UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

MATEMATICAS APLICABLES A LA INGENIERIA PETROLERA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A :

JOSE FRANCISCO ALVARADO HERRERA

MEXICO, D. F. 1991

I N D I C E

Pag.

I N T R O D U C C I O N

El objetivo principal de este trabajo es utilizarlo como apuntes en la materia de Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería Petrolera.

Se presenta el método de expansión por eigenfunciones; esta presentación es una traducción del libro Ecuaciones Diferenciales Parciales Elementales, de Paul W. Berg y James L. Mc Gregor.

El método de expansión por eigenfunciones muestra la solución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales parciales, con coeficientes constantes y algunas ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes variables.

Los Capítulos I, II y III se consideran necesarios para tener una idea más amplia sobre las ecuaciones diferenciales parciales, pero están simplificados debido a que este tema es muy extenso.

C A P I T U L O   I

C O N C E P T O S   B A S I C O S

1. Introducción.

En este capítulo se estudian la definición de ecuación diferencial parcial, los conceptos de grado y orden, la solución general y la particular de dicha ecuación.
Por comodidad se abrevia el nombre de ecuación diferencial parcial como EDP.

2. Ecuaciones diferenciales parciales.

Definición.
Toda igualdad que relaciona una función con sus variables independientes y sus derivadas se llama EDP.

Concepto de orden.
El orden de una EDP es el de la derivada de mayor orden que aparezca en la ecuación. Ejemplo:

$$\frac{\partial^3 \theta}{\partial s^3} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \theta(s,t) \qquad \text{EDP de tercer orden.}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \qquad \text{EDP de segundo orden.}$$

Concepto de grado.
El grado de una EDP está dado por la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden, siempre que la ecuación se pueda expresar como un polinomio de esa derivada. Ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = u^2 \qquad \text{EDP de primer grado.}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} = z \qquad \text{EDP de segundo grado.}$$

En cuanto a la linealidad de una EDP, el concepto se maneja de forma levemente distinto a como se hace para una ecuación ordinaria, que es lineal o no lineal. En el estudio de EDP se presenta una tercera alternativa presentada por las ecuaciones causilineales.

Una EDP es lineal, si lo es en la variable dependiente y en sus derivadas, Ejemplo :

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} .$$

Una EDP es cuasilineal, si es lineal en la derivada de mayor orden y no lineal en las otras derivadas o en las variables dependientes, Ejemplo :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} .$$

Una EDP que no responde a ninguna de las dos definiciones anteriores, es no lineal. Ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^4 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Solución de una EDP.
Como se ha observado en los ejemplos anteriores, una EDP es una relación de la forma:

$$F(x, y, \ldots u, u_x, u_y, \ldots u_{xx}, u_{yy}, \ldots) = 0, \tag{1}$$

donde u es la variable dependiente; entonces la función $u(x, y, \ldots)$ donde las variables independientes $x, y, \ldots,$ junto con todas sus derivadas parciales, satisfagan a la ec. (1). A esta función u se le llama solución de la Ec. (1). Ejemplo:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 2x\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \text{EDP}.$$

Probar que $u(x,y) = ax^2 + ay + b$ es solución.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = a.$$

Sustituyendo en la EDP :

$$2ax - 2ax = 0$$

$\therefore$ $u(x,y)$ es solución de la EDP.

3. Solución general.

Una función $u(x,y,\ldots)$ es solución general de una EDP de orden n, si la satisface al sustituirla en la EDP y además las condiciones auxiliares apropiadas para la EDP. Ejemplo 2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{EDP}.$$

$$u(x,y) = f_1(x+y) + f_2(2x+y) = F_1(a_1 x + a_1 y) + F_2(a_2 x + a_1 y),$$

donde F_1 y F_2 son funciones arbitrarias :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1 F_1' + a_2 F_2' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1^2 F_1'' + a_2^2 F_2''$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a_1 F_1' + a_1 F_2' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a_1^2 F_1'' + a_1^2 F_2''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_1^2 F_1'' + a_1 a_2 F_2''.$$

Sustituyendo en la EDP

$$a_1^2 F_1'' + a_2^2 F_2'' - 3a_1^2 a_2 F_2'' + 2a_1^2 F_1'' + 2a_1^2 F_2'' = 0$$

$$F_1''(a_1^2 - 3a_1^2 + 2a_1^2) + F_2''(a_2^2 - 3a_1 a_2 + 2a_1^2) = 0$$

$$F_2''(a_2^2 - 3a_1 a_2 + 2a_1^2) = 0 \,.$$

Como $\quad a_2 = 2a_1$

$$(a_2^2 - 3a_1 a_2 + 2a_1^2) F_2'' = 0$$

$$0 = 0 \,.$$

En este caso, esta solución contiene dos funciones arbitrarias y - la EDP es de segundo orden.

Del ejemplo (2) se concluye que la solución general de una EDP de enésimo orden, con m variables independientes, contiene n fun-- ciones arbitrarias independientes, de $(m-1)$ variables.

En la práctica se busca una solución particular que satisfaga --- ciertas condiciones auxiliares.

4. Operador lineal y ecuaciones lineales.

El operador es una relación que se aplica a una función dando --- otra función. Ejemplos :

$$D^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,,$$

$$D u = \frac{\partial u}{\partial z} \,.$$

Un operador A es lineal si dadas las funciones, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, y las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se tiene :

$$A(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n) = c_1 A u_1 + c_2 A u_2 + \ldots + c_n A u_n,$$

donde la función $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n = u$, es una combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Ejemplos de operadores lineales :

(1) La transformación de una función u de dos variables en una - función de tres variables :

$$Ru = v(x,y,z) = v(x,y) + u(y,z) + u(z,x).$$

(2) La transformación de una función u de dos variables en una - función de una variable :

$$Su = v(x) = u(x,0) + u_y(x,0),$$

(3) El llamado operador lineal integral, que transforma $u(x,y)$ - en una función $v(x,y)$ de dos variables:

$$Tu = v(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 u(\xi,\eta) \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

La suma de dos operadores lineales F y G está definida por:

$$(F+G)u = Fu + Gu,$$

dando como resultado otro operador lineal. Ejemplo :

$$\begin{aligned}(F+G)(c_1 u_1 + c_2 u_2) &= F(c_1 u_1 + c_2 u_2) + G(c_1 u_1 + c_2 u_2)\\ &= (c_1 F u_1 + c_2 F u_2) + (c_1 G u_1 + c_2 G u_2)\\ &= c_1 (F+G) u_1 + c_2 (F+G) u_2 .\end{aligned}$$

La ecuación :

$$A u = f, \tag{2}$$

es lineal si A es un operador lineal; esta ecuación es homogénea si $f = 0$ y es no homogénea si $f \neq 0$.

Ahora si $D_1, D_2, \ldots,$ son los operadores para la diferenciación parcial $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \ldots,$ y $a_{11}, a_{12}, \ldots,$ de ciertas funciones $x, y, \ldots,$ además $D_1^2 = \partial^2/\partial x^2$, $D_2^2 = \partial^2/\partial y^2$, entonces el operador lineal A se puede escribir:

$$A = a_{11} D_1^2 + a_{12} D_1 D_2 + a_{22} D_2^2 + a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_0,$$

para el caso más general de la ecuación diferencial parcial de segundo orden, con dos variables independientes.

De esta manera la Ec(1) escrita en forma desarrollada es :

$$u(a_{11} D_1^2 + a_{12} D_1 D_2 + a_{22} D_2^2 + a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_0) = f, \tag{3}$$

o bien:

$$a_{11} u_{xx} + a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u = f. \tag{4}$$

En el caso especial en que $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_0$ sean constantes de la ecuación, se dice que tiene coeficientes constantes.

El estudio de una ecuación diferencial ordinaria es bastante simplificada cuando la ecuación es lineal, porque todas las soluciones pueden ser obtenidas por combinación de soluciones particulares, usando el principio de superposición.

El problema típico es encontrar una solución de la EDP que satisfaga ciertas condiciones auxiliares.

Estas condiciones son lineales que se expresan en la siguiente -- forma:

$$Bu = g, \tag{5}$$

donde B es un operador lineal y g es una función determinada.

La condición auxiliar lineal (5) es llamada homogénea o no homogénea ya sea que $g = 0$ o $g \neq 0$.

Como un ejemplo se considera el problema :

$$\begin{array}{lll} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, & 0 < t \\ u_x(0,t) = 0, & 0 < t & \\ u_x(1,t) = 0, & 0 < t & \\ u(x,0) = x^2(1-x)^2, & 0 < x < 1. & \end{array}$$

La primera ecuación es la EDP, las ecuaciones restantes son condiciones lineales auxiliares.

La propiedad más importante de la ecuación lineal homogénea es que cumpla con el principio de superposición.

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones cualesquiera, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son - constantes cualesquiera, A es un operador lineal y $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son respectivamente soluciones de las ecuaciones:

$$Au_1 = f_1 \quad ; \quad Au_2 = f_2 \; ; \; \ldots ; \; Au_n = f_n,$$

entonces:

$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$, es una solución de la ecuación,

$$Au = c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n = A(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n)$$

$$= c_1Au_1 + c_2Au_2 + \ldots + c_nAu_n = c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n.$$

Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son ciertas constantes, entonces $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$ es también una solución de dicha ecuación.

Si u es una solución de $Au=f$ y v es una solución de $Av=0$, -- entonces $w=u+v$ es una solución de $Aw=0$.

Se tienen dos casos especiales del principio de superposición. El primer caso especial se tiene para $f_1=f_2=\ldots=f_n=0$ y el segundo caso especial es aquel que $n=2, u_1=u, f_1=f, u_2=v, f_2=0, c_1=c_2=1$.

A veces se encuentra infinidad de soluciones de una EDP lineal -- homogénea. Por ejemplo la ecuación:

$$u_x + u_y = 0,$$

que tiene las soluciones:

$$u_n(x,y) = (x-y)^n, \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

esto recomienda que :

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,y).$$

También son soluciones de la EDP lineal homogénea, si se tiene -- $c_n = 1/n!$, esto es:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-y)^n}{n!} = e^{x-y},$$

Y fácilmente se verifica que esta función es una solución de :

$$u_x + u_y = 0.$$

5. Funciones de valores complejos.

Una función de valores complejos para una variable real es de la forma:

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son las partes real e imaginaria respectivamente de $f(x)$ y se escriben como sigue:

$$f_1(x) = \mathrm{Re}\{f(x)\} \quad ; \qquad f_2(x) = \mathrm{Im}\{f(x)\} .$$

Dos funciones de valores complejos son iguales si sus respectivas partes reales e imaginarias son iguales.
Cada función de valores reales se considera como una función de valores complejos si la parte imaginaria es igual a cero.

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de operaciones algebraicas extendidas a cálculos con funciones de valores complejos:

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x) + i f_2(x)\right] = \frac{d}{dx} f_1(x) + i \frac{d}{dx} f_2(x)$$

$$\int_a^b \left(f_1(x) + i f_2(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + i \int_a^b f_2(x)\, dx .$$

Una función de valores complejos es llamada continua, diferenciable, etc. si las partes real e imaginaria tienen las correspondientes propiedades.

La función exponencial compleja es de particular importancia y está definida por :

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{(\alpha x)}\left(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x\right),$$

donde α y β son constantes reales.

Todas las reglas de álgebra y cálculo para funciones exponenciales reales se cumplen para funciones de valores complejos.

6. Solución particular.

Definición.
Una solución particular de una EDP, es una función arbitraria que se obtiene de la solución general y valuando sus funciones arbitrarias.

La obtención de una solución particular de una EDP homogénea con coeficientes constantes se presenta por el método de función exponencial y por el método de separación de variables.

Solución particular de la EDP homogénea con coeficientes constantes por el método de función exponencial:

$$P(D_1, D_2)\,u = 0, \tag{6}$$

donde:

$$P(r,s) = a_{n,m} r^n s^m + a_{n,m-1} r^n s^{m-1} + \dots + a_{1,1} r s + a_{1,0} r + a_{0,1} s + a_{0,0},$$

es un polinomio en r y s, y $D_1 = \partial/\partial x$, $D_2 = \partial/\partial y$.

La función exponencial e^{rx+sy} tiene las propiedades:

$$D_1 e^{rx+sy} = \frac{\partial}{\partial x} e^{rx+sy} = r e^{rx+sy},$$

$$D_2 e^{rx+sy} = \frac{\partial}{\partial y} e^{rx+sy} = s e^{rx+sy}.$$

Se sustituye $u = e^{rx+sy}$ en Ec (6) y se tiene:

$$P(r,s)\, e^{rx+sy} = 0,$$

así si r y s es una solución de la ecuación algebraica:

$$P(r,s) = 0,$$

entonces e^{rx+sy} es una solución de la ecuación diferencial (6).

Ejemplo por el método de función exponencial:

$3u_x - 2u_y = 0$ EDP homogénea,

donde:

$$u = e^{rx+sy},$$
$$u_x = r e^{rx+sy},$$
$$u_y = s e^{rx+sy}.$$

Sustituyendo en la EDP homogénea :

$$3re^{rx+sy} - 2se^{rx+sy} = 0$$
$$(3r-2s)\, e^{rx+sy} = 0$$
$$3r-2s = 0$$
$$r = \frac{2}{3} s,$$

donde s puede ser elegida arbitrariamente y r es entonces determinada:

$$u = e^{\frac{2}{3}xs + sy},$$

puede ser cualquier número complejo; así esta ecuación tiene un número infinito de soluciones.

Solución particular de la EDP homogénea con coeficientes constantes por el método de separación de variables.

Con este método se buscan soluciones que son productos de funciones de una sola variable.

Por ejemplo considerando la ecuación:

$$3u_x - 2u_y = 0 \qquad \text{EDP homogénea,}$$

se busca una solución de la forma:

$$u(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y),$$

y sustituyendo en la EDP homogénea :

$$3\varphi'(x)\psi(y) - 2\varphi(x)\psi'(y) = 0;$$

dividiendo entre $\varphi(x)\psi(y)$:

$$\frac{3\varphi'(x)\psi(y)}{\varphi(x)\psi(y)} - \frac{2\varphi(x)\psi'(y)}{\varphi(x)\psi(y)} = 0$$

$$3\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{2\,\psi(y)}{\psi(y)}\ .$$

Así los dos miembros son independientes de x y y ; lo anterior se iguala a una constante λ para que cada término dependa sólo de una variable:

$$3\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \lambda \qquad ; \qquad 2\,\frac{\psi(y)}{\psi(y)} = \lambda\ ,$$

integrando ;

$$3\ln\varphi = \lambda\varphi \qquad ; \qquad 2\ln\psi = \lambda\psi,$$

$$\ln \varphi = \lambda \frac{\varphi}{3} \quad ; \quad \ln \psi = \lambda \frac{\psi}{2} .$$

Como $\varphi = x$ y $\psi = y$

$$\ln x = \lambda \frac{x}{3} \quad ; \quad \ln y = \lambda \frac{y}{2}$$

$$x = e^{\lambda \frac{x}{3}} \quad ; \quad y = e^{\lambda \frac{y}{2}} .$$

Finalmente se tiene la solución por el método de separación de -- variables:

$$u = e^{\lambda \frac{x}{3}} e^{\lambda \frac{y}{2}}$$

$$u = e^{\lambda (\frac{x}{3} + \frac{y}{2})} .$$

Otro ejemplo por el método de separación de variables:

$$x^2 u_{xx} + x u_x - u_y = 0.$$

Sustituyendo $u = \varphi(x) \psi(y)$ y reacomodando términos:

$$u_x = \varphi'(x) \psi(y) \quad ; \quad u_y = \varphi(x) \psi'(y) \quad ; u_{xx} = \varphi''(x) \psi(y)$$

$$\frac{x^2 \varphi''(x) \psi(y) + x \varphi'(x) \psi(y) - \varphi(x) \psi'(y)}{\varphi(x) \psi(y)} = 0$$

$$\frac{x^2 \varphi'' + x \varphi'}{\varphi} = \frac{\psi'}{\psi} .$$

Igualando los dos términos con λ :

$$x^2 \varphi'' + x \varphi' = \lambda \varphi$$

$$\lambda^2 \varphi'' + \lambda \varphi' - \lambda \varphi = 0$$

$$\psi' - \lambda \psi = 0.$$

$u = x^r$ se deriva y se sustituye en el primer término:

$$u_x = r x^{(r-1)}$$
$$u_{xx} = r(r-1) x^{(r-2)}$$
$$x^2 r(r-1) x^{(r-2)} + x r x^{(r-1)} - \lambda x^r = 0$$
$$r(r-1) x^r + r x^r - \lambda x^r = 0$$
$$r^2 x^r - \lambda x^r = 0$$
$$r^2 - \lambda = 0$$
$$r = \pm\sqrt{\lambda} \text{ ,}$$

como $r = \pm\sqrt{\lambda}$ entonces $x^r = x^{\pm\sqrt{\lambda}}$.

Se integra el segundo término:

$$\psi' - \psi\lambda = 0$$
$$\int \frac{\psi'}{\psi} = \int \lambda$$
$$\ln \psi = \lambda \psi \text{ .}$$

Solución:

$$\psi = e^{\lambda\psi} \quad ; \quad \text{como } \psi = y \text{ ;}$$
$$y = e^{\lambda\psi} \text{,}$$
$$u_1 = e^{\lambda y} x^{\sqrt{\lambda}} \quad ; \quad u_2 = e^{\lambda y} x^{-\sqrt{\lambda}} \text{ .}$$

C A P I T U L O   II

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES.

1. Introducción.

En este capítulo se desarrollan las condiciones auxiliares para la EDP de primer orden y de segundo orden con coeficientes constantes, comparando el desarrollo con el de la ecuación diferencial ordinaria para una mejor comprención del procedimiento.

También se obtiene la solución general de la EDP de primer orden - mediante la introducción de nuevas coordenadas que corresponden a una rotación de ejes. De manera similar se obtiene la solución -- general para la EDP de segundo orden mediante la introducción de - tres nuevas variables.

2. Condiciones auxiliares.

Una condición auxiliar para una ecuación diferencial es otra ecuación que involucra funciones o constantes independientes y que -- deben satisfacer la función solución de la ecuación diferencial.

Un grupo de condiciones auxiliares que involucra elementos indeterminados (constantes o funciones) es propio de una ecuación diferencial, si para cada uno de estos elementos indeterminados, hay una y sólo una función la cual satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones auxiliares.

La teoría fundamental para ecuaciones diferenciales ordinarias -- afirma:

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, son constantes cualesquiera, entonces la ecuación - diferencial es :

$$a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} u' + a_n u = f(x), \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función continua que tiene una y solamente una solución tal que ;

$$u(0) = u_0 \quad , \quad u'(0) = u_1 , \ldots , u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} . \tag{2}$$

Cada una de las Ecs (2) es una condición auxiliar para la ecuación diferencial (1); el teorema enuncia que el conjunto de condiciones auxiliares de las Ecs (2) es apropiado para la Ec (1).

Entonces, en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias con - coeficientes constantes, es un conjunto de condiciones auxiliares apropiados para toda ecuación del mismo orden.

Se puede hacer una comparación análoga de condiciones auxiliares - para la EDP de primer orden con coeficientes constantes.

La EDP de primer orden con coeficientes constantes es :

$$a u_x + b u_y + c u = f(x,y), \tag{3}$$

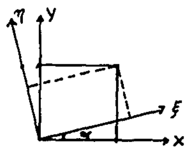
donde a, b, c son constantes y $f(x,y)$ es continua en todos los - puntos.

En la siguiente sección se ve que, si $u_0(x)$ es una función -- diferencial en todos los puntos, entonces ésta es una y sólo una - solución $u(x,y)$ de la Ec (3), tal que para toda x :

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4}$$

3. Ecuaciones de primer orden.

Una forma de encontrar la solución general de la EDP de primer orden, se basa en la introducción de nuevas coordenadas (ξ,η) correspondientes a una rotación de los ejes (x,y) con un ángulo α :



quedando la EDP de primer orden de la forma:

$$w_{\xi} + k\,w = \varphi(\xi,\eta), \tag{5}$$

La solución general de la Ec (5) se obtiene de una ecuación diferencial ordinaria teniendo η como un parámetro y reemplazando las constantes arbitrarias de la solución por funciones arbitrarias de η .
Entonces se regresa al sistema original de coordenadas para obtener la solución general.

Como ilustración considérese la siguiente ecuación diferencial :

$$3u_x + 4u_y - 2u = 1. \tag{6}$$

Si los ejes (ξ,η) son obtenidos girando los ejes (x,y) un ángulo - α , los ejes (ξ,η) y (x,y) están relacionados por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lcl} \xi = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha & ; & x = \xi\cos\alpha - \eta\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \eta = -x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha & ; & y = \xi\,\mathrm{sen}\,\alpha + \eta\cos\alpha \end{array}\right\} (7)$$

Por tanto si $u(x,y)$ es una solución de la Ec (6) :

$$u(x,y) = u\,(\xi\cos\alpha - \eta\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ \xi\,\mathrm{sen}\,\alpha + \eta\cos\alpha) = \omega\,(\xi,\eta)$$

$$u_x = \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = \cos\alpha\,\omega_\xi - \mathrm{sen}\,\alpha\,\omega_\eta$$

$$u_y = \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = \mathrm{sen}\,\alpha\,\omega_\xi + \cos\alpha\,\omega_\eta .$$

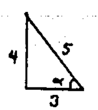
Sustituyendo los resultados anteriores en la Ec (6) :

$$3(\omega_\xi\cos\alpha - \omega_\eta\,\mathrm{sen}\,\alpha) + 4(\omega_\xi\,\mathrm{sen}\,\alpha + \omega_\eta\cos\alpha) - 2\omega = 1$$

$$(3\cos\alpha + 4\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\omega_\xi + (4\cos\alpha - 3\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\omega_\eta - 2\omega = 1 .$$

Para satisfacer la ecuación anterior se elige α como :

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{4}{5} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$



$$\therefore\ (4\cos\alpha - 3\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\omega_\eta = 0$$

$$(3\cos\alpha + 4\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\omega_\xi = 5\,\omega_\xi .$$

Sustituyendo los resultados en la ecuación anterior queda :

$$5\omega_\xi - 2\omega = 1$$

$$\omega_\xi - \frac{2}{5}\omega = \frac{1}{5}.$$

Es de la forma de la Ec (5).

Para la Ec (5) también se utiliza el método de combinaciones lineales :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}.$$

O sea :

$$x = A\xi + B\eta$$

$$y = C\xi + D\eta,$$

donde $A, B, C, D,$ son constantes a ser determinadas.

Se tiene :

$$3u_x + 4u_y - 2u = 1,$$

como :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = u_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + u_y \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad ; \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} = A \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = C \quad .$$

Se toman las condiciones de $A=3$, $C=4$, para que el sistema tenga - solución B y D son arbitrarias, queda :

$$\omega(\xi,\eta) = u(x,y)$$

$$\omega_\xi = 3u_x + 4u_y$$

$$\omega_\xi - 2\omega = 1. \qquad (8)$$

Utilizando el factor integrante $(e^{-2\xi})$:

$$\omega_\xi e^{-2\xi} - 2\omega e^{-2\xi} = e^{-2\xi}.$$

Integrando :

$$\int(\omega_\xi e^{-2\xi} - 2\omega e^{-2\xi})\, d\xi = \int e^{-2\xi}$$

$$\omega e^{-2\xi} = -\frac{1}{2} e^{-2\xi} + g(\eta). \qquad (9)$$

Pero como :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} = \begin{matrix} x = A\xi + C\eta \\ y = B\xi + D\eta. \end{matrix}$$

Entonces :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} = \begin{matrix} x = 3\xi + \eta \\ y = 4\xi , \end{matrix}$$

por lo que :

$$\xi = \frac{y}{4}$$
$$\eta = x - \frac{3}{4} y .$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la Ec (9) queda :

$$u(x,y) = -\frac{1}{2} + g\left(x - \frac{3}{4}y\right) e^{y/2} . \qquad (10)$$

Para encontrar la solución particular de la Ec (6), que satisface las condiciones auxiliares (4), se sustituye la Ec (10) en la Ec - (4) y queda :

$$u_c(x) = \frac{1}{2} + g(x).$$

Entonces se tiene :

$$g(x) = g\left(x - \frac{3}{4}y\right) e^{y/2}$$
$$u_o(x) = u_o\left(x - \frac{3}{4}y\right) e^{y/2}$$

y

$$g(x) = u_o(x) + \frac{1}{2} .$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la Ec (10) se tiene :

$$u(x,y) = -\frac{1}{2} + e^{y/2}\left[u_0\left(x - \frac{3}{4}y\right) + \frac{1}{2}\right].$$

Esta es una solución única que satisface la EDP y la condición auxiliar.

4. Ecuaciones de segundo orden.

La resolución de las ecuaciones de segundo orden es más complicada que para las ecuaciones de primer orden.

La ecuación general de segundo orden de coeficientes constantes, es la siguiente:

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + h u_x + k u_y + e u = f(x,y), \tag{11}$$

donde $a, b, c, h, k, e,$ son constantes. Esta ecuación puede ser transformada en una y sólo una de las siguientes formas:

$$\omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta} + \gamma\omega = \varphi(\xi,\eta) \tag{12}$$

$$\omega_{\xi\xi} - \omega_{\eta\eta} + \gamma\omega = \varphi(\xi,\eta) \tag{13}$$

$$\omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta} = \varphi(\xi,\eta) \tag{14}$$

$$\omega_{\xi\xi} + \gamma\omega = \varphi(\xi,\eta), \tag{15}$$

donde γ varia de $-1, \emptyset, 1$.

Si $(ac-b^2>0)$, la Ec (11) se reduce a la Ec (12) y se llama ecua-- ción elíptica o de Laplace.

Si $(ac-b^2<0)$, la Ec (11) se reduce a la Ec (13) y se llama ecua- ción hiperbólica.
Si $(ac-b^2=0)$, la Ec (11) se reduce a la Ec (14) y se llama ecua- ción parabólica o de calor; también se puede reducir a la Ec (15) y en este caso se llama ecuación degenerada.

Ejemplo de Transformación de una ecuación de segundo orden:

$$4u_{xx}-24u_{xy}+11u_{yy}-12u_x-9u_y-5u=0 \qquad (16)$$

$$a=4 \;;\quad 2b=24 \;;\quad c=11 \qquad \therefore \quad ac-b^2=-100 .$$

Es una ecuación hiperbólica.

El primer paso es, rotación de ejes en la forma vista para la ecua ción de primer orden, con el fin de eliminar $(\omega_{\xi\eta})$:

$$u(x,y)=u(\xi\cos\alpha-\eta\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ \xi\,\mathrm{sen}\,\alpha+\eta\cos\alpha)=\omega(\xi,\eta)$$

$$u_x=\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}=\cos\alpha\,\omega_\xi-\mathrm{sen}\,\alpha\,\omega_\eta$$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=(\cos\alpha\,\omega_\xi-\mathrm{sen}\,\alpha\,\omega_\eta)^2$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\cos^2\alpha\,\omega_{\xi\xi}-2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\omega_{\xi\eta}+\mathrm{sen}^2\alpha\,\omega_{\eta\eta}$$

$$u_y = \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = sen\alpha\, \omega_\xi + \cos\alpha\, \omega_\eta$$

$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = (sen\alpha\, \omega_\xi + \cos\alpha\, \omega_\eta)^2$$

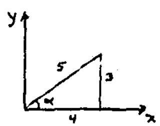
$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = sen^2\alpha\, \omega_{\xi\xi} + 2\, sen\alpha \cos\alpha\, \omega_{\xi\eta} + \cos^2\alpha\, \omega_{\eta\eta}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = sen\alpha \cos\alpha\, \omega_{\xi\xi} + (\cos^2\alpha - sen^2\alpha)\,\omega_{\xi\eta} - sen\alpha\cos\alpha\, \omega_{\eta\eta}.$$

Sustituyendo estos resultados en la Ec (16) e igualando $s = sen\alpha$ y $c = \cos\alpha$ queda :

$$(4c^2 - 24sc + 11s^2)\,\omega_{\xi\xi} + (14sc - 24(c^2 - s^2))\,\omega_{\xi\eta} +$$
$$+ (4s^2 + 24sc + s^2)\,\omega_{\eta\eta} - (12c - 9s)\,\omega_\xi + (12s - 9c)\,\omega_\eta - 5\omega = 0. \qquad (17)$$

El coeficiente $\omega_{\xi\eta}$ en la Ec (17) se iguala a cero; y según la gráfica siguiente se determina el $sen\alpha = 3$ y el $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, sustituyendo estas funciones en dicha ecuación:



$$sen\,\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$-5\omega_{\xi\xi} + 20\,\omega_{\eta\eta} - 15\,\omega_\xi - 5\,\omega = 0.$$

Cambiando de signo la ecuación anterior y dividiéndola entre 5 se tiene :

$$\omega_{\xi\xi} - 4\,\omega_{\eta\eta} + 3\,\omega_{\xi} + \omega = 0.$$

Se cambia $\omega, \xi, \eta,$ por $u, x, y,$ quedando:

$$u_{xx} - 4u_{yy} + 3u_x + u = 0. \tag{18}$$

El segundo paso es un cambio de la variable dependiente:

$$u = e^{\beta x}\,\omega. \tag{19}$$

Sustituyendo la Ec (19) en la Ec (18) queda :

$$u_x = \beta e^{\beta x}\omega + e^{\beta x}\omega_x$$
$$u_{xx} = \beta^2 e^{\beta x}\omega + \beta e^{\beta x}\omega_x + \beta e^{\beta x}\omega_x + e^{\beta x}\omega_{xx}$$
$$u_y = e^{\beta x}\omega_y$$
$$u_{yy} = e^{\beta x}\omega_{yy}$$

$$\omega_{xx} - 4\,\omega_{yy} + (2\beta + 3)\,\omega_x + (\beta^2 + 3\beta + 1)\,\omega = 0$$

$$(2\beta + 3)\,\omega_x = 0 \quad ; \qquad \beta = -\tfrac{3}{2}$$

$$\omega_{xx} - 4\,\omega_{yy} - \tfrac{5}{4}\,\omega = 0.$$

El tercer paso es cambiar de escalar :

$$x = \mu \xi \qquad ; \qquad y = \nu \eta ,$$

donde μ y ν son cambios de coeficientes $\omega_{\xi\xi}$, $\omega_{\eta\eta}$, en la trans--- formación de ecuaciones:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \qquad ; \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} .$$

Sustituyendo en la Ec (20) :

$$\frac{1}{\mu^2} \omega_{\xi\xi} - \frac{4}{\nu^2} \omega_{\eta\eta} - \frac{5}{4} \omega = 0$$

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{4}{\nu^2} = \frac{5}{4} .$$

Así se tiene la forma estándar de la Ec (16):

$$\omega_{\xi\xi} - \omega_{\eta\eta} - \omega = 0 .$$

C A P I T U L O III

ECUACION DE CALOR

1. Introducción.

Los ejemplos clásicos para la aplicación de la EDP en la ingeniería son ecuación de Darcy, ecuación de onda unidimensional, y ecuación de calor.
En éste caso se desarrollará la ecuación de calor por su fácil -- comprensión del flujo de calor a través de un material conductor.

2. Flujo de calor unidimensional.

Considérese una barra uniforme compuesta de un material conductor, con longitud L , con un área de sección transversal a , y superficie lateral aislada. Si se toma la temperatura en determinadas - secciones transversales a un tiempo t , se notará que no es la - misma debido a que el calor se transfiere longitudinalmente a --- través de la barra, de la parte caliente a la parte fría.

Sean $u(x,t)$ y ρ la temperatura de la barra y su densidad.

El calor que es suministrado por unidad de masa, con un aumento de la unidad de temperatura, es una constante c llamada calor específico de una sustancia.

La masa de la barra entre la sección x y $x+dx$ es $\rho a dx$.

La energía calorífica que debe ser suministrada a esta parte de la barra para cambiar su temperatura de cero a $u(x,t)$ es $u(x,t)c\rho a dx$.

Así, la energía calorífica contenida en la barra entre $x=a$ y $x=b$ a un tiempo t es :

$$Q(t)=\int_a^b u(x,t)\, c\, \rho\, a\, dx. \tag{1}$$

El calor puede aumentar por flujo a través de las caras a, b o por energía creada como resultado, por ejemplo, de una reacción química.

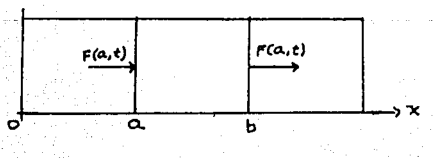
La ley de la conservación de la energía está dada por :

$$\frac{dQ}{dt}=\begin{bmatrix}\text{flujo de}\\ \text{calor}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{Calor}\\ \text{Producido}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

El término de flujo de calor se representa por la función $F(x,t)$, que se define como la cantidad de calor que fluye a través, de un área unitaria transversal, por unidad de tiempo, en la dirección positiva del eje x. El ritmo de flujo de calor a través de la sección en $x=a$ es $AF(a,t)$ y el ritmo, flujo de calor a través de la sección en $x=b$ es $-AF(b,t)$, entonces :

$$\begin{bmatrix}\text{flujo de}\\ \text{Calor}\end{bmatrix}=-A\left[F(b,t)-F(a,t)\right]$$

(ver la siguiente figura)



Esto puede ser relacionado a la función temperatura, utilizando la ley física empírica, la cual establece que el flujo de calor en un punto cualquiera es proporcional al gradiente de temperatura en ese punto; su representación es :

$$F(x,t) = -K\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad , \qquad K>0 \; . \tag{3}$$

K es la constante de proporcionalidad que caracteriza el material de la barra y se llama conductividad de calor.

El signo menos en la Ec (3) define la disminución de la temperatura de la región a a la región b de la barra.
El término flujo de calor puede escribirse de la siguiente forma :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\text{flujo de}\\ \text{calor}\end{bmatrix} &= A\left[K\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{x=b} - K\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{x=a}\right]\\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)A\,dx.\end{aligned}$$

Derivando la Ec (1) con respecto a t , queda :

$$\frac{dQ}{dt} = c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,A\,dx,$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la Ec (2) y despejando calor producido se tiene :

$$\begin{bmatrix}\text{Calor}\\ \text{Producido}\end{bmatrix} = \int_a^b \left[c\,\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\right]A\,dx. \tag{4}$$

Cuando la barra no tiene flujo de calor y el calor producido es -- cero, entonces la Ec (4) es igual a cero. Supóngase que la Ec (4) es una función contínua de x , entonces la integral es cero a -- través de $[0,l]$, pero si en algún punto x_0 no es cero, se deduce una contradicción, supóngase que la Ec (4) es positiva en x_0 , - entonces en un pequeño intervalo (a,b) contenído en x_0 es positi vo, debido a esta alternativa de (a,b) la Ec (4) no es cero. Esta contradicción presenta que la integral no puede ser positiva o -- negativa en ciertos puntos, entonces:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) = 0, \tag{5}$$

de donde :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6}$$

Aquí $k = K/c\rho$ es una constante positiva llamada difusividad del - calor.

La Ec (6) se llama ecuación de calor; es lineal, homogénea y parabólica.

3. Término fuente.

Si la fuente interna de calor está presente, el flujo de calor es en una dimensión, esto es, el ritmo de producción de energía por - unidad de volumen por unidad de tiempo $q(x,t,u)$, es función de - la sección transversal, del tiempo y de la temperatura local.
El término fuente para la región $a<x<b$ es el ritmo de producción - de calor en la región y es igual a :

$$\int_a^b q_1(x,t,u(x,t))\,A\,dx, \tag{7}$$

si la Ec (7) se incorpora a la Ec (4), puede escribirse :

$$\int_a^b \left\{ c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial u}{\partial x}\right) - q_1(x,t,u) \right\} A\,dx = 0, \tag{8}$$

si el integrado es contínuo queda :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t,u), \tag{9}$$

donde $q(x,t,u) = q_1(x,t,u)/c\rho$ y $k = \frac{K}{c\rho}$.

Para la situación en la que el calor se absorbe internamente aún ritmo por unidad de volumen, por unidad de tiempo. Entonces $q(x,t,u)$ es negativo :

$$q_1(x,t,u) = -c\rho\, q(x,t,u).$$

La Ec (9) no es lineal y es muy difícil de resolver.

Cuando la función de calor es independiente de la temperatura local, como el calor causado por una corriente eléctrica fluyente en la -- barra, la ecuación diferencial es :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t), \tag{10}$$

que es una ecuación lineal no homogénea.

Alternativamente, el término fuente puede ser proporcional a la temperatura local :

$$q(x,t,u) = r(x,t)\, u(x,t),$$

por ejemplo, el calor puede ser producido por una reacción química a un ritmo proporcional a la temperatura local entonces, de la ecuación (9) se tiene :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(x,t)\, u, \tag{11}$$

que es una ecuación lineal homogénea.

Con los dos tipos de fuentes de calor (como la corriente a través de la barra y la reacción química) en combinación queda la siguiente ecuación general lineal :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(x,t)\, u + q(x,t). \tag{12}$$

4. Barra no uniforme.

Una situación más complicada que el caso ya visto corresponde a una barra de sección transversal constante, pero con densidad, calor específico y conductividad variables en función de x ; la ecuación respectiva es :

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q_1(x,t,u)=0, \tag{13}$$

introduciéndo el calor específico por unidad de volumen $\sigma(x)=$ $=c(x)\rho(x)$ y $q(x,t,u)=q_1(x,t,u)/\sigma(x)$ queda la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\sigma(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+q(x,t,u), \tag{14}$$

forma simplificada de la fuente puede ocurrir, como ya se mencionó, conduciéndo la función que queda de la forma lineal, inhomogénea y con coeficientes variables.

5. Condiciones inicial y de frontera.

Se ha mostrado para una barra con una determinada composición y una distribución del término fuente, que la función de temperatura $u(x,t)$ es una solución de una cierta ecuación diferencial parcial.

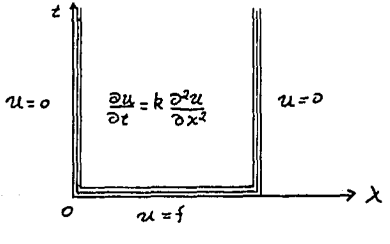
En cualquier problema de flujo de calor se tienen datos adicionales, los cuales singularizan la solución para la ecuación diferencial, que es la distribución de temperatura buscada. Los datos adicionales usualmente son un par de condiciones de frontera y una condición inicial.

Las dos condiciones de frontera describen el intercambio de calor de los extremos de la barra con el medio ambiente; la distribución de la temperatura en toda la barra a un tiempo inicial $t=0$ está dada por la condición inicial.

Por ejemplo, considérese una barra uniforme sin fuente de calor, suponiéndo la temperatura $u(x,0)=f(x)$ a un tiempo $t=0$ y que los dos extremos de la barra son colocados en contacto con fuentes a una temperatura de cero. Se tiene así una distribución de temperatura en toda la barra y existe una temperatura de cero en los extremos a cualquier tiempo posterior.

Desde un punto de vista físico, es posible que la función temperatura a través de la barra a un tiempo $t>0$ esté completamente determinado.

La función temperatura $u(x,t)$ será una solución del siguiente problema, llamado problema de valores inicial-frontera, ver la siguiente figura;



Problema: Encontrar una función $u(x,t)$ para $0 \leq x \leq L$; $t \geq 0$ que sea solución :

E.D. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $0 < x < L$; $t > 0$

C.F. $\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{array}\right\}$; $t > 0$

C.I. $u(x,0) = f(x)$; $0 < x < L$,

en este problema $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$ son funciones continuas de x y t para $t > 0$ y $0 < x < L$.

Otra forma de condición de frontera puede ocurrir cuando uno o ambos extremos de la barra son aislados; si el extremo $x = 0$ es aislado, entonces el flujo de energía en $x = 0$ es cero, la correspondiente condición de frontera $u_x(0,t) = 0$; similarmente, si el extremo $x = L$ está aislado, la condición de frontera $u(L,t) = 0$ será reemplazada por $k\,u_x(L,t) = 0$.

Otra posibilidad se tiene cuando un extremo de la barra, por ejemplo $x = 0$, es colocado en contacto con una fuente de calor a una temperatura α . La condición de frontera en, $x = 0$ es $u(0,t) = \alpha$,

Si la temperatura de la fuente de calor varía de una manera prescrita, entonces α será una función dada del tiempo $\alpha = \alpha(t)$ y esta condición de frontera es dependiente del tiempo.

Todas estas condiciones de frontera son lineales.

Así las C.F. y C.I. del problema de valores frontera-inicial constituyen un grupo de condiciones auxiliares apropiadas para la ecuación diferencial.

6. Condiciones de continuidad.

Anteriormente se supuso que las propiedades de la barra varían continuamente; cuando esto no surge naturalmente, se suponen dos barras de sección transversal a, la primera con una longitud L_1 y constantes térmicas c_1, ρ_1, K_1, k_1; la segunda con una longitud L_2 y constantes térmicas c_2, ρ_2, K_2, k_2, la primera barra tiene una temperatura uniforme de cero y su extremo izquierdo se mantiene a esta temperatura, la segunda barra tiene una temperatura uniforme de 100°F y su extremo derecho se mantiene a esta temperatura.

Al tiempo $t=0$ se ponen en contacto la barra derecha y la izquierda; se busca la distribución de temperatura en las barras para $t>0$.

Juntas las dos barras se consideran como una sola con longitud de L_1+L_2; la distribución de temperatura $u(x,t)$ en esta barra será una solución del problema siguiente:

E.D. $$u_t = k(x)\,u_{xx} \left\{\begin{matrix} 0 < x < L_1 \\ L_1 < x < L_1+L_2 \end{matrix}\right\} ; \quad t>0$$

C.F. $$\left\{\begin{matrix} u(0,t) = 0 \\ u(L_1+L_2,t) = 100 \end{matrix}\right\} ; \quad t>0$$

C.I. $$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<L_1+L_2$$

$$k(x)=\begin{cases} k_1 & 0<x<L_1 \\ k_2 & L_1<x<L_2 \end{cases} \qquad (15)$$

$$f(x) = \begin{cases} (0) & 0<x<L_1 \\ (100) & L_1<x<L_1+L_2 . \end{cases} \qquad (16)$$

En cada intervalo $0<x<L$, $L_1<x<L_1+L_2$, $u(x,t)$ será continua y tendrá derivadas continuas. Sin embargo, u o sus derivadas pueden ser discontínuas en L_1 ; para acompletar la declaración del problema, se debe especificar la naturaleza de la discontinuidad al escribir :

$$u(x,t) = \begin{matrix} u_1(x,t) & ; & 0<x<L_1 \\ u_2(x,t) & ; & L_1<x<L_1+L_2 , \end{matrix} \qquad (17)$$

se dice que las barras están en perfecto contacto térmico en $x=L_1$ si el flujo y las temperaturas son contínuas en $x=L_1$; esto es, si:

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} u_1(L_1-\epsilon,t)=u_1(L_1,t)=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} u_2(L_1+\epsilon,t)=u_2(L_1,t) , \qquad (18)$$

y

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} K_1\frac{\partial u_1}{\partial x}(L_1-\epsilon,t)=K_1\frac{\partial u}{\partial x}(L_1,t)=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} K_2(L_1+\epsilon,t)=K_2(L_1,t). \qquad (19)$$

La condición (19) es también una consecuencia matemática de la ley de conservación y la suposición de que u y sus derivadas son de - frontera.
Ahora al inicio del capítulo se tiene :

$$\int_a^b c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) A\,dx = A\left[K \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_a^b ,$$

donde $c(x)$, $\rho(x)$ y $k(x)$ son definidas en términos de $c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, k_1, k_2$, justo como $k(x)$ fue definida en términos de -- k_1 y k_2.
Ahora escogiéndo $a = l_1 - \epsilon$, $b = l_1 + \epsilon$ se obtiene :

$$K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(l_1+\epsilon, t) - K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(l_1-\epsilon, t) = \int_{l_1-\epsilon}^{l_1+\epsilon} \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right] dx.$$

Para $\epsilon \to 0$, la integral tiende a desaparecer, ya que el integrando es limitado :

$$\lim \left[K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(l_1+\epsilon,t) - K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(l_1-\epsilon,t)\right] = K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(l_1,t) - K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(l_1,t) = 0,$$

así :

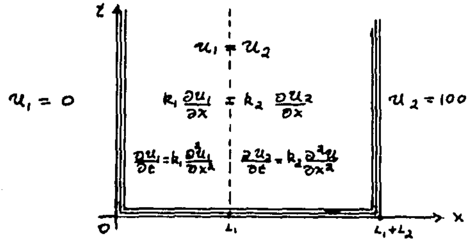
$$K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(l_1,t) = K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(l_1,t),$$

esto es, el flujo de calor es contínuo en l_1.

Las condiciones (18) y (19) son llamadas condiciones de continuidad.

Para completar la formulación del problema de valor inicial-frontera debe especificarse que estas dos condiciones se cumplen, o - alguna condición alterna se cumple en cada lugar donde las propiedades del calor conducido tengan una discontinuidad.

En el dibujo siguiente cada sección de barra con propiedades de conductividad media de calor tiene una discontinuidad:



Es de interés considerar los casos cuando forman alternativas de una o ambas condiciones de continuidad pueden ser más apropiadas. Por ejemplo, el caso de una película de óxido entre las dos barras.

7. Condiciones de frontera en general.

La condición de frontera definida en un punto de una barra es de primera clase o condición de Direchlet :

$$u(x_0, t) = \alpha(t). \tag{20}$$

La condición de frontera definida por el flujo de calor a través de la sección transversal de una barra es de segunda clase o condición de Newman:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \beta(t). \tag{21}$$

La condición de frontera definida por la unión entre la barra y - una fuente de calor es de tercera clase o condición de Robin :

$$u(x_0, t) + h\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \gamma(t) \qquad h \neq 0 . \tag{22}$$

Dandole una interpretación física a la condición (22), se supone - que se tiene una barra uniforme con conductividad K , con un in-- tervalo de $0 \leq x \leq L$, el extremo izquierdo en contacto con una fuente de calor a una temperatura de $\gamma(t)$ y con la temperatura de la barra igual a $u(x,t)$.

Se considera una película entre la barra y la fuente, como grasa u óxido, entonces se dice que :

$$u(0,t) = \gamma(t) .$$

Esto no es correcto, por lo que se tratará como una barra compuesta con K_0 , que es la conductividad de la película, L_0 es el - espesor de la película y $u_0(x,t)$ es la temperatura de la película.

Suponiéndo un contacto térmico perfecto entre el extremo de la -- barra y la película, la condición de continuidad en $x=0$ será :

$$u(0,t) = u_0(0,t) ,$$

$$K\,\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = K_0\,\frac{\partial u_0}{\partial x}(0,t) . \tag{23}$$

Además, la temperatura en el otro extremo de la película, que es calor almacenado, se tiene :

$$u_0(-L_0, t) = \gamma(t).$$

Puesto que L_0 es muy pequeño, se puede aproximar la derivada por el cociente diferencial :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0(-L_0, t) - u(0,t)}{-L_0} = \frac{\gamma(t) - u(0,t)}{-L_0}.$$

Tomando la aproximación en (23) se obtiene de $u(x,t)$ en $x = 0$ la condición de frontera :

$$K \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -\frac{K_0}{L_0}\left[\gamma(t) - u(0,t)\right],$$

ó

$$u(0,t) = \frac{L_0 K}{K_0}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \gamma(t), \qquad (24)$$

la cual es una condición de frontera de tercera clase con $h = L_0 K/k_0$.

Una condición de frontera tal como $u(0,t) - u_x(L,t) = 0$, que involucra valores de u y su derivada en los dos extremos de la barra, se llama condición de frontera mezclada, mientras que una como $u_x(L,t) + h\,u(L,0) = 0$, que involucra valores de u y su derivada en un extremo de la barra, se llama condición de frontera sin mezcla.

La condición que relaciona los valores de frontera $u(0,t)$ a --- $u(x,t)$, $0 < x < t$, en el interior de la barra se llama condición lateral:

$$u(0,t) - \int_0^{l} u(x,t)\, q(x)\, dx \, . \tag{25}$$

Si el extremo de la barra está en contacto con un fluido agitado a una temperatura dada en un recipiente, con una capacidad de calor (capacidad calorífica) la condición de frontera se expresa :

$$u(0,t) + h_1 u_x(0,t) + h_2 u_t(0,t) = 0 \, .$$

8. Problemas de equilibrio.

Cuando la temperatura en cada punto de una barra es independiente del tiempo, se dice que la temperatura está en equilibrio y el -- flujo de calor en la barra se llama estado de flujo permanente. En este caso :

$$\frac{du}{dt} = 0 \, .$$

Así, en el caso más general de conducción de calor en una barra no uniforme con fuente interna, la ecuación diferencial (13) satisfecha por la función de temperatura es :

$$\frac{\partial u}{dt} = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{dx}\left[k(x) \frac{du}{dx}\right] + q(x,u) = 0 \, . \tag{26}$$

La distribución de temperatura en un estado de equilibrio es completamente especificada por condiciones en la frontera.

El problema de determinar una solución de (7), que satisfaga condiciones de frontera dadas, es llamado problema de valores en la frontera. Por ejemplo ;

Si la temperatura en una barra uniforme de longitud L está en equilibrio cuando la temperatura en los extremos izquierdo y derecho son a y b respectivamente, entonces la distribución de temperatura $u(x)$ en la barra es la solución de un problema de valores en la frontera :

E.D. $\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0;$ $\quad\quad 0 < x < L$

C.F. $u(0) = a;$ $\quad\quad u(L) = b.$

Los problemas para una barra son problemas de valores en la frontera para ecuaciones de frontera ordinarias.

Se dice que una substancia conductora de calor uniforme tiene la misma propiedad térmica en cada punto si es isótropa. La función de temperatura satisface una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden en x , y y puede ser presentada como ecuación de Laplace :

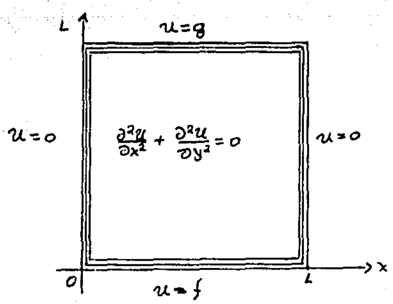
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{27}$$

Considérese una placa de una sustancia uniforme isótropa sin fuente de calor y en equilibrio térmico. Se coloca la placa en el plano horizontal x, y ; en el espacio x, y, z se supone que la temperatura u es uniforme en todas las lineas verticales, así que u es una función $u(x, y)$, si se tiene la hipótesis de la función temperatura que satisface una ecuación lineal homogénea y de segundo orden.

Suponiéndo que la placa es cuadrada como en la siguiente figura, de longitud L por lado, a una temperatura cero en los lados derecho e izquierdo y con una temperatura $g(x)$ y $f(x)$ en los lados superior e inferior respectivamente, entonces $u(x,y)$ es la solución de valores en la frontera:

E.D. $\quad u_{xx} + u_{yy} = 0; \qquad 0 < x < y \quad , \qquad 0 < y < L$

C.F. $\begin{cases} u(0,y) = 0 \quad ; \quad u(L,y) = 0 \quad & 0 < y < L \\ u(x,0) = f(x) \quad ; \quad u(x,L) = g(x) \quad & 0 < y < L \end{cases}$



La interpretación física del problema indica que las condiciones - auxiliares son apropiadas para la ecuación diferencial (27): Esto es, que para $f(x)$ y $g(x)$ arbitrarias hay solamente una solución - para la ecuación diferencial que satisface las condiciones auxiliares.

C A P I T U L O IV

METODO DE EXPANCION POR EIGENFUNCIONES

1. Introducción.

En este Capítulo se desarrolla un método para que la solución de EDP con coeficientes constantes y con coeficientes variables no sea trivial.
El método es de expansión por eigenfunciones y su principal objetivo es de proveer la técnica necesaria para la formulación y solución de problemas que involucran EDP, para coeficientes constantes y para algunas ecuaciones con coeficientes variables.

2. Conceptos del método.

El caso más simple se tiene cuando la EDP y las condiciones auxiliares son homogéneas:

E.D. $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad t>0 \quad ; \quad 0<x<L \tag{1}$$

C.F. $$\left\{\begin{array}{l} u(0,t)=0 \quad (2) \\ u(L,t)=0 \quad (3) \end{array}\right\} \quad ; \quad t>0$$

C.I. $$u(x,0) = f(x) \quad ; \quad 0<x<L. \tag{4}$$

Este método es general y puede ser empleado para soluciones de problemas homogéneos con valores inicial-frontera; para EDP con coeficientes constantes y para algunas EDP con coeficientes variables.

Finalmente, sus resultados son básicos para la solución de problemas no homogéneos.

En algunas consideraciones el procedimiento es simple. Las funciones particulares que satisfacen la ecuación diferencial pueden ser dadas por separación de variables. Con esto se da un paso para las ecuaciones que requieren la solución por separación de variables que satisfacen las condiciones de frontera y la ecuación diferencial.

Por ejemplo, para el problema formulado antes, se buscan funciones de forma especial:

$$u(x,t) = T(t)\,\varphi(x),$$

que satisfagan a (1), (2) y (3).

Las tres ecuaciones son lineales y homogéneas; de aquí, sí el número de tales funciones puede ser encontrado, entonces cualquier combinación lineal de ellos también satisface las tres ecuaciones.

La idea de este método es encontrar suficientes funciones para casos especiales de una combinación lineal formada, la cual satisface la condición inicial (4).

3. Conceptos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el curso del trabajo se quiere resolver problemas de valores - inicial-frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del tipo :

$$C_0(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+C_1(x)\frac{d\varphi}{dx}+C_2(x)\varphi+\lambda\varphi=0. \tag{5}$$

El interés estará principalmente en los casos especiales de la Ec (5) los cuales pueden ser resueltos explícitamente; por ejemplo, - $\varphi''+\lambda\varphi=0$ o $x^2\varphi''+\lambda\varphi'+\lambda\varphi=0$, no obstante se utiliza el aspecto - más general para la solución de (5) y se formula un método que --- puede ser usado en todos los casos.

Considerando la Ec (5) en el intervalo $a\leq x\leq b$, el número λ - puede ser real o complejo y es una constante independiente de x - que es un parámetro.

Otra solución de la Ec (5) puede ser determinada prescribiendo el valor de $\varphi(x)$ y $\varphi'(x)$ en un punto del intervalo (a,b) .

Esta solución es primero función de x y por supuesto de λ ,- cuando esta última dependencia es importante, se escribe $\varphi(x,\lambda)$ y $\varphi'(x,\lambda)$.

El teorema de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias -- explícitamente establece:

Si los coeficientes $C_0(x)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$ son continuos en - (a,b) y $C_0\neq 0$ en todo el intervalo, entonces para cualquier punto fijo x_0 en (a,b) y para constantes cualesquiera α y β ,- la ecuación diferencial tiene unicamente una solución $\varphi(x)=\varphi(x,\lambda)$, satisfaciéndo en x_0 las condiciones iniciales:

$$\varphi(x_0) = \alpha \quad ; \quad \varphi'(x_0) = \beta. \tag{6}$$

Además $\varphi(x,\lambda)$ y $\varphi'(x,\lambda)$ son continuas y continuamente diferenciales de x y λ para $a \leq x \leq b$ y toda x .
Es conveniente separar las dos soluciones especiales si se hace - $\varphi_1(x) = \varphi_1(x,\lambda)$ y $\varphi_2(x) = \varphi_2(x,\lambda)$ las cuales satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lcl} \varphi_1(x_0) = 1 & ; & \varphi_2(x_0) = 0 \\ \varphi_1'(x_0) = 0 & ; & \varphi_2'(x_0) = 1. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Se llamaran $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ a las soluciones básicas de la Ec - (5) en x_0 .
Si estas soluciones son conocidas, es fácil construir la solución general $\varphi(x)$, la cual satisface la Ec (6), ya que :

$$\varphi(x_0) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$$

$$\varphi'(x_0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta.$$

Pero la ecuación tiene únicamente una solución que satisface la Ec (6), así que :

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \qquad \text{ó} \qquad \varphi(x) = \alpha\,\varphi_1(x) + \beta\,\varphi_2(x). \tag{8}$$

La solución general de la Ec (5) es representada en términos de la solución básica de x_o por la Ec (8).
Considerando el caso especial más importante de la Ec (5) :

$$\varphi'' + \lambda \varphi = 0. \tag{9}$$

Se empieza por encontrar la solución básica en $x_o = 0$, ello -- satisface :

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1 \quad ; \quad \varphi_2(0) = 0 \\ \varphi_1'(0) &= 0 \qquad\;\; \varphi_2'(0) = 1, \end{aligned} \tag{10}$$

y es fundado facilmente, que ellas son dados por las siguientes -- ecuaciones :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = \varphi_1(x,\lambda) &= \cos x\sqrt{\lambda} \\ \varphi_2(x) = \varphi_2(x,\lambda) &= \frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Estas ecuaciones son correctas si λ es positiva; si λ es -- negativa ó compleja, se utilizan las series de taylor definidas -- por las funciones trigonométricas :

$$\operatorname{Cos} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{Sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Así la Ec (11) es equivalente a :

$$\varphi_1(x,\lambda) = 1 - \lambda \frac{x^2}{2!} + \lambda^2 \frac{x^4}{4!} - \lambda^3 \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$\varphi_2(x,\lambda) = x - \lambda \frac{x^3}{3!} + \lambda^2 \frac{x^5}{5!} - \lambda^3 \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad (12)$$

y esta serie converge para todo valor real o complejo de λ .

Cuando λ es negativa, entonces $\lambda = -S^2$ para $S > 0$ que es frecuentemente utilizada para soluciones básicas en términos de funciones hiperbólicas. La ecuación diferencial (9) es:

$$\varphi'' - S^2 \varphi = 0 \;,$$

y las soluciones que satisfacen a la Ec (10) son :

$$\varphi_1(x) = \cos h\, xS \qquad ; \qquad \varphi_2(x) = \frac{\operatorname{sen} h\, xS}{S} \,,$$

o, para $S = \sqrt{-\lambda}$:

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(x,\lambda) = \cos h\, x\sqrt{\lambda}$$
$$\varphi_2(x) = \varphi_2(x,\lambda) = \frac{\operatorname{sen} h\, x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{-\lambda}} \,. \qquad (13)$$

Se verifica que las Ecs (11) y (13), que parecen diferentes, son realmente la misma. Si se utilizan las fórmulas siguientes:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \cosh t = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \operatorname{senh} t = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2},$$

y haciendo $t = i\theta$, se obtiene:

$$\cosh i\theta = \cos\theta$$

$$\operatorname{senh} i\theta = i \operatorname{sen}\theta,$$

por lo tanto:

$$\cosh x\sqrt{-\lambda} = \cosh i x\sqrt{\lambda} = \cos x\sqrt{\lambda}$$

$$\frac{\operatorname{senh} x\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{\operatorname{senh} i x\sqrt{\lambda}}{i\sqrt{\lambda}} = \frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

esto muestra que las Ecs (11) y (13) son realmente equivalentes. Cuando $\lambda = 0$, la Ec (9) es simplemente:

$$\varphi'' = 0,$$

y las soluciones de ésta que satisfacen a la Ec (10) son :

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(x,0) = 1$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_2(x,0) = x. \tag{14}$$

Esto ajusta con la Ec (12), esto es, si se hace $\lambda = 0$ en la Ec - (12) se obtiene la Ec (14). Sin embargo, si se hace $\lambda \to 0$ en la Ec (11) se tiene :

$$\lim_{\lambda \to 0} \cos x\sqrt{\lambda} = 1 \quad , \quad \lim_{\lambda \to 0} \frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = x.$$

Por lo tanto esto es correcto para interpretar la segunda solución básica de $\varphi_2(x,\lambda)$ cuando $\lambda = 0$ como :

$$\varphi_2(x,0) = \lim_{\lambda \to 0} \varphi_2(x,\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} .$$

En resumen las soluciones básicas pueden ser consideradas como de-- finidas por la Ec (11), para todos los valores de λ , si se defi nen las funciones trigonométricas por sus expansiones de Taylor (12).

Si λ es positiva, las funciones trigonométricas en la Ec (11) -- pueden aún ser interpretadas en la forma usual.
Si λ es negativa, la fórmula equivalente de la Ec (13) puede ser más conveniente que la Ec (11). Si $\lambda = 0$ la expresión $\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda}$ - puede ser correctamente interpretada como :

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = x .$$

De acuerdo con la Ec (8), la solución general de la Ec (9) es la - familia de funciones:

$$\varphi = A\cos x\sqrt{\lambda} + \frac{B\,\mathrm{sen}\,x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \tag{15}$$

donde A y B son constantes cualesquiera. Aveces es incorrecto establecer que la solución general para la Ec (9) sea :

$$\varphi = A\cos x\sqrt{\lambda} + B\,\mathrm{sen}\,x\sqrt{\lambda}.$$

Cuando $\lambda = 0$, esta se reduce a :

$$\varphi = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A,$$

la cual no es la solución general de $\varphi'' = 0$, mientras que la Ec (15) se reduce a :

$$\varphi = A + Bx,$$

la cual es la solución general de :

$$\varphi'' = 0.$$

4. Soluciones del problema más simple y problemas de eigenvalores.

En esta sección y la próxima se determina la solución de los pro-- blemas homogéneos de valores inicial-frontera (1) a (4). Entonces el problema es la ecuación de calor, el cual tiene ambas condicio- nes de frontera de primera clase.

Se empieza por buscar una solución de la ecuación diferencial (1) por separación de variables, que también satisfaga las condiciones de frontera (2) y (3).

Para la solución de variables separadas $u(x,t) = T(t)\,\varphi(x)$, la ecuación diferencial puede ser escrita:

$$\frac{1}{kT(t)}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad . \tag{16}$$

De los miembros de la Ec (16), uno depende de t y el otro de x , y su valor común es la constante $-\lambda$, obteniéndose las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda k t = 0 \tag{17}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi \; . \tag{18}$$

Para la solución por separación de variables las condiciones de - frontera son :

$$T(t)\,\varphi(0) = 0 \qquad ; \qquad t > 0 \tag{19}$$

$$T(t)\varphi(L)=0 \qquad ; \qquad t>0 \; . \tag{20}$$

La primera de estas condiciones de frontera será satisfecha ya sea por $\varphi(0)$ o alternativamente por $T(t)=0$ para toda $t>0$.

La segunda solución conduce a $u=0$ de las Ecs (1), (2) y (3), por lo que esta solución no es utilizada para construir una función - que también satisfaga a la Ec (4), por lo que se requiere que --- $\varphi(0)=0$.
Similarmente la segunda condición nos conduce a requerir que --- $\varphi(L)=0$, así φ debe satisfacer las ecuaciones:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi=0 \qquad ; \qquad 0<x<L \tag{21}$$

$$\varphi(0)=0$$

$$\varphi(L)=0 .$$

Estas ecuaciones siempre tienen una solución independiente de los valores de λ , la llamada solución trivial, es decir $\varphi\equiv 0$ que produce $u\equiv 0$ la cual no interesa.

Se llega así al problema llamado de eigenvalores.

Un valor de λ que dé una solución no trivial se llama un eigenvalor y la solución no trivial de φ se llama eigenfunción correspondiente al eigenvalor. La solución general de la Ec en (21) es :

$$\varphi(x) = A \cos x\sqrt{\lambda} + \frac{B \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \tag{22}$$

donde A y B son independientes de λ. La condición de frontera $\varphi(0) = 0$, requiere que $A=0$ y de aquí cualquier eigenfunción es de la forma :

$$\varphi(x) = \frac{B \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

De la segunda condición de frontera :

$$0 = \varphi(L) = \frac{B \operatorname{sen} L\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}. \tag{23}$$

Para $B=0$, da una solución trivial; para que dé una solución no - trivial λ debe ser escogida tal que :

$$\frac{\operatorname{sen} L\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0 \;\; ; \;\; \text{así} \;\; L\sqrt{\lambda} = n\pi \;\; \text{y} \;\; \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}. \tag{24}$$

Inversamente si λ satisface la Ec (24), entonces la función -- $\varphi(x) = \frac{B \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ satisfaciéndo ambas condiciones semejantes de frontera si $B \neq 0$ y de aquí λ es un eigenvalor; así cada eigenvalor es una raíz de la Ec (24), la cual tiene un número infinito de -- raices :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

Estos son los eigenvalores.

Las eigenfunciones pertenecientes a los eigenvalores λ_n son, --- $B \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda}$ las cuales son múltiplos constantes de :

$$\varphi_n(x) \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda_n} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{26}$$

El factor de tiempo $T(t)$ que debe ser más utilizado con $\varphi_n(x)$ - es una solución de (17) con $\lambda = \lambda_n$, esto es :

$$\frac{dT}{dt} + \lambda_n k t = 0. \tag{27}$$

Resolviéndo la Ec (27) por integración y sustitución la Ec. (25) - queda :

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n k t} = \exp\left(-\frac{n^2\pi k t}{L^2}\right) \; ; \; n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Finalmente, la solución de la ecuación de calor para la forma especial deseada es :

$$u_n(x,t) = T_n(t)\,\varphi_n(x) = e^{-\lambda_n k t}\,\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda_n} \quad ; n = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

donde $\lambda_n = (n^2\pi^2)/L^2$, o también es constante multiple de ésta - función.
Regresando al problema para encontrar todos los eigenvalores, si - $\lambda = 0$ en el miembro izquierdo de la Ec (24), entonces se puede in-- terpretar como :

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\operatorname{sen} L\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = L \qquad ; \quad L \neq 0,$$

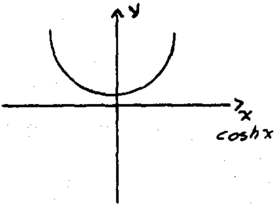
así que $\lambda = 0$ no es un eigenvalor.
Un valor diferente de cero puede ser un eigenvalor si y solamente sí :

$$\operatorname{sen} L\sqrt{\lambda} = 0 \; . \tag{30}$$

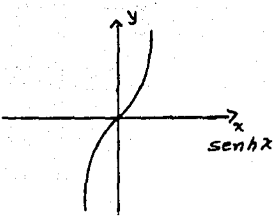
También existen eigenvalores complejos; para esto se muestra que - $L\sqrt{\lambda} = \alpha - i\beta$ donde α y β son reales.
Para esto se requiere encontrar todos los valores reales de α y β tal que :

$$0 = \operatorname{sen}(\alpha + i\beta)$$
$$0 = \operatorname{sen}\alpha \cos i\beta + \cos\alpha \operatorname{sen} i\beta$$
$$0 = \operatorname{sen}\alpha \cosh\beta + i\cos\alpha \operatorname{senh}\beta \; .$$

Ambas partes, real e imaginaria del miembro derecho de la ecuación debe ser cero, esto es, debe tener:



$$sen\alpha \cos h\beta = 0, \tag{31}$$



$$\cos\alpha \, sen\, h\beta = 0. \tag{32}$$

Para la Ec (31), el $\cos h\beta \geq 1$ y el $sen\alpha = 0$, entonces :

$$\alpha = n\pi \quad , \qquad n = 0\,,\, \pm 1\,,\, \pm 2\,,\, \ldots$$

Pero si la Ec (32) con $\alpha = n\pi$ y el $\cos\alpha = \pm 1$, entonces el $\operatorname{senh}\beta = 0$, por lo tanto $\beta = 0$ y :

$$L\sqrt{\lambda} = \alpha + i\beta = n\pi \quad ; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{33}$$

El valor $n = 0$ debe ser excluido porque corresponde al valor $\lambda = 0$, que como se ve no es un eigenvalor.
Los eigenvalores son por lo tanto $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, como se estableció al principio, por lo que todos los eigenvalores son reales.

5. Solución continua; ortogonalidad.

Se ha encontrado un número infinito de funciones $u_n(x,t)$, $n = 1, 2, \ldots$, cada una de los cuales satisface las Ecs (1), (2), (3); ya que estas ecuaciones son homogéneas y lineales, para cualquier combinación -- lineal de estas soluciones queda :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n u_n(x,t), \tag{34}$$

también satisfacen las Ecs (1), (2) y (3).

El valor inicial $u_n(x,t)$ es :

$$u_n(x,0) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

y así el valor inicial de la Ec (34) es :

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

pero como esta no satisface las C.I., entonces se aplica una serie infinita como la serie de Fourier :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n k t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \qquad (35)$$

La Ec (35) satisface la Ec (4) :

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \qquad (36)$$

La función $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ tiene la propiedad llamada ortogonalidad, con la que facilmente se determina b_n .
Esta propiedad generalmente se define como :

Para dos funciones $\varphi(x)$, $\psi(x)$ reales definidas en un intervalo, se dice que son ortogonales en el intervalo donde :

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0 \quad ; \quad a \leq x \leq b.$$

Una secuencia finita o infinita de $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots,$ para funciones de valores reales definidas en $a \leq x \leq b$ es llamado un sistema ortogonal en el intervalo $[a, b]$ sí y solamente sí :

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0 \qquad \text{Cuando } m \neq 0 \tag{37}$$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx > 0 \qquad \text{Con } n = 1, 2, \ldots$$

El hecho de que el sistema :

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{38}$$

sea un sistema ortogonal en el intervalo $(0, L)$, que es fácil de verificar al integrar por métodos elementales de cálculo en la -- función :

$$\int \operatorname{sen} \alpha x \;\operatorname{sen} \beta x \, dx .$$

Si m y n son enteros :

$$\int_0^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0 \qquad ;\, si\; m \neq n \tag{39}$$

$$\int_0^L \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\right]^2 dx = \frac{L}{2} \qquad ; \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{40}$$

En la Ec (36) b_n se determina utilizando la propiedad de ortogonalidad y multiplicando por $sen(m\pi x/L)$ e integrando término a término :

$$\int_0^L f(x) sen \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L sen \frac{n\pi x}{L} \; sen \frac{m\pi x}{L} \, dx . \qquad (41)$$

El miembro del lado derecho es cero excepto para $n=m$. Así la serie infinita se reduce a un término :

$$\int_0^L f(x) \, sen \frac{m\pi x}{L} \, dx = b_m \int_0^L (sen \frac{m\pi x}{L})^2 dx = b_m \frac{L}{2} .$$

De :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \; sen \; \frac{n\pi x}{L} \; dx . \qquad (42)$$

La serie (35) con λ_n dada por la Ec (25) y la constante b_n definida por la Ec (42) es la solución de problemas de valores inicial y de frontera.
La serie (36) con b_n dada por la Ec (42) se llama expansión de eigenfunciones de $f(x)$.
Si la función $f(x)$ es muy simple, la constante b_n definida por la Ec (42) puede ser evaluada explícitamente.

Por ejemplo si $f(x) = 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq L$, entonces :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L sen \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} \left[1-(1)^n\right] = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{n\pi} \text{ si } n \text{ es non.} \end{cases}$$

Así

$$b_{2m}=0\ ,\ b_{2m+1}=4/(2m+1)\pi\ ,\ \text{y la serie para } f(x) \text{ es ;}$$

$$f(x)=1=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\,\text{sen}\,\frac{(2m+1)\pi x}{L}\ ;\qquad 0<x<L\ .$$

Para $x=0$ y $x=0$ esta ecuación no se cumple, pero para la solución de las Ecs (1) a (4), donde $f(x)=1$, es :

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_{2m+1}kt}}{2m+1}\,\text{sen}\,\frac{(2m+1)\pi x}{L}\ ;\ \lambda_{2m+1}=\left[\frac{(2m+1)\pi}{L}\right]^2, \quad (43)$$

6. Condición de frontera de segunda clase.

Cuando los dos extremos de la barra son aislados, la función temperatura es determinada por la solución del siguiente problema :

E.D. $\quad u_t=ku_{xx}\qquad ;\quad t>0\ ;\quad 0<x<L \qquad (44)$

C.F. $\left\{\begin{array}{ll} u_x=(0,t)=0 & (45) \\ & t>0 \\ u_x=(L,t)=0 & (46) \end{array}\right.$

C.I. $\quad \mathcal{U}(x,0) = f(x) \;; \qquad 0<x<L.$ (47)

Como antes, se buscan funciones no triviales $\mathcal{U}(x,t) = T(t)\,\varphi(x)$ las cuales satisfagan la ecuación diferencial y las condiciones de frontera. $T(t)$ es una solución de :

$$\frac{dT}{dt} + \lambda k T \qquad ; \qquad t>0 \quad . \tag{48}$$

Para $\varphi(x)$ se encuentra el siguiente problema de eigenvalores :

Para qué valores de (λ) el sistema?

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \lambda\varphi = 0 \qquad ; \quad 0<x<L \\ &\varphi'(0) = 0 \\ &\varphi'(0) = 0 \;, \end{aligned} \tag{49}$$

tiene solución no trivial ?
La solución general de la Ec (49) es :

$$\varphi(x)\; A\cos x\sqrt{\lambda} + \frac{B\,\mathrm{sen}\,x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \;.$$

Para la condición de frontera $\varphi'(0) = 0$ y con $B = 0$ la eigenfunción es :

$$\varphi(x) = A\cos x\sqrt{\lambda} \;.$$

La segunda condición de frontera de la Ec (49) es :

$$0 = \varphi'(L) = -A\sqrt{\lambda}\ \operatorname{sen} L\sqrt{\lambda} \ ,$$

que debe ser satisfecha por la selección de λ así que :

$$A \neq 0 \ \therefore \quad \sqrt{\lambda}\ \operatorname{sen} L\sqrt{\lambda} = 0 \tag{50}$$

Las raices de la Ec (50) son los eigenvalores para la Ec (49), el miembro izquierdo de la Ec (50) se desvanece si λ o $\operatorname{sen} L\sqrt{\lambda}$ es cero y entonces se ve que los eigenvalores son :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \ ; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{51}$$

La eigenfunción correspondiente a $\lambda = \lambda_n$ es $A \cos x\sqrt{\lambda}$ que es un múltiplo de :

$$\varphi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \ ; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{52}$$

Aplicando el principio de esta ortogonalidad :

$$\int_0^L \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 0 \quad ; \quad si \quad m \neq n, \tag{53}$$

y también :

$$\int_0^L \varphi_0^2(x)\, dx = 1 \tag{54}$$

$$\int_0^L \varphi_n^2(x)\, dx = \frac{1}{2} \quad . \tag{55}$$

Así en la sección (4) se pueden usar las Ecs (53) a la (55), para determinar los coeficientes A_m para expansión de una eigenfun--- ción :

$$f(x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) dx = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \, . \tag{56}$$

En la función $f(x)$, se encuentran :

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\varphi_0(x)\, dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx \, ,$$

y

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\varphi_n(x)\, dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx, \; n \neq 0.$$

La diferencia en la fórmula para A_0 y A_m , $n \neq 0$, es una conse cuencia de la diferencia entre las Ecs (54) y (55). Por convenien- cia, se escribe en lugar de la Ec (56) :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} . \tag{57}$$

Para el coeficiente a_n se tiene la siguiente fórmula :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{58}$$

La solución de la EDP (44) que satisface las condiciones de fronte ra (45) y (46) con $\lambda = \lambda_n$. Así se tiene la secuencia de funciones:

$$u_n(x,t) = e^{-\lambda_n k t} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{59}$$

Notando que de $u_0(x,t) = 1$, se forma la serie infinita :

$$u(x,t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n k t} \cos \frac{n\pi x}{L} . \tag{60}$$

Por lo tanto se escoge la constante a_n como en la Ec (58). Finalmente las ecuaciones (58) y (60) proveen la solución para el problema formulado en las Ecs (44) a (47) .

7. Fórmula de Green y algunas aplicaciones a problemas de eigenvalores.

En los problemas de eigenvalores considerados anteriormente, se - tiene la facilidad de resolver completamente y esplicitamente la - ecuación y determinar dichos eigenvalores.

Sin embargo, esto no es posible en mucho de los problemas que se - estudiarán después, entonces para determinar los eigenvalores, es necesario emplear métodos aproximados, gráficas o procedimientos - numéricos.

Así, esto es importante para establecer un avance de la determinación de los eigenvalores, por ejemplo, todos los eigenvalores son reales.

En esta sección se va a estudiar una fórmula que tiene amplia -- aplicación para problemas de eigenfunciones por eigenvalores o -- expansión de eigenvalores.
La fórmula de primer orden y usada por Lagrange, después generalizada por Green es llamada fórmula de Green, de esta fórmula se -- pueden establecer varias propiedades importantes para eigenfunciones por eigenvalores.

En particular se redescubrieron propiedades de la solución de los problemas de eigenvalores que se habían considerado anteriormente, pero sin hacer uso de conocimientos explícitos de las soluciones .

Si f y g son funciones contínuas con primera y segunda derivada sobre un intervalo $a \leq x \leq b$, entonces:

$$f''g - fg'' = \frac{d}{dx}(f'g - fg') = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} , \qquad (61)$$

y por lo tanto :

$$\int_a^b [f''(x)g(x) - f(x)g''(x)]dx = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]_{x=a}^{x=b}. \qquad (62)$$

Se define el operador lineal A por $Af = -f''$ o simbólicamente :

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} . \qquad (63)$$

Entonces la Ec (62) podría ser escrita así :

$$\int_a^b [(Af)g - f(Ag)]dx = -[f'g - fg']_a^b. \qquad (64)$$

La Ec (64) es la fórmula de Green para el operador A sobre el - intervalo (a,b) ó brevemente, fórmula de Green.
En la secuencia se necesitan otras propiedades del operador A .

Cuando f es una función de valores complejos para la variable -- real x , se tiene :

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

donde f_1 y f_2 son reales, la función conjugada $\bar{f}(x)$ es definida por :

$$\bar{f}(x) = f_1(x) - i f_2(x) .$$

Si f_1 y f_2 tienen continuidad en la primera y segunda derivadas, entonces ambas f y $\bar{f}$ son :

$$Af = -f'' = -f_1'' - i f_2'' \qquad ; \qquad A\bar{f} = -f_1'' + i f_2''$$

$$A\bar{f} = -\bar{f}'' = -(f_1'' - i f_2'') = -f_1'' + i f_2'' .$$

Consecuentemente :

$$A\bar{f} = \overline{Af} . \tag{65}$$

Ahora se considera el problema de eigenvalores (21) el cual puede ser escrito :

$$\begin{aligned} &A\varphi = \lambda \varphi \qquad (\varphi'' + \lambda\varphi = 0) \\ &\varphi(0) = 0 \\ &\varphi(L) = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

Se empleara la fórmula de Green en el estudio de los problemas y después se verá como los resultados pueden ser extendidos a problemas con otras condiciones de frontera.
La primera proposición basada sobre la siguiente fórmula de Green es:

Los eigenvalores del problema (66) son todos reales.

Prueba: Se observa que si λ es un eigenvalor complejo del problema con eigenfunciones φ , entonces el conjugado $\bar{\lambda}$ es también un eigenvalor con eigenfunciones $\bar{\varphi}$; se tiene :

$$A\bar{\varphi} = \overline{A\varphi} = \overline{\lambda\varphi} = \bar{\lambda}\,\bar{\varphi},$$

así esta $\bar{\varphi}$ satisface la ecuación diferencial con λ remplazada por $\bar{\lambda}$.
Por otra parte :

$$\bar{\varphi}(0) = \overline{\varphi(0)} = 0$$

$$\bar{\varphi}(L) = \overline{\varphi(L)} = 0,$$

así esta $\bar{\varphi}$ satisface las condiciones de frontera.

Finalmente, φ no es igual a cero (esto es una eigenfunción), de modo que $\bar{\varphi}$ tampoco es igual a cero, por lo tanto $\bar{\lambda}$ es un eigenvalor con eigenfunciones $\bar{\varphi}$.
Cuando λ es algún eigenvalor y φ una eigenfunción correspondiente, se determina la siguiente integral :

$$I = \int_0^L \left[(A\varphi)\bar{\varphi} - \varphi(A\bar{\varphi}) \right] dx, \tag{67}$$

en dos formas diferentes, usando la fórmula de Green con $f=\varphi, g=\bar{\varphi}$:

$$I = -\left[\varphi'(x)\bar{\varphi}(x) - \varphi(x)\bar{\varphi}'(x)\right]_0^L$$

$$= -\left[\varphi'(L)\,\bar{\varphi}(L) - \varphi(L)\,\bar{\varphi}'(x)\right] + \left[\varphi'(0)\,\bar{\varphi}(0) - \varphi(0)\,\bar{\varphi}'(0)\right],$$

y esto es cero porque $\varphi(o) = \varphi(L) = \bar{\varphi}(o) = \bar{\varphi}(L) = o$; esto es por las condiciones de frontera, por lo tanto $I = o$. Por otra parte substituyendo $A\varphi = \lambda\varphi, A\bar{\varphi} = \bar{A}\bar{\varphi}$ en (67) dá :

$$I = \int_o^L [(\lambda\bar{\varphi} - \varphi(\bar{\lambda}\bar{\varphi})]dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_o^L |\varphi(x)|^2 dx,$$

donde $\varphi(x)\bar{\varphi}(x) = |\varphi(x)|^2$, y con $I = o$ se tiene :

$$|\lambda - \bar{\lambda}| \int_o^L |\varphi(x)|^2 dx = o. \qquad (68)$$

Ahora φ es una función contínua diferente de cero donde sea sobre $o \leq x \leq L$, así esto :

$$|\lambda - \bar{\lambda}| \int_o^L |\varphi(x)|^2 dx \neq o.$$

Por lo tanto se sigue con (68) donde $\lambda - \bar{\lambda} = o$, $\lambda = \bar{\lambda}$ y también λ es real, esto completa la prueba.

El conjunto de todos los eigenvalores de un problema de eigenfunciones a veces se llama expectro del problema y la expansión de la función se llama representación expectral de la función.

Por ejemplo, cuando se declara en esta terminología, problema espectral (66), miente en los ejes reales.

Un argumento similar empleado arriba, establece la siguiente proposición.

Para el problema (66) las eigenfunciones que pertenece a diferentes eigenvalores son ortogonales.

Prueba: Cuando φ_j y φ_k son eigenfunciones para distintos eigenvalores λ_j y λ_k, respectivamente, se tiene :

$$\int_0^L [(A\varphi_j)\varphi_k - \varphi_j(A\varphi_k)\,dx = (\lambda_j - \lambda_k)\int_0^L \varphi_j(x)\varphi_k(x)\,dx,$$

y usando la fórmula de Green se obtiene :

$$\int_0^L [(A\varphi_j)\varphi_k - \varphi_j(A\varphi_k)]\,dx = -\left[\varphi_j'(x)\varphi_k(x) - \varphi_j(x)\varphi_k'(x)\right]_0^L . \tag{69}$$

La expresión en el lado derecho de la Ec (69) es cero porque ambos φ_j y φ_k desaparecen a $x=0$ y $x=L$, entonces se tiene :

$$(\lambda_j - \lambda_k)\int_0^L \varphi_j(x)\varphi_k(x)\,dx = 0,$$

y cuando λ_k y λ_j son eigenvalores diferentes, $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$, se debe tener :

$$\int_0^L \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0. \tag{70}$$

Esto muestra la preposición.

En la prueba la expresión :

$$\left[\varphi_j'(x)\,\varphi_k(x) - \varphi_j(x)\,\varphi_k'(x)\right]_0^L . \qquad (71)$$

La última preposición encontrada desaparecio porque φ_j y φ_k - satisfacen las condiciones de frontera. La expresión consiste de - cuatro términos y cada término separado es cero.

Otro caso en que cada uno de los cuatro términos es cero, surge si en lugar de $\varphi(o)=o$, $\varphi(L)=O$ tenemos las-condiciones de frontera $\varphi'(o)=0$, $\varphi'(L)=0$.

También si está distribuida con el problema de eigenvalores(h es - una constante real) :

$$\begin{aligned} &A\varphi = \lambda\varphi \\ &\varphi'(o) = 0 \\ &\varphi'(L) + h\,\varphi(L) = 0 \quad . \end{aligned} \qquad (72)$$

Entonces la expresión (71) es cero con la condición de que φ_j y φ_k son eigenfunciones, entonces se escribe :

$$\varphi_j'(L)\,\varphi_k(L) - \varphi_j(L)\,\varphi_k'(L) = -[h\,\varphi_j(L)]\varphi_k(L) + \varphi_j(L)[h\,\varphi_k(L)] = 0.$$

Hasta aquí se que la proposición anterior no sólo es válida para - los problemas de eigenvalores (21) y (46), sino también para otros problemas incluyéndo el (72).

8. Nuevas aplicaciones de la fórmula de Green: Normalización de - constantes.

Si $\{\varphi_n(x)\}$ es un sistema de funciones ortogonal en el intervalo, entonces la integral de valores :

$$\int_0^L [\varphi_n(x)]^2\, dx, \tag{73}$$

es a veces llamada normalización de constantes para el sistema -- ortogonal. Ello ocurre en la determinación del coeficiente b_n en una expanción :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x).$$

En realidad se tiene :

$$b_n = \int_0^L f(x)\, \varphi_n(x)\, dx \Big/ \int_0^L \varphi_n^2(x)\, dx.$$

Si $\varphi_n(x)$ es una eigenfunción de la Ec (21) correspondiente a - un eigenvalor λ_n y c es cualquier constante diferente de cero, entonces $\varphi_n^*(x) = c\,\varphi_n(x)$ también es una eigenfunción correspon--- diente al mismo eigenvalor.

Se puede usar cualquiera $\varphi_n(x)$ o $\varphi_n^*(x)$ como la eigenfunción -- representativa, pero naturalmente no se deben usar ambas porque - después no son linealmente independientes.

Si escogemos $\varphi_n^*(x)$ en lugar de $\varphi_n(x)$ como la eigenfunción -- representativa, entonces la constante normalizada será diferente.- Así, la normalización de constantes depende de los cambios de las eigenfunciones.
Para determinar la integral de la Ec (73) en el caso especial --- $\varphi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ se usan conocimientos de las funciones trigo-- nométricas.

Un método alternado, el cual puede ser adaptado cuando $\varphi_n(x)$ son eigenfunciones, es emplear la fórmula de Green, como se tiene el - método ilustrado en relación con el problema de eigenvalores (21).

Al resolver el problema de eigenvalores se ve que cualquier eigenfunción, es un múltiplo de la función :

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \quad , \tag{74}$$

el cual es definido para todo valor de λ , no exactamente eigen-- valores. Esto es la solución de :

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \lambda\varphi = 0 \quad , \\ &\quad \varphi(0) = 0 \\ &\quad \varphi'(0) = 1. \end{aligned} \tag{75}$$

De la fórmula de Green se tiene :

$$\begin{aligned}(\mu - \lambda)\int_0^L \varphi(x,\lambda)\,\varphi(x,\mu)\,dx &= \int_0^L [\varphi''(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\,\varphi''(x,\mu)]\,dx \\ &= \Big[\varphi'(x,\lambda)\varphi(x,\mu) - \varphi(x,\lambda)\,\varphi'(x,\mu)\Big]_0^L ,\end{aligned}$$

donde : $\varphi(0,\lambda) = \varphi(0,\mu) = 0$,

$$\int_0^L \varphi(x,\lambda)\,\varphi(\varphi,\mu)\,dx = \frac{\varphi'(L,\lambda)\,\varphi(L,\mu) - \varphi(L,\lambda)\,\varphi'(L,\mu)}{\mu - \lambda} . \tag{76}$$

Se enfatiza que $\mu \neq \lambda$ y no son necesarios los eigenvalores. De - la Ec (74) sigue :

$$\lim_{\mu \to \lambda} \varphi(x,\mu) = \varphi(x,\lambda),$$

y la convergencia es uniforme para $o \leq x \leq L$ como :

$$\lim_{\mu \to \lambda} \int_0^L \varphi(x,\lambda)\,\varphi(x,\mu)\,dx = \int_0^L [\varphi(x,\lambda)]^2 dx. \tag{77}$$

Ahora se combina la Ec (76) con la Ec (77) y se obtiene :

$$\int_0^L [\varphi(x,\lambda)]^2 dx = \lim_{\mu \to \lambda} \frac{\varphi'(L,\lambda)\,\varphi(L,\mu) - \varphi(L,\lambda)\,\varphi'(L,\mu)}{\mu - \lambda} .$$

Utilizando reglas auxiliares para evaluar los límites se tiene :

$$\int_0^L [\varphi(x,\lambda)]^2 dx = \varphi'(L,\lambda)\,\frac{\partial \varphi(L,\lambda)}{\partial \lambda} - \varphi(L,\lambda)\,\frac{\partial \varphi'(L,\lambda)}{\partial \lambda}, \tag{78}$$

que se puede tomar para cualquier valor de λ .

Ahora si λ es un problema de eigenvalor (21), $\lambda = \lambda_n$, entonces $\varphi(x,\lambda)$ también satisfacen las segundas condiciones de frontera, esto es $\varphi(L,\lambda_n) = o$, entonces $\varphi(x,\lambda_n)$ es una siguiente eigenfunción para λ_n .
Entonces de la Ec (78) se obtiene :

$$\int_0^L [\varphi(x,\lambda_n)]^2 dx = \varphi'(L,\lambda_n)\left[\frac{\partial\varphi(L,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_n} . \tag{79}$$

De la Ec (74) se tiene :

$$\varphi'(L,\lambda_n) = \cos L\sqrt{\lambda_n} \; ,$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(L,\lambda) = \frac{L}{2\lambda_n}\cos L\sqrt{\lambda_n}$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\operatorname{sen} L\sqrt{\lambda} + \frac{L}{2\lambda}\cos L\sqrt{\lambda}$$

ya que el $\operatorname{sen} L\sqrt{\lambda} = 0$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(L,\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_n} = \frac{L}{2\lambda_n}\cos L\sqrt{\lambda_n} \; ,$$

de aquí la Ec (79) llega a ser :

$$\int_0^L \left[\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}}\right]^2 dx = \frac{L}{2\lambda_n}\cos^2 L\sqrt{\lambda_n} \; . \tag{80}$$

El cual conviene con el resultado de los cálculos más elementales, porque el $\cos^2 L\sqrt{\lambda_n} = 1$.

Resumiéndo, que la Ec (78) puede ser obtenida por otras formas :

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0, \tag{81}$$

y derivando la ecuación con respecto a λ :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)'' + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \varphi = 0. \tag{82}$$

Aplicando la fórmula de Green a las dos funciones φ, $\partial\varphi/\partial\lambda$ da:

$$\int_0^L \left[\varphi''\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)''\right]dx = \left[\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)'\right]_0^L. \tag{83}$$

En el miembro izquierdo de la Ec (83) se subtituyen las Ecs -- (81) y (82) entonces :

$$\int_0^L \left[\varphi''\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)''\right]dx = \int_0^L \varphi^2\,dx.$$

En el miembro derecho de la Ec (83) el término $x=0$ desaparece porque $\varphi(0,\lambda)=0$ y :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)_{x=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(0,\lambda) = 0.$$

Por lo tanto la Ec (83) es equivalente a :

$$\int_0^L \varphi^2 dx = \left[\varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \varphi \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \lambda} \right) \right]_{x=L},$$

el cual es el mismo para (78).

Se observa que la función $\varphi(x,\lambda)$ involucrada en la Ec (78) es - por todos los valores λ . $\varphi(0)=0$ satisface las condiciones - de frontera, pero $\varphi(L)=0$ no satisface las condiciones de fron-- tera excepto si λ es un eigenvalor del problema (21). Consecuente mente la Ec (78) puede ser aplicada a otros problemas de -- eigenvalores en que la condición de frontera con $x=0$ es $\varphi(0)=0$ pero la condición de frontera con $x=L$ puede ser diferente para $\varphi(L)=0$.
Por otra parte pasando de la Ec (78) a la Ec (79) se usa la condición de frontera $\varphi(L)=0$ en la Ec (79) y es válido sólo si λ_n es eigenvalores de el problema especial (21).

9. Primera fórmula de Green: Eigenvalores positivos y negativos.

La solución del flujo de calor encontrada es de la forma :

$$u(x,t) = \sum c_n e^{-\lambda_n k t} \varphi_n(x),$$

y el eigenvalor λ_n tiende a ser positivo. Si λ_n es negativo,-- entonces $e^{-\lambda_n k t} \to \infty$ como $t \to \infty$, mientras que $\lambda_n > 0$, - entonces $e^{-\lambda_n k t}$ permanece como condición de $t \to \infty$. Así los - eigenvalores negativos son asociados con la función temperatura el cual son indefinidos por largo tiempo y en sistemas que tienen una fuente de energía en contacto se esperan eigenvalores negativos.

En el caso de flujo de calor en una barra, la temperatura se incre menta de uno a otro límites:

a) porque esta es producción interna de calor en la barra ó
b) porque uno de los extremos de la barra está conectado a un mecanismo el cual hace posible que la barra extraiga calor con un -- acercamiento indefinido.

En un problema de eigenvalores, la presencia de eigenvalores negativos pueden estar asociados con otros como :

a) una producción especial de calor en la ecuación diferencial ó
b) el carácter especial de una ó más de las condiciones de frontera.

Si la temperatura $u(x,t)$, $0 \leq x \leq \ell$, $t > 0$, en la barra satisfacen las condiciones de frontera :

$$(Ku_x - hu)_{x=0} = 0, \tag{84}$$

con h positiva, el flujo de calor en el exterior de la barra con $x=0$, es una parte proporcional de la temperatura de la barra. En éste caso si la barra es caliente, tiende a enfriarse.

Sin embargo, si la Ec (84) se satisface con h negativa, entonces el flujo de calor en el interior de la barra con $x=0$, es una parte proporcional de la temperatura de la barra. En éste caso si la -- barra está caliente, ésta tiende a calentarse más debido al acercamiento indefinido con el mecanismo el cual hace posible que la -- barra extraiga calor, tal que el problema de flujo de calor en -- realidad parece otro.
No obstante las condiciones de frontera de la Ec (84) con h negativa puede ocurrir, en particular como el resultado de transformación - de otro problema.
La dicha discución sugiere la sigüiente conclución.
Para examinar brevemente la ecuación diferencial y las condiciones de frontera en un problema de eigenvalores puede ser posible acer-

tar que este no es un eigenvalor negativo.
Dicha información es de gran valor cuando uno prueba la determinación de eigenvalores. Esta especulación es apoyada por la siguiente proposición :

Entonces $\varphi(x)$ es una solución no trivial de :

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0 \qquad , \qquad 0 < x < L ,$$

se tienen :

a) Si $\bar{\varphi}\varphi'\Big|_0^L$ es real, entonces λ es real.

b) Si $\bar{\varphi}\varphi'\Big|_0^L \geq 0$, entonces $\lambda \geq 0$,

c) Si $\bar{\varphi}\varphi'\Big|_0^L > 0$, entonces $\lambda > 0$.

Antes se demuestra la proposición utilizada en el problema de eigenvalor de la Ec (72). Si λ es un eigenvalor y φ una eigenfunción correspondiente, entonces φ es una solución no trivial de $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ en $0 < x < L$, y de $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(L) = -h\varphi(L)$ encontramos :

$$-\bar{\varphi}\varphi'\Big|_0^L = \bar{\varphi}(0)\,\varphi'(0) - \bar{\varphi}(L)\,\varphi'(L) = h\,|\varphi(L)|^2. \tag{85}$$

La constante h en la Ec (85) es dada para ser real, $-\bar{\varphi}\varphi'\Big|_0^L$ es real y de aquí, para la parte (a) de la proposición λ es real. De modo que los eigenvalores de la Ec (72) son todos reales, (así muchos de estos se pueden encontrar por el método de la sección (6).

Si adicionalmente $h \geq 0$ se conoce, entonces de la Ec (85) se concluye que $-\varphi\varphi'|_0^l \geq 0$, para la parte (b) de la proposición $\lambda \geq 0$, para $h \geq$, entonces los eigenvalores de la Ec (72) son reales y no negativos. Una prueba sobre la proposición se hace usando la fórmula llamada primera fórmula de Green.
La fórmula de Green que se emplea en los procedimientos de esta sección, es una secuencia de la primera fórmula llamada segunda fórmula de Green, sin embargo tiene más aplicaciones que la primera fórmula.
Se establece la primera fórmula de Green para transformar la integral :

$$-\int_0^L (Af)g\,dx = \int_0^L f''g\,dx ,$$

de la integración por partes, se obtiene :

$$\int_0^L f''g\,dx = \int_0^L \left[\frac{d}{dx}(f'g) - f'g'\right] dx = \int_0^L \frac{d}{dx}(f'g)\,dx - \int_0^L f'g'\,dx .$$

Así, utilizando la definición (63) :

$$\int_0^L (Af)g\,dx = \int_0^L f'g'\,dx - \left[f'g\right]_0^L . \tag{86}$$

Esta es la primera fórmula de Green. Similarmente se tiene :

$$\int_0^L f(Ag)\,dx = \int_0^L f'g'\,dx - \left[fg'\right]_0^L , \tag{87}$$

la segunda fórmula de Green se obtiene cuando la Ec (87) es extraida de la Ec (86).
Para probar condición principal se propone utilizar la Ec (86) con - $f = \varphi, g = \bar{\varphi}$. Así utilizando la relación $A\varphi = \lambda\varphi$ se obtiene :

$$\lambda \int_0^L \varphi\bar{\varphi}\, dx = \int_0^L \varphi'\bar{\varphi}'\, dx - \left[\varphi'\bar{\varphi}\right]_0^L ,$$

o

$$\lambda \int_0^L |\varphi|^2 dx = -\bar{\varphi}\varphi'\Big|_0^L + \int_0^L |\varphi'|^2 dx , \qquad (88)$$

por hipótesis φ es no trivial :

$$\int_0^L |\varphi|^2\, dx > 0 ,$$

entonces $\int_0^L |\varphi'|^2 dx \geq 0$ de la Ec (88) se ve que λ es real si $-\bar{\varphi}\varphi'|_0^L$ es real, si $-\bar{\varphi}\varphi'|_0^L \geq 0$ entonces $\lambda \geq 0$ y si $-\bar{\varphi}\varphi'|_0^L > 0$ entonces $\lambda > 0$.

10. Problemas con condiciones de frontera de tercera clase.

Ahora se considera el problema de eigenvalor :

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \lambda\varphi = 0, \qquad 0 < x < L, \\ &\varphi'(0) = 0, \\ &\varphi'(L) + h\varphi(L) = 0, \end{aligned} \tag{89}$$

donde h es una constante real.
Usando los métodos de la sección 6 ó la sección 8 facilmente se ve que todos los eigenvalores son reales. Además se ve en la sección 8 que estos son eigenvalores no negativos si $h > 0$.
En el caso especial de $h = 0$, es el mismo problema que el (49),- el cual fue solucionado en la sección 5 .
Se tiene que resolver el problema donde $h > 0$ ó $h < 0$.

La solución general de la ecuación diferencial es :

$$\varphi = A\cos x\sqrt{\lambda} + B\,\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

si esto satisface $\varphi'(0) = 0$, se debe tener $B = 0$, para cualquier función que es de la forma :

$$\varphi = A\cos x\sqrt{\lambda}\,. \tag{90}$$

Con $A \neq 0$ puede satisfacer la segunda condición de frontera si y - sólo sí :

$$\varphi'(L) = -A\sqrt{\lambda}\, sen\, L\sqrt{\lambda} = -h\,\varphi(L),$$

$$-\sqrt{\lambda}\, sen\, L\sqrt{\lambda} + h\cos L\sqrt{\lambda} = 0, \qquad (91)$$

y que la Ec (91) es una ecuación cuyas bases son los eigenvalores.

Si el $\cos L\sqrt{\lambda} = 0$, entonces λ no es una raíz, porque el $sen L\sqrt{\lambda} = \pm 1$ y $\sqrt{\lambda} \neq 0$; esto aclara que la Ec (91) no es satisfactorio. Por - lo tanto se divide la Ec (91) por el $\cos L\sqrt{\lambda}$ y obtener cualquier ecuación conlas mismas raices, es decir :

$$L\sqrt{\lambda}\ Tan\ L\sqrt{\lambda} = Lh. \qquad (92)$$

Suponiéndo h real, se buscan las raices de la Ec (92) y se sabe que estas raices son reales.

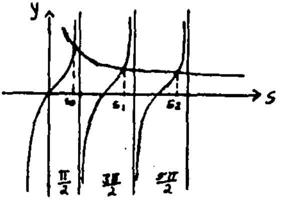
Caso (i) : $h > 0$. En este caso conocemos las raices de la Ec (92)- que son todas no negativas, puesto que de $L\sqrt{\lambda} = S$ ó $\lambda = (S/L)^2$ se encuentran las raices reales de :

$$S\ Tan\ S = Lh \qquad (93)$$

Entonces la $Tan(-S) = -Tan\ S$ viendo que si S es una raíz de - la Ec (93) entonces $-S$ también es una raíz, pero estos dos valo res de S dan el mismo eigenvalor $\lambda = (S/L)^2 = (-S/L)^2$. Por lo - tanto esto es necesario para encontrar las raices no negativas de la Ec (93), estas raices pueden ser establecidas gráficamente por planos ó por diagramas individuales de gráficas para las funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \mathrm{Tan}\ s \\ \\ y_2 = \dfrac{Lh}{s} \end{array}\right| \quad 0 \leq s \leq \infty.$$

La siguiente figura ilustra el caso $Lh = \pi/2$. Las raices de la Ec (93) son los puntos de intersección de las dos gráficas.



Solución gráfica de $s\ \mathrm{Tan}\ s = Lh$ $\quad (Lh = \pi/2)$

En cada intervalo $n\pi < s < (n+\frac{1}{2})\pi$ la función y_1 , establece incrementos de 0 a $+\infty$ al mismo tiempo y_2 es positiva y con un decremento establecido.
Por lo tanto esto es exactamente una intersección de puntos en el intervalo correspondiente a un valor :

$$S_n = n\pi + \alpha_n \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{94}$$

donde $0 < \alpha_n < \pi/2$, esto no es una intersección de puntos en el - intervalo $(n+\frac{1}{2})\pi \leq S \leq (n+1)\pi$. Así estos son infinidad de eigen-- valores dados por :

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{S_n}{L} = \frac{n\pi}{L} + \sigma_n \quad , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{95}$$

donde $\sigma_n = \alpha_n / L$.
La revisión de la figura anterior muestra esto :

$$\frac{\pi}{2L} > \sigma_0 > \sigma_1 > \ldots > \sigma_n > \sigma_{n+1} > \ldots , \tag{96}$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0 . \tag{97}$$

De las eigenfunciones se tiene esta fórmula :

$$\varphi_n(x) = \cos x\sqrt{\lambda_n} = \cos\left(\frac{n\pi}{L} + \sigma_n\right) x . \tag{98}$$

Las constantes normalizadas :

$$\int_0^L [\varphi_n(x)]^2 dx = \int_0^L \cos^2 x\sqrt{\lambda_n}\, dx \quad .$$

Pueden ser evaluadas ambas, utilizando fórmulas trigonométricas ó por el método de la sección 7 encontrando :

$$\int_0^L \cos^2 x\sqrt{\lambda_n}\, dx = \frac{L}{2} + \frac{h}{2\lambda_n}\left[\varphi_n(L)\right]^2, \tag{99}$$

ó

$$\int_0^L \left[\varphi_n(x)\right]^2 dx = \left| \frac{L}{2} + \frac{h(1+Lh)}{2\lambda_n} \right| \left[\varphi_n(L)\right]^2, \tag{100}$$

estas son equivalentes porque λ_n es una solución de la Ec (92). Es importante notar que esta normalización de constantes realmente varian con n .

Caso (ii): $h > 0$. En este caso se sabe que las raices de la Ec (92) son reales, pero sin embargo no se conocen si algunos de -- estos eigenvalores son negativos.
Se vera brevemente para $h < 0$, que es exactamente un eigenvalor negativo.
Para comprobar las raices negativas de la Ec (92) se substituye - $L\sqrt{\lambda} = i\,u$ donde u es real y no cero :

$$L\sqrt{\lambda}\,\mathrm{Tan}\,L\sqrt{\lambda} = i u \frac{\mathrm{sen}\, i u}{\cos i u} = u\,\mathrm{Tan}\, u .$$

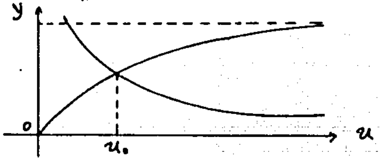
Así se tienen que encontrar las raices reales de :

$$u\,\mathrm{Tan}\,h\, u = -Lh, \tag{101}$$

y con (93) es suficiente para encontrar las raices positivas, entonces se grafican los puntos para encontrar la intersección de las dos curvas, ver la figura siguiente :

$y_1 = \operatorname{Tan} h\, u \qquad 0 < u < \infty$

$y_2 = -Lh/u$



Solución gráfica de $u \operatorname{Tan} h\, u = -u h \qquad (Lh = -\frac{\pi}{2})$

Para u que va de 0 a $+\infty$ la curva y_1 se incrementa de 0 a 1 , mientras que la hiperbola y_2 decrementa de $+\infty$ a 0 $(h<0)$. Entonces la intersección de las dos curvas es $u = u_0$ que corresponde a un eigenvalor negativo :

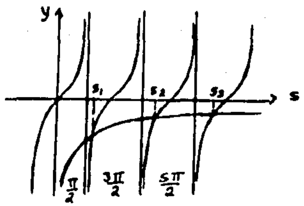
$$\lambda_0 = -\, u_0^2 / L^2. \tag{102}$$

La eigenfunción correspondiente al eigenvalor λ_0 es :

$$\varphi_0(x) = \cos x\sqrt{\lambda_n} = \cos h\,(u_0 x/L). \tag{103}$$

Para encontrar el eigenvalor positivo teniéndo $L\sqrt{\lambda} = S$ se recurre de nuevo a la Ec (93) pero con $h < 0$. La solución está ilustrada en la siguiente figura, se encuentra una raíz positiva de la Ec (93) en cada intervalo $(n-\frac{1}{2})\pi < s < n\pi,\ n = 1, 2, \ldots,$ llamadas éstas raices s_n y del eigenvalor correspondiente a $\lambda_n = s_n^2/L_n^2$ se tiene :

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} + \sigma_n , \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{104}$$



Solución gráfica de $s \operatorname{Tan} s = Lh \quad (Lh = -\pi/2)$,

donde $\sigma_n < 0$ y

$$-\frac{\pi}{2L} < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n < \sigma_{n+1} < \ldots , \tag{105}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0 . \tag{106}$$

Cuando se ha encontrado la ecuación cuyas raices son los eigenvalores de un problema, hay frecuentemente la tentativa de simplificar inmediatamente la ecuación, pero se debe tener cuidado en este proceso; por ejemplo, la ecuación :

$$sen^2\sqrt{\lambda} + sen\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0,$$

puede ser simplificada dividiéndo por $\sqrt{\lambda}$ para obtener la nueva - ecuación :

$$sen\sqrt{\lambda} + \cos\sqrt{\lambda} = 0.$$

Pero la nueva ecuación no tiene las mismas raices como la ecuación original; en realidad cada raíz del $sen\sqrt{\lambda}=0$ es una raíz de la - ecuación original, pero no es una raíz de la nueva ecuación. En - general, si se divide una ecuación por un factor $F(\lambda)$ se pierden raices, o sea las raices de $F(\lambda)$.
Similarmente si se multiplica una ecuación por un factor $F(\lambda)$ se ganan raices, o sea las raices de $F(\lambda)$.
Por ejemplo si la ecuación :

$$\frac{sen\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \cos\sqrt{\lambda} = 0,$$

se simplifica multiplicando por $\sqrt{\lambda}$ para obtener la nueva ecuación:

$$sen\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0,$$

entonces $\lambda = 0$ es una raíz de la nueva ecuación pero no de la ecuación original.

C O N C L U S I O N E S

Este trabajo es la traducción de la parte inicial del libro Elementary Partial Differential Equations, de Paul W. Berg y James L. Mc. Gregor, con el objeto de facilitar al alumno el curso de Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería Petrolera de las siguientes generaciones.

Debido al poco espacio disponible para este trabajo, no fue posible ampliar los temas tratados, por lo que en algunos - casos puede ser difícil su comprensión.

El estudio de los temas tratados en este trabajo permite - ver la gran aplicación que tienen las ecuaciones diferenciales parciales en la Ingeniería Petrolera.

N O M E N C L A T U R A

a	Constante	t	Tiempo
b	Constante	w	Variable
c	Constante	x	Variable
d	Derivada cualquiera	y	Variable
f	Función	z	Variable
g	Gravedad	A	Operador lineal
h	Cualquier constante real	B	Operador lineal
i	Parte imaginaria de ecuaciones complejas.	D	Cualquier operador
k	Constante	F	Flujo de calor
m	Subíndice	K	Constante
n	Subíndice	L	Longitud
q	Flujo de calor por unidad de vol. por unidad de tiem.	Q	Energía de calor
r	Radio	S	Cualquier operador
v	Velocidad	t	Operador en condiciones de frontera
		Q	Cualquier función
		u	Variable

e	Exponencial	
∞	Infinito	
α	Alfa	(ángulo)
β	Beta	(constante)
γ	Gama	(constante)
Δ	Delta	(diferencial)
ϵ	Epsilon	(variable)
η	Eta	(coordenada)
θ	Teta	(ángulo)
λ	Lambda	(variable cualquiera)
μ	Mu	(variable)
ξ	Xi	(variable)
π	Pi	(valor 3.1416)
ρ	Ro	(dencidad del material conductor de calor)
$\Sigma - \sigma$	Sigma	(sumatoria y variable respectivamente)
τ	Tau	(calor específico por unidad de volumen)
ϕ	Fi	(valor nulo)
ψ	Psi	(coeficiente variable)
ω	Omega	(coeficiente variable)

B I B L I O G R A F I A

Matemáticas Avanzadas para ingeniería

Erwin Kreyszig Vol. 2

Editorial Limusa

Ecuaciones Diferenciales Parciales Elementales

Paul W. Berg y James L. Mc Gregor

Departamento de Matemáticas, Universidad de Stanford