

03078

1
rej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
INSTITUTO DE GEOFISICA

PROCESOS FISICOS EN EL POLVO DE LOS ANILLOS PLANETARIOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO
DE MAESTRA EN GEOFISICA (ESTUDIOS
ESPACIALES) PRESENTA: MARIA DOLORES
MARAVILLA MEZA.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

NOVIEMBRE DE 1991



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

RESUMEN

CAPITULO 1

INTRODUCCION

CAPITULO 2 : LOS ANILLOS PLANETARIOS

SISTEMA JOVIANO

SISTEMA SATURNINO

SISTEMA URANIANO

SISTEMA NEPTUNIANO

CAPITULO 3: PROCESOS FISICOS EN LOS ANILLOS PLANETARIOS

LA RADIACION SOLAR Y SU INTERACCION CON EL POLVO DE LOS ANILLOS

DISTRIBUCION DE MASA POR COLISIONES

RESONANCIAS GRAVITACIONALES

CAPITULO 4: LA DIVISION DE CASSINI Y OTRAS BRECHAS

CAPITULO 5: CONCLUSIONES

APENDICE 1

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

RESUMEN

En los anillos planetarios se presentan una serie de fenómenos y estructuras que han llevado al estudio de los mecanismos que las producen, para ello se han asociado una serie de procesos físicos que posiblemente estén ocurriendo en los sistemas de anillos y que dan una explicación a la dinámica observada.

Debido a la complejidad de los procesos físicos, se han elegido tres de los procesos más sencillos. Estos procesos tienen que ver con la producción de polvo, con la distribución de éste y con la generación de brechas anulares dentro de los anillos.

El polvo es producido por colisiones y por interacciones luz-materia, éstas últimas desprenden de las superficies de los granos que conforman el material anular, polvo de diámetro variable el cual es distribuido por procesos de transporte en donde juegan un papel preponderante la densidad y la viscosidad del medio.

Por otro lado, en los anillos se han generado una serie de bandas casi vacías dentro de las cuales se localizan anillos muy delgados de polvo muy fino. el origen de estas brechas se ha tratado de explicar con las teorías de resonancias gravitacionales, de pastoreo del material de los anillos por una luneta sumergida en ellos y por la creación y desplazamiento de ondas de densidad y de ondas bending.

Pero aun con esto, sigue la disyuntiva del origen, en virtud de que existen brechas donde no aparece satélite alguno o donde no se

localiza ninguna resonancia, de aquí que haya que profundizar en el estudio de este fenómeno y posiblemente, elaborar una nueva teoría que esté relacionada con fenómenos de tipo electromagnético.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

La era espacial se inicia a fines de los años cincuenta cuando el hombre sale por primera vez al espacio y observa de manera impactante a nuestro planeta. A partir de ese momento crucial, la humanidad no ha dejado de explorar su entorno y para ello ha creado grandes proyectos cuya finalidad ha sido extender el conocimiento científico, destacando en particular el proyecto Viajero destinado principalmente al estudio del Sistema Solar Exterior. Este proyecto se inició en el año de 1977 con el lanzamiento de la sonda Viajero 1 y culminó en el año de 1989 cuando la sonda Viajero 2 abandonó el territorio neptuniano. Ambas sondas descubrieron diversos fenómenos que sólo se aprecian en los planetas jovianos como por ejemplo, las estructuras nubosas producto de la compleja dinámica atmosférica o las interacciones electromagnéticas entre el viento solar y el plasma magnetosférico, o bien, las brechas generadas por interacciones gravitacionales en los anillos planetarios.

Cada uno de los nuevos fenómenos proporciona una fuente muy extensa de estudio que puede relacionarse, según el caso, con la estructura interna planetaria, la atmósfera y su dinámica, la magnetósfera, los sistemas de satélites o los sistemas de anillos. Sobre estos últimos versará el presente trabajo e incluirá algunos de los fenómenos relacionados con su dinámica.

Antes de entrar de lleno al estudio de los anillos, veamos desde el punto de vista histórico como fué que aparecieron en escena.

Los anillos fueron descubiertos en el año de 1610 siendo Galileo el primero en observarlos alrededor del planeta Saturno. En realidad Galileo nunca dijo que la estructura que había descubierto era un anillo de materia ya que lo que él observó a través de su pequeño telescopio fueron dos asas ecuatoriales que no cambiaban su apariencia de un día para otro pero que sin embargo desaparecían. Propuso que así como en la mitología griega, Saturno devoraba a sus hijos, este planeta generaba y destruía constantemente las dos asas. Con esta idea en mente, Galileo jamás

concluyó que las asas eran anillos de materia que se encuentran alrededor del planeta sobre el plano ecuatorial y que la causa de su desaparición está relacionada con su dinámica rotacional.

A la muerte de Galileo, otros astrónomos se dedicaron a descifrar el enigma de las asas proponiendo algunas teorías curiosas como aquella que sugería que eran cuatro satélites, dos brillantes y dos oscuros que rotaban alrededor del cuerpo planetario, o, la que suponía que Saturno emanaba gases que formaban una nube elíptica delgada que rotaba con el planeta. Estas teorías prevalecieron por más de cuarenta años hasta que Huygens (1655) usando un telescopio de mayor resolución que el de Galileo resolvió el problema , por un lado al descubrir a Titán: el satélite más grande de Saturno y por otro, al observar la trayectoria del planeta con respecto a las estrellas fijas. De esto, Huygens propuso que las asas, así como la órbita de Titán estaban inclinadas más de 20° con respecto al plano orbital de Saturno tal como la Tierra lo está con respecto a la eclíptica y la estructura descubierta por Galileo (asas) era un anillo sólido, plano y delgado que no tocaba en punto alguno al planeta.

El hecho de que desaparecieran las asas según Huygens, tenía que ver con la posición de Saturno alrededor del Sol y la inclinación de estos planetas y el anillo respecto a la eclíptica.

Veinte años después de las propuestas de Huygens, Cassini descubrió una línea oscura (División de Cassini) que separa al disco en dos anillos concéntricos los cuales fueron identificados con las letras A y B. Con este descubrimiento se plantearon nuevos problemas: Eran los anillos sólidos?, Cuál era su espesor para que no pudieran ser vistos desde la Tierra ?, Tenían una orilla muy oscura o ésta era altamente reflectora?.

La explicación más simple que se dió en esa época fué que los anillos eran tan tenues que era difícil detectar su orilla cuando estaban de canto a la Tierra y posiblemente los anillos no eran sólidos sino que estaban formados por un enjambre de satélites pequeños que giraban alrededor de Saturno como lo hace la Luna alrededor de la Tierra.

Esta última hipótesis fué expuesta por Laplace (1785) al sostener que no podía existir un disco de materia sólida porque la fuerza de gravedad y la fuerza centrífuga, tienden a destruir toda

estructura rígida. En principio, cualquier partícula del disco, mantiene su distancia radial desde el planeta porque hay dos fuerzas que se equilibran: la gravedad que tira de la partícula hacia adentro y la fuerza centrífuga que la empuja hacia afuera.

En el caso de un disco rígido, las fuerzas se equilibran solamente a cierta distancia radial, por lo que Laplace propuso que los dos anillos hasta ese momento descubiertos estaban formados por muchos anillos delgados. Esta hipótesis fué demostrada matemáticamente por J C Maxwell en el año de 1857 concluyéndose que el único sistema de anillos que podía existir era aquél que estaba compuesto por un número indefinido de partículas girando en órbitas independientes alrededor de Saturno con una velocidad dependiente de la distancia radial.

Para saber que tan rápido se estaban desplazando los pequeños satélites, J Keeler en 1895 empleó la técnica espectroscópica para determinar por efecto Doppler la velocidad orbital. Encontró que era más rápida para cuerpos más cercanos al planeta deduciéndose de esto, que los cuerpos que forman el anillo B se mueven más rápido por encontrarse más cerca de Saturno que los cuerpos del anillo A, que se encuentran más alejados de él.

Con el uso de telescopios con mayor resolución se fueron descubriendo en los anillos A y B nuevas estructuras. En ese tiempo (siglo XIX) se pensaba que la División de Cassini era la única brecha que existía en los anillos y cuya opacidad se debía al hecho de que era un espacio completamente vacío causando un gran revuelo el descubrimiento de una brecha cercana a la orilla externa del anillo A (División de Encke) mucho más delgada que la de Cassini.

Gran parte de los trabajos de esa época se concentraron en encontrar la causa física para producir tales espacios vacíos estableciéndose en 1866 por D Kirkwood que las brechas se producen por efectos gravitacionales entre los satélites de Saturno y el material de los anillos.

Kirkwood dió una explicación asociada con el cinturón de asteroides, el cual es un anillo poblado de rocas que giran alrededor del Sol en una órbita situada entre las órbitas de Marte y Júpiter. En este cinturón también existen brechas que son generadas por la interacción gravitacional de Júpiter y las rocas

que se localizan a una cierta distancia del sol, no olvidando que al igual que las rocas del anillo B giran más rápido que las del anillo A, los asteroides más cercanos al cuerpo solar se mueven más rápido y en órbitas más pequeñas comparadas con aquellos que se localizan más lejos de él.

En principio se pide que exista una sincronización entre la velocidad orbital del asteroide y la de Júpiter tal que ambas coincidan en un mismo punto de su propia órbita después de haber completado un determinado número de rotaciones alrededor del sol. Cada vez que el asteroide pasa por este punto, el planeta induce un empujón gravitacional sobre la roca que puede enviarla a una nueva órbita que será más estable que aquella sobre la que se mueve inicialmente el cuerpo rocoso. Por ejemplo, un asteroide cuyo período de rotación alrededor del sol es $1/2$ del de Júpiter se encontrará en el mismo punto de su órbita, después de dos rotaciones completas cuando el planeta joviano sólo ha dado una. De esta manera, Kirkwood argumentó que tales conmensurabilidades orbitales o resonancias generan las brechas en el cinturón de asteroides manteniéndolas libres de materia porque ellas aparecen donde las rocas tienen períodos orbitales equivalentes con $1/2$, $1/3$, $2/5$ y $3/5$.

En el caso de Saturno, toda partícula dentro de la División de Cassini podría tener un período orbital igual a $1/2$ con respecto al satélite Mimas, de $1/3$ con Encelado, de $1/4$ con Tethys y de $1/6$ con Dione. En particular, la resonancia $2:1$ con Mimas puede generar la inestabilidad de los cuerpos rocosos dentro de la brecha propiciando que se mantenga libre de materia.

La División de Encke también se asoció con los satélites antes mencionados, aunque ahora se sabe que esta brecha es generada por el satélite Atlas, un cuerpo pequeño que pastorea la orilla externa del anillo A. El fenómeno de pastoreo consiste en el confinamiento del material de un anillo por interacciones gravitacionales entre dos satélites dentro de los cuales se sitúa el material anular. Junto con las divisiones de Cassini y Encke, existen en los anillos de Saturno otras brechas de las cuales se hablará en el siguiente capítulo.

Ya en este siglo, se empezaron a hacer conjeturas acerca del espesor de los anillos proponiéndose en 1920 por H Jeffreys que

tales estructuras eran muy tenues y que nunca podría determinarse la magnitud de su espesor. Jeffreys dió una explicación acerca del comportamiento de los cuerpos pequeños que forman el anillo proponiendo que las colisiones entre ellos son inevitables y que cada colisión roba a los cuerpos que chocan, una parte de su energía de movimiento, esta energía es utilizada para deformarlos o calentarlos. Las colisiones pulverizan constantemente las rocas de los anillos llegando a agruparse en tiras de polvo circulares muy densas pero tan delgadas que solamente una cantidad mínima de luz pasa a través de ellas. Sin embargo hubo observadores que sugirieron que se podía ver a través de los anillos y para comprobarlo se recurrió a la ocultación estelar.

La primera observación empleando la ocultación estelar se llevó a cabo en 1917 por M. Ainske y J. Knight al observar el paso de una estrella de 7a magnitud a través de los anillos detectando variaciones en su brillantez cuando ésta pasó detrás del anillo A mientras que no hubo cambios cuando pasó por la División de Cassini.

Posteriormente (1920), se realizaron otras observaciones resultando que la brillantez de la estrella fluctuaba considerablemente cuando se encontraba detrás del anillo B. Con este descubrimiento se incrementaron los estudios astronómicos utilizando las ocultaciones estelares para definir la densidad de los anillos, sobre todo en los años 1939, 1957 y 1960, llegándose a la conclusión de que los anillos no tienen una distribución uniforme de materia sino que existen regiones en donde hay una mayor concentración que en otras permitiéndoles ser más brillantes o más difusos de acuerdo con la cantidad de materia acumulada.

Estas observaciones también llevaron al descubrimiento del anillo C, de las brechas de los anillos A, B y C y de los anillos de Urano.

Cada anillo refleja una cierta cantidad de la luz que recibe del sol en función de la cantidad de materia que lo forma, pero de qué está compuesta y de qué tamaño son los cuerpos rocosos?

Para resolver esta incógnita se inició una nueva etapa de observaciones usando fotómetros con los cuales se observó a los anillos en diferentes longitudes de onda encontrándose que en luz visible, los anillos se ven brillantes y altamente reflectores

mientras que en el infrarrojo, aparecen oscuros y mínimamente reflectores deduciéndose por lo consiguiente que ellos están formados de hielo. De qué tipo? Como para entonces ya se sabía que Saturno es un cuerpo gaseoso formado en parte por amoníaco y metano, Kuiper propuso en 1969 que los cuerpos de los anillos estaban constituidos de amoníaco congelado, sin embargo un año más tarde, C. Pitcher estudiando el espectro de absorción de los anillos en el infrarrojo, detectó que éste se parecía al de la escarcha de hielo de agua salvo por un delicado tinte rojizo, proponiendo que el material de los anillos es hielo de agua combinado con alguna sustancia contaminante.

El tamaño de los cuerpos que forman los anillos fué determinado a través de estudios de radar, identificándose rocas desde pocos centímetros hasta algunos metros de diámetro, con la única diferencia de que cada anillo posee material cuyo diámetro se encuentra en un cierto rango pues en el anillo C, las rocas son de tamaño métrico; en el anillo B, la población es de tamaño centimétrico y el anillo A está poblado por cuerpos centimétricos y pocos de tamaño métrico, constituyendo los últimos los cuerpos llamados efímeros que describiremos en el capítulo 2.

El por qué de esta distribución aún está en disputa aceptándose en general que el material se distribuye de acuerdo con una ley potencial en tanto que la densidad de los anillos puede ser explicada con el modelo del mono-nivel según el cual, todo el material se encuentra concentrado en una sola capa que es acorde con el tamaño de las partículas detectadas, con la brillantez de los anillos y con la variación de ésta detectada de las estrellas que participan en las ocultaciones estelares.

En las dos últimas décadas se descubrió que no solo Saturno posee anillos, también los hay en Júpiter, Urano y Neptuno. En cada sistema se presentan características bien definidas que los diferencian de los demás aunque en términos generales tienen la misma dinámica.

La exploración espacial descifró muchos de los enigmas del sistema solar exterior, pero con ello surgieron otros que aún no tienen respuesta. En el caso de los anillos planetarios, existen problemas para entender los trenzados y torcidos que se presentan en algunos anillos de Urano y en el anillo F de Saturno, el origen

de algunos anillos de polvo, la carencia de polvo prácticamente en los anillos de Urano, los anillos incompletos de Neptuno, la existencia de los satélites pastores de Júpiter, Saturno y Urano, la existencia de brechas en Saturno y posiblemente en Urano que no han podido asociarse con algún satélite, la dinámica del halo del anillo joviano, el tipo de material que forman los anillos de Urano, la influencia de la radiación solar sobre el polvo de los anillos, etc.

Resolver todas estas interrogantes requiere de un gran trabajo de investigación eligiéndose por lo tanto algunos tópicos de interés, en base a esto, la estructura de esta tesis es la siguiente:

En el capítulo 2 se presentan las características de cada sistema de anillos planetarios así como las teorías relacionadas con su origen.

El capítulo 3 describe algunos procesos físicos en los que participa el polvo de estas estructuras.

Cómo se forman las bandas es un problema que se analiza en el capítulo 4.

Para finalizar, en el capítulo 5 aparecen las conclusiones de este trabajo.

CAPITULO 2

ESTRUCTURA Y ORIGEN DE LOS ANILLOS PLANETARIOS

La gran diversidad de fenómenos que pueden apreciarse en cada sistema de anillos es tan compleja que ha sido muy difícil establecer el origen y la evolución que han experimentado. En muchos casos inclusive, es imposible englobar a todos los sistemas dadas las grandes diferencias que existen en su estructura y su tamaño.

Los anillos están formados principalmente por rocas y polvo en los planetas Júpiter, Saturno y Neptuno y solo de rocas en Urano.

El diámetro de las rocas está comprendido en un rango que abarca de los centímetros hasta los metros, en tanto el polvo tiene un diámetro micrométrico y debido a esto su dinámica está influenciada por las fuerzas electromagnéticas porque está cargado electrostáticamente. El polvo se encuentra en casi todos los sistemas de anillos siendo el constituyente principal del anillo joviano, de los anillos etéreos de Saturno y de los anillos de Neptuno. Posiblemente en los anillos de Urano sólo sea un constituyente secundario tal y como lo es en el anillo B de Saturno.

El polvo participa en diversos fenómenos que repercuten en la formación de estructuras tales como torcidos, trenzados, ondulados, generación y evolución de spokes, modificación de órbitas alrededor de los cuerpos planetarios, etc. Todo esto contribuye a considerar al polvo como un tema de interés particular dentro de los procesos físicos que se producen en los anillos planetarios (como veremos en el Capítulo 3).

Desde el punto de vista global, para estudiar a los anillos se han especificado las características que describen tanto su estructura física como aquellas que aportan datos acerca de la composición química del material que los forma. las primeras se conocen como características generales y las segundas son llamadas características ópticas (Burns 1984, Esposito et al 1984, Cuzzi et al 1984).

CARACTERISTICAS GENERALES

- 1.- Los anillos planetarios están situados aproximadamente en el plano ecuatorial planetario.
- 2.- Están dentro del límite de Roche.
- 3.- Tienen un determinado número de satélites pequeños cerca o dentro de ellos.
- 4.- Los satélites pueden generar la formación de bandas en los anillos.
- 5.- El material de los anillos está formado de hielo de agua, metano o amoníaco.
- 6.- Están compuestos de miríadas de rocas de hielo y polvo moviéndose en órbitas independientes.

CARACTERISTICAS OPTICAS

1.- PROFUNDIDAD OPTICA

Con ella se determina la cantidad de luz que penetra una capa. Matemáticamente se expresa como (adimensional):

$$\tau(r, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(r, z) Q_{ext}(r, \lambda) \pi r^2 dr dz ,$$

donde z es la dirección perpendicular a los anillos,
 $n(r, z)$ es el número de partículas por cm^3 con radio r ,
 $Q_{ext}(r, \lambda)$ es la eficiencia de extinción de la luz en longitud de onda λ (Apéndice 1):

$$Q_{ext} = C_{ext} / \pi r^2 ,$$

con $C_{ext} = C(dis) + C(abs)$.

C_{ext} = sección transversal de una partícula para extinción,

$C(dis)$ = sección transversal de una partícula para dispersión,

$C(abs)$ = sección transversal de una partícula para absorción.

2.-DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA (g/cm²)

$$\sigma = \int n(r,z) 4\pi r^3 dr dz$$

con ρ la densidad del grano.

3.-COEFICIENTE DE EXTINCION DE MASA

$$k = \tau/\sigma$$

donde τ es la profundidad óptica y σ es la densidad superficial de masa.

MASA TOTAL DE LOS ANILLOS (Ma)(Esposito et al 1984, Cuzzi et al 1984). En el caso del sistema saturnino, la masa de los anillos es aproximadamente $3 \times 10^{-8} M_s$ donde M_s es la masa de Saturno.

TAMAÑO TÍPICO DE LAS PARTICULAS (s)

Se define para cada anillo planetario un tamaño típico de partículas, así por ejemplo en los anillos de Saturno, el tamaño típico de las partículas en el sistema clásico es centimétrico en tanto que en el sistema etéreo es micrométrico.

ALBEDO (A): Cantidad o fracción de luz reflejada por una superficie.

La estructura de cada sistema se describe a continuación así como las teorías relacionadas con su posible origen.

2.1 SISTEMA JOVIANO

El anillo joviano fué descubierto por los detectores de partículas energéticas del Viajero I cuando encontraron una región carente de ellas. De los cuatro sistemas de anillos, el joviano es el menos extenso y el más tenue imposibilitando su observación

desde la Tierra.

En base a las características ópticas del anillo y en particular a su baja profundidad óptica $\tau(z)$, su estructura aún está en disputa. Según Jewitt et al (1981), el sistema está formado por tres estructuras formadas por granos de polvo (Fig.2.1.1), (Tabla 2.1.1) : anillo brillante, disco tenue y halo. El material del disco se extiende hasta las nubes tope de la atmósfera planetaria.

En este modelo, el halo presenta una simetría alentejada donde el polvo está distribuido hasta 10^4 km por arriba y abajo del plano ecuatorial planetario en tanto que el anillo brillante está confinado por los satélites Metis y Adrastea que pastorean al polvo de esta estructura (Cuzzi et al 1984).

El fenómeno denominado pastoreo se produce cuando el material de un anillo queda confinado en un cierto espesor por la interacción gravitacional que se produce entre dos satélites.

Por otro lado, Showalter y Burns (1984, 1987) han propuesto un modelo del anillo joviano en base a las medidas espectroscópicas realizadas por los Viajero, este modelo propone una estructura de dos componentes: anillo brillante y halo (fig. 2.1.2).

El anillo está situado dentro de los mismos límites que el modelo de Jewitt et al pero el halo forma un toro de granos de polvo que se localiza dentro del borde interno del anillo.

En ambos modelos reside la problemática del origen de los granos de polvo que forman las estructuras propuestas y se sugiere que el polvo proviene de las erupciones volcánicas del satélite Io y de las colisiones que se presentan entre las partículas volcánicas y los micrometeoritos que arriban del espacio exterior suponiendo que la distribución del polvo obedece a las fuerzas electromagnéticas inducidas en gran escala por la poderosa magnetósfera joviana y la rotación planetaria.

Otra explicación que se ha dado para afirmar que el anillo está formado por polvo proveniente de Io es el hecho de que su máxima densidad se localiza en las inmediaciones de este satélite. Al mismo tiempo, el material está siendo confinado por el fenómeno de pastoreo del satélite Adrastea, un satélite pequeño que se encuentra en la orilla externa (Showalter et al 1987) y el satélite Metis localizado en la orilla interna del anillo.

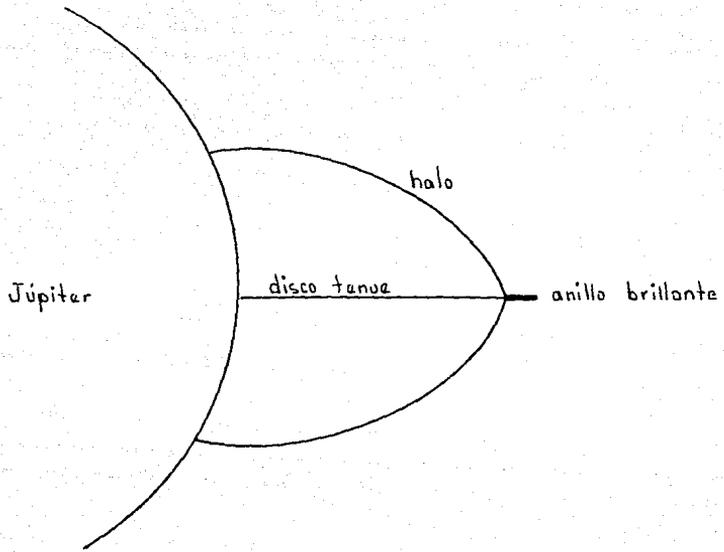


Fig.2.1.1 El anillo joviano de acuerdo con el modelo de Jewitt y Danielson.

TABLA 2.1
 CARACTERISTICAS DEL ANILLO JOVIANO

	ANILLO BRILLANTE	HALO
ancho	1.72 - 1.81 R_j	1.3 - 1.7 R_j
espesor	≤ 30 Km	2×10^4 Km
trayectoria óptica	5×10^{-5}	7×10^{-6}
tamaño de los granos	micrométricos	submicrométricos?
satélites asociados	Adrastea ($1.8064 R_j$) Metis ($1.7922 R_j$)	
descubridor	Viajero	Viajero

$1 R_j = 71\,398$ Km

(Cuzzi et al 1984, Burns et al 1984)

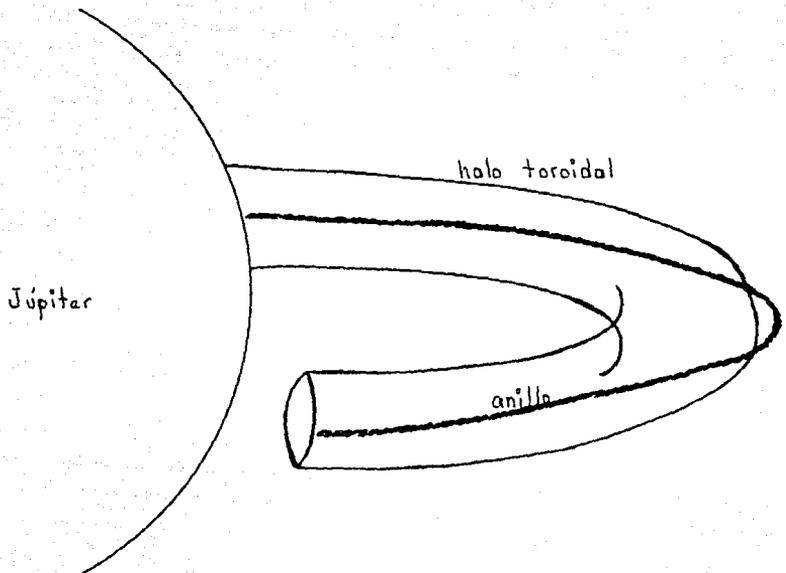


Fig. 2.1.2 El anillo joviano según el modelo de Showalter y Burns mostrando las dos componentes: anillo brillante y halo toroidal.

2.2 SISTEMA SATURNINO

Este sistema es el más espectacular, extenso y masivo de los cuatro sistemas de anillos.

Su estructura se debe a una gran variedad de procesos generados por interacciones de tipo gravitacional y electromagnético que producen diversos fenómenos que hacen del sistema algo único.

Saturno cuenta con siete anillos clasificados en dos grupos: anillos clásicos y anillos etéreos. El grupo clásico posee la mayor parte de la masa total del sistema y está formado por los cuatro anillos más cercanos al planeta que se han bautizado con letras A, B, C y D en base al orden de su descubrimiento. Cada uno de estos anillos tiene las siguientes características particulares (fig.2.2.1)(tabla 2.2.1)(Esposito 1984, Burns 1984, Cuzzi 1984):

ANILLO A: Está formado básicamente por rocas centimétricas y algunas métricas que dan origen a los llamados cuerpos efímeros, es decir, cuerpos cuyo período de vida es de días a pocas semanas. En este anillo no existen rasgos sobresalientes y solo presenta una serie de bandas estrechas muy cercanas a su borde externo (División de Keeler y División de Encke) escasamente pobladas por polvo muy fino.

ANILLO B: Esta estructura se ha diferenciado del resto de los anillos porque es la más brillante del sistema y en ella se presentan fenómenos y estructuras que no aparecen en ningún otro anillo planetario . Está poblado por rocas centimétricas y polvo de un gran albedo entre 0.45 y 1.0.

En este anillo, las estructuras que más han llamado la atención son los SPOKES desde que se descubrieron en 1981. los spokes son estructuras casi radiales con formá acuñada que se aprecian como "marcas de dedos" sobre el anillo. Esposito et al (1984) han determinado las características más importantes para ellos siendo las siguientes:

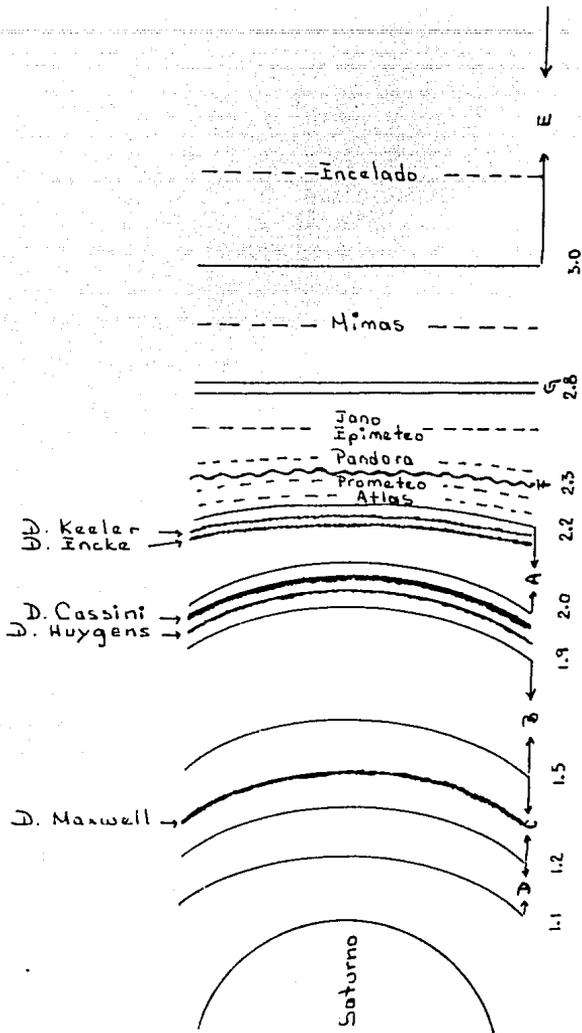


Fig. 2.2.1 Sistema saturnino representando el sistema clásico y el sistema etéreo (Esposito et al 1984, Cuzzi et al 1984).

- a) Contienen una gran cantidad de polvo
- b) Tienen un largo típico de 10000 a 20000 km y un ancho de 2000Km a 5000 Km.
- c) Se localizan en la región del anillo donde el período rotacional de los granos es igual al período de rotación del campo magnético.
- d) Se mueven con una velocidad de rotación kepleriana.
- e) Están inclinados sobre el anillo.
- f) Se mueven más rápido por la mañana (la parte del anillo que emerge inmediatamente después de la sombra de Saturno)

ANILLO C: Se localiza inmediatamente después del anillo B y está poblado por rocas métricas. La estructura del anillo presenta bandas discretas regularmente espaciadas y de brillo uniforme (Burns et al 1984) entre las que se identifican huecos bien definidos que poseen un ancho radial entre 50 y 350 km (Esposito et al 1984), algunos de estos huecos están vacíos mientras que otros contienen anillos muy delgados de bordes muy bien definidos y opacos, la mayoría de estos anillos no son circulares y su ancho radial es variable. En esta estructura se localiza la División de Maxwell.

ANILLO D: Es el anillo más interno del sistema clásico, se localiza junto al anillo C y entre ambos no existe alguna división apreciable identificándose solamente por un cambio en la densidad. Su brillantez es aproximadamente cien veces menor que la del anillo C y el material que lo forma se extiende hasta la atmósfera planetaria.

DIVISION DE CASSINI: Lejos de ser una región vacía como se pensaba desde su descubrimiento, en ella se encuentran una serie de anillos delgados que describen órbitas no circulares y cuyo albedo es igual a 0.3. La morfología de esta estructura es tratada en el capítulo 4.

SISTEMA ETEREO

Al grupo etéreo lo integra tres anillos (E, F y G) que están formados prácticamente de polvo y por lo consiguiente su dinámica está influenciada enormemente por fuerzas electromagnéticas. Los anillos E y F ya se conocían antes de los vuelos espaciales y sólo

el anillo G se descubrió durante ellos (Tablas 2.2.1 y 2.2.2).

ANILLO E: Está formado por granos de polvo de 1.0 a 1.25 μm que provienen posiblemente de Encelado (Baum et al 1981) distribuidos en una extensión vertical comprendida entre 10 Km a 3 R_S .

Una característica predominante de este anillo es que no es simétrico alrededor del planeta pues se extiende hasta 9 R_S del lado noche y 6 R_S del lado día (Burns et al 1984).

ANILLO F: La estructura del anillo F ha sido su punto de atracción desde que se descubrió en 1979. Este anillo se encuentra situado a sólo 4000 Km del anillo A y está confinado por dos satélites (lunas pastoras) que bajo interacciones gravitacionales mantienen al material del anillo dentro de un cierto espesor.

El anillo está formado por tres hilos torcidos y trenzados que tienen un ancho aproximado entre 20 y 30 km; el hilo más interno es mucho más delgado y torcido que los otros dos.

El fenómeno de trenzado se ha tratado de explicar asociándolo con resonancias ocasionadas por las lunas pastoras (Burns et al 1984) aunque se ha sugerido (Smith et al 1982) que la morfología torcida se debe al movimiento de grandes rocas dentro del anillo que podrían estar generando un futuro satélite.

ANILLO G: Tiene un ancho radial de 2 000 km, los granos que lo forman son muy pequeños (0.3 a 10 μm) y no se localiza ningún satélite en su vecindad. La información que se tiene de este anillo es muy escasa quedando muchas preguntas por resolver entre las que se encuentran el origen y la evolución del polvo.

Dentro de la teorías que han surgido para explicar el origen de los anillos saturninos, las más importantes son:

- 1.- Los anillos de Saturno son materia remanente del sistema solar primitivo que no se agregó a ningún cuerpo (Esposito et al 1984).
- 2.- El material que forma los anillos solo es el remanente de grandes satélites destruidos por bombardeo de meteoritos (Pollack et al 1982).
- 3.- Los satélites se destruyeron y se formaron varias veces y quizás el material que ya no se agregó a ningún satélite formó los

TABLA 2.2.1
NOMENCLATURA Y DIMENSIONES DE LOS ANILLOS DE SATURNO

REGION	FRONTERAS		FRECUENCIA ORBITAL	MASA M_S	DESCUBRIDOR
	R_S	Km			
	1.1	66 970	3.554		
<u>D</u>	1.235	74 510	3.028	?	Viajero
<u>C</u>	1.525	92 000	2.009	2×10^{-9}	Bond
<u>B</u>	1.949	117 590	1.528	5×10^{-8}	Galileo
<u>D.C.</u>	2.025	122 170	1.442	1×10^{-9}	Cassini
<u>A</u>	2.267	136 780	1.218	1.1×10^{-8}	Cassini
ATLAS	2.282	137 670	1.208	1.47×10^{-11}	
PROMETEO	2.310	139 350	1.186	1.03×10^{-9}	
F	2.324	140 180	1.176	?	Pionero
PANDORA	2.349	141 170	1.157	6.38×10^{10}	
EPIMETEO	2.510	151 420	1.047	1.55×10^{-9}	
JANO	2.511	151 470	1.047	6.48×10^{-9}	
G	2.82	170 000	0.878	$(1-4) \times 10^{-17}$	Pionero
MIMAS	3.075	185 540	0.772	6.60×10^{-8}	
	3.0	181 000	0.8		
ENCELADO	3.946	238 000	0.531	1.4×10^{-7}	
<u>E</u>	8.0	483 000	0.2		Feibelman

$1 R_S = 60\,330 \text{ Km}$

$1 M_S = 5.685 \times 10^{29} \text{ g}$

(Cuzzi et al, 1984)

TABLA 2.2.2
 CARACTERISTICAS Y RASGOS DE LOS ANILLOS DE SATURNO

ANILLO	τ	TAMAÑO DE PARTICULAS	ALBEDO	RASGOS
A	0.3 - 0.5	1 cm a 1 m	0.5 a 1.0	a) bandas estrechas en el borde externo. b) brechas de Keeler y Encke
B	1.21-1.84	μm - cm	0.45 a 1.0	a) Spokes
C	1.0	1 m	0.25 a 1.0	a) Bandas discretas con anillos delgados.
D	0.01	?	0.01	
DIVISION CASSINI	0.12	μm	0.3	a) Contiene - aprox.100 anillos delgados.
SISTEMA ETereo				
E	4×10^{-7}	1 a 1.25 μm	?	a) Densidad - máxima del anillo en la órbita de Encelado
F	0.1 - 0.5	μm	?	a) Formado por tres estructuras en forma hilos trenzados. b) Asociación con las lunas pastoras.
G	10^{-4} - 10^{-5}	0.3 - 10 μm	?	?

(Burns 1981, Cuzzi et al 1984, Esposito et al 1984, Burns et al 1984, Baum et al 1981, Smith et al 1982)

anillos; esta teoría está avalada por la variación de las propiedades ópticas de los cuerpos y el polvo que forman estas estructuras.

2.3 SISTEMA URANIANO

El sistema de anillos de Urano es un sistema muy complejo. Posiblemente su masa total sea mucho menor que la masa que se encuentra en las brechas parcialmente vacías del sistema clásico saturnino (Elliot y Nicholson, 1984; Burgess, 1989; Esposito et al, 1984).

El conjunto está formado por catorce anillos que difieren en estructura, brillantez y espesor (Tabla 2.3.1). El material que lo forma es extremadamente difuso y abarca diámetros comprendidos entre 3 cm y 1 m. (Fig.2.3.1).

Las ocultaciones estelares revelaron la existencia de muchos anillos delgados y así como en Júpiter y Saturno, el anillo más interno se extiende hasta las nubes tope de la atmósfera. Es muy posible que exista una nube de polvo localizada en el plano de los anillos extendiéndose cientos de kilómetros por arriba y abajo de él. Sin embargo, los Viajero no detectaron grandes concentraciones de polvo, considerando que el sistema prácticamente carece de éste.

Del conjunto de anillos, el Delta exhibe tres componentes, el Alfa cuenta con dos gruesas y una delgada y brillante, el Beta posee dos componentes. Los anillos 4, 5, 6 y Gamma son muy delgados y con excepción del anillo Eta, todos describen órbitas no circulares siendo el 5 y el Epsilon los que tienen una mayor excentricidad (Millis y Wasserman, 1989).

Los anillos Eta, Gamma y Epsilon se localizan en el plano ecuatorial planetario mientras que el resto están inclinados hasta 0.1° con respecto a este plano.

Un descubrimiento muy interesante realizado en los anillos de Urano fué la presencia de arcos de anillos detectados no solamente dentro del sistema sino también tras el anillo Epsilon.

La característica más importante del sistema uraniano es la

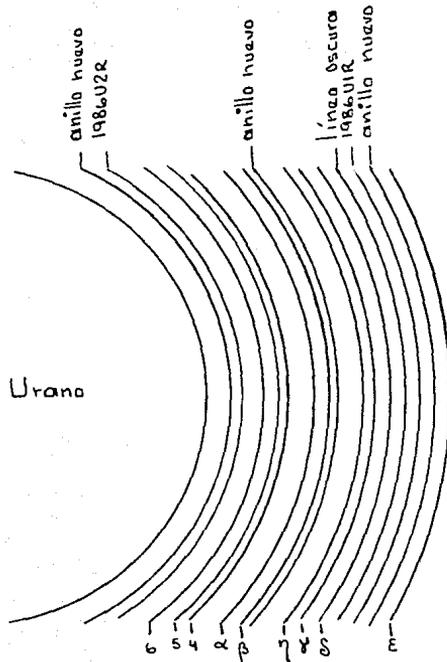


Fig. 2.3.1 Los anillos de Urano (Burgess 1989)

diferencia de color comparada con los anillos jovianos y saturninos. El color de los anillos uranianos es extremadamente triste porque presentan un tinte grisáceo. Cuzzi y Esposito (1984) han dado una explicación al color de las componentes rocosas proponiendo que sus superficies eran ricas en metano pero el bombardeo por los electrones de los cinturones de radiación, arrancó átomos de hidrógeno y formó compuestos oscuros de carbono.

Estos mismos investigadores posteriormente dieron otra explicación sugiriendo que los anillos son una prueba del material primitivo del tipo de las condritas carbonáceas que tienen grandes cantidades de carbono, minerales opacos y material orgánico oscuro, o en último caso, los anillos pueden ser un conglomerado que proviene de la materia atmosférica que fué procesada durante un impacto sobre Urano con un cuerpo tan grande como la Tierra.

Relacionada con la última hipótesis, Burgess (1989) considera que los anillos de este planeta son relativamente jóvenes debido a que son inhomogéneos y carecen de polvo. Burgess sugiere que los anillos probablemente fueron creados en una colisión entre un asteroide o un cometa y un satélite, rompiéndose la luna en muchos fragmentos que a su vez se destruyeron en porciones más pequeñas por colisiones. La carencia de polvo de acuerdo con esta teoría se debe a que los granos sufren un arrastre fuera de su órbita causado

por la atmósfera planetaria o por otras fuerzas que gradualmente producirán la desaparición de los anillos de Urano.

Otras dos cuestiones importantes de estos anillos se plantean al observar por un lado que existen dos satélites pequeños que pastorean al anillo Epsilon (1987U7 y 1987U8) cada uno de los cuales podría generar brechas que no han sido observadas, y por el otro, que dentro de los anillos existe un centro dispersor formado probablemente por un grupo de cuerpos o una estructura orientada radialmente dentro del anillo.

En la tabla 2.3.1 se observa que aparece una componente adicional denominada "línea oscura", esta estructura posiblemente forma parte de los anillos Lambda o Delta y su origen probablemente se relaciona con resonancias gravitacionales entre el satélite descubierto dentro de ella y el material del anillo.

TABLA 2.3.1

LOS ANILLOS DE URANO

NOMBRE	DIAMETRO (Km)	ANCHO (Km)	τ	RASGOS
EPSILON	51 188	20 - 95	? - 1.2	2 componentes
ANILLO NUEVO	660	16	---	-----
LAMBDA	50 040	38	---	arcos
LINEA OSCURA	49 700	--	---	satélite
DELTA	48 310	7	1.5	3 componentes
GAMMA	47 660	2	1.5	-----
ETA	47 200	3	0.6	2 componentes
ANILLO NUEVO	45 736	2	---	muy tenue
BETA	45 700	5 - 12	1.5- 0.35	3 componentes
ALFA	44 758	5 - 12	1.4 - 0.7	4 componentes
4	42 610	3	0.8	-----
5	42 275	3	1.0	-----
6	41 877	3	0.5	-----
7	39 800	2500	---	muy difuso
ANILLO NUEVO	38 280	1	---	-----

τ - profundidad óptica

(Esposito, 1984; Burgess, 1989)

2.4 SISTEMA NEPTUNIANO

El sistema de anillos de Neptuno consta de dos anillos delgados 1989N1R (N63) y 1989N2R (N53) localizados a una distancia radial de 62 900 km y 53 200 Km respectivamente; dos anillos anchos: 1989N3R (N42) situado a 41 900 km y 1989N4R a 59 000 km y una hoja de polvo extendida hasta la atmósfera planetaria.

De los cuatro anillos, el N63 está formado por tres arcos que permanecen al igual que los otros, en el plano ecuatorial planetario (Fig.2.4.1). Los arcos tienen una longitud de 33° con respecto al centro de Neptuno.

Para explicar la existencia de estas estructuras incompletas se han planteado diversas teorías entre las que sobresale aquella que plantea que los anillos han sido creados recientemente por impacto meteorítico con pequeños satélites y la materia eyectada se encuentra en una etapa de redistribución alrededor del planeta (Burgess 1989).

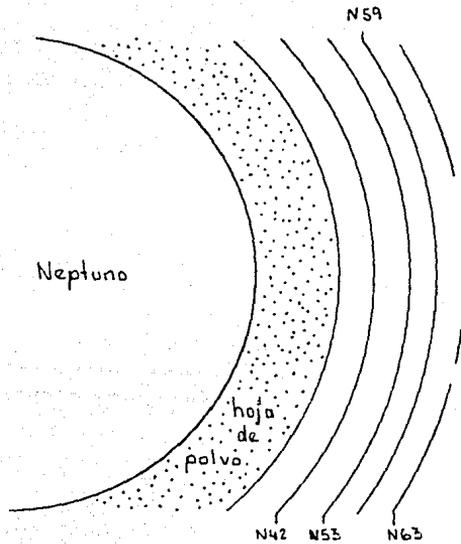


Fig. 2.4.1 Los anillos de Neptuno mostrando los arcos del anillo N63 (Burgess 1989, Cuzzi et al 1984)

CAPITULO 3

PROCESOS FISICOS EN LOS ANILLOS PLANETARIOS

El estudio de la dinámica de los anillos planetarios se inició desde que Maxwell demostró matemáticamente que estas estructuras están formadas por incontables cuerpos rocosos que se desplazan en órbitas independientes. Cada uno de ellos de acuerdo a su tamaño participa en una serie de procesos físicos que repercuten en la morfología del sistema completo sobre todo, los cuerpos micrométricos que intervienen en fenómenos de naturaleza electromagnética generando estructuras tan complejas que no han sido comprendidas del todo.

Estudiar la dinámica de los anillos involucra encontrar una explicación a la generación de brechas por resonancias gravitacionales (como la de Cassini), a la distribución de materia por procesos colisionales (transferencia de momento), erosión de las superficies por interacción con la radiación solar, producción de SPOKES (en el anillo B de Saturno), producción de ondas bending y de densidad, etc. En menor o mayor escala, todos estos fenómenos repercuten en la estructura de cada sistema definiendo su espesor, su densidad y probablemente su número de anillos.

En particular, las resonancias gravitacionales contribuyen a la creación de grandes espacios semivacíos mientras que las colisiones y las interacciones con la radiación solar forman constantemente material de diámetro micrométrico que puede recrecer y volver a ser destruido por colisiones.

Una gran diferencia en los anillos es el diámetro de las componentes rocosas y por consiguiente, la cantidad de polvo que forma parte de ellos. El polvo se ve principalmente influenciado por fuerzas electromagnéticas producto de interacciones con la magnetósfera y el viento solar más que con la fuerza gravitacional aunque esto no signifique que ésta no sea importante porque uno de los procesos que se estudiarán aquí y en donde ella participa es el de las resonancias gravitacionales que

se producen entre el planeta, algún satélite y el polvo del medio ambiente.

La dinámica del polvo está condicionada por diversos mecanismos que se han estudiado de manera aislada pero que en conjunto proporcionan una explicación de la morfología de los anillos de aquí que se han elegido los tres procesos físicos más importantes relacionados con la modificación de los parámetros orbitales de las órbitas que describen los granos de polvo (radiación solar), con la distribución de masa (colisiones) y con la creación de bandas (resonancias gravitacionales).

3.1 LA RADIACION SOLAR Y SU INTERACCION CON EL POLVO DE LOS ANILLOS

La radiación solar que interacciona con el polvo erosiona de manera permanente su superficie, arrancando átomos y moléculas que reducen la cantidad de masa que los forma, y modifica los parámetros de su órbita porque les induce un arrastre dinámico. Para comprender cómo o bajo qué condiciones se produce esta interacción se realiza un análisis considerando un sólo grano para el cual se establecen las ecuaciones de energía y momento. Con estas ecuaciones se determinan las expresiones para los parámetros orbitales introduciendo en ellas una fuerza perturbadora (la fuerza de radiación), que proporcionará las ecuaciones de perturbación para los parámetros orbitales.

Cada uno de los granos de polvo describe una órbita elíptica alrededor del planeta con seis parámetros orbitales (*excentricidad e , semieje mayor a , longitud del nodo ascendente Ω , longitud del pericentro ω , período τ , inclinación i*)(Figs. 3.1.1 y 3.1.2). Estos parámetros permanecen constantes a menos que una fuerza perturbadora los modifique en mayor o menor grado. Los parámetros orbitales de acuerdo con Burns (1976, 1979) pueden expresarse en términos de la energía y el momento angular de un cuerpo de masa m que se mueve en una trayectoria elíptica

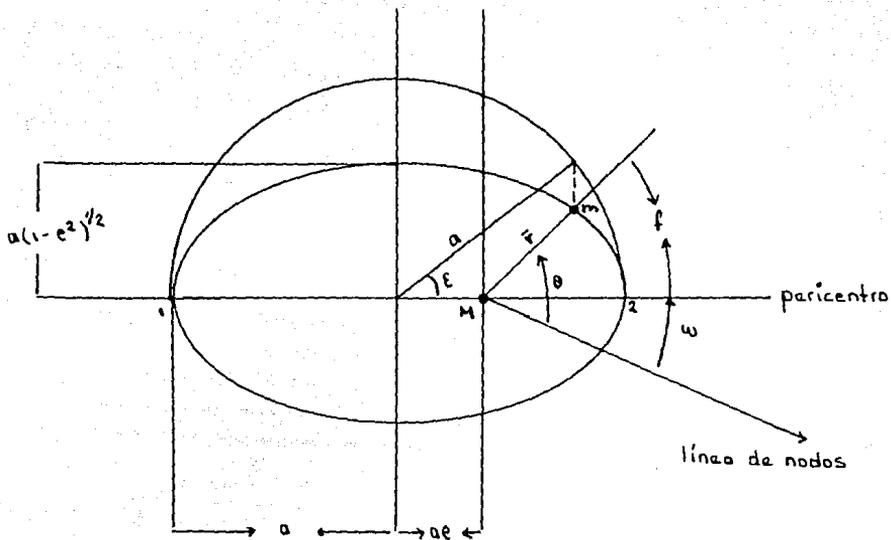


fig.3.1.1 Diagrama del plano orbital para una órbita elíptica mostrando la excentricidad e , el semieje mayor a , la longitud del pericentro ω , la anomalía verdadera f , la anomalía excéntrica ϵ (Burns, 1976)

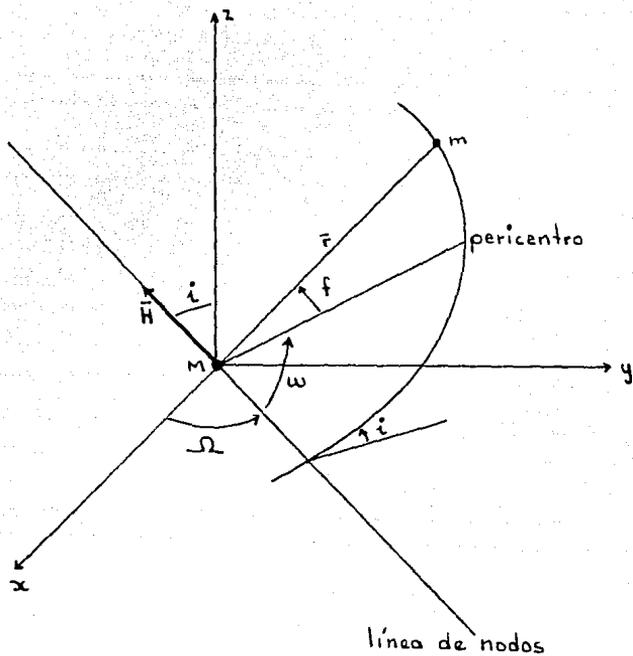


fig.3.1.2 Orbita tridimensional mostrando el vector momento angular H así como los parámetros orbitales Ω y ω (Burns 1979).

alrededor de un cuerpo masivo M , si el semieje mayor de la órbita es a , entonces la energía y el momento se definen a través de las siguientes relaciones :

$$E = - GMm/2a, \quad 3.1.1$$

con G la constante de la gravitación universal y

$$H = m [GMa (1-e^2)]^{1/2}, \quad 3.1.2$$

donde e es la excentricidad de la elipse. E representa la energía y H el momento angular.

Con estas dos ecuaciones son obtenidos cuatro de los seis parámetros orbitales (e, i, a, Ω).

De la ecuación 3.1.1 se obtiene una expresión para el semieje mayor en términos de la energía:

$$a = - GMm / 2E. \quad 3.1.3$$

Sustituyendo la ec. 3.1.2 en 3.1.1 y reordenando términos encontramos la ecuación para la excentricidad :

$$e = [(1 + 2H^2/E) / (G^2 M^2 m^3)]^{1/2} \quad 3.1.4$$

Para encontrar las expresiones para la inclinación i y el nodo ascendente Ω se toman las componentes del vector momento angular H . A partir de la fig. 3.1.2 se define:

$$\cos i = H_z / H. \quad 3.1.5$$

La proyección de H sobre el plano $x-y$ es normal a la línea de los nodos, de donde la longitud del nodo ascendente está dada por:

$$\tan \Omega = - H_x / H_y. \quad 3.1.6$$

donde H_x , H_y y H_z son las componentes de H .

Estos cuatro parámetros junto con el argumento del pericentro ω y el período τ describen completamente la órbita elíptica seguida por cada grano de polvo durante un tiempo indefinido. Esta órbita solo se verá modificada cuando el grano sea afectado por una fuerza perturbadora que puede ser originada por un cuerpo cercano, por bombardeo magnetosférico, por flujo de radiación solar o por algún otro tipo de interacción.

La fuerza perturbadora F_p puede ser expresada como la suma de las tres componentes ortogonales $R\hat{e}_R$, $T\hat{e}_T$ y $N\hat{e}_N$ (radial, tangencial y normal):

$$F_p = R\hat{e}_R + T\hat{e}_T + N\hat{e}_N \quad 3.1.7$$

que son introducidas en las ecuaciones dadas para los parámetros orbitales y de esta forma se puede obtener las ecuaciones de perturbación que proporcionan las variaciones temporales de tales parámetros.

La primera ecuación de perturbación describe la variación del semieje como función del tiempo. Esta ecuación se obtiene al derivar la ec. 3.1.1. con respecto al tiempo:

$$da / dt = (2a^{-2} \frac{dE}{dt}) / (GMm). \quad 3.1.8$$

Esta ecuación nos da la variación de el semieje mayor en términos de la disipación de energía, de aquí que la órbita de cada grano vea reducido su semieje mayor.

Para expresar la ec. 3.1.8 en términos de la fuerza perturbadora se recurre al teorema del Trabajo-Energía según el cual el cambio en la energía equivale al trabajo realizado sobre el cuerpo por la fuerza perturbadora, es decir:

$$dE / dt = \dot{r} \cdot F_p = \dot{r}R + r\dot{T} . \quad 3.1.9$$

En este caso la componente normal no aparece porque el movimiento permanece en el plano orbital.

En la ec. 3.1.9, las componentes radial y angular son expresadas como:

$$\dot{r} = H/p e \operatorname{sen} f, \quad 3.1.10$$

$$r\dot{\theta} = H/p (1 + e \cos f), \quad 3.1.11$$

donde f es la anomalía verdadera ($f = \theta - \omega$) (Burns, 1976, 1979) y p el momento lineal definido por:

$$p = H^2 / \mu = a (1 - e^2), \quad 3.1.12$$

con μ , la masa reducida ($\mu = Mm / (M+m)$).

Sustituyendo 3.1.10 y 3.1.11 en 3.1.9 y el resultado en 3.1.8 se llega a:

$$da / dt = (2\mu^{1/2} a^{3/2}) / (1 - e^2)^{1/2} [R e \operatorname{sen} f + T (1 + e \operatorname{sen} f)]. \quad 3.1.12$$

De 3.1.12 se concluye que las únicas fuerzas que pueden cambiar el tamaño de la órbita son las fuerzas que permanecen en el plano orbital.

Derivando la ec. 3.1.4 se obtiene la segunda ecuación de perturbación:

$$de/dt = \frac{e - 1}{2e} [2 dH/H + dE/E]. \quad 3.1.13$$

Esta nueva ecuación que proporciona la variación temporal de la excentricidad también puede ser expresada en términos de la fuerza perturbadora F_p .

Para ello se considera que la variación temporal de momento angular es igual al momento aplicado:

$$dH / dt = \bar{F} \times F_p = r T_{e_N}^{\wedge} - r N_{e_T}^{\wedge}, \quad 3.1.14$$

pero $-rN_{e_T}^{\wedge}$ es perpendicular a H , entonces:

$$dH / dt = r T_{e_N}^{\wedge}. \quad 3.1.15$$

Sustituyendo 3.1.15 y 3.1.9 en 3.1.13 se tiene que:

$$de / dt = [a(1-e^2)^{1/2} / \mu]^{1/2} [R \text{ sen } f + T(\text{cos } f + \text{cos } \epsilon)], \quad 3.1.16$$

donde ϵ es la anomalía excéntrica (fig.3.1.1).

De la ec. 3.1.16 se tiene que sólo las fuerzas en el plano orbital pueden modificar la órbita.

La variación temporal de la inclinación representa la tercera ecuación perturbada y proviene de la ec. 3.1.5:

$$di / dt = [(H/H_z)^2 - 1]^{1/2} [dH/H - dH_z] \quad 3.1.17$$

Pero de la fig. 3.1.3:

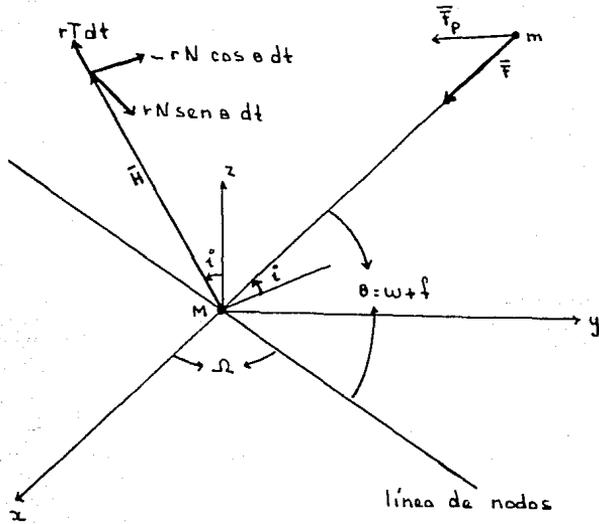


fig.3.1.3 Diagrama d-e fuerzas representando el cambio del vector momento angular bajo la acción de una fuerza perturbadora F_p (Burns , 1979).

$$dH_z/dt = rT \cos i - rN \cos \theta \sin i \quad 3.1.18$$

entonces sustituyendo 3.1.15 y 3.1.18 en 3.1.17:

$$di/dt = [a(1 - e^2)/\mu]^{-1/2} [N \cos \theta / (1 + e \cos f)] \quad 3.1.19$$

o

$$di/dt = r N \cos \theta / H. \quad 3.1.20$$

El numerador en 3.1.20 representa la componente de la torca que rota alrededor de la línea de los nodos. Por lo tanto, las fuerzas en el plano orbital no pueden cambiar la orientación del mismo.

Derivando 3.1.6 encontramos la cuarta ecuación perturbada relacionada con la variación temporal del nodo ascendente:

$$d\Omega / dt = (H^2 - H_z^2)^{-1} (H_x dH_y + H_y dH_x). \quad 3.1.21$$

Nuevamente de la figura 3.1.13 se obtienen las componentes de H que nos llevan a:

$$d\Omega / dt = [a\mu^{-1}(1-e^2)]^{1/2} \frac{N \sin \theta}{\sin i (1+e \cos f)}, \quad 3.1.22$$

o

$$d\Omega/dt = r N \sin \theta / H \sin i. \quad 3.1.23$$

El denominador de 3.1.23 representa la componente normal de H a la línea de los nodos en el plano x-y mientras que el numerador es el momento con el que precesa el plano orbital.

El desarrollo de las dos últimas ecuaciones perturbadas (para

ω y τ) no es tan sencillo porque no son funciones explícitas de E y H , sin embargo para determinar las variaciones temporales de los parámetros ω y τ se retorna a las ecuaciones iniciales para la energía y el momento angular.

Suponiendo que la fuerza perturbadora se aplica en un instante, tanto E como H y ω se modifican, no así r , entonces podemos expresar las ecuaciones para ω y τ como sigue:

$$\begin{aligned} d\omega/dt = \dot{\theta} + [1/r - (E \cos(\theta - \omega))/e\mu][2H dH/e\mu \sin(\theta - \omega)] - \\ - [H^2/(e\mu)^2] dE \cot(\theta - \omega), \end{aligned} \quad 3.1.24$$

$$\begin{aligned} d\tau/dt = \{ 3(\tau - t)[a/\mu(1 - e^2)]^{1/2} e \sin f + [(1 - e^2)a^2/\mu (-\cos f/e + \\ 2/(1 + e \cos f))] \} R + \\ + \{ 3(\tau - t)(a/\mu(1 - e^2))^{1/2} (1 + e \cos f) + \\ + [(1 - e^2)a^2/\mu e] [\sin f (2 + e \cos f) / (1 + e \cos f)] \} T. \end{aligned} \quad 3.1.25$$

Además de la fuerza newtoniana, cada grano siente una fuerza adicional causada por la radiación solar. Esta fuerza actúa como perturbadora sobre la órbita modificando algunos de sus parámetros.

La fuerza de radiación puede originar una deriva del grano que modifique la función de distribución del polvo o que sólo introduzca un cambio periódico en a , e o i . Si la modificación afecta drásticamente la razón de colisión entre los granos pueden ocurrir cambios considerables en la estructura de los anillos. El cambio de algunos de los parámetros orbitales proviene de la energía removida por el arrastre Poynting-Robertson y para obtener las expresiones analíticas de las variaciones temporales de los parámetros de la elipse se hacen las siguientes suposiciones (Mignard 1984):

- a) Se desprecia la variación de la distancia sol-grano.
- b) Se considera que la órbita es circular.
- c) No se hacen consideraciones acerca de la sombra planetaria porque cuando los granos entran en esta región dejan de sentir el

efecto de la radiación solar debido a que ésta es interceptada por el disco planetario.

Antes de obtener las ecuaciones de perturbación se analiza la interacción entre la radiación solar y los granos de polvo.

Consideremos un grano de polvo con sección transversal A situado en un punto donde intercepta cierta cantidad de energía por unidad de tiempo. Esta energía interceptada puede expresarse a través de la relación (Mignard 1984):

$$\Delta\Sigma = \Phi A \quad 3.1.26$$

donde Φ es el flujo de radiación que incide sobre la superficie del grano, $\Delta\Sigma$ es la energía total interceptada y A es la sección transversal del grano que está interceptando el flujo de radiación.

Cuando se intercepta un flujo de radiación Φ se presenta una transferencia de momento lineal del flujo sobre el grano y éste experimenta una fuerza neta dirigida hacia afuera a lo largo de la línea radiación-grano de polvo (fig.3.1.4.). Esta fuerza está dada por:

$$F_p = \Delta\Sigma/c \hat{u}_r = \Phi A/c \hat{u}_r \quad 3.1.27$$

En donde c es la velocidad de la luz y \hat{u}_r es un vector unitario dirigido en la dirección radial del sistema sol-grano.

En realidad los granos de polvo no son absorbedores perfectos y difractan parte de la energía que incide sobre su superficie de tal

manera que la fuerza que siente el grano depende de las características del material que lo forma. Las características están consideradas en el coeficiente de extinción de Mie (Apéndice 1): Q_{pr} el cual es evaluado para granos esféricos y de tamaño micrométrico.

$$Q_{pr} = Q_{dis} + Q_{abs}(1 - \langle \cos\theta \rangle) \quad (\text{Van de Hulst, 1957})$$

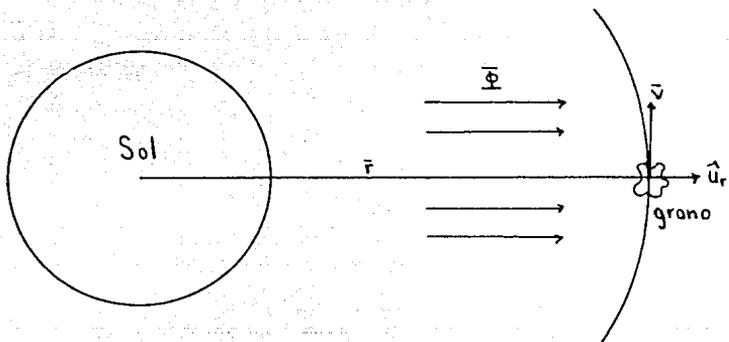


fig. 3.1.4 Grano de polvo interceptando un flujo de radiación Φ (Mignard, 1984)

$$Q_{pr} = \begin{cases} 1 & \text{para granos que son absorbedores perfectos} \\ 2 & \text{para granos que son reflectores perfectos} \end{cases}$$

En la ecuación para el coeficiente Q_{pr} , los términos Q_{dis} y Q_{abs} se refieren a los coeficientes de dispersión y absorción de la luz respectivamente.

Tomando en cuenta el coeficiente de extinción, la fuerza de radiación sobre el grano puede ser expresada como:

$$F_p = (\Phi A / c) Q_{pr} \hat{u}_r.$$

En la interacción luz-materia es importante tomar en cuenta los fenómenos de absorción y reemisión continua de la radiación solar por granos de polvo y sus consecuencias sobre éstos. Para ello, Burns (1979, 1984) y Mignard (1984) proponen un modelo sencillo que involucra colisiones entre los granos así como cambios de masa que originan la transferencia de momento lineal.

Situándose en el marco de referencia solar, la reemisión de la luz absorbida no es isotrópica y se aprecia una componente tangencial neta en la fuerza de radiación, entonces la ec. 3.2.3 puede ser reescrita como una ecuación de dos componentes:

- a) una presión debida a la radiación,
- b) un arrastre originado por la razón efectiva de pérdida de masa del grano moviéndose y rerradiando continuamente la energía incidente.

Considerando que el grano se mueve con una velocidad v respecto al sol, entonces:

$$\Phi' = \Phi (1 - \dot{r}/c) \quad \text{donde} \quad \dot{r} = v \cdot \hat{u}_r \quad 3.1.28$$

pero $\Phi' A$ es continuamente rerradiado por el grano y esta rerradiación es equivalente a la pérdida de masa $\Phi' A/c^2$ del grano moviéndose con una velocidad v en el marco de referencia solar.

En cuanto al flujo de momento del grano este puede expresarse como: $(\Phi' A/c^2)v$; cuando el grano pierde momento, es acelerado al mismo tiempo que sufre un arrastre dinámico. La pérdida de momento por unidad de tiempo representa la fuerza sobre el grano de la misma magnitud de la pérdida, esto recibe el nombre de arrastre Poynting Robertson (Burns et al 1979, 1984).

La fuerza neta sobre la partícula es la suma de las fuerzas debidas al impulso ejercido por el flujo incidente y a la pérdida del grano moviéndose:

$$F_p = (\Phi' A/c) Q_{pr} \hat{u}_r - (\Phi' A/c^2) Q_{pr} v \quad 3.1.29$$

$$= (\Phi A/c) Q_{pr} (1 - \dot{r}/c) \hat{u}_r - (\Phi A/c) Q_{pr} v,$$

con $\dot{r} = dr/dt$ y v el vector velocidad del grano.

Para granos heliocéntricos con $v = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ donde $\hat{r} = \hat{u}_r$ es el radio vector unitario orbital y $\hat{\theta} = \hat{u}_\theta$ es el vector normal a \hat{r} en el plano orbital, la fuerza de radiación está representada por la expresión:

$$F_p = \Phi A/c Q_{pr} [(1 - 2\dot{r}/c) \hat{u}_r - r\dot{\theta}/c \hat{u}_\theta] \quad 3.1.30$$

El término $(1 - 2\dot{r}/c)\hat{u}_r$ representa la fuerza radial de radiación corregida y $(r\dot{\theta}/c)\hat{u}_\theta$ es la componente de arrastre P-R.

Aparte de la fuerza de radiación sobre el grano actúa la fuerza gravitacional y tanto esta fuerza como la otra decrecen como el inverso del cuadrado, es decir:

$$F_p = \Phi A/c Q_{pr} = L\pi r^2 Q_{pr} / 4\pi R^2 c \quad 3.1.31$$

con L , la luminosidad solar, R el radio solar, r el radio del grano, c la velocidad de la luz y Q_{pr} el coeficiente de

extinción de Mie.

$$F_g = GM4\pi r^3 \rho / 3R^2 \quad 3.1.32$$

donde M es la masa solar, r es el radio del grano, ρ es la densidad del grano y R es el radio solar.

La razón entre ambas fuerzas es:

$$\beta = F_p / F_g \quad 3.1.33$$

Cuando $\beta > 1$, $F_p > F_g$ y se concluye que las fuerzas de radiación sobre granos micrométricos son más importantes que las fuerzas gravitacionales, lo que implica que el movimiento orbital del polvo en los anillos planetarios está condicionado por la radiación solar.

Regresando a la ec. 3.1.24 que representa la fuerza perturbadora, cada uno de los términos tiene el siguiente significado:

$$\dot{r} = dr/dt$$

v = vector velocidad de la partícula respecto al sol

Φ = flujo de energía interceptada

A = sección transversal de la partícula

c = velocidad de la luz

\hat{u}_r = vector unitario radial a la fuente de radiación

Si introducimos el radio vector del planeta y el del grano y tomamos en cuenta la velocidad relativa del sol, entonces la fuerza perturbadora queda expresada como:

$$F_p = \Phi A/c Q_{pr} \{ [1 - \bar{r}_{sp}/r_{sp} (v_p/c + v/c)] \bar{r}_{sp}/r_{sp} \}^{- (v_p + v)/c} \quad 3.1.34$$

donde:

\mathbf{v}_p = velocidad orbital del planeta

\mathbf{r}_{sp} = vector sol-planeta

Consideremos un marco de referencia con su origen en el centro de masa del planeta y cuyo eje x está dirigido hacia el sol. En este marco de referencia podemos describir la órbita del planeta con los seis elementos estandar keplerianos: a, e, i, Ω, ω y M con M la anomalía media (donde la anomalía media es el promedio de las anomalías verdaderas).

Desde el marco de referencia solar, la longitud del nodo está referida con un eje moviéndose (fig.3.1.5) (en este caso :y) y por lo consiguiente las tres componentes de la fuerza perturbadora en este marco de referencia bajo las siguientes consideraciones :

$$PG = r = (x, y, z)$$

$$\mathbf{v} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{v}_p = (0, V_p, 0)$$

3.1.35

$$\mathbf{r}_{sp}/r_{sp} = (-1, 0, 0)$$

es:

$$\mathbf{F}_p = -\Phi A/c Q_{pr} [1 + 2\dot{x}/c, V_p/c + \dot{y}/c, \dot{z}/c]. \quad 3.1.36$$

El término de orden cero en v/c corresponde a la fuerza de radiación clásica y los otros términos a la componente P-R.

La razón de cambio de energía orbital y momento angular están dadas por:

$$dE/dt = (\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{v})/m \quad 3.1.37$$

$$1/2 dH^2/dt = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_p) \cdot \mathbf{H} / m \quad 3.1.38$$

con E la energía orbital media en el marco de referencia

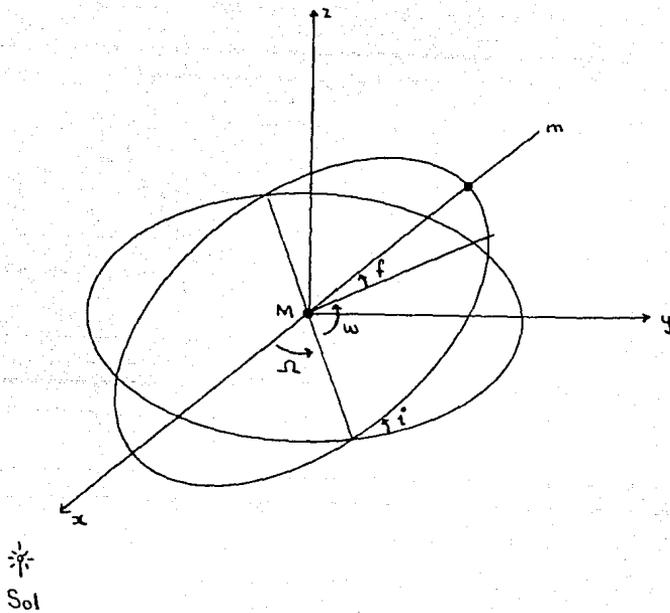


fig. 3.1.5 Sistema de coordenadas rotando con su origen en el centro de masa del planeta (Mignard, 1984)

moviéndose con el planeta y H el momento angular ($H=r \times v$).

Usando la ecuación de la fuerza perturbadora se encuentra que:

$$dE / dt = -(c/3t_p) [\dot{x} + v_p \dot{y} / c + \dot{x}^2/c + v^2/c] \quad 3.1.29$$

$$y \quad dH/dt = -(2/3t_p) [H^2 + H_z V_p x - H_x y (c+\dot{x}) + H_y z (c+\dot{x}) - H_x V_p z], \quad 3.1.40$$

donde t_p es el tiempo característico durante el cual el grano intercepta una energía igual a su energía en reposo (Burns et al 1979):

$$t_p = mc^2 / 3\Phi A Q_{pr}. \quad 3.1.41$$

Para obtener los cambios seculares de las ecuaciones, se promedia primero sobre el periodo orbital y después sobre el periodo precesional del nodo y del pericentro, para ello hay que recurrir a las expresiones clásicas de mecánica celeste en el problema de dos cuerpos (Brower and Clemence, 1961) obteniéndose los siguientes resultados:

momento: $dH/dt = -na^2 (1 - e^2)^{1/2} (1 + 5 \cos^2 i) / 12 t_p , \quad a)$

energía: $dE/dt = -na^2 (5 + \cos^2 i) / 12 t_p , \quad b)$ 3.1.42

semi-eje mayor: $da/dt = - a (5 + \cos^2 i) / 6 t_p , \quad c)$

excentricidad: $de/dt = 0. \quad d)$

De estas ecuaciones se deduce que la excentricidad es secularmente estable mientras el semieje mayor exhibe un

crecimiento secular. En la ec.3.1.42 c) aparece el término t_p como un tiempo de decaimiento característico que puede ser expresado en términos del parámetro β (ec . 3.1.30).

En cuanto a la variación temporal de la inclinación, ésta es obtenida al introducir la componente normal al plano orbital de la fuerza de radiación en la ec. de perturbación (Brower and Clemence, 1961):

$$R = v[\mu a(1-e^2)]^{1/2} \cos i + (3F_p e a / 2m) (\cos \omega \cos \Omega - \cos i \sin \omega \sin \Omega) \quad 3.1.43$$

v es el movimiento orbital medio planetario y $|F_p| = F_p$.

Esta ecuación nos dá la razón instantánea de cambio para la inclinación con la ayuda de las ecuaciones de Mecánica Celeste (Brower y Clemence, 1961):

$$di/dt = - r \cos (\omega + f) / 3 t_p n a^2 (1-e)^2^{1/2} [(c+2\dot{x}) \sin \Omega \sin i - (v+\dot{y}) \cos \Omega \sin i + \dot{z} \cos i]. \quad 3.1.44$$

Promediando sobre el período orbital y sobre la precesión del pericentro se obtiene un resultado sencillo que no depende de la excentricidad:

$$di/dt = \sin i \cos i \sin^2 \Omega / 6 t_p. \quad 3.1.45$$

En la ec.3.1.45 i representa la inclinación del plano orbital del grano con respecto al plano ecuatorial planetario.

3.2 DISTRIBUCION DE MASA POR COLISIONES

Los procesos colisionales son de vital importancia para la distribución de masa de los cuerpos y granos de polvo que forman los anillos planetarios. Las colisiones pueden originar erosión, acreción y craterización de las superficies sobre todo por flujo de masa proveniente del espacio exterioro del medio ambiente.

Estos procesos pueden ocurrir a baja o alta velocidad, para la primera es muy común que se den procesos de acreción generándose cuerpos de centímetros de radio hasta algunos de pocos metros; la producción de los segundos es muy baja y se encuentran distribuidos por todo el sistema sin alterar los procesos dinámicos que se presentan en los anillos (por ej. ondas de densidad) (Cuzzi et al 1984). Para las colisiones de alta velocidad se crea constantemente material nuevo que varía en tamaño y espesor siempre y cuando la densidad de energía de impacto sea mayor que la energía de enlace de las moléculas que forman los cuerpos rocosos (Esposito et al 1984).

El material es al mismo tiempo redistribuido en el sistema gracias a la transferencia de momento y al transporte de energía que ocurre en las colisiones. Tanto el momento como la energía están relacionados con la viscosidad del medio y ésta con la trayectoria óptica de los anillos.

La investigación de las estructuras dinámicas se inició con el trabajo de Maxwell (1859) al demostrar que los anillos están formados por un gran número de cuerpos que giran alrededor del planeta y por los trabajos de Jeffreys (1916, 1947) que fué el primero en argumentar que los cuerpos de los anillos están colisionando entre sí.

Jeffreys demostró que la disipación que resulta de las colisiones puede aplanar rápidamente al sistema de cuerpos en un disco delgado con un espesor del orden de pocos diámetros de los cuerpos típicos que lo forman y en una escala temporal dentro de la cual las colisiones tienden a extender el material en la dirección radial.

Actualmente se han realizado estudios de la dinámica colisional y de los procesos de transporte que resultan de estas interacciones para definir los mecanismos básicos que determinan el espesor, que originan la estructura radial y que controlan la

evolución total de los anillos.

Cualquier teoría relacionada con la formación de los anillos a gran escala, puede vincularse con una formulación mecánica estadística o hidrodinámica que describen el comportamiento promedio de una colección de partículas. Goldreich y Tremaine (1978) han desarrollado un modelo para la distribución de masa basado en la velocidad de dispersión que resulta de las colisiones que se producen entre el material de los anillos. Ambos autores elaboraron su modelo desde el punto de vista mecánico estadístico y de fluidos tomando en cuenta las propiedades estadísticas de los granos, su naturaleza colectiva, los procesos de transporte de energía que se producen como resultado de las colisiones y suponiendo que una función de distribución tipo gaussiana describe al sistema.

PROPIEDADES ESTADISTICAS

1.-CAMINO LIBRE MEDIO: λ

Distancia recorrida por un grano entre dos colisiones sucesivas.

$$\lambda = \begin{cases} v_d / \omega_c & \text{para } \tau \geq 1, a) \\ v_d / \Omega & \text{para } \tau < 1, b) \\ v_d^2 \Omega^{-2} (1 + \tau^{-2}) & \text{para } \tau \text{ arbitraria, c)} \end{cases} \quad 3.2.1$$

siendo ω_c , la frecuencia de colisiones y v_d la velocidad de dispersión. La expresión del inciso a es válida cuando un grano experimenta al menos dos colisiones por órbita alrededor del planeta (i.e. $\omega_c \geq \Omega/\pi$).

La ec. dada en b) se aplica cuando el número de cuerpos en el anillo es pequeño, de aquí que se estén considerando trayectorias ópticas muy bajas ($\omega_c < \Omega/\pi$).

La expresión dada en c) incluye las ecuaciones a) y b) como los

casos límite (inferior y superior) para el camino libre medio. Esta ecuación es análoga a la de un plasma cuyo movimiento está confinado por un campo magnético (Spitzer, 1962).

2. - CAMINO RADIAL MEDIO: Δr

El camino radial recorrido por un grano después de n colisiones es:

$$\Delta r = n^{1/2} \lambda \quad 3.2.2$$

Δr está acotado por la excentricidad de la órbita del grano en caso de que el camino libre medio adquiriera su valor máximo ($ae \cong v_d / \Omega = \lambda$).

3. - TIEMPO DE RECORRIDO: t_{rw}

El tiempo requerido para que un grano se desplace aleatoriamente una distancia Δr está dado por:

$$t_{rw} = n / \omega_c = [(1 + \tau^2) / \tau] \Omega (\Delta r / v_d)^2 \quad 3.2.3$$

NATURALEZA COLECTIVA DE LOS GRANOS EN ANILLOS

En un anillo típico, el camino libre medio λ es mucho menor que la extensión radial del anillo. Suponiendo que las propiedades del disco no varían con el radio, se puede elegir un escala radial Δa que es mucho menor que L donde L es la escala sobre la cual hay un cambio apreciable en las propiedades físicas del anillo ($L \gg \lambda$).

En el intervalo Δa , los granos tienen propiedades cinemáticas muy similares que conducen a que sus propiedades físicas puedan ser analizadas en forma colectiva. Este aspecto de la dinámica del anillo satisface los requerimientos para una descripción de

fluidos.

Como λ está limitada por la excentricidad de la órbita ($\lambda \leq ae$) en la dirección radial, una colección de partículas contenida en un anillo de ancho Δa puede ser relacionada con un elemento de fluido suponiendo que $\Delta a > 10 ae$. En esta escala, la evolución dinámica colisionalmente inducida es estable.

En el tratamiento fluido, también se incluye el efecto combinado de la viscosidad y la rotación diferencial que inducen una tensión viscosa que propicia la transferencia de momento angular hacia afuera y una difusión del anillo.

La eficiencia de la transferencia de momento angular está determinada por la magnitud de la viscosidad ν . Si ν es función únicamente de la posición, la escala temporal para difusión en la dirección radial es $t_\nu \approx (\Delta r)^2 / \nu$. Cuando t_ν es muy grande, la difusión resulta ser muy pequeña y no se produce un cambio considerable en ν .

La viscosidad se define como:

$$\nu = \omega_c \lambda^2 \quad 3.2.4$$

y con esta definición, el tiempo de difusión puede ser expresado como:

$$t_\nu = (1 + \tau^2) / \omega_c (\Delta r / v_d)^2 \Omega^2, \quad 3.2.5$$

donde τ es la profundidad óptica expresada como $\tau = \pi \omega_c / \Omega$.

Al comparar la frecuencia de colisión ω_c y la velocidad angular Ω se obtiene el comportamiento de un anillo en términos de la viscosidad, es decir: si $\omega_c \gg \Omega$, el anillo se comporta como un fluido viscoso con viscosidad: $\nu = v_d^2 / \omega_c$.

Si $\omega_c \leq \Omega$, los granos describen trayectorias curvas después de las colisiones y la viscosidad del anillo se vuelve anisotrópica.

Para valores arbitrarios de Ω / ω_c la magnitud de la viscosidad es aproximadamente igual a:

$$v = (v_d^2 / \omega_c)(1 + \Omega^2 / \omega_c^2) \quad 3.2.6$$

Los procesos colisionales inducen a los granos a oscilar a través del plano central del anillo a una frecuencia del orden de Ω . El promedio de colisiones sufrido por una partícula al pasar a través del anillo es aproximadamente igual a la profundidad óptica normal (τ).

PROCESOS DE TRANSPORTE

Los tratamientos cinético y de fluidos de los procesos de difusión indican que la viscosidad es una función de la profundidad óptica y de la velocidad de dispersión. La determinación de la magnitud de la viscosidad requiere de una definición para la velocidad de dispersión la cual puede ser obtenida a través de los procesos detallados del transporte de energía.

Consideremos dos granos describiendo órbitas casi circulares separadas por una λ radial. La diferencia entre sus velocidades orbitales precolisionales es del orden de $\lambda\Omega$. Después de la colisión, los granos se mueven con una diferencia de velocidades comparable con $\lambda\Omega$ pero su dirección de movimiento se ve modificada por la colisión describiendo una nueva órbita cuya excentricidad es del orden de :

$$\lambda/a = v_d / \Omega a = e . \quad 3.2.7$$

La ec. 3.2.7 implica que la excentricidad de las órbitas se incrementa produciéndose un cambio de energía por unidad de masa del orden de :

$$(\lambda/a)^2 (\Omega a)^2 = \lambda^2 \Omega^2 . \quad 3.2.8$$

Ya que la energía cinética por unidad de masa asociada con movimientos orbitales representa en la práctica la energía asociada con movimientos dispersivos, su razón de incremento puede ser determinada en función de la frecuencia de colisión, i.e.:

$$\dot{E}_t = c^2 \omega_c = \lambda^2 \Omega^2 \omega_c . \quad 3.2.9$$

En la aproximación de fluidos, esta tendencia para incrementar v_d es normalmente atribuida al efecto de tensión viscosa. En un disco rotando diferencialmente, la tensión viscosa continuamente convierte energía almacenada en el movimiento de corte en energía

asociada con el movimiento aleatorio de los granos :

$$\dot{E}_c = \nu (r\Omega / r)^2 \quad 3.2.10$$

Para órbitas keplerianas, el cambio en la energía es del orden de $\nu\Omega^2$.

La definición para la viscosidad dada en la ecuación produce los mismos resultados para el tratamiento hidrodinámico y para la aproximación cinética.

En la ausencia de cualquier proceso disipativo, la colección de granos vería incrementarse su velocidad de dispersión, sin embargo, en los anillos de los planetas, las colisiones típicas son parcialmente inelásticas y la energía disipada puede obtenerse con un coeficiente de restitución ϵ el cual tiene valores entre cero (colisiones completamente inelásticas) y uno (colisiones perfectamente elásticas).

Formalmente ϵ puede ser expresado en términos de las velocidades relativas:

$$g_b = v_{1b} - v_{2b} , \quad 3.2.11$$

y

$$g_a = v_{1a} - v_{2a} , \quad 3.2.12$$

antes y después de la colisión entre los dos granos.

Como estamos considerando que los granos son esferas duras inelásticas , entonces el cambio en la velocidad relativa producido por la colisión es proporcional a la componente de la velocidad relativa normal a la superficie de impacto donde:

$$g_a - g_b = -(1+\epsilon)(g_b \cdot k)k \quad 3.2.13$$

donde k es un vector unitario que apunta del centro del grano 1 al centro del grano 2.

En anillos planetarios, el valor típico de la velocidad de impacto ($v_c = g_b = g$) es comparable con la velocidad de dispersión en tal forma que una cantidad $(1-\epsilon^2)v_d^2$ de la energía cinética por unidad de masa asociada con el movimiento aleatorio es disipada en calor después de cada colisión.

El número total de colisiones por intervalo de tiempo en el disco es ω_c entonces la energía total disipada por unidad de masa

está dada por:

$$\dot{E}_d = (1-c^2)v_d^2\omega_c. \quad 3.2.14$$

En cualquier posición de los anillos, la energía cinética local asociada con movimiento aleatorio puede ser combinada por otros procesos de transporte como el inducido por colisiones, sin embargo estos procesos son normalmente mucho menos eficientes que los mecanismos locales de generación y disipación de energía.

Cuando los mecanismos de generación y disipación están balanceados, se establece la condición:

$$\dot{E}_d = \dot{E}_t. \quad 3.2.15$$

Esta ecuación lleva implícita una relación entre c y τ para un anillo con tamaño uniforme de granos:

$$(1-c)(1+\tau^2) = b \quad 3.2.16$$

con $b = \text{cte. de orden uno.}$

Esta relación de equilibrio no depende explícitamente de la velocidad de dispersión porque \dot{E}_t y \dot{E}_d tienen la misma dependencia de la velocidad. En general, E_t puede tener una dependencia mayor de la velocidad de dispersión que E_d y el balance de energía determina una ecuación explícita para la velocidad de dispersión en el equilibrio.

En el caso que estamos analizando, la velocidad de equilibrio puede ser determinada de la ec.3.2.14 una vez que la dependencia de c sobre la velocidad de impacto ha sido especificada.

La ecuación 3.2.14 también establece una relación entre v y v_d ya que $v = \omega_c \lambda^2$.

Si c es independiente de v_c , los anillos nunca establecerán un equilibrio en la energía y su material se expandirá en un toroide o colapsará dentro de un disco de mono-nivel. Esta tendencia evolucionaria que se produce porque el incremento en la velocidad de dispersión debido a colisiones no es compensado por el incremento en la disipación, es análoga a las inestabilidades

térmicas en discos de acreción.

Si los granos tienen propiedades mecánicas similares, las colisiones de baja velocidad son mucho más elásticas que los impactos de alta velocidad. Consecuentemente, para un anillo con una determinada τ , \dot{E}_d se incrementa más rápido que v_d^2 mientras que \dot{E}_t se incrementa tan rápido como lo hace v_d^2 .

Para v_d pequeña, las colisiones pueden ser más elásticas ($\dot{E}_t > \dot{E}_d$) y la velocidad de dispersión de los granos puede incrementarse exponencialmente hasta que c se reduzca a un valor suficientemente pequeño que $\dot{E}_t = \dot{E}_d$ (Borderies et al 1981, Goldreich y Tremaine 1978)

Alternativamente para v_d grande, \dot{E}_d será mayor que \dot{E}_t y la energía cinética almacenada en el movimiento aleatorio será disipada hasta que se establezca la energía de equilibrio.

Una cuestión interesante es que si c es una función decreciente de v_c , no solamente hay un equilibrio en la energía sino también este equilibrio es estable. En un anillo, el equilibrio se establece dentro de una escala temporal a través de la cual la energía se difunde en el espesor de la estructura.

Para un anillo semitransparente, esta escala temporal es comparable con el período orbital. La estructura de los anillos delgados de Saturno es persistente sobre tiempos mucho más grandes que el período orbital de los mismos por lo que es razonable considerar que estas regiones están en equilibrio de energía (Stewart et al 1984, Durisen 1984, Weidenschilling 1984).

Para explicar la dinámica de los anillos partimos ahora de la teoría cinética para describir las propiedades estadísticas de los granos en términos de la densidad de probabilidad $f(r, v, t)$ que representa la distribución de partículas en el espacio fase.

La evolución del sistema está descrita por la ecuación de Boltzmann:

$$\partial f / \partial t + v \nabla f = (\partial f / \partial t)_C \quad 3.2.17$$

o

$$\partial f / \partial t + v \partial f / \partial t - (\partial U(x) / \partial x) (\partial f / \partial v) = (\partial f / \partial t)_C \quad 3.2.18$$

En la ecuación 3.2.18, $U(x)$ es el potencial gravitacional del planeta, del sistema de satélites, de los satélites que se localizan dentro de los anillos y de la autogravedad de los granos (Stewart et al 1984).

El término de la derecha de la ecuación de Boltzmann representa el cambio de f en el tiempo debido a colisiones.

De la ecuación de Boltzmann se obtienen tres ecuaciones al tomar los momentos de la velocidad a orden cero, uno y dos (Nicholson 1964, Stewart et al 1984, Goldreich y Tremaine 1978, Araki y Tremaine 1986, Borderies et al 1983) e integrar sobre dv . Las ecuaciones que se obtienen son la ecuación de continuidad, momento y energía:

$$\partial n / \partial t + \partial (n u_{\alpha}) / \partial x_{\alpha} = (\partial n / \partial t)_{C} , \quad a)$$

$$\partial / \partial t (n u_{\alpha}) + \partial / \partial x_{\beta} (p_{\alpha\beta} + n u_{\alpha} u_{\beta}) + n \partial U / \partial x_{\alpha} = (\partial / \partial t (n u_{\alpha}))_{C} , \quad b)$$

$$\begin{aligned} \partial / \partial t (p_{\alpha\beta} + n u_{\alpha} u_{\beta}) + \partial / \partial x_{\beta} (p_{\alpha\beta\gamma} + u_{\beta} p_{\alpha\beta}) + u_{\alpha} p_{\alpha\beta} + \\ + n u_{\alpha} u_{\beta} u_{\gamma}) + n (u_{\alpha} \partial U / \partial x_{\beta} + u_{\beta} \partial U / \partial x_{\alpha}) = \partial / \partial t (p_{\alpha\beta} + \\ n u_{\alpha} u_{\beta})_{C} , \quad c) \end{aligned} \quad 3.2.19$$

donde:

$$n = \int f \, dv \quad \text{densidad}$$

$$n u_{\alpha} = \int f v_{\alpha} \, dv \quad \text{momento}$$

$$p_{\alpha\beta\gamma} = \int f (v_{\alpha} - u_{\alpha}) (v_{\beta} - u_{\beta}) (v_{\gamma} - u_{\gamma}) \dots \, dv \quad \text{presión}$$

u_v representa la suma de la velocidad kepleriana más la velocidad del flujo radial generada por la evolución viscosa.

El término de la derecha de la ec. 3.2.19 a) describe la evolución de la función de distribución debido a coagulación .

$(\partial (n u_{\alpha}) / \partial t)_{C}$ representa los efectos de spin de los granos y

$(\partial p_{\alpha\beta}/\partial t)_C$ es el termino debido a colisiones.

Goldreich y Tremaine (1978) elaboraron su modelo considerando que los anillos están constituidos por esferas idénticas, duras, indestructibles y no rotantes por lo que las contribuciones en la ecuación de continuidad y de momento se pueden despreciar. Con estas suposiciones, el único término colisional que sobrevive está en la ecuación de la energía y las ecuaciones 3.2.19 a), 3.2.19 b) y 3.2.19 c) se reducen a:

$$\partial n/\partial t + \partial(nu_\alpha)/\partial t = 0 \quad \text{ec. de continuidad} \quad 3.2.20 \text{ a)}$$

$$\partial u_\alpha/\partial t + u_\beta \partial u_\beta/\partial x_\beta = - \partial U/\partial x_\alpha - 1/n \partial p_{\alpha\beta}/\partial x_\beta \quad \text{ec. de Euler} \\ 3.2.20 \text{ b)}$$

$$\partial p_{\alpha\beta}/\partial t + p_{\alpha\gamma} \partial u_\beta/\partial x_\gamma + p_{\beta\gamma} \partial u_\alpha/\partial x_\gamma + \partial(p_{\alpha\beta}u_\gamma)/\partial x_\gamma = (\partial p_{\alpha\beta}/\partial t)_C \\ \text{ec. de viscosidad } 3.2.20 \text{ c)}$$

El problema ahora se centra en resolver el término de colisiones. Una aproximación estandar empleada para evaluar los efectos colisionales es la aproximación de Fokker-Planck pero aquí esta aproximación no es válida porque se evalúa para dispersiones de ángulo pequeño mientras que las colisiones en los anillos planetarios producen dispersiones de ángulo grande.

Un método para analizar los términos de colisión consiste en suponer (Goldreich y Tremaine 1978, Borderies et al 1983) que $(\partial f/\partial t)_C = \omega_C (f_0 - f)$ donde f_0 es una función maxwelliana que tiene la misma densidad que f . La desventaja de este método es que la pérdida de energía debida a colisiones inelásticas no se incluye directamente en la ec. 3.2.20. Sin embargo para evaluar la integral colisional se pueden realizar las siguientes consideraciones (Goldreich y Tremaine 1978) (Stewart 1984):

- 1) Todos los granos son idénticos.
- 2) Todas los granos son esferas duras.
- 3) El tamaño de los granos es pequeño comparado con la distancia intergrano.
- 4) Las velocidades se distribuyen de acuerdo con una distribución

gaussiana (Borderies et al 1983, Goldreich y Tremaine 1978, Stewart 1984).

El método considera que hay simetría azimutal en el anillo de donde las ecuaciones obtenidas de la ec. de Boltzmann pueden ser expresadas en coordenadas cilíndricas (ω, θ, z) (Goldreich y Tremaine 1978) con simetría alrededor de $z = 0$ y la velocidad $u(x)$ puede sustituirse por $\omega \Omega(\omega) \hat{e}_\theta = (\omega dU/d\omega)^{1/2} \hat{e}_\theta$.

Con estas consideraciones, las ecuaciones resultantes para los términos colisionales son:

$$\partial p_{\omega\omega} / \partial t - 4 \Omega p_{\omega\theta} = (\partial p_{\omega\omega} / \partial t)_c \quad 3.2.21 a)$$

$$\partial p_{\omega\theta} / \partial t - (p_{\omega\omega} / \omega) d(\omega^2 \Omega) / d\omega - 2 \Omega p_{\theta\theta} = (\partial p_{\omega\theta} / \partial t)_c \quad 3.2.21 b)$$

$$\partial p_{\theta\theta} / \partial t + (2 p_{\omega\theta} / \omega) d(\omega^2 \Omega) / d\omega = (\partial p_{\theta\theta} / \partial t)_c \quad 3.2.21 c)$$

$$\partial p_{zz} / \partial t = (\partial p_{zz} / \partial t)_c \quad 3.2.22 d)$$

Las componentes $p_{\theta z}$ y $p_{\omega z}$ son iguales a cero porque hay simetría alrededor de $z=0$.

Para cualquier posición se pueden definir los ejes principales del tensor de presión \hat{e}_i con $i=1,2,3$ como $\hat{e}_3 = \hat{e}_z$ y $\hat{e}_2 \text{ sen } \delta = \hat{e}_\omega \times \hat{e}_1$. Sin pérdida de generalidad, se requiere que $\delta \leq \pi/4$ (Goldreich y Tremaine 1978), donde δ se define como el ángulo entre el eje de la componente principal ecuatorial más grande y la dirección radial.

Una consideración más del modelo es que los granos obedecen a una ley de rotación kepleriana, es decir: $\Omega \propto \omega^{-3/2}$.

Con estas dos últimas suposiciones, finalmente las ecuaciones 3.2.21 quedan expresadas como:

$$\partial p_{11} / \partial t - (3\Omega/2)(\text{sen } 2\delta) p_{11} = (\partial p_{11} / \partial t)_c \quad 3.2.23 a)$$

$$\partial p_{22} / \partial t + (3\Omega/2)(\text{sen } 2\delta) p_{22} = (\partial p_{22} / \partial t)_c \quad 3.2.23 b)$$

$$p_{11} (1 + 3 \operatorname{sen}^2 \delta) - p_{22} (1 + 3 \operatorname{cos}^2 \delta) = 0 \quad 3.2.23 \text{ c)}$$

$$\partial p_{33} / \partial t = (\partial p_{33} / \partial t)_C \quad 3.2.23 \text{ d)}$$

Para evaluar los términos $(\partial p_{ii} / \partial t)$ de la ec. 3.2.23 se toma el caso para colisión binaria donde los granos antes de la colisión tienen las velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 y después de la colisión, las velocidades cambian a \mathbf{v}'_1 y \mathbf{v}'_2 .

Las velocidades relativas antes y después de la colisión están dadas por: $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}'_r = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$.

En el proceso, la velocidad del centro de masa permanece constante y el movimiento relativo de los dos granos se determina al suponer que una de ellas actúa como centro fijo y que la otra tiene una masa reducida $\mu = m/2$ (fig.3.2.1)

El impacto no modifica la velocidad tangencial relativa pero reduce el valor absoluto de la velocidad normal relativa por un factor c .

Sea b el parámetro de impacto y $\hat{\lambda}$ un vector unitario apuntando del centro del grano 1 al centro del grano 2 (fig.3.3.1) donde:

$$\mathbf{v}'_r = \mathbf{v}_r - \hat{\lambda} (1+\epsilon) \mathbf{v}_r \cdot \hat{\lambda} \quad 3.2.24$$

$$\hat{\lambda} \cdot \mathbf{v}'_r = |\mathbf{v}_r| (1 - b^2/4a^2) \quad 3.2.25$$

La dinámica de colisiones por simplicidad se describe en coordenadas esféricas $(X, Y, Z \equiv r, \theta, \varphi)$ donde el eje Z ($\theta = 0$) está en la dirección de \mathbf{v}_r .

Una colisión es completamente descrita por \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y $\lambda = (\theta_\lambda, \varphi_\lambda)$ ya que $\hat{\lambda} \cdot \mathbf{v}_r = |\mathbf{v}_r| \cos \theta_\lambda$ está dada en términos de b por la ec. 3.24. y 3.2.25.

Con estas definiciones, la razón de colisión por unidad de volumen en el intervalo $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_2$, $b \rightarrow b+db$, $\varphi_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda + d\varphi_\lambda$ está dada por:

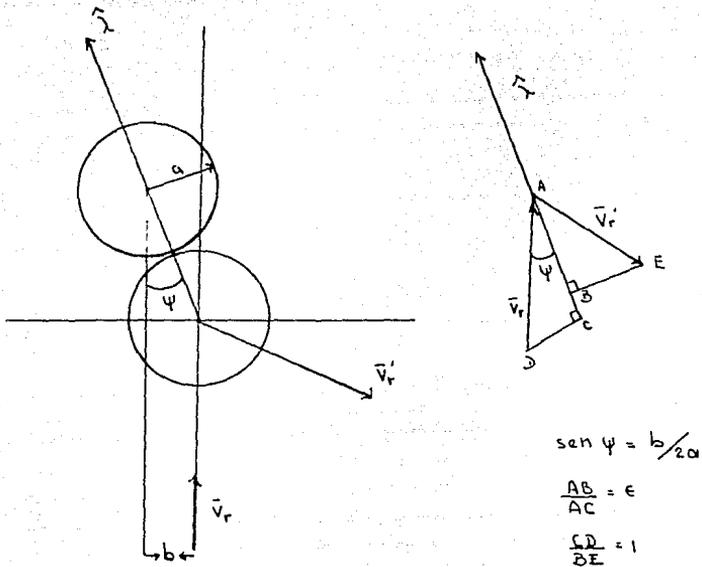


Fig.3.2.1 La geometría de una colisión inelástica de dos granos rígidos.

$$f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{b} \cdot d\mathbf{b} d\varphi_\lambda, \quad 3.2.26$$

de donde los términos de colisión quedan expresados por:

$$(\partial p_{ii} / \partial t)_C = 1/2 \int f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_r \cdot [(\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{v}'_1)^2 + \\ + (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{v}'_2)^2 - (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{v}_1)^2 - (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2] \mathbf{b} \cdot d\mathbf{b} d\varphi_\lambda, \quad 3.2.27$$

El término 1/2 indica que las colisiones están contenidas solo una vez, es decir, cada grano participa únicamente en una colisión.

Rescribiendo las expresiones para la velocidad en función de \mathbf{v}_c , \mathbf{v}_r y \mathbf{v}'_r , los términos colisionales quedan determinados por:

$$(\partial p_{ii} / \partial t)_C = 1/4 \int f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_r| [(\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{v}'_r)^2 - (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{v}_r)^2] \\ \cdot \mathbf{b} \cdot d\mathbf{b} d\varphi_\lambda \quad 3.2.28$$

Goldreich y Tremaine (1978) evaluaron las integrales para \mathbf{b} y $d\varphi_\lambda$ llegando a una expresión más sencilla para los términos colisionales donde solo nos queda la integral en el espacio de velocidades:

$$(\partial p_{ii} / \partial t)_C = \pi a^2 (1 + \epsilon) \int f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_r| [1/4 (1 + \epsilon) (\\ (\mathbf{v}_{ri}^2 + 1/3 |\mathbf{v}_r|^2) - v_{ri}] \cdot \quad 3.2.29$$

La pérdida de energía cinética por unidad de volumen está expresada por:

$$1/2 m \sum_{i=1}^n (\partial p_{ii} / \partial t) = -1/4 \pi m a^2 (1 + \epsilon^2) \int f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) |\mathbf{v}_r|^3 d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2$$

3.2.30

A medida que la energía cinética tiende a un valor menos negativo, las colisiones son más elásticas (i.e. $c = 1$).

La pérdida de energía cinética depende de la forma explícita de la función de distribución f y ésta es una gaussiana en el espacio de velocidades.

En un sistema de referencia cartesiano, la función de distribución puede expresarse como:

$$f(\mathbf{v}) = n / [(2\pi^{3/2})\sigma_1\sigma_2\sigma_3] \exp \left(-\sum_{j=1}^3 v_j^2 / 2\sigma_j^2 \right),$$

3.2.31

donde $\sigma_j^2 = p_{jj} / n$.

Sustituyendo 3.3.31 en 3.3.29, cambiando las variables de la velocidad por las variables relativas y del centro de masa e integrando sobre \mathbf{v}_c se llega a la siguiente expresión para las colisiones:

$$\begin{aligned} (\partial p_{ii} / \partial t)_C &= [n^2 a^2 (1+c) / 8\pi^{1/2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3] \int d\mathbf{v}_r |\mathbf{v}_r| \exp \left(-\sum_{j=1}^3 v_{rj}^2 / 4\sigma_j^2 \right) \\ & \quad [1/4 (1+c)(v_{r1}^2 + 1/3 |\mathbf{v}_r|^2) - v_{r1}^2] \end{aligned} \quad 3.2.32$$

Cambiando el sistema de referencia a coordenadas polares en \mathbf{v}_r (v_r, θ_v, φ_v) con $\theta_v = 0$ a lo largo del eje \hat{e}_1 , las integrales sobre las variables $|\mathbf{v}_r|$ y φ_v se resuelven fácilmente produciéndose solamente una integral sobre $\mu = \cos \theta_v$ que dá como resultado de los términos colisionales la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
(\partial p_{11} / \partial t)_c &= 4\pi^2 n^2 a^2 (1+\epsilon) (\sigma_i / \sigma_j \sigma_k) \int_0^1 du [1/4(1+\epsilon)(\mu^2 + 1/3) - \\
&\quad - \mu^2] [3f_5(\mu, \sigma_j/\sigma_i) f_1(\mu, \sigma_k/\sigma_i) + \\
&\quad + 2 f_3(\mu, \sigma_j/\sigma_i) f_3(\mu, \sigma_k/\sigma_i) + \\
&\quad + 3 f_1(\mu, \sigma_j/\sigma_i) f_5(\mu, \sigma_k/\sigma_i)] = \\
&= 4\pi^{1/2} n^2 a^2 (1+\epsilon) (\sigma_i / \sigma_j \sigma_k) [(1+\epsilon) J_p + J_q] \quad 3.2.33
\end{aligned}$$

Las integrales ahora son expresadas en términos de dos funciones J_p y J_q que a su vez son funciones simétricas de σ_j/σ_i y σ_k/σ_i , que se pueden expresar en términos de integrales elípticas. (Goldreich y Tremaine 1978, Borderies et al 1983, Stewart et al 1984).

Los términos de la ec.3.2.33 nos proporcionan los términos colisionales para la ecuación de la energía.

3.3 RESONANCIAS GRAVITACIONALES

Como se mencionó en el capítulo 1, la División de Cassini fué la primera brecha descubierta en el sistema de anillos de Saturno después de la cual se han detectado otras bandas que varían en ancho radial y que son más angostas que la de Cassini tanto en Saturno como en Urano.

La creación de estas bandas se ha tratado de explicar a partir de las resonancias gravitacionales que se producen entre los satélites cercanos o sumergidos en los anillos y el material que los forma; para comprender tal mecanismo se analiza el caso más simple que se produce entre Titán e Hiperión. Se ha elegido a

este par de satélites porque fué en ellos donde se descubrió que la órbita de Hiperión presenta una regresión de las apsides en lugar de un avance inducido por el achatamiento del planeta (tal regresión es de 20° al año). Este problema motivó a Newcomb (1979) a estudiar la causa que origina esta regresión y demostrar que Hiperión está en resonancia 4:3 con Titán.

Decir que los satélites están en resonancia 4:3 significa que los periodos orbitales de estos cuerpos están en razón 4/3 y que mientras Titán dá cuatro vueltas alrededor de Saturno, Hiperión sólo lo hace tres veces.

Esta commensurabilidad implica que la longitud de la conjunción varía lentamente.

Greenberg (1977) diseñó un modelo para explicar las resonancias gravitacionales partiendo de la interacción T - H (Titán-Hiperión) (fig. 3.2.1). El modelo parte de las siguientes suposiciones:

- 1) Las órbitas de ambos satélites son coplanares
- 2) La órbita de Titán es circular
- 3) La órbita de Hiperión es elíptica con excentricidad ≈ 0.1

Como la masa de Hiperión es despreciable, su efecto sobre Titán puede ser ignorado y el efecto de Titán sobre Hiperión sólo se toma en cuenta cerca de la conjunción (el punto donde los satélites están más cerca uno del otro).

Si la conjunción se presenta después del pericentro de Hiperión (fig. 3.3.1) pero antes de su apocentro, Titán ejerce una fuerza sobre Hiperión dirigida radialmente hacia Saturno en tanto que Hiperión continúa desplazándose del pericentro al apocentro.

En cada conjunción, Titán modifica la energía orbital de Hiperión y aunque el efecto es pequeño, éste se ve afectado por la repetición de la configuración originándose un decrecimiento en el periodo orbital del satélite menos masivo. Al decrecer el periodo, las conjunciones subsecuentes se producirán más cerca del apocentro de Hiperión.

Si la conjunción se presenta después del apocentro, ésta se ve obligada a regresar al apocentro i.e. la interacción gravitacional tiende a mantener la commensurabilidad y originarse cada vez una configuración estable.

En el modelo de Greenberg, la conjunción puede oscilar

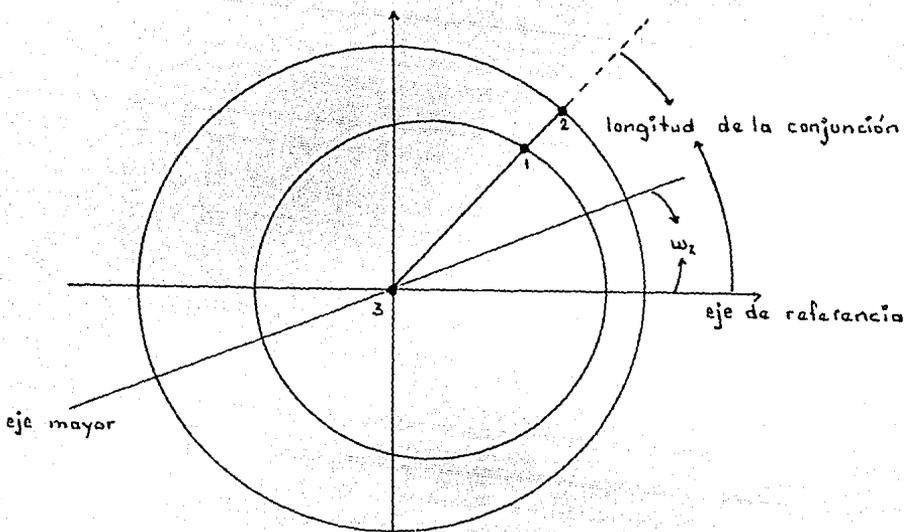


fig.3.3.1 Modelo simplificado de las órbitas de Titán (1) e Hiperión (2). Los dos satélites están en conjunción respecto a Saturno. ω_2 es la longitud del pericentro del satélite 2. La órbita de Titán se supone que es circular (Greenberg R, 1977).

alrededor del apocentro de Hiperión, pero si la configuración es estable, la razón de periodos orbitales (4/3) no se produce siempre en el mismo punto y la conjunción se produce a través de los 360°.

Según Greenberg, la razón por la cual regresan las apsides se debe a la fuerza radial que ejerce Titán sobre Hiperión en la conjunción, este efecto varía senoidalmente con la longitud de las apsides. Si la fuerza es ejercida después del apocentro y antes del pericentro, la excentricidad se incrementa pero si es ejercida después del pericentro y antes del apocentro, la excentricidad decrece (fig. 3.3.2).

Si la conjunción ocurre dentro de los 90° del pericentro, éste es acelerado hacia la conjunción.

En caso de que la excentricidad decrezca, la conjunción puede ser estable en el apocentro o en el pericentro y la longitud de la conjunción puede ser definida como:

$$\text{long. conj.} = 4 (\text{long. de H}) - 3 (\text{long. T}) \quad 3.3.1$$

Para satélites en resonancia, la longitud de la conjunción varía lentamente comparada con el movimiento promedio, y la longitud media de Hiperión es igual a la longitud media en ese punto.

La conjunción de esos satélites siempre ocurre en el apocentro de Hiperión ($\lambda_H = \lambda_T$).

La resonancia T-H está caracterizada por la libración de la longitud de la conjunción alrededor del apocentro de Hiperión. la condición de resonancia en este caso es:

$$\theta = 4 \lambda_H - 3 \lambda_T - \omega_H = 180^\circ \quad 3.3.2$$

donde λ_T es la longitud de Titán y ω es la longitud del pericentro.

Desde el punto de vista matemático, el análisis de cualquier resonancia se reduce al estudio del comportamiento de su resonancia variable a través de la aplicación de las ecuaciones de Lagrange para la variación de los elementos orbitales (Brower y Clemence 1964). Las ecuaciones contienen la función perturbadora

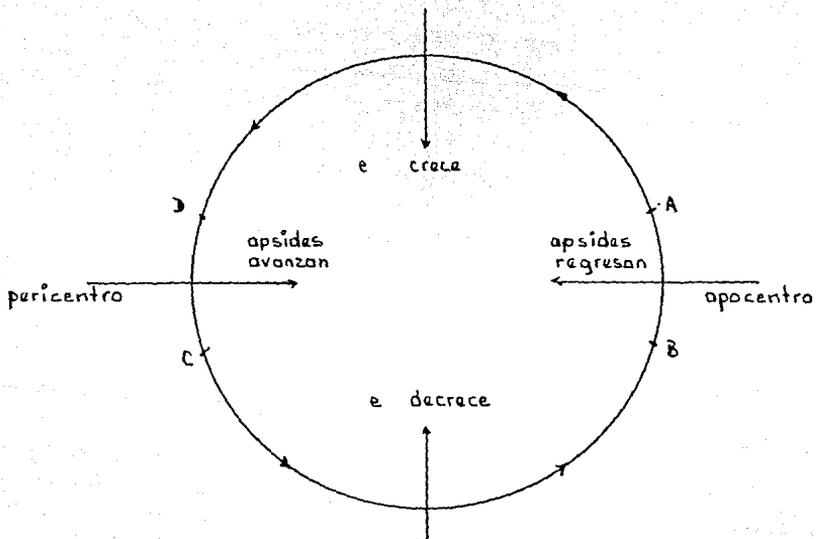


fig.3.3.2 La órbita de un satélite con una excentricidad muy pequeña. Las fuerzas radiales ejercidas sobre el satélite en varios puntos de su órbita pueden ser originadas por otro satélite (Greenberg R, 1977).

que puede ser expandida en series de Fourier donde los senos y los cosenos tienen argumentos que varían dentro de pocos periodos orbitales.

Todos los efectos de periodo corto en la serie de Fourier son ignorados, sin embargo los términos críticos contienen la resonancia variable y no pueden ser despreciados. Al eliminar la mayoría de los términos de la función perturbadora se ignora el efecto de Titán sobre Hiperión excepto en la conjunción.

En la terminología del comportamiento galáctico la resonancia T-H es una resonancia externa de Lindblad con $p=0$ y $m=3$ de la cual se hablará más adelante.

Desde el punto de vista cinemático las resonancias se clasifican en dos tipos:

- a) las que están relacionadas con el movimiento epicíclico y tienen que ver con la excentricidad de la órbita y
- b) las que se presentan fuera del plano de referencia y que se relacionan con la inclinación de la órbita.

Para el análisis de ambas resonancias se emplea el mismo criterio que para cualquier sistema dinámico: la frecuencia natural del sistema compete con la frecuencia de una fuerza periódica o armónico de ella. La oscilación natural relevante en el movimiento orbital de un satélite podría ser:

- a) el movimiento epicíclico relacionado con la excentricidad de la órbita (respecto a una órbita circular), o
- b) las oscilaciones fuera del plano de referencia que se relacionan con la inclinación orbital.

La fuerza periódica puede ser la fuerza ejercida por un satélite o planeta sobre el movimiento de dos cuerpos o satélites que están interaccionando. en este caso la fuerza tiene un periodo comparable con el período sinódico de los dos satélites.

Con este criterio, se espera una resonancia donde el movimiento sideral medio de un satélite es igual a un múltiplo entero del movimiento sideral medio de otro (Esposito et al 1984, Greenberg 1977, 1984):

$$n = j(n - n') , \quad 3.3.3$$

de donde:

$$n/n' = j/(j-1) , \quad 3.3.4$$

con j un número entero y los superíndices (') se refieren al satélite perturbador.

El movimiento epicíclico y fuera del plano de referencia no es senoidal excepto a primer orden.

En general, la resonancia puede producirse donde cualquier múltiplo de la frecuencia natural se iguala con cualquier múltiplo de la frecuencia de la fuerza perturbadora:

$$kn = j(n - n') , \quad 3.3.5$$

o

$$n/n' = j/(j - k) . \quad 3.3.6$$

De la última ecuación puede interpretarse que la resonancia ocurre donde los movimientos siderales medios son precisamente conmensurables.

En el caso de Saturno, debido a su achatamiento, este cuerpo produce un campo de fuerza que difiere significativamente de la ley r^{-2} , por lo que las frecuencias naturales de oscilación difieren del movimiento medio orbital y consecuentemente la órbita del cuerpo perturbado precesa.

La frecuencia epicíclica k está relacionada con la razón de precesión apsidal $\dot{\omega}$ a través de la ecuación:

$$k = n - \dot{\omega} \quad 3.3.6$$

Tomemos ahora el caso donde la precesión apsidal es importante (como el caso T-H), suponemos que se tiene dos cuerpos que están interaccionando y cuyas órbitas se localizan en el plano ecuatorial del cuerpo alrededor del cual giran, en este caso la órbita del cuerpo que actúa como perturbador es circular. De acuerdo con el criterio de resonancia, la ecuación toma la forma:

$$k(n - \dot{\omega}) = j(n - n') , \quad 3.3.7$$

o

$$jn' - (j - k)n - k\dot{\omega} = 0 . \quad 3.3.8$$

Esta ecuación indica cómo la precesión puede transferir una resonancia fuera de la posición de movimientos medios siderales exactamente conmensurables.

Si ahora se supone que la órbita del satélite perturbador no es circular, entonces las funciones relacionadas con las perturbaciones contienen armónicos adicionales junto a $j(n - n')$.

El campo gravitacional del satélite perturbador puede ser descompuesto a través de una serie de Fourier tomando la forma:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(r) \operatorname{sen} [\omega t - m\theta + \delta], \quad 3.3.9$$

donde $\omega \equiv m n' + p k'$, δ es la constante de fase y (r, θ) proporciona la posición en coordenadas polares.

Cada componente del campo se comporta como una onda moviéndose longitudinalmente a la razón angular ω/m y con una longitud de onda $360^\circ / m$. Un satélite moviéndose con velocidad angular n experimenta una serie de oscilaciones en el campo que tienen una frecuencia:

$$m \left\{ (n - \omega/m) \right\} \quad 3.3.10$$

La resonancia se presentará donde la frecuencia natural del satélite perturbador k compita con el valor dado en la ec.: esto es, donde:

$$k = m \left\{ (n - \omega/m) \right\} \quad 3.3.11$$

Existen dos valores donde puede ocurrir una resonancia:

- a) para $n < \omega/m$
- b) para $n > \omega/m$

Para ambos valores, las resonancias que se producen son conocidas como resonancias exterior e interior de Lindblad respectivamente y de acuerdo con la terminología de dinámica galáctica que se aplica a los anillos planetarios por la similitud con las galaxias.

En términos de los movimientos medios y las razones de precesión apsidal, las resonancias de Lindblad toman la forma:

$$(m+p) n' - (m-1)n - \dot{\omega} - p \dot{\omega}' = 0 \text{ (interna) } 3.3.12$$

$$(m+p) n' - (m+1)n + \dot{\omega} - p \dot{\omega}' = 0 \text{ (externa) } 3.3.13$$

Para un armónico dado del potencial perturbador (con m y p dadas), las dos resonancias de Lindblad no pueden estar cerca una de la otra.

Por ejemplo para $m=3$ y $p=2$, la resonancia interna esta cerca de la commensurabilidad 5:2 y la externa está cerca de 5:4.

La resonancia interna de Lindblad para $m=5$, $p=0$ está muy cerca de 5:4 pero en una posición ligeramente diferente debido a la diferencia de las razones de precesión $\dot{\omega}$ y $\dot{\omega}'$.

Aquí interna y externa no se refieren a la posición relativa del cuerpo perturbador puesto que las resonancias (ejemplo anterior) pueden ocurrir dentro de la órbita del perturbador.

Cuando $p=0$, las ecuaciones 3.3.12 y 3.3.13 se reducen a la ec.

con $k=1$ (esto implica que se tiene primer orden en e).

Otro tipo de singularidad dinámica llamada resonancia de corrotación se presenta en el punto donde el movimiento medio del satélite perturbado compite con la velocidad angular ω/m que proviene del campo perturbador i.e. $n = \omega/m$. Para este tipo de resonancia se satisface la ecuación:

$$(m+p) n' - m n - p \dot{\omega}' = 0 . \quad 3.3.14$$

Las resonancias que satisfacen 3.3.14 son independientes de la excentricidad del satélite perturbado pero dependen de la excentricidad del perturbador para generar los armónicos apropiados.

El tipo más general de resonancias en el plano (excentricidad) pueden incluir términos de orden más alto en la excentricidad del satélite perturbador, por consiguiente y por analogía con la ec.3.3.6 tales commensurabilidades se presentan donde los múltiplos de la frecuencia natural compiten con una componente de la fuerza perturbadora cumpliéndose la relación:

$$k k = m \left| (n - \omega/m) \right| \quad 3.3.15$$

que conduce a la ecuación:

$$(m + p)n' - (m - k)n - p \dot{\omega}' - k \dot{\omega} = 0 \quad 3.3.16$$

y

$$(m + p)n' - (m + k)n - p \dot{\omega}' + k \dot{\omega} = 0 \quad 3.3.17$$

Las resonancias de Lindblad se obtienen de estas ecuaciones al analizar los casos $k = 1$ mientras que las de corrotación provienen de $k = 0$.

Gracias a la precesión de las apsidas, hay un cúmulo de posiciones resonantes cerca de cada commensurabilidad de movimientos medios siderales.

Una condición de resonancia más general se obtiene si se considera que el movimiento no está restringido en dos dimensiones, en este caso, las componentes del campo gravitacional cumplen con:

$$\omega = m n' + p k + q k_r \quad 3.3.18$$

donde q es un entero y k_r es la razón de oscilación vertical del perturbador. por definición, $k_r = n - \dot{\Omega}$ donde $\dot{\Omega}$ es la razón de precesión nodal.

Una resonancia puede ocurrir si la frecuencia $|m n - \omega|$ es igual a un múltiplo de la frecuencia natural vertical u horizontal (inclinación: $k k_r$ o excentricidad: $k k$). Bajo esta condición, las posiciones en donde se presentan las resonancias están dadas por la expresión:

$$j_1 n' + j_2 n + j_3 \dot{\omega}' + j_4 \dot{\omega} + j_5 \dot{\Omega}' + j_6 \dot{\Omega} = 0 \quad 3.3.19$$

donde las j'_s son enteros.

En mecánica celeste, el potencial gravitacional de un satélite es expresado en función de los elementos orbitales de los satélites que participan en la resonancia y posteriormente aplicando análisis de Fourier. De la expansión de Fourier aparecen términos de la forma:

$$G m' F(a, a') e'^3_{j_3} e'^4_{j_4} i'^5_{j_5} i'^6_{j_6} \cos \theta \quad 3.3.20$$

donde:

$$\theta = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \omega' + j_4 \omega + j_5 \Omega' + j_6 \Omega \quad 3.3.21$$

y las λ'_s son las longitudes medias, e'_s son las excentricidades e i'_s son las inclinaciones.

Las θ'_s generalmente varían muy rápido sobre escalas de tiempo comparables con los periodos orbitales porque las longitudes medias varían en razones dadas por los movimientos medios, en este caso las resonancias no pueden ser muy grandes.

Sin embargo cerca de una resonancia de la forma general de la ec. 3.3.19, θ varía lentamente y su razón de variación está dada por la ec. 3.3.19. En este caso las perturbaciones sobre el satélite pueden ser muy grandes.

El coeficiente de cada término de la ecuación 3.3.20 indica la magnitud de la resonancia correspondiente.

De la ec. 3.3.20 se observa que las resonancias involucran coeficientes enteros pequeños (j'_s) para los términos de precesión más grandes porque están asociados con una excentricidad pequeña y la inclinación está asociada con la potencia más baja.

Al realizar el análisis de Fourier del campo gravitacional perturbador se encuentra que únicamente los términos de primer orden se relacionan con resonancias de magnitud considerable en tanto los términos de orden mayor van produciendo resonancias más débiles, y por lo tanto, las resonancias son importantes únicamente cerca de conmensurabilidades de orden menor.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

CAPITULO 4

LA DIVISION DE CASSINI Y OTRAS BRECHAS EN LOS ANILLOS DE SATURNO

La primera estructura descubierta en el sistema saturnino fué la División de Cassini en el año de 1675 por el italiano Giacomo Cassini. Esta estructura es una banda semivacia que separa a los anillos A y B y cuyo ancho radial es aproximadamente 4 000 km (Flynn Cuzzi 1989) encontrándose dentro de ella alrededor de 100 anillos delgados y tenues con una profundidad óptica igual a 0.3. (Burns 1981). Los granos de polvo que forman a estos anillos son de tamaño submicrométrico ($0.01 \mu\text{m}$) comparado con el polvo que forma los anillos etéreos ($\approx 0.1 \mu\text{m}$) además la densidad comparada con la de los anillos vecinos es muy baja, en la División de Cassini, $\rho = 10^{-4} \text{ g cm}^{-3}$ en tanto que en los anillos A y B es aproximadamente 0.9 g.cm^{-3} .

Junto con la División de Cassini existen en los anillos de Saturno, cuatro brechas más de tamaño considerable (fig. 3.3.2.) (Tabla 4.1.1) distribuidas en el sistema clásico de los anillos.

El origen de estas enigmáticas estructuras se ha asociado con las resonancias gravitacionales producidas por los satélites clásicos saturninos (los satélites más grandes del planeta) o bien por la influencia gravitacional de las lunetas (satélites pequeños) que se encuentran sumergidas en los anillos (Flynn y Cuzzi 1989, Greenberg 1983, Borderies 1989, Marouf y Tyler 1986).

El origen de las brechas se ha tratado de explicar también a través de otros dos procesos, el primero se basa en la generación de ondas espirales de densidad y el segundo en el pastoreo del material de los anillos efectuado por alguna o algunas lunetas cercanas o sumergidas en el medio (tabla 4.1.1). En los anillos de Saturno se generan dos tipos de ondas espirales (Shu 1984, Cuzzi et al 1981, Borderies et al 1985): las ondas de densidad y las ondas "bending", que son producidas como resultado de la interacción resonante con los satélites externos al sistema de anillos.

TABLA 4.1.1
LAS BRECHAS Y SUS ANILLOS DELGADOS

ANILLO	BRECHA	LOCALIZACION	ANCHO	A.D.	ANCHO A.D.	PROCESO
		Rs	Km		Km	GENERADOR
A	KEELER	2.263	35	--	--	---
	ENCKE	2.214	325	varios	--	lunetas
D de C	TBD	1.988	246	opaco	37	---
	TBD	1.972	42	--	--	---
	TBD	1.966	40	--	--	---
	TBD	1.960	28	--	--	---
	TBD	1.959	38	--	--	---
	HUYGENS	1.953	285-440	opaco	43	Mimas 2:1
B	TBD	1.81	<1	--	--	---
C	TBD	1.495	20	opaco	60	Mimas 3:1
	TBD	1.470	--	opaco	20	Mimas 3:1v 2:1
C	MAXWELL	1.450	270	opaco	64	---
	TBD	1.290	184	opaco	25	Titán 1:0
	TBD	1.241	≈70	varios	--	Mimas 4:1
F	---	2.32	100-500	varios	3-30	lunetas? complejos

TBD = notación usada para referirse a una brecha que aun no tiene nombre.

Rs = radio de Saturno = 60 330 Km

AD = anillos delgados

v = resonancia vertical asociada con ondas bending.

(Cuzzi et al 1984)

Para explicar la existencia de estas ondas se parte de la interacción de tres cuerpos: planeta, anillo (formado por granos) y satélite donde se plantea la interacción por fuerzas de marea del satélite y el planeta sobre el material anular.

Se ha propuesto también que la creación de la División de Cassini (Goldreich y Tremaine, 1978) es debida a la excitación de las ondas de densidad.

4.1 CREACION DE BRECHAS A PARTIR DE LAS ONDAS DE DENSIDAD

El primer modelo para explicar la existencia de brechas fué diseñado por Goldreich y Tremaine (1978) y propone que la fuerza resonante causada por el satélite Mimas y a la propagación de las ondas de densidad causadas por el mismo satélite, producen la brecha.

Para analizar el problema, el modelo parte de las siguientes consideraciones:

- 1) El satélite y el anillo permanecen en el plano ecuatorial planetario.
- 2) Se supone que el espesor del anillo es infinitamente delgado pudiendo despreciarse.
- 3) El anillo es axisimétrico.
- 4) La evolución del anillo es independiente del tiempo. Esto significa que se considera que la evolución del anillo es muy lenta, lo cual es una buena aproximación ya que los granos sufren pocas colisiones en un período orbital.
- 5) El modelo también supone que $\tau \approx 1$, lo cual es válido para algunas regiones de los anillos A y B.
- 6) El sistema de anillos se comporta como un fluido.
- 7) Se lleva a cabo por simplicidad un tratamiento hidrodinámico en donde se desprecian las velocidades aleatorias de los cuerpos rocosos que conforman los anillos y se considera que la viscosidad y la presión son cero.

Para describir la generación de la brecha, el modelo supone que el anillo se comporta como un disco fluido donde el tensor de presión satisface la ecuación politrópica de estado:

$$p = K \sigma^\gamma \quad 4.1.1$$

donde σ es la densidad superficial de masa (g cm^{-2}), γ la razón de los calores específicos y K una constante.

4.1.a LAS ONDAS DE DENSIDAD

Para hacer el análisis de las ondas de densidad se considera que el sistema de anillos está inicialmente en equilibrio y a un cierto tiempo t se introduce una perturbación que tiene una amplitud pequeña, esta perturbación es una onda espiral de densidad. La razón de amplitud pequeña implica que el modelo que se usa para estudiar la evolución de estas ondas a través del medio (disco fluido), es cuasi lineal.

Con lo anterior en mente, consideremos un grano en el disco planetario girando alrededor del planeta (en este caso Saturno) y cuyo plano de rotación coincide con el plano ecuatorial planetario. Si se supone que los granos que forman los anillos están sometidos sólo a la fuerza gravitacional planetaria y que no existe ninguna otra fuerza externa sobre ellos, entonces éstos describen una órbita circular que no se modifica por los pequeños movimientos aleatorios que realicen (i.e. la excentricidad de la órbita de los granos es cero).

Introduciendo ahora el potencial gravitacional del satélite externo al sistema de anillos (por ejemplo: Mimas, localizado a $2.4 R_g$) donde se cumple la condición de que el potencial es m veces periódico en la frecuencia orbital y que uno de estos términos coincide con la frecuencia natural de los granos. Cada uno de éstos verá desplazada su órbita m -veces hacia adentro y m veces hacia afuera sobre el plano ecuatorial planetario, esto se origina debido a que el grano intenta acoplar su movimiento de rotación con la rotación del campo de la fuerza perturbadora. El material involucrado en estas regiones es comprimido en un desplazamiento hacia adentro y rarificado en un desplazamiento

hacia afuera. El exceso o déficit de material, modifica la densidad del medio ejerciendo aceleraciones sobre el material vecino que empezará a transmitir la perturbación a través del disco, tal perturbación es una onda espiral de densidad, además como el sistema planeta-anillo-satélite está rotando, las ondas describen un patrón espiral, de ahí que se les denomine ondas espirales de densidad (Fig.4.1.1). Esto provoca la formación de espacios vacíos en forma de bandas.

Para encontrar la relación de dispersión de estas ondas espirales se parte de la ec. de Euler. Esta es la ec. de momento obtenida a partir de la ec. de Boltzmann cuando se analiza tal ecuación a orden 1. En la ecuación de Euler se introducen tres potenciales debidos al planeta, al satélite y al anillo que se describen en un marco de referencia rotando con velocidad angular Ω_f centrado en el planeta. Con estas suposiciones, la ec. de Euler puede ser expresada como:

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(\varphi^P + \varphi^D + \varphi^S + \eta) - \Omega_f \times (\Omega_f \times \mathbf{r}) - 2\Omega_f \times \mathbf{v}$$

4.1.2

con \mathbf{v} la velocidad del fluido (en este caso de la materia que forma el disco) y los superíndices P, D y S se refieren a los potenciales del planeta, el disco y el satélite respectivamente.

En esta ecuación aparece un término debido al gradiente de presión expresado en términos de la entalpía η a través de la relación:

$$(\gamma - 1)\eta = v_s^2 = dp/d\sigma \quad 4.1.3$$

donde v_s^2 es la velocidad adiabática del sonido y un término que corresponde a una aceleración de Coriolis debido a la influencia rotacional planetaria sobre el disco ($2\Omega \times \mathbf{v}$) con Ω la velocidad angular del anillo.

Para obtener la ecuación de momento a primer orden se introducen los términos relacionados con la perturbación

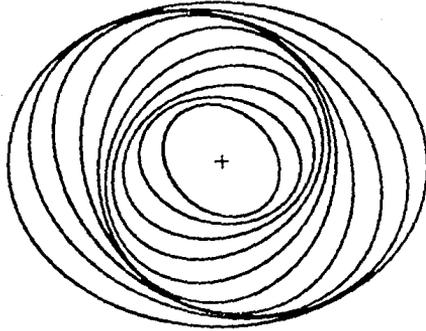


fig.4.1.1 *Las ondas espirales de densidad en los anillos planetarios (Cuzzi et al 1984)*

donde los parámetros involucrados se expresan como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \\ \varphi^S &= \varphi_0^S + \varphi_1^S \\ \varphi^D &= \varphi_0^D + \varphi_1^D \\ \eta &= \eta_0 + \eta_1 \end{aligned}$$

El subíndice 0 se refiere al estado de equilibrio y el subíndice 1 se refiere a la perturbación.

Linealizando la ecuación de Euler y despreciando términos de segundo orden se obtiene la siguiente ecuación (Showalter et al, 1986):

$$\partial \mathbf{v}_1 / \partial t + (\mathbf{v}_0 \circ \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \circ \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla(\varphi_1^D + \varphi_1^S + \eta_1) - 2\Omega_r \times \mathbf{v}_1$$

4.1.4

De 4.1.4 se observa que los únicos términos que aparecen son el potencial perturbado del disco así como la entalpía y el término de Coriolis que involucra la velocidad a orden 1.

Cada uno de los términos relacionados con el potencial se puede expandir usando series de Fourier de la forma:

$$\varphi^S(r, \theta, t) = \text{Re} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{1m}^S(r) \exp [i (m \theta - l k_b t)]$$

4.1.5

Con el desarrollo en series de Fourier se obtienen dos ecuaciones escalares expresadas como:

$$i m (\Omega - \Omega_\rho) v_{1m}^r - 2 \Omega v_{1m}^\theta = -d/dr (\varphi_{1m}^S + \varphi_{1m}^D + \eta_{1m}),$$

4.1.6

y

$$2B v_{1m}^r + i m (\Omega - \Omega_p) v_{1m}^\theta = i m/r (\varphi_{1m}^s + \varphi_{1m}^D + \eta_{1m}),$$

4.1.7

donde B es la llamada cte. de Oort (muy usada en dinámica galáctica) que se expresa como:

$$B = \Omega(r) + 1/2 r \{ d\Omega(r) / dr \}$$

Ω es la velocidad angular en un marco de referencia inercial y Ω_p es la velocidad angular de la perturbación.

Resolviendo 4.1.7 para v_{1m}^r y v_{1m}^θ se obtiene la ecuación:

$$D = k^2 - m^2 (\Omega - \Omega_p)^2 \quad 4.1.8$$

(Goldreich y Tremaine 1978, Cuzzi et al 1981, Shu 1984).

En la ec. 4.1.8, Ω_p es la velocidad angular de la perturbación dada por la siguiente relación:

$$\Omega_p \equiv n_s + (l/m - 1)k_s$$

donde n_s es el movimiento medio del satélite y k_s es su frecuencia epicíclica.

Cuando $l = m$ entonces $\Omega_p \equiv n_s$ y se dice que ocurre la resonancia más intensa.

Si ahora sustituimos las soluciones para v_{1m}^r y v_{1m}^θ en la ecuación de continuidad (obtenida al multiplicar la ec. de Boltzmann por el primer momento de la velocidad) y se linealiza suponiendo que :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$$

son los parámetros que consideran el estado de equilibrio más el estado perturbado se obtiene la ecuación:

$$\partial \sigma_1 / \partial t + \nabla \cdot (\sigma_0 \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot (\sigma_1 \mathbf{v}_0) = 0 \quad 4.1.9$$

que nos dá la variación de la densidad superficial de masa de los anillos a medida que avanza la perturbación.

En la ec. 4.1.9 se elimina el término σ_1 al utilizar la expresión: $\sigma_{1m} = (\sigma_0 / v_s^2) \eta_{1m}$ quedando una ec. de la forma:

$$\{d^2/dr^2 + d/dr \ln(\sigma r/D)\} d/dr + 2\Omega / r(\Omega - \Omega_p) [d/dr \ln(\sigma \Omega/D)] - \\ - m^2/r^2 \} (\varphi_{1m}^s + \varphi_{1m}^D + \eta_{1m}) = D_{n1m} / v_s^2 \quad \text{ec. Poisson} \\ 4.1.10$$

Si tomamos $\varphi_{1m}^s = 0$ e investigamos las oscilaciones libres del disco y se cumple que: $v(\Omega r) \ll 1$ y $G\sigma\Omega^2 r \ll 1$ entonces el término D_{n1m} / v_s^2 es únicamente balanceado por el término de la izquierda si $(d^2/dr^2) \gg r^{-2}$, entonces la ecuación de Poisson tiene soluciones de la forma:

$$\varphi_{1m}^D(r) = \phi(r) \exp \left[i \int K(r) dr \right] \quad 4.1.11$$

La ec. 4.1.11 relaciona la entalpía con las perturbaciones originadas por el potencial perturbador.

La ec. de Poisson puede resolverse haciendo el mismo tratamiento que para onda plana llegando a la solución:

$$\sigma_{lm}(r) = (i \operatorname{sen} K / 2\pi G r^{1/r}) d/dr [r^{-1/2} \varphi_{lm}^D(r)] \quad 4.1.12$$

A partir de la ecuación 4.1.12 se obtiene la relación de dispersión para ondas de densidad libres:

$$D + v_s^2 k^2 - 2\pi G \sigma |k| = 0, \quad 4.1.13$$

cuyas soluciones son:

$$k = \pi G \sigma / v_s^2 \pm [(\pi G \sigma / v_s^2)^2 - D / v_s^2]^{1/2}. \quad 4.1.14$$

La relación de dispersión tiene dos soluciones que dependen del signo del segundo término, en caso de tomar el signo positivo, entonces se tendrán ondas de densidad cortas en tanto que el signo negativo producirá ondas de densidad largas.

Si $k < 0$ entonces las ondas ya sean largas o cortas serán ondas delanteras, esto quiere decir que las ondas se propagan radialmente hacia dentro del sistema de anillos pero si $k > 0$ entonces se generarán ondas traseras que se identifican por desplazarse radialmente hacia el exterior de los anillos. El desplazamiento ocurre con respecto al punto donde se excitan las ondas.

La característica más importante de las ondas de densidad excitadas en los anillos planetarios es que ellas se generan más fácilmente en la región donde se presenta una resonancia interna de Lindblad, porque en este punto, su longitud de onda λ será igual a $2\pi/|k|$ (Shu 1984) y los granos de los anillos ven acoplada su frecuencia orbital con el término periódico de la fuerza

perturbadora que coincide con su frecuencia.

Las ondas espirales de densidad pueden transferir o arrastrar momento angular cuya densidad está dada por:

$$h = - (\Omega - \Omega_p) / 2\sigma \quad (m \phi / 2\pi G)^2, \quad 4.1.15$$

$h < 0$ dentro de la distancia de corrotación y $h > 0$ fuera de esta distancia, donde entendemos por distancia de corrotación, aquella distancia donde el periodo orbital del disco es igual al periodo de rotación planetario.

Mientras que el flujo de momento angular total está dado por:

$$F = -\pi^2 m \left[\sigma (r \, dD/dr)^{-1} \right]_{r_L} \Psi_{1m}^2, \quad 4.1.16$$

con:

$$\Psi_{1m} = (r \, d\varphi_{1m}^s / dr + 2\Omega / (\Omega - \Omega_p) \varphi_{1m}^s)_{r_L}.$$

En el caso de Saturno, las únicas ondas que son de interés son las ondas traseras largas cerca de las resonancias internas de Lindblad porque estas ondas son las únicas excitadas por los satélites del planeta y son atenuadas por efectos no-lineales como la viscosidad antes de que se propaguen a grandes distancias.

Esto se debe a que las ondas espirales de densidad traseras son las que viajan hacia afuera del disco y se toman las largas porque son las que pueden viajar una distancia considerable como para generar una brecha en tanto que las cortas no pueden hacerlo porque son inmediatamente disipadas en el medio.

Para identificar el lugar donde se presentan las resonancias, lo que se hace es expresar explícitamente las componentes del potencial φ_{1m}^s donde el potencial total tiene la forma:

$$\varphi_{1m}^s(r, \theta, t) = -GM_S \left\{ [r^2 + r_S^2 - 2r r_S \cos(\theta - \theta_S)]^{-1/2} - \right. \\ \left. - (r_S / r^2) \cos(\theta - \theta_S) \right\} \quad 4.1.17$$

con M_S la masa del satélite localizado en la posición $[r_S(t), \theta_S(t)]$.

El segundo término de 4.1.17 es un potencial que resulta porque el origen de coordenadas está en el centro del planeta y no en el centro de masa del sistema planeta-satélite.

Se desprecian los términos cuadrupolares de Saturno y se supone que la órbita del satélite es una elipse kepleriana.

Expandiendo el potencial de la ec. 4.1.17 en una serie de Fourier y tomando en cuenta sólo términos de orden menor, el potencial es expresado como:

$$\varphi_{1m}^s(r) = -GM_S / a \quad e_S^{1-m} G_{1m}(r/a) \quad 4.1.18$$

con a el semieje mayor de la elipse y G_{1m} son los coeficientes que provienen de las ecuaciones de perturbación en dinámica galáctica dadas por Brower y Clemence.

Para evaluar el tamaño de la brecha se supone que el flujo de momento angular se ha mantenido constante durante el tiempo de vida del disco. El tamaño de la brecha depende de la magnitud del flujo de momento y será máximo para la ec. 4.1.17 porque la densidad superficial de masa decrece una vez que una brecha se ha formado.

Si los granos entre r_L y $r_L(1 + x_{\max})$ fueran desplazados a r_L aparecerá un cambio en el momento angular dado por:

$$\Delta J = - \text{sen}(x_{\max}) [\pi \sigma r^3 d/dr (r^2 \Omega)]_{r_L} x_{\max}^2 \quad 4.1.19$$

de donde:

$$x_{\max}^2 = 2\pi/3 \quad m/(1-c^m) \Omega(r_L) t_R [(r_L M_S / aM) e_S^{1-m} H_{1m}]^2,$$

4.1.20

con M la masa de Saturno, $c = \pm 1$ para resonancias interna y externa de Lindblad, $t_R = 5 \times 10^9$ años y H_{1m} son los coeficientes que provienen de G_{1m} y sus derivadas.

Con la aplicación de técnicas de análisis numérico se han obtenido valores para x_{\max} para la resonancia 2:1 que se relaciona con la División de Cassini.

Se puede concluir que el modelo propuesto por Goldreich y Tremaine se resume en lo siguiente:

Se genera una onda larga trasera la cual es lanzada desde el radio de Lindblad ($x = 0$). Esta onda se propaga hacia afuera del disco (Esposito et al 1984) incrementándose su densidad superficial y se transforma en un fenómeno no-lineal en $x = x_{NL}$. Pero en el momento en que aparecen los efectos no-lineales, crece la disipación debida a la viscosidad y la onda es atenuada muy cerca de x_{NL} . Los granos en esta región se mueven rápidamente hacia adentro y σ decrece en ese lugar.

Este proceso origina que $\sigma = 0$ en $x = x_{NL}$ y que el flujo de momento sea atenuado en la región $0 \leq x \leq x_{NL}$ formándose por lo tanto una banda "libre de materia" que será continuamente aspirada por las ondas de densidad subsecuentes.

El tiempo t_1 requerido para que esto ocurra está relacionado con x_{\max}^2 a través de la relación:

$$t_1 = (x_{NL} / x_{\max})^2 t_R \quad 4.1.21$$

4.1.b LAS ONDAS ESPIRALES BENDING

En el caso de las ondas espirales bending, éstas se producen por un satélite que se encuentra girando alrededor del planeta en una órbita inclinada con respecto al plano de los anillos y que ejerce una fuerza vertical sobre los cuerpos rocosos induciendo oscilaciones (ondas espirales bending) verticales que se transmiten a sus vecinos debido a la atracción gravitacional entre ellos (fig. 4.1.2).

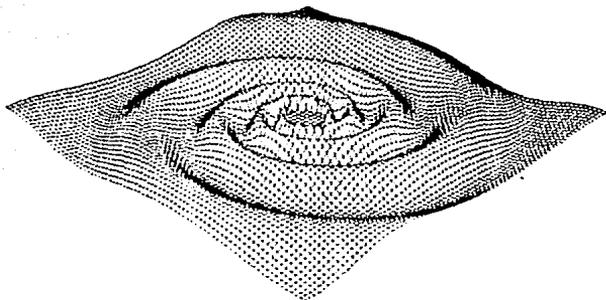


fig.4.1.2 Las ondas espirales bending en los anillos planetarios (Cuzzi et al 1984).

4.2 CREACION DE BRECHAS POR PASTOREO

En relación con el fenómeno de pastoreo. Goldreich y Tremaine (1978) han investigado la formación de satélites pastores para poder explicar cómo es que ellos a su vez dan origen a la creación de bandas en los anillos. Estos investigadores han proporcionado la siguiente explicación sobre la creación de las lunas pastoras.

Durante el periodo de formación del satélite, los granos del disco pudieron encontrarse fuera del límite de Roche. Cuando los granos acrecieron, la profundidad óptica y la razón de colisión disminuyeron y se incrementó la densidad superficial. En alguna forma se crearon ondas debido a resonancias de Lindblad que pudieron haber viajado grandes distancias antes de ser atenuadas originándose grandes brechas.

Los granos lanzados fuera de la brecha pudieron agruparse cerca de una resonancia de Lindblad y de esta forma amalgamarse para formar un satélite. Así, la existencia de satélites dentro o cerca de los anillos podría favorecer la formación de otros satélites cerca de órbitas resonantes (Dermott et al 1984).

Flynn y Cuzzi (1989) desarrollaron un modelo para determinar los efectos que las lunetas pastoras producen en la estructura de un anillo (Fig. 4.2.1).

El modelo supone que el ancho de una brecha está relacionado con el radio de la luneta, que los extremos de la brecha se encuentran en un intervalo $a_g \pm s$ y que la torca originada por el satélite mueve el material del anillo en dirección radial hacia la luneta.

Un inconveniente de este modelo proviene del hecho de que la teoría de pastoreo está incompleta y se presupone que la torca gravitacional generada por la luneta sobre el material del anillo tiene la misma magnitud que la torca viscosa generada entre los granos de polvo que constituyen la estructura.

La torca producida por la viscosidad del medio tiende a llenar la brecha originada por la torca gravitacional.

Para obtener el ancho radial de una brecha, se realiza una estimación empírica obteniéndose el valor $2s$ generado por una luneta de masa m suponiendo que la torca viscosa es igual a la torca gravitacional promediadas azimutalmente (Lissauer 1981):

$$s = (8 G^2 / 8 \pi \nu \Omega^2 a_s)^{1/3} m^{2/3} \quad 4.2.1$$

con G - la constante gravitacional

ν - viscosidad cinemática $\approx 1 \text{ cm}^2/\text{s}$

Ω - frecuencia orbital

a_s - radio de la luneta

m - la masa de la luneta

Se ha propuesto por algunos investigadores que el proceso de pastoreo puede ser más eficiente si se considera que las masas de las lunetas son pequeñas (Flynn y Cuzzi 1989).

Por otro lado, se ha demostrado que una luneta puede crear perturbaciones longitudinalmente extendidas en el material del anillo. Estas perturbaciones generadas gravitacionalmente (también conocidas como estelas) se manifiestan como ondas regulares sinusoidales asociadas con fluctuaciones en la profundidad óptica de las orillas de las brechas. Las perturbaciones repercuten en la morfología de las brechas generándoles una orilla ondulada que se asocia con una longitud de onda azimutal λ proporcional a la distancia radial entre la luneta y la orilla de la brecha, tal que $\lambda_\theta \approx 3\pi s$ (Cuzzi y Scargle 1985)

En vista de que el material del anillo está rotando diferencialmente, el patrón de ondas de la orilla interna de la brecha arrastra a la luneta y ésta al mismo tiempo arrastra al patrón ondulado de la orilla externa de la brecha.

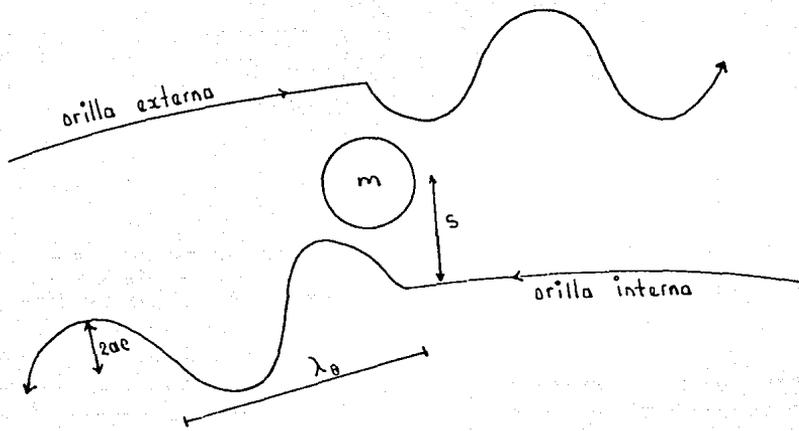


fig. 4.2.1 Generación de una brecha gracias al pastoreo por un satélite pequeño, del material del anillo (Flynn y Cuzzi, 1989).

La forma de la orilla ondulada se debe al movimiento orbital coherente de los granos que se desplazan en órbitas elípticas con una excentricidad dada por:

$$e = m / M_p (a / (a - a_s))^2, \quad 4.2.2$$

donde M_p es la masa del planeta y a la localización radial de la brecha.

Las variaciones en la profundidad óptica se producen cuando las velocidades orbitales diferenciales originan oscilaciones fuera de fase, estas variaciones están dadas por la ecuación:

$$\tau(r, \theta) = \tau_0(a) / (1 + \mu g(a, a_s, \theta)) \quad 4.2.3$$

donde $\mu = m / M_p$ ($M_p =$ masa del planeta)

τ_0 es la profundidad óptica

g es una función oscilatoria que depende únicamente de los parámetros geométricos conocidos (Schowalter et al 1986).

Por otro lado, la longitud de onda de las estelas puede ayudar a determinar la localización de la luneta, para ello se toma λ_r (longitud de onda radial) en cualquier punto del tren de la estela dada por:

$$\lambda_r = 3\pi a_s \delta^2 / \theta (1 - |\delta/\theta| \tan \alpha), \quad 4.2.4$$

$$\delta = (a - a_s) / a_s, \quad 4.2.5$$

$\delta =$ diferencia en longitud entre la luneta y el explorador,

$\alpha =$ ángulo entre la dirección radial y la dirección de exploración.

El estudio de otras resonancias gravitacionales asociadas con los anillos de Saturno y sus satélites ha llevado a asociar las brechas con algún o algunos de los satélites clásicos y con los satélites pequeños sumergidos en el disco planetario. En la mayoría de los casos, las brechas están relacionadas principalmente con los satélites clásicos Mimas y Titán y con los satélites pequeños: Jano, Epimeteo, Atlas, Prometeo y Pandora que prácticamente se encuentran sumergidos en los anillos.

Del análisis numérico realizado con datos obtenidos de los Viajero se ha podido identificar la localización de las brechas principalmente en el anillo A de Saturno y cada una de ellas está asociada con una resonancia originada por un satélite clásico o con un satélite pequeño (Tabla 4.2.2).

Muchas de las brechas en los anillos saturninos contienen anillos opacos observados muy cerca de resonancias conocidas en regiones donde τ es muy pequeña y probablemente son causadas por algún proceso asociado con resonancias, sin embargo todavía no existe alguna teoría lo suficientemente válida para dar una explicación a la existencia de los anillos delgados sumergidos en las brechas.

En relación a los dos tipos de ondas que se han observado en los anillos de Saturno (ondas de densidad y ondas bending), éstas han sido detectadas en regiones donde la profundidad óptica adquiere valores moderados y altos (a partir de 1.0).

El siguiente paso que habría que dar es realizar un análisis desde el punto de vista numérico para obtener resultados acerca de la magnitud de las brechas y la localización de resonancias para los anillos B y C donde también aparecen bandas que posiblemente se relacionen con resonancias originadas por lunetas sumergidas en ellos. Esto queda fuera del alcance de este trabajo porque por el momento no se cuenta con los datos necesarios para realizar un análisis detallado.

TABLA 4.1.2

LOCALIZACION DE ALGUNAS RESONANCIAS EN EL ANILLO A DE SATURNO

SATELITE ASOCIADO	R	LOCALIZACION R_S	ANILLO	σ	τ	$k \times 100$
JANO	2:1	1.59533	B	70(10)70	0.73	1.0
JAPETO	1:0	2.00867	D. de C	16(3)	0.14	0.9
	5:4	2.02740	A	30	0.62	2.1
	6:5	2.04833	A	81	0.99	1.2
JANO	4:3	2.07635	A	139	0.53	0.4
	6:5	2.08259	A	43	0.55	1.3
	7:6	2.08668	A	53	0.70	1.3
	8:7	2.11523	A	57	0.53	0.9
	8:7	2.15064	A	27	0.46	1.7
	10:9	2.15490	A	49(13)	0.43	0.9
JANO	5:4	2.16641	A	56(12)	0.48	0.8
	9:8	2.17309	A	49	0.46	0.9
	12:11	2.18115	A	53(10)	0.43	0.8(2)
MIMAS	5:3	2.19286	A	45(8)	0.85	2.1
	11:10	2.20556	A	44(9)	0.41	1.8
	15:14	2.20725	A	55(15)	0.42	0.16
	17:16	2.21948	A	58(15)	0.48	0.16
JANO	6:5	2.22549	A	40(6)	0.59	0.6
	13:12	2.22791	A	42(9)	0.51	1.2
	19:18	2.22912	A	52(14)	0.55	1.1
	20:19	2.23321	A	76(17)	0.50	0.7

σ = densidad superficial de masa ($g\ cm^{-2}$)

τ = profundidad óptica

k = coeficiente de extinción de masa $\times 100$ ($cm^2\ g^{-1}$)

(Esposito et al 1984)

CONCLUSIONES

1.- Las interacciones luz-materia participan en la producción de polvo micrométrico en los anillos planetarios repercutiendo en la pérdida de masa de los granos así como en el cambio de sus parámetros orbitales.

2.- Las colisiones contribuyen de manera significativa a la población del polvo en los anillos.

3.- El material de los anillos se distribuye por difusión en donde la viscosidad juega un papel preponderante.

4.- Para que un anillo alcance el equilibrio en la energía es necesario que el coeficiente de restitución e sea una función dependiente de la velocidad de dispersión v_d , de lo contrario, el material anular adquiere una configuración toroidal o de disco de mono-nivel.

5.- La División de Cassini es originada por la resonancia 2:1 con el satélite Mimas.

6.- Aun cuando se ha tratado de explicar la existencia de bandas con resonancias gravitacionales, ondas de densidad y ondas bending y fenómenos de pastoreo, no existe ninguna teoría completa que describa su origen y evolución y mucho menos que explique por qué existen bandas que no se encuentran localizadas en lugares donde se asocian resonancias o satélites pastores. Esto posiblemente implica que las bandas no solamente son generadas por resonancias o pastoreo sino por algún otro mecanismo no estudiado todavía y que probablemente tenga un origen electromagnético o que su existencia se mantenga por un proceso de esta naturaleza. Con respecto a este último punto, considero por un lado que existe la posibilidad de que se presente un fenómeno electromagnético porque las brechas contienen anillos de polvo y por otro, que las brechas puedan ser generadas por dos o más mecanismos acoplados.

Aun cuando se ha avanzado en el estudio de la dinámica de los

anillos planetarios, todavía existen muchos fenómenos que no han sido comprendidos y para ello es necesario elaborar modelos numéricos que permitan conocer el origen, evolución y dinámica de tales estructuras incluyendo el estudio de aquellos fenómenos conocidos como gravitoelectrodinámicos y que posiblemente sean los más relevantes en el comportamiento del polvo ya que los anillos se encuentran sumergidos en un ambiente magnetosférico existiendo interacciones de tipo electromagnético.

APENDICE 1
COEFICIENTES DE EFICIENCIA - TEORIA DE MIE

La dispersión de Mie es un fenómeno que se observa cuando un haz de luz incide sobre las partículas (granos de polvo) cuyo tamaño es mayor que $1/10 \lambda$ de la luz incidente (con λ la longitud de onda de la luz incidente). (McCartney 1976).

Para estas partículas, la luz dispersada en un punto de su superficie está fuera de fase de la luz dispersada en otro punto de ella, por lo cual si se toma en cuenta dos contribuciones que provienen de dos puntos diferentes, se observa que la distribución de la luz dispersada no es simétrica.

Al incrementarse el tamaño de la partícula, la luz dispersada se concentra más en la dirección hacia adelante y el análisis del patrón de dispersión se torna un problema muy complicado. (fig.1).

Para hacer el análisis de este patrón de dispersión, la teoría de Mie toma en cuenta:

- a) el tamaño
- b) la forma
- c) la absorbitividad
- d) la cte. dieléctrica
- e) el índice refractivo del medio
- f) la solución de las ecuaciones de Maxwell para la partícula
- g) el flujo energético interceptado por la superficie

Del análisis se obtiene una serie infinita de ondas parciales cuya amplitud decrece rápidamente cuando las partículas se hacen más pequeñas.

Si las partículas son muy pequeñas, con un diámetro aproximado con la longitud de onda de la luz incidente y gradualmente se incrementa su tamaño, se observa que hay una transición de la dispersión de Rayleigh a la dispersión de Mie, ésta está caracterizada por:

- 1) Una dependencia complicada de la intensidad de la luz dispersada sobre el ángulo de observación.
- 2) Al incrementarse el tamaño de la partícula, hay un crecimiento en la dirección hacia adelante del patrón de dispersión manifestándose como un lóbulo que se va alargando

constantemente (fig.1.).

3) La pequeña dependencia de la dispersión sobre λ cuando el tamaño de la partícula es grande. (En realidad esta dependencia es casi nula).

La dispersión por una molécula compuesta por muchos átomos es una extensión de la dispersión por una sola molécula.

Debido a que ahora están involucrados muchos osciladores en un paquete molecular, la interferencia de las ondas dispersadas es una función del ángulo de observación.

Mientras que para una molécula de gas, solamente se asocia un dipolo, una partícula consiste de muchas moléculas complejas que podemos asociar con un arreglo multipolar.

Cuando la partícula interacciona con un haz de luz, las moléculas son excitadas creándose como una consecuencia de esto, multipolos oscilantes.

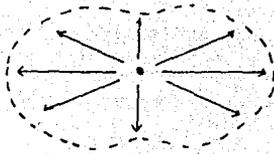
Los multipolos dan lugar a ondas electromagnéticas secundarias (también llamadas parciales), las cuales combinadas con el campo del haz incidente, producen la onda dispersada.

Las ondas parciales son representadas en teoría por términos sucesivos en una serie que converge lentamente y cuya suma al cuadrado dá la intensidad dispersada en un ángulo de dispersión particular.

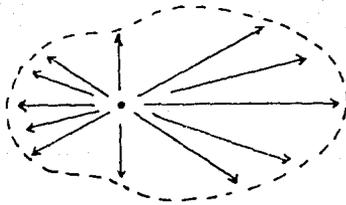
Debido a que el tamaño de la partícula es comparable con una λ , la fase de la onda primaria no es uniforme sobre la partícula resultando una diferencia de fase espacial y temporal entre las ondas parciales. En el punto donde se combinan las ondas parciales para formar la onda secundaria o dispersada, las diferencias causadas por las diferencias de fase, se producen dentro de las ondas parciales. las interferencias dependen de:

- 1) La λ de la luz incidente
- 2) El tamaño e índice refractivo de la partícula
- 3) La localización angular del detector

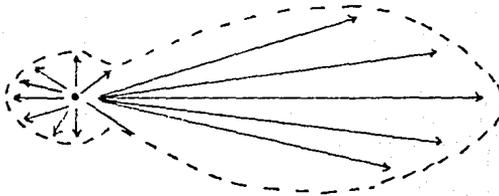
Las variaciones grandes en la intensidad dispersada, son determinadas cuando el detector se mueve alrededor de la partícula a varios ángulos de observación resultando por lo tanto que las interferencias se hagan más grandes cuando el tamaño de la partícula se incrementa (fig. 2).



0.01 0.02 0.1 μm



0.1 0.2 1.0 μm



1 2 10 μm

fig.1 Patrón de dispersión de partículas micrométricas
(Scorer, 1989)

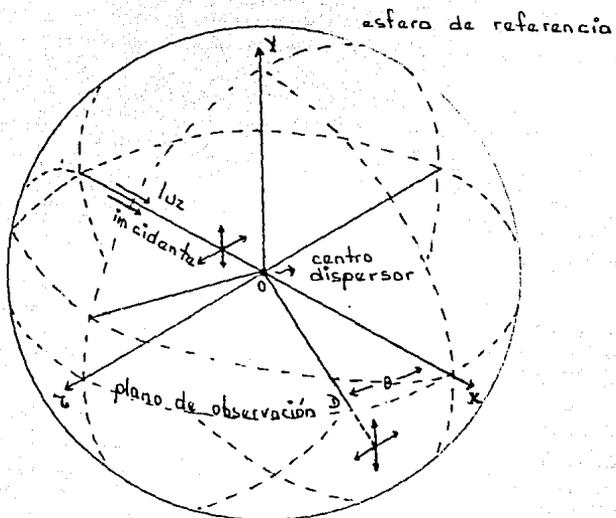


fig. 2 Esfera de referencia donde se localiza el centro dispersor (McCartney, 1964).

El centro dispersor en el punto O puede ser cualquier partícula o un volumen conteniendo N partículas. La luz incidente viaja en la dirección + x, la dirección de observación OD permanece en el plano xz y al ángulo θ de la dirección hacia adelante de la luz incidente. De hecho, el plano de observación siempre definido por estas dos direcciones excepto en 0° y 180° coinciden en el plano xz.

A veces se define $\theta = 180^\circ - \gamma$ con γ el ángulo definido en la dirección contraria a la dirección de la luz incidente.

La distancia OD del dispersor al detector es llamada la DISTANCIA RADIOMETRICA.

La luz incidente puede estar polarizada o no. Cuando la luz está polarizada en el plano, la orientación del plano conteniendo el vector eléctrico es especificada por el ángulo ϕ medido sobre el plano de observación o plano xz.

Cuando la luz está polarizada aparecen los sgs. casos standard:

- 1) El plano que contiene al vector eléctrico coincide con el plano xy tal que el ángulo $\theta = 90^\circ$ y el vector eléctrico es perpendicular al plano de observación.
- 2) El plano que contiene al vector eléctrico coincide con el plano xz tal que $\phi = 0^\circ$ y el vector es paralelo al plano de observación.

Cuando la luz no está polarizada se tiene que hacer las siguiente consideración:

Supongamos que la luz natural o no polarizada puede ser tratada como la suma de dos ondas ortogonales polarizadas linealmente, teniendo relaciones no coherentes. La polarización de estas ondas, puede tener cualquier orientación alrededor del eje de propagación, tan grande como ellas permanecen ortogonales. La relación básica para expresar esto es la siguiente:

$$E = 1/2 (E_{\perp} + E_{\parallel}) \quad I.1$$

donde E es la irradiancia unitaria de la luz no polarizada

E_{\perp} es la irradiancia de la onda polarizada cuyo vector eléctrico es perpendicular al plano de referencia de

orientación arbitraria alrededor del eje de propagación.

E_{\parallel} es la irradiancia unitaria de la onda polarizada cuyo vector eléctrico es paralelo a este plano de referencia.

El plano de observación entonces se convierte en el plano de referencia para definir la dirección de polarización de las dos componentes ortogonales incoherentes de la luz incidente.

Con cada partícula, hay asociada una sección transversal de dispersión angular que define la intensidad dispersada para una irradiancia unitaria de la luz incidente.

La cantidad de luz dispersada en todas las direcciones por una sola partícula está dada por su sección transversal de dispersión.

Esta sección transversal está relacionada con la sección transversal geométrica por un parámetro llamado el factor de eficiencia o coeficiente de Mie.

Dependiendo de la λ de la luz incidente, del tamaño e índice refractivo de la partícula, el factor de eficiencia puede tomar valores que indican que la partícula puede dispersar más flujo del que su sección transversal geométrica puede interceptar del flujo incidente.

Cuantitativamente, la importancia de la longitud de onda y del tamaño de la partícula podría ser apreciado del hecho de que estos dos parámetros determinan la distribución de fase sobre la partícula. En este punto se ha considerado que la partícula es esférica e isotrópica (válido para neblina, niebla y nubes).

Con λ y r (radio de la partícula) se define el parámetro de tamaño como:

$$x = 2\pi r/\lambda \qquad \text{I.2}$$

donde:

λ es la longitud de onda de la luz incidente

x representa el producto del radio de la partícula y la constante de propagación k ($k = 2\pi/\lambda$).

FUNCIONES DE DISTRIBUCION

Las características angulares de la dispersión de Mie para

todas las partículas y longitudes de onda consideradas son expresadas por dos funciones de distribución.

DEFINICION FORMAL DE LAS FUNCIONES

La luz dispersada en un ángulo de observación θ puede ser tratada como consistente de dos componentes que tiene intensidades $I(\theta)$ e $I(\theta)$ polarizadas en el plano de observación respectivamente. Estas funciones son la esencia de la teoría de Mie y dependen del parámetro de tamaño, del índice refractivo y del ángulo θ indicado en la fig.1.

Para una partícula isotrópica esférica las funciones son expresadas por:

$$i_1(\alpha, m, \theta) = |S_1|^2 = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n + b_n \tau_n) \right|^2 \quad I.3$$

$$i_2(\alpha, m, \theta) = |S_2|^2 = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n) \right|^2 \quad I.4$$

$$= \left| \text{Re}(S_2) + i \text{Im}(S_2) \right|^2$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

Cada función de la intensidad está determinada como la suma de una serie infinita que converge lentamente. Cuando $x \gg 1$, el número de términos requeridos para convergencia es más grande que el valor de x .

Cuando $x \ll 1$ y $m \approx 1$, el primer término en cada serie corresponde a la dispersión de Rayleigh, π_n y τ_n dependen solamente del ángulo θ e involucran la primera y segunda derivada de los polinomios de Legendre de orden n y argumento $\cos \theta$.

a_n y b_n son determinados de las funciones de Ricatti-Bessel y son independientes del ángulo θ cuyos argumentos dependen de x y m .

Los símbolos Re e Im denotan la parte real y la parte imaginaria de S_1 y S_2 .

El significado de i_1 e i_2 es mostrado con los siguientes ejemplos:

1.- Cuando la partícula es iluminada por luz polarizada en el plano cuyo vector eléctrico es perpendicular al plano de observación, donde el ángulo de polarización es 90° , la intensidad de la luz dispersada en este plano, está dada por:

$$I_1(\theta) = E \lambda^2 i_1 / 4\pi^2 \quad I.5$$

donde E es la irradiancia de la luz incidente. Con $\phi = 90^\circ$ no existe componente $I(\theta)$ en este plano.

2.- Cuando la partícula está iluminada por la luz polarizada en el plano cuyo vector eléctrico es paralelo al plano de observación donde $\phi = 0$, la intensidad de la luz dispersada en este plano está dada por:

$$I_u = E \lambda^2 i_2 / 4\pi^2 \quad I.6$$

Con $\phi = 0^\circ$ no existe componente i_1 y no hay componente $I_1(\theta)$ en este plano.

3.- Cuando la partícula es iluminada por luz polarizada en el plano cuyo vector eléctrico no es ni perpendicular ni paralelo al plano de observación tal que $90^\circ > \phi > 0^\circ$, la intensidad de la luz dispersada en este plano está dada por:

$$I(\theta, \phi) = E_\phi (\lambda^2 / 4\pi^2) (i_1 \text{sen}^2 \phi + i_2 \text{cos}^2 \phi) \quad I.7$$

En general, la luz dispersada está elípticamente polarizada porque las dos componentes son derivadas de la misma fuente dispersora pero bajo diferentes fases retrasadas. la diferencia de fase entre las dos componentes depende del índice de refracción de la partícula y de su tamaño.

4.- Cuando la partícula está iluminada por luz no polarizada representada por dos vectores eléctricos de la misma magnitud, uno paralelo y el otro perpendicular al plano de observación pero no

teniendo relación coherente, la luz dispersada puede expresarse en términos de dos componentes incoherentes de acuerdo con:

$$I(\theta) = \frac{I_1(\theta) + I_2(\theta)}{2} = E (\lambda^2 / 4\pi^2) (i_1 + i_2) / 2 \quad I.8$$

DISPERSION ANGULAR POR MONODISPERSORES

La sección transversal angular de una partícula es análoga a la de una molécula y se define como aquella sección transversal de una onda incidente que actúa sobre la partícula teniendo una área tal que el flujo de potencia a través de ella es igual al flujo de potencia dispersada por steradian a un ángulo de observación θ . La sección transversal angular $\sigma_p(\theta)$ está definida por:

$$\sigma_p(\theta) E_0 = I(\theta) \quad I.9$$

$$\sigma_p(\theta) \bar{S} = I(\theta) \quad I.10$$

donde \bar{S} es el valor promedio del vector de Poynting de la luz incidente y es equivalente a la irradiancia E_0 de esta luz, (las dimensiones de $\sigma_p(\theta)$ son L^2).

Cuando la luz incidente está polarizada en el plano con su vector eléctrico perpendicular al plano de observación ($\phi = 90^\circ$), la sección transversal angular de la partícula está dada por:

$$\sigma_{p,\perp} = I_{\perp}(\theta) / E_{0,\perp} = \lambda^2 i_1 / 4\pi^2 \quad I.11$$

Cuando la luz incidente está polarizada en el plano con su vector eléctrico paralelo al plano de observación ($\phi = 0^\circ$), la sección transversal se define como:

$$\sigma_{p, \parallel} = I_{\parallel}(\theta) / E_{0, \parallel} = \lambda^2 i_2 / 4\pi^2 \quad I.12$$

Cuando la luz incidente no está polarizada, la sección transversal se expresa a partir de la relación:

$$\begin{aligned} \sigma_p(\theta) &= (I_{\perp}(\theta) + I_{\parallel}(\theta)) / 2E_0 \\ &= I(\theta) / E_0 \\ &= (\lambda / 4\pi^2) (i_1 + i_2) / 2 \quad I.13 \end{aligned}$$

La sección transversal angular es una función de los parámetros α , m y θ a través de las funciones i_1 e i_2 y depende del estado de polarización de la luz incidente pero es independiente de su irradiancia.

COEFICIENTE ANGULAR DE VOLUMEN

Mientras que la sección transversal angular de una partícula representa dispersión que es muy difícil de observar, el coeficiente angular de volumen representa dispersión que es una observable principal en el mundo exterior.

Este coeficiente representa la dispersión angular característica de un volumen unitario de aerosol y es determinado directamente de la sección transversal angular de las partículas.

La separación aleatoria y los movimientos de las partículas excluye cualquier interferencia entre los flujos dispersados individualmente tal que la dispersión es incoherente como en el caso molecular y las intensidades de las ondas pueden ser sumadas.

Cuando las partículas son esféricas y del mismo tamaño e índice refractivo, todos los patrones de dispersión o secciones transversales son idénticas. Si hay N partículas en el volumen unitario, la intensidad dispersada en cualquier dirección es N veces la de una partícula.

El coeficiente angular de volumen, denotado para el caso general por $\beta_p(\theta)$ tiene la misma forma que la sección transversal

angular $\sigma_p(\theta)$. Cuando la luz incidente está en el plano polarizado con su vector eléctrico perpendicular al plano de observación, el coeficiente está dado por:

$$\begin{aligned} \beta_{p,\perp}(\theta) &= N \sigma_{p,\perp}(\theta) \\ &= N \lambda^2 i_{\perp} / 4\pi^2 \end{aligned} \quad I.14$$

Cuando la luz incidente está polarizada con su vector paralelo al plano de observación, tenemos:

$$\beta_{p,\parallel}(\theta) = N \sigma_{p,\parallel}(\theta) = N \lambda^2 i_{\parallel} / 4\pi^2 \quad I.15$$

y cuando la luz incidente no está polarizada:

$$\beta_p(\theta) = N \sigma_p(\theta) = (N \lambda^2 / 4\pi^2) (i_1 + i_2) / 2 \quad I.16$$

Cuando la luz incidente tiene una irradiancia unitaria, el valor numérico de $\beta_p(\theta)$ representa la intensidad de la luz dispersada del volumen unitario de aerosol pasando a través de un ángulo sólido infinitesimal $d\omega$ a un ángulo θ en términos de la potencia o energía emitida por steradian, por sección transversal unitaria y por unidad de longitud (o por unidad de volumen).

Cuando la luz incidente está en el plano polarizado, el plano de polarización de la luz dispersada con respecto al plano de observación es el mismo que aquél de la luz incidente. Cuando la luz es no polarizada, la luz dispersada es una mezcla de luz polarizada y luz no polarizada donde el grado de polarización está dado por:

$$P = (i_1 - i_2) / (i_1 + i_2) \quad I.17$$

DISPERSION TOTAL POR MONODISPERSORES

La dispersión total de las partículas se refiere a la cantidad de flujo total dispersado en todas direcciones y se caracteriza al

definir la sección transversal de dispersión así como el factor de eficiencia Q

SECCION TRANSVERSAL DE DISPERSION Y FACTOR DE EFICIENCIA

La sección transversal total dispersada σ_p está definida como la sección transversal de una onda incidente actuando sobre la partícula, teniendo una área tal que la potencia que fluye a través de ella es igual a la potencia total dispersada en todas direcciones. Cuando esta definición es comparada con aquella dada para $\sigma_p(\theta)$ es claro que la sección transversal está definida como:

$$\sigma_p = \int_0^{4\pi} \sigma_p(\theta) d\omega \quad I.18$$

para luz incidente no polarizada.

La geometría para la integración es la misma que la mostrada en la fig. 2 para el caso molecular y la relación entre las variables de integración es:

$$d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta \quad I.19$$

entonces:

$$\sigma_p = 2\pi \int_0^\pi \sigma_p(\theta) \sin \theta d\theta \quad I.20$$

donde σ_p representa el área del frente de onda incidente aplicable para la interacción con la partícula.

Valores de la sección transversal de dispersión total cubren un intervalo mucho mayor que el correspondiente para la sección transversal geométrica.

Las dos secciones están relacionadas por el factor de eficiencia Q_{sc} frecuentemente llamado el coeficiente K de Mie que representa la razón entre la sección transversal dispersada y la sección transversal geométrica.

Esta razón se puede expresar como:

$$Q = \sigma_p / \pi r^2 = (2/r^2) \int_0^\pi \sigma_p(\theta) \sin \theta d\theta \quad I.21$$

Este término define la eficiencia con la cual la partícula dispersa totalmente la luz incidente.

En términos de las funciones de distribución, el factor de eficiencia puede ser expresado a través de la siguiente relación:

$$Q = (1/\alpha^2) \int_0^\pi (i_1 + i_2) \sin \theta \, d\theta \quad I.22$$

El factor de eficiencia Q tiene una dependencia dual sobre el parámetro α : implícitamente en las funciones de distribución de intensidad i_1 e i_2 y explícitamente en el denominador de la ec. I.22.

En suma, Q tiene la misma dependencia que i_1 e i_2 sobre el índice refractivo de la partícula.

Para propósitos de cómputo, σ_p y Q pueden ser definidos en términos de las funciones complejas a_n y b_n empleados anteriormente para expresar i_1 e i_2 por lo que denotamos a estos parámetros a través de las siguientes relaciones:

$$\sigma_p = \lambda^2/2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad I.23$$

$$Q = 2/x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad I.24$$

Cuando x es muy pequeña, $Q_{dis} \ll 1$ y las partículas dispersan menos flujo del que podría ser interceptado por su sección transversal geométrica. Cuando x se incrementa, Q_{dis} se eleva a un valor máximo (aproximadamente 4) y posteriormente converge a 2 en la forma de una oscilación atenuada (fig. 3).

FACTORES DE EFICIENCIA DE ABSORCION, EXTINCION Y PRESION DE LA LUZ

La diferencia entre el flujo removido del haz incidente y el flujo totalmente dispersado podría ser atribuído a la absorción realizada por la partícula. La absorción ocurre cuando el índice de refracción es complejo y la energía absorbida se emplea en calentar a la partícula. En cuanto la atenuación (o extinción) del flujo de un haz es tomada en cuenta, no se considera si el flujo removido fué causado por absorción o dispersión, simplemente se toman en cuenta estos dos procesos y con ellos se define el coeficiente de extinción de la siguiente manera:

$$Q_{ext} = Q_{dis} + Q_{abs} \quad I.25$$

donde Q_{dis} está definida por la ec.1.24 y Q_{ext} está representada en la siguiente ecuación:

$$Q_{ext} = 2/x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[Re (a_n + b_n) \right] \quad I.26$$

Para Q_{abs} simplemente se realiza un despeje de la ecuación

En la fig. 3 se tiene una relación entre Q_{dis} y x (para agua con índice refractivo $m = 1.29$) y de ella se puede observar que:

- 1) Cuando la absorción es casi cero: $Q_{ext} = Q_{dis}$.
- 2) Cuando la absorción se incrementa, la curva converge a 2 rápidamente.

En el caso de que la partícula intercepte un flujo de radiación, se va a producir una transferencia de momento del haz incidente a la partícula en una magnitud proporcional a la sección transversal de extinción. Del momento removido por el proceso de dispersión, la parte asociada con la componente hacia adelante es devuelta al haz incidente, bajo estas consideraciones se define el factor de eficiencia de presión de la luz como:

$$Q_p = Q_{ext} - \overline{\cos \theta} Q_{dis} \quad I.27$$

El término $\cos \theta$ es conocido como el factor de asimetría y representa el valor promedio de $\cos \theta$ sobre la esfera pesada para los valores de la intensidad $I(\theta)$.

Para partículas y moléculas muy pequeñas, la simetría de la dispersión de Rayleigh produce $\cos \theta = 0$ y por lo tanto $Q_p = Q_{ext}$.

Existe una relación muy cercana entre el promedio del coseno y el índice de refracción encontrándose dos casos extremos:

- 1) Cuando $m=1$, no hay reflexión o refracción y todo el flujo incidente pasa a través de la partícula sin desviarse. La dispersión es completamente asimétrica, i.e. $\cos \theta = 1$ y $Q_p = 0$.
- 2) Cuando $m =$ ningún flujo refractado puede pasar a través de la partícula. El flujo refractado es distribuido isotrópicamente y por lo consiguiente no hay contribución a $\cos \theta$. La única contribución es aquella dada por la difracción que se relaciona con un valor de $\cos \theta = 0.5$.

Para los anillos planetarios, los coeficientes de eficiencia son evaluados bajo la consideración de que la luz que incide sobre ellos no está polarizada.

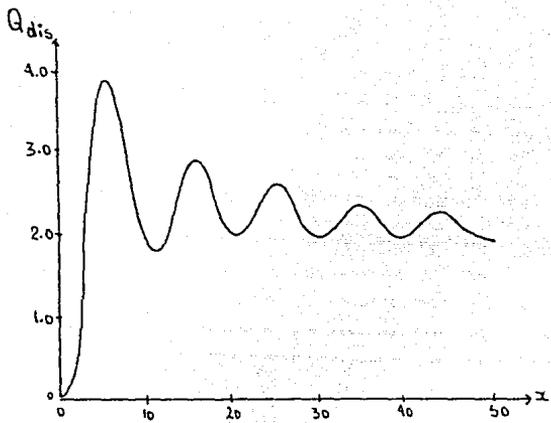


fig.3 Q_{sc} vs x para $m = 1.29$ (agua) (McCartney, 1976) ($m = \text{índice de refracción complejo}$).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1.-Araki S y Tremaine S, 1986, *Icarus*, 65,83.
- 2.-Baum W A et al 1981, *Icarus*, 47,84.
- 3.-Borderies N., Goldreich P. y Tremaine S., 1983, *Icarus*, 55, 124.
- 4.-Borderies N, Goldreich P. y Tremaine S. 1989, *Icarus*, 80,334.
- 5.-Borderies N., Goldreich P. y Tremaine S., 1985, *Icarus*, 63, 406.
- 6.-Brower D ,1983,*Astron. Journal*, 68, 152.
- 7.-Brower y Clemence, 1961, *Celestial Mechanics*, Ed. Academic Press.
- 8.-Burgess E. ,1989, *Uranus and Neptune*, Ed.Columbia.
- 9.- Burns J.,Schowalter M. y Morfill G.E.,1984, *Planetary Rings*, The University of Arizona Press.
- 10.-Burns J, 1976, *Am. Journal of Physics*, 44, 10.
- 11.-Burns J., Lamy P. y Soter S., 1979, *Icarus*, 40, 1.
- 12.-Burns J A, 1976, *EOS*, 57, 152.
- 13.-Burns J., Schowalter m. y Morfill G.,1977, *Planetary Satellites*, The University Of Arizona Press.
- 14.-Burns J., 1981, *The New solar system*, Ed. Beatty y O'Leary.
- 15.- Cuzzi J., Lissauer J. y Shu F., 1981, *Nature*, 292, 703.
- 16.- Cuzzi J. y Esposito L., 1984, *Scientific American*, enero.
- 17.-Cuzzi J.,Lissauer J., Esposito L., Holberg J.B., Marouf E., Tyler G.y Boishot A.,, 1984, *Planetary Rings*, Ed. The University of Arizona Press.
- 18.- Cuzzi J. y Scargle J., 1985, *Astrophys. J.*, 292, 276.
- 19.-Cuzzi J et al, 1987, *Icarus*, 69, 458.
- 20.-Dermott S. F., 1984, *Planetary Rings*, The university of Arizona Press.
- 21.-Durisen R. H., 1984, *Planetary Rings*, Ed. The University of Arizona press.
- 22.-Elliot J. L., French R., Meech K. y Elias J., 1984, *Astron. J.*, 89, 1587.
- 23.- Elliot J.L. y Nicholson P.D., 1984, *Planetary Rings*, Ed. The University of Arizona Press.

- 24.- Esposito L., Cuzzi J., Holberg J., Marouf E., Tyler G. y Porco C., 1984, Saturn, Ed. The University of Arizona Press.
- 25.-Flynn B. y Cuzzi J., 1989, Icarus, 82, 180.
- 26.-Franklin F., Lecar M. y Wiesel W., 1984, Planetary Rings, Ed. The University of Arizona Press.
- 27.-Goldreich P. y Tremaine S., 1978, Icarus, 34, 227.
- 28.- Goldreich P. y Tremaine S., 1978, Icarus, 34, 240.
- 29.-Greenberg R, 1977, Planetary Satellites, Ed. The University of Arizona Press.
- 30.-Greenberg R., 1982, Satellites of Jupiter, Ed. The University of Arizona Press.
- 31.-Greenberg R, 1983, Icarus, 53, 207.
- 32.-Greenberg R, 1984, Saturn, Ed. The University of Arizona Press.
- 33.-Jewitt D. C., Danielson G. y Terrile R. J., 1981, Icarus, 48, 536.
- 34.-Jewitt D. C., y Danielson G., 1981, JGR, 86, 691.
- 35.-Lissauer J.J., Shu F. y Cuzzi J., 1981, Nature, 292, 707.
- 36.-Marouf E. y Tyler G.L., 1986, Nature, 323, 31.
- 37.-McCartney E. J., 1976, Optics of the Atmosphere, Ed. Wiley.
- 38.-McDonald J S B et al, 1989, Icarus, 82, 167.
- 39.-Mignard F., 1984, Planetary Rings, Ed. The university of Arizona Press.
- 40.-Millis R., Wasserman L. y French R., 1987, Icarus, 69, 176.
- 41.-Nicholson D R, 1983, Introduction to Plasma Theory, Ed. John Wiley and Sons Inc.
- 42.-Pollack J., 1982, Scientific American, enero.
- 43.-Scorer R S, 1989, Satellite as Microscope, Ed. Ellis Horwood.
- 44.-Schowalter M., Cuzzi J., Marouf E. y Esposito L., 1986, Icarus, 66, 297.
- 45.- Showalter M. , Burns J., Cuzzi J. y Pollack J., 1987, Icarus, 69, 458.
- 46.-Shu F., 1984, Planetary Rings, Ed. The University of Arizona Press.
- 47.-Smith B A, Soderblom L.A., Batson R., Bridges P., Inge J., Masursky H., Shoemaker E.M., Beebe R. F., Briggs G.A., Bunker A., Collins S.A., Hansen C. J., Johnson T.V., Mitchell J.L., Terrile R., Cook A. F., Cuzzi J., Pollack J., Danielson G.E., Ingersoll A.P., Davies M.E., Hunt G.E., Morrison D., Owen T., Sagan C.,

Veverka R.G., y Suomi V.F., 1982, *Science*, 215,504.

48.-Spitzer L, 1962, *Physics of fully ionized gases*, Ed. Interscience.

49.-Stewart G. R., Lin D. N. y Bodenheimer P., 1984, *Planetary Rings*,Ed. The University of Arizona Press.

50.-Van de Hulst 1957, *Light Scattering by Small Particles*, Ed. John Wiley and Sons.

51.-Wiedenschilling S. J., Chapman C. R. y Davies D. R., 1984, *Planetary Rings*, Ed. The University of Arizona Press.