

4
24

TRAYECTORIAS DIRIGIDAS Y CONJUNTOS
INDEPENDIENTES EN DIGRAFICAS

FALLA DE ORIGEN

ALMA ERIKA ALVAREZ JIMENEZ .



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	Pag.
- Introducción	1
- Preliminares	3
- Capítulo I Arborescencias	10
- Capítulo II Teorema de Gallai-Milgram y resultados relacionados	19
- Capítulo III Conjuntos independientes y Trayectorias dirigidas de longitud máxima en digráficas	34
- Apéndice A Núcleos	53
- Apéndice B R-digráficas	56
- Bibliografía	59

I N T R O D U C C I O N

Muchos son los científicos que han dedicado y dedican su vida a la investigación de la *Teoría de Gráficas*.

Crestín en 1969 encontró que era posible direccionar todas las aristas de una digráfica conexa de tal manera que la digráfica resultante tenga un subárbol generador H . Este y otros resultados relacionados se describen en el capítulo uno.

Gallai y Milgram demostraron que en una digráfica $D=(X,U)$ sin flechas múltiples ni lazos, el mínimo número de trayectorias elementales que parten a X es menor o igual al número de independencia de G . En el capítulo dos se muestra una generalización de este resultado.

Roy e independientemente Gallai (1967 y 1968), probaron que el número cromático de una digráfica sin ciclos, es menor o igual al número de vértices de una trayectoria dirigida de longitud máxima contenida en esa digráfica. En el capítulo tres se presenta el siguiente resultado con el fin de fortalecerlo:

Para toda digráfica sin ciclos G , existe un conjunto independiente S , tal que $\lambda(G-S) < \lambda(G)$.

H. Galeana-Sánchez y Hugo A. Rincón Mejía obtuvieron algunas condiciones suficientes para digráficas que satisfacen la siguiente conjetura propuesta por J. M. Laborde, C. Payan y N. H. Huang en 1982 :

Toda digráfica D tiene un conjunto independiente S , que interseca toda trayectoria dirigida de longitud máxima.

En el capítulo tres se presentan también algunos resultados obtenidos por Galeana y Rincón sobre conjuntos independientes y trayectorias dirigidas de longitud máxima, que es el tópico que da título a esta tesis.

El objetivo de esta tesis es presentar una recopilación de los últimos resultados obtenidos por científicos dedicados a la investigación de la Teoría de Gráficas, concernientes a trayectorias dirigidas y conjuntos independientes en digráficas, así como dejar abiertas algunas proposiciones para su estudio posterior.

P R E L I M I N A R E S

Una gráfica G consta de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices o puntos, denotado por $V(G)$, junto con un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de G llamados aristas o arcos, denotado por $A(G)$.

Si u y v son dos vértices de una gráfica G y $a = (u,v) \in A(G)$ diremos que u y v son extremos de a y que u y v son *adyacentes*.

Dos aristas son *adyacentes* si tienen un extremo en común. Una arista *incide* en un vértice v , si v es uno de sus extremos.

El *grado* de un vértice v en G , denotado por $\delta_0(v)$, es el número de aristas que inciden en v , es decir, el número de vértices adyacentes a v .

Los *vecinos* de un vértice v de G es el conjunto $\Gamma(v) = \{ u \in V(G) \mid (u,v) \in A(G) \}$.

Dos gráficas G y H son *isomorfas* si existe una función $f: V(G) \rightarrow V(H)$ biyectiva tal que :

u es adyacente a v en G sii $f(u)$ es adyacente a $f(v)$ en H .

Un *camino* C , es una sucesión alternada de vértices y aristas tal que vértices y aristas consecutivos son adyacentes. Si el camino empieza en u y termina en v lo llamaremos un *uv-camino*.

Un *paseo* P es un camino en el que no se repiten aristas.

Una trayectoria T es un camino en el que no se repiten vértices.

Un camino cerrado es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.

Un ciclo C es un camino cerrado en el que no se repiten vértices, sólo el primero y el último que son iguales.

La longitud de un camino C , denotada por $l(C)$, es el número de aristas que contiene. Si C tiene n vértices entonces $l(C)=n-1$.

Una gráfica G es conexa si para todo $u, v \in V(G)$ existe un uv -camino.

Una gráfica H es una subgráfica de G si se cumple que :
 $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Las componentes conexas de una gráfica G son las subgráficas de G máximas con la propiedad de ser conexas.

Una gráfica H es una subgráfica inducida de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $(u, v) \in A(H)$ si y sólo si $(u, v) \in A(G)$.

Si en una gráfica G todo par de vértices es adyacente entonces decimos que G es completa. La cual denotamos por K_p , donde p es el número de vértices de G .

Denotamos por $K_p - e$ a la gráfica completa de p vértices menos la arista de e .

Un *clan* de G es un conjunto de vértices que inducen una subgráfica completa máxima.

Una gráfica G es *bipartita* si existe una partición de $V(G)$ en los conjuntos V_1 y V_2 tal que toda arista de G tenga un extremo en V_1 y otro en V_2 .

Una gráfica G es *bipartita completa* si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ de tal manera que todo vértice de V_1 es adyacente a todos los vértices de V_2 . La escribiremos como $K_{n,m}$ donde $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$. Si $|V_1| = 1$ entonces G recibe el nombre de *estrella* y la denotamos por $K_{1,m}$.

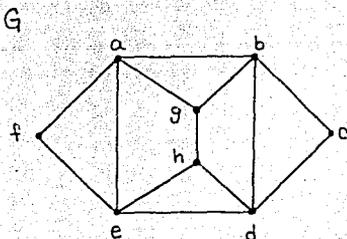
Dada una gráfica G el *complemento* de G denotado por G^c , es una gráfica tal que: $V(G^c) = V(G)$ y u es adyacente a v en G^c si y sólo si u no es adyacente a v en G .

Una gráfica G es un *árbol* si G es una gráfica conexa y sin ciclos.

Sea $v \in V(G)$, si el número de componentes conexas de $G - v$ es mayor que el número de componentes conexas de G , entonces a v lo llamaremos *punto de corte*.

Sea $A \subseteq V(G)$, si el número de componentes conexas de $G - A$ es mayor que el número de componentes conexas de G , entonces a A lo llamaremos *conjunto de corte*.

Algunos ejemplos de los conceptos anteriores se encuentran en la Figura No. 1.



$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$\{a, b\}, \{g, h\} \in A(G)$$

$$a \text{ es adyacente a } g$$

$$\{a, f\} \text{ es adyacente a } \{f, e\}$$

$$\{c, d\} \text{ incide en } d$$

$$\Gamma(b) = \{a, g, d, c\}$$

$$T = \{f, a, g, b, c\}$$

$$C = \{h, g, b, c, d, h\}$$

$$l(C) = 5$$

$$\delta_0^-(e) = 4$$

FIGURA No. 1

Una *digráfica* D consiste en un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados vértices, denotados por $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, llamados flechas (aristas dirigidas), denotados por $A(D)$.

Si $f = (u, v) \in A(D)$ diremos que u es *adyacente* a v o f *incide* en v .

El *íngrado* de un vértice v en D , denotado por $\delta_D^-(v)$ es el número de vértices adyacentes hacia v , es decir, el número de flechas que llegan a v .

El *exgrado* de un vértice v en D , denotado por $\delta_D^+(v)$ es el número de vértices adyacentes desde v , es decir, el número de flechas que salen de v .

El grado de un vértice v en D , denotado por $\delta_D(v)$ es la suma del exgrado y del ingrado de v .

Los vecinos exteriores de un vértice x es el conjunto $\Gamma^+(x) = \{ y \in V(D) \mid (x,y) \in A(D) \}$

Los vecinos interiores de un vértice x es el conjunto $\Gamma^-(x) = \{ y \in V(D) \mid (x,y) \in A(D) \}$

Sean D y H digráficas, diremos que D es isomorfa a H si existe una función $\sigma : V(D) \rightarrow V(H)$ biyectiva tal que :
 $(u,v) \in A(D) \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(v)) \in A(H)$

Una digráfica H es subdigráfica de D si $V(H) \subseteq V(D)$ y $A(H) \subseteq A(D)$.

Una digráfica H es subdigráfica inducida de D , si $V(H) \subseteq V(D)$ y $(u,v) \in A(H)$ si y sólo si $(u,v) \in A(D)$ con $u, v \in V(H)$.

Un camino no dirigido C de D es una sucesión alternada de vértices y flechas $C = \{ u_0, u_1, \dots, u_n \}$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in A(D)$ o $(u_{i+1}, u_i) \in A(D)$. Si C empieza en u y termina en v diremos que C es un uv -camino no dirigido.

Un camino dirigido C^{\rightarrow} de D es una sucesión alternada de vértices y flechas $C^{\rightarrow} = \{ u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \}$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in A(D)$.

Una trayectoria no dirigida T de D es un camino no dirigido en el que no se repiten vértices.

Una trayectoria dirigida T^* de D es un camino dirigido en el que no se repiten vértices.

Un camino cerrado no dirigido es un camino no dirigido en el que el primero y el último vértice son iguales.

Un camino cerrado dirigido es un camino dirigido en el que el primero y el último vértice son iguales.

Un ciclo no dirigido C es un camino cerrado no dirigido en el que no se repiten vértices (sólo el primero y el último son el mismo).

Un ciclo dirigido C^* es un camino cerrado dirigido en el que no se repiten vértices (sólo el primero y el último son el mismo).

Una digráfica D es conexa si para todo $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino no dirigido y por lo tanto un vu -camino no dirigido.

Una digráfica D es fuertemente conexa si para todo $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino dirigido.

Para cualquier $S_1 \subseteq V(D)$, $D[S_1]$ denota la subdigráfica de D inducida por S_1 .

Un arco $(u_1, u_2) \in A(D)$ es asimétrico si $(u_2, u_1) \notin A(D)$.

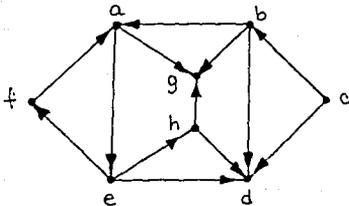
La parte asimétrica de D denotada por $Asym(D)$ es la subdigráfica generadora de D cuyos arcos son los arcos asimétricos de D .

Una digráfica de D es una digráfica B_1 -orientada (resp. B_2 -orientada) si $\{(y,x),(z,x)\} \in A(D)$ (resp. si $\{(x,y),(x,z)\} \in A(D)$) implica que $\{(y,z),(z,y)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Denotamos por $l(T)$ a la longitud de una trayectoria dirigida T .

Finalmente, denotamos por $T(D)$ (resp. por $I(D)$) al conjunto de vértices terminales (resp. vértices origen) de las trayectorias dirigidas de longitud máxima de D .

Algunos ejemplos de los conceptos anteriores se encuentran en la Figura No. 2.



$$V(D) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$\{(c,d), (h,g)\} \in A(D)$$

c es adyacente a d

(e, f) incide en f

$$\delta_D^+(cd) = 0$$

$$\delta_D^-(cd) = 4$$

$$\delta_D^-(cd) = 4$$

$$\Gamma_D^+(h) = \{g, d\}$$

$$\Gamma_D^-(h) = \{e\}$$

$$T = \{f, a, g, b, c\}$$

$$C = \{b, d, c, b\}$$

$$T^* = \{c, b, a, e, f\}$$

$$C^* = \{a, e, f, a\}$$

FIGURA No. 2

CAPITULO 1

En este capítulo se describe el concepto de arborescencia, gráfica quasi-fuertemente conexa y algunos resultados relacionados con arborescencias para reafirmar este concepto.

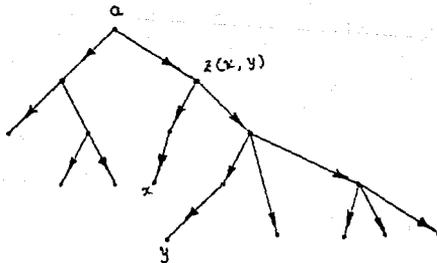
Arborescencias

En una digráfica $D=(V,U)$, un vértice a es llamado raíz si todos los vértices de D pueden ser alcanzados por medio de trayectorias dirigidas que comienzan en a .

Una gráfica D es quasi-fuertemente conexa, si para cada par de vértices x, y , existe un vértice $z(x,y)$ desde el cual existe una trayectoria dirigida a x y una trayectoria dirigida a y .

Una digráfica fuertemente conexa es quasi-fuertemente conexa porque puede darse que $z(x,y)=x$; el inverso no es cierto.

Una arborescencia se define como un árbol que tiene raíz.



Arborescencia

Lema 1.1 .- Una condición necesaria y suficiente para que una digráfica $D=(V,U)$ tenga una raíz es que D sea quasi-fuertemente conexa.

Dem.

→) Si D tiene una raíz, entonces D es quasi-fuertemente conexa

←) Sup. D es qfc y sus vértices son $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$\exists z_2$ en $V(D)$ tal que $\exists n z_2 x_1$ -tray y $z_2 x_2$ -tray.

$\exists z_3$ en $V(D)$ tal que $\exists n z_3 z_2$ -tray y $z_3 x_3$ -tray.

$\exists z_n$ en $V(D)$ tal que $\exists n z_n z_{n-1}$ -tray y $z_n x_n$ -tray

Por lo tanto z_n es raíz de D

Teorema 1.1

Sea H una digráfica de orden $n > 1$. Las siguientes propiedades son equivalentes y cada una caracteriza una arborescencia:

- 1) H es qfc sin ciclos
- 2) H es qfc y tiene $n-1$ flechas
- 3) H es un árbol con una raíz a
- 4) Existe a en $V(H)$ tal que cualquier otro vértice está conectado con él por una única trayectoria desde a

- 5) H es qfc y esta propiedad se pierde si cualquier flecha se quita de H
- 6) H es qfc y tiene un vértice a tal que $\delta_H^-(a)=0$, $\delta_H^-(x)=1 \quad \forall (x \neq a)$
- 7) H no tiene ciclos, y tiene un vértice a tal que $\delta_H^-(a)=0$, $\delta_H^-(x)=1 \quad \forall (x \neq a)$

Dem.

(1) \rightarrow (2)

- (1) \rightarrow H conexa y sin ciclos
 \rightarrow H es un árbol
 \rightarrow H tiene $n-1$ flechas

(2) \rightarrow (3)

- (2) \rightarrow H es conexa y sin ciclos
 \rightarrow H es un árbol

lema 1.1 \rightarrow H tiene una raíz a

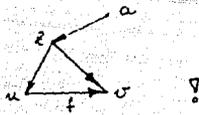
(3) \rightarrow (4)

La raíz a del árbol H tiene la propiedad (4)

(4) \rightarrow (5)

Sup. que la propiedad de qfc no se pierde cuando una flecha (x,y) se quita

\rightarrow existen 2 trayectorias elementales $[z, c_1, c_2, \dots, x]$ y $[z, d_1, d_2, \dots, y]$ que no pasan por la flecha (x,y)



→ existen dos trayectorias en la gráfica D de z a y y dos trayectorias de a a y , lo cual contradice la propiedad (4).

(5) → (6)

lema 1.1

H qfc → H tiene una raíz a

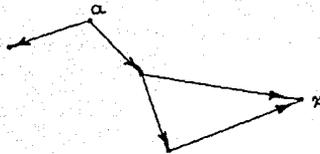
No puede existir una flecha incidente en a porque la gráfica obtenida de H quitando esta flecha tiene la raíz a y es qfc, lo cual contradice la propiedad (5).

Por lo tanto $\delta_H^-(a) = 0$ y $\delta_H^-(x) = 1$ con $(x \neq a)$

(6) → (7)

El número de flechas en $H = \sum_{j=1}^n \delta_H^-(x_j) = n-1$ ya que H es conexa y tiene $n-1$ flechas

→ H es un árbol y por lo tanto no tiene ciclos.



$$\Rightarrow \delta_H^-(x) > 1 \quad \forall$$

(7) \Rightarrow (1)

Comenzando en un vértice $b \neq a$, viajando por la gráfica en dirección contraria a las flechas, ningún vértice se encontrará dos veces, porque H es acíclica.

Si llegamos a un vértice $x \neq a$, el viaje continuará porque $\delta_H^-(x) = 1 \quad \forall x \neq a$.

Por lo tanto el viaje sólo puede terminar en el vértice a ya que a es raíz y H es qfc.

Corolario 1.1

Una digráfica D tiene una subdigráfica generadora que es una arborescencia si y sólo si D es qfc.

Dem.

- \Rightarrow) Si D no es qfc, entonces no puede tener una gráfica parcial que sea una arborescencia.
- \Leftarrow) Si D es qfc, podemos quitar todas las flechas que no afecten la propiedad de que D sea qfc. Cuando no haya más flechas que se puedan quitar, la gráfica resultante será una arborescencia (Teo 1.1, prop 5).

Teorema 1.2

Sea $D = (X, E)$ gráfica conexa y $x_1 \in X(D)$.

Es posible orientar todas las aristas de D de tal manera que la digráfica resultante $D_0 = (X, U)$ tenga un subárbol generador H tal que:

- 1) H es una arborescencia con raíz x_1

- 2) Los ciclos asociados con H son circuitos.
- 3) Los únicos ciclos dirigidos de D_0 son los ciclos asociados con el árbol H .

Dem.

- 1) Construimos una sucesión x_1, x_2, x_3, \dots de vértices diferentes como sigue:

Dada la sucesión parcial x_1, x_2, \dots, x_i , encontrar el vértice x_j cuyo índice j sea tan grande como sea posible de manera que:

- a) $1 \leq j \leq i$
- b) $\Gamma_0(x_j) \subset \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$

Entonces tomamos $x_{i+1} \in \Gamma_0(x_j) - \{x_1, \dots, x_i\}$, y orientamos la arista $[x_j, x_{i+1}]$ de x_j a x_{i+1} .

Terminamos cuando todos los vértices estén en la secuencia.

Sea H la gráfica formada por las aristas dirigidas por este procedimiento.

Por el teorema 1, H es una arboreescencia con raíz x_1 porque H es conexa y $\delta_H^-(x_1) = 0$, $\delta_H^-(x_i) = 1$ para $i \neq 1$.

- 2) Sea $[x_j, x_k]$ donde $j < k$, una arista de E tal que $(x_j, x_k) \in H$. Esta arista determina un ciclo de la base asociada con H .

P.D. Si orientamos (x_j, x_k) de x_k a x_j , entonces el ciclo es un circuito.

Como x_k es adyacente a x_j , todos los vértices x_i con $j \leq i \leq k$, están en la subarborescencia de H con raíz x_j .

Por lo tanto $\exists (x_j, x_k)$ -tray dirigida e incluyendo la flecha (x_k, x_j) , se obtiene un circuito.

- 3) Si existe una trayectoria dirigida de x a y contenida en H , entonces $x < y$.

Sup.

Sea $\mu = [a_1, a_2, \dots, a_q = a_1]$ un ciclo dirigido no asociado a H .

En H existe una trayectoria dirigida de a_{i+1} a a_i contenida en H , y $\exists (a_2, a_1)$ -tray dirigida $\subseteq H$.

Entonces $a_2 \in (a_{i+1}, a_1)$ -tray dirigida $\subseteq H$, de otro modo tendríamos en H un vértice de ingrado al menos 2 !

$\rightarrow \exists (a_{i+1}, a_2)$ -tray dirigida $\subseteq H$

$\therefore a_{i+1} < a_2$

Sup. $a_2 < a_{i+2}$

$\rightarrow \exists (a_2, a_{i+2})$ -tray dirigida = $T \subseteq H$

Sabemos que $(a_{i+1}, a_{i+2}) \in D_0$

$$a) \text{ Si } (a_{i-1}, a_{i-2}) \in H \rightarrow a_{i-1} \in T$$

$$\rightarrow a_2 < a_{i-1} !$$

$$b) \text{ Si } (a_{i-1}, a_{i-2}) \in H \rightarrow \exists (a_{i-2}, a_{i-1})\text{-tray}$$

dirigida $\subseteq H$

$$\rightarrow a_{i-1} < a_2 < a_{i-2} < a_{i-1}$$

$$\rightarrow \exists \text{ un ciclo dirigido}$$

contenido en H !

$$\therefore a_{i-2} < a_2$$

Sup. $a_2 < a_{i+3}$

$$\rightarrow \exists (a_2, a_{i+3})\text{-tray dirigida} = T_1 \subseteq H$$

como $(a_{i-2}, a_{i+3}) \in D_0$

$$a) \text{ Si } (a_{i+2}, a_{i+3}) \in H \rightarrow a_{i+2} \in T_1$$

$$\rightarrow a_2 < a_{i+2} !$$

$$b) \text{ Si } (a_{i+2}, a_{i+3}) \in H \rightarrow \exists (a_{i+3}, a_{i+2})\text{-tray dir} \subseteq H$$

$$\rightarrow a_{i+3} < a_{i+2}$$

$$\rightarrow a_2 < a_{i+3} < a_{i+2}$$

$$\rightarrow a_2 < a_{i+2} !$$

$$\therefore a_{i+3} < a_2$$

Sup. $a_2 < a_{i+4}$

$$\rightarrow \exists (a_2, a_{i+4})\text{-tray dirigida} = T_2 \subseteq H$$

Como $(a_{i+3}, a_{i+4}) \in D_0$

$$a) \text{ Si } (a_{i+3}, a_{i+4}) \in H \rightarrow a_{i+3} \in T_2$$

$$\rightarrow a_2 < a_{i+3} !$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Si } (a_{i-3}, a_{i+4}) \in H &\Rightarrow \exists (a_{i+4}, a_{i+3})\text{-tray dir } \subseteq H \\
 &\Rightarrow a_{i+4} < a_{i+3} \\
 &\Rightarrow a_2 < a_{i+4} < a_{i+3} \\
 &\Rightarrow a_2 < a_{i+3} ! \\
 \therefore a_{i+4} &< a_2
 \end{aligned}$$

Continuando así obtenemos que :

$$a_q < a_2$$

Pero como $(a_1, a_2) \in H$

$$\Rightarrow \exists (a_2, a_1)\text{-tray dirigida } \subseteq H$$

$$\Rightarrow a_2 < a_1 = a_q !$$

\therefore Sólo \exists una única arista en μ que no estaba en H

$\therefore \mu$ es un ciclo asociado con H

\therefore Todos los circuitos de D_0 son los ciclos asociados con H

C A P I T U L O 2

En este capítulo se estudia el teorema de Gallai y Milgram, y se define el concepto de conjunto independiente para establecer su relación con trayectorias dirigidas.

El teorema de Gallai-Milgram y resultados relacionados

Sea $D = (X, U)$ una digráfica sin flechas múltiples ni lazos. Gallai y Milgram demostraron que el mínimo número de trayectorias dirigidas en que se puede partir X es menor o igual $\alpha(D)$.

Def.

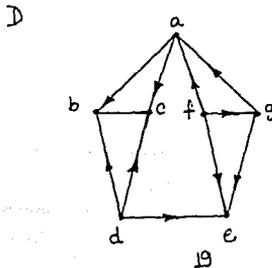
$\alpha(D)$ = No. de independencia de D

$\alpha(D)$ = Max $\{ |A|, A \subseteq X, A \text{ es independiente} \}$

A es independiente si no existe una flecha de D con ambos terminales en A

Obs.

La igualdad se alcanza cuando la digráfica D tiene un conjunto independiente S_0 con $|S_0| = \alpha(D)$ y todas las flechas que inciden con S_0 están dirigidas hacia afuera de S_0 .



Def.

Sea H un bosque de arborescencias, denotaremos RCH al conjunto de raíces de las arborescencias de H , y por SCH al conjunto de los vértices terminales de las arborescencias de H .

Obs.

Si x es un punto aislado, entonces $x \in RCH - SCH$

Def.

Una rama terminal es una trayectoria dirigida máxima por contención tal que termina en un punto $z \in SCH$ y cada punto de la trayectoria que sea diferente de z tiene exgrado igual a 1 en H .

Teorema 2.1

Sea $D = (X, U)$ una digráfica, y sea H_0 un bosque de arborescencias contenido en D , $R(H_0) = R_0$, $S(H_0) = S_0$. Entonces para todo bosque de arborescencias $H \subseteq D$ tal que $RCH \subseteq R_0$, $SCH \subseteq S_0$ y $|SCH|$ sea mínimo, existe S un conjunto independiente en D tal que interseca cada rama terminal de H .

(ie. No existe un bosque de arborescencias H' tal que $RCH' \subseteq R_0$, $SCH' \subseteq S_0$ y $|SCH'| < |SCH|$)

Dem.

Por inducción sobre la cardinalidad de $V(D)$:

Si $V(D) = 1$ la demostración es inmediata

Sea $D = (X, U)$ una digráfica $|X| = n$,
sup. que el Teo 2.1 es cierto para toda digráfica con $n-1$ puntos.

H_0 bosque de arborescencias, $H_0 \in D$,

H bosque de arborescencias $RCH \in R_0 = RCH_0$

$SCH \in S_0 = SCH_0$

y tal que $|SCH|$ sea mínimo

Caso I

SCH es independiente de D , $SCH = S$

ya que toda rama terminal tiene un punto terminal

Caso II

SCH no es independiente, entonces $\exists (b,a) \in U$ flecha con ambos terminales en SCH i.e. $b, a \in SCH$

obs. - $a \notin RCH$

Si $a \in RCH$, como $a \in SCH$ a sería un punto aislado de H , y considerando $H' = H \cup (b,a)$ es un bosque de arborescencias

$RCH' \in RCH \in R_0$

$SCH' \in SCH \in S_0$

y además

$|SCH'| = |SCH| - 1 !$

ya que $|SCH|$ es mínimo

$\therefore a \notin RCH$

como $a \notin RCH$

$\Rightarrow \exists (\alpha_1, a)$ flecha de H

y $\delta_H^+(\alpha_1) = 1$

Si $\delta_H^+(\alpha_1) \neq 1$, H tendría al menos dos descendientes de α_1 en SCH $\Rightarrow H' = H - (\alpha_1, a) \cup (b, a)$ tendría

$RCH' \in RCH \in R_0$

$SCH' \in RCH \in S_0$

y además

$$|SCH'| = |SCH| - 1 !$$

ya que $|SCH|$ es mínimo

concluyendo:

- Si SCH no es independiente
- $\exists (b, a) \in U$ tal que $b, a \in SCH$

$$a \in RCH$$
$$\delta_H^+(a_1) = 1$$

Sea $D^{\sim} = D - \{a\}$

por hipótesis de inducción $H^{\sim} = H_0 - \{a\}$ es un bosque de arborescencias contenido en D^{\sim}

$$RCH_0^{\sim} = RCH_0 \quad \text{ya que } a \notin RCH$$

$$SCH_0^{\sim} = (SCH_0 - \{a\}) \cup \{a_1\} \quad \text{ya que } \delta_H^+(a_1) = 1$$

$H^{\sim} = H - \{a\}$ es un bosque de arborescencias

$$RCH^{\sim} \subseteq RCH \subseteq RCH_0 = RCH_0^{\sim} \rightarrow RCH^{\sim} \subseteq RCH_0^{\sim}$$

$$SCH^{\sim} = (SCH) - \{a\} \cup \{a_1\}$$

$$SCH^{\sim} \subseteq (SCH_0 - \{a\}) \cup \{a_1\} = SCH_0^{\sim}$$

$$\rightarrow SCH^{\sim} \subseteq SCH_0^{\sim}$$

p.d. $|SCH^{\sim}|$ es mínimo

Dem. por contradicción:

Sup. $|SCH^{\sim}|$ no es mínimo

→ $\exists H'$ bosque de arborescencias tal que :

$$RCH' \subseteq RCH_0^{\sim} = RCH_0$$

$$SCH' \subseteq SCH_0^{\sim} = SCH_0$$

$$|SCH'| < |SCH^{\sim}| = |SCH|$$

$$SCH^{\sim} = (SCH) - \{a\} \cup \{a_1\}$$

Caso II a)

$$a_1 \in SCH'$$

$$\text{Sea } H'' = H' \cup \{a\} \cup (a_1, a)$$

H'' bosque de arborescencias $\in D$

$$RCH'' = RCH' \subseteq RCH^{\sim} = RCH_0$$

$$SCH'' = SCH' \subseteq SCH^{\sim} = (SCH_0) - \{a\} \cup \{a_1\}$$

$$|SCH''| = |SCH'| < |SCH^{\sim}| = |SCH|$$

$$|SCH''| < |SCH| \quad | \text{ ya que } |SCH| \text{ es m\u00ednimo}$$

Caso II b)

$$a_1 \notin SCH', \quad b \in SCH'$$

$H'' = H' \cup (b, a) \cup \{a\}$ es bosque de arborescencias de D

$$RCH'' = RCH' \subseteq RCH^{\sim} = RCH_0$$

$$SCH'' = (SCH' - \{b\}) \cup \{a\}$$

$$|SCH''| = |SCH'| < |SCH^{\sim}| = |SCH|$$

$\Rightarrow |SCH''| < |SCH| \quad | \text{ ya que } |SCH| \text{ es m\u00ednimo}$

Caso II c)

$$a_1 \notin SCH', \quad b \in SCH'$$

(n\u00f3tese $\{a_1, b\} \in SCH^{\sim}$)

$$SCH' \subseteq SCH^{\sim} = (SCH_0) - \{a\} \cup \{a_1\}$$

$$|SCH'| \leq |SCH^{\sim}| - 2 = |SCH_0| - 2$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } H'' &= H' \cup \{a\} \cup (a_1, a) \cup \{a_1\} \\ |SCH''| &= |SCH'| + 1 \leq |SCH_0| - 1 < |SCH_0| \\ &\Rightarrow |SCH''| < |SCH_0| \end{aligned}$$

En $D - \{a\}$, $H_0 - \{a\}$ es bosque de arborescencias
 $H - \{a\}$ es bosque de arborescencias con
 $RCH-a \subseteq RCH_0-a$
 $SCH-a \subseteq (S_0 - \{a\}) \cup \{a_1\} = SCH_0 - a$
y $|SCH - a|$ es mínimo.

Por hipótesis de inducción, existe S' un conjunto independiente en D tal que intersecciona a cada rama terminal de $H-a$ y como $\delta_H^*(a_1)=1$, las ramas terminales de H que terminan en a tienen como penúltimo punto a a_1 y se extienden como ramas terminales de $H - a$, por lo tanto intersecciona a S' .

Corolario 2.1 (Las Vergnas 1976)

Una gráfica quasi-fuertemente conexa tiene una subgráfica generadora que es una arborescencia con a lo más $\alpha(D)$ puntos terminales.

D



Dem.

Una gráfica qfc tiene una arborescencia generadora
 $H_0 \Rightarrow RCH_0 = \{r_0\}$

Sea H una arborescencia tal que $RCH \subseteq RCH \circlearrowright$
 $SCH \subseteq SCH \circlearrowright$
y $|SCH|$ mínimo

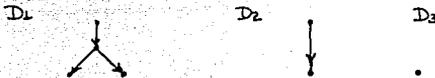
por el Teo 2.1

→ \exists un independiente S en D que intersecciona a toda rama terminal de H .

$\alpha(D) \geq |S| \geq |\text{ramas terminales de } H| = |\text{ptos. terminales de } H|$

Corolario 2.2 (Gallai-Milgram theorem 1960)

El mínimo número de trayectorias dirigidas en que se pueden partir $V(D)$ es menor o igual a $\alpha(D)$.



Dem.

Sean C_1, \dots, C_n las componentes qfc de D



$\forall C_i \exists$ a lo más $\alpha(C_i)$ ramas terminales (corolario 1) y se puede descomponer en SCH trayectorias dirigidas obtenidos quitando en cada paso la trayectoria de longitud máxima con vértice terminal SCH .

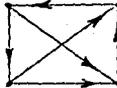
y como $\alpha(D) = \sum_{i=1}^n \alpha(C_i)$ (ya que no hay flechas entre una componente C_i y otra) se tiene el resultado.

Corolario 2.3 (Lintial 1978)

Existe una partición M de $V(D)$ en trayectorias dirigidas y un independiente S de D que interseca a cada elemento de M .

Definición.

Torneo es una gráfica completa dirigida sin aristas simétricas.



Ej. Torneo

Corolario 2.4 (Rédei's theorem)

Si D es completa antisimétrica (un torneo), entonces D tiene una trayectoria dirigida que contiene a todo vértice de D hamiltoniano).

Dem.

$$\alpha(D) = 1 \quad (\text{por ser torneo})$$

por corolario 2.2 \Rightarrow \exists una partición de $V(D) \subseteq \alpha(D) = 1$
trayectoria dirigida

ie. \exists una trayectoria que contiene a todo vértice de D

Corolario 2.5 (Dilworth's theorem)

Si D es una digráfica transitiva, entonces el mínimo número de trayectorias dirigidas en que se puede partir $V(D)$ es igual a $\alpha(D)$.

Dem.

cor 2.2

→ El mínimo número de trayectorias dirigidas que parten $V(D) \leq \alpha(D)$

Si D es transitiva → cada camino dirigido induce una completa

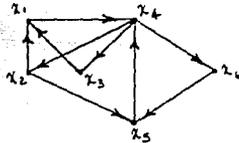
→ por cada partición en trayectorias dirigidas tenemos una partición en completas

Y claramente $\alpha(D) \leq |\text{completas que parten } V(D)|$

en particular $\alpha(D) \leq \min \text{ no de trayectorias dirigidas que parten a } V(D)$

cor 2.2

D



$\alpha(D) = 3$

∴ mínimo número de trayectorias dirigidas que parten a $V(D)$ = $\alpha(D)$

Corolario 2.6

(Camion's theorem 1959)

Todo torneo fuertemente conexo tiene un ciclo dirigido que contiene a todos los puntos de D (circuito hamiltoniano).

Dem.

Sea μ un ciclo dirigido de longitud máxima.

Si μ contiene a todos los puntos de D , el resultado se sigue

De otra forma sup. que μ no contiene a todos los puntos de D

Sea $a \in V(D) - V(\mu)$

como D es fuertemente conexa,

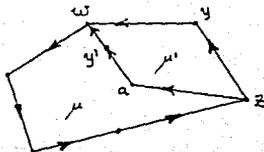
$\Rightarrow \exists$ una trayectoria dirigida μ'

de z a w que contiene a a

tal que $\mu' - \mu = \{z, w\}$ y $K(\mu') \geq 2$

(ya que pasa por $a \Rightarrow$ tiene longitud al menos 2)

\textcircled{D}



$$|V(\mu \cup \mu')| > |V(\mu')|$$

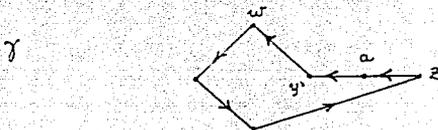
Sean (y, w) y (y', w) las flechas de $\mu \cup \mu'$ que llegan a w

$(\mu \cup \mu') - \{(y, w), (y', w)\}$ es una arborescencia con raíz w y terminales $\{y, y'\}$

La subgráfica de D inducida por $V(\mu\cup\mu')$ es un torneo D' (ya que está contenida en el torneo D)

$(\mu\cup\mu') - \{(y,w), (y',w)\}$ es una arborescencia generadora de D'

Por teo 2.1 \exists una arborescencia generadora con raíz w y con a lo más $\alpha(D')=1$ puntos terminales contenido en $\{y, y'\}$



Esta arborescencia es una trayectoria dirigida que contiene a todos los puntos de $\mu\cup\mu'$ empieza en w y termina en y o y' , y la podemos extender a un ciclo dirigido que contiene a todos los puntos de $\mu\cup\mu'$

sea γ tal ciclo

$$\rightarrow |\gamma| \geq |\mu| + 1 > |\mu| \quad !$$

ya que μ era un ciclo de longitud máxima

Conjetura 2.1 (Bermond)

El conjunto de vértices de una digráfica fuertemente conexa se puede partir en $\alpha(D)$ ciclos dirigidos o puntos.

Conjetura 2.2 (Las Vergnas)

Una digráfica fuertemente conexa tiene una arborescencia generadora con a lo más $\alpha(D)-1$ vértices terminales.

Conjetura 2.3 (Berge)

En toda digráfica D , existe un conjunto independiente S tal que $|S| = \alpha(D)$ y una partición de $V(D)$ $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\alpha(D)}\}$ e $\alpha(D)$ trayectorias dirigidas tal que $|\mu_1 - S| = 1$

Teorema 2.4 (Gallai-Milgram)

Para toda digráfica D , existe una partición de $V(D)$ en $\alpha(D)$ trayectorias dirigidas.

Dem.

Sea $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ una familia de trayectorias dirigidas ajenas dos a dos que cubren $V(D)$.

Esto es posible hacer ya que en particular un punto es una trayectoria de longitud cero.

Y sea $ACM = \{a_1, \dots, a_k\}$ el conjunto de puntos iniciales de las trayectorias de M .

Probaremos que existe una familia de trayectorias distintas M' que parten $V(D)$

$$|M'| \leq \alpha(D) \text{ y } ACM' \supseteq ACM$$

Demostración por inducción sobre la cardinalidad de $V(D)$:

Si $|V(D)| = 1$ la demostración es inmediata.

Suponemos que la afirmación es válida para digráficas con menos de n puntos.

Sea D una digráfica con n puntos

$$M = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$$

Sea $D' = D - V(\mu_1)$

$$\alpha(D') \leq \alpha(D)$$

$M^{\sim} = \mu_2, \dots, \mu_k$ es una partición de $V(D')$ en trayectorias dirigidas.

Por hipótesis de inducción, $\exists M^{\sim}$ una familia de trayectorias que parten $V(D')$

$$|M^{\sim}| \leq \alpha(D') \leq \alpha(D)$$

$$A(M^{\sim}) \subseteq \{a_2, a_3, \dots, a_k\}$$

$M^{\#} = \{\mu_1\} \cup M^{\sim}$ es una partición de $V(D)$ en trayectorias dirigidas con $A(M^{\#}) \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

$$|M^{\#}| \leq \alpha(D)$$

Caso 1)

$$|M^{\sim}| < \alpha(D)$$

$$|M^{\#}| = |M^{\sim}| + 1 < \alpha(D) + 1$$

$$|M^{\#}| \leq \alpha(D)$$

Caso 2)

$$|M^{\sim}| = \alpha(D)$$

$$A(M^{\sim}) \subset \{a_2, \dots, a_k\}$$

$A(M^{\sim}) = \{a_2, a_3, \dots\} + \alpha(D)$ puntos iniciales
de las trayectorias
ajenas

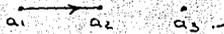
$$|ACM^{\sim}| = \alpha CD$$

$$|ACM^{\sim} \cup \{a_1\}| = \alpha CD + 1$$

\therefore \exists alguna flecha con ambos terminales en $ACM^{\sim} \cup \{a_1\}$

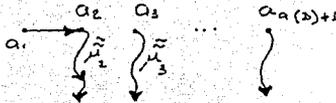
Suponemos sin pérdida de generalidad

$$M^{\sim} = \{\mu_2^{\sim}, \mu_3^{\sim}, \dots, \mu_{\alpha CD+1}^{\sim}\} \rightarrow \alpha CD$$



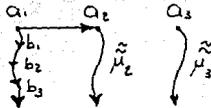
Caso 2a)

$$\mu_1^{\sim} = \{a_1\}$$



$$\{a_1, \mu_2^{\sim}, \mu_3^{\sim}, \dots, \mu_{\alpha CD+1}^{\sim}\}$$

es la partición de D buscada



$$D^* = D - a_1$$

$$\alpha(D^*) \leq \alpha(D)$$

$\mu^* = \{\mu_1 - a_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \dots, \tilde{\mu}_{\alpha(D)+1}\}$ es una

partición de $V(D - a_1)$ en $\alpha(D)$ trayectorias dirigidas

$$ACM^* = \{b_1, a_2, a_3, \dots, a_{\alpha(D)+1}\}$$

por hipótesis de inducción \exists una partición M^{**} de $V(D)$ en $\alpha(D)$ trayectorias dirigidas

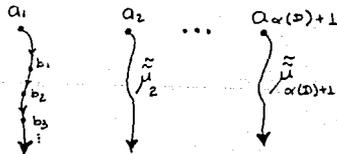
$$ACM^{**} \subseteq \{b_1, a_2, \dots, a_{\alpha(D)+1}\}$$

y notemos $\alpha(D^*) \leq \alpha(D)$

Si $\alpha(D^*) < \alpha(D) \Rightarrow \alpha(D^*) \leq \alpha(D) - 1$

Si $b_1 \in ACM^{**}$

si b_1 es punto inicial de M^{**} extendemos la trayectoria de M^{**} que empieza en b_1 a una que empiece en a_1 .



Análogamente si $a_2 \in ACM^{**}$ podemos suponer $\{b_1, a_2\} - ACM^{**} = \emptyset$

$$\therefore |ACM^{**}| \leq \alpha(D) - 1$$

$\therefore M^{**} \cup \{[a_1]\}$ es una partición de $V(D)$ en a lo más $\alpha(D)$ trayectorias dirigidas cuyos puntos iniciales pertenecen a

$$\{a_1, a_3, \dots, a_{\alpha(D)+1}\}$$

C A P I T U L O 3

Conjuntos independientes y trayectorias dirigidas de longitud máxima en digráficas.

Introducción

Sean $\chi(D)$ y $\lambda(D)$ el número cromático y el número de vértices de una trayectoria dirigida de longitud máxima de una digráfica D sin ciclos.

Roy y Gallai probaron que $\chi(D) \leq \lambda(D) \dots (1)$

Claramente una coloración apropiada de D es una partición de sus vértices en conjuntos independientes. Por lo que una generalización de (1) puede expresarse como sigue :

Conjetura C1 (J. M. Laborde, C. Payan y N. H. Huang (1982)).

Para toda digráfica sin ciclos D , existe un conjunto independiente S tal que

$$\lambda(D-S) < \lambda(D)$$

En este trabajo, las gráficas consideradas son finitas dirigidas (i.e. digráficas) y sin ciclos. Y en este capítulo se demuestra la conjetura 1 para digráficas que poseen núcleo ó co-núcleo y para digráficas tales que todo vértice tiene grado a lo más 3.

Definición Un conjunto independiente S de una digráfica $D = (X, E)$ se dice que es co-núcleo de D , si para todo $y \in X-S$, hay un $x \in S$ tal que $(x, y) \in E$.

Claramente, tenemos :

Proposición 1 : Si D tiene un co-núcleo S entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$ y entonces D satisface C1.

Para digráficas simétricas (o equivalentemente gráficas no dirigidas), es fácil ver que un conjunto independiente es un co-núcleo si es maximal.

Entonces tenemos :

Corolario 3.1 Si S es un conjunto independiente maximal de una digráfica simétrica entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

De hecho, cuando tratamos con digráficas simétricas es posible mejorar la afirmación anterior. Veamos los siguientes resultados:

Proposición 2 : Sea D una digráfica simétrica conexa diferente de K_n . Entonces existe un conjunto independiente S tal que

$$\lambda(D-S) \leq \lambda(D) - 2$$

Demostración.

D no es completa \rightarrow contiene un conjunto S independiente maximal con $|S| \geq 2$

Buscamos $\lambda(D-S) \leq \lambda(D) - 2$

Supongamos que no se cumple :

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_{\lambda-1})$ una trayectoria de longitud máxima en $D-S$, ($\lambda = \lambda(D)$)

Por la maximalidad de S , x_1 debe ser adyacente a algún vértice x_0 en S .

Por la misma razón $x_{\lambda-1}$ debe ser adyacente a algún vértice en S , precisamente x_0 , si no D tendría una trayectoria con $(\lambda+1)$ vértices.

Ya que $|S| \geq 2 \rightarrow \exists x \in S$ con $x \neq x_0$.

Aún más, existe una trayectoria de x a algún x_i ($0 \leq i \leq \lambda-1$) ya que D es conexa.

\therefore Tenemos una trayectoria con al menos $(\lambda+1)$ vértices !

$\therefore \lambda(D-S) \leq \lambda(D)-2$

lo cual demuestra la proposición.

Sea $T(D)$ el conjunto de vértices terminales iniciales de D de una trayectoria dirigida de longitud máxima de D .

Probaremos lo siguiente :

Proposición 3 : Sea D una digráfica simétrica. Entonces para todo $x \in T(D)$, existe un conjunto independiente S con las siguientes propiedades :

- i) $x \in S$
- ii) $S \subseteq T(D)$
- iii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$

Dem.

Por inducción sobre la cardinalidad de V :

Sea $x \in T(D)$

Si $\lambda(D-x) < \lambda(D) \rightarrow S = \{x\}$

Si no, por hipótesis de inducción $\exists T$ un independiente $\in D-x$ que satisface i), ii)

Claramente $S = T \cup x$ es un conjunto independiente con las propiedades requeridas.

Lo cual demuestra la proposición.

Ahora, para extender C1 al caso directo, proponemos lo siguiente :

Conjetura C2 Para toda digráfica D , existe un conjunto independiente S tal que :

$$i) S \in T(D)$$

$$ii) \lambda(D-S) = \lambda(D)-1$$

Dada una digráfica D , denotamos como $\Gamma^-(x)$ y $\Gamma^+(x)$ al conjunto de vecinos que entran y salen de un vértice, respectivamente.

Claramente, si y es un vértice en $T(D) \cap \Gamma^+(x)$ entonces toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen y contiene a x . En general, si y pertenece a $T(D) \cap \Gamma^-(x)$, esto no es verdad.

Entonces la prueba funcionaría si la siguiente conjetura fuera cierta :

Conjetura C3 Para toda digráfica D \exists un vértice x con las siguientes propiedades :

$$i) x \in T(D)$$

ii) $\forall y \in T(D) - \Gamma(x)$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x .

Dem. C3 \rightarrow C2

Inducción sobre la cardinalidad de $V(D)$:

Si $|V(D)| = 1$ la demostración es inmediata.

Suponemos que si $|V(D')| = n$ entonces D' tiene un independiente S' tal que $\lambda(D' - S') < \lambda(D')$.

Sea D tal que $|V(D)| = n+1$

$\therefore J \cup \{x\}$ es independiente $\subseteq T(D)$

$J \cup \{x\}$ es el conjunto independiente $\subseteq T(D)$ que interseca a toda trayectoria dirigida de longitud máxima.

Y sea $x \in T(D)$ que satisface las propiedades i) y ii) de la conjetura 3

Si $\lambda(D - x) < \lambda(D)$ se cumple C2.

Si $\lambda(D - x) = \lambda(D)$ consideramos lo siguiente :

Por hipótesis de inducción existe en $D - x$ un conjunto independiente J tal que $J \subseteq T(D - x) \subseteq T(D)$
 $\lambda((D - x) - J) < \lambda(D - x)$

ie. J interseca a toda trayectoria dirigida de longitud máxima de $D - x$.

Por lo tanto $J \cup \{x\}$ interseca a toda trayectoria de longitud máxima de D .

Veremos que $J \cup \{x\}$ es independiente.

a) P.D. No hay xJ -flecha en D .

Supongamos que existe $xy = xJ$ -flecha en D , $y \in J$. Como $y \in J$, existe α una trayectoria dirigida de longitud máxima $\alpha \in D - x$ que empieza en y , entonces $\alpha' = (x, y) \cup \alpha$ es una trayectoria dirigida tal que $l(\alpha') > l(\alpha)$!

(Pues $\lambda(\alpha) = \lambda(D - x) = \lambda(D)$)

b) P.D. No hay flechas de J a x .

Supongamos que existe $yx = Jx$ -flecha en D , $y \in T(D - x)$ por lo tanto y es el punto inicial de $\alpha =$ trayectoria de longitud máxima de $D - x$ y $\lambda(D - x) = \lambda(D)$, así que α es una trayectoria de longitud máxima de D que empieza en y y no contiene a x ! (11).

$\therefore C3 \rightarrow C2$

Proposición 4 Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene grado ≤ 3 . Entonces D satisface $C3$ y entonces $C2$ y $C1$.

Dem.

Por contradicción.

Sea $x \in T(D) \rightarrow \exists y \in [T(D) - N^-(x)]$ tal que y es el origen de la trayectoria dirigida de longitud máxima que no contiene a x .

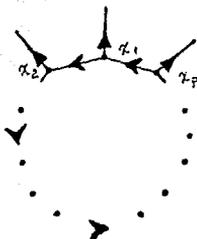
De nuevo sea $Z \in [T(D) - N^-(y)]$ tal que es el origen de la trayectoria dirigida de longitud máxima que no contiene a y .

Continuando este procedimiento, construimos un ciclo dirigido (x_1, x_2, \dots, x_p) tal que:

$\forall i \pmod{p} \exists$ una trayectoria dirigida de longitud máxima con origen x_i tal que no contiene x_{i+1}

como $\delta(x_i) = \delta^+(x_i) + \delta^-(x_i) \leq 3, \Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq p),$
 $\delta^+(x_i) = 2$ y $\delta^-(x_i) = 1$

\therefore De una trayectoria dirigida de longitud máxima con origen x_i que no contenga a x_{i+1} , se obtiene una trayectoria dirigida de longitud mayor, añadiéndole el arco (x_p, x_i) !



Conclusiones :

1. El teorema de Gallai-Roy puede expresarse como sigue :

El conjunto de vértices de cualquier digráfica puede ser partido en λ conjuntos independientes (donde λ es el número de vértices de una trayectoria dirigida de longitud máxima).

Alternativamente, otro resultado es el siguiente :

El conjunto de vértices de cualquier digráfica puede

ser partido en α trayectorias dirigidas (donde α es el número de vértices del conjunto independiente de cardinalidad máxima).

2. Sea D una gráfica no dirigida. Proponemos la siguiente conjetura :

Conjetura C4

Si $\lambda(D) = \rho_1 + \rho_2$ entonces existe una partición de su conjunto de vértices en 2 subconjuntos

X_1 y X_2 tal que : $\lambda(D[X_1]) \leq \rho_1$ y
 $\lambda(D[X_2]) \leq \rho_2$

el caso para $\rho_1=1$, queda establecido en la prop. 3.

Para valores pequeños de ρ_1 con $\rho_1 \leq 5$ la respuesta es afirmativa.

A continuación tenemos algunas condiciones suficientes para digráficas que satisfacen la conjetura $c1$.

Definición

Un núcleo N es un conjunto $N \subset V(D)$ independiente ; ie. que para cualesquiera $x, y \in N$, x no es adyacente a y , o que no hay flechas con ambos terminales en N y es absorbente si para cada $y \in V(D-N)$ existe al menos un $x \in N$ tal que yx es una flecha de D .

Teorema 3.1

Cualquier digráfica sin ciclos dirigidos tiene un núcleo.

Antes de demostrar este teorema, demostraremos el siguiente lema:

LEMA 3.1

Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces en D existe al menos un punto de exgrado 0.

Dem.

Supongamos que no existe un punto de exgrado 0, es decir que todo punto tiene exgrado mayor o igual a 1.

Sea $z_0 \in V(D)$, por la suposición existe $z_1 \in V(D)$ tal que $z_0 - z_1$ es flecha de D .

Como z_1 tiene exgrado mayor que 0, entonces existe z_2 tal que $z_1 - z_2$ es flecha de D , y así sucesivamente.

Continuando así, tenemos una sucesión de vértices tal que $z_i - z_{i+1}$ es flecha de D .

Como el conjunto de vértices de D es un conjunto finito, entonces existen $i_0 > j_0$ tales que $z_{i_0} = z_{j_0}$.

Por lo tanto D tiene algún ciclo dirigido.

Dem. Teo 3.1

Sea $N_0 = \{z \in V(D) \mid \delta_D^+(z) = 0\}$

Por el lema anterior, N_0 es no vacío.

Sean $W_0 = \{w \in V(D) \mid \Gamma_D^+(w) \cap N_0 \neq \emptyset\}$

$$D_1 = D - (N_0 \cup W_0)$$

- Si $D_1 = \emptyset$ entonces claramente N_0 es núcleo de D

- Si $D_1 \neq \emptyset$

Sean $N_1 = \{z \in V(D_1) \mid \delta_{D_1}^+(z) = 0\}$

$W_1 = \{w \in V(D_1) \mid \Gamma_{D_1}^+(w) \cap N_1 \neq \emptyset\}$

$$D_2 = D_1 - (N_1 \cup W_1)$$

- Si $D_2 = \emptyset$ entonces claramente $N_0 \cup N_1$ es núcleo de D

- Si $D_2 \neq \emptyset$

$$\text{Sean } N_2 = \{z \in V(D_2) \mid \delta_{D_2}^+(z) = 0\}$$

$$W_2 = \{w \in V(D_2) \mid \Gamma_{D_2}^+(w) \cap N_2 \neq \emptyset\}$$

$$D_3 = D_2 - (N_2 \cup W_2)$$

- Si $D_3 = \emptyset$ ent. $N_0 \cup N_1 \cup N_2$ es núcleo de D

- Si $D_3 \neq \emptyset$

$$\text{Sean } N_3 = \{z \in V(D_3) \mid \delta_{D_3}^+(z) = 0\}$$

$$W_3 = \{w \in V(D_3) \mid \Gamma_{D_3}^+(w) \cap N_3 \neq \emptyset\}$$

$$D_4 = D_3 - (N_3 \cup W_3)$$

- Si $D_4 = \emptyset$ ent. $N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup N_3$
es núcleo de D ...

continuamos con el procedimiento anterior hasta encontrar $n+1$
el primer entero tal que :

$$D_{n+1} = D - (N_n \cup W_n) = \emptyset$$

entonces claramente $N_0 \cup N_1 \cup \dots \cup N_n$ es núcleo de D .

Teorema 3.2

Sea $C \subseteq V(D) - T(D)$ (resp. $C \subseteq V(D) - I(D)$). Si $D-C$
tiene un núcleo S (resp. $D-C$ tiene un conúcleo S)
entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Dem.

Supongamos que existe una trayectoria de longitud máxima
 T con $S - V(T) = \emptyset$ y denotamos por z_0 al punto final de T .

Claramente $z_0 \in [(V(D)-C) - (V(D)-S)]$ y como S es un
kernel de $D-C$ entonces existe $y \in S$ tal que $(z_0, y) \in A(D)$.

Entonces $T' = T \cup (z_0, y)$ es una trayectoria dirigida con $\kappa(T') > \kappa(T)$, lo que contradice la opción de T .

Corolario 3.2

Sea D una digráfica. Si $D[I(D)]$ (resp. $D[IC(D)]$) tiene un núcleo S (resp. un conúcleo S) entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Las condiciones suficientes para que una digráfica tenga un núcleo han sido investigadas por diferentes autores.

Diremos que un vértice $x \in IC(D)$ satisface la propiedad P si para cada $(y, x) \in \text{Asym } D[IC(D)]$ satisface al menos una de las siguientes condiciones:

- i) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y , contiene a x .
- ii) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D que contiene a x y no comienza en x también contiene a y .

Teorema 3.3

Sea D una digráfica. Si cada subdigráfica inducida H de D tiene un vértice $x \in IC(H)$ que satisface la propiedad P entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq IC(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Dem.

Inducción sobre la cardinalidad de $V(D)$:

Sea x un vértice como en la hipótesis del teorema 3.3.

Si $\lambda(D-x) < \lambda(D)$ entonces el enunciado se cumple con $S=\{x\}$. Si no, $\lambda(D-x)=\lambda(D)$ y entonces, por la hipótesis de inducción sobre $D-x$, $\exists J$ un conjunto independiente en $D-x$ contenido en $I(D-x)$ que intersecciona cada trayectoria dirigida de longitud máxima de $D-x$. También se observa que $I(D-x) \subseteq I(D)$.

Ahora analizamos los dos casos posibles:

Caso 1)

$J \cup \{x\}$ es un conjunto independiente.

Claramente $S = J \cup \{x\}$ es un conjunto independiente con las propiedades requeridas.

Caso 2)

$J \cup \{x\}$ no es un conjunto independiente.

$\rightarrow \exists y \in J$ tal que $\{(y,x), (x,y)\} \cap A(D) \neq \emptyset$

como $y \in I(D-x)$ y $\lambda(D-x)=\lambda(D)$, tenemos que :

$(x,y) \in A(D)$, entonces $(y,x) \in \text{Asym } D[I(D)]$ y existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen y que no contiene a x . Esto es por i) de la propiedad P donde $S=J$ es un conjunto con las propiedades requeridas.

Un resultado similar para el teorema 3.3 se probó y como una consecuencia se obtuvo que cualquier digráfica D con $\max \{\delta_D^+(x)=\delta_D^-(x) + \delta_D^-(x) \mid x \in V(D)\} \leq 3$ satisface la conjetura C1. Aplicando el teorema 3.3 obtenemos los teoremas 3.4 y 3.5 que generalizan este resultado.

Teorema 3.4

Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en $\text{Asym } D$ tiene un vértice x que satisface:

$\delta_D^-(x) \leq 1$ o $\delta_D^+(x) \leq 1$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\chi(D-S) < \chi(D)$.

Dem.

En vista del teorema 3.3, basta probar que cualquier digráfica que satisface la hipótesis del teorema 3.4 tiene un vértice $x \in I(D)$ que satisface la propiedad P .

Por contradicción.

Supongamos que el enunciado anterior es falso y sea x un vértice en $I(D)$, entonces existe un vértice y en $\Gamma_D^-(x) - I(D)$ con $(x,y) \in \text{Asym } D$ que es el origen de la trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no contiene a x y existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no comienza en x , que contiene a x pero no contiene a y .

Sea z un vértice en $\Gamma_D^-(y) - I(D)$ con $(z,y) \in \text{Asym } D$ que es el origen de una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no contiene a y y existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no comienza en y , que contiene a y pero no contiene a z .

Continuando este proceso obtenemos un ciclo dirigido $C_n^+ = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ tal que para $0 \leq i \leq n-1$ existe:

- 1) Una trayectoria dirigida de longitud máxima en D con origen x_i que no contiene a $x_{i+1} \pmod{n}$ y
- 2) Una trayectoria dirigida de longitud máxima en D que no comienza en x_i , que contiene a x_i pero no contiene a $x_{i-1} \pmod{n}$.

Por lo tanto C_n^* es un ciclo dirigido contenido en $\text{Asym } D$

$$(1) \rightarrow \delta_D^-(x_i) \geq 2$$

$$(2) \rightarrow \delta_D^+(x_i) \geq 2 \quad \forall 0 \leq i \leq n-1$$

lo cual contradice la hipótesis del teorema 3.4. Por lo que D satisface la hipótesis del teorema 3.3 y entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Denotamos por K_n^* a la digráfica simétrica completa con n vértices y si D y H son digráficas isomorfas escribimos $D \cong H$.

Teorema 3.5

Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en $\text{Asym } D$ tiene un vértice x que satisface:

$D[\Gamma_D^-(x)] \cong K_{n(x)}^*$ donde $n(x) = \delta_D^-(x)$ o $D[\Gamma_D^+(x)] \cong K_{m(x)}^*$, $m(x) = \delta_D^+(x)$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Dem.

Probaremos que cualquier digráfica que satisfaga la hipótesis del teorema 3.5 tiene un vértice $x \in I(D)$ que satisface la propiedad P .

Por contradicción.

Supongamos que el enunciado es falso, procediendo como en la prueba del teorema 3.4 obtenemos un ciclo dirigido $C_n^* = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ contenido en $\text{Asym } D$ tal que para $0 \leq i \leq n-1$ existe:

- 1) Una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen x_i que no contiene a x_{i+1} (denotada mod n) y
- 2) Una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no comienza en x_i , que contiene a x_i pero no contiene a x_{i-1} (denotada mod n). Ahora analizamos los dos casos posibles:

Caso 1.

Existe un vértice $x_k \in C_n^+$ con $D[\Gamma_D^-(x_k)] \cong K_{n(x_k)}^*$, $n(x_k) = \delta_D^-(x_k)$. Sea $\alpha = (z_0, z_1, \dots, z_p)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con $x_k = z_j$ ($0 < j \leq p$) que no contiene a x_{k-1}

$$\Rightarrow \{(z_{j-1}, x_k), (x_{k-1}, x_k)\} \in A(D)$$

por lo tanto $\{(z_{j-1}, x_{k-1}), (x_{k-1}, z_{j-1})\} \in A(D)$ y $\alpha' = (z_0, \dots, z_{j-1}, x_{k-1}, x_k, z_{j+1}, \dots, z_p)$ es una trayectoria dirigida con $\kappa(\alpha') = 1 + \kappa(\alpha)$, contradiciendo la elección de α .

Caso 2.

Existe un vértice $x_k \in C_n^+$ con $D[\Gamma_D^+(x_k)] \cong K_{m(x_k)}^*$, $m(x_k) = \delta_D^+(x_k)$. Sea $\beta = (y_0 = x_k, y_1, \dots, y_q)$ una

trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen x_k que no contiene a x_{k+1}

$$\Rightarrow \{(y_1, x_{k+1}), (x_{k+1}, y_1)\} \in A(D)$$

y $\beta' = (y_0 = x_k, x_{k+1}, y_1, \dots, y_q)$ es una trayectoria diri-

gida con $\kappa(\beta') = 1 + \kappa(\beta)$.

Los vértices que tienen una vecindad interna isomorfa en una digráfica isomorfa también pueden ser considerados para extender el teorema 3.2 como sigue:

Teorema 3.6

Sea $C \subseteq (V(D) - T(D)) \cup \{x \in V(D) \mid \Gamma_D^-(x) \cong K_{n(x)}^m, n(x) = \delta_D^-(x)\}$. Si $D-C$ tiene un núcleo entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\kappa(D-S) < \kappa(D)$.

Dem.

Denotamos por $C' = C \cap \{x \in V(D) \mid \Gamma_D^-(x) \cong K_{n(x)}^m, n(x) = \delta_D^-(x)\}$.

Procedemos por inducción sobre la cardinalidad de C' .

Si $C' = \emptyset$ entonces el teorema 3.6 se cumple directamente del teorema 3.2.

Sup. $C' \neq \emptyset$ y sea N un núcleo de $D-C$. Como N es un conjunto independiente podemos asumir que existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D ,

$$T = (z_0, z_1, \dots, z_n) \text{ tal que } N - T = \emptyset.$$

Caso 1.

$$z_n \in V(D) - C$$

Tenemos $z_n \in (V(D) - C) - (V(D) - N)$ y ya que N es un núcleo

de $D-C$

$\rightarrow \exists y \in N$ tal que $(z_n, y) \in A(D)$ y $T' = T \cup (z_n, y)$ es una trayectoria dirigida de D con $\kappa(T') = 1 + \kappa(T)$ contradiciendo la elección de T .

Caso 2.

$z_n \in C$

Nótese que $z_n \in C'$ porque $z_n \in T(D)$, probamos que $N \cup \{z_n\}$ es un conjunto independiente.

Sup. $\exists s \in N$ tal que $\{(s, z_n), (z_n, s)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Como en el caso 1, vemos que $(z_n, s) \in A(D)$.

Por lo tanto $(s, z_n) \in A(D)$.

Ahora, la hipótesis del leorema 3.6 implica:

$\{(z_{n-1}, s), (s, z_{n-1})\} \in A(D)$ y

$T' = (z_0, \dots, z_{n-1}, s, z_n)$ es una trayectoria dirigida de D con $\kappa(T') = 1 + \kappa(T)$.

Entonces $N \cup \{z_n\}$ es un conjunto independiente. De hecho es un núcleo de $D - C_1$ donde $C_1 = C - \{z_n\}$ entonces por la hipótesis de inducción existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Corolario 3.3

Sea D una digráfica.

Si existe un conjunto

$C \subseteq (V(D) - T(D)) \cup \{x \in V(D) \mid \Gamma_D^-(x) \cong K_{n(x)}^*, n(x) = \delta_D^-(x)\}$

que intersecta cada ciclo dirigido de D entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Dem.

Un resultado fundamental muy conocido en la teoría de núcleos establece que cualquier digráfica sin ciclos

dirigidos tiene un núcleo.

Teorema 3.7

Sea D una digráfica. Si D es una digráfica B_1 -orientada (resp. B_2 -orientada) entonces todo conjunto independiente maximal intersecta toda trayectoria dirigida de longitud máxima.

Dem.

Por contradicción.

Sup. que existe una digráfica B_1 -orientada D entonces S es un conjunto independiente maximal de D y $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con $S \cap T = \emptyset$.

Ya que S es un conjunto independiente maximal y T una trayectoria dirigida de longitud máxima entonces existe $y \in S$ tal que $(y, x_n) \in A(D)$.

Ahora probaremos que si $(y, x_i) \in A(D)$ entonces $(y, x_{i-1}) \in A(D)$ para toda $1 \leq i \leq n$.

Suponemos que $(y, x_i) \in A(D)$ ya que $(x_{i-1}, x_i) \in A(D)$ y D es una digráfica B_1 -orientada entonces $\{(y, x_{i-1}), (x_{i-1}, y)\} \cap A(D) = \emptyset$; cuando $(x_{i-1}, y) \in A(D)$ tenemos:

$T' = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ es una trayectoria dirigida de D con $\kappa(T') = 1 + \kappa(T)$ lo cual contradice la forma en que T fue elegida, de aquí tenemos:

$(y, x_{i-1}) \in A(D)$,

por lo que (y, x_0) y $T'' = (y, x_0, x_1, \dots, x_n)$ es una

trayectoria dirigida de D , $\kappa(T'') = 1 + \kappa(T)$ contradiciendo nuevamente la elección de T .

Nota 3.1

Sea D una digráfica definida como sigue:

$$V(D) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, \quad A(D) = \{(x_1, x_0), (x_1, x_2), (x_3, x_2)\}.$$

Considerando la digráfica D vemos que la hipótesis de ser B_1 -orientada o B_2 -orientada no puede omitirse en el teorema 3.6.

Nota 3.2

Claramente una digráfica D satisface la conjetura C1 si y sólo si D^{-1} la satisface. (D^{-1} denota a la digráfica inversa de D obtenida al invertir la dirección de los arcos de D).

Por lo tanto aplicando el principio de dualidad direccional tenemos que para cada teorema o corolario existe un teorema o corolario dual que se obtiene al reemplazar núcleo por conúcleo, $I(D)$ por $T(D)$, $\delta_D^+(x)$ por $\delta_D^-(x)$, $\Gamma_D^+(x)$ por $\Gamma_D^-(x)$ y B_1 -orientada por B_2 -orientada.

APENDICE A

Núcleos

El concepto de núcleo de una digráfica fue introducido por John Von Neumann y Oskar Morgenstern en 1953 como herramienta de interés en la Teoría de Juegos. Demostraron que toda digráfica finita sin ciclos posee un núcleo único. Posteriormente y ya con un enfoque puramente gráfico, Richardson investigó diversas clases de digráficas que poseen núcleo. En particular encontró que las digráficas bipartitas (finitas o infinitas) y que las digráficas finitas sin ciclos impares tienen núcleo. La demostración original del Teorema de Richardson es bastante complicada, en 1971 Víctor Neumann Lara introdujo el concepto de seminúcleo que permitió una demostración mucho más simple.

En 1975 Romanowicz, Zbigniew demostró que una digráfica en la cual cada ciclo impar no simétrico tiene una diagonal simétrica que es imparmente acíclica, tiene núcleo.

Posteriormente en 1979, P. Ducket presentó en su tesis doctoral algunos resultados interesantes sobre la existencia de núcleos en digráficas.

Conceptos Preliminares

Dadas dos digráficas D y H denotaremos $D \cup H$ a la unión de D y H que es la digráfica definida como sigue:

$$A(D \cup H) = A(D) \cup A(H) \text{ y } V(D \cup H) = V(D) \cup V(H).$$

Si D_0 es una subdigráfica de D , una flecha de D que no es flecha de D_0 es una pseudodiagonal de D_0 siempre y cuando ambos puntos terminales de la flecha sean vértices de D_0 . Si $f = (v_1, v_2)$ con $v_1 \in S_1 \subseteq V(D_0)$, $v_2 \in S_2 \subseteq V(D_0)$ es una pseudodiagonal de D_0 , se dirá que

f es una $v_1 S_2$ -pseudodiagonal de D_0 , una $S_1 v_2$ -pseudodiagonal de D_0 o una $S_1 S_2$ -pseudodiagonal de D_0 .

Sea $f=(v_1, v_2)$ una pseudodiagonal de D_0 , se dirá que f es una diagonal de D_0 cuando $(v_2, v_1) \notin A(D_0)$, si $v_1 \in S_1 \subseteq V(D_0)$ y $v_2 \in V_2 \subseteq V(D_0)$ se dirá que f es una $v_1 S_2$ -diagonal de D_0 , una $S_1 v_2$ -diagonal de D_0 o una $S_1 S_2$ -diagonal de D_0 .

Conceptos y Teoremas Fundamentales

Definición a1. (Von Neumann y Morgenstern). -

Sea D una digráfica $S \subseteq V$. S es un núcleo de D si

- S es independiente y
- Para todo $x \in V-S$ existe una flecha de x a S .

Los siguientes resultados fueron obtenidos por Víctor Neumann Lara:

Definición a2. .-

Sea D una digráfica. Diremos que $S \subseteq V$ es seminúcleo de D si :

- S es independiente
- Para cada flecha f que va de S a x (en virtud de la condición anterior $x \in V-S$) existe una flecha f' que va de x a S .

Claramente \emptyset es seminúcleo de D .

Teorema a1. .-

Sea S un seminúcleo de D .

$B = \{v \in V-S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$ y S' un seminúcleo de la subdigráfica B de D inducida por B . Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D .

Como consecuencia del Teorema a1 tenemos :

Teorema a2. .-

Sea S un seminúcleo de una digráfica D .

$B = \{u \in V - S \mid \text{no existe flecha de } u \text{ a } S\}$ y N' un núcleo de la

sudigráfica B de D inducida por B . Entonces $S \cup N'$ es núcleo de D .

Definición a3.

Diremos que D es R-digráfica si toda subdigráfica plena de D posee un seminúcleo no trivial (es decir no vacío).

Observación a1.

Es claro que si D es R-digráfica y D_0 es subdigráfica plena de D entonces D_0 también es R-digráfica.

Teorema a3.

Toda R-digráfica posee al menos un núcleo.

APENDICE B
R-digráficas

Teorema b1.

Sea D una digráfica, $T \in V(D)$ tal que $D-T$ es R-digráfica y para cada $u \in T$ al menos una de las dos siguientes propiedades se satisface :

- a) Cada ciclo dirigido impar C por u tiene alguna $V(C)C_u^0$ - pseudo-diagonal.
- b) Cada ciclo impar C por u tiene alguna $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -pseudo-diagonal.

Entonces D es R-digráfica.

Teorema b2.

Sea D una digráfica; $A \in A(D)$ tal que para cada $f=(u,v) \in A$ se satisface la siguiente propiedad :

- i) Cada ciclo impar C por f tiene alguna $V(C)C_u^0$ - pseudodiagonal.

Entonces D es R-digráfica si y sólo si toda subdigráfica plena H de D tal que $H \cap A = \emptyset$, es R-digráfica.

Teorema b3.

Sea D una digráfica y $T \subset V(D)$ tal que $D - T$ es R-digráfica y para cada ciclo dirigido impar C tal que $C \cap T \neq \emptyset$, se tiene $V(C) = C^{(1)}$.

Entonces D es R-digráfica.

Teorema b4.

Sean D una digráfica y $A \subset A(D)$ tal que para cada ciclo impar C con $C \cap A \neq \emptyset$ se satisface $V(C) = C^{(0)}$. Entonces D es R-digráfica si y sólo si toda subdigráfica plena H de D tal que $H \cap A = \emptyset$ es R-digráfica.

Teorema b5.

Sea D una digráfica, si existe $T \subset V(D)$ tal que para cada ciclo dirigido impar C de D con $V(C) \cap T \neq \emptyset$ tenemos $A(C) = F^1(C)$. Entonces D

es R-digráfica si y sólo si $D-T$ es R-digráfica.

Aplicaciones

Del Teorema b3.

1) Sean D una digráfica, $T \in V(D)$ tal que $D-T$ es R-digráfica y cada ciclo impar $C=(1,2,\dots,2n+1,1)$ tal que $C \cap T \neq \emptyset$ tiene dos pseudodiagonales $f=(i,j)$, $g=(k,j+1)$. Entonces D es R-digráfica.

Nota b1. Este implica el siguiente resultado obtenido por P. Dichet(1979):

Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido impar $(1,2,\dots,2n+1,1)$ de D posee dos diagonales de la forma (k_1, k_1+2) y (k_1+1, k_1+3) . Entonces D tiene núcleo.

2) Una digráfica D es R-digráfica si y sólo si $D-B$ es R-digráfica; donde $B \subset \{z \in V(D) / z \text{ es imparmente acíclico en } D\}$.

3) Sea D una digráfica tal que todo ciclo impar no simétrico de D posee una pseudodiagonal f_c tal que para cada ciclo impar C' por f_c , $C'=C'^{(1)}$. Entonces D es R-digráfica.

Nota b2. Este implica el siguiente resultado obtenido por Romanowicz, Zbigniew (1975):

Sea D una digráfica tal que para cada ciclo impar no simétrico C , existe $f=(u,v) \in A(C)$ tal que $(v,u) \in A(C)$ y (v,u) es imparmente acíclica. Entonces D tiene núcleo.

Del Teorema b4.

4) Sea D una digráfica, $F_{I.A.}(D) = \{f \in A(D) / f \text{ es imparmente acíclica en } D\}$

D es R-digráfica si y sólo si toda subdigráfica plena H de D tal

que $\text{HNF}_{\text{I.A.}}(D) = 0$ es R-digráfica.

5) Sea D una digráfica, si $D - F_{\text{I.A.}}(D)$ es R-digráfica, entonces D es R-digráfica.

Nota b3. El recíproco de (5) es falso. Basta considerar un ciclo impar con alguna pseudodiagonal imparmente acíclica.

B I B L I O G R A F I A

C. Berge

Graphs

North Holland, Amsterdam (1985)

J.A. Bondy and U.S.R. Murty

Graph Theory with Applications

The McMillan Press Ltd, London, 1976.

T. Gallai

On Directed Paths and Circuits, in Theory of Graphs

Eds. P. Erdős and G. Katona

Academic Press, New York, 1968.

T. Gallai, A.N. Milgram

Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei

Acta Sc. Math. 21, 1960

B. Roy

Nombre Chromatique et plus long Chemins d'un Graphe

RAIRO, Série Rouge, 1, 1967.

H. Galeana-Sánchez and Hugo A. Rincón-Mejía

Some Results On Independent Sets And Longest Directed Paths

U.N.A.M., México D.F.

Ben-Arroyo Hartman
Variations on the Gallai-Milgram Theorem
Discrete Mathematics, 1988
North-Holland

P. M. Grundy
Mathematics and Games
Eureka, 2, 1939.

H. Galeana Sánchez
Núcleos, R-Digráficas y \tilde{R} -Digráficas.
U. N. A. M., México D.F. 1982.

L. Pastrana Ramírez
Gráficas y Digráficas de Líneas
U. N. A. M., México D.F. 1990.