

11
2ej

RECIBO
ESTAMPADO
2027



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SOLUCION NUMERICA A PROBLEMAS
MAL PLANTEADOS MEDIANTE LA
TEORIA DE REGULARIZACION
DE TIKHONOV**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ELOY GALLEGOS RAMIREZ

México, D. F.

1991

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

1	PROBLEMAS MAL PLANTEADOS.....	1
	DEFINICION DE PROBLEMAS MAL PLANTEADOS	
	EJEMPLOS	
2	TEORIA DE REGULARIZACION DE TIKHONOV.....	19
	OPERADOR DE REGULARIZACION	
	FUNCIONAL DE REGULARIZACION	
3	TEORIA GENERAL DE REGULARIZACION.....	37
	SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS	
	TEOREMA DE PICARD	
	METODO GENERAL DE REGULARIZACION	
4	RESULTADOS NUMERICOS.....	52
	FORMULAS DE CUADRATURA	
	TABLAS DE RESULTADOS.	

INTRODUCCION

Un problema es bien planteado en el sentido de Hadamard si satisface el criterio de existencia, unicidad y estabilidad de la solución; esto es, si tiene solución única que depende continuamente de los datos. Si un problema no satisface alguna de las condiciones, se dice que es un problema mal-planteado.

En prácticamente todas las áreas de la técnica y la ciencia surgen problemas cuya formulación matemática corresponde a los problemas mal-planteados. Dentro de éstos, una clase importante lo constituyen los problemas inversos. En términos generales, resolver un problema inverso consiste en determinar ó descubrir las causas que dieron lugar a ciertos fenómenos observados.

En la actualidad, el método más empleado para la resolución de problemas mal-planteados es el método de regularización de Tikhonov, el cual permite hallar soluciones aproximadas a tales problemas.

Especial atención merecen las ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase que, teniendo núcleo en L_2 , en caso de tener inversa resultará no acotado. De ahí la presencia de

inestabilidad en la solución. Desde mediados de siglo se han utilizado "técnicas de regularización" para resolver estas ecuaciones integrales. Es Tikhonov quien presenta un estudio sistemático y el marco conceptual para su resolución.

Es pertinente notar que, mientras que el *metodo de regularización de Tikhonov* es clásico en su concepción (minimización de un funcional sobre un espacio), la elección del parámetro de regularización es todavía una cuestión que sigue siendo objeto de estudio.

El presente trabajo tiene como objeto, presentar las ideas centrales de la Teoría de Regularización de Tikhonov, y la resolución de algunas ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase. La elección del parámetro fué en base al conocimiento de la discrepancia, δ , en el dato inicial. En el primer capítulo se introduce el concepto de problemas mal-planteados, exhibiendo ejemplos. El segundo capítulo trata las ideas centrales del método. Un enfoque más moderno es bosquejado en el capítulo tercero. Por último son presentados, en el último capítulo, los resultados numéricos obtenidos así como las rutinas más importantes, para ser implementadas en otros lenguajes de programación.

En este espacio deseo expresar mi gratitud al Dr. Salvador Pérez Esteve por su paciencia y comprensión.

CAPITULO 1

En este capítulo nos concentraremos, con algún detalle, en la discusión de problemas bien y mal planteados.

Comencemos por tomar las clásicas ecuaciones de la física-matemática, con condiciones de frontera tipo Cauchy.

$$i) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \text{int}(\Omega), \quad U=f \text{ en } \partial\Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

donde Ω es un dominio simplemente conexo y $\bar{\Omega}$ es compacto.

$$ii) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \begin{array}{l} x \in (a, b), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b] \\ u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0 \quad \forall t > 0 \end{array}$$

$$iii) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \begin{array}{l} x \in (a, b), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = p(x) \quad x \in [a, b] \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad x \in (a, b) \\ u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0 \end{array}$$

Se sabe (ver por ejemplo el libro de Tijonov-Samarskii (18)) que la solución a cada uno de los problemas existe y es única.

Chequemos ahora que sucede con las soluciones a los problemas (I), (II), (III) cuando los datos iniciales son ligeramente perturbados.

Problema I)

Tomemos $f_1, f_2 \in C(\bar{\Omega})$ tales que $\max |f_1 - f_2| < \epsilon$ en $\bar{\Omega}$ y sean u_1, u_2 sus respectivas soluciones al problema (I).

Notemos que $f_1 = u_1(\bar{x}) \Big|_{\partial\Omega}$; $f_2 = u_2(\bar{x}) \Big|_{\partial\Omega}$

Sea $u = u_1 - u_2$, entonces u es también una función armónica y por ende $\min u(\bar{x}), \max u(\bar{x}) \bar{x} \in \Omega$, son alcanzados en la frontera, por lo que:

$$(1.1) \quad \max |u(\bar{x})| = \max |u_1(\bar{x}) - u_2(\bar{x})| < \epsilon, \quad \bar{x} \in \Omega$$

la desigualdad (1.1) nos está indicando que la solución al problema (I) es estable bajo ligeras perturbaciones de los datos iniciales.

Problema II)

Sean $g_1, g_2 \in C(a, b)$ y sean u_1, u_2 las respectivas soluciones al problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_i(x, 0) = g_i(x), \quad \text{con } i=1,2$$

Supongamos que $\max |g_1(x) - g_2(x)| = \max |u_1(x, 0) - u_2(x, 0)| < \epsilon$

definamos: $\underline{u}(x, t) = -\epsilon, \quad \bar{u}(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t), \quad \tilde{u}(x, t) = \epsilon$

El principio del módulo máximo para la ecuación de calor, afirma que si $u(x, t)$ satisfice la ecuación de calor en $(a, b) \times (0, T)$ entonces su valor máximo y mínimo se tiene para $t=0, x=a$ ó $x=b$.

Ahora bien las funciones $v_1 = u(x, t) - \underline{u}(x, t)$, $v_2 = \bar{u}(x, t) - u(x, t)$ satisfacen las hipótesis del principio del módulo máximo y además

$$v_i(x, 0) \geq 0, \quad v_i(a, t) \geq 0, \quad v_i(b, t) \geq 0 \quad i=1, 2$$

por lo que:

$$v_i(x, t) \geq 0 \quad \text{para } a < x < b, \quad 0 < t \leq T$$

$$\text{por lo que: } -\epsilon \leq u(x, t), \quad u(x, t) \leq \epsilon \quad \text{para } a < x < b, \quad 0 < t \leq T$$

o bien $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon$ en $(a, b) \times (0, T)$, es decir la solución es estable a ligeras perturbaciones en el dato inicial.

Problema 111)

Tomemos el intervalo $[0, 1]$ y cualquier $\epsilon > 0$, supongamos que en $[a, b]$:

$$\sup |p_1(x) - p_2(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad ; \quad \sup |\Psi_1(x) - \Psi_2(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

donde:

$$u_1(x, 0) = p_1(x), \quad u_2(x, 0) = p_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = \Psi_1(x), \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = \Psi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Ahora bien, $\forall x \in [a, b]$, $t \in (0, 1)$ tenemos que:

$$u_1(x, t) = p_1(x+t) + p_1(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Psi_1(\alpha) d\alpha \quad ;$$

$$u_2(x, t) = p_2(x+t) + p_2(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Psi_2(\alpha) d\alpha$$

por lo que:

$$2\max |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max |p_1(x+t) - p_2(x+t)| + \max |p_1(x-t) - p_2(x-t)| +$$

$$+ \int_{x-t}^{x+t} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\epsilon}{2} \leq 2\epsilon$$

por lo que se tiene estabilidad en la solución, bajo ligeras perturbaciones a datos y/o condición inicial.

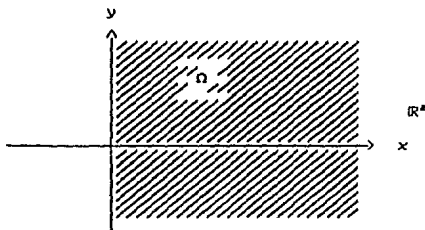
Es debido a lo anterior expuesto, en parte, que se pensaba que no era posible la existencia de problemas físicos que condujeran a modelos matemáticos, cuya(s) solución(es) no fuera(n) estable(s), bajo ligeras perturbaciones a los datos iniciales.

Pero es Hadamard quien en 1917 da a conocer su problema de Cauchy para la ecuación de Laplace:

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega, \text{ con condiciones iniciales } u(0, y) = 0; \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = A_n \operatorname{sen}(ny)$$

Para este problema se tiene la función

$u(x, y) = \frac{A_n}{n} \operatorname{senh}(nx) \operatorname{sen}(ny)$ que es solución y satisface las condiciones iniciales $\forall A_n \in \mathbb{R}$.



En efecto $U_{xx} = n A_n \operatorname{senh}(nx) \operatorname{sen}(ny)$; $U_{yy} = -n A_n \operatorname{senh}(nx) \operatorname{sen}(ny)$

$$U(0,y) = \frac{A_n}{n} \operatorname{senh}(0) \operatorname{sen}(ny) = 0; \quad U_x(x=0,y) = A_n \operatorname{senh}(0) \operatorname{sen}(ny) = 0$$

Como caso particular tomemos los coeficientes $A_n = e^{-n}$, entonces $A_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, ahora bien el problema (1.2) tiene como solución $u=0$ en Ω , sin embargo $e^{-n} \operatorname{senh}(nx) \operatorname{sen}(ny)$ crece indefinidamente manteniendo n, y fijos y x lo suficientemente grande.

Así es que el problema de Hadamard no es estable a perturbaciones de datos en la frontera. A primera instancia, se preguntará el lector si tal ejemplo de Hadamard no es uno simplemente patológico. Pero, con el desarrollo de la tecnología, y en particular el de las computadoras digitales, se convirtió en una verdadera necesidad, saber si tal o cual problema numérico es estable.

La solución de cualquier problema cuantitativo generalmente termina al hallar una solución u a partir de un dato inicial z . En lo que sigue supondremos que $u \in U, z \in F$, U, F espacios métricos, con métricas d_u, d_f respectivamente. Supongamos ahora que hemos definido con toda precisión el concepto de solución y de dato inicial (p.ej. solución clásica, solución generalizada de mínimos cuadrados etc.), además supondremos que existe una única solución u a tal problema. La cuestión de determinar $u=R(z)$, a partir del dato inicial z , se dice ser estable si:

(1) $\forall \epsilon > 0$, le corresponde al menos un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que la desigualdad $d_f(z_1, z_2) \leq \delta(\epsilon)$ implica $d_u(u_1, u_2) < \epsilon$, donde

$$u_1 = R(z_1), \quad u_2 = R(z_2).$$

El problema de determinar u a partir de z , se llamará bien planteado si las siguientes condiciones son satisfechas:

- (i) para cada $z \in F$ existe una solución $u \in U$.
- (ii) esta solución es única.
- (iii) el problema es estable en los espacios (U, F) .

Un problema que no sea bien planteado se denominará mal planteado.

El que un problema sea bien o mal planteado, no es cuestión exclusiva de operador, ni de los espacios de trabajo. Más adelante daré ejemplos de problemas, que, siendo mal planteados, podemos "regularizar" el proceso de solución, modificando los espacios de trabajo, o el operador.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS MAL PLANTEADOS

a) SUMAS DE SERIES DE FOURIER

Es común que al estar trabajando en varias ramas de la matemática la solución a cierto problema sea expresada como una serie, digamos de Fourier.

i. e. $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ donde los coeficientes a_n son conocidos sólo por aproximación (ej. através de productos internos). Dada la expansión:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \text{ tomemos } b_n = a_n + \frac{\epsilon}{n} \text{ con } \epsilon > 0, \quad n \geq 1, \quad b_0 = a_0.$$

$$\text{definimos: } v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(nx)$$

Ahora bien, en la métrica de L_2 :

$$\|u-v\|_{L_2} = \epsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \right\}^{1/2} = \frac{\pi\epsilon}{\sqrt{6}} \text{ que es}$$

arbitrariamente pequeño. Ahora bien, estimemos:

$$\max |u_1(x) - u_2(x)| = \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx)$$

esta expresión no converge si $x=0$. Así que el problema de hallar sumas de series de Fourier, con aproximación de coeficientes, es inestable. Si en vez de utilizar la norma del máximo, usáramos la norma de L_2 , nuestro problema sería estable, ya que apartir del teorema de Parseval:

$$\left[\int_0^{\pi} (u(x) - v(x))^2 dx \right]^{1/2} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \pi/2 \left(\frac{\epsilon}{n} \right)^2 \right]^{1/2} = \epsilon \sqrt{\pi/2}.$$

b) ECUACION DE FREDHOLM DE PRIMERA CLASE (1)

Consideremos la ecuación de integral de Fredholm de 1ª clase,

$$\int_a^b k(x,s)u(s)ds = z(x); \quad c \leq x \leq d, \quad u(s) \in C[a,b].$$

Que en notación operacional podemos escribir como:

$A(u(s)) = z(x)$, $A: U \rightarrow F$, U, F espacios métricos, con métricas:

$$d_F(z_1, z_2) = \left[\int_c^d [z_1(x) - z_2(x)]^2 dx \right]^{1/2} \text{ mientras que:}$$

$$d_U(u_1, u_2) = \max_{x \in [a,b]} |u_1(x) - u_2(x)|$$

sean $u_1(x)$, $z_1(x)$ tales que $\int_a^b k(x,s)u_1(s)ds = z_1(x)$

sea $z_2(x) = z_1(x) + N \int_a^b k(x,s) \operatorname{sen}(ns) ds$. Una solución al problema

$Ku = z_2$ está dado por $u_2 = u_1(x) + N \operatorname{sen}(nx)$. Ahora bien,

$$d_U(z_1, z_2) = |N| \left[\int_c^d \left[\int_a^b k(x,s) \operatorname{sen}(ns) ds \right]^2 dx \right]^{1/2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

debido al teorema de Riemann-Lebesgue. Pero por otra parte,

$$d_U(u_1, u_2) = \max_{s \in [a,b]} |u_1(s) - u_2(s)| = \max_{s \in [a,b]} |N \operatorname{sen}(ns)| = |N|, \text{ que no}$$

necesariamente es pequeño. Más adelante se dará un ejemplo para el caso general.

c) ECUACION DE FREDHOLM DE PRIMERA CLASE (2)

Tomemos el problema de resolver la ecuación de Fredholm de 1ª clase:

$$(1.3) \quad y(x) = \int_a^b k(x,t)x(t)dt, \quad y(x) \in C[a,b]$$

Supongamos que la función $k(-,-)$ es acotada en $a \leq x, s \leq b$ y además todos sus puntos de discontinuidad se hallan en un número finito de curvas:

$$t = \phi_k(s), \quad k=1, 2, \dots, n \quad \phi_k(s) \text{ es continua.}$$

entonces el operador definido por la ecuación (1.3) es totalmente continuo (Ver apéndice A).

Puesto que la función $k(s,t)$ es acotada en $[a,b] \times [a,b]$, si tomamos cualquier $s \in [a,b]$ la integral:

$$\int_a^b k(s,t)u(t)dt \text{ existirá. Sean } M = \sup_{a \leq s, t \leq b} |k(s,t)|.$$

$G = \{(s,t) \in (a,b) \times (a,b) : \text{al menos para alguna } k=1,2,\dots,n \text{ se}$

$$\text{cumple: } \left\{ |t - \phi_k(s)| < \frac{\epsilon}{12Mn} \right\}$$

Este conjunto G es abierto y por lo tanto $G^c = F$ es cerrado, y como $F \subset (a,b) \times (a,b) \rightarrow F$ es compacto y como $k(s,t)$ es continuo sobre F entonces $k(s,t)$ es uniformemente continuo, por lo que

$\forall (s',t), (s'',t) \in F$ tales que $|s' - s''| < \delta$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|k(s',t) - k(s'',t)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

$$\text{Evaluemos ahora } |y(s') - y(s'')| \leq \int_a^b |k(s',t) - k(s'',t)| |x(t)| dt$$

$$\text{Ahora bien, } P = \bigcup_{k=1}^n \left[\left\{ t : |t - \phi_k(s')| < \frac{\epsilon}{12Mn} \right\} \cup \left\{ t : |t - \phi_k(s'')| < \frac{\epsilon}{12Mn} \right\} \right]$$

cada uno de estos intervalos abiertos $\left\{ t : |t - \phi_k(s')| < \frac{\epsilon}{12Mn} \right\}$ tiene una longitud a lo más de $\frac{2\epsilon}{12Mn}$ y como son a lo más n ,

la medida del conjunto P será a lo más $\frac{\epsilon}{3M}$, por lo que:

$$\begin{aligned} \int_P |k(s',t) - k(s'',t)| |x(t)| dt &\leq \int_P 2M |x(t)| dt = 2M \frac{\epsilon}{3M} |x(t)| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} M |x(t)| = \frac{2\epsilon}{3} |x(t)| \end{aligned}$$

Para el caso de $Q = P^c$ tendremos:

$$\int_Q |k(s',t) - k(s'',t)| |x(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{3(b-a)} (b-a) |x(t)| \leq \frac{\epsilon}{3} |x(t)|$$

por lo que:

$$|y(s') - y(s'')| \leq \frac{2\epsilon}{3} |x(t)| + \frac{\epsilon}{3} |x(t)| < \epsilon |x(t)| + y(s) \in C[a,b].$$

i.e. $Kx(t) = \int_a^b k(s,t)u(s)ds$ define un operador de $C(a,b)$

sobre si mismo (cabe notar que este resultado es trivial si se supone que $k(-,-)$ es continuo en $a \leq s, t \leq b$).

Sea $\{x_n(t)\}$ un conjunto acotado en $C(a,b)$, y sea $\{y_n(s)\}$ la

correspondiente imagen, bajo K , i.e. $y_n(s) = \int_a^b k(s,t)x_n(t)dt$.

debido a la desigualdad $|y(s) - y(s')| \leq c|x(t)|$. Si $|x_n(t)| \leq L$, $|y_n(s) - y_m(s')| \leq cL \forall s, s' \in (a,b)$, $\forall y_n, y_m \in \{y(s)\}$ esto implica que la sucesión $\{y(s)\}$ es equicontinua y equiacotada, por lo que $\{y(s)\}$ es relativamente compacto en $C(a,b)$, lo anterior implica que el operador es compacto.

Estos operadores totalmente continuos forman una clase muy importante dentro de los problemas mal planteados, como lo muestra el siguiente teorema y corolario.

TEOREMA. Si A es un operador totalmente continuo y B es un operador acotado, los operadores AB, BA son totalmente continuos.

PRUEBA. Sean $A, B : R \rightarrow R$, R espacio de Banach. Si el conjunto $M \subset R$ es acotado, $BCMD$ tambien lo es. Por lo que $A(BCMD)$ es relativamente compacto, pero $A(BCMD) = ABCMD \rightarrow AB$ es relativamente compacto.

Ahora bien, $ACMD$ es relativamente compacto y como B es continuo $B(ACMD)$ es tambien relativamente compacto, pero $B(ACMD) = BACMD$ es relativamente compacto $\rightarrow BA$ es totalmente continuo.

COROLARIO. En un espacio métrico de dimensión infinita, un operador totalmente continuo, no puede tener un inverso continuo.

Sea $A: R \rightarrow R$ un operador totalmente continuo, R espacio métrico de dimensión infinita. Supongamos que A^{-1} existe y es continuo, y $AA^{-1} = I$ es totalmente continuo (según el teorema). Lo anterior no puede ser, ya que el operador identidad en espacios métricos de dimensión infinita no son totalmente continuos (ver [10]).

En vista de lo anterior y dado que el operador $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ definido por:

$$Ku(t) = \int_a^b k(s, t)u(s)ds = g(t) \text{ es tal que } K^{-1}, \text{ en caso}$$

de existir, no es continuo. Esto nos lleva al siguiente hecho. Supongamos que tenemos a nuestra disposición $g_\delta(s)$ tal que:

$$\|g_\delta(s) - g(s)\| \leq \delta.$$

Si tratáramos de resolver $Ku = g$, nos enfrentaremos al problema de que K^{-1} no es continuo y de que $u_\delta = K^{-1}g_\delta$ no sea una elección apropiada para aproximar a $K^{-1}g$.

d) EXTENSION ARMONICA.

Este es uno de los problemas clásicos del análisis. Consiste en extender una función armónica $u(\rho, \theta)$ del disco:

$D_r = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, al disco $D_R = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ donde $R > r$.

Debido a la fórmula de Poisson (Marsden [12] p. 145) se tiene que:

$$u(re^{i\phi}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\theta})d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi)} \quad \text{o bien,}$$

$$u(re^{i\phi}) = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \frac{u(Re^{i\theta})d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi)} = \int_{-\pi}^{\pi} K_R(r, \theta; \phi) u_R(\theta) d\theta \quad \text{i. e.}$$

se trata de una ecuación de Fredholm de 1ª clase con núcleo:

$$K_r(r, \theta, \phi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi(R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi))}, \text{ i.e. dada la función } u(re^{i\theta})$$

como dato inicial, al hallar la solución $u(Re^{i\theta})$, ésta resultará ser inestable a perturbaciones sobre $u(re^{i\theta})$, por lo que el problema de la extensión armónica resultará ser un problema mal planteado.

e) PROBLEMA DE LA ECUACION DE CALOR HACIA ATRAS.

Este problema consiste en, conociendo la distribución de temperaturas $f(x) = u(x, T)$ para $T > 0$ de una cierta barra metálica de longitud $L = \pi$, determinar la distribución de temperaturas para $t = 0$, suponiendo que los extremos de la barra son mantenidos a temperatura constante = 0.

Tomando un sistema apropiado de unidades y escalamiento del tiempo, la formulación matemática del problema consiste en hallar $u(x, t = 0)$ tal que si tomamos $l = \pi$, $T = 1$ entonces

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, t = T) = f(x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

suponiendo que la solución al problema acepta una expansión en serie de potencias de la forma:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \operatorname{sen}(nx), \text{ resultará que los}$$

$A_n(t)$ deberán de satisfacer el siguiente sistema infinito de ecuaciones diferenciales:

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \{A'_n(t) + n^2 A_n(t)\} \operatorname{sen}(nx) = 0, \text{ o bien}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ $A'_n(t) + n^2 A_n(t) = 0$ con la condición inicial

$A_n(t=0) = g_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\xi) \sin(n\xi) d\xi$, entonces $A_n(t) = g_n e^{-n^2 t}$, por

lo que:

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$, que todavía puede escribirse así:

$$u(x,t) = \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g(\xi) e^{-n^2 t} \sin(nx) \sin(n\xi) d\xi$$

que para $t=1$, debe satisfacer:

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(n\xi) \sin(nx) g(\xi) d\xi = \int_0^{\pi} K(x,\xi) g(\xi) d\xi = K(g(x)).$$

es decir, para hallar $u(x,t=0) = g(x)$ tendremos que resolver la ecuación integral de Fredholm de 1ª clase, y este resulta ser un problema mal planteado.

r) TOMA DE TOMOGRAFÍAS POR COMPUTADORA EN MEDICINA.

Es común que las propiedades cuantitativas z de un objeto no puedan ser medidas directamente en un experimento, sólo tenemos a nuestra disposición la información $u = Az$. El operador A está determinado por la naturaleza del objeto y por los dispositivos utilizados durante el experimento. En tales casos, para descubrir la estructura interna del objeto es necesario aplicar métodos matemáticos para tratar e interpretar tales resultados u . Por ejemplo, cuando un médico escucha a través de su estetoscopio, percibe información a través del sonido y la interpreta a base de su experiencia y la de muchas generaciones de físicos. Cuando un haz de rayos X es aplicado, la manera en que ésta es absorbida por el cuerpo humano se despliega en una pantalla e interpretada por los expertos.

Es importante que las observaciones deban ser interpretadas para determinar las propiedades cuantitativas, es decir, hay que resolver respecto de z el problema inverso:

$$(1) \quad Az = u \quad \text{con un dato inicial aproximado}$$

En muchos casos estos serán problemas mal planteados, debido a que su solución, en caso de existir, es inestable respecto al dato inicial u .

El tratamiento matemático de un diagnóstico de datos queda enmarcado, en general, en tres etapas.

ETAPA 1. Ya que cada dispositivo de medición distorsiona en alguna medida los valores del parámetro observado u , (nuestro dispositivo nos proporciona $v = Bu$ en lugar de u), la primera etapa consiste en remover estas distorsiones, i.e. tendremos que resolver $Bu = v$, respecto de u . Donde el operador B está definido por el dispositivo usado.

ETAPA 2. Consiste en determinar las propiedades z a partir de los valores u , es decir, habrá que resolver con respecto a z la ecuación (o sistema de ecuaciones):

$$(2) \quad Az = u \quad \text{Esta es la ecuación fundamental del diagnóstico por computadora.}$$

ETAPA 3. Los valores resultantes z deberán, en la mayoría de los

casos, ser representados en una forma conveniente para su percepción visual, o bien sobre papel o una pantalla. Para hacer esto hay que resolver respecto a una función $w(x,y)$ la ecuación:

$$(3) \quad Dw=z$$

Así que, un paquete de diagnóstico por computadora deberá resolver las ecs. (1)-(3). Estas ecuaciones podrán ser lineales o no lineales, pero por regla general serán ecuaciones integrales de Fredholm de 1ª clase, i.e. representaran problemas mal planteados, con datos iniciales aproximados. Así que, para resolver tales problemas deberán ser usados métodos de regularización.

Usualmente al tomar tomografías por computadora la integral:

$$\int_L z \, ds = u \quad \text{considerada sobre la línea } L \text{ que}$$

parte desde la fuente de rayos y llega hasta el detector del mismo, pasando através del objeto de estudio y además se tomarán sobre una gran cantidad de direcciones.

Una vez que tengamos los parámetros u en mano (estos se obtendrán de las mediciones del detector), los valores z serán determinados. Si la radiación se propaga en línea recta através del objeto, habrá que resolver la ecuación lineal de convolución:

$$S(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(\ell,\theta) \, d\theta$$

Donde (ℓ,θ) son los parámetros normales de la línea L en la placa (plano) Q , sobre la cual las integrales son calculadas, y:

$$z = x \cos(\theta) + y \sin(\theta).$$

Cabe notar que esta situación ocurre por ejemplo con los rayos x.

Una vez en mano las propiedades z, será conveniente representar la distribución de valores z sobre la placa Q, sobre una pantalla. Este problema se reduce a resolver con respecto a la función $w(x,y)$ la ecuación integral de convolución de 1ª clase:

$$\iint_G H(x-\xi, y-\eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta = z(x, y)$$

Bajo estas condiciones el problema de diagnóstico por computadora se reduce a la solución de las 3 ecuaciones integrales de convolución de 1ª clase.

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\ell-\ell') u(\ell', \theta) d\ell' = v(\ell, \theta)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = u(x, y)$$

$$\iint_G H(x-\xi, y-\eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta = z(x, y)$$

La imagen de la distribución de los valores de z sobre la placa será llamada el tomograma.

Para una exposición más detallada se recomienda el libro de Tikhonov y Goncharsky, Ill-posed problems in the natural sciences [15].

g) PROBLEMA INVERSO DE CALOR

En este ejemplo consideraremos el problema de determinar una fuente $F=F(x, t)$ en la ecuación de conducción de calor, a partir de

una distribución inicial $u(x,0)=h(x)$ y de un monitoreo para $t>0$ desde el origen $g(t)=u(0,t)$, i.e. habrá que resolver:

$$(1.4) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = g(t) & t > 0 \end{cases}$$

i.e. busquemos $u(x,t)$ y, por ejemplo, $F(x,t)=f(t)x_{xx}$

Utilizando la técnica de separación de variables para resolver (1.4) se llega a la siguiente expresión:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_D K(x-\xi, t-\tau) f(\tau) d\xi d\tau \quad \text{donde}$$

$$K(x,t) = \frac{e^{-Cx^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$$

Ahora bien, para $u(0,t)=g(t)$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_D K(x-\xi, t-\tau) f(\tau) d\xi d\tau \quad \text{si escribimos:}$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, t) d\xi \quad \text{obtenemos:}$$

$$g(t) = \int_0^t H(t-\tau) f(\tau) \quad \text{que es una ecuación de Volterra del primer tipo.}$$

De lo anterior se concluye, que, determinar $f(t)$ a partir de $g(t)$ resulta ser un problema mal planteado en general.

Cabe notar que bajo ciertas condiciones sobre f , se puede llegar a establecer una dependencia continua.

En [5] se prueba que para el caso $D \subset \mathbb{R}$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ si:

$F(x,t) = f(t)X_0(x)$ y bajo las condiciones

$f(0) = 0$, f' y f'' acotadas, dado $T > 0$ \exists M tal que

$$|f(t)| \leq M \left(\log \frac{1}{|g|} \right)^{-2} \quad \text{i.e.}$$

$$\sup |g| \leq \varepsilon \quad \rightarrow \quad |f| \leq M \left(\log \frac{1}{|\varepsilon|} \right)^{-2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

CAPITULO 2

Ya en el capítulo anterior se mencionó una manera (no necesariamente estable) de hallar soluciones aproximadas a problemas mal planteados, i.e. Dado el problema:

(2.1) Aug. $A: U \rightarrow V$, $u \in U$ geV U, V espacios métricos.

A es inyectivo y la solución u_x es única.

Fijamos nuestra atención en $E_\delta = \{u \in U: d_u(Au, q) \leq \delta\}$,

donde $\delta > 0$ es un cierto margen de error permisible en el dato inicial geV. Como solución aproximada al problema (2.1) tomamos cualquier $u_\delta \in E_\delta$. De antemano nada nos puede asegurar que, si hacemos tender δ a 0, las correspondientes soluciones aproximadas

u_{δ_s} tiendan hacia algún $u^* \in U$, ni mucho menos que tienda a la solución exacta u_x .

Lo que que en realidad nos interesa es, dados $\delta > 0$ y $g_\delta \in V$

tal que $d_c(g_\delta, g) \leq \delta$, tener un criterio para la elección de algún

$u_\delta \in Q_\delta = \{u \in U : d_c(Au, g_\delta) \leq \delta\}$, de tal manera que si $\delta \rightarrow 0$ entonces podamos tener la siguiente convergencia:

$u_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u_c$. Tal criterio está basado en la construcción de un operador $R = R(g_\delta, \delta)$.

DEFINICION 1.

Diremos que $RC(-, -) : V_1 \times V \rightarrow U$ es un operador de regularización al problema (2.1) si satisface las siguientes propiedades:

1) $\exists \delta_0 > 0$ tal que, $R = R(g_\delta, \delta)$ está definido $\forall 0 < \delta < \delta_0$ y además $\forall g_\delta$ tal que $d_c(g_\delta, g) \leq \delta$.

11) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon = \delta_\epsilon(\epsilon, g)$, tal que si $d_c(g_\delta, g) \leq \delta \leq \delta_\epsilon$ entonces tomando $u_\delta = R(g_\delta, \delta)$ resulte que $d_c(u_\delta, u_c) < \epsilon$

ahora bien, supongamos que hemos construido uno de tales operadores $R = R(-, -)$. Si tomamos $u_\delta = R(g_\delta, \delta)$, como solución aproximada, vemos que si $\delta \rightarrow 0$ (i.e. $g_\delta \rightarrow g$) entonces $u_\delta \rightarrow u_c$. A u_δ le denominaremos solución regularizada y al procedimiento de hallar u_δ , mediante un operador de regularización, le llamaremos método de regularización.

De la anterior discusión es evidente que cualquier método de regularización, define un método estable para hallar soluciones aproximadas a problemas mal planteados.

Para los fines del presente trabajo es conveniente tener una segunda definición para los operadores de regularización.

DEFINICION 2.

Un operador $R=RC(g_s, \omega)$ se dice que es de regularización (para el problema 2.1) si satisface:

- i) $\exists \delta, \delta > 0$ tal que $R=RC(g_s, \omega)$ esta definida $\forall \omega > 0$ y $\forall g_s \in V$ tal que $d_s(g_s, g) \leq \delta \leq \delta_1$.
- ii) Existe una función $\alpha = \alpha(\delta)$ tal que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ con $\delta(\epsilon) \leq \delta_1$ y además si $d_s(g_s, g) \leq \delta(\epsilon)$ entonces $d_s(u_s, u_\epsilon) \leq \epsilon$, donde $u_s = RC(g_s, \alpha(\delta))$.

Nuevamente observamos que si $\delta(\epsilon) \rightarrow 0$ (i.e. $g_s \rightarrow g$) entonces $u_s \rightarrow u_\epsilon$. Así que, la cuestión de hallar soluciones aproximadas al problema $Au = g$ (donde g sólo se conoce por aproximación a g_s) es equivalente a:

- i) La construcción de un operador de regularización $R=RC(-, -)$.
- ii) La determinación del parámetro $\alpha = \alpha(\delta)$ (parámetro de regularización) a partir del error δ .

Cabe notar que en ningún momento se ha supuesto la unicidad en el operador de regularización. Así que, diferentes operadores pueden definir diferentes sucesiones de soluciones regularizadas.

La idea de Tikhonov para la construcción de tales operadores de regularización tiene carácter variacional, y consiste en hallar un mínimo de un cierto funcional $\Omega(u)$ definido en $U_s \cup U$,

(donde U_1 es un subconjunto denso de U).

En lo que sigue será útil la siguiente definición.

DEFINICION 3.

Sea $\Omega: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ un funcional continuo y no negativo en U_1 , que satisface:

i) $\text{dom}(\Omega) = U_1$ y U_1 es denso en U , $u_1 \in U_1$, $(Au_1 = g)$.

ii) $\forall r > 0$ el conjunto $F_r = \{u \in U_1: \Omega(u) \leq r\}$ es compacto en U_1 .

Entonces $\Omega(u)$ se denominará funcional de regularización.

Lo que ahora nos proponemos es checar que en efecto $\Omega(u)$ alcanza su mínimo en subconjuntos de U_1 .

Sea $\delta > 0$, definimos $F_{U_1, \delta} = U_1 \cap Q_\delta$, $Q_\delta = \{u \in U: d_c(Au, g_\delta) \leq \delta\}$

y por el momento solo nos interesaremos en Ω definido en $F_{U_1, \delta}$

AFIRMACION 1:

Si $\Omega(u)$ es un funcional de regularización y $\Omega: F_{U_1, \delta} \rightarrow \mathbb{R}^+$,

entonces Ω alcanza su infimo en $F_{U_1, \delta}$

PRUEBA. Como $0 \leq \Omega(u)$, $u \in F_{U_1, \delta}$ y Ω es continua, entonces existe al

menos una sucesión minimizante $\{u_n\}$ en $F_{U_1, \delta}$. Sin perder

generalidad podemos suponer que $\Omega(u_1) \geq \Omega(u_2) \geq \dots \geq \Omega(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$

entonces tendremos que:

$u_n \in F_{\Omega(u_1)}$ que es compacto en U_1 , por lo que existe $\{u_{n_k}\}$,

subsucesión de $\{u_n\}$, convergente.

Sea $u^* = \lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{n_k}$, como $F_{\Omega}(u)$ es compacto en U , $u^* \in U$.

Ahora bien $d(CAu^*, g_{\delta}) \leq d(CAu^*, Au_{n_k}) + d(CAu_{n_k}, g_{\delta}) \leq \frac{k}{n_k} + \delta$, $\forall n_k$

por lo que:

$d(CAu^*, g_{\delta}) \leq \delta$, es decir, $u^* \in Q_{\delta} \cap U = F_{U, \delta}$, i.e. Ω está definido en u^* .

Ahora bien, veremos que $\Omega(u)$ alcanza su infimo en u^* .

En efecto: como $u^* = \lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{n_k}$ y $\Omega(u)$ es continua en u^* entonces

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \Omega(u_{n_k}) = \Omega(u^*) = \inf \Omega(u) \text{ sobre } F_{U, \delta}$$

por lo que $\Omega(u)$ alcanza su infimo en $F_{U, \delta}$

Supongamos que para todo δ y g_{δ} el mínimo de Ω sobre $F_{U, \delta}$ es alcanzado en un sólo elemento. Tal es el caso de los funcionales cuadráticos.

Ahora bien, si definimos un operador a través de Ω , i.e. $u^* = R(g_{\delta}, \delta)$, chequeemos que el operador así definido resulta ser un operador de regularización. En efecto, como:

$$u^* = \lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{n_k} \text{ y } \Omega(u) \text{ es continua en } u^* \text{ entonces}$$

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \Omega(u_{n_k}) = \Omega(u^*) = \inf \Omega(u) \text{ sobre } F_{U, \delta}$$

por lo que $\Omega(u)$ alcanza su infimo en $F_{U, \delta}$.

Probemos ahora la propiedad (i) para operadores de regularización. Hagamos la siguiente observación. Debido a que u^* minimiza a

$\Omega(u)$ en $F_{U_1, \delta}$ y puesto que $u_2 \in F_{U_1, \delta}$ ($Au_2 = g$) es claro que:

$\Omega(u^*) \leq \Omega(u_2)$ por lo que: $u^* \in \{u: \Omega(u) \leq \Omega(u_2)\} = F_2$, el cual es compacto en U_1 .

Sea $\{g_n\} \in V$ tal que $d_0(g, g_n) \leq \delta_n$ donde $\{\delta_n\} \rightarrow 0$.

Para cada δ_n se define $F_{u, \delta_n} = Q \cap U_1$

En vista de lo que se probó en la afirmación 1, para cada F_{U_1, δ_n} existe un elemento $u_{\delta_n}^*$ el cual minimiza al funcional $\Omega(u)$ en

F_{U_1, δ_n} . Así que, a cada sucesión $\{\delta_n\}$ se le puede poner en

correspondencia una sucesión $\{u_{\delta_n}^*\} \in F_2$. Recuérdese que

$u_2 \in F_{U_1, \delta_n}$ y $u_{\delta_n}^*$ minimiza a Ω en F_{U_1, δ_n} el cual es compacto en U_1 .

Por lo que existe una subsucesión convergente $\{u_{\delta_{n_k}}^*\}$, sea

$\hat{u} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{\delta_{n_k}}^*$, como cada $u_{\delta_{n_k}}^* \in F_{U_1, \delta_{n_k}}$ se tendrá que $\forall u_{\delta_{n_k}}^*$

$d_0(Au_{\delta_{n_k}}^*, g_{\delta_{n_k}}) \leq \delta_{n_k}$, tomando el límite conforme $n_k \rightarrow \infty$ y

utilizando el hecho de que A es continuo resultará:

$d_0(A\hat{u}, g) = 0$, i.e. $A\hat{u} = g$, la unicidad de la

solución que se supuso implica que $\hat{u} = u_2$, por lo que:

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{\delta_{n_k}}^* = u_2.$$

Esto mismo sucederá para cualquier sucesión convergente de $\{u_{\delta_n}\}$.

Se sigue que, para cada sucesión $\{\delta_n\}$ de reales positivos que converja a 0, la correspondiente sucesión $\{u_{\delta_n}\}$ converge (en U_1) hacia u_ϵ .

De esta manera resultará que $R(\cdot, \cdot)$ es un operador de regularización, en una vecindad de g , para la ecuación $Au=g$, donde g sólo se conoce por aproximación, g_δ .

Así que, con este nuevo enfoque, el problema de hallar una solución para la ecuación:

$$Au=g$$

donde g sólo se conoce por aproximación, g_δ , consiste en minimizar el funcional $\Omega(z)$ sobre el conjunto $F_{U, \delta} = Q \cap U_1$

donde $Q_\delta = \{u \in U_1; d_c(Au, g_\delta) \leq \delta\}$.

Así que, una vez conocido δ y g_δ , es de fundamental importancia conocer explícitamente a Q_δ . Es importante observar que, con éste enfoque, se presentan serias dificultades: (para poder ser llevado a una computadora).

a) Definir con precisión al conjunto Q_δ , esto se deberá hacer para cada $\delta > 0$. Si la razón de convergencia de las soluciones no es suficientemente rápida, la cantidad de estas que deberán tomarse puede implicar gran trabajo.

b) el problema en si de minimizar $\Omega(u)$ en $F_{U, \delta}$

Es por lo anterior que sería de gran ayuda saber que podemos hallar soluciones regularizadas sin el hecho de conocer explícitamente a Q_δ .

Sea $M_0 = \{u \in U_1; \Omega(u) = \Omega_0 \text{ infimo de } \Omega \text{ sobre } U_1\}$.

Supongamos, por simplicidad, que el conjunto de elementos u de U_1 , tales que $\Omega(u) = \Omega_0$ consta de un sólo elemento, u_0 .

Dado un $\delta > 0$, puede suceder que el infimo de Ω sobre U_1 , no sea alcanzado en $F_{U, \delta}$.

Momentáneamente supongamos que $\inf_{F_{U, \delta}} \Omega(u) = \inf_{U_1} \Omega(u) = \Omega_0$.

Sea u_0 tal que $\Omega(u) = \Omega_0$, tomamos a u_0 como solución al problema variacional de minimizar a $\Omega(u)$ sobre $F_{U, \delta}$. Lo que nos proponemos

chechar es que u_0 es estable bajo pequeños cambios en g_δ .

Para cualquier $\epsilon > 0$, $u_0 \in D_\epsilon = \{u \in U_1; \Omega(u) \leq \Omega_0 + \epsilon\}$. El operador A es continuo y uno-a-uno, por lo que A^{-1} existe y es continuo. Recuérdese que D_ϵ es compacto.

En el caso en que $u_0 \notin F_{U, \delta}$, demostraremos que, para una clase de operadores, el problema de minimizar a $\Omega(u)$ en $F_{U, \delta}$ es

equivalente a encontrar un mínimo de $\Omega(u)$ sobre U , con tal que la solución satisfaga:

$$(2.2) \quad d(Au_0, g_\delta) = \delta.$$

Para lo cual será necesario la siguiente definición.

DEFINICION 4.

Diremos que el funcional de regularización $\Omega: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ es cuasi-monótono, si para cada elemento $u_0 \in U$, que no está en M_δ , cada vecindad de él incluye un elemento $u \in U$, tal que

$$\Omega(u) < \Omega(u_0).$$

LEMA 1.

El infimo de un funcional cuasi-monótono en $F_{U, \delta}$ para el cual

$$F_{U, \delta} \cap M_\delta = \emptyset \text{ es alcanzado en un } u_\delta \text{ para el cual } d(Au_\delta, g_\delta) = \delta.$$

PRUEBA.

Supongamos que $\inf_{u \in F_{U, \delta}} \Omega(u)$ es alcanzado en un u_δ para el cual

$$d(Au_\delta, g_\delta) = \beta < \delta, \quad u_\delta \notin M_\delta \quad \text{ya que } F_{U, \delta} \cap M_\delta = \emptyset. \text{ Puesto que } A \text{ es}$$

continuo, entonces existe una vecindad $V(u_\delta)$ tal que para todo u en dicha vecindad $d(Au, Au_\delta) < \frac{\delta - \beta}{2}$. Ahora bien,

$d(Au, g_\delta) \leq d(Au, Au_\delta) + d(Au_\delta, g_\delta) < \frac{\delta - \beta}{2} + \beta = \frac{\delta + \beta}{2} < \delta$, por lo que para todo $u \in V(u_\delta)$ $d(Au, g_\delta) < \delta$, i.e. $V(u_\delta) \subset Q_\delta$. Como Ω es cuasi-monótono, entonces en la vecindad $V(u_\delta)$ existe un u , tal que $\Omega(u) < \Omega(u_\delta)$. Esto no puede ser ya que Ω alcanza su ínfimo en u_δ . Por lo tanto $d(Au_\delta, g_\delta) = \delta$.

Podemos usar este último resultado para resolver el problema de minimizar el funcional $\Omega(u)$, no en $F_{U, \delta}$, sino en U_1 bajo la

condición de que el elemento u_0 que buscamos satisfaga la ecuación (2.2).

Este es un problema con extremo condicionado. La técnica clásica para resolver esta clase de problemas es mediante el uso de multiplicadores de Lagrange, es decir, habrá que minimizar el funcional (2.3) en U_1 .

$$(2.3) \quad M^\alpha[u, g_\delta] = d_v^k(Au, g_\delta) + \alpha \Omega(u)$$

donde el parámetro numérico α está determinado de la condición:

$d_v(Au_\alpha, g_\delta) = \delta$, donde u_α es un elemento donde el funcional $M^\alpha[u, g_\delta]$ alcanza su máxima cota inferior.

Si el método de Lagrange puede ser llevado a cabo, es decir, si existe α tal que $d_v(Au_\alpha, g_\delta) = \delta$, entonces el problema variacional original es equivalente al problema de minimizar el funcional:

$$M^\alpha[u, g_\delta], \text{ esto es:}$$

Si $\alpha = \alpha(\delta)$ es tal que $d_v(Au_\alpha, g_\delta) = \delta$, entonces la solución u_α del problema original también minimiza el funcional $M^\alpha[u, g_\delta]$, inversamente, si u_α es tal que minimiza el funcional $M^\alpha[u, g_\delta]$ y satisface la condición $d_v(Au_\alpha, g_\delta) = \delta$, entonces minimiza al funcional $\Omega(u)$ sobre $F_{U, \delta}$.

Ahora lo que resta es establecer condiciones bajo las cuales el método de los multiplicadores de Lagrange es aplicable. Antes de establecer tales condiciones, vale la pena hacer notar que los

funcionales $M^\alpha[u, g_\alpha]$ pueden ser definidos formalmente sin relacionarlos con el problema variacional de hallar extremos condicionados del funcional $\Omega(u)$.

Si suponemos que U es un espacio métrico y $\Omega(u)$ es un funcional de regularización definido en $U \subset U$, entonces tendremos el siguiente teorema.

TEOREMA. Sea A un operador continuo, $A: U \rightarrow V$, para cada $g_\alpha \in V$ y $\forall \alpha > 0$, existe $u_\alpha \in U$, para el cual:

$$M^\alpha[u, g_\alpha] = d_\alpha^2(Au - g_\alpha) + \alpha \Omega(u) \text{ alcanza su máxima cota inferior.}$$

Prueba.

Como A y Ω son continuos y $M^\alpha[u, g_\alpha] \geq 0$ entonces existe una sucesión minimizante $\{u_n\}$ para M^α sobre U . Definamos:

$M^\alpha[u_n, g_\alpha] = M_n^\alpha$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que: $M_1^\alpha \geq M_2^\alpha \geq M_3^\alpha \geq \dots \geq M_n^\alpha$ para todo n , por lo que

$$\alpha \Omega(u_n) \leq M_n^\alpha = d_\alpha^2(Au_n, g_\alpha) + \alpha \Omega(u_n) \leq M_1^\alpha = Q \quad \text{i.e.} \quad \Omega(u_n) \leq \frac{Q}{\alpha}$$

entonces $\{u_n\} \in \{u: \Omega(u) \leq Q/\alpha\}$ que es compacto en U . Por lo que existe una subsucesión convergente $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$. Sea $u_\alpha = \lim_{n_k} u_{n_k}$

Como A y Ω son continuos en U , se tiene

$$\lim_{n_k} M_{n_k}^\alpha = \lim_{n_k} d_\alpha^2(Au_{n_k}, g_\alpha) + \alpha \lim_{n_k} \Omega(u_{n_k}) = d_\alpha^2(Au_\alpha, g_\alpha) + \alpha \Omega(u_\alpha) = M^\alpha[u_\alpha, g_\alpha]$$

Si el operador A es lineal, U es un espacio de Hilbert y $\Omega(u)$ un funcional cuadrático, entonces u_α es único.

En ([1] p-83) se demuestra que: Si definimos $u_\alpha = R_\alpha(g_\alpha, \omega)$.

entonces $R_\alpha = R_\alpha(g_\alpha, \alpha)$ resultará ser un operador de regularización para la ecuación (2.1).

Como se vió en el capítulo anterior, existe una gran cantidad de problemas cuya formulación matemática corresponde a los llamados problemas mal planteados o mal condicionados.

En este trabajo, la clase de problemas que nos interesan son aquellos cuya formulación corresponde a una ecuación de Fredholm del tipo:

$$(2.4) \quad A(u(x)) = \int_a^b K(x, s)u(s)ds = g(x) \quad c \leq x \leq d$$

$K(x, s) \in L_2([a, b] \times [c, d]), \quad A: H_1 \longrightarrow H_2, \quad H_1 = L_2[a, b] \quad H_2 = L_2[c, d]$

Lo que ahora nos proponemos, es enmarcar el problema dentro de la teoría de Tikhonov, para lo cual necesitamos hacer algunas observaciones.

Como funcional de regularización tomamos a:

$$R^\alpha(u, g_\alpha) = \|Au - g_\alpha\|_2^2 + \alpha \Omega(u) \quad \text{y } \Omega(u) \text{ esta definida por:}$$

$$(2.5) \quad \Omega(u) = \int_a^b \sum_{j=0}^n P_j(s) |u^{(j)}(s)|^2 ds$$

donde los $P_j(s)$ son funciones continuas y no negativas en $[a, b]$ y $u \in C^n[a, b]$, i.e. $\Omega: C^n[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Debido a los teoremas de inmersión de Sobolev (ver [13] vol. 5 p-339-342), dado $r > 0$, el conjunto $\Omega_r = \{u \in C^n[a, b]: \Omega(u) \leq r\}$ es

compacto en $C^1[a, b]$ y por lo tanto en $H_1 = L_2[a, b]$, puesto que la inyección $C^1[a, b] \hookrightarrow H_1$ es continua.

Para hallar el punto crítico de un funcional cuadrático del tipo: $F(u) = \|Au - g\|_2^2 + \alpha \|u\|_1^2$ es suficiente con resolver la ecuación de Euler asociada: $(A^*A + \alpha I)u_0 = A^*g$ (A^* transpuesta de A).

Ahora transformaremos esta ecuación para el funcional $\Omega[u]$.

Sean $\tilde{F}(u) = \Omega(u)$, $\tilde{f}(t) = \tilde{F}(u_0 + tw)$ donde $w \in C_0^1[a, b]$ y u_0 es tal que $\Omega'(u_0) = 0$ en el sentido (débil) de Gateaux.

De la expresión $\Omega(u) = \int_a^b \sum_{j=0}^n P_j(s) |u^{(j)}(s)|^2 ds$ se puede ver que es

un producto interno, definido por: $(u, v)_\Omega = \int_a^b \sum_{j=0}^n P_j u^{(j)} v^{(j)} ds$

entonces $\Omega(u) = (u, u)_\Omega = \int_a^b \sum_{j=0}^n P_j(s) |u^{(j)}(s)|^2 ds$, por lo que:

$$\tilde{f}(t) = \tilde{F}(u_0 + tw) = (u_0 + tw, u_0 + tw)_\Omega = (u_0, u_0)_\Omega + 2t(u_0, w)_\Omega + t^2(w, w)_\Omega$$

por lo que $\tilde{f}'(t=0) = 2(u_0, w)_\Omega = 2 \int_a^b \sum_{j=0}^n P_j u_0^{(j)} w^{(j)} ds$, integrando por partes j -veces la expresión anterior y tomando en cuenta que

$$w \in C_0^1[a, b] \text{ resultará que } \int_a^b P_j(s) u_0^{(j)} w^{(j)} ds = \int_a^b (-1)^j \frac{d^j}{ds^j} (P_j u_0^{(j)}) w ds$$

$$\text{por lo que } \int_a^b \sum_{j=0}^n P_j(s) u_0^{(j)} w^{(j)} ds = \int_a^b \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{d^j}{ds^j} (P_j u_0^{(j)}) w ds = 0$$

para toda $w \in C_0^1[a, b]$, entonces $\sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{d^j}{ds^j} (P_j u_0^{(j)}) = 0$ y por lo tanto:

$$\Omega'(u) = L(u) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{d^j}{ds^j} (P_j u^{(j)}). \text{ De donde se puede ver que}$$

la nueva ecuación de Euler toma la forma $(A^*A + \alpha I)u_0 = A^*g$.

Sean $u, v \in C_0^{2n-1}(a, b)$, consideremos:

$$(Lu, v) = \int_a^b \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{d^j}{ds^j} (P_j u^{(j)}) v ds \quad \text{integrando por partes } 2n-1$$

veces y utilizando el hecho de que u y v satisfacen las condiciones naturales de frontera, i.e. $u, v \in C_0^{2n-1}(a, b)$ resultará:

$$(Lu, v) = \int_a^b \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{d^j}{ds^j} (P_j v^{(j)}) u ds = (u, Lv), \quad \text{es decir } L \text{ es}$$

autoadjunto. De lo anterior se ve que L tiene un inverso ($\ker(L)$ es trivial) el cual viene dado por la función de Green asociado al funcional L .

$$L^{-1}g(x) = \int_a^b G(x, t)g(t)dt \quad \text{por lo que:}$$

$A^*Au + \alpha Lu = A^*g$ se transforma en $L^{-1}A^*Au + \alpha u = L^{-1}A^*g$

que es una ecuación de Fredholm de 2a. clase y que por la alternativa de Fredholm, en caso de tener solución, esta es única y depende continuamente de $f = L^{-1}A^*g$.

Ahora bien, Si tomamos $\Omega(u) = \int_a^b P_0 u^2 + P_1 u'^2$, resultará que una condición para que el funcional $R(u, \alpha)$ alcance su mínimo en u_0 , es que:

$$(2.6) \quad \int_a^b \left(-\alpha \left\{ \frac{d}{dx} [P_1(x) \frac{du}{dx}] - P_0(x) u(x) \right\} + \int_a^b \bar{K}(x, s) u(s) ds - b(x) u(x) \right) dx +$$

$$(2.6.1) \quad + \alpha P_1(x) u'(x) v(x) \Big|_a^b = 0$$

En este caso, $v(x)$ es cualquier variación de la función $u(x)$, de tal forma que $u(x)$ y $u(x) + v(x)$ estén dentro de la clase de las funciones admisibles, y además:

$$\bar{K}(x, s) = \int_c^d K(\xi, s) K(\xi, x) d\xi \quad \text{y} \quad b(x) = \int_c^d K(\xi, x) g(\xi) d\xi.$$

Así que, si conocemos los valores en los extremos de la solución $u(s)$, a la ecuación (2.4), podemos tomar como funciones admisibles, al minimizar el funcional (2.3), sólo aquellas que coincidan con $u(s)$ en los extremos. Las variaciones $v(s)$ se deben de anular en los extremos y la condición (2.6.1) será satisfecha.

En este caso recién expuesto, el problema de hallar una solución regularizada $u_\alpha(s)$ se reduce a hallar una solución a la ecuación integrodiferencial:

$$(2.7) \quad \int_a^b \bar{K}(x, s) u(s) ds + \alpha \left(\frac{d}{ds} [P_1(x) \frac{du}{dx}] - P_0(x) u(x) \right) = b(x)$$

En el caso en que no se conozcan los valores en los extremos de la solución al problema (2.4.), La condición (2.7) sugiere tomar la condición de frontera: $u'(a) = u'(b) = 0$.

EJEMPLO 1.

Tomemos $A: C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$ definido por:

$$A(u(s)) = \int_0^\pi K(x, s) u(s) ds = g(x), \quad \text{donde el núcleo está dado por:}$$

$$K(x, s) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(ns), \quad \text{esta formulación corresponde al}$$

problema de hallar una distribución $u(s)$ para $t=0$, conociendo su distribución $g(x)$ al tiempo $t=1$, de esta forma, considerando que:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(n\xi) \text{sen}(k\xi) d\xi = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } k=n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

Entonces resultará que:

$$\bar{K}(x, s) = \int_0^{\pi} K(x, \xi) K(s, \xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2} \text{sen}(nx) \text{sen}(ns).$$

Tomemos por ejemplo $g(x) = \sum_{n=1}^m \beta_n \text{sen}(nx)$ entonces:

$$b(x) = \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \text{sen}(ns) \text{sen}(nx) \right) \left(\sum_{n=1}^m \beta_n \text{sen}(ns) \right) ds, \quad \text{de donde se}$$

deduce que:

$$b(x) = \sum_{n=1}^m \beta_n e^{-n^2} \text{sen}(nx).$$

Si tomamos el funcional $\Omega(u) = \int_0^{\pi} u^2 + u'^2$, la solución regularizada u_{α} esta dada por la solución a la ecuación integrodiferencial:

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2} \text{sen}(nx) \text{sen}(ns) \right) u(s) ds + \alpha(u - u'') = \sum_{n=1}^m \beta_n e^{-n^2} \text{sen}(nx).$$

En este caso se toman por conocidos, los valores en los extremos de la solución deseada.

EJEMPLO 2.

Consideremos la cuestión de resolver el problema de la extensión armónica del disco de radio $\rho < 1$, al disco de radio 1.

Además se tiene $g(\theta)$ definida sobre $\partial\Omega$, Ω =disco. Así, buscamos una $u(s)$ tal que:

$$g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (\cos(nt)\cos(ns) + \text{sen}(nt)\text{sen}(ns)) \right] u(s) ds$$

o bien, $g = Au$

Como se vió anteriormente, una aproximación a tal problema,

tomando $u(s) = \int_a^b u^s$, está dado por la solución al siguiente modelo:

$$\dot{A}Au + \alpha u = \dot{A}g$$

$$\text{donde } \dot{A}Au = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{K}(t,s)u(s)ds, \quad \dot{K}(t,s) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t,\xi)K(s,\xi)d\xi.$$

En nuestro problema:

$$\dot{K}(t,s) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n(t-\xi)) \right] \left[\frac{s}{2\pi} + \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(\xi-s) \right] \text{ que,}$$

$$\text{debido a que: } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\xi)d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\xi) = \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\xi)\sin(n\xi)d\xi = 0 \quad \forall n, m \end{cases}$$

$$\text{resultará que: } \dot{K}(t,s) = \frac{t}{2\pi} + \frac{t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} \cos(n(t-s)).$$

Por lo que la ecuación $\dot{A}Au + \alpha u = \dot{A}g$ es equivalente a la siguiente formulación:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} \cos(t-s) \right] u(s)ds + \alpha u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} \cos(t-s) \right] g(s)ds.$$

En el estudio de problemas particulares, es difícil hallar explícitamente a $\alpha = \alpha(\delta)$ (parámetro de regularización) para el cual $R = R^{\alpha}(u, g_s)$ sea un funcional de regularización. La elección del valor admisible del parámetro $\alpha = \alpha(\delta)$ depende esencialmente de la información disponible en el dato inicial, g_s .

Existe una gran cantidad de principios para la elección de $\alpha = \alpha(\delta)$, entre los cuales se mencionan: principio de la

discrepancia, cuasi-optimalidad, pseudo-optimalidad etc. Para una descripción detallada de algunos de éstos, y aún de otros, ver ([1]).

A continuación describimos el principio que usamos al calcular nuestras soluciones regularizadas.

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ sección de una sucesión monótona p.ej.

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k \quad k=1, 2, \dots, n \quad q > 0.$$

Para cada valor de α_k se minimiza el funcional $M^{\alpha_k}[u, g]$, una vez hallada la solución u_{α_k} , calculamos la discrepancia $d(Au_{\alpha_k}, g)$,

y elegimos aquel $u_{\alpha_{k_0}}$ tal que $d(Au_{\alpha_{k_0}}, g) = \delta$.

CAPITULO 3

§ 1. En este capítulo tratamos de dar otros enfoques al problema de resolver la ecuación:

$$(3.1.0) \quad Au=g, \quad A: H_1 \longrightarrow H_2 \quad \text{definido por}$$

$$A(u(x)) = \int_a^b k(x,s)u(s)ds = g(x), \quad c \leq x \leq d \quad \text{donde}$$

$$H_1 = L_2(a,b), \quad H_2 = L_2(c,d) \quad \text{y} \quad k(x,s) \in L_2((a,b) \times (c,d))$$

Se vio en el capítulo anterior que (para una elección apropiada de α) una solución aproximada al problema $Au=g_\alpha$ ($d(g, g_\alpha) \leq \epsilon$) resultaba ser la solución a la ecuación de Euler asociada $A^*Au + \alpha u = A^*g_\alpha$ (tomando $\|u\| = \|u\|_{\mathcal{D}}$). Esta puede ser llevada a una ecuación de la forma:

$$(3.1.1) \quad u = \lambda \tilde{A}u + f \quad \text{tomando:} \quad \lambda = \frac{1}{\alpha}; \quad \tilde{A} = -A^*A; \quad f = \lambda A^*g_\alpha$$

La ecuación (3.1.1) puede también escribirse en la forma:

$$(3.1.2) \quad (I - \lambda \tilde{A})u = f$$

la alternativa de Fredholm (ver Fomin [10] p-515) afirma que, dado λ , o bien la ecuación (3.1.2) tiene una única solución, para todo f , o bien, λ es un valor propio de \tilde{A} .

En el primer caso el operador $I - \lambda \tilde{A}: H_1 \rightarrow H_1$ es una biyección, y por lo tanto está garantizada la existencia del operador $(I - \lambda \tilde{A})^{-1}$, que es acotado (continuo en espacios métricos), siempre y cuando $|\lambda| < \frac{1}{\|\tilde{A}\|}$, en éste caso el operador $(I - \lambda \tilde{A})^{-1}$ puede ser considerado como la suma de la serie de potencias:

$$(I - \lambda \tilde{A})^{-1} = I + \lambda \tilde{A} + \lambda^2 \tilde{A}^2 + \dots + \lambda^n \tilde{A}^n + \dots$$

cuya convergencia esta garantizada por la condición $|\lambda| < \frac{1}{\|\tilde{A}\|}$.

Así que la solución de la ecuación (3.1.1) puede ser representado por:

$$u = f + \lambda \tilde{A}f + \lambda^2 \tilde{A}^2 f + \dots + \lambda^n \tilde{A}^n f + \dots$$

En [10] se prueba que $(I - \lambda A)^{-1}$ se puede representar, (para pequeños valores de λ), en forma $I + K$ donde K es un operador integral con núcleo de cuadrado integrable dependiendo de λ .

§ 2 INVERSA GENERALIZADA

Una vez planteado nuestro problema:

$$(3.2.1) \quad Ku = g$$

nos interesa saber dentro de que categoría cae y que metodología deberá usarse para hallar su solución. El problema (3.2.1) lo

podemos ubicar dentro de aquellos en los cuales se necesita hallar un operador K^{-1} , que sea el inverso de K , y que para hallar la solución u , baste aplicar K^{-1} a g , i.e. $u=K^{-1}g$.

Decir que el problema $(K, X, Y; K: X \rightarrow Y)$ es bien planteado, es lo mismo decir que K^{-1} existe y es continuo. En este apartado se introducirá un concepto más general de solución al problema (3.2.1), donde el operador K lo consideramos como una aplicación entre espacios de Hilbert, i.e.

$$K: X \rightarrow Y, \quad X, Y \text{ espacios de Hilbert.}$$

En lugar de considerar aquel elemento u , que satisface $Ku=g$, consideraremos aquellos elementos v que satisfagan:

$$\|Ku-g\| \leq \|Ku-g\| \quad \forall u \in X$$

y dentro de estos escogeremos aquel que tenga la norma de menor magnitud. A este elemento lo denotaremos u^+ y le llamaremos solución de mínimos cuadrados del problema (3.2.1).

Por ahora supongamos que $K: X \rightarrow Y$ es acotado. Ahora bien, el conjunto:

$$\{\|Kx-g\|: x \in X, g \in Y \text{ donde } g \text{ es fijo}\}$$

abajo por 0, entonces existe su ínfimo.

En [9] se demuestra que tal elemento existe y es único. A este elemento u^+ lo podemos pensar como la imagen de g bajo un cierto operador:

$$u^+ = K^+ g$$

A este operador se le conoce en la literatura como la inversa generalizada del operador $K: X \rightarrow Y$. Además este operador será acotado (continuo en espacios métricos) si y sólo si $R(K)$ es

cerrado. Y como solo estamos interesados en operadores compactos K , $R(K)$ será cerrado si $R(K)$ es de dimensión finita. En el lenguaje de los operadores de Fredholm de 1ª clase, es lo mismo decir que el núcleo del operador K sea degenerado, i.e.

$$k(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_n(x) \phi_m(z)$$

§ 3. TEOREMA DE PICARD

Una terminología especial es ya tradicional en el estudio de ecuaciones de Fredholm de 1ª clase. Ahora, introducimos estos términos en el marco de la teoría espectral mencionada anteriormente.

Supongamos que $K: H_1 \rightarrow H_2$ es un operador lineal y compacto. Puesto que $(AB)^* = B^* A^*$ entonces el operador :

$K^* K: H_1 \rightarrow H_1$ es compacto y autoadjunto, para cada valor propio β de $K^* K$ se cumple lo siguiente:

$$\text{si } \|x\|=1 \rightarrow \beta = \langle \beta x, x \rangle = \langle K^* K x, x \rangle = \langle K x, K x \rangle = \|Kx\|^2 > 0$$

entonces los valores propios de $K^* K$ serán $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots$ designemos por v_1, v_2, v_3, \dots los vectores propios correspondientes, i.e.

$K^* K v_n = \lambda_n^2 v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que son ortonormales (de otra forma podemos aplicar el proceso de ortogonalización de Graham-Schmidt).

$$\text{Sea } \mu_n = \frac{1}{\lambda_n} \text{ y } u_n = \mu_n K v_n = \frac{1}{\lambda_n} K v_n$$

$$\text{Puesto que } \langle u_n, u_m \rangle_{H_2} = \langle \mu_n K v_n, \mu_m K v_m \rangle = \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \langle v_n, v_m \rangle_{H_1}$$

entonces $\{u_n\}$ es ortogonal si y sólo si $\{v_n\}$ es ortogonal. La

sucesión $\{u_n, v_n, \mu_n\}$ es llamado sistema singular para K .

El siguiente teorema nos da una representación para el operador K^*K en términos de sus vectores y valores propios. Para su demostración ver ([10] p-260).

TEOREMA (ESPECTRAL). Sea $T: H \rightarrow H$ operador lineal compacto y autoadjunto. H espacio de Hilbert. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sucesión de sus valores propios y w_1, w_2, w_3, \dots los vectores propios (ortonormales) correspondientes

$$\text{Entonces para todo } x \in H \quad Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, w_n \rangle w_n.$$

Utilizaremos el teorema anterior para probar éste par de lemas que nos serán de utilidad. Sea $\{u_n, v_n, \mu_n\}$ sistema singular para $K: H_1 \rightarrow H_2$.

lema A. $\{u_n\}$ es un sistema completo en $\overline{R(K)} = N(K^*)^\perp$.

prueba. Obs. K^* es inyectivo en $\overline{R(K)}$.

Como $K^*K: H_1 \rightarrow H_1$ es lineal, compacto y autoadjunto por el teorema espectral

$$K^*Kx = \sum_n \lambda_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n = \sum_n \langle x, \lambda_n v_n \rangle \lambda_n v_n = \sum_n \langle x, K^*u_n \rangle K^*u_n = K^* \left(\sum_n \langle Kx, u_n \rangle u_n \right)$$

pero $\lambda_n u_n = K v_n$ entonces $\sum_n \langle x, K^*u_n \rangle u_n \in R(K)$ así que

$$Kx = \sum_n \langle Kx, u_n \rangle u_n \text{ de donde se sigue el resultado } \blacksquare$$

lema B. $\{v_n\}$ es un sistema completo en $\overline{R(K^*)} = N(K)^\perp$.

prueba. Obs. K es inyectivo en $R(K^*)$.

Como $\{u_n\}$ es un sistema completo en $R(K)$.

$$\begin{aligned}
 KCK^*x &= \sum_n CKK^*x, u_n \rangle u_n = \sum_n \langle K^*x, K^*u_n \rangle u_n = \sum_n \langle K^*x, \lambda_n v_n \rangle u_n = \sum_n \langle K^*x, v_n \rangle \lambda_n u_n = \\
 & K \sum_n \langle K^*x, v_n \rangle v_n, \text{ pero como } \sum_n \langle K^*x, v_n \rangle v_n \in RCK^* \quad (K^*u_n = \lambda_n v_n).
 \end{aligned}$$

Entonces $K^*x = \sum_n \langle K^*x, v_n \rangle v_n$ de donde se sigue el resultado ■

Ahora nos proponemos relacionar esta terminología con la solubilidad de la ecuación de Fredholm: $Ku=g$.

El siguiente resultado se conoce como el teorema de Picard, y para probarlo necesitaremos del siguiente lema.

Lema. Sea $K: H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal y compacto entre espacios de Hilbert H_1, H_2 . Si u^+ existe, dado el problema $Ku=g$, entonces $Ku^+ = Pg$. (P es la proyección ortogonal de $H_2 = \overline{\text{Im}CK} + \text{Im}CK^\perp$ sobre $\overline{\text{Im}CK}$.)

prueba. Debido al teorema de la proyección ortogonal, para toda $u \in H_1$, sucederá que:

$$\|g - Ku\|^2 = \|Pg + h - Ku\|^2 \text{ donde } Pg \in \overline{\text{Im}CK} \text{ y } h \in \text{Im}CK^\perp,$$

pero $\|g - Ku\|^2 = \|Pg - Ku + h\|^2 = \|Pg - Ku\|^2 + \|h\|^2 \geq \|h\|^2$ ahora bien, si u^+ es solución de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned}
 \|Ku^+ - g\| &\leq \|Ku - g\| \quad \forall u \in H_1, \text{ pero entonces sucederá que} \\
 \|Ku^+ - g\| &= \|h\| \quad \text{y entonces } \|Pg - Ku^+\| = 0, \text{ es decir } Ku^+ = Pg.
 \end{aligned}$$

TEOREMA. (PICARD) Sea $K: H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal compacto, con sistema singular $\{u_n, v_n, \mu_n\}$. Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $Ku=g$ tenga una solución generalizada u^+ es que, $g \in RCK$ y además:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |\langle g, u_n \rangle|^2 < \infty$$

prueba.

Por el teorema de la proyección ortogonal, dado $g \in H_1$, se tiene $g = Pg + h$ donde $Pg \in \overline{\text{Im}(K)}$ y $h \in \text{Im}(K)^\perp$, y como $\{u_n\}$ es una base de $\overline{\text{Im}(K)}$ se tiene que:

$$Pg = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Pg, u_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, u_n \rangle u_n.$$

↔ Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |\langle g, u_n \rangle|^2 < \infty$, definamos $u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle g, u_n \rangle v_n$

es evidente que $u_0 \in H_1$ ($\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ converge si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$)

$$\text{Ahora bien, } Ku_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle g, u_n \rangle Kv_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, u_n \rangle \mu_n \frac{1}{\mu_n} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, u_n \rangle u_n = Pg$$

de donde se deduce que $Pg \in \text{Im}(K)$ y debido al lema anterior $Ku = g$ tiene solución generalizada.

↔ Supongamos que u^+ existe. Debido al lema anterior $Ku^+ = Pg$. Como

$\{v_n\}$ es base de $N(K)^\perp$, se tiene que $u^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ ($\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$).

$$\text{ahora bien, } Ku^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Kv_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} u_n, \text{ pero } Pg = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, u_n \rangle u_n$$

de donde resulta que $\alpha_n = \langle g, u_n \rangle \mu_n$, $n=1, 2, 3, \dots$

es decir $u^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle g, u_n \rangle v_n$ y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |\langle g, u_n \rangle|^2 < \infty$ ■

Lo que el teorema de Picard nos muestra es que, para que se tenga una solución generalizada al problema $Ku = g$ es necesario que los coeficientes de Fourier $\langle g, u_n \rangle$ asociados a g tiendan a 0 lo suficientemente rápido para que:

$$\frac{|\langle g, u_n \rangle|^2}{\lambda_n^2} \rightarrow 0.$$

EJEMPLO 1.

Consideremos el problema siguiente:

$$Ku=g, \quad Ku = \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(ns) \right) u(s) ds$$

Este corresponde a la ecuación de calor hacia atrás en el tiempo. Mediante el cálculo directo se ve que $\lambda_n = e^{-n^2/x}$ y además se tiene que: $u_n = v_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(nx)$, $\mu_n = e^{n^2/x}$

Notemos que el kernel del operador K es simétrico y por lo tanto el operador es autoadjunto. Así que, debido al teorema de Picard, el problema de la ecuación de calor hacia atrás en el tiempo tendrá solución, dado g , si y sólo si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2/x} |(g, \sqrt{2/\pi} \operatorname{sen}(ns))|^2 < \infty$$

EJEMPLO 2.

En el problema de la extensión armónica de un círculo de radio r a un círculo de radio 1, tenemos el operador K definido por:

$$\begin{aligned} (2) \quad K(u(\phi)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2) u(\phi) d\phi}{(1-2r \cos(\theta-\phi) + r^2)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta-\phi)) \right) u(\phi) d\phi = g(\theta). \end{aligned}$$

Este operador es simétrico y por lo tanto autoadjunto. Al aplicar el clásico método de separación de variables para deducir la ecuación (2), se pudo ver claramente que los valores propios asociados al operador son: r^n y las funciones propias asociadas

fueron:

$$u_1 = \frac{f}{\sqrt{2\pi}} \text{ correspondiente a } r^0=1$$

$$u_{2n} = \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{\pi}} \text{ correspondiente a } r^n=\lambda_{2n}, \quad n \geq 1$$

$$u_{2n+1} = \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\sqrt{\pi}} \text{ correspondiente a } r^n=\lambda_{2n+1}, \quad n \geq 1$$

Entonces K tendrá la siguiente descomposición espectral:

$$K(f) = (f, 1/\sqrt{2\pi})u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [r^n (f, u_{2n})u_{2n} + r^n (f, u_{2n+1})u_{2n+1}].$$

Un sistema singular para el operador está dado por los valores propios:

$$\mu_1=1, \quad \mu_2=1/r, \quad \mu_3=1/r, \quad \mu_4=1/r^2, \quad \mu_5=1/r^2, \quad \mu_6=1/r^3, \quad \mu_7=1/r^3, \text{ etc. y}$$

por la sucesión de vectores propios asociados:

$$u_{2n}=v_{2n} = \frac{\cos(n\theta)}{(\pi)^{1/2}}, \quad u_{2n+1}=v_{2n+1} = \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{(\pi)^{1/2}} \quad n=1, 2, \dots$$

$$u_0=v_0 = \frac{f}{(2\pi)^{1/2}}.$$

Así que, una condición necesaria y suficiente para que el problema (2) tenga una solución generalizada u^+ , es que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} |(g, (\pi^{-1/2}) \cos(n\theta))|^2 < \infty \quad \text{y}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} |(g, (\pi^{-1/2}) \operatorname{sen}(n\theta))|^2 < \infty$$

METODO GENERAL DE REGULARIZACION.

En este apartado nos proponemos exponer un método general para construir operadores de regularización, los cuales proporcionan aproximaciones estables a la solución de mínimos cuadrados.

Se verá que el operador de regularización $(K^*K + \alpha I)^{-1}$ es un caso muy particular del método, y se dará una expresión en forma de serie para calcular:

$$u_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1} K^*g$$

donde $K: H_1 \rightarrow H_2$, $Ku = g$ (H_1, H_2 espacios de Hilbert).

Comencemos por definir $\tilde{K} = K^*K$, donde K es el operador adjunto de K^* (i.e. $K^*: H_2 \rightarrow H_1$ y $(Kx, y) = (x, K^*y) \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$). Una condición necesaria para que u^+ fuese solución de mínimos cuadrados del problema $Ku = g$ es que $K^*g = K^*Ku^+$. (ver Fomin [10])

, así que, si \tilde{K} tuviese inverso $u = \tilde{K}^{-1}K^*g$, aún así, esperamos aproximar a u^+ mediante $R_\alpha(\tilde{K})K^*g$ ($\alpha > 0$), donde $R_\alpha(t)$ es continua.

La expresión $R_\alpha(\tilde{K})$ debe entenderse en el siguiente sentido. El teorema espectral (ver Fomin [10]) afirma que si $A: H_1 \rightarrow H_1$ (H_1, H_2 espacios de Hilbert) es un operador lineal, compacto y autoadjunto con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ (ordenados de acuerdo a la dimensión del subespacio que generan) y con vectores propios respectivos w_1, w_2, w_3, \dots entonces para todo $x \in H_1$:

$$Ax = \sum_n \lambda_n (x, w_n) w_n$$

(En el lenguaje del operador integral de Fredholm de 1ª clase, la alternativa de Fredholm afirma que A no tiene espectro continuo). Ahora bien, si f es una función real y continua definida en $\sigma(A)$ (radio espectral) se define:

$$f(A)(x) = \sum_n f(\lambda_n)(x, w_n)w_n$$

resulta que el operador así definido es autoadjunto y compacto ver (Groetsch [1]).

Así pues, aproximaremos $u^+ = R_\alpha(\tilde{K})K^*g$.

lema 1. Sea P polinomio, entonces $P(K^*K)K^* = K^*P(KK^*)$.

prueba.

Se sigue inmediatamente del hecho de que $(KK^*)^n = K^*K^n$, en efecto,

$$\text{sea } P(t) = \sum_{n=1}^k a_n t^n \text{ así que } P(K^*K) \cdot K^* = \sum_{n=1}^k a_n (K^*K)^n \cdot K^*, \text{ pero:}$$

$$(K^*K)^n K^* = (K^*K) \cdot (K^*K) \cdot \dots \cdot (K^*K) \cdot K^* = K^* \cdot (KK^*) \cdot \dots \cdot (KK^*) = K^* (KK^*)^n$$

$$\text{Así pues, } \sum_{n=1}^k a_n (K^*K)^n \cdot K^* = \sum_{n=1}^k a_n K^* \cdot (KK^*)^n = K^* \cdot \sum_{n=1}^k a_n (KK^*)^n$$

por lo que: $P(K^*K) \cdot K^* = K^* P(KK^*)$.

Debido al teorema de aproximación de Weierstraß (ver Bartle [2]) para funciones continuas f(t), resulta que $f(K^*K) \cdot K^* = K^* \cdot f(KK^*)$, i.e.

$$R_\alpha(K^*K) \cdot K^* = K^* \cdot R_\alpha(KK^*)$$

Supongamos que la función $R_\alpha(t)$ es tal que $R_\alpha(t) \rightarrow 1/t$ si $\alpha \rightarrow 0$ y además $|t R_\alpha(t)|$ es uniformemente acotado.

Sea C^2 tal que $|t R_\alpha(t)| \leq C^2$, $\forall t \in [0, \|K\|^2]$, $\forall \alpha$.

Supongamos que tenemos a nuestra disposición g_δ tal que $d(g-g_\delta) \leq \delta$.

definamos $u_\alpha^\delta = R_\alpha(K^*K)K^*g_\delta$ como aproximación a u^+ . Lo que deseamos hallar es una elección apropiada para $\alpha = \alpha(\delta)$ de tal forma que las aproximaciones obtenidas u_α^δ sean regulares, i.e.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha(K^*K)K^*g_\delta \longrightarrow K^*g = u^+.$$

Sea $r(\omega) = \max \{ \|R_\alpha(t)\| : t \in [0, \|K\|^2] \}$. Obs. $0 < r(\omega) < \omega$ ya que $R_\alpha(t)$ es continua y $[0, \|K\|^2]$ es compacto.

Como $R_\alpha(t) \rightarrow 1/t$ si $\alpha \rightarrow 0$, entonces $r(\omega) \rightarrow \omega$ si $\alpha \rightarrow 0$.

Bajo las anteriores suposiciones se tienen los siguientes lemas.

lema 2. Supongamos que $u_\alpha = R_\alpha(\tilde{K})K^*g$, $u_\alpha^\delta = R_\alpha(\tilde{K})K^*g_\delta$, $\|g - g_\delta\| \leq \delta$.

C^2 es tal que $\|tR_\alpha(t)\| \leq C^2$, $t \in [0, \|K\|^2]$, entonces $\|Ku_\alpha - u_\alpha^\delta\| \leq \delta C^2$. prueba.

Ya que $\tilde{K}(u_\alpha - u_\alpha^\delta) = \tilde{K}R_\alpha(\tilde{K})K^*(g - g_\delta)$ tendremos:

$$\|Ku_\alpha - u_\alpha^\delta\|^2 = (Ku_\alpha - u_\alpha^\delta, Ku_\alpha - u_\alpha^\delta) = (K^*Ku_\alpha - u_\alpha^\delta, Cu_\alpha - u_\alpha^\delta) =$$

$$(\tilde{K}R_\alpha(\tilde{K})K^*(g - g_\delta), Cu_\alpha - u_\alpha^\delta) = (\tilde{K}R_\alpha(\tilde{K})(g - g_\delta), Ku_\alpha - u_\alpha^\delta).$$

Utilizando la desigualdad de Schwartz para producto interno:

$$\|Ku_\alpha - u_\alpha^\delta\|^2 \leq \delta C^2 \|Ku_\alpha - u_\alpha^\delta\|, \text{ i.e. } \|Ku_\alpha - u_\alpha^\delta\| \leq \delta C^2 \quad \blacksquare$$

lema 3. Supongamos que $r(\omega) = \max \{ R_\alpha(t) : t \in [0, \|K\|^2] \}$, δ y C son como en el lema 2 entonces $\|u_\alpha - u_\alpha^\delta\| \leq \delta C (r(\omega))^{1/2}$.

prueba. Como $u_\alpha - u_\alpha^\delta = K^*R_\alpha(\tilde{K})(g - g_\delta)$ tendremos:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha - u_\alpha^\delta\|^2 &= (u_\alpha - u_\alpha^\delta, K^*R_\alpha(\tilde{K})(g - g_\delta)) = (Ku_\alpha - u_\alpha^\delta, R_\alpha(\tilde{K})(g - g_\delta)) \\ &\leq \|Ku_\alpha - u_\alpha^\delta\| r(\omega) \delta, \text{ y utilizando el lema 2.} \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha - u_\alpha^\delta\| \leq \delta C r(\omega) = \delta^2 C^2 r(\omega), \text{ i.e. } \|u_\alpha - u_\alpha^\delta\| \leq \delta C (r(\omega))^{1/2} \quad \blacksquare$$

lema 4. Supongamos que $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ es una familia de funciones continuas definidas en $[0, \|K\|^2]$ tales que:

a) $R_\alpha(t) \rightarrow 1/t$ conforme $\alpha \rightarrow 0$.

b) $|tR_\alpha(t)|$ es uniformemente acotado.

entonces $R_\alpha(\tilde{K})K^*g \rightarrow K^*g$ conforme $\alpha \rightarrow 0$. Para todo $g \in \text{Im}(K^*)$.

prueba.

Como $R_\alpha(\tilde{K})K^*g = K^*R_\alpha(\tilde{K})g$, $R_\alpha(\tilde{K})K^*g \in \text{Im}(K^*)$. Si $\{u_n, v_n; \mu_n\}$ es un sistema singular para K , $\{v_n\}$ es base para $\overline{\text{Im}(K^*)}$ por lo que:

$$K^*g = \sum_n (K^*g, v_n) v_n, \text{ pero } \tilde{K}v_n = \mu_n^2 v_n \text{ entonces}$$

$$\tilde{K}(K^*g) = \sum_n \mu_n^2 (K^*g, v_n) v_n, \text{ así que para cada } R_\alpha \text{ tendremos}$$

$$\begin{aligned} R_\alpha(\tilde{K})(K^*g) &= \sum_n R_\alpha(\mu_n^2) (K^*g, v_n) v_n = \sum_n R_\alpha(\mu_n^2) (g, Kv_n) v_n = \\ &= \sum_n \mu_n^{-2} R_\alpha(\mu_n^2) (g, u_n) v_n. \end{aligned}$$

Como cada R_α satisface a) y b). Si $\alpha \rightarrow 0$ (Aplicando el teorema de convergencia acotado).

$$R_\alpha(\tilde{K})K^*g \rightarrow \sum_n (g, u_n) v_n = u^+ = K^*g \quad \square$$

Teniendo estos cuatro lemas en mano, podemos establecer las condiciones para tener regularidad en la aproximación u_α^s .

Suponiendo que la función del parámetro $\alpha = \alpha(\delta)$ satisface:

$$\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \text{ es continua, no negativa y } \alpha(\delta) = 0.$$

$$\text{Sea } \|u^+ - u_{\alpha(\delta)}^s\| \leq \|u^+ - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u_{\alpha(\delta)}^s\| \leq \|u^+ - u_\alpha\| + \delta C (r(\delta))^{1/2}$$

Ahora bien, $u_\alpha = R_\alpha(\tilde{K})K^*g$ entonces $u_\alpha \rightarrow K^*g = u^+$ si $\alpha \rightarrow 0$

por lo que: $\|u - u_{\alpha}^{\delta}(s)\| \rightarrow 0$ si $\delta(r(\omega))^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow 0$.

De lo anterior se deduce el siguiente:

Teorema. Sea $g \in D(K^+)$, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha(\delta)) \rightarrow 0$, si $\alpha \rightarrow 0$, entonces $u_{\alpha}^{\delta}(s) \rightarrow K^+g = u^+$ si $\alpha \rightarrow 0$.

Como caso particular tomemos el operador de regularización generado por la función $R_{\alpha}(t) = 1/(t+\alpha)$, está definida para todo

$t \geq 0$, $\alpha > 0$, es continua en $[0, H] \forall H > 0$ y $\left| \frac{t}{t+\alpha} \right| \leq 1$ entonces

$|tR_{\alpha}(\tilde{K})|$ es uniformemente acotado, por lo que:

$u_{\alpha} = R_{\alpha}(\tilde{K})K^+g = (K^+K + \alpha I)^{-1}K^+g$, que coincide con la ecuación de Euler conocida, para el problema de mínimos cuadrados.

Calculemos ahora $\max |R_{\alpha}(t)|$, $t > 0$. $\max \left| \frac{1}{t+\alpha} \right| = \frac{1}{\alpha} = r(\omega)$ si $t \geq 0$

y $\alpha R_{\alpha}(\omega)^{\frac{1}{\alpha}} = \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{4\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}$, si $\alpha = m\delta + n$ $\delta^{\frac{1}{\alpha}}(\omega) = \frac{\delta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \rightarrow 0$ si $\delta \rightarrow 0$.

Daremos ahora una expresión explícita, en forma de serie, para u_{α} en términos del sistema singular de K ; $(u_n, v_n; \mu_n)$.

Sabemos que:

$$K^+g = \sum_{n=1}^{\infty} (g, u_n) \lambda_n v_n$$

Ahora bien,

$$\tilde{K}(K^+g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (g, u_n) \frac{v_n}{\mu_n} \text{ por lo que:}$$

$$R_{\alpha}(\tilde{K})(K^+g) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{\alpha}\left(\frac{1}{\mu_n}\right) (g, u_n) \frac{v_n}{\mu_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^{-1}}{\mu_n^{-\alpha} + \alpha} (g, u_n) v_n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha\mu_n^2} \mu_n \langle g, u_n \rangle v_n = \sum_{n=1}^{[1/\alpha]} \mu_n \langle g, u_n \rangle v_n.$$

Para una exposición más extensa y detallada se recomienda ver (8).

CAPITULO 4

En este capítulo reportamos los resultados numéricos (computacionales) obtenidos, así como las diferentes técnicas empleadas al resolver la ecuación (4.1) mediante la teoría de regularización de Tikhonov.

$$(4.1) \quad Au(s) = \int_a^b k(x,s)u(s)ds = g(x) \quad c \leq x \leq d$$

Comencemos por enumerar los problemas que se trabajaron.

$$1) \quad \int_0^1 (x+s)u(s)ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(s) = s, \quad g(x) = x/2 + 1/3$$

$$2) \int_0^1 (x-s)^2 u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(s) = s, \quad g(x) = -\frac{x^3}{12} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{4}$$

$$3) \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(ns) u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\text{con } u(s) = \operatorname{sen}(s), \quad g(x) = \operatorname{sen}(x)/e^2$$

$$4) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(x-s)) \right) u(s) ds = g(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$\text{con } r = 1/2, \quad u(s) = \operatorname{sen}(s), \quad g(x) = \operatorname{sen}(x)/2$$

$$5) \int_0^1 \cos(xs) u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{con } u(s) = s, \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

$$6) \int_0^1 e^{xs} u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{con } u(s) = e^s, \quad g(x) = \frac{1}{x+s} (e^{x+1} - 1)$$

$$7) \int_0^1 (x+s+0.1)^{-1} u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{con } u(s) = s(10s+1), \quad g(x) = 5 - 10x + x(10x+1) \ln \left(\frac{10x+11}{10x+1} \right)$$

$$8) \int_0^1 \sqrt{x+s} u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(s) = s, \quad g(x) = \frac{1}{3} ((1+x^3)^{3/2} - x^3)$$

En estos casos, se emplearon diferentes $u(x)$ y por lo tanto $g(x)$. Algunos de estos problemas ya han sido objeto de estudio, como puede verse en ([11] p-120) donde se encuentra una descripción más detallada al respecto.

La elección de tales problemas tiene la intención, entre otras, de cubrir la más amplia gama posible de tipos de núcleos $k(x,s)$. En cada uno de los problemas trabajados, la función $g(x)$ fue definida mediante la evaluación:

$$\int_a^b k(x,s)u(s)ds = g(x) \text{ teniendo en mano la solución deseada.}$$

FORMULAS DE CUADRATURA.

En éste apartado se describen algunas fórmulas de cuadratura numérica, que se emplearon al discretizar las integrales que aparecieron al regularizar el proceso de solución de la ecuación:

$$Au(s) = \int_a^b k(x,s)u(x)dx = g(s).$$

Dada la integral en su forma general $\int_a^b f(x)dx$ buscamos aproximarla mediante una suma del tipo: $\sum_{n=1}^m a_n f(x_n)$.

FORMULA DE SIMPSON.

Dada $f \in C^4[a,b]$ aproximamos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2j-1}) + f(x_{2m}) \right]$$

donde $n=2m$, $h=(b-a)/n$, $x_j=a+jh$

con un error de truncamiento igual a: $\frac{(b-a)^4}{180} h^4 f^{(4)}$. Si se desea un error de truncamiento menor a ϵ , n deberá tomarse como:

$n > \frac{(b-a)^4}{180\epsilon} |f^{(4)}|$. Esta es una de las fórmulas de cuadratura más empleadas en la práctica.

FORMULA DEL TRAPECIO.

Con $f \in C^2[a, b]$ aproxima la integral:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)]$$

con: $h=(b-a)/n$, $x_j=a+jh$, $j=0, 1, \dots, n$, con un error de truncamiento: $(b-a)h^2 f''(\mu)/12$, así que, si se desea un error de truncamiento menor de ϵ , n deberá tomarse de tal forma que:

$$n^2 > \frac{(b-a)^2}{12\epsilon} |f''|$$

FORMULA DEL PUNTO MEDIO.

Si $f \in C^2(a, b)$ tendremos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx 2h \sum_{j=0}^m f(x_{2j}) \quad \text{donde } h=(b-a)/(2m+2),$$

$$x_j=a+(j+1)h, \quad j=0, 1, \dots, 2m+1, \quad n=2m$$

con un error de truncamiento de $(b-a)h^2 f''(\mu)$. Si ϵ es un margen de error, n deberá tomarse de tal forma que:

$$n^2 > 4 \left[\frac{(b-a)^2}{24\epsilon} |f''| \right].$$

Es importante notar que todas estas fórmulas usan un paso de integración h , constante. En caso de que la función $f(x)$

presente grandes variaciones, se recomienda utilizar el paso de integración no uniforme.

Para una descripción más completa y detallada de estas fórmulas ver (Burden[4] p-182).

Tres enfoques a la teoría de regularización de Tikhonov fueron empleados al resolver cada uno de los problemas anteriormente mencionados.

1.

Dado el problema (4.1), se vio en el capítulo 2 que una solución regularizada está dada por la solución a la ecuación integro-diferencial:

$$(4.2) \quad \int_a^b \bar{K}(x,s)u(s)ds + \alpha(P_\nu u - \frac{d}{dx}(P_\nu u)) = \int_a^b K(s,x)g(s)ds$$

donde $\bar{K}(x,s) = \int_a^b K(\xi,s)K(\xi,x)d\xi$ y como funcional

de regularización se tomó $\Omega(u) = \int_a^b P_\nu u^2 + P_\nu u'^2$

La ecuación (4.2) la sustituimos por su equivalente en diferencias finitas:

$$(4.3) \quad -\frac{\alpha}{h^2} \{P_{1,1}u_{k+1} + P_{1,2}u_{k+1} - (P_{1,1} + P_{1,2})u_k - h^2 P_{0,1}u_k\} + \sum_{r=0}^n \bar{K}_{r,r} u_r = h b_k, \quad k=1, 2, 3, \dots, n-1$$

donde $P_{1,1} = P_1(s_p)$, $P_{0,1} = P_0(s_p)$, $u_k = u(s_p)$, $b_k = b(s_p)$, $s_p = a + kh$,

$h = (b-a)/n$, $\bar{K}_{r,r} = \bar{K}(s_r, s_r)$, $\bar{K}_{r,r}$ son los coeficientes que se

obtienen al sustituir la ecuación integral que aparece en la ecuación (4.2).

Tomando $P_0, P_1=1$, la ecuación (4.3) se transforma en:

$$(4.4) \quad -\frac{\alpha}{h^2}(u_{k+1}+u_{k-1}-(2+h^2) \cdot u_k) + \sum_{r=0}^n \bar{K}_{k,r} \cdot u_r \cdot h = b_k, \quad k=1, \dots, n-1$$

Conociendo los valores de la solución u en los extremos, $u(a)=u_0$ y $u(b)=u_1$, tomando $u_k=u_0$ y $u_{n+1}=u_1$ y sustituyéndolo en la ecuación (4.4) resultará el siguiente sistema de ecuaciones de $(n-1) \times (n-1)$ definido por:

$$(4.5) \quad -\frac{\alpha}{h^2}(u_{k+1}+u_{k-1}-(2+h^2) \cdot u_k) + \sum_{r=1}^{n-1} \bar{K}_{k,r} \cdot u_r \cdot h = \tilde{b}_k, \quad k=1, \dots, n-1$$

donde $\tilde{b}_k = b_k - \bar{K}_{k,0} \cdot h \cdot u_0 - \bar{K}_{k,n} \cdot h \cdot u_1$.

$u_k = u(a+kh)$ es el valor buscado de la solución regularizada en el punto $a+kh$.

2.

Otro enfoque consiste en discretizar directamente la ecuación integral (4.1), mediante cualquiera de las fórmulas de cuadratura (Simpson, trapecio, punto medio), para obtener un sistema de ecuaciones (4.5) que resultará ser, generalmente, mal condicionado.

$$(4.6) \quad \tilde{A}u(x) \approx \int_a^b k(x,s)u(s)ds$$

$$\frac{h}{3} [k(x_0, s_0)u_0 + 2 \sum_{j=1}^{m-1} k(x_0, s_{2j})u_{2j} + 4 \sum_{j=1}^m k(x_0, s_{2j-1})u_{2j-1} + k(x_0, s_{2m})u_{2m}] = g(x_0)$$

$k=1 \dots n$

para el caso de la fórmula de Simpson.

$$\frac{h}{2} [k(x_0, s_0)u_0 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} k(x_j, s_j)u_j + k(x_n, s_n)u_n] = g(x_k) \quad k=1..n \quad (\text{trapezoido})$$

$$2h \sum_{j=0}^m k(x_k, s_{2j})u_{2j} = g(x_k) \quad k=1..n \quad (\text{punto medio}) \quad n=2m$$

Una manera de regularizar el proceso de solución para estos sistemas de ecuaciones mal condicionados, consiste en hallar la solución de un sistema auxiliar de ecuaciones:

$$(4.7) \quad (B^T B + \alpha I)u = B^T \bar{g}, \quad B \text{ es la matriz resultante de la discretización y } B^T \text{ es la traspuesta de } B.$$

En ([1] p-95-108) se prueba que si α es elegido de una manera apropiada (se exhiben teoremas de existencia), la solución obtenida al resolver (4.5) converge hacia la solución de mínimos cuadrados del sistema: $Bu = \bar{g}$.

Para una exposición completa y detallada es éste enfoque consultar ([1] cap. III).

3.

El tercer enfoque lo sugiere Groetsch ([8]) y es aplicable solamente para operadores integrales auto-adjuntos (aquellos que tienen núcleo simétrico $k(x,s)=k(s,x)$). Consiste en resolver la ecuación integral de Fredholm de segunda clase:

$$(4.6) \quad \int_a^b k(x,s)u(s)ds + \alpha u(x) = g(x)$$

donde α es el parámetro de regularización. En tal caso la discretización a la ecuación (4.6) tendrá la siguiente forma:

$$\frac{h}{3} [k(x_0, s_0)u_0 + 2 \sum_{j=1}^{m-1} k(x_0, s_j)u_j + 4 \sum_{j=1}^m k(x_0, s_{2j-1})u_{2j-1} + k(x_0, s_{2m})u_{2m}] + \alpha u_0 = g(x_0) \quad k=1, 2, \dots, 2m=n$$

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{2m} = b \quad c = x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} = d \quad (\text{formula de Simpson})$$

$$\frac{h}{2} [k(x_0, s_0)u_0 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} k(x_0, s_j)u_j + k(x_0, s_n)u_n] + \alpha u_0 = g(x_0)$$

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{2m} = b \quad c = x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} = d \quad (\text{formula trapecio})$$

$$2h \sum_{j=0}^m k(x_0, s_j)u_j + \alpha u_0 = g(x_0)$$

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{2m} = b \quad c = x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} = d \quad (\text{punto medio})$$

El método para resolver los sistemas de ecuaciones resultantes fue el de Eliminación de Gauss.

Figura 1.(a)

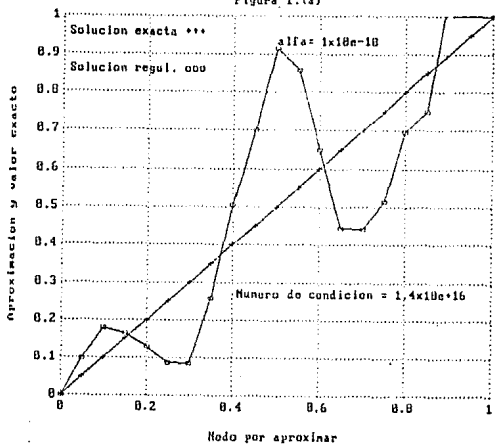


Figura 1.(b)

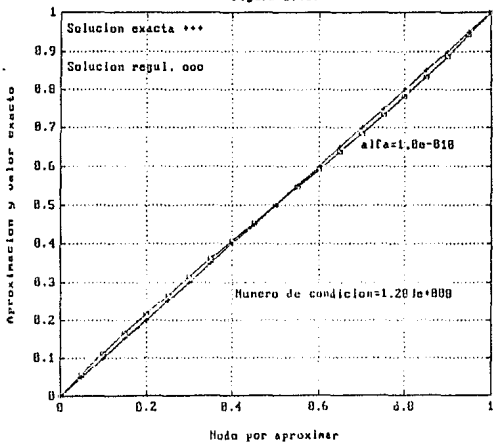
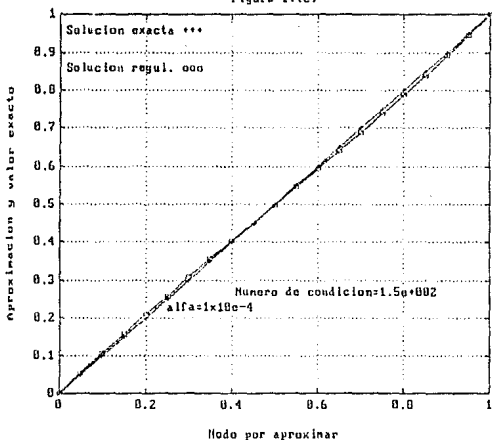


Figura 1.(c)



Las figuras 1(a), 1(b), 1(c) muestran una sucesión de aproximaciones al problema 1.:

$$\int_0^1 (x+s)u(s)ds=q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(s)=s, \quad q(x)=x/2+1/3.$$

Discretización: Trapezoidal.

Alfa: Parámetro de Regularización.

Numero de condicion: Número de condición de la matriz resultante de la discretización del problema.

Figura 2.(a)

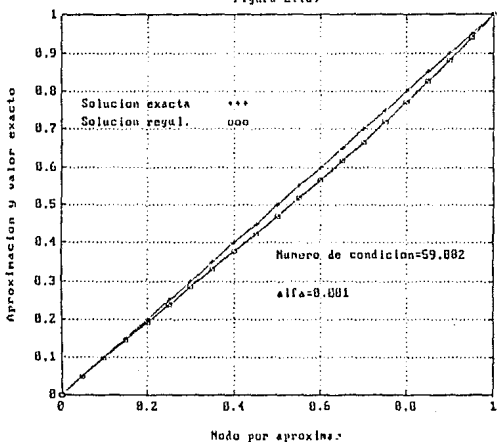


Figura 2.(b)

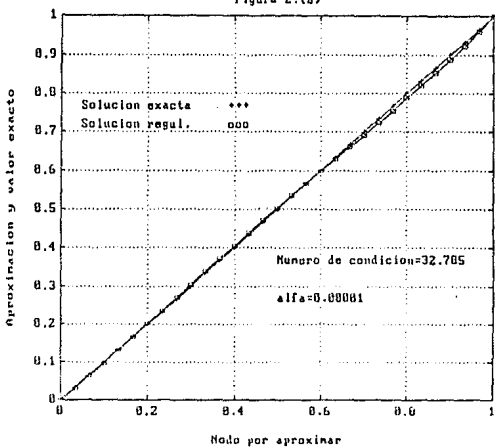
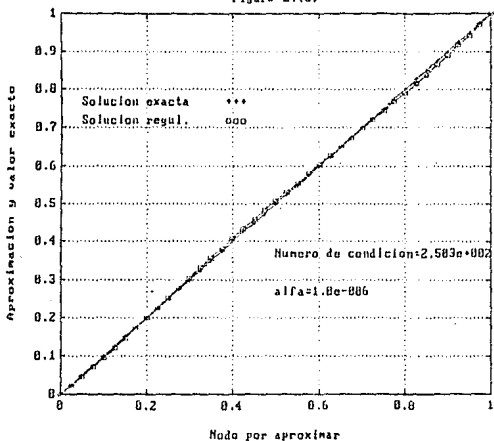


Figura 2.(c)



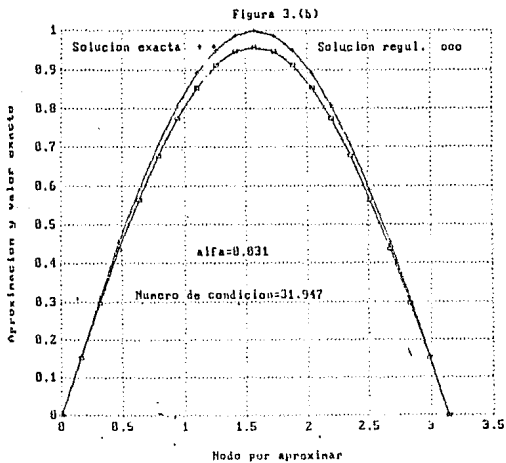
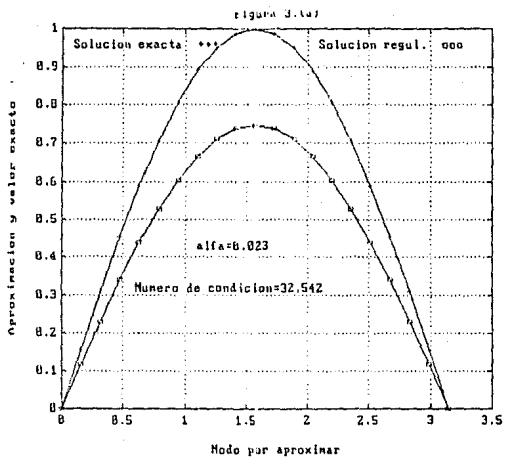
Las figuras 2(a), 2(b), 2(c) muestran una sucesión de aproximaciones al problema 2.:

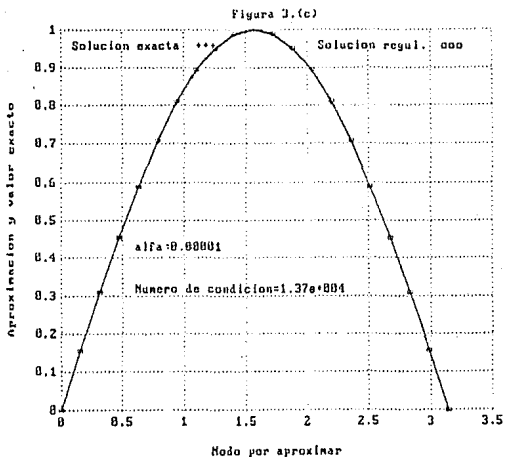
$$\int_0^1 (x-s)^4 u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(s) = s, \quad g(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{4}$$

Discretización: Trapezoidal.

Alfa: Parámetro de Regularización.

Número de condición: Número de condición de la matriz resultante de la discretización del problema.





Las figuras 3(a), 3(b), 3(c) muestran una sucesión de aproximaciones al problema 3.:

$$3) \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} \sin(nx) \sin(ns) u(s) ds = q(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

con $u(s) = \sin(s)$, $q(x) = \sin(x)/e^4$.

Discretización: Trapezoidal.

Alfa: Parámetro de Regularización.

Numero de condicion: Número de condición de la matriz resultante de la discretización del problema.

Figura 4.(a)

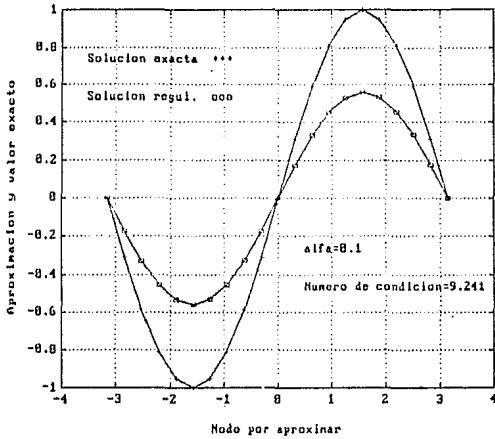
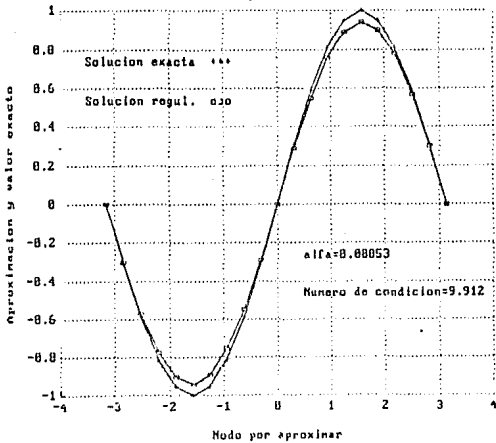
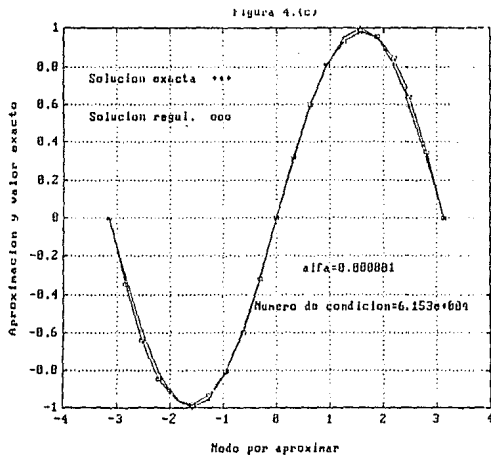


Figura 4.(b)





Las figuras 4(a), 4(b), 4(c) muestran una sucesión de aproximaciones al problema 4.:

$$d) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(x-s)) \right) u(s) ds = g(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

con $r=1/2$, $u(s)=\text{sen}(s)$, $g(x)=\text{sen}(x)/2$.

Discretización: Trapezoidal.

Alfa: Parámetro de Regularización.

Numero de condicion: Número de condición de la matriz resultante de la discretización del problema.

Figura 5.(a)

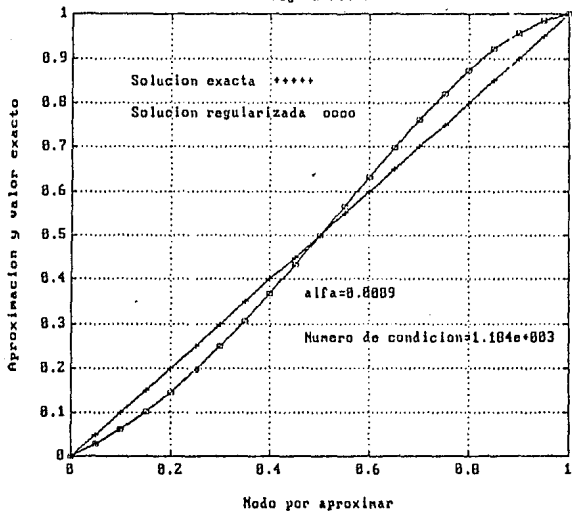


Figura 5.(b)

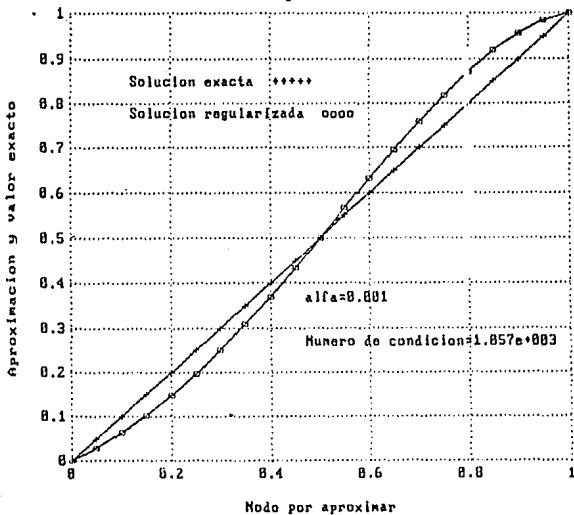
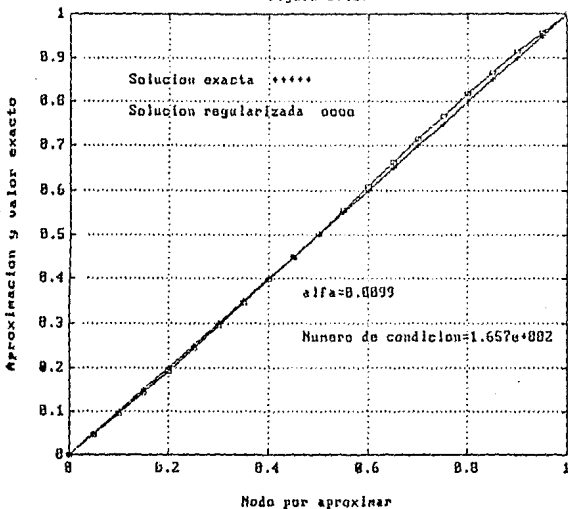


Figura 5.(c)



Las figuras 5(a), 5(b), 5(c) muestran una sucesión de aproximaciones al problema 5.:

$$5) \int_0^1 \cos(xs)u(s)ds=g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{con } u(s)=s, \quad g(x)=\frac{\sin(x)}{x} + \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

Discretización: Trapezoidal.

Alfa: Parámetro de Regularización.

Numero de condicion: Número de condición de la matriz resultante de la discretización del problema.

Figura 6.(a)

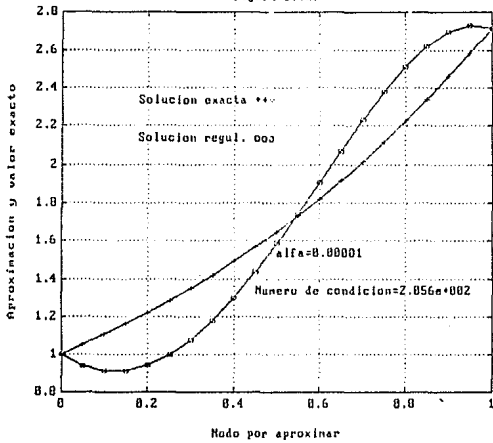


Figura 6.(b)

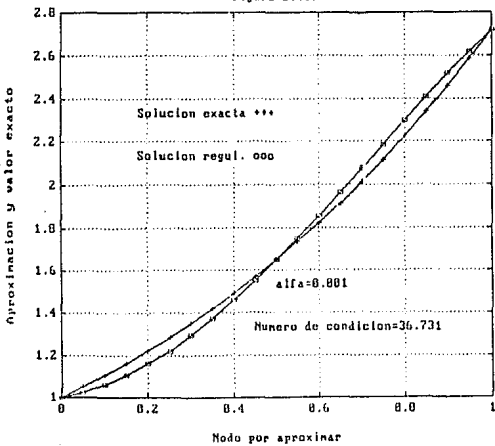
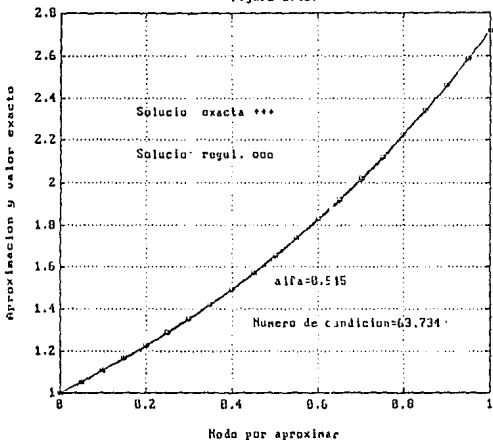


Figura 6.(c)



Las figuras 6(a), 6(b), 6(c) muestran una sucesión de aproximaciones al problema 6.:

$$u) \int_0^1 e^{-\lambda s} u(s) ds = q(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{con } u(s) = e^s, \quad q(x) = \frac{1}{x+1} (e^{x+1} - 1).$$

Discretización: Trapezoidal.

Alfa: Parámetro de Regularización.

Numero de condición: Número de condición de la matriz resultante de la discretización del problema.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Figura 7.(a)

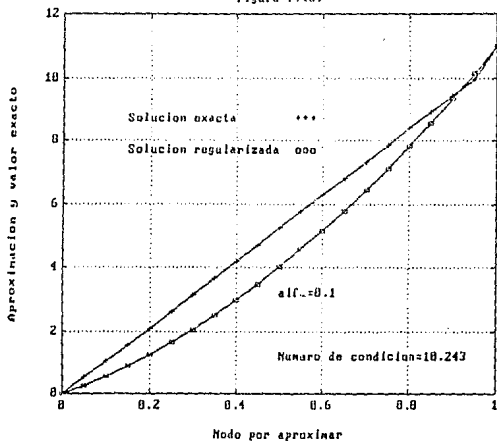


Figura 7.(b)

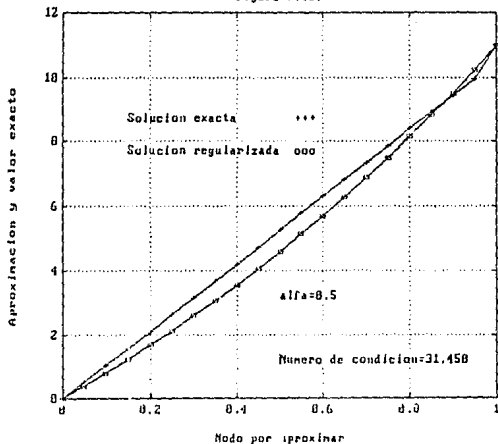
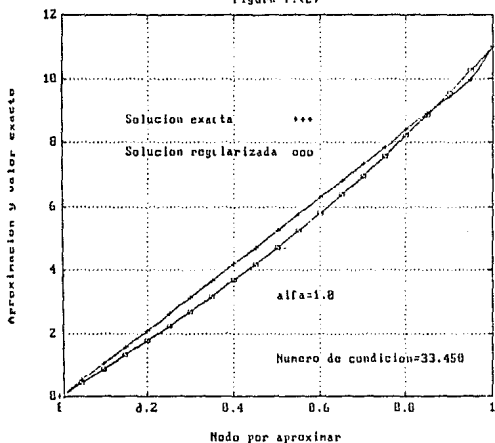


Figura 7.(a)



Las figuras 7(a), 7(b), 7(c) muestran una sucesión de aproximaciones al problema 7.:

$$7) \int_0^1 (x+s+0.1)^{-1} u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{con } u(s) = s(10s+1), \quad g(x) = 5-10x+x(10x+1) \ln\left(\frac{10x+1}{10x+1}\right)$$

Discretización: Trapezoidal.

Alfa: Parámetro de Regularización.

Numero de condicion: Número de condicion de la matriz resultante de la discretización del problema.

Figura 0.(a)

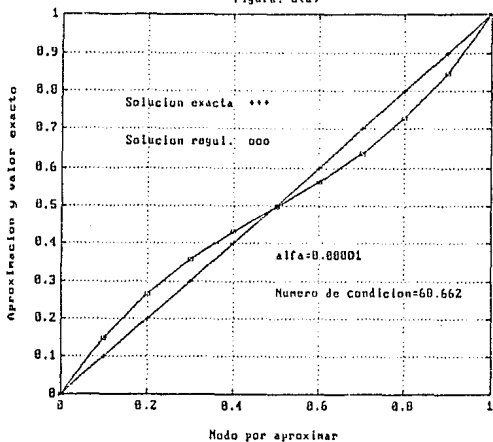


Figura 0.(b)

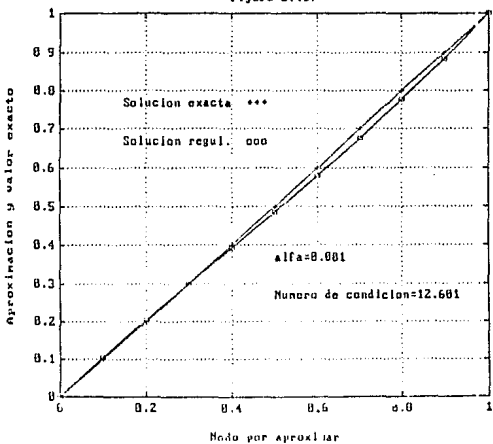
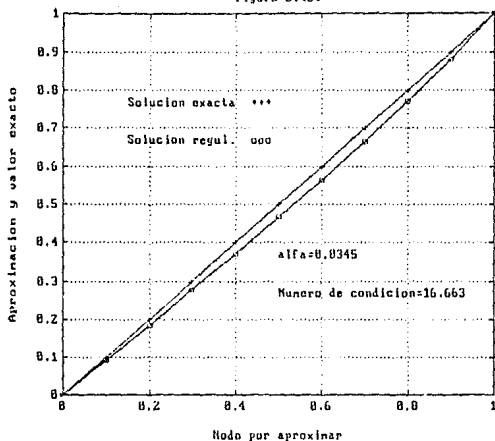


Figura B. (c)



Las figuras B(a), B(b), B(c) muestran una sucesión de aproximaciones al problema B.:

$$B) \int_0^1 \sqrt{x+s} u(s) ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(s) = s, \quad g(x) = \frac{1}{3}((1+x)^{3/2} - x^{3/2}).$$

Discretización: Trapezoidal.

Alfa: Parámetro de Regularización.

Número de condición: Número de condición de la matriz resultante de la discretización del problema.

APENDICE A.

Algunas definiciones de topología y el análisis funcional.

A.1 Una norma $\|\cdot\|$ definida en un subconjunto V de un espacio lineal X, es una regla que asigna un número real a elementos $v_1, v_2 \in V$, la cual tiene las siguientes propiedades.

- a) $\|v_i\| \geq 0$; $\|v_i\| = 0$ si $v_i = 0$. (defición positiva)
- b) $\|\alpha v_i\| = |\alpha| \|v_i\|$ (homogeneidad)
- c) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ (desigualdad del triángulo)

A.2 Un producto interno (\cdot, \cdot) definido en un espacio lineal X es una función definida en $X \times X$, sobre los complejos con las siguientes propiedades:

- a) $(x_1 + x_2, x_3) = (x_1, x_3) + (x_2, x_3)$ (bilinealidad)
- b) $(x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$. (simétrico)
- c) $(\alpha x_1, x_2) = \alpha (x_1, x_2)$
- d) $(x_1, x_1) \geq 0$. $(x_1, x_1) \neq 0$ si $x_1 \neq 0$.

$x_1, x_2, x_3 \in X$ (una norma $\|\cdot\|$ será definida por $\|x_i\|^2 = (x_i, x_i)$). Así que los espacios con producto interno, son espacios normados.

A.3 Un espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio lineal X donde se ha definido una norma $\|\cdot\|$.

A.4 Un espacio lineal con producto interno (X, \cdot, \cdot) es un espacio lineal en el cual se ha definido un (\cdot, \cdot) producto interno.

A.5 Una sucesión de Cauchy en un espacio normado X $\|\cdot\|$ es

una sucesión de elementos $\{x_n\} \in X$ con la propiedad de que para cada $\epsilon > 0$, exista $N(\epsilon)$ tal que:

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon \text{ si } n, m \geq N(\epsilon).$$

- A.6 a) Un subconjunto V de un espacio lineal normado X $\|\cdot\|$ se dice que es cerrado si toda sucesión de Cauchy $\{v_n\} \in V$ converge a un elemento contenido en V .
- b) El conjunto cerrado más pequeño que contiene a uno ya dado, V , es la cerradura de V y se denota \bar{V} .
- c) Un espacio normado X $\|\cdot\|$ que es cerrado se dice también que es completo.

A.7 Un espacio lineal, normado y completo se llama espacio de Banach.

A.8 Un espacio lineal, normado y con producto interno se llama espacio de Hilbert.

A.9 Un subconjunto V de un espacio normado X $\|\cdot\|$ se dice que es denso en X si cada elemento $x \in X$ es límite de una sucesión de elementos de V .

A.10 Un operador $K: V \subset X \longrightarrow W \subset Y$ es una regla que asocia un único elemento $w = K(v)$ ó $K(v) \in W$ para cada $v \in V$. El conjunto más grande de X en el cual K está definido se llama el dominio de K y se denota por: $\text{Dom}(K)$. El subconjunto definido por $W = \{y \in Y \mid y = Kv, \text{ con } v \in \text{Dom}(K)\}$ es llamado el rango de K y se denota por $\text{Ran}(K)$ o bien por $\text{Im}(K)$.

- A.11 Un operador es sobre si $\text{Ran}(K) = Y$.
 Un operador es uno-a-uno (inyectivo) si para $v_1, v_2 \in \text{Dom}(K)$ $Kv_1 = Kv_2$ ssi $v_1 = v_2$.
 Un operador K es lineal si para todo $v_1, v_2 \in \text{Dom}(K)$ y para todo escalar α, β , $K(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha K(v_1) + \beta K(v_2)$.
- A.12 Si $K: \text{Dom}(K) \subset X \rightarrow Y$ es uno-a-uno, entonces para cada $w \in \text{Ran}(K)$ existe un sólo elemento $v \in \text{Dom}(K)$; denotado $v = K^{-1}w$. El operador K^{-1} así definido se llama el inverso de K .
- A.13 Una topología en X es una clase T de subconjuntos que satisface:
 a) La unión de cualquier clase de conjuntos de T está en T .
 b) La intersección de cualquier clase finita de conjuntos de T es un conjunto de T .
- A.14 Un conjunto abierto A en un espacio de Banach B $\|\cdot\|$ es un conjunto con la propiedad de que para cada $x \in A$, existe un escalar $\epsilon > 0$ tal que: $\{b \in B \mid \|b-x\| < \epsilon\} \subset A$.
 La clase T de conjuntos abiertos de B $\|\cdot\|$ define la topología de la norma en B $\|\cdot\|$.
- A.15 Un subconjunto V de un espacio de Banach B $\|\cdot\|$ es compacto (en la topología de la norma) si cada clase de conjuntos abiertos cuya unión contiene a V tiene una subclase finita que contiene a V .
- A.16 Un operador lineal $K: X_1 \rightarrow X_2$ donde $X_1, \|\cdot\|_1$ y $X_2, \|\cdot\|_2$ son espacios lineales normados, se dice que es acotado

si existe un número real $M (\geq 0)$ tal que para todo $x \in X$, $\|Kx\| \leq M\|x\|$. El valor más pequeño que cumple con esta propiedad se denomina norma del operador K .

A.17 Un funcional lineal F definido en un espacio lineal X es un operador lineal cuyo rango está contenido en el espacio de los escalares y cuyo dominio está en X . El espacio de los funcionales lineales acotados definidos en el espacio normado X $\|\cdot\|$ se denota por X' .

A.18 Una sucesión $\{x_n\} \subset X$ se dice que converge débilmente a $x \in X$ si para todos los funcionales lineales acotados $F \in X'$, $\|F(x_n) - F(x)\| \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$.

A.19 Un operador lineal $K: X_1 \rightarrow X_2$ donde X_1 $\|\cdot\|$ y X_2 $\|\cdot\|$ son espacios lineales normados, se dice que es compacto (o bien, totalmente continuo) si la imagen KV de cualquier conjunto acotado $V \subset X_1$, tiene una cerradura compacta en X_2 . O bien, que \overline{KV} sea compacto (en la topología de la norma en X_2 $\|\cdot\|$).

A.20 Sea B_1 $\|\cdot\|$ y B_2 $\|\cdot\|$ espacios de Banach y $T: B_1 \rightarrow B_2$ un operador lineal acotado. Definimos el operador adjunto $T': B_2' \rightarrow B_1'$ por $T'F(b)$ para todo $F \in B_2'$; $b \in B_2$.

REFERENCIAS.

- [1] Arsenin V., Tikhonov A.N.
Solution to ill-posed problems. Wiley (1977).
- [2] Bartle G.R.
Introducción al análisis matemático (1987).
- [3] Björck A., Elden L.
Numerical Analysis
- [4] Burden R.L., Faires J.D.
Análisis Numérico (1985)
- [5] Cannon R.J., Perez E. S.
An inverse problem for the heat equation. Inverse Problems.
(1986).
- [6] Chen C. B., Vargas J.C.
Introducción a la teoría y solución de ecuaciones integrales
Coloquio Matemáticas Cinvestav (1987)
- [7] Fritz J.
Numerical Solutions of the equation of the heat conduction
for preceding times, Annali di Matematica p. et appl.(1935)
- [8] Groetsch C.W.
The theory of Tikhonov Regularization for Fredholm equations
of the first kind, Pitman (1984).
- [9] Groetsch, C.W.
Functional Analysis and Applications, Dekker (1985)
- [10] Kolmogorov A.N., Fomin S.V.
Elementos del Análisis Funcional, Mir (1978)
- [11] Lopez E.J.
Principio de Seudo-Optimalidad en la resolución de problemas
mal-planteados por el método de regularización de Tikhonov.
Tesis doctoral de Matemáticas, Fac-Ciencias UNAM (1988).
- [12] Marsden E. J.
Basic complex analysis, Freeman and Company (1973).
- [13] Smirnov V.I.
A course of Higher Mathematics, V-5, Pergamon Press (1964).
- [14] Stevens T.
Numerical Methods for ill-posed, linear problems, Doctoral
thesis. CALTECH. (1975)

- [15] Tikhonov A. N., Goncharky.
Ill-posed problems in the natural Sciences. Mir (1987)
- [16] Tikhonov A.N., Samarsky A.
Ecuaciones de la Física Matemática. Mir (1980)