sin cuerdas como en el teorema 1.4.

#

<u>Corolario</u> <u>1.2</u> Si G es una gráfica triangulada, conexa y no es un clan, entonces existen dos vértices no adyacentes tal que cada uno pertenece a sólo un clan maximal, es decir, vértice simplicial.

<u>Demostración:</u> La demostración se hará usando inducción sobre el número de vértices.

Sea G una gráfica conexa con tres vértices diferente de $K_3$.




Claramente el teorema se cumple.

Sea G una gráfica conexa con $|V(G)| = n$, no un clan. Supongamos que el teorema se cumple para todas las gráficas de orden menor que n.

Como $G \neq K_n$ existe un conjunto de articulación mínimo A.

Sean C y C' dos componentes conexas de G-A. Por hipótesis de inducción $G_{AUC}$ tiene dos vértices simpliciales no adyacentes b y c. Supongamos que $c \in C$. De la misma forma existe un vértice simplicial $c' \in C'$ de $G_{AUC}$.

Entonces c y c' son vértices simpliciales de G no adyacentes.

#

<u>Corolario</u> <u>1.4.</u> Todo clan que contiene un vértice simplicial intersecta a cada conjunto independiente maximal.

<u>Corolario</u> <u>1.5.</u> G es triangulada si y sólo si toda subgráfica de G tiene un vértice simplicial.

<u>Corolario</u> <u>1.6.</u> Toda gráfica triangulada tiene un clan que intersecta a todos los conjuntos independientes maximales.

<u>Demostración:</u>

Sea x un vértice simplicial. Y sea $C$ un clan maximal que contiene a x. $C \cap S \neq 0 \quad \forall \quad S$ conjunto independiente maximal.

- Si $x \in S$ es claro que $C \cap S \neq \emptyset$
- Si $x \notin S$ supongamos $C \cap S = \emptyset \Rightarrow S \cup \{x\}$ es un conjunto independiente más grande que S , lo cual contradice la maximalidad de S.

#

<u>Corolario</u> <u>1.7</u> Si G es triangulada entonces $\alpha(G) = \theta(G)$.

<u>Demostración</u> :

Supongamos que $\alpha(H) = \theta(H)$ Para toda gráfica H tal que $|V(H)| < |V(G)|$.

Sea $C$ un clan maximal de G que contiene un vértice simplicial $x \Rightarrow \alpha(G - C) = \alpha(G) - 1$ ya que $C$ intersecta a todos los conjuntos independientes maximales.

$\theta(G - C) = \theta(G) - 1$ ya que todo cubrimiento mínimo de G necesariamente contiene al único clan que cubre a x ($C$)

$\Rightarrow \alpha(G - C) = \theta(G - C)$ , por inducción $\alpha(G) = \theta(G)$.

#

## Teorema de Gráficas Perfectas.

Lema 1.1 Sea G una gráfica $\alpha$-perfecta y sea H la gráfica que se obtiene al agregar un vértice $x^1$ y haciéndolo adyacente a todos los vecinos de algún vértice $x \in V(G)$. Entonces H también es $\alpha$-perfecta.

Demostración

Basta probar que $\alpha(H) = \theta(H)$

Sea $C$ la partición de V(G) en $\theta(G)$ clanes y sea $C_x$ el clan de la partición que contiene a x.

- Si existe en G un conjunto independiente máximo que contiene a x, entonces :

$$\alpha(H) = \alpha(G) + 1$$

$C \cup \{x^1\}$ es una partición de V(H) en $\alpha(G) + 1$ clanes $\Rightarrow$

$\theta(H) = \alpha(H)$

$(\ \alpha(H) = \alpha(G) + 1 \qquad y \qquad \theta(H) = \theta(G) + 1)$

- Si en G no existe un conjunto independiente máximo que contenga a x , entonces :

$\alpha(H) = \alpha(G)$

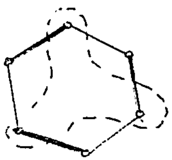
Pero $C^1 = C_x - \{x\}$ intersecta a todos los conjuntos independientes máximos de G $\Rightarrow$ $\alpha(G) - 1 = \alpha(H) - 1$

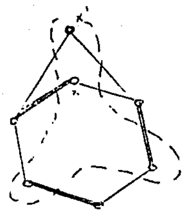
Por lo tanto, tomando el clan $C^1 \cup \{x\}$ y los $\alpha(H) - 1$ clanes que particionan a $V(G) - C$, obtenemos una partición de V(H) en $\alpha(H)$ clanes. Por lo tanto, $\alpha(H) = \theta(H)$.

#

Ejemplos:

Sea $G_1$:





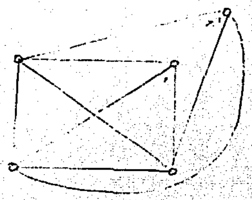
Obtenemos $H_1$ agregando el vértice x', y lo hacemos adyacente a los vecinos de x.

$G_1$ es bipartita, por lo tanto es $\alpha$-perfecta.

$\alpha(H_1) = 4$
$\theta(H_1) = 4$

Sea $G_2$:

Obtenemos $H_2$ de la misma forma que en el caso anterior.



$G_2$ es una gráfica completa, por lo tanto es $\alpha$-perfecta.

$\alpha(H_2) = 2$
$\theta(H_2) = 2$

Lema 1.2. Sea G una gráfica tal que todas sus subgráficas inducidas sean $\alpha$-perfectas y satisfacen: $\omega(G_A)\ \alpha(G_A) \geq |\ A\ |$ $A \subseteq V(G)$. Sea H la gráfica que se obtiene de G al reemplazar cada vértice $x_i$ por un conjunto $X_i = \{ y_i^1, y_i^2, \dots \}$ y hacemos $y_i^s$ adyacente a $y_j^t$ si y sólo si $x_i$ es adyacente a $x_j$, entonces H también satisface que $\omega(H_A)\ \alpha(H_A) \geq |\ A\ |$ $A \subseteq V(H)$....(*)

Demostración: Sea H la gráfica obtenida de G como lo indica el teorema, y supongamos que H no cumple (*) y que es mínima con esa propiedad.

Claramente $\max |X_i| \neq 1$. Supongamos que $|X_i| = h$ con $h \geq 2$ entonces $\omega(H_{V(H)-X_1}) \leq \omega(H)$ y $\alpha(H_{V(H)-X_1}) \leq \alpha(H)$.

Sea $y_1 \in X_1$ como $H_1$ es mínima, entonces $H_{V(H)-y_1}$ satisface (*)

entonces :

$$|V(H)| - 1 = |V(H) - y_1| \leq \omega(H_{V(H)-y_1})\ \alpha(H_{V(H)-y_1}) \leq \omega(H)\alpha(H) \leq |V(H)| -1.$$

Por lo tanto la igualdad se dá cuando:

$$\omega(H_{V(H)-y_1}) = \omega(H) = p$$

$\alpha(H_{V(H)-y_1}) = \alpha(H) = q$

$|V(H)| - 1 = pq$

Ya que $H_{V(H)-x_1}$ se puede obtener de $G_{V(G)-x_1}$ duplicando un vértice, y utilizando el lema anterior, obtenemos:

$\theta(H_{V(H)-x_1}) = \alpha(H_{V(H)-x_1}) \le q$

Es decir, $H_{V(H)-x_1}$ se puede cubrir con q clanes de H.

Tomamos éstos clanes ajenos dos a dos y tales que:

$|C_1| \ge |C_2| \ge \ldots \ge |C_q| \qquad |C_i| \le \omega(H) = p$

$\sum_{i=1}^{q} |C_i| = |V(H)| - h = pq - (h-1) = pq - h + 1$ entonces,

$\sum_{i=1}^{q} |C_i| = |V(H)| = pq + 1 \ldots\ldots\ldots(**)$

$|C_i| < p$ para a lo más h-1 valores de i, por lo tanto,

$|C_1| = |C_2| = \ldots. = |C_{q-h+1}| = p$

Sea H' la subgráfica de H inducida por el siguiente conjunto :

$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{q-h+1} \cup y_1$, entonces por (**) tenemos que:

$|H'| = p(q - h + 1) + 1 < pq + 1 + |V(H)|$

$\alpha(H') > q - h + 1$

Sea S' un conjunto independiente de H' con q-h+2 vértices.

Como $C_1, C_2, \ldots C_{q-h+1}$, $y_1$ es una partición de H' en q - h + 2 clanes, y $y_1 \in S$, entonces $S = S' \cup X_1$ es un conjunto independiente de H y $q = \alpha(H) \ge |S| = |S'| = |X_1| = q-h+2+h = q+2$ ésto implica que $q \ge q+2$ lo cual es imposible. Por lo tanto (*) se cumple.

#

Teorema 1.5. (Lovász) [9] Sea G una gráfica, son equivalentes:

a) $\omega(G_A)\,\alpha(G_A) \ge A \quad A \subseteq V(G)$.

b) $\chi(G_A) = \omega(G_A) \quad A \subseteq V(G)$.

c) $\alpha(G_A) = \theta(G_A) \quad A \subseteq V(G)$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) La demostración se hará por inducción sobre el número de vértices de la gráfica.

Supongamos que el teorema se cumple para gráficas G tal que $|V(G)| < n$.

Por inducción $G_A$ es $\chi$-perfecta para $A \subset V(G)$. Sea $p = \omega(G)$, y sea $\mathcal{S}$ una familia de conjuntos independientes de G.

Demostraremos primero que existe un conjunto independiente S en G tal que $\omega(G-S) < \omega(G)$.

Supongamos que ésto no se cumple, entonces a cada conjunto $S \in \mathcal{S}$ le corresponde un clan $C_S$ contenida en G-S tal que $|C_S| = p$.

Sea H la gráfica que se obtiene de G reemplazando cada vértice $x_i$ por un conjunto $X_i$ tal que $|X_i|$ = número de clanes $C_s$ en G que contiene a $x_i$.

Por el lema 1.2 $\omega(H)\,\alpha(H) \geq |H| = \sum |X_i| = \sum_{s\in\mathcal{S}} |Cs| = p|\mathcal{S}|$

Sabemos que $\omega(H) \leq \omega(G) = p$ y que

$$\alpha(H) = \max_{t\in\mathcal{S}} \bigcup_{x_i\in t} x_i = \max \sum |T\cap Cs| = \max \sum_{S\neq T} |T\cap Cs| \leq |\mathcal{S}|-1$$

Lo cual implica que: $\omega(H)\alpha(H) \leq p\,(|\mathcal{S}|-1) < |H|$ lo cual contradice al lema 1.2. Por lo tanto existe un conjunto $S \in \mathcal{S}$ tal que $\omega(G-S) \leq \omega(G)-1$ ésto implica que los vértices de G se pueden colorear usando un color para S y $\chi(G-S) = \omega(G-S)$ colores, ésto quiere decir que $\chi(G) \leq 1 + (\omega(G)-1) = \omega(G)$, es decir, G es $\chi$-perfecta.

b) ⇒ a) Sea G una gráfica tal que sea $\chi$-perfecta, esto quiere decir que para todo conjunto $A \subseteq V(G)$ existe una coloración ( $A_1$, $A_2$, ... , $A_q$) de $G_A$ con $q = \chi(G) = \omega(G)$ colores, entonces, $|A| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| \leq q\,\alpha(G_A) = \omega(A)\,\alpha(G_A)$, por lo tanto $\omega(G_A)\,\alpha(G_A) \geq |A|$ para $A \subseteq V(G)$.

a) ⇒ c) Sea G una gráfica tal que cumple con a), es decir $\omega(G_A)\,\alpha(G_A) \geq |A|$ para $A \subseteq V(G)$.

Sabemos que $\alpha(G_A) = \omega(G_A)$ y $\theta(G_A) = \chi(G_A)$, por lo tanto, $\omega(G_A)\,\alpha(G_A) = \alpha(G_A^c)\,\omega(G_A^c)$ ésto implica que $G^c$ cumple con a), por lo tanto cumple con b), es decir $X(G_A^c) = \omega(G_A^c)$, lo cual implica que $G^c$ es $\chi$-perfecta, y por el teorema 1.1 G es $\alpha$-perfecta.

c) ⇒ a) Sea G tal que satisface c) ⇒ $G^c$ satisface b), y por lo tanto a). $\omega(G_A)\,\alpha(G_A) = \alpha(G_A^c)\,\omega(G_A^c) \geq |A|$.

#

El teorema de Lovasz nos dice que los términos $\alpha$-perfecta y $\chi$-perfecta son equivalentes, por lo que de ahora en adelante a éstas gráficas las llamaremos *Graficas Perfectas*.

Diremos que una gráfica es *fuertemente perfecta* si todas sus subgráficas inducidas H contienen un conjunto independiente que intersecta a todos los clanes maximales de H.

Es fácil probar que toda gráfica fuertemente perfecta es perfecta.

Un ejemplo de gráficas fuertemente perfectas son las gráficas de Meyniel, como se demostrará a continuación.

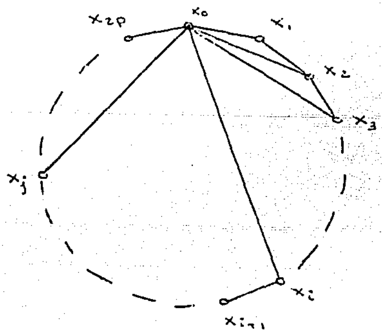
<u>Teorema</u> <u>1.6</u>. [10] Si G es una gráfica de Meyniel, entonces G es fuertemente perfecta.

Para la demostración de teorema, necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 1.3. Si una gráfica G contiene un ciclo de longitud impar $(x_0, x_1, \ldots, x_{2t}, x_0)$ tal que la trayectoria $(x_0, x_1, \ldots, x_{2t})$ no contiene cuerdas, y $x_0$ no es adyacente al menos a una $x_k$, entonces G contiene un ciclo de longitud impar al menos de cinco con a lo más una cuerda.

Demostración. Sea G una gráfica que cumple con las hipótesis de lema.

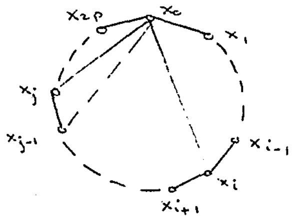
caso 1. $(x_0, x_2) \in A(G)$.
Consideremos la $i$ máxima tal que $x_0$ es adyacente a $x_1, \ldots, x_i$ y la mínima $j$ tal que $j \geq i+1$ y $(x_0\ x_j) \in A(G)$.




El ciclo $(x_0, x_1, \ldots, x_j, x_0)$ no tiene cuerdas. El ciclo $(x_0, x_{i-1}, x_i, \ldots x_j, x_0)$ tiene una sola cuerda.

Uno de éstos ciclos es de longitud al menos cinco.

caso 2. $(x_0, x_2) \notin A(G)$.
Consideremos la mínima $j$ impar tal que $(x_0, x_j) \in A(G)$ y la máxima $i$ tal que $i \leq j-2$ $(x_0, x_i) \in A(G)$. ($i$ es par).




El ciclo $(x_0, x_1, \ldots, x_j, x_0)$ es de longitud impar y contiene a lo más una cuerda.

#

Un *ciclo indicador* en una gráfica G es un ciclo $(w, v_0, v_1, \ldots, v_k, w)$ tal que cumple con las siguientes condiciones:

1) $v_0$ no es adyacente a $v_2$, $v_3$, ..., $v_k$.

2) w no es adyacente a $v_1$.

3) Existe un conjunto independiente S tal que $v_1, v_k \in S$ e intersecta a todos los clanes maximales de $G-v_0$.

Lema 1.4. Si una gráfica G contiene un ciclo indicador, entonces, G contiene un ciclo de longitud impar al menos cinco con a lo más una cuerda.

Demostración. Sea G una gráfica que contiene un ciclo indicador $(w, v_0, v_1, \ldots, v_k, w)$.

Supongamos que G no contiene ciclos de longitud impar al menos cinco con a lo más una cuerda.

El ciclo indicador cumple con las siguientes propiedades:

4) Sin pérdida de generalidad $(v_1, v_2, \ldots, v_k, w)$ es la trayectoria minimal de $v_1$ a w que cumple con 1), 2) y 3).

5) $(v_1, \ldots, v_k)$ no contiene cuerdas (ésto es una implicación del inciso 4).

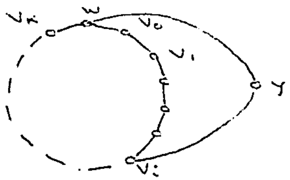
6) Todo vértice $v_r$ adyacente a w es tal que r es par. De otra forma el ciclo se puede encontrar aplicando el lema 1.3 al ciclo $(w, v_0, \ldots, v_r, w)$.

Observación: k es un número par.

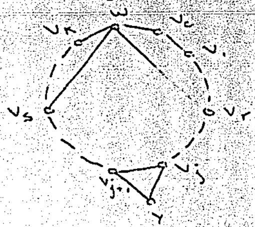
$$\text{Sea } S^* = \{y \in S \mathbin{/} y \text{ ady } v_j \text{ y ady } v_{j+1} \quad j \in 0, 1, \ldots k-1\}.$$

7) $y \in S^*$ no es adyacente a $v_o$. De otra forma, el ciclo se puede encontrar aplicando el lema 1.3 al ciclo $(y, v_0, v_1, \ldots, v_j, y)$ o al ciclo $(y, v_0, v_1, \ldots, v_j, v_{j+1}, y)$(uno de los dos es de longitud impar).

8) $y \in S^*$ no es adyacente a w. De lo contrario, habría una contradicción con 4). Ya que si tomamos el mínimo indice tal que $(y, v_i) \in A(G)$, la trayectoria $(v_1, \ldots, v_i, y, w)$ es menor que la trayectoria $(v_1, v_2, \ldots, v_k, w)$.



9) Toda $y \in S^*$ es adyacente al menos a tres vértices de la trayectoria $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Si suponemos que ésto no se cumple, obtenemos el ciclo $(w, v_r, \ldots, v_j, y, v_{j+1}, \ldots, v_s, w)$ donde r es el máximo índice $r \le j$ y $(w, v_r) \in A(G)$, y s es el mínimo índice $s \ge j+1$ y $(w, v_s) \in A(G)$.




10) Toda $y \in S^*$ es adyacente a 3 vértices $v_{j-1}$, $v_j$, $v_{j+1}$ $\in \{v_0, v_1, \ldots, v_K\}$

De otra forma habría una contradicción con (4) ya que

$v_1, v_2, \ldots, v_r$, y $v_s, \ldots, v_K$

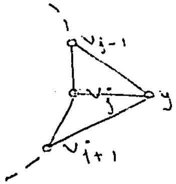
con r el mínimo índice tal que $(y, v_r) \in A(G)$

y s el máximo índice tal que $(y, v_s) \in A(G)$

es de menor longitud que la trayectoria $(v_1, v_2, \ldots, v_K, w)$

<u>Observación</u> $S^* \neq \emptyset$

Sea $y \in S^*$ adyacente a $v_{j-1}$ y a $v_{j+1}$ si sustituimos y por $v_j$ en el ciclo indicador original, obtenemos un nuevo ciclo indicador que contiene un conjunto $S^*$ más chico.




Repitiendo éste proceso tantas veces como sean necesarias obtenemos un nuevo ciclo indicador.

$(w, v_0', v_1', \ldots, v_k', w)$ que satisface el punto (4) y $S^* = \emptyset$.

Ya que k es par (por(6)) y $(v_1', v_k') \in S$ existe una arista $(v_j', v_{j+1}')$ con $j > 0$ tal que $v_j' \notin S$ (basta tomar $j = i - 2$ con i el mínimo índice par tal que $v_i \in S$).

Sea C cualquier clan maximal contenido en $G - v_0$ que extiende a la arista $(v_j', v_{j+1}')$. Ya que $S^{\bullet} = \emptyset$, C es ajeno a S, lo cual contradice la selección de S.

#

<u>Teorema 1.7.</u> Toda gráfica de Meyniel es fuertemente perfecta.

<u>Demostración.</u> Dada una gráfica cualquiera G, daremos un algoritmo para encontrar un ciclo indicador o un conjunto independiente transversal de clanes maximales.

Supongamos que tal algoritmo se ha dado para toda gráfica con menos de n vértices.

Sea G una gráfica tal que $|V(G)| = n$.

– Elegimos un vértice $t \in V(G)$ y una componente conexa H de $G-t-N(t)$ de tal forma que H sea mínima ( sobre la elección de t y de H ).

Si $H = \emptyset$ tomamos $S = t$ .
Si $H \neq \emptyset$ escogemos un vértice $v_0 \in V(H)$ y denotamos por F a la componente conexa de $G-v_0-N(v_0)$ que contiene a t.

<u>Observación:</u> Todo vértice $x \in V(H - v_0 - N(v_0))$ pertenece a F. De no ser así, la componente de $G - v_0 - N(v_0)$ que contiene a x estaría contenida en $H - v_0$ y tendría menos vértices que H.

Ahora nos fijamos en $G - v_0$ . Por hipótesis de inducción, en $G - v_0$ existe un conjunto independiente S transversal de clanes maximales de $G - v_0$.

Buscamos los vértices $v_1, v_2 \in V(G - v_0)$ tales que:
$v_1 \in N(v_0) \cap S$ y $v_2 \in N(v_1) \cap F$.

∘ Si tales vértices no existen, entonces el conjunto $(S - N(v_0)) \cup v_0$ es un conjunto independiente transversal de clanes maximales de G.

<u>Demostración:</u> Es claro que $(S - N(v_0)) \cup v_0$ es un conjunto independiente. Supongamos que existe un clan maximal Q de G ajeno a $(S - N(v_0)) \cup v_0$, como $v_0 \notin Q$ entonces existe un vértice $x \in Q - N(v_0)$ y un vértice $v_1 \in Q \cap S$. Es claro que $v_1 \in N(v_0)$.

Si $v_1 \in N(t)$, entonces tomamos $v_2 = t$ y llegamos a una contradicción. De otra forma $v_1 \in H$ y $x \in (H \cup N(t))$, y en tal caso tomamos $v_2 = x$, con lo que llegamos a otra contradicción.

∘ Si $v_1$ y $v_2$ existen, entonces buscamos los vértices $w$, $z$ distintos de $v_0$, $v_1$, y $v_2$ y distintos entre sí, tales que cumplan:

$$w \in (N(v_0) - N(v_1)) \quad y \quad z \in (N(w) \cap F \cap S).$$

∘ Si tales vértices no existen, entonces $S$ es un conjunto independiente transversal de clanes maximales de $G$.

<u>Demostración:</u> Supongamos que existe $Q$ un clan maximal en $G$ ajeno a $S$. $v_1 \in S$, entonces existe al menos un vértice $w \in Q$ no adyacente a $v_1$. $v_0 \in Q$ . Ocurre uno de los siguientes casos:

caso 1. $(Q-v_0) \cap H \neq \emptyset$.

caso 2. $(Q-v_0) \subseteq N(t)$.

Sea $Q^{*}$ un clan maximal en $G-v_0$ que extiende a $Q-v_0$ en el primer caso, y $(Q-v_0) \cup t$ en el segundo caso.

En cualquiera de los dos casos tenemos que:

$Q^{*} \subseteq H \cup N(t) \cup t \quad y \quad Q^{*} - N(v_0) \subseteq F$

El vértice $z \in Q^{*} \cap S$ es tal que $z \notin N(v_0)$ entonces $Q$ se puede extender a $Q \cup \{z\}$ .

∘ Si $w$ y $z$ si existen, entonces cualquier camino de $v_2$ a $z$ en $F$ forman un conjunto indicador tomando $v_k = z$.

Sea $G$ una gráfica de Meyniel. Usando el algoritmo anterior, en $G$ encontramos un conjunto independiente transversal en clanes maximales de $G$ o un ciclo indicador.

Supongamos que en $G$ hay un ciclo indicador. Por la definición de ciclo indicador y por el lema 1.3 se tiene que todo ciclo de longitud impar al menos cinco, contiene a lo más una cuerda, lo cual contradice la definición de gráfica de Meyniel.

#

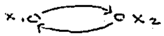
## 2. TEORIA DE NUCLEOS.

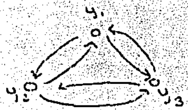
Sea D una digráfica:

$S \subseteq V(D)$ es un *núcleo* de D si es independiente y absorbente.

Ejemplos:

1) En las digráficas simétricas completas, un sólo vértice es un núcleo de D.

D1: 

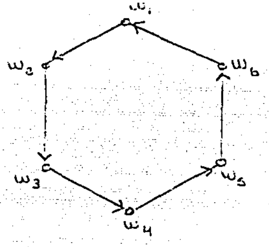

D2: 


$S = x_1$ es un núcleo de D1.

$S = y_3$ es un núcleo de $D_2$

2) En los ciclos dirigidos $C_n$ tenemos dos casos:

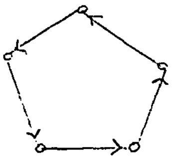
caso 1. n es un número par, es decir $n = 2m$

D3: 


$S = \{ w_1, w_3, w_5 \}$ es un núcleo de D3.

$S' = \{ w_2, w_4, w_6 \}$ es núcleo de D3.

caso 2. n es un número impar, es decir $n = 2m + 1$.

D4: 

D4 no tiene núcleo.

**Proposición 2.1.** Todo núcleo es un conjunto independiente maximal y un conjunto absorbente minimal.

Demostración: Sea D una digráfica y N un núcleo de D.

1. N es un conjunto independiente maximal.

Supongamos que existe un conjunto $I \subseteq V(D)$ independiente en D tal que $N \subset I$. Ésto implica que existe $x \in (I - N)$. Como $x \notin N$ y N es un núcleo, entonces existe una xN-flecha en D. Pero $N \subset I$, ésto es una contradicción ya que I es un conjunto independiente. Por lo tanto $I = \emptyset$.

2. N es un conjunto absorbente minimal.

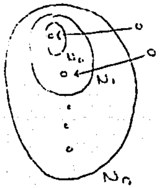
Supongamos que existe un conjunto $A \subseteq V(D)$ absorbente tal que $A \subset N$. Ésto implica que existe $x \in (N - A)$. Por ser A un conjunto absorbente, existe una xA-flecha en D, por lo tanto existe una xN-flecha en D, lo cual es una contradicción ya que N, por ser núcleo, es un conjunto independiente.

#

**Teorema 2.1.** (Von Neuman) [12] Toda digráfica sin ciclos dirigidos tiene núcleo.

Demostración:

Sean:



$$N_0 = \{ z \in V(D) \ / \ \delta_D^+(z) = 0 \}$$
$$D_1 = D - (N_0 \cup \Gamma^-(N_0))$$
$$N_1 = \{ z \in V(D) \ / \ \delta_D^+(z) = 0 \}$$
$$D_2 = D_1 - (N_1 \cup \Gamma^-(N_1))$$
$$N_2 = \{ z \in V(D) \ / \ \delta_{D2}^+(z) = 0 \}$$
$$D_3 = D_2 - (N_2 \cup \Gamma^-(N_2)).$$
$$\vdots$$

Sea $N = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_n$.

N es un núcleo de D.

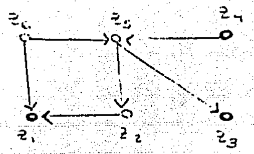
#

Ejemplo:

D:

$N_0 = \{ z_1, z_3 \}$

$D_1 = D - \ z_1, z_3 \ \cup \ z_2,$




$z_5,\ z_6)$ .

$D_1 = \{\ z_4\ \}$.

$N_1 = \{\ z_4\ \}$.

$N = \{\ z_1,\ z_3,\ z_4\}$ es un núcleo de D.

<u>Corolario 2.1.</u> Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

#

Un *seminúcleo* de una digráfica D es un subconjunto $S \subseteq V(D)$ tal que cumpe las siguientes condiciones:

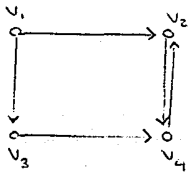
a) S es un conjunto independiente.

b) Si existe una Sx-flecha en D, entonces existe una xS-flecha en D.

Dada ésta definición, pueden surgir dos preguntas:

1) ¿ Todo núcleo es un seminúcleo ?
Si, ésto se sigue de las definiciones.

2) ¿ Todo seminúcleo es un núcleo ?
No, un contraejemplo es la siguiente digráfica:




$\{v_4\}$ es un seminúcleo, sin embargo no es un núcleo.
$\{v_2, v_3\}$ es un núcleo de la digráfica.

<u>Teorema 2.2.</u> (Victor Neumann) [11] Sea D una digráfica tal que toda subdigráfica inducida de D posee un seminúcleo, entonces D tiene núcleo.

<u>Demostración:</u> La demostración se hará por inducción sobre el número de vértices de la digráfica.

– Sea D una digráfica. Si $|V(D)| = 1$ ó 2, es claro que el teorema se cumple.

– Supongamos que para toda digráfica D' con $|V(D')| < n$ y tal que toda subdigráfica inducida de D' tiene seminúcleo, entonces D' tiene núcleo.

— Sea D una digráfica tal que $|V(D)| = n$ y toda subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo.

Sea So un seminúcleo de D.

Sea $H^{\bullet} = V(D) - (So \cup \Gamma^{-}(So))$. Sea H la subdigráfica inducida por $H^{\bullet}$ .

caso 1. Si $H = \emptyset$ entonces So es un núcleo de D.

caso 2. Si $H \neq \emptyset$ por hipótesis de inducción, H tiene un núcleo No.

#

<u>Lema 2.1</u> Sea D una digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud impar, y tal que $|V(D)| \geq 2$, entonces, existe una partición de los vértices de D en dos componentes $V_1$ y $V_2$ tales que $V_1$ y $V_2$ son conjuntos independientes.

<u>Demostración:</u> Sea D una digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud impar y $|V(D)| \geq 2$. Sea $m_0 \in V(D)$.

Tomemos la siguiente partición:

$V_1 = \{ z \in V(D)$ / existe una $m_0z$-trayectoria dirigida de longitud par $\}$ .

$V_2 = \{ z \in V(D)$ / existe una $m_0z$-trayectoria dirigida de longitud impar $\}$.

— $m_0 \in V_1$, por lo tanto $V_1 \neq \emptyset$.

Como $|V(D)| \geq 2$, entonces existe $z \in V(D)$ $z \neq m_0$ tal que $(m_0, z) \in F(D)$, $\Rightarrow z \in V_2$, por lo tanto $V_2 \neq \emptyset$.

— $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Supongamos que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, por lo tanto existe $z_0 \in V_1 \cap V_2$ ésto implica que existen $T_1$ una $m_0z$-trayectoria dirigida de longitud par, y $T_2$ una $m_0z$-trayectoria dirigida de longitud impar. Como D es fuertemente conexa, existe $T_3$ una $zm_0$-trayectoria dirigida.

Caso 1. La longitud de $T_3$ es par.
Entonces tomamos $T_3 \cup T_2$ la cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Lo cual es una contradicción.

Caso 2. La longitud de $T_3$ es impar.
Entonces tomamos $T_3 \cup T_1$ la cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Ésto es una contradicción.

Por lo tanto $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

— $V_1$ es un conjunto independiente.

Supongamos que existe $f = (u, v) \in F(D)$ con $u, v \in V_1$. Sea $T_3$ una $vm_0$-trayectoria dirigida. Sabemos que existen $T_1$ una

$m_0v$-trayectoria dirigida de longitud par y $T_2$ una $m_0v$-trayectoria dirigida de longitud par.

Caso 1. La longitud de $T_3$ es par.
$T_1 \cup (u,v) \cup T_3$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Lo cual contradice la hipótesis del teorema.

Caso 2. La longitud de $T_3$ es impar.
$T_2 \cup T_3$ contiene un ciclo de longitud impar, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $V_1$ es un conjunto independiente.

— $V_2$ es un conjunto independiente.
La demostración es análoga a la anterior.

#

<u>Teorema</u> <u>2.3.</u> (M. Richardson) [11] Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D tiene núcleo.

<u>Demostración:</u>

Caso 1 Si D es fuertemente conexa, por el lema 2.1 existe una partición de V(D) en dos conjuntos independientes $V_1$ y $V_2$. Como D es fuertemente conexa, entonces para cualquier $z \in V(D)$ $\delta_d^+(z) > 1$ por lo tanto $V_1$ y $V_2$ son núcleos de D.

Caso 2. Si D no es fuertemente conexa.
Sea $C_0$ una componente fuertemente conexa terminal (es decir, que de $C_0$ no salen flechas hacia otra componente). $C_0$ es fuertemente conexa y no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, por el caso 1 $C_0$ tiene dos núcleos $V_1$ y $V_2$, cualquiera de los dos núcleos de $C_0$ es seminúcleo de D. Por el teorema 2.2 se deduce que D tiene núcleo.

#

<u>Definiciones:</u>

Una digráfica D se llama *núcleo-perfecta* si toda subdigráfica inducida de D posee un núcleo.

Una digráfica D se llama *R-digráfica* si toda subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo.

<u>Teorema</u> .<u>2.4.</u> [11] Una digráfica es R-digráfica si y sólo si cada subdigráfica inducida de D posee un núcleo.

Éste teorema es consecuencia directa del teorema 2.2.

#

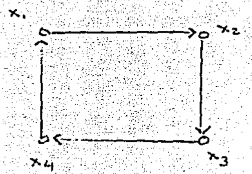
El teorema nos dice que los términos núcleo-perfecta y R-digráfica son equivalentes.

Ejemplos:

1) Las digráficas completas simétricas con núcleo-perfectas.

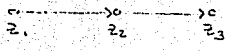
2) Los ciclos dirigidos de longitud par son núcleo-perfectas.

$C_4$:

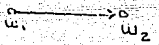



$N_1 = \{x_1, x_3\}$

Las únicas subdigráficas inducidas de $C_4$ son:

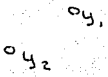



$N_2 = \{z_1, z_3\}$




$N_3 = \{w_2\}$


$N_4 = \{u\}$




$N_5 = \{y_1, y_2\}$

3) Las digráficas sin ciclos dirigidos son núcleo-perfectas. Ésto es un corolario del teorema 2.1.

4) Los ciclos de longitud impar no son digráficas núcleo-perfectas.

Si D es una digráfica núcleo-perfecta, es claro que todo clan de D tiene un vértice que es sucesor de los demás vértices del clan.

A una digráfica D la llamaremos *nucleo-perfecta critica* si:

1. D no es núcleo-perfecta.

2. Toda subdigráfica inducida de D es núcleo-perfecta.

Sabemos que los ciclos dirigidos de longitid impar $C_{2n+1}$, no tienen núcleo, sin embargo, toda subdigráfica inducida de $C_{2n+1}$ es una digráfica sin ciclos, por lo tanto tienen núcleo. Por lo tanto, los ciclos dirigidos de longitud impar son digráficas núcleo-perfectas criticas.

Proposición 2.2. Sea D una digráfica núcleo-perfecta critica, entonces:

1) D es fuertemente conexa.

2) La parte asimétrica de D, Asim(D), es fuertemente conexa.

Demostración:

1) Supongamos que existe una digráfica D núcleo-perfecta critica tal que no sea fuertemente conexa. Sean $D_1$, $D_2$, ..., $D_n$ con $n \geq 2$ las componentes fuertemente conexas de D. Consideremos $D^{\bullet}$ la digráfica de condensación de D. $D^{\bullet}$ es aciclica, por lo tanto $D^{\bullet}$ tiene núcleo.
Sea $D_0 = \{ x \in V(D^{\bullet}) \ / \ \delta^{+}_{D^{\bullet}}(x) = 0 \}$
Para cada $x \in D_0^{\bullet}$, sea $N_x$ un núcleo de la componente fuertemente conexa correspondiente a x. $S = \bigcup_{x \in D_0} N_x$ es un seminúcleo de D.
Sea N un núcleo de $D - (S \cup \Gamma^{-}(S))$. $N \cup S$ es un núcleo de S, ésto es una contradicción, ya que D por ser núcleo-perfecta critica, no tiene núcleo.
Por lo tanto D es fuertemente conexa.

2) Supongamos que existe una digráfica D núcleo-perfecta critica tal que Asim(D) no es fuertemente conexa. Sean $D_1$, $D_2$, ..., $D_n$ las componentes fuertemente conexas de D. Consideremos $D^{\bullet}$ la digráfica de condensación de Asim(D).
Sea $x_0 \in V(D^{\bullet})$ tal que $\delta^{+}_{D^{\bullet}}(x_0) = 0$.
Sea $N_{x_0}$ un núcleo de la componente fuertemente conexa correspondiente a $x_0$.
$N_{x_0}$ es un núcleo de D, ésto contradice el hecho de que D sea núcleo-perfecta critica.
Por lo tanto Asim(D) es fuertemente conexa.

#

Lema 2.2. Si $\mathrm{Asim}(D) \neq \emptyset$ es fuertemente conexa, y cada ciclo de longitud impar tiene al menos dos flechas simétricas, entonces existe una partición de $V(D)$ en dos conjuntos $V_1$ y $V_2$ tales que $V_i$ $i=1,2$ es independiente. (Es decir, D es bipartita).

Demostración: Sea $x_0 \in V(D)$, y sean:

$V_1 = \{ x_0 \} \cup \{ z \in V(D) \,/\,$ existe una $x_0z$-trayectoria dirigida de longitud par en $\mathrm{Asim}(D) \}$ .

$V_2 = \{ z \in V(D) \,/\,$ existe una $x_0z$-trayectoria dirigida de longitud impar en $\mathrm{Asim}(D) \}$

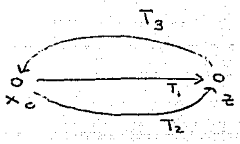
— $V_1$ y $V_2$ son una partición.

a) $V_1 \neq \emptyset$ ya que $x_0 \in V_1$.
$V_2 \neq \emptyset$ ya que como $\mathrm{Asim}(D)$ es fuertemente conexa, entonces existe $z \in V(D)$ tal que $(x_0, z) \in F(D)$ , por lo tanto $z \in V_2$.

b) $V_1 \cup V_2 = V(D)$ ya que $\mathrm{Asim}(D) \neq \emptyset$ y es fuertemente conexa.

c) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ Supongamos que existe $z \in V_1 \cap V_2$, ésto implica que existe $T_1$ una $x_0z$-trayectoria dirigida en $\mathrm{Asim}(D)$ de longitud par, y $T_2$ una $x_0z$-trayectoria dirigida en $\mathrm{Asim}(D)$ de longitud impar.

Como $\mathrm{Asim}(D)$ es fuertemente conexa, existe $T_3$ una $zx_0$-trayectoria dirigida en $\mathrm{Asim}(D)$.



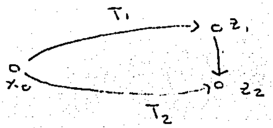

Caso 1. $T_3$ es de longitud par.
$T_2 \cup T_3$ es un camino cerrado de longitud impar en $\mathrm{Asim}(D)$, por lo tanto contiene un ciclo dirigido de longitud impar asimétrico lo cual no puede ocurrir.

Caso 2. $T_3$ es de longitud impar.
$T_1 \cup T_3$ contiene un ciclo asimétrico de longitud impar. Ésto es una contradicción.

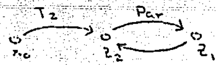
Por lo tanto se debe cumplir que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

– $V_1$ es un conjunto independiente.

Supongamos que existen $z_1, z_2 \in V_1$ tal que $(z_1, z_2) \in F(D)$. Sean $T_1$ una $x_0z_1$-trayectoria dirigida en Asim(D) de longitud par, y $T_2$ una $x_0z_2$-trayectoria dirigida en Asim(D) de longitud par.

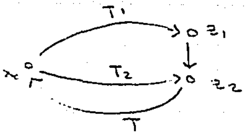



Si $z_2 \in T_1$




entonces $(z_2, T_1, z_1) \cup (z_2, z_1)$ es un ciclo de longitud impar con a lo más una flecha simétrica. Lo cual no pude ocurrir.

Existe T una $z_2x_0$-trayectoria en Asim(D).




Caso 1. T es de longitud par.

$T_1 \cup (z_1, z_2) \cup T$ contiene un ciclo dirigido asimétrico de longitud impar, lo cual no puede ocurrir.

Caso 2. T es de longitud impar.

$T_2 \cup T$ contiene un ciclo dirigido asimétrico de longitud impar, lo cual es una contradición.

Por lo tanto $V_1$ es un conjunto independiente.

– $V_2$ es un conjunto independiente.

Ésto se demuestra de una forma análoga al la demostración anterior.

#

<u>Teorema</u> <u>2.5.</u> [4] Si cada ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D es núcleo-perfecta.

Demostración: Supongamos que D no es núcleo-perfecta, entonces D contiene una subdigráfica inducida H que es núcleo-perfecta crítica, entonces:

1) H es fuertemente conexa.

2) Asim(H) es fuertemente conexa.

3) Todo ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos dos flechas simétricas.

Por el lema 2.2 H es bipartita. Por lo tanto H tiene núcleo, lo cual contradice lo que se está suponiendo.

Por lo tanto D es núcleo-perfecta.

#

Definiciones:

Sea D una digráfica y sean I, R $\subset$ V(D).

1. I es un *seminúcleo de D modulo R* si:
   a) $I \cap R^c$ es un conjunto independiente.
   b) Si $(u,v) \in F(D)$ con $u \in I \cap R^c$ y $v \in I^c \cap R^c$ entonces existe un vértice $w \in I$ tal que $(v,w) \in F(D)$.

2. I es un *seminúcleo fuerte de D modulo R* si:
   a) D no contiene $(I \cap R^c)I$-flechas.
   b) Si $(u,v) \in F(D)$ con $u \in I \cap R^c$ y $v \in I^c \cap R^c$ entonces existe $w \in I$ tal que $(v,w) \in F(D)$.

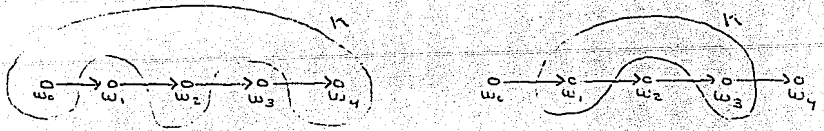
Sea $K \subset V(D)$. Una trayectoria dirigida se llama *K-normal* si:

a) $V(T) \cap K = \{ w_j \,/\, 1 \leq j \leq n \quad j \text{ impar} \}$
   $V(T) \cap K = \{ w_j \,/\, 0 \leq j \leq n \quad j \text{ par} \}$.

b) Si $s < j < n$ $\quad w_j \in K^c \quad w_s \in K$ entonces $(w_j, w_s) \notin F(D)$.

<u>Obsevación:</u> Cualquier trayectoria dirigida K-normal pasa por K y $K^c$ alternadamente.

Caso 1. Caso 2.




<u>Teorema 2.6.</u> [6] Sean Io, I, $R \subset V(D)$ tales que $Io \subset I$, $Io \cap R = \emptyset$ y satisfacen las siguientes condiciones:

a) I es un seminúcleo fuerte modulo R.

b) Toda IoR-trayectoria I-normal pasa por $U = \Gamma^{-}(Io) \cap R^c$.

Entonces $S = \{\, w \in I$ / existe una Iow-trayectoria I-normal que no pasa por U$\}$ es un seminúcleo de D que cumple con: $Io \subset S \subset (I \cap R^c)$.

<u>Demostración:</u> Por (a) se van a cumlir dos cosas:

1. $U \subset (I^c \cap R^c)$ y 2. Io es un conjunto independiente.

<u>Demostración:</u>

1. $U \subset I^c \cap R^c$.
$U = \Gamma^{-}(Io) \cap R^c$ Sea $z \in U \Rightarrow z \in \Gamma^{-}(Io)$ y $z \in R^c$ como $z \in \Gamma^{-}(Io)$ existe $x \in Io$ tal que $(z,x) \in F(D)$, ya que $Io \subset I$ y como I es un seminúcleo fuerte modulo R entonces $z \notin I \Rightarrow z \in I^c \cap R^c$. Por lo tanto $U \subset (I^c \cap R^c)$.

2. Io es un conjunto independiente.
Sabemos que $Io \subset I$, y por ser I un seminúcleo fuerte modulo R entonces se cumple una propiedad más fuerte que el de ser un conjunto independiente y también Io cumple con tal propiedad, por lo tanto Io es un conjunto independiente.

Por (b) se van a cumplir dos cosas:

1. $S \subset R^c$ y 2. $S \subset (I \cap R^c)$

Demostración:

1. $S = \{ w \in I$ / existe una $Iow$-trayectoria I-normal que no pasa por U $\}$.
   S no intersecta a R, ya que si lo hiciera, habría una $IoR$-trayectoria T I-normal; por (b) T pasa por U, lo cual contradice la definición de S Por lo tanto $S \subset R^c$.

2. Por la definición de S y por 1. $S \subset (I \cap R^c)$.

Usando (a) concluimos que D no contiene SI-flechas, ya que $S \subset I$ y sabemos que I es un conjunto independiente. Por lo tanto $Io \subset S \subset (I^c \cap R^c)$.

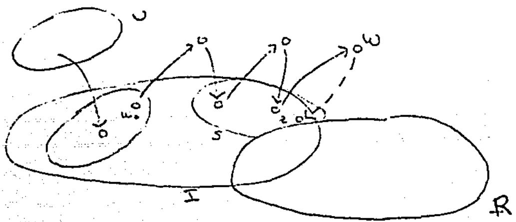
Ahora supongamos que S no es un seminúcleo fuerte modulo R, ésto implica que existe $s \in S$ y $w \in (V(D)-S)$ tal que $(s,w) \in F(D)$ y D no contiene ws-flechas.

Sea $(w_0, w_1, \ldots, w_m = s)$ y $w_0 \in Io$ una IoS-trayectoria dirigida I-normal que no pasa por U.

$S \subset I$, como I es un conjunto independiente y $(s,w) \in F(D)$ entonces $w \notin I$, entonces la trayectoria $(w_0, w_1, \ldots w_m, w)$ es I-normal. Por lo tanto $w \notin R$, de otra forma habría una contradicción con (b), por lo que $w \in (I^c \cap R^c)$.

Por (a) existe $(w,z) \in F(D)$ con $z \in I$. De ésta forma obtenemos una nueva trayectoria $(w_0, w_1, \ldots, w_m, w, z)$ I-normal que no pasa por U. Por lo tanto $z \in S$ y $(w,z)$ es una wS-flecha lo cual contradice lo que se había supuesto.

Por lo tanto S es un seminúcleo fuerte.




#

Teorema 2.7. [6] Sean $Io, I, R \subset V(D)$ que satisfacen lo siguiente:

a) I es un seminúcleo fuerte modulo R.

b) D no contiene seminúcleos S tales que $Io \subset S \subset (I \cap R^c)$.

Entonces existe una IoR-trayectoria I-normal $T = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ que no pasa por $\Gamma^-(Io) \cap R^c$ que satisface las siguientes propiedades:

1) T no contiene $(V(T)-t_n)T^0$-seudodiagonales.

2) T es de longitud par si y sólo si $t_n \in I$.

Demostración: Por el teorema 2.6 existe una IoR-trayectoria I-normal T que no pasa por $\Gamma^-(Io) \cap R^c$.

Escogemos T de longitud mínima. Claramente T satisface:

a) $(t_{2i}, t_j) \notin F(D)$ $\forall$ i, j $0 \leq 2i < j \leq n$ $j \neq 2i + 1$.

b) $(t_{2i+1}, t_{2j}) \notin F(D)$ $\forall$ i, j $0 < 2i+1 < 2j \leq n$ $j \neq i+1$.

Utilizando la normalidad de T concluimos que T satisface (1) y (2).

#

Teorema 2.8. [6] Sean Io, I, R $\subset$ V(D) tales que $\emptyset \neq Io \subset I$, $I \cap R = \emptyset$ y supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

a) I es un seminúcleo fuerte modulo R.

b) D no contiene núcleo.

c) D - Io U $\Gamma^-(Io)$ es una R-digráfica.

Entonces existe una Io-trayectoria I-normal T que no pasa por $\Gamma^-(Io) \cap R$ y que satisface:

1. T no contiene $(V(T)-t_n)T^0$-seudodiagonales.

2. La longitud de T es par si y sólo si $t_n \in I$.

Demostración:

Observación: Sea S un seminúcleo de D, y sea B el siguiente conjunto: $B = \{v \in V(D) - S$ / no existe vS-flecha en D$\}$
Y sea D' un seminúcleo (núcleo) de D [B] ; entonces S U S' es un seminúcleo (núcleo) de D.

Supongamos que el teorema es falso, lo que implica que D contiene un seminúcleo S tal que $\emptyset \neq Io \subset S \subset (I \cap R^c)$ por (c) y por la observación, D contiene un núcleo, lo cual contradice la hipótesis.

#

Teorema 2.9. [6] Sea D una digráfica, $u \in V(D)$ y Nu un núcleo de D - {u}. Supongamos que se cumple lo siguiente:

a) $D - \{v\}$ es una R-digráfica.

b) D no tiene núcleo.

Entonces existe una vu-trayectoria Nu-normal T, T de longitud m, sin $(V(T) - u)T^{i}$-seudodiagonales, donde i es el residuo de (m + 1) mod 2.

Demostración: Sean $I = Nu$ $R = \{u\}$ y definimos a Io de la siguiente forma:

$$Io = \begin{cases} v & \text{si } v \in Nu \\ \Gamma^{+}(v) \cap Nu & \text{si } v \notin Nu. \end{cases}$$

Usando el teorema 2.8 se demuestra el teorema.

#

Corolario: Sea $(u,v) \in F(D)$, supongamos que D no tiene núcleo, y que cumple con lo siguiente:

a) D-u no tiene núcleo.

b) D-v es R-digráfica.

Entonces existe un ciclo C de longitud impar que pasa por (u,v) y no tiene $V(C)C^{0}$-seudodiagonales.

(Nota: $C_u^{0}$ es un conjunto independiente).

#

Teorema 2.10. [6] Si $\emptyset \neq A \subset F(u,V(D))$ y sea $Io = \{z \in V(D) / (u,z) \in A\}$, y satisfacen:

a) D - A tiene núcleo pero D-A' no tiene núcleo, para $A' \subset A$.

b) $D - (Io \cup \Gamma^{-}(Io))$ es R-digráfica.

Entonces existe $f \in A$ y un ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por f y no intersecta a $\Gamma^{-}(Io)-\{u\}$ y sin $V(C)(Cu' \cup \{u\})$-seudodiagonales.

Demostración: Por (a) D no tiene núcleo. Sea I un núcleo de D-A y $R = \{u\}$. Claramente I es un seminúcleo fuerte modulo R y se cumple que $Io \cup \{u\} \subset I$.

Por el teorema 2.8 existe una $t_0u$-trayectoria I-normal T con $t_0 \in Io$ que no pasa por $\Gamma^{-}(Io) - \{u\}$. Agregando la flecha $(u,t_0)$ a T obtenemos un ciclo dirigido que cumple con el teorema.

#

Corolario 2.3. Sea $(u,v) \in F(D)$. Si $D$ no tiene núcleo y $D-(u,v)$ es R-digráfica, entonces existe un ciclo dirigido $C$ de longitud impar tal que $(u,v) \in F(C)$ y no contiene $V(C)(C_u \cup \{u\})$-seudodiagonales.

#

Corolario 2.4. Sea $u \in V(D)$. Si $D$ no tiene núcleo y $D-\{u\}$ es R-digráfica, entonces existe un ciclo dirigido $C$ de longitud impar tal que $u \in V(C)$ y no contiene $V(C)(C_u' \cup \{u\})$-seudodiagonales.

Demostración: $u$ es un seminúcleo, de $D - F(u,V(D))$ y $D-\{u\}$ es R-digráfica y por la observación sel teorema 2.8 $D - F(u,V(D))$ tiene un núcleo $N_u$ tal que la cardinalidad del conjunto $\{ F(D,N_u) \cap F(u,V(D))\}$ sea mínima.
Sea $A = \{ F(u,V(D)) \cap F(D[N_u] \}$. Aplicando el teorema 2.10, se demuestra el corolario.

#

**Gráficas de Meyniel.**

Teorema 2.11. [10] Sea $D$ una digráfica tal que todo ciclo de longitud impar tiene dos diagonales (es decir, $D^{\bullet}$ es una gráfica de Meyniel), y todo ciclo dirigido de longitud tres contiene dos flechas simétricas. Entonces $D$ es una R-digráfica.

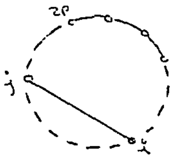
Para demostrar éste teorema haremos uso del siguiente lema:

Lema 2.3. Sea $G$ una gráfica de Meyniel, entonces todo ciclo de longitud impar $C = (0,1,2,\ldots,2p,0)$ con $p \geq 2$ cumple con alguna de las siguientes condiciones:

a) Existe una diagonal $(i,j)$ en el ciclo tal que $i$ y $j$ son de la misma paridad.

b) Existe la diagonal $(0,2p-1)$.

Demostración: Sea $G$ una gráfica de Meyniel, y supongamos que existe un ciclo $C$ de longitud impar tal que no cumple con (a) ni con (b). Sea $C = (0,1,2,\ldots,2p,0)$ de longitud mínima con la propiedad anterior. Como $G$ es de Meyniel, entonces $C$ contiene dos diagonales, Sea $(i,j)$ con $i < j$ una de las diagonales.
Por lo que se está suponiendo, $(i,j)$ no cumplen con (a) ni con (b).




Sin pérdida de generalida sea $C' = (0,1,2,\ldots,i,j,\ldots 2p-1,2p,0)$ el ciclo de longitud impar que se forma con la diagonal $(i,j)$.

Por la minimalidad de $C$, $C'$ cumple con (a) o con (b).

- Supongamos que C' cumple con (a).
 Es decir, existe una diagonal (k,l) donde K y l son de la misma paridad. La diagonal (k,l) también es diagonal en C, y cumple con (a), lo cual no puede ocurrir.

- Supongamos que C' cumple con (b).
 Es decir, existe la diagonal (0,2p-1) en C'. Como $C' \subseteq C$ entonces (0,2p-1) es también diagonal de C, lo cual contradice lo que se está suponiendo.

Por lo tanto, todo ciclo de longitud impar en una gráfica de Meyniel cumple con (a) o con (b).

#

Teorema 2.2. [11] Sea D una digráfica tal que todo ciclo impar de D tiene dos diagonales ( es decir D es una gráfica de Meyniel) y todo ciclo dirigido de longitud tres contiene dos flechas simétricas. Entonces D es una R-digráfica.

Demostración: La demostración se hará por inducción sobre el número de vértices de D.

- Supongamos $|V(D)| = 1$ ó 2.
 El teorema claramente se cumple.

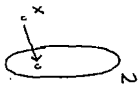
- Supongamos que el teorema se cumple para toda digráfica con a lo más n-1 vértices.

Sea D una digráfica con n vértices y tal que cumple con las hipótesis del teorema.

(Para demostrar el teorema, sólo basta probar que D tiene núcleo).

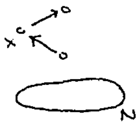
Sea $x \in V(D)$ y sea N un núcleo de $D - x$, tal núcleo existe por hipótesis de inducción.

Caso 1. $\Gamma^{+}(x) \cap N \neq \emptyset$.



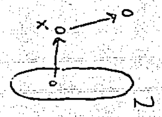

En éste caso N es un núcleo de D.

Caso 2. $\Gamma^{+}(x) = \emptyset$ y $\Gamma^{-}(x) \cap N = \emptyset$.




Sea $N' = N \cup \{x\}$. Claramente N' es un núcleo de D.

Caso 3. $\Gamma^{+}(x) \cap N = \emptyset$ y $\Gamma^{-}(x) \cap N \neq \emptyset$.




Daremos un método para construir un núcleo en D.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$M_0 = \{x\}$

$N_0 = \Gamma^{-}(x) \cap N$

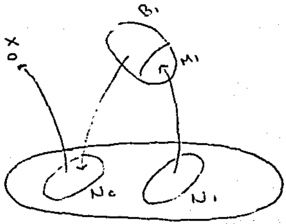
$B_{i+1} = \Gamma^{-}(N_i) - \Gamma^{-}(M_0 \cup \ldots \cup M_i \cup (N - (N_0 \cup \ldots \cup N_i)))$

$M_{i+1}$ es un núcleo de la subdigráfica inducida por $B_{i+1}$. (tal núcleo existe por hipótesis de inducción)

$N_{i+1} = \Gamma^{-}(M_{i+1}) \cap ( N - (N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_i))$

Ejemplo:

Sean:




$i = 0$

$M_0 = \{x\}$

$N_0 = \Gamma^{-}(x) \cap N$

$B_1 = \Gamma^{-}(N_0) - \Gamma^{-}(M_0 \cup (N - N_0))$

$M_1$ es un núcleo de la subdigráfica inducida por $B_1$.

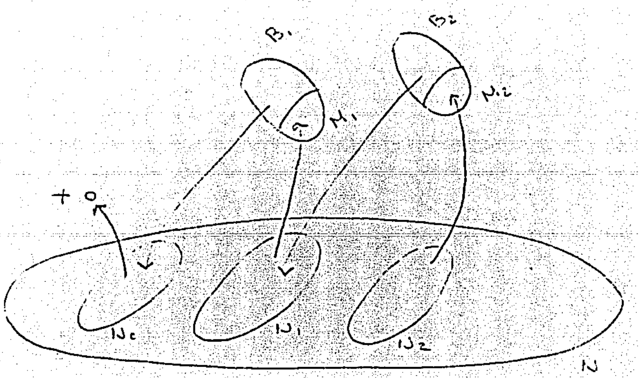
$N_1 = \Gamma^{-}(M_1) \cap (N - N_0)$

Para $i = 1$

$B_2 = \Gamma^{-}(N_1) - \Gamma^{-} (M_0 \cup M_1 \cup (N - N_0 \cup N_1))$

$M_2$ es un núcleo de la subdigráfica inducida por $B_2$.

$N_2 = \Gamma^{-}(M_2) \cap (N - (N_0 \cup N_1))$

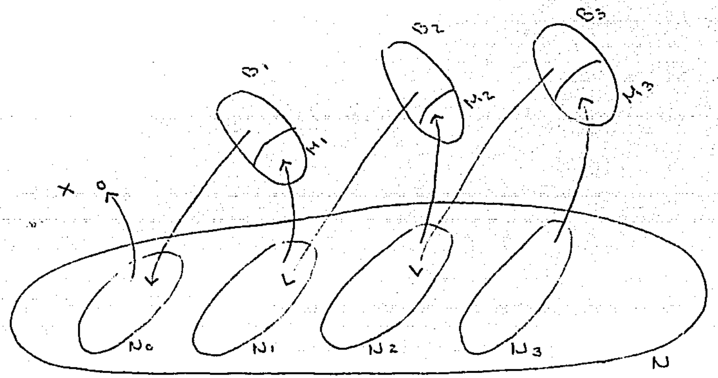



Para $i = 2$

$B_3 = \Gamma^{-}(N_2) - \Gamma^{-}(M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup (N - (N_0 \cup N_1 \cup N_2))$

$M_3$ es un núcleo de la subdigráfica inducida por $B_3$.

$N_3 = \Gamma^{-}(M_3) \cap (N - (N_0 \cup N_1 \cup N_2))$




Observaciones:

— Por construcción $V(B_i)$ son los vértices adyacentes hacia $N_{i-1}$ y no son adyacentes a ningún $M_{i-1}$ ni a $N - (N_0 \cup \ldots \cup N_{i-1})$.

– $V(N_i)$ son los vértices adyacentes hacia $M_i$ y están en $N - (N_0 \cup \ldots \cup N_{i-1})$.

– $B_i \cap B_j = \varnothing$ para $i \neq j$.

– Como D es una digráfica finita, existe un número entero $q$ tal que $B_{q+1} = \varnothing$.

Sea $N' = M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_q \cup (N - (N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_q))$.

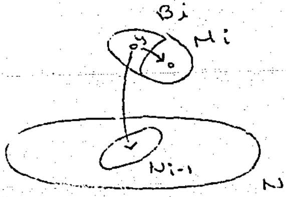
Se afirma que $N'$ es un núcleo.

Demostracion:

– $N'$ es un conjunto absorbente.

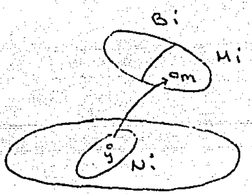
Sea $y \in V(D)$. Tenemos varios casos:

Caso 1. $y \in (B_i - M_i)$



Ya que $M_i$ es un núcleo de la subdigráfica inducida por $B_i$, existe $m \in M_i$ tal que $(y,m) \in F(D)$. Y como $M_i \subseteq N'$ entonces $m \in N'$.

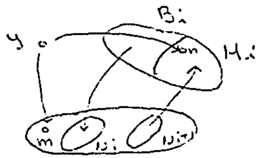
Caso 2. $y \in N_i$



Por construcción de $N_i$, existe $m \in M_i \subseteq N'$ tal que $(y,m) \in F(D)$.

Caso 3. $y \in V(D) - \bigcup_{i=1}^{q} B_i - \bigcup_{i=1}^{q} N_i$

$y \notin B_i$, por construcción, ésto implica que $(y,m) \in F(D)$ para alguna $m \in M_i$ o $(y,n) \in F(D)$ para alguna $n \in (N - \cup N_i)$.



Por lo tanto $N'$ es un conjunto absorbente.

– N' es un conjunto independiente.

Caso 1. No hay flechas entre los conjuntos $N - (N_0 \cup \ldots \cup N_q)$ y $M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_q$. Es decir:

i) $\Gamma^+(\bigcup_{i=0}^{q} M_i) \cap (N - \bigcup_{i=0}^{q} N_i) = \emptyset$

ii) $\Gamma^-(\bigcup_{i=0}^{q} M_i) \cap (N - \bigcup_{i=0}^{q} N_i) = \emptyset$

i) Por hipótesis $\Gamma^+(M_0) \cap N = \emptyset$ y por construcción $\Gamma^+(\bigcup_{i=0}^{q} M_i) \cap (N - (N_0 \cup \ldots \cup N_q)) = \emptyset$.

ii) $\Gamma^-(M_0 \cup \ldots \cup M_q) \cap N = N_0 \cup \ldots \cup N_q$ por construcción. Por lo tanto $\Gamma^-(M_0 \cup \ldots \cup M_q) \cap (N - (N_0 \cup \ldots \cup N_q)) = \emptyset$

Caso 2. Sean $x, y \in N - (N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_q)$.

Es claro que $(x,y) \notin F(D)$ y que $(y,x) \notin F(D)$ ya que $x, y \in N$ y $N$ es un núcleo.

Por lo tanto $(x,y) \notin F(D)$ y $(y,x) \in F(D)$.

Caso 3. Sean $x, y \in M_i$ para alguna $i \in 0,1,\ldots,q$

Ya que $M_i$ es un núcleo, entonces $(x,y) \notin F(D)$ y $(y,x) \notin F(D)$.

Caso 4. No hay flechas entre $M_i$ y $M_j$ para $i \neq j$ $i, j \in 0,1,\ldots,q$ , es decir:

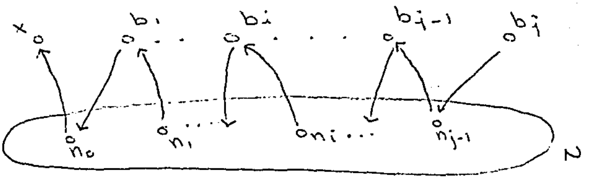
i) $\Gamma^-(M_i) \cap M_j = \emptyset$. Lo cual ocurre por construcción.

ii) $\Gamma^+(M_i) \cap M_j = \emptyset$.

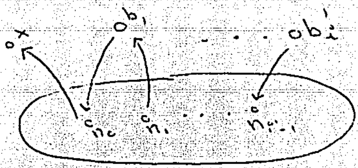
Supongamos que ésto no ocurre, es decir, supongamos que existen $b_i' \in M_i$ y $b_j \in M_j$ tal que $(b_i', b_j) \in F(D)$.

Consideremos $M_i$ y $M_j$ minimal con tal propiedad.

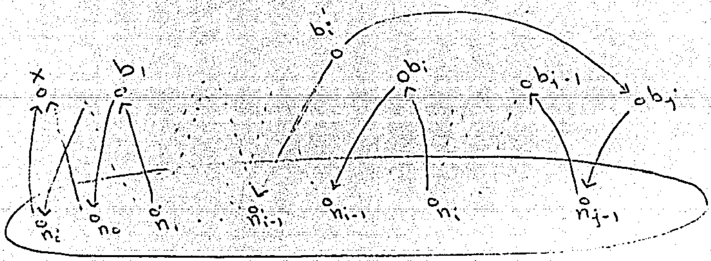
Sea $P = (b_j, n_{j-1}, b_{j-1}, \ldots, n_i, b_i, n_{i-1}, \ldots, n_0, x)$



Y sea $Q = (b_i', n_{i-1}, \ldots n_0, x)$

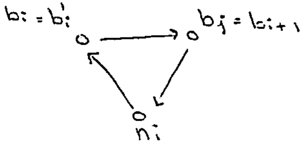


Sea $C = Q \cup P^{-1} \cup (b_j, b_i')$



<u>Observación:</u> C es un ciclo de longitud impar.

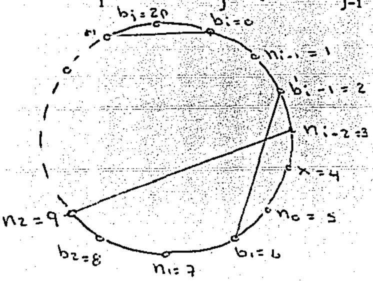
<u>Caso a)</u> Si la longitud del ciclo es tres, quiere decir que $b_i = b_i'$ y que $b_j = b_{i+1}$



Por construcción no pueden existir las siguientes flechas: $(b_j, b_i)$, $(b_i, n_i)$ y $(n_i, b_{i+1})$. Por lo tanto tenemos un ciclo dirigido de longitud tres sin flechas simétricas, lo cual contradice una de las hipótesis del teorema.

Caso b) La longitud del ciclo es $2p+1$ con $2p+1 > 5$.

Llamemos $b_1' = 0$ $b_j = 2p$ $n_{j-1} = 2p-1$




Observacion: Las siguientes $n_{i's}$ corresponden a los números impares en el ciclo, y las $b_{i's}$ a los pares.

En éste ciclo se debe cumplir el lema 2.3, por lo tanto cumple con alguna de las siguientes condiciones:

a) Existe una diagonal $(i,j)$ en el ciclo tales que $i,j$ son de la misma paridad.

Sabemos que : – No existen flechas entre dos vértices impares, ya que $n_i \in N$ para $i=0,1,\ldots,q$ y N es núcleo.

– No existen flechas entre dos vértices pares por la elección de $b_1$ y de $b_j$.

Por lo tanto no se cumple la condición (a).

b) Existe la diagonal $(0,2p-1)$. Es decir $(b_1',n_{j-1}) \in F(D)$ lo cual no ocurre por construcción Por lo tanto (b) no ocurre.

Con ésto hemos llegado a una contradicción, por lo tanto $\Gamma^+(M_i) \cap M_j = \emptyset$.

Por lo tanto N' es un conjunto absorbente e independiente, es decir, N' es un núcleo de D.

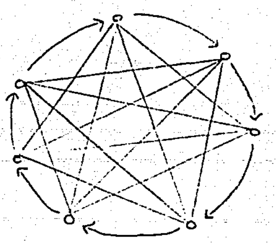
#

El teorema 2.11 tiene dos hipótesis:

1) G es una gráfica de Meyniel. Y 2) Todo ciclo de longitud tres contiene dos flechas simétricas.

No podemos quitar la segunda hipótesis. Un ejemplo de ésto es la siguiente gráfica:

Sea $G = K_n$, en donde n es un número impar, y orientamos la gráfica de tal forma que el ciclo exterior quede dirigido y las diagonales sean flechas simétricas.



Claramente G es una gráfica de Meyniel, y existen ciclos de longitud tres que no contienen dos flechas simétricas.

Si embargo, se sabe que éste tipos de digráficas no son R-digráficas.

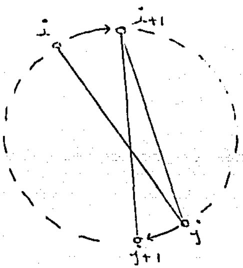
<u>Teorema</u> <u>2.12.</u> [10] Una gráfica G es de Meyniel si y sólo si toda orientación D de G satisface que: D no contiene ciclos dirigidos de longitud tres y todo ciclo de longitud impar tiene dos polos consecutivos.

Para la demostración del teorema haremos uso del siguiente lema.

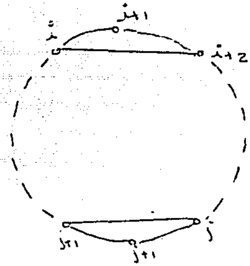
<u>Lema</u> <u>2.4.</u> Sea G una gráfica de Meyniel, entonces todo ciclo C de longitud impar $C = (0,1,\dots,2p,0)$ con $p \geq 2$ contiene alguna de las siguientes configuraciones:

i) Existen dos diagonales $(i,j)$ y $(i+1,j+1)$ con $i+1$ y $j$ adyacentes.

ii) Existen dos diagonales $(i,i+2)$ y $(j,j+2)$ que no se cortan.



configuración (i)

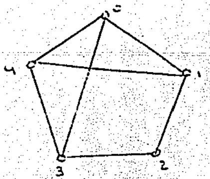


configuración (ii)

<u>Demostración:</u> La demostración se hará por inducción sobre la longitud del ciclo.

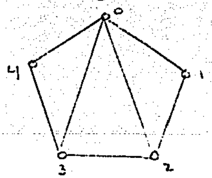
– Sea C un ciclo de longitud cinco. Como G es de Meyniel, entonces C debe tener dos diagonales.

<u>Caso 1.</u> Las diagonales se cortan.




En éste caso se cumple la configuración (i), donde i = 3 y j = 0.

<u>Caso 2.</u> Las diagonales no se cortan.



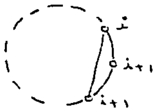

En éste caso se cumple la configuración (ii), donde i = 0 y j = 3.

– Supongamos que el lema se cumple para ciclos de longitud impar menor que n.

Sea C un ciclo de G de longitud n con n impar.

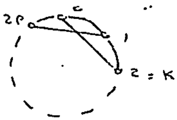
<u>Caso a)</u> C tiene una diagonal corta que corta a e.

Nota: Una diagonal corta es de la forma (i,i+2).



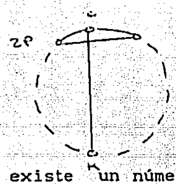
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que e = (0,k) y corta a la diagonal (2p-1,1), y el ciclo $C_e$ = (0,1,...,k.0) es de longitud impar, es decir, k es un número par. Tomamos k mínima con ésta propiedad.

Si k = 2, entonces C cumple con la configuración (i), donde i = 2p y j = 1.

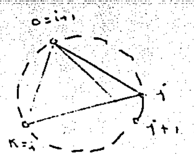



Si K > 2, por hipótesis de inducción $C_e$ cumple con el lema, es decir, $C_e$ contiene alguna de las dos configuraciones.

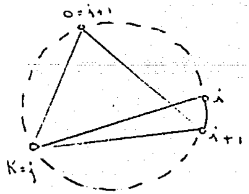
a) Supongamos que $C_e$ contiene la configuración (i).



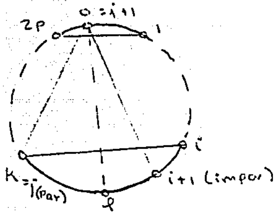

<u>Caso</u> <u>1.</u> $e = (i, i+1)$, entonces existe un número natural $j$ con $1 < j < k-1$ tal que existan las cuerdas $(k, j)$, $(0, j)$ y $(0, j+1)$ $j$ o $j+1$ es un número par. Por lo tanto vamos a tener un ciclo de longitud menor que la de $C_e$ de longitud impar. lo cual contradice la minimalidad de k.



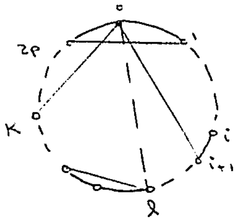

<u>Caso</u> <u>2.</u> $e = (j, j+1)$, entonces existe un número natural $i$ con $1 < i < k-1$ tal que existen las diagonales $(i+1, k)$, $(i+1, 0)$ e $(i, k)$.
$i+1$ tiene que ser un número impar de no ser así habría una contradicción con la minimalidad de k.




Si $i+1 = k-1$, las diagonales $(2p, 1)$ e $(i, k)$ cumplen con la configuración (ii), por lo tanto $i \leq k - 3$. El ciclo $C' = (0, i+1, i+2, \ldots, k-1, k, o)$ es de longitud impar al menos cinco. Sea i máxima con ésta propiedad.



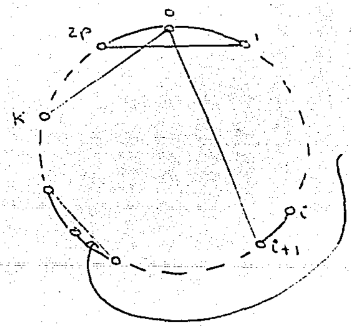

Por la minimalidad de k y la maximilidad de i, 0 no es adyacente a los vértices $i+2, i+3, \ldots, k-2, k-1$ .




l no puede ser un número par por la minimalidad de k, l no puede ser un número impar por la maximilidad de i. Por lo tanto l no existe.

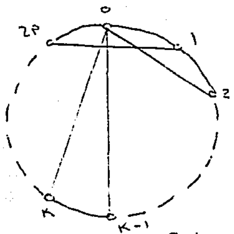
Por hipótesis de inducción C' posee alguna de las dos configuraciones del lema.

- C' contiene la configuración (i)
  Ésta configuración también se dá en C, puesto que sabemos que no hay diagonales desde el vértice 0.
- C' contiene la configuración (ii) .
  Entonces debe incluir alguno de los siguientes vértices i+1, i+2,..., k-1,k .




Tomando ésta diagonal corta y la diagonal (2p,1) tenemos en C la configuración (ii).

b) Supongamos que $C_e$ contiene la configuración (ii).




Un caso es que existan las diagonales (k-1,0) (0,2).
En éste caso obtenemos dos diagonales que se cortan (2p,1) y (0,2).
En éste caso C tiene la configuración (i).

Otro caso es que C tenga alguna diagonal que no corta a (2p,1), tomando esa diagonal y (2p,1) obtenemos en C la configuración (i).

<u>Caso b)</u> Ninguna diagonal corta es cortada por otra diagonal.

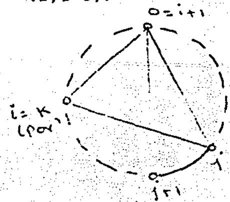
- Si C posee dos diagonales cortas que se cortan, obtenemos en C la configuración (i).

- Si C posee dos diagonales cortas que no se cortan, entonces en encontramos la configuración (ii).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C contiene una diagonal $e = (0,k)$. Tomemos $C_e = (0,1,\dots,k,0)$ un ciclo de longitud impar (k es un número par, $k \geq 4$).

Sea $k$ mínima con tal propiedad. Por hipótesis de inducción $C_e$ contiene alguna de las configuraciones del lema.

a) Supongamos que $C_e$ contiene la configuración (i). La misma configuración estaría en $C$, con excepción del caso en que $e = (i, i+1)$.

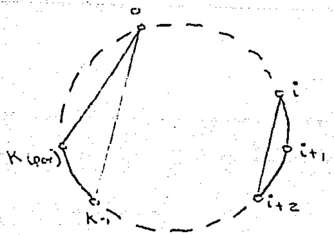



En tal caso, existe un número natural $j$ con $1 < j < k-1$ tal que existen las cuerdas $(0, j)$ y $(0, j+1)$.

$j$ o $j+1$ es un número par, por lo cual contradice la minimalidad de $K$.

Si $e = (j, j+1)$ ver caso anterior.

b) Si $C_e$ posee la configuración (ii), la misma configuración se encuentra en $C$, al menos de que una diagonal fuera $(0, k-1)$ y la otra $(i, i+2)$.

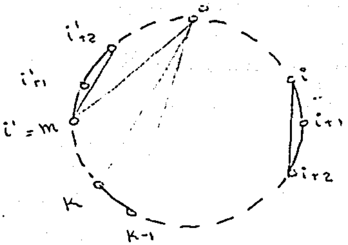



Sea $m$ el máximo indice impar con $k-1 \leq m < 2p-1$ que sea adyacente a $0$.

Tomemos el ciclo $(0, m, m+1, \ldots, 2p, 0)$.

Haciendo el razonamiento anterior a éste nuevo ciclo obtenemos una diagonal $(i', i'+2)$.

Tomando las diagonales $(i, i+2)$ e $(i', i'+2)$ encontramos en $C$ la configuración (ii).




#

Teorema 2.12. Una gráfica G es de Meyniel si y sólo si toda orientación D de G es tal que D no contiene ciclos dirigidos de longitud tres, satisface que todo ciclo dirigido de longitud impar tiene dos polos consecutivos.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea G una gráfica de Meyniel y D una orientación de G tal que no contiene ciclos dirigidos de longitud tres.

Se tiene que demostrar que todo ciclo dirigido de longitud impar admite dos polos consecutivos.

La demostración se hará por inducción sobre la longitud del ciclo.

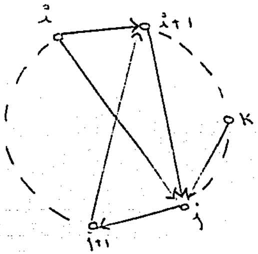
– Si C es un ciclo de longitud cinco, el teorema se sigue.

– Sea C un ciclo de longitud n, con n un número impar y $n > 7$, y supongamos que el teorema se cumple para todo ciclo de longitud impar menor que n.

C es un ciclo de longitud impar, por lo tanto cumple con el lema 2.4, por lo tanto C contiene alguna de las configuraciones.

Caso 1. Supongamos que C contiene la configuración (i).

Es claro que el único caso que hay que analizar es el caso en que la orientación esté dada como sigue:




$(i,i+1)$, $(j,j+1)$, $(i,j)$ y $(j+1,i+1)$

Sea k un número natural con $i+3 \leq k \leq j-1$ mínima con la propiedad de que $(k,j) \in F(D)$.

Tenemos dos ciclos: $(i+1,\ldots,k,j,j+1,i+1)$ y

$(i+1,\ldots,k,j,i+1)$.

Uno de los dos es de longitud impar, y por hipótesis de inducción, tal ciclo contiene dos polos consecutivos.

Sabemos que j es un polo, ya que $(i,j) \in F(D)$, y $(k,j) \in F(D)$. En la trayectoria $(j+1,i+1,\ldots,k)$ debe haber dos polos consecutivos.

– Un caso es que los polos sean $i+1$ y $j+1$. En tal caso j y $j+1$ son polos consecutivos en C.

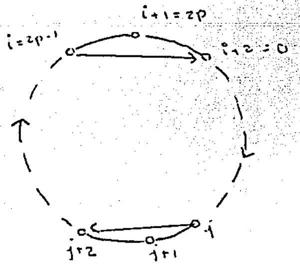
– Un segundo caso es que los polos no son $i+1$ ni $j+1$. En tal caso esos polos también son polos consecutivos en C.

Por lo tanto C tiene dos polos consecutivos.

Caso 2. Supongamos que C tiene la configuración (ii).

Existen $(i,i+2) \in F(D)$ y $(j,j+2) \in F(D)$ ya que debemos orientar las aristas de tal forma que no se formen ciclos dirigidos de longitud tres.

Sin pérdida de generalidad, llamemos $i+2 = 0$.




Por hipótesis de inducción, el siguiente ciclo $(0,1,\ldots,j,j+2,j+3,\ldots 2p-1,0)$ tiene dos polos consecutivos.

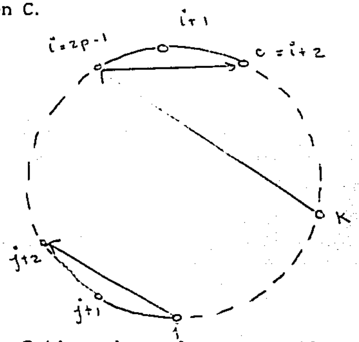
Éstos polos también son polos consecutivos en C, salvo el caso en que los polos sean $2p-1$ y $0$.

Supongamos que los polos son $2p-1$ y $0$.

Sea $k$ un número natural con $2 \le k \le 2p-3$ mínima con la propiedad de que $(k,2p-1) \in F(D)$.

Alguno de los ciclos $(0,1,\ldots,k,2p-1,0)$ o $(0,1,\ldots,k,2p-1,2p,0)$ es de longitud impar y posee dos polos consecutivos.

$2p-1$ no puede ser uno de los polos por la elección de $k$. Por lo que los dos polos deben encontrarse en la trayectoria $(2p,0,1,\ldots,k)$, en tal caso los polos también son polos consecutivos en C.



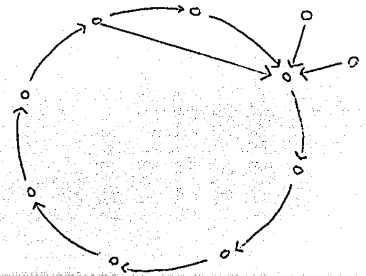

Por lo tanto C tiene dos polos consecutivos.

⇐) Se tiene que demostrar que si toda orientación sin ciclos dirigidos de longitud tres de una gráfica G satisface que todo ciclo de longitud impar tiene dos polos consecutivos, entonces G es una gráfica de Meyniel.

Supongamos que G contiene un ciclo C de longitud impar que no posee dos diagonales, sea C de longitud mínima.

C puede contener a lo más una diagonal.

Orientemos el ciclo de tal forma que quede un ciclo dirigido y su diagonal de tal forma que no se forme un ciclo dirigido de longitud tres, a las aristas de G-C las orientamos les damos una orientacón aciclica, y a las aristas que hay entre G-C y C las orientamos hacia C.



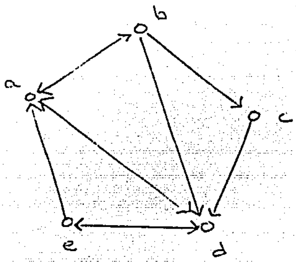
Claramente obtenenos una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud tres.

Y sin embargo tiene un ciclo de longitud impar con solamente un polo. Lo cual contradice la hipótesis del teorema.

#

La hipótesis de que no existan ciclos dirigidos de longitud tres no se puede suprimir.

Un ejemplo de ésto es la siguiente gráfica.




Claramente ésta gráfica es de Meyniel. Los polos en el ciclo son a y d, y sin embargo no son consecutivos.

## Gráficas $\mathcal{M}$ -libres.

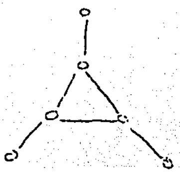
En ésta parte de la tesis se estuduarán las propiedades de las gráficas $\mathcal{M}$ -libres, en particular se demostrará que éste tipo de gráficas, si son finitas, satisfacen la conjetura de Berge-Duchet.

Definición:

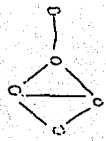
Sea $\beta$ es una familia de gráficas. Una gráfica G es una gráfica *$\beta$-libre* si G no contiene subgráficas inducidas isomorfas a elementos de $\beta$.

Si $\beta$ consta de una sóla gráfica H ( $\beta$ = H ) escribiremos H-libre, en lugar de $\beta$ -libre.

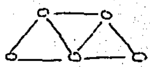
Sea $\mathcal{M}$ = { $M_1$, $M_2$, $M_3$ }, donde $M_1$, $M_2$ y $M_3$ son las siguientes gráficas:



$M_1$



$M_2$



$M_3$

Para cada número natural m, sean $U = \{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ y $W = \{w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}\}$ dos conjuntos ajenos de cardinalidad m. LLamaremos $S_m$ a la siguiente gráfica:

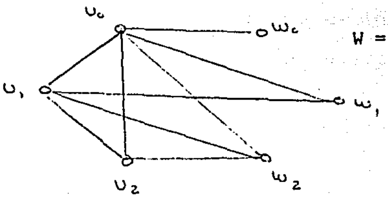
$V(S_m) = U \cup W$

$S_m\,[U] \cong K_m \qquad S_m\,[W] \cong K_m^{\,c}$

$w_i \ \mathrm{ady}_{S_m}\ u_j \Leftrightarrow j \le i$

Ejemplo: Sea m = 3.

$S_3$:




$U = \{u_0, u_1, u_2\}$

$W = \{w_0, w_1, w_2\}$

De una forma similar se define la siguiente digráfica:

Si $U = \{u_0, u_1, \ldots\}$ y $W = \{w_0, w_1, \ldots\}$ son dos conjuntos ajenos,, denotamos $S_W$ a la siguiente digráfica:

$V(S_W) = U \cup W$

$$x \ \mathrm{ady}_{S_W} \ y \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = u_i \quad y = u_j \quad \text{para} \quad i \neq j \\ x = w_i \quad y = u_j \quad \text{para} \quad j \leq i \end{cases}$$

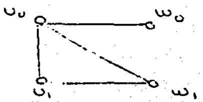
<u>Teorema 2.13.</u> [7] Sea G una gráfica $\mathcal{M}$ -libre ( puede ser infinita). Sea Q un clan maximal de G, con $|V(Q)| \geq 3$, y sea I un conjunto independiente maximal de G. Si $Q \cap I = \emptyset$ entonces G tiene una subgráfica inducida isomorfa a $S_W$ con $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\} \leq Q$ y $\{w_0, w_1, w_2 \quad\} \leq I$.

<u>Demostración:</u> Usaremos inducción sobre r ($S_r$).

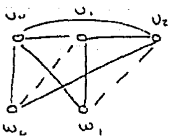
– Sea $r = 3$

En G tenemos un clan maximal Q y un conjunto independiente I máximo tal que $Q \cap I = \emptyset$. Entonces existen $u_0 \in Q$ y $w_0 \in I$ tal que $(u_0, w_0) \in A(G)$, $u_1 \in Q$ tal que $(w_0, u_1) \notin A(G)$. Por lo tanto $u_1 \notin I$ entonces existe $w_1 \in I$ tal que $(u_1, w_1) \in A(G)$.

<u>Caso 1.</u> $(u_0, w_1) \in A(G)$




En éste caso existe $u_2 \in Q$ tal que $(u_2, w_1) \notin A(G)$.




<u>Caso i)</u> $(u_2, w_0) \in A(G)$.

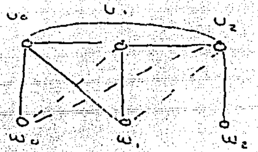
En éste caso

$G[u_0, u_1, u_2, w_0, w_1] \cong M_3$,

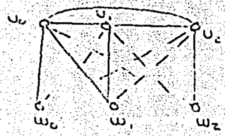
lo cual contradice la hipótesis del teorema.

Caso ii) $(u_2,w_0) \notin A(G)$.

Como I es un conjunto independiente maximal, existe $w_2 \in I$ tal que $(w_2,u_2) \in A(G)$.

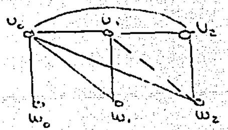



a) $(w_2,u_1) \notin A(G)$ y $(w_2,u_0) \notin A(G)$.



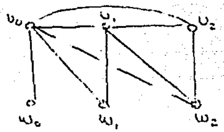

G $[u_0,u_1,u_2,w_1,w_2] \cong$ M2 lo cual no puede ser ya que G es $\mathcal{M}$ -libre.

b) $(w_2,u_0) \in A(G)$ y $(w_2,u_1) \notin A(G)$.



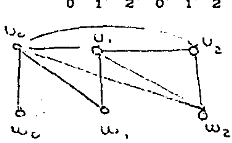

G $[u_0,u_1,u_2,w_1,w_2] \cong$ M3 lo cual no puede ser.

c) $(w_2,u_0) \notin A(G)$ y $(w_2,u_1) \in A(G)$.

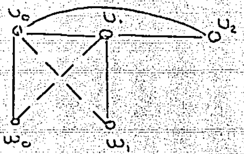



G $[u_0,u_1,u_2,w_2,w_0] \cong$ M2 o G $[u_0,u_1,u_2,w_1,w_2] \cong$ M3 Lo cual tampoco puede ocurrir.

Por lo tanto, el único caso posible es que $(w_2,u_0) \in A(G)$ en éste caso G $[u_0,u_1,u_2,w_0,w_1,w_2] \cong$ S3.

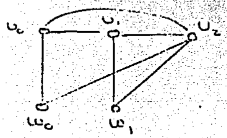


Caso 2. $(u_0, w_1) \notin A(G)$




Ya que $|V(Q)| \geq 3$ entonces existe $u_2 \in (Q - \{u_0, u_1\})$.

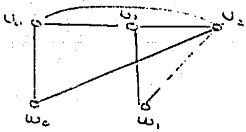
Caso i) $(u_2, w_0) \in A(G)$ y $(u_2, w_1) \in A(G)$.




$G\ [\{u_0, u_1, u_2, w_0, w_1\}] \cong M_3$

Pero ésto no puede ser.

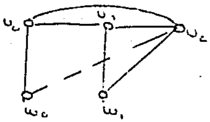
Caso ii) $(u_2, w_0) \in A(G)$ y $(u_2, w_1) \notin A(G)$




$G\ [\{u_0, u_1, u_2, w_0, w_1\}] \cong M_2$

Ésto contradice la hipótesis.

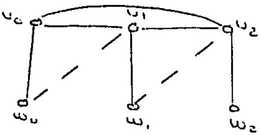
Caso iii) $(u_2, w_0) \notin A(G)$ y $(u_2, w_1) \in A(G)$




$G\ [\{u_0, u_1, u_2, w_0, w_1\}] \cong M_2$

Lo cual no puede ser.

Caso iv) $(u_2, w_0) \notin A(G)$ y $(u_2, w_1) \notin A(G)$.

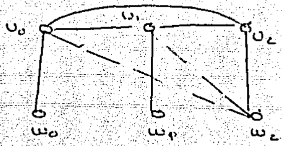



Como I es un conjunto independiente maximal existe $w_2 \in I$ tal que $(u_2, w_2) \in A(G)$.

**a)** $(w_2,u_0) \notin A(G)$ y $(w_2,u_1) \notin A(G)$

$G \ [\{u_0,u_1,u_2,w_0,w_1,w_2\}] \cong M_1$

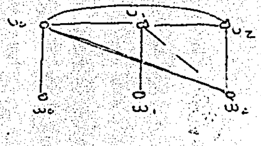
Por lo tanto éste caso no puede ocurrir.



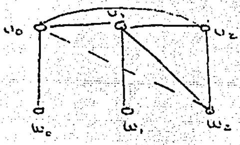

**b)** $(w_2,u_0) \in A(G)$ y $(w_2,u_1) \notin A(G)$.

$G \ [\{u_0,u_1,u_2,w_1,w_2\}] \cong M_2$

Ésto tampoco puede ocurrir.




**c)** $(w_2,u_0) \notin A(G)$ y $(w_2,u_1) \in A(G)$.

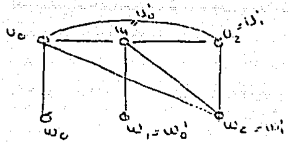



$G \ [\{u_0,u_1,u_2,w_0,w_2\}] \cong M_2$

Lo cual no puede ocurrir.

**d)** Y el último caso es que $(w_2,u_0) \in A(G)$ y que $(w_2,u_1) \in A(G)$. Tomemos las siguientes igualdades:

$u_0' = u_1$ , $u_1' = u_2$ , $w_0' = w_1$ , $w_1' = w_2$.

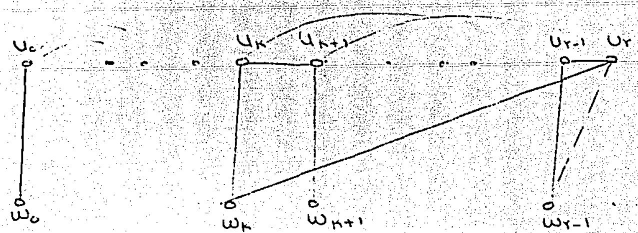



Haciendo lo mismo que en el caso (1) se llega a que G contiene una subgráfica inducida isomorfa a $S_3$.

– Ahora supongamos que G tiene una subgráfica inducida isomorfa a $S_r$, con $\{u_0,u_1,\ldots,u_{r-1}\} \subseteq Q$ $\{w_0,w_1,\ldots w_{r-1}\} \subseteq I$ y que $(u_i,w_j) \in A(G) \Leftrightarrow i \leq j$.

Como Q es un clan maximal, existe un vético $u_r \in (Q- \{u_0,u_1,\ldots u_{r-1}\})$ tal que $(u_r,w_{r-1}) \notin A(G)$.

Observación: $(u_r, w_i) \notin A(G) \quad \forall\ i \in \{o, 1, \ldots r-2\}$, de lo contrario sea $k = \max\ \{ i \in \{o, 1, \ldots, r-2\} \ / \ (w_i, u_r) \in A(G)\}$ entonces $(u_r, w_k) \in A(G)$ y $(u_r, w_{k+1}) \notin A(G) \Rightarrow$ $G\ [\{w_k . u_k, u_{k+1}, w_{k+1}, u_r\}] \cong M_3$



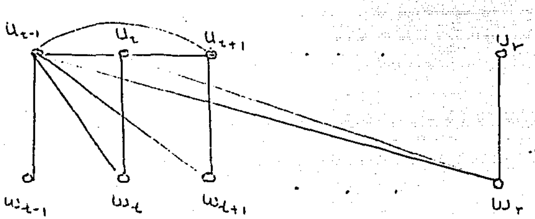

Como I es un conjunto independiente maximal, existe un vértice $w_r \in (\ I - w_0, w_1, \ldots w_{r-1}\ )$ tal que $(u_r, w_r) \in A(G)$.

Observación: $(w_r, u_i) \in A(G) \quad \forall\ i \in \{0, 1, \ldots r-1\}$ .

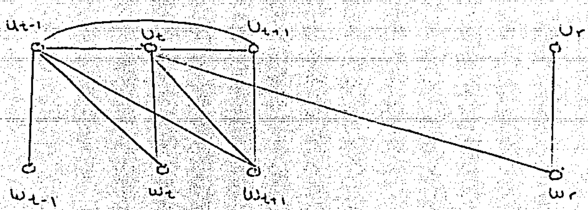
De lo contrario tomemos $t = \max\ \{i \in \{0, 1, \ldots r-1\} \ / \ (w_r, u_i) \in A(G)\}$, tenemos dos casos:

a) $t > 0$

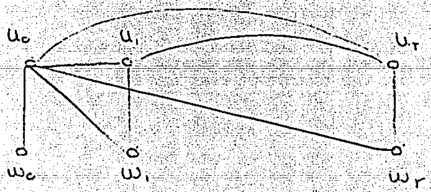
Si $(u_{t-1}, w_r) \in A(G) \Rightarrow G\ [\{u_{t-1}, u_t, u_{t+1}, w_t, w_r\}] \cong M_3$.



Si $(u_{t-1}, w_r) \notin A(G) \Rightarrow G\ [\{u_{t-1}, u_t, u_{t+1}, w_t, w_r\}] \cong M_2$.




b) $t = 0 \Rightarrow G\ [\{u_0, u_1, u_r, w_1, w_r\}] \cong M_3$




Por lo tanto $G\ [\{u_0, u_1, \ldots u_r\} \cup \{w_0, w_1, \ldots, w_r\}] \cong S_{r+1}$ con $\{u_0, u_1, \ldots, u_r\} \subseteq Q$ y $\{w_0, w_1, \ldots w_r\} \subseteq I$.

#

<u>Corolario</u> <u>2.5.</u> Sea G una gráfica finita $\mathcal{M}$ -libre. Si Q es un clan maximal der G con $|V(Q)| \geq 3$ e I es un conjunto independiente maximal de G, entonces $Q \cap I \neq \emptyset$.

#

<u>Teorema</u> <u>2.14.</u> [7] Sea G una gráfica, son equivalentes:

a) G es una gráfica $\mathcal{M}$ -libre.

b) Para cada gráfica inducida H de G, donde $I_H$ es un conjunto independiente maximal de H y $Q_H$ es un clan maximal de H con $|V(Q)| \geq 3$, entonces $Q_H \cap I_H \neq \emptyset$.

Demostración: Éste teorema es una consecuencia del corolario 2.5 y del hecho de que $M_i$ con $i \in \{1,2,3\}$ tiene un conjunto independiente maximal $Q_i$ tal que $I_i \cap Q_i = \emptyset$.

#

Teorema 2.15. [7] Sea G una gráfica $\mathcal{M}$-libre no bipartita, entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

a) G no contiene $C_{2n+1}$ , $C_{2n+1}^c$ con $n \geq 2$ como subgráficas inducidas de G.

b) Para cada subgráfica inducida H de G con $I_H$ un conjunto independiente maximal de H y $Q_H$ un clan maximal de H, tenemos que $Q_H \cap I_H \neq \emptyset$.

Demostración:

a) ⇒ b) Sea G una gráfica $\mathcal{M}$-libre no bipartita tal que no contiene $C_{2n+1}$ como subgráfica inducida ( con $n \geq 2$ ). Sea H una subgráfica inducida de G, sea $I_H$ un conjunto independiente maximal de H y $Q_H$ un clan maximal de H.

Observación: H contiene ciclos de longitud tres, si no los tuviera, entonces H sería una gráfica bipartita, por lo tanto $I_H \cap Q_H \neq \emptyset$.

Como H tiene ciclos de longitud tres y G es $\mathcal{M}$-libre, usando el teorema 2.14 se tiene que $I_H \cap Q_H \neq \emptyset$.

b) ⇒ a) Supongamos que G contiene un ciclo $C_{2n+1}$ como subgráfica inducida, para alguna $n \geq 2$. Entonces $C_{2n+1}$ es una subgráfica que contiene un clan maximal Q y un conjunto independiente maximal I tal que $Q \cap I = \emptyset$, lo que cotradice la hipótesis.

Si G contiene $C_{2n+1}^c$ como subgráfica inducida para alguna $n \geq 2$, entonces G contiene un ciclo de longitud cinco como subgráfica inducida o una $M_3$, lo cual contradice las hipótesis del teorema.

Por lo tanto G no contiene $C_{2n+1}$ ni $C_{2n+1}^c$ como subgráficas inducidas.

#

Sea $\mathcal{M}^{\bullet} = \mathcal{M} \cup \{ C_{2n+1} \ / \ n \geq 2 \}$ .

Las gráficas $\mathcal{M}^{\bullet}$-libres son perfectas y satisfacen la condición (a) del teorema 2.15..

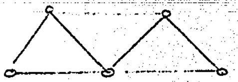
$\mathcal{M}^{\bullet}$ no contiene ninguna de las siguientes gráficas:

- Gráficas trianguladas.
- Gráficas co-trianguladas.
- Gráficas de comparabilidad.
- Gráficas de co-comparabilidad.

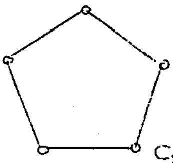
Ejemplos:

1. Los ciclos de longitud par ($C_{2n}$ con $n \geq 2$) son $\mathcal{M}$-libres y no son trianguladas.

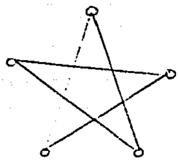
2. $M_3$ es triangulada y no es $\mathcal{M}$-libre.



3. $C_5^c \cong C_5$ no es triangulada, no es co-triangulada pero si es $\mathcal{M}$-libre.

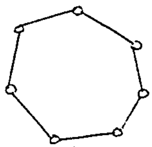


$C_5$

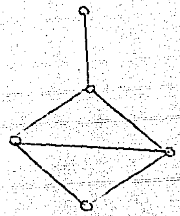


$C_5^c$

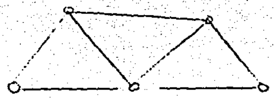
4. Ciclos de longitud impar no son de comparabilidad y si son $\mathcal{M}$-libres.



5. $M_2$ es de comparabilidad y
no es $\mathcal{M}$ -libre.



6. $M_3$ es de co-comparabilidad
y no es $\mathcal{M}$ -libre.



<u>Teorema</u> <u>2.16</u> [7] Sea G una gráfica $\mathcal{M}$ -libre, si existe una orientación normal* tal que G sea una $R^-$-digráfica entonces G es una gráfica sin ciclos de longitud tres.

* Una orientación normal es una orientación en donde todo clan de G tenga un vértice absorbente.

<u>Demostración:</u> Sea G una gráfica $\mathcal{M}$ -libre y supongamos que G contiene un ciclo de longitud tres. Supongamos que G tiene una orientación normal $\vec{G} = D$ con la cual D resulta ser una $R^-$-digráfica. Sea Q un clan maximal de G, tomemos un vértice $u \in V(D)$ y sea $N_u$ un núcleo de $D - \{u\}$ .

Si $\{u\} \cup N_u$ es un conjunto independiente, entonces $\{u\} \cup N_u$ es un núcleo de D.

Por lo tanto, supongamos que $N_u$ es un conjunto independiente maximal de G. Por el teorema 2.13 se cumle que:

$Q \cap N_u \neq \emptyset$ $\quad (Q - u) \cap N_u \neq \emptyset.$

Por lo tanto $N_u$ es un núcleo de D, lo cual contradice el hecho de que D es una $R^-$-digráfica.

Por lo tanto G no contiene ciclos de longitud tres.

#

Teorema 2.17. Sea G una gráfica $\mathcal{M}$ -libre y sea D una orientación normal de G. Si toda subdigráfica indida Do de D, sin ciclos de longitud tres es una R-digráfica, entonces D es una R-digráfica.

Demostración: Supongamos que D no es una R-digráfica, y sea Do una subdigráfica de D que sea $R^{-}$-digráfica, por hipótesis sabemos que la gráfica subyacente Go de Do es $\mathcal{M}$ -libre y tiene un ciclo de longitud tres, lo cual contradice al teorema 2.16.

#

Teorema 2.18. Sea G una gráfica $\mathcal{M}$ -libre. G es una gráfica perfecta si y sólo si toda orientación normal de G es núcleo-perfecta.

Demostración: Sea G una gráfica perfecta $\mathcal{M}$ -libre, y sea D una orientación normal de G.

Sea Do una subdigráfica inducida de D, sin ciclos de longitud tres.

Como G es una gráfica perfecta, la gráfica subyacente de Do es una gráfica bipartita, por lo tanto Do es una R-digráfica, y por el teorema 2.17, tenemos que D es una R-digráfica.

#

Con éste último teorema se comprueba que las gráficas $\mathcal{M}$ -libres cumplen con la conjetura de Berge-Duchet.

# CONCLUSIONES.

Los progresos realizados en torno al estudio de la conjetura de Berge-Duchet son pocos y están enfocados a demostrar que algunas clases conocidas de gráficas perfectas son núcleo-perfectibles y encontrar clases amplias de gráficas que satiafacen la conjetura, la dificultad del problema ha sido equiparada por los autores de ésta con la de la conjetura fuerte de las gráficas perfectas.

Gráficas perfectas que son núcleo-perfectibles:

1. El complemento de las gráficas fuertemente perfectas. Y como consecuencia de ésto :
    1.a) Las gráficas trianguladas y las cotrianguladas (complemento de las trianguladas).
    1.b) Complemento de las gráficas de comparabilidad. (Gráficas de comparabilidad son aquellas que admiten una orientación transitiva y antisimétrica).

2. Gráficas de Meyniel.

3. Gráficas perfectas libres de $K_{1,3}$ y de $K_{4-e}$.

4. Las gráficas de lineas satisfacen la conjetura de Berge-Duchet.

REFERENCIAS.



[1] C. Berge. Graphs. (North-Holland, Amsterdam 1985) p.p. 325

[2] C. Berge and P. Duchet. Recent Problems and Results in Kernel Theory. To appear.

[3] V. Chvátal and C.Y. Hoang. On the $P_4$-Structure of Perfect Graphs I. Even Decompositions. Journal of Combinatorial Thory Series B 39, 209-219 (1985).

[4] P. Duchet. Represtentation; Noyaux en Thorie des Graphs et Hypergraphs. These, Paris (1979).

[5] H. Galeana Sánchez. A Theorem About a Conjeture of H. Meyniel on Kernel Perfect Grafphs. Discrete Mathematics 59 (1986) 35-41, North Holland.

[6] H. Galeana Sánchez and V. Neumann Lara. On Kernels and Semikernels of Digraphs. Discrete Mathematics 48 (1984), 67-76, North Holland.

[7] H. Galeana Sánchez and V. Neumann Lara. Orientations of Graphs in Kernel Theory. Discrete Mathematics 87 (1991) 271-280, North Holland.

[8] C.T. Hoang. On the $P_4$-Structure of Perferct Graphs II. Odd Decompositions. Journal of Combinatorial Theory, Series B 39, 220-232 (1985).

[9] L. Lovász. Normal Hypergraphs and the Weak Perfect-Graphs. Conjeture. Annals of Discrete Mathematics 21 (1984) 29-42.

[10] M.M. Fréderic Maffray. L'Existencede Noyaux Dans Les Graphs Parafaits Thése, Paris (1984).

[11] V. Neumann Lara. Seminúcleos de una Digráfica. Anales del Instituto de Matemáticas II, 1971, U.N.A.M.

[12] J. Von Neumann and O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. (Princeton. Univ. Press, Princeton)...