21

2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

"A C A T L A N"

ANALISIS DE LA EDUCACION MATEMATICA Y SU INFLUENCIA EN EL DESARROLLO CIENTIFICO Y TECNOLOGICO DE MEXICO

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE LICENCIADA EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

ALICIA AVALOS CAUDILLO

México, 1991

INDICE DEL CONTENIDO

INTRODUCCION

Vivimos en una era tecnológica que cambia muy rápidamente. Es indudable que en la época actual, el progreso social y económico y su interrelación con la ciencia y tecnología hacen posible un avance integral de la sociedad. Las sociedades industriales han dado prueba de que para alcanzar este progreso económico y social es necesario desarrollar investigación científica, tecnológica, educativa, etc. Para esto la sociedad requiere de un buen número de hombres de ciencia altamente calificados, requiere al hombre de amplio horizonte intelectual capaz de descubrir problemas y de idear soluciones nuevas, pero además requiere un estrato más amplio de profesionales de la ciencia, de hombres científicamente activos que son los encargados de llevar a términos los grandes proyectos y de mantener la investigación sostenida. Todavía hay un tercer estrato de técnicos preparados hasta cierto nivel en las cuestiones básicas de la ciencia, que se ocupan de tareas secundarias o de administración pero que son capaces de comprender aquello que hacen los científicos y finalmente un público capaz de crear el clima intelectual que necesita para vivir la investigación intensiva.

La ciencia y la tecnología no se pueden improvisar, sino que son el resultado de un proceso educativo que alcanzó un alto grado de desarrollo. La sociedad debe tener una preparación planeada en forma adecuada para combatir las deficiencias del momento y resolver problemas futuros.

El desarrollo científico y tecnológico y la educación matemática son inseparables. Las matemáticas son el lenguaje de las ciencias y son vitales para su desarrollo y aplicación. Los astrónomos, físicos, químicos, ingenieros, biólogos, sociólogos, administradores de empresas, economistas, etc., necesitan en una u otra forma conocer y manejar este lenguaje. La enseñanza de las matemáticas ocupa una posición estratégica en el sistema educativo, y el nivel de la preparación científica y tecnológica puede elevarse más fácilmente si los conocimientos matemáticos se imparten oportuna y adecuadamente.[1]

Considerando entonces que las matemáticas son la base del desarrollo científico y tecnológico, y que éstos a su vez marcan el progreso social y económico de una sociedad, se hace necesario analizar, cuál es la situación actual de nuestra educación matemática en los distintos niveles educativos, ya que la enseñanza adecuada de las matemáticas se ha convertido en una de las más grandes preocupaciones de la educación moderna.

> "Los problemas específicos del aprendizaje en México son desde el punto de vista del doctor José Eduardo San Esteban, los mismos que se presentan en todo el mundo; y el más generalizado: la dificultad para aprender matemáticas. Hay un grupo de niños que si presentan una limitación específica para aprenderlas (discalculia*) pero debe diferenciarse del otro 99% de escolares que no las asimilan debido a los métodos deficientes de enseñanza. El neurólogo explica que es cuestión mundial que se presenta durante la infancia, a pesar de que se trata de una ciencia exacta y bien sistematizada y debería resultar más fácil de comprender y asimilar. Sin embargo, no existen problemas específicos para aprender otras materias escolares..."[2]

Analizando esta cita se puede inferir que si un niño en sus primeros años escolares tiene problemas para aprender matemáticas y éstos no se atienden a tiempo, se desencadenará una historia escolar con una deficiente preparación en matemáticas y por consiguiente menos probabilidad para que intervenga de manera efectiva en las tareas del desarrollo científico y tecnológico necesarios en una sociedad.

> "... Es notoria una tendencia hacia la reducción en la matrícula de las carreras técnicas y tecnológicas. Todo nuestro régimen escolar en la práctica parece estar ideado para desestimular estas carreras, que necesitamos y seguiremos necesitando en el futuro..."[3]

---

[1] Cf. Adem José, Salmerón Fernando, La Filosofía y las Matemáticas, Ediciones Productividad, México, 1966.
*Discalculia: Dificultad mental para realizar todo tipo de cálculos.

[2] Leyva, José A.: "Cuando los niños comenzaron a ser listos. Problemas de Aprendizaje." p. 17. En: ICYT Información Científica y Tecnológica. Vol. 11. No. 151. MEXICO, CONACYT, abril 1989.

[3] Plan Nacional de Desarrollo 1983-1988. Poder Ejecutivo Federal. p. 12

"... Entre las áreas del conocimiento menos desarrolladas en el nivel medio superior, especialmente en las instituciones que no pertenecen al sistema de enseñanza tecnológica, están las ciencias básicas, la matemática y la metodología de investigación. Este problema tiene repercusiones diversas: elegir carrera en función de evitar materias consideradas difíciles; ingresar al nivel superior de estudios sin contar con un mínimo deseado de aptitudes para el razonamiento lógico (...) Al respecto, es evidente lo enorme de la tarea a realizar en cuanto a la formación de profesores, la creación de métodos de enseñanza e investigación adecuados al medio social y a la divulgación de los conocimientos científicos ..."[4]

Así pues, el problema de la dificultad para aprender matemáticas no es tan simple, sino que es demasiado complejo, lo que hace indispensable llevar a cabo Investigación en Educación Matemática que atienda todos los factores que inciden en este problema. Con la Investigación es posible encontrar alternativas de solución fiables.

En este trabajo, bajo el título *Análisis de la Educación Matemática y su influencia en el desarrollo Científico y Tecnológico de México*, se pretende evaluar la trascendencia que tiene el realizar Investigación en Educación Matemática, para que sea mejorada la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para este propósito, se propone que una alternativa de solución es coordinar para su implementación y puesta en práctica a nivel nacional todas las áreas de investigación en educación matemática y que además se requiere de esfuerzos de toda índole —económicos, políticos, culturales, sociales, etc— que incidan en la mejora del Sistema Educativo Nacional. Pero para involucrarse en la investigación se requiere seleccionar una de sus áreas.

Por ejemplo, debido al actual impacto de la computadora en la educación, además de considerar que es una herramienta tecnológica que cada vez es más accesible a la sociedad, se seleccionó el área de cómo y dónde utilizar la computadora en la educación matemática, para lo cual se presenta un marco conceptual sobre

[4] PROGRAMA NACIONAL DE EDUCACION SUPERIOR. Lineamientos generales para el periodo 1981-1991 SEP-ANUIES, p. 40

las diferentes formas de uso de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para tener una mayor visión de lo que se podría hacer con esta herramienta, para los objetivos y metas de la educación matemática. La idea es que a través de la investigación del uso de la computadora para la enseñanza de las matemáticas, se integre este medio a la currícula de las matemáticas como una herramienta usual y no como una técnica más. La computadora puede ser útil para una mejor comprensión de las ideas matemáticas y podría estimular el interés de algunos alumnos por el estudio de las matemáticas.

Este análisis se realiza a partir de considerar la Historia de las Matemáticas, para ello se hacen notas históricas desde sus probables comienzos en la Antigua Edad de Piedra, hasta el siglo XIX, en donde se presenta el desarrollo y evolución de las matemáticas, algunas aplicaciones inmediatas en relación al concepto matemático desarrollado; se hace referencia a algunas aportaciones de algunos de los grandes matemáticos, se citan lugares y se recalca el aspecto educativo de las matemáticas. Esto con el propósito de mostrar parte de la enorme estructura del conocimiento matemático y tener un marco de referencia comparativo de los inicios de la educación matemática en la Sociedad Mexicana y las Sociedades Occidentales. Además de observar la relación de la evolución de las sociedades y el desarrollo general de la cultura y como parte de esa cultura, las matemáticas. Asimismo, se trata el hecho implícito de que para la evolución y desarrollo de las matemáticas fue necesaria su transmisión y estudio de las mismas por nuevas generaciones.

Para continuar con el análisis de la importancia de estudiar matemáticas, se mencionan algunas de las aplicaciones de la matemática al desarrollo científico y tecnológico. Por la enorme estructura del conocimiento matemático que se ha venido formando a través de los siglos sería imposible citar toda la influencia de la matemática en la vida del hombre, por lo que sólo se hace someramente.

Con esto se enfatiza la importancia que tiene las matemáticas para el desarrollo científico y tecnológico de una sociedad y poder entonces analizar que sucedió con el inicio de la educación matemática en México en el período colonial, donde se menciona que la educación en las Universidades en los siglos XVI y XVII podría ser comparada en su enseñanza matemática con muchas escuelas europeas. Pero es desde principios del presente siglo donde se puede volver a observar un mejor desarrollo de las matemáticas, pero que sin embargo también se presenta un gran problema, y es el que existe dificultad para aprender matemáticas en todos los niveles educativos del país e incluso en algunos niveles educativos de las grandes potencias mundiales, que en parte se debe a una deficiente enseñanza en el Sistema Educativo. Además de que este problema no es nuevo, pero es en fechas recientes que se le está dando la debida importancia a nivel Institucional.

Es por este problema que se requiere realizar investigación para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se presentan los diferentes tipos de Investigación que en Educación Matemática se pueden desarrollar, o que ya se han desarrollado, con el fin de mostrar la complejidad del problema y que es necesario sumar más esfuerzos para seguir investigando y desarrollando estrategias de solución al problema.

Seleccionada, el área de investigación relacionada con los usos de la computadora como apoyo a la educación matemática, se analizan los enfoques propuestos por diversos autores para críticar las bondades y defectos que pudieran tener. Esto con el propósito de poder plantear una mejor y más amplia clasificación de las formas de uso de la computadora en la educación, con el fin de orientar el trabajo de investigación que en esta área se puede llevar a cabo. Asimismo, se presentan algunos errores comunes que se cometen cuando se introducen las computadoras a la escuela y no existe una planeación y desarrollo en relación a los usos que puede tener, limitando de esta manera el potencial de la computadora.

Se considera que con los usos propuestos en el último capítulo de este trabajo, como son programación de la computadora por el estudiante, ocho tipos de enseñanza de las matemáticas a través de la computadora y seis tipo de uso de la computadora como una herramienta de apoyo para el profesor, el lector podrá tener una amplia visión de los usos de la computadora en la educación matemática, así como tener en cuenta las limitaciones que la computadora pudiera tener, y el reto y oportunidad que esta herramienta tecnológica le pueda brindar en materia educativa. Para tratar de explotar al máximo el potencial de la computadora en beneficio de mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

CAPITULO 1

NOTAS HISTORICAS DE LA MATEMATICA

En el presente capítulo, se hace una breve descripción, de consideraciones históricas en relación a la matemática. Las notas presentan un orden cronológico primordialmente.

Básicamente las ideas aquí expuestas fueron tomadas del libro HISTORIA CONCISA DE LAS MATEMÁTICAS*. Un elemento sumamente importante de este libro es el extenso material bibliográfico que se cita para profundizar en un tema de interés. Struik narra los hechos sin pretender una dirección en particular; no profundiza en el contenido técnico; este texto podría considerarse como un buen acercamiento a la "Historia de la Matemática" para el no iniciado.

LOS COMIENZOS

Las nociones preliminares de la matemática, se pueden encontrar hasta en las sociedades más antiguas que pudieron existir, y estas nociones se constatan con las ideas de forma, número y medición de objetos, que tuvieron los hombres primitivos.

Las pinturas en las cuevas de Francia y España, posiblemente, hace unos 15,000 años en la Antigua Edad de Piedra: el Paleolítico, revelan una extraordinaria comprensión de la forma.

En cuanto al progreso de la comprensión de los valores numé-

---

*Struik, Dirk Jan, Historia Concisa de las Matemáticas, México, 1986, pp. 1-278 ricos, lo encontramos en la Nueva Edad de Piedra: el Neolítico (hace unos 10,000 años). Cuando el viaje nómada llegó a su fin y los pescadores y cazadores son substituidos por los agricultores primitivos. Algunas innovaciones en este período fueron las artes elementales como la alfarería, la carpintería y el tejido y al término del período la fundición del cobre y bronce. Se hicieron inventos, como la rueda del alfarero y la rueda de la carreta. los botes y los refugios fueron mejorados. Esto ocurrió solamente dentro de áreas locales y no siempre se difundieron a otras localidades. En estas áreas locales se estimuló la actividad comercial y esto promovió la formación de las lenguas. Las palabras de estas lenguas, expresaban cosas muy concretas y muy pocas abstracciones. pero allí ya había lugar para algunos términos numéricos y para algunas relaciones de forma.

Los términos numéricos expresan algunas de las ideas más abstractas que la mente humana es capaz de concebir; en un principio fue cualitativa más que cuantitativa, distinguiendo sólo entre *uno (o un), dos y muchos.* Cuando el concepto de número se extendió, números mayores se formaron mediante la adición. Después los números fueron arreglados o empaquetados en grandes unidades auxiliándose del empleo de los dedos. Los registros numéricos fueron guardados por medio de marcas sobre una vara, sobre guijarros o conchas y, nudos en una cuerda. Esto condujo, en una cierta etapa del desarrollo social, a los sistemas numéricos, por ejemplo quinarios (cinco unidades), decimales, vigesimales, etc.

También se hizo necesario medir el contenido de los objetos. Las normas eran toscas y a menudo tomadas de partes del cuerpo humano, tales como dedos, pie o manos.

Ejemplos de algunos patrones geométricos existen en la alfarería, en el tejido y en la fabricación de cestos. Muestran intentos en la formación de los números triangulares, los que jugaron un papel importante en la matemática pitagórica de un período posterior.

Las matemáticas son totalmente evidentes durante la parte primitiva de la historia del hombre. La "moderna" numerología es un resto de los ritos mágicos que se remotan al neolítico y posiblemente aun a épocas paleolíticas.

Aun entre las tribus muy primitivas encontramos algún cómputo del tiempo y, consecuentemente, cierto conocimiento del movimiento del sol, de la luna y de las estrellas.

EL ANTIGUO ORIENTE

Durante el quinto, cuarto y tercer milenios A.C. más nuevas y avanzadas formas de la sociedad evolucionaron desde las bien establecidas comunidades neolíticas a lo largo de los bancos de los grandes ríos en Africa y Asia, en el subtrópico o en regiones casi subtropicales. Estos ríos eran el Nilo, el Tigris y el Eufrates, el Indo y más tarde el Ganges, el Huang Ho y posteriormente el Yang-tse.

La matemática oriental se originó como una ciencia práctica con el objeto de facilitar el computo del calendario, la administración de la cosecha, la organización de las obras públicas y la recaudación de impuestos. Naturalmente que el énfasis inicial fue sobre la aritmética práctica y la medición. sin embargo, gradualmente llegaría a ser estudiada por su propia razón.

Es posible diferenciar entre las artes y la escritura de los egipcios, los mesopotámicos, los chinos y los hindúes, así mismo lo era su notación matemática, no obstante, su naturaleza aritmética algebraica era muy semejante.

Debido a la forma de preservar su conocimiento en diferentes materiales. el estudio de la historia de las matemáticas de fuentes originales se limita al material egipcio y mesopotámico de los siglos prehelenísticos. El material que usaba el pueblo de Mesopotamia eran tablillas de arcilla que son virtualmente indestructibles, los egipcios usaban los papiros y los conservaban en un clima seco, no así los materiales que usaban los chinos y los hindúes que eran más perecederos como la corteza de árbol o el bambú.

Con el estudio de estos materiales es posible apreciar el grado de desarrollo de la matemática, por ejemplo en Egipto, en el *Papiro Rhind* (descubierto en 1858), que fue escrito alrededor de 1650 A.C., pero contiene material mucho más antiguo. El papiro contiene 85 problemas, que eran de una antigua erudición. muchos problemas son muy simples y no van más allá de una ecuación lineal con una incógnita; algunos son de naturaleza geométrica, la mayoría teniendo que ver con el cálculo de magnitudes geométricas. Se puede observar que su matemática está basada en un sistema decimal de numeración con signos especiales para cada una de las unidades decimales superiores, desarrollando una aritmética de carácter predominantemente aditivo.

La matemática mesopotámica alcanzó un nivel muy superior al logrado por la matemática egipcia en cualquier tiempo. Los textos escritos alrededor de 2,100 A.C., muestran que tenían una aguda habilidad de cómputo, los textos contienen tablas de multiplicar; un sistema sexagesimal de numeración bien desarrollado, los símbolos que representaban números acumulaban su valor al ponerse uno al lado de otro, hay símbolos cuneiformes indicando 1, 60, 3600 y también 60^{-1}, 60^{-2}. Los sumerios usaron un solo símbolo para indicar los mismos números anteriores pero con un valor diferente dependiendo de su posición.

En los textos cuneiformes de la primera dinastía Babilónica alrededor de 1950 A.C., (cultura asentada en la misma región de los ríos Tigris y Eufrates), los textos dan muestra que los babilonios manejaban ecuaciones cuadráticas, resolvían ecuaciones lineales y cuadráticas con dos variables y aun problemas que involucraban ecuaciones cúbicas y bicuadráticas.

Para los babilónicos así como para los egipcios la geometría se desarrollo desde un fundamento de problemas prácticos relativos al cálculo de magnitudes geométricas.

Los textos muestran que los babilonios conocían el teorema de Pitágoras, no solamente para casos especiales, sino en su completa generalidad. También había algunas aproximaciones excelentes:

$\sqrt{2}$ era indicada por $1\frac{5}{12}$

Si se calcula actualmente $\sqrt{2} = 1.4142$ y $1\frac{5}{12} = 1.4167$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.7071$ lo indicaban por $\frac{17}{24} = 0.7083$.

Un valor para $\pi = 3\frac{1}{8}$.

En todos los textos cuneiformes hay una continuidad de tradición que parece apuntar hacia un continuo desarrollo local.

En ninguna parte de toda la antigua matemática oriental se encuentra algún intento de lo que se llama una demostración, únicamente, "hacer así, hacer aquello". ¿Cómo llegaron los babilonios al conocimiento del teorema de Pitágoras? Existen varios intentos para explicar la forma en la que los egipcios y los babilonios obtuvieron sus resultados, pero todos ellos son de naturaleza hipotética. Pero desde un punto de vista educativo, se podría observar que la educación oriental tenía el interés de difundir el conocimiento e instruir a las personas y no necesariamente mediante un razonamiento muy riguroso y formal. Si se analiza el desarrollo histórico de la educación, se puede observar que la mayoría de la matemática que se enseña a los ingenieros y técnicos actuales es todavía de la del tipo "hacer así, hacer aquello".

La matemática oriental nunca parece haberse liberado de la influencia milenaria de los problemas de tecnología y administración para el servicio de las cuales fue inventada.

Los sabios nativos hindúes y chinos acostumbran exagerar, la gran antigüedad de su matemática, pero no hay textos matemáticos en existencia. Los textos hindúes y chinos existentes más antiguos son de los primeros siglos D.C. Pero fue la diferente perspectiva de la civilización griega, la que condujo la matemática hasta los niveles de una verdadera ciencia.

GRECIA

Alrededor de la cuenca del Mediterráneo, probablemente 900 A.C., los imperios Minoico e Hitita habían desaparecido, el poder de Egipto y Babilonia se había reducido y entran al escenario histórico nuevos pueblos, entre los más sobresalientes estaban los Hebreos, Asirios, Fenicios y Griegos.

La sustitución del bronce por el hierro trajo cambios en el arte militar, abaratamiento de las herramientas de producción, aumento el excedente social, se estimuló el comercio y permitió mayor participación del pueblo en asuntos de economía y de interés público. Esto se reflejó en dos grandes innovaciones: la sustitución de la incómoda escritura del Antiguo Oriente por un alfabeto fácil de aprender y la introducción de la moneda acuñada, que ayudó a estimular el comercio.

El surgimiento de la *polis griega* durante los siglos VI y VII A.C., la ciudad-estado autogobernada se desarrollo principalmente en Jonia en la costa de Anatolia, se relacionó con las riberas de todo el Mediterráneo, con Mesopotamia, Egipto, Escitia y aun con países más alejados. Mileto ocupó por largo tiempo un lugar principal. Ciudades en otras riberas también ganaron en riqueza e importancia; en tierra firme de Grecia, primero Corinto después Atenas; sobre la costa italiana, Cretona y Tarento; en Sicilia, Siracusa.

El comerciante traficante vivió en un período de descubrimientos geográficos comparables solamente con los de Europa Occidental del siglo XVI; el comerciante no reconocía monarca absoluto o poder conferido supuestamente a una deidad estática. Además, el comerciante podía disfrutar de una cierta cantidad de ocio, resultado de la riqueza y de la labor del esclavo. El podía filosofar con respecto a su mundo. La ausencia de cualquier religión bien establecida condujo a muchos habitantes de estas ciudades costeras al misticismo, pero también estimuló a su opuesto, el desarrollo del racionalismo y de la perspectiva científica, la cuestión científica moderna "*¿por qué?*"

La sociedad griega era estable y absorbieron la matemática que había a su alrededor y la ampliaron. El estudio griego inicial tenía una meta: el entendimiento del lugar del hombre con un esquema racional. La matemática ayudó a encontrar orden en el caos, a ordenar ideas en cadenas lógicas, a encontrar principios fundamentales. Fue la más racional de todas las ciencias y aunque hay una pequeña duda de que los mercaderes griegos llegaran a familiarizarse con la matemática oriental a lo largo de sus rutas de comercio, ellos pronto descubrieron que los orientales habían dejado la mayor parte de la racionalización sin hacer. *¿Por qué el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales? ¿Por qué el área de un triángulo es igual a la mitad de la de un rectángulo de base y altura iguales?* Estas preguntas, desde luego, llegaron hasta hombres que planteaban cuestiones semejantes concernientes a la cosmología, la biología y la física.

Un altamente ingenioso y paciente juicio crítico de los textos debido a Paul Tannery, T. L. Heath, H. G Zeuthen, E. Frank y otros, ha podido dilucidar muchos puntos obscuros en esta historia inicial, ya que la información existente del desarrollo inicial de la matemática griega proviene de las épocas cristiana e islámica.

Por el año 430 A. C., hicieron de Atenas no solamente el líder de un Imperio griego, sino también el centro de una nueva y admirable civilización: *La Edad de Oro de Grecia.*

Dentro de las luchas sociales y políticas. filósofos y maestros presentaron sus teorías y con ellas la nueva matemática. Un grupo de hombres críticos, los "sofistas", abordó los problemas de naturaleza matemática con espíritu de entendimiento más bien que con el de utilidad. Esta actitud mental permitió a los sofistas alcanzar los fundamentos del pensamiento riguroso. Desafortunadamente, sólo existe un fragmento temático completo de este período; fue escrito por el filósofo Jónico, Hipócrates de Quíos, trata un tema curiosamente "impráctico", las llamadas lunadas, las pequeñas lunas o crecientes limitadas por arcos circulares.

Se había producido el comienzo de la *axiomática*, como es indicado por el nombre del libro escrito supuestamente por Hipócrates, *los Elementos*, el título de todos los tratados axiomáticos griegos incluyendo el de Euclides. El tratado completo ya está en la que puede ser llamada la tradición euclideana, pero es más antiguo que Euclides por más de un siglo.

Los tres famosos problemas matemáticos de la antigüedad: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura del circulo; comenzaron a ser tema de estudio y condujeron al descubrimiento de las secciones cónicas y de algunas curvas cúbicas y cuárticas y a una curva trascendental: la cuadratiz.

Probablemente, a un lado del grupo de los sofistas, existió otro grupo, los "pitagóricos". Mientras que la mayoría de los sofistas ponían de relieve la realidad del cambio en particular los Atomistas, seguidores de Leucipo y de Demócrito los pitagóricos subrayaban el estudio de los elementos inmutables de la naturaleza y de la sociedad. Su líder más destacado fue Arquitas de Tarento, alrededor del 400 A.C.

Los números fueron divididos por los pitagóricos en clases: impar, par, primo y compuesto, perfecto, amigable, triangular, cuadrado, pentagonal, etc.

La primera demostración general del teorema de Pitágoras muy bien puede haber sido obtenida en la escuela pitagórica. Aunque fue conocido en la Babilonia de Hammurabi.

El descubrimiento más importante atribuido a los pitagóricos fue "el irracional", obtenido por medio de segmentos de línea inconmensurables. Este descubrimiento que trastornó la fácil armonía entre la aritmética y la geometría, fue hecho probablemente en las últimas décadas del siglo V A.C.

Las paradojas de Zenón de Elea (?-450 A.C.) a saber, Aquiles, la Flecha, la Dicotomía y el Estadio, planteaban otro tipo de problemas existentes. Las paradojas crearon una conmoción, con algunas concepciones antiguas e intuitivas concernientes a lo infinitamente pequeño y a lo infinitamente grande, cuyos efectos pueden ser observados en la actualidad.

Es muy probable que Zenón no tuviese idea de las implicaciones matemáticas de sus argumentos. Paul Tannery, sin embargo creyó que éstos estaban particularmente dirigidos en contra de la idea pitagórica del espacio como suma de puntos ("el punto es unidad de posición").

Los argumentos de Zenón comenzaron a inquietar a los matemáticos aun mucho después de que el irracional había sido descubierto. ¿Era posible la matemática como una ciencia exacta? Tannery ha sugerido que podemos hablar de un *"escándalo lógico verdadero"* —de una *"crisis"* en la matemática griega— Si éste es el caso, entonces esta crisis se originó en el período posterior a la Guerra del Peloponeso que terminó con la caída de Atenas (404 A.C.). Se puede detectar una conexión entre la crisis de la matemática y la del sistema social.

Comienza un nuevo período de la historia griega, existiendo una creciente riqueza de ciertas secciones de la clase dominante, combinada con la igualmente incrementada miseria e inseguridad del pobre. Las clases dominantes basaban su existencia material más y más en la esclavitud, lo que les permitía ociosidad para cultivar las artes y las ciencias, pero las hizo también más y más adversas a todo trabajo manual.

En la República de Platón (escrita, probablemente, alrededor de 360 A.C.) es donde encontramos la expresión más clara de los ideales de la democracia poseedora de esclavos. Los "guardias" de la República de Platón deberían estudiar el *quadrivium*, que consistía de *aritmética, geometría, astronomía y música*, con objeto de entender las leyes del universo.

Tres grandes matemáticos, estuvieron relacionados con la Academia de Platón, Arquitas, Teeteto (muerto en 369 A.C.) y Eudoxo (408-355 A.C.).

Fue Eudoxo quien resolvió la "crisis" de la matemática griega y cuyas formulaciones determinaron el curso de la axiomática griega. La teoría de las proporciones o *"método de exhausión"* de Eudoxo abolió la teoría aritmética de los pitagóricos, evitando los infinitesimales, descartándolos, reduciéndose a emplear la lógica formal. Era una teoría geométrica netamente, que se encuentra en la definición 5 del libro V, de *los Elementos* de Euclides.

Existen claras indicaciones que otro método era realmente el que se utilizaba. Arquímedes describió en una carta un modo fértil aunque no riguroso de encontrar resultados. Ha sido sugerido señaladamente por S. Luria, que dicho método representó a una escuela de razonamiento que competía con la Escuela de Eudoxo y también se remota al período de la "*crisis*", la Escuela de Demócrito, en ella fue introducida la noción del "*átomo geométrico*". Se suponía que un segmento de línea, una área o un volumen estaban formados por un número grande, pero finito de "*átomos*" indivisibles. Aún hoy usamos esta concepción de los "*átomos*" con bastante regularidad, reservando la rigurosa teoría del "*límite*" para el matemático profesional.

Así la antigüedad tuvo la alternativa entre un *método riguroso (exhausión)* pero relativamente estéril, y un *método vagamente fundamentado (del átomo)* pero mucho más fértil. En prácticamente todos los textos clásicos fue usado el primer método. Otra vez esto puede relacionarse con el hecho de que la matemática había llegado a ser una ocupación favorita de una clase ociosa, indiferente a la invención e interesada en la contemplación.

En 334 A.C., Alejandro el Grande comenzó su conquista de Persia. Cuando él murió en Babilonia en el 323, todo el Cercano Oriente había caído ante los griegos. Los griegos inundaron el Cercano Oriente como negociantes, comerciantes, médicos, aventureros, viajeros y mercenarios. El período del Helenismo había comenzado.

Los monarcas helenísticos adoptaron maneras orientales (problemas de administración y astronomía), pero estimularon las artes, letras y ciencias griegas.

Prácticamente todo el trabajo realmente realizado que llamamos *"matemática griega"*, fue producido en el intervalo relativamente corto de 350-200 A.C., desde Eudoxo hasta Apolonio, e incluso las realizaciones de Eudoxo se conocen a través de su interpretación por Euclides y Arquímedes.

La más grande floración de la matemática helenística, ocurrió en Egipto bajo los Ptolomeos y no en Mesopotamia bajo los Seléucidas.

Alejandría, capital de Egipto, con una posición central en el Mundo Mediterráneo, llegó a ser el centro intelectual y económico, existían otros centros del saber matemático, especialmente Atenas y Siracusa. Atenas llegó a ser un centro cultural, mientras que Siracusa produjo a Arquímedes, el más grande de los matemáticos griegos.

En este período apareció, el científico profesional, un hombre que dedicaba su vida a la búsqueda del conocimiento y recibía un salario por hacerlo. Algunos de los más destacados vivieron en Alejandría, donde los Ptolomeos edificaron un gran centro del saber en el llamado *Museo* con su famosa *Biblioteca.*

Euclides matemático de mayor influencia de todos los tiempos, desarrolló los *trece libros de los Elementos*, no se sabe cuantos son de su propiedad y cuantos son recopilaciones, pero son los textos matemáticos que han sido preservados de la antigüedad griega.

La mayor parte de nuestra geometría escolar está tomada, a menudo literalmente, de ocho o nueve de los trece libros; y la tradición euclideana todavía pesa excesivamente en nuestra instrucción elemental. Y su estructura lógica ha influido el pensamiento científico probablemente más que cualquier otro texto en el mundo.

Entre otros contenidos de los libros tenemos: el "teorema de Euclides" de que hay un número infinito de primos (Libro IX Prop. 20). El teorema (Libro VI Prop. 27) que contiene el primer problema de máximos que ha llegado a nosotros, con la prueba de que el cuadrado de todos los rectángulos de perímetro dado, tiene área máxima. El quinto postulado del Libro I "axiomas de las paralelas". Los intentos para reducir este axioma a un teorema condujeron en el siglo XIX a una justa apreciación del buen criterio de Euclides al adoptarlo como un axioma y al descubrimiento de otras geometrías las llamadas no Euclideanas. La exclusión del axioma de Arquímedes, en una forma semejante, condujo a geometrías no Arquímedeanas.

El propósito de Euclides al escribir los *Elementos* era aportar la teoría de las proporciones de Eudoxo, la teoría de los irracionales de Teeteto y la teoría de los cinco cuerpos regulares que ocupó un lugar relevante en la cosmología de Platón.

Arquímedes (287-212 A.C.) uno de los más grandes matemáticos griegos, puso su habilidad técnica a la disposición de los defensores de Siracusa. Este interés en las aplicaciones prácticas puede parecer extraño si lo comparamos con el desprecio con el cual tal interés era observado en la escuela platónica de sus contemporáneos.

Las contribuciones más importantes que Arquímedes hizo fueron en el dominio de lo que hoy llamamos el "cálculo integral", teoremas sobre áreas de figuras planas y sobre volúmenes de cuerpos sólidos. En la Medida del Círculo, encontró una aproximación de la circunferencia del círculo por medio del uso de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, extendiendo su aproximación a polígonos de 96 lados, encontró para π (en nuestra notación), lo siguiente:

$$3\tfrac{10}{71} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2018\frac{7}{40}} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} < \pi < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\tfrac{1}{7}\,^{*}$$

Otras contribuciones de Arquímedes son: su libro *Cuadratura de la Parábola* en donde se encuentra el área de un segmento parabólico. En el libro *Sobre Espirales* se encuentra la "Espiral de Arquímedes"; en el libro *Sobre Conoides y Esferoides* se encuentra el volumen de ciertas superficies cuadráticas de revolución. En su libro *Sobre los Cuerpos Flotantes*, se encuentra un tratado sobre hidrostática.

En su habilidad computacional, Arquímedes difirió de la mayoría de los matemáticos griegos productivos. Esto dio a su obra, con todas sus características típicamente griegas, un toque de lo oriental. Esto es algo que muestra que la tradición platónica nunca dominó enteramente a la matemática helenística.

Otro gran matemático, Apolonio de Perga (262-190 A.C.), escribió un tratado de ocho libros sobre "*Cónicas*". Se conocen estas cónicas por los nombres instituidos por Apolonio, no tuvo el

---

*$3.1409 < \pi < 3.1429$. La media aritmética de los límites superior e inferior de $\pi = 3.1419$. El valor correcto es 3.14159

método coordenado porque no tenía la notación algebraica (probablemente la rechazó conscientemente bajo la influencia de la escuela de Eudoxo).

La matemática, a través de la historia, hasta los tiempos modernos, no se ha podido separar de la astronomía. El contenido de cómputo y, a menudo, el conceptual de la matemática fueron ampliamente condicionados por la astronomía y el progreso de ésta dependió igualmente de la autoridad de los libros matemáticos disponibles.

La fusión de las ciencias griega y babilónica durante el período Seléucida produjo un gran avance en la teoría y en el cómputo y donde la ciencia babilónica continuó en la remota tradición calendárica. La contribución griega conocida más antigua a la astronomía teórica fue la teoría planetaria del mismo Eudoxo. Fue un intento para explicar el movimiento de los planetas suponiendo la superposición de cuatro esferas concéntricas rotatorias, una explicación en vez de una crónica de los fenómenos celestes. No obstante su forma imperfecta, la teoría de Eudoxo contenía la idea central de todas las teorías planetarias hasta el siglo XVII.

Así mismo, en Aristarco de Samos (310-230 A.C), el "Copérnico de la Antigüedad", a quien Arquímedes le atribuyó la hipótesis de que el sol y no la tierra, es el centro del movimiento planetario, se tiene otra idea central de las teorías planetarias.

Mucho del contenido de la gran obra de Ptolomeo, *el Almagesto*, puede ser atribuido a Hiparco de Nicea (que hizo observaciones entre 161-126 A.C.) especialmente el uso de los círculos excéntricos y de epiciclos para explicar el movimiento del sol, la luna y los planetas.

El tercero y último período de la sociedad antigua es el de la dominación romana. Todo el Oriente dominado por los romanos incluyendo a Grecia, fue reducido a la condición de una colonia gobernada por administradores romanos. La difusión de una economía esclavista en sociedad semejante fue fatal para todo trabajo científico original. Los propietarios de esclavos, raramente estuvieron interesados en descubrimientos técnicos, en parte porque los esclavos podían hacer todo el trabajo muy barato y en parte porque ellos temían ceder cualquier herramienta en las manos de los esclavos, lo cual podía aguzar su inteligencia.

Mientras el Imperio Romano mostró alguna estabilidad, la ciencia oriental continuó floreciendo como una curiosa mezcla de elementos orientales y helenísticos. Aunque la originalidad y el estímulo gradualmente desaparecieron, la *Paz Romana*, perdurable por muchos siglos, permitió la especulación imperturbable a lo largo de líneas tradicionales.

La escuela de Alejandría murió gradualmente con la declinación de la antigua sociedad. Proclo (410-485) e Hipatía (370-415), escriben comentarios sobre los matemáticos clásicos. En 630 Alejandría fue tomada por los árabes. No hay razón para creer que ellos destruyeron la famosa *Biblioteca* puesto que es dudoso que todavía existiera en ese tiempo.

EL ORIENTE DESPUES DE LA DECLINACION DE LA SOCIEDAD GRIEGA

La hegemonía cultural de los griegos sobre el Cercano Oriente desapareció casi enteramente con el repentino crecimiento del Islam. Después de 622 D.C., los árabes conquistaron grandes partes de Asia Occidental y antes del fin del siglo VII habían ocupado partes del Imperio Romano Occidental hasta Sicilia, el norte de Africa y España. Los árabes trataron de reemplazar la civilización grecoromana por la del Islam. La lengua oficial llegó a ser el árabe, en vez del griego o del latín: pero el hecho de que una nueva lengua fuera usada para los documentos científicos, tendía a obscurecer la verdad de que bajo el dominio árabe persistió una considerable continuidad de cultura.

Las sociedades herederas de los resultados matemáticos más excelentes de la competencia y combinación de cultura oriental y griega, durante el florecimiento del imperio romano, principalmente aparecieron en Egipto. Con la declinación del imperio romano la investigación matemática comenzó a desplazarse hacia la India y más tarde a Mesopotamia.

Los *Siddhantas*, (contribución de los hindúes). El *Surya* es uno de los libros *Siddhantas*, que todavía existe en una forma que se asemeja al original (hacia 300-400 D.C.). El *Surya Siddhanta* tiene tablas de senos en vez de cuerdas. Los resultados de los *Siddanthas* fueron sistemáticamente explicados y ampliados por escuelas de matemáticos hindúes, en Ujjaen (India Central) y Maisuru (sur de la India).

Algunos matemáticos conocidos son Aryabhata (hacia 500) y Brahmagupta (hacia 625). Arybhata I tenía para π el valor de 3.1416. La primera solución general de ecuaciones indeterminadas de primer grado $ax + by = c$ se encuentra en Brahmagupta. Es por lo tanto incorrecto, estrictamente hablando, llamar a las ecuaciones indeterminadas lineales, ecuaciones diofantinas. Ellos avanzaron al admitir raíces negativas de ecuaciones, aunque esto pudo haber sido, otra vez, una práctica más antigua sugerida por la astronomía babilónica. Su *Lilavati* fue, por muchos siglos, un trabajo clásico sobre la aritmética y el cálculo de magnitudes geométricas en el Oriente. La serie Gregory-Leibniz para $\frac{\pi}{4}$ se puede encontrar en un manuscrito en sánscrito atribuido a Nilakantha (hacia 1500).

La aportación más conocida de la matemática hindú es nuestro actual sistema posicional decimal. La primera referencia hindú está en una placa del año 595, donde la fecha 346 está escrita en notación de valor posicional decimal. Mucho antes que este registro epigráfico, los hindúes tenían un sistema para expresar números grandes por medio de palabras arregladas de acuerdo a un método de posición. Hay textos en los cuales la palabra *sunya*, que significa *cero*, se usa explícitamente.

La más antigua referencia precisa al sistema de valor posicional decimal hindú, fuera de la India, se encuentra en un trabajo del año 662 escrito por Severo Sébakth, un obispo sirio. Con la traducción de Al-Fazari de los *Siddhantas* al árabe (hacia 773), el mundo científico islámico comenzó a familiarizarse con el llamado sistema hindú (la tradición oriental prefería el método decimal de valor posicional frente a la numeración romana).

Mesopotamia reconquistó su posición central a lo largo de las rutas de comercio bajo los sasánidas, quienes imperaron, como reyes persas nativos. La Babilonia había desaparecido pero fue reemplazada por Selucia-Ctesifón, la cual otra vez cedió lugar a Bagdad después de la conquista árabe de 641.

Los califas Absidas, entre los cuales destacaron Al-Mansur (754-775), Harum al-Rashid (776-809) y Al-Mamun (813-833), promovieron la astronomía y la matemática, este último organizó en Bagdad una "Casa de la Sabiduría" con una biblioteca y un observatorio.

La Europa Occidental llegó a familiarizarse con la posición decimal en parte por la aritmética de Muhammad ibn Musa al Khuwarizmi (hacia 825), quien expuso el sistema de numeración hindú, el título del libro traducido en el siglo XII es *Algorthmi de numero Indorum*, agregando del latín *algorithmus*. También el *álgebra* fue conocida en Europa Occidental a través de las traducciones latinas del Algebra de Muhammad, la cual tenia el título *Hisab al-jabr wa-almu-gabala* (literalmente, "ciencia de la reducción y la confrontación", significado probablemente "ciencia de las ecuaciones"). En las traducciones la palabra *al-jabr* fue sinónimo del "álgebra".

Los trabajos de Al-Khuwarizmi en conjunto parecen mostrar una influencia oriental en vez de una influencia griega. El álgebra, hasta la mitad del siglo XIX, reveló su origen oriental por su falta de fundamentación axiomática, lo cual contrasta con la geometría euclideana. El álgebra y la geometría actuales todavía preservan estas muestras de diferente origen.

La tradición griega fue cultivada por una escuela de sabios árabes quienes fielmente tradujeron los clásicos griegos al árabe Apolonio, Arquímedes, Euclides, Ptolomeo y otros, que de otra manera se hubieran perdido. Había una tendencia natural para subrayar la parte de cómputo y práctica de la matemática griega a costa de su parte teórica.

Al-Battani (Albategnius hacia 850-929) tenía una tabla de cotangentes para cada grado. Este trabajo muestra que los escritores árabes no solamente copiaron, sino también contribuyeron con nuevos resultados por medio de su dominio de los métodos griego y oriental.

En el norte de Persia, vivió Omar Khayyam (aproximadamente en 1038/48-1123/24), conocido en Occidente como el autor de *los Rubaiyat*. Reformó el viejo calendario persa, que instituyó un error de un día en 5,000 años; mientras que nuestro actual calendario gregoriano tiene un error de un día en 3,330 años. Omar escribió un *Algebra*, tenía una investigación sistemática de las ecuaciones cúbicas, empleando un método ocasionalmente usado por los griegos, determinó las raíces como intersección de dos secciones cónicas. En otro libro que trata de las dificultades en Euclides, reemplazó el axioma de las paralelas por un conjunto de otras proposiciones. Proposiciones relacionadas con las hipótesis de los ángulos recto, agudo y obtuso, que tienen ahora lugar en la geometría no-euclideana; y sustituyó la teoría de las proporciones por una teoría numérica, en la cual propuso una teoría del irracional y el concepto del número real en general.

Otro matemático persa, Jamshid Al-Kashi (muerto cerca de 1436) mostró una gran versatilidad en el trabajo numérico, comparable con el posterior alcanzado por los tardíos europeos del siglo XVI. El resolvió las ecuaciones cúbicas por medio de la iteración y por métodos trigonométricos y sabía el método conocido ahora como de Horner, para la solución de las ecuaciones algebraicas de orden superior, que generaliza la extracción de raíces de orden superior o números ordinarios —un método que parece apuntar hacia la influencia china. Después de las fracciones sexagesimales el usa fracciones decimales con facilidad y tiene π en 16 *decimales*.

Una figura importante en Egipto fue Ibn Al-Haitham (Alhazen, cerca 965-1039), el más grande físico musulmán, cuya *Optica* tuvo una gran influencia sobre el Occidente.

En Córdoba, España, Al-Zargali (Azarquiel, hacia 1029-1087) astrónomo, edita las tablas *Toledanas* que tuvieron alguna influencia en el desarrollo de la trigonometría en el Renacimiento, y fueron seguidas por las tablas *Alfonsinas* que fueron imperantes por siglos.

LOS COMIENZOS EN EUROPA OCCIDENTAL

La sección más avanzada del Imperio Romano desde el punto de vista económico y cultural siempre fue el Oriente. La parte Occidental en su aspecto económico no tenía las mismas características que el oriente para basar su economía en la irrigación; su agricultura fue del vasto género que no estimuló el estudio de la astronomía. En todos los reinos germánicos, excepto quizás aquellos de Bretaña, las condiciones económicas, las instituciones sociales y la vida intelectual permanecieron fundamentalmente como había sido el Imperio Romano decadente.

La autoridad central en el mundo grecoromano después de la caída del Imperio Occidental en 476 fue compartido por el emperador de Constantinopla y los papas de Roma. La Iglesia Católica de Occidente a través de sus instituciones e idioma mantuvo como mejor pudo la tradición cultural del Imperio Romano entre los reinos germánicos.

Anicio Manlio Severino Boecio, escribió textos matemáticos, los que fueron considerados imperantes en el mundo occidental por más de mil años. Estos textos reflejan las condiciones culturales, pues son pobres en contenido y su misma supervivencia pudo haber sido influida por la creencia de que el autor murió en 524 como un mártir para la fe católica.

Por la hipótesis de H. Pirenne, de acuerdo con la cual el fin del antiguo mundo occidental llegó con la expansión del Islam. Los árabes despojaron al Imperio Bizantino de todas sus provincias en las costas oriental y meridional del Mediterráneo.

La Europa Occidental, muy pronto, fue reducida a un estado de semibarbarismo. El centro económico y cultural se movió hacia Francia Septentrional y Bretaña.

Durante los primeros siglos del feudalismo occidental encontramos poca apreciación de la Matemática aún en los monasterios. De cierta importancia entre estos matemáticos eclesiásticos fue el británico Alcuin, asociado de Carlo Magno, su libro *Problems for the Quickenin of the Mind of the Young* ha influido a los escritores de libros de texto por muchos siglos.

Otro matemático eclesiástico fue Gerberto, un monje francés quien en 999 llegó a ser Papa con el nombre de Silvestre II. Su principal importancia reside en que él fue uno de los primeros eruditos del occidente que fue a España e hizo estudios de la matemática del mundo árabe.

Hay diferencias entre el desarrollo del primitivo feudalismo griego occidental y el feudalismo oriental. Los ciudadanos del medievo tuvieron que atenerse a su propio genio inventivo para mejorar sus normas de vida. Librando una encarnizada lucha contra los terratenientes feudales y además con continuas contiendas civiles los ciudadanos del medievo dieron origen a la burguesía en los siglos XII, XIII y XIV. Este triunfo estuvo basado no solamente en una rápida expansión del comercio y de la economía monetaria, sino también en un gradual mejoramiento de tecnología.

España y Sicilia eran los puntos más cercanos de contacto entre Oriente y Occidente; aquí los mercaderes y los estudiantes llegaron a familiarizarse con la civilización Islámica, con los clásicos griegos a través del árabe.

Los mercaderes italianos visitaron el oriente y estudiaron su civilización. Como los mercaderes jónicos de casi 2000 años antes, ellos trataron de estudiar la ciencia y las artes de la civilización más antigua no solamente para reproducirlas sino para asimilarlas en su propia sociedad mercantil, la cual ya en los siglos XII y XIII vio el desarrollo de la banca y los comienzos de una forma industrial capitalista.

Leonardo de Pisa también llamado Fibonacci ("hijo de Bonaccio"), viajó al oriente como mercader. A su retorno él escribió su *Liber Abaci* (1202) por medio del cual el sistema hindú-arábigo de numeración fue introducido en Europa occidental. En la práctica *geomatriae* (1220), Leonardo describió de una manera semejante todo lo que él había descubierto en geometría y trigonometría, los problemas se planteaban con una descripción seudoalgebraica. El pudo haber sido un investigador original. El problema que conduce a la *serie Fibonacci* 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., parece ser nuevo; y también su demostración notablemente perfecta de que las raíces de la ecuación $x^3+2x^2+10x = 20$, no pueden ser expresadas por medio de las irracionalidades euclideanas $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y, resolvió aproximadamente la raíz positiva de esta ecuación encontrando seis cifras sexagesimales.

La matemática especulativa no murió enteramente durante la Edad Media, aunque fue cultivada no entre los hombres de la práctica, sino entre los filósofos escolásticos. San Agustín, en las *Civitas Dei*, había aceptado la secuencia total de los enteros como un infinito real. Georg Cantor ha advertido que el transfinito no puede ser más deseado y no pudo ser más perfectamente determinado y defendido como lo hizo San Agustín. Santo Tomás de Aquino, acepto el *infinutum actu non datur* de Aristóteles, pero consideraron todo continuo como potencialmente divisible hasta el infinito.

Tales especulaciones tuvieron su influencia sobre los inventores del cálculo infinitesimal en el siglo XVII y sobre los filósofos del transfinito en el XIX; Cavalieri, Tacquet, Bolzano y Cantor conocieron a los autores escolásticos.

Nicole Oresme, Obispo de Lisieux en Normandía, quien trabajó con potencias fraccionarias, influyó a los matemáticos del Renacimiento, incluyendo a Descartes.

Fue Johannes Müller de Königsberg, o Regiomontano, la figura matemática descollante del siglo XV, fue muy productivo, tradujo y publicó los manuscritos disponibles. Continuó con la traducción que George Peurbach había comenzado de la astronomía de Ptolomeo y tradujo a Apolonio, Herón y al más difícil de todos, Arquímedes. Dedicó mucho esfuerzo al cómputo de tablas trigonométricas, tiene, por ejemplo, tablas de *60,000 senos a radio*, para intervalos de un minuto, que se imprimieron después de su muerte. Sus valores numéricos dependían, por lo tanto, de la longitud del radio. Un radio grande permitía mayor exactitud en el valor de los senos, sin la necesidad de introducir fracciones sexagesimales (o decimales). El uso sistemático de *radio 1* y, en consecuencia, los conceptos de senos, tangentes, etc., como razones (números) se debe a Euler (1748).

Los maestros calculistas del siglo XV estaban bien versados en las operaciones aritméticas, y los pintores eran buenos geómetras. Vasari, reafirma el interés con el cual muchos artistas del *quattrocento* mostraron por la geometría sólida.

En 1494, el uso de los numerales hindú-arábigos ya estaba bien establecido y la notación aritmética no difería grandemente de la nuestra.

Pacioli terminó su libro con el comentario de que la solución de las ecuaciones $x^3 + mx = n$, $x^3 + n = mx$ era imposible, como la cuadratura del círculo, en el presente estado de la ciencia.

Los griegos y los orientales habían probado su inventiva en la solución de la ecuación de tercer grado, pero solamente habían logrado resolver numéricamente algunos casos. Los matemáticos boloñeses trataron ahora de encontrar la solución general.

Estas ecuaciones cúbicas podían todas ser reducidas a tres tipos: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$, fueron especialmente investigadas por el profesor Scipio del Ferro, quien murió en 1526. Conforme la autoridad de E. Bortolotti que del Ferro realmente resolvió todos los tipos, solamente relató a unos cuantos amigos acerca de ellas. Sin embargo, la noticia del descubrimiento llegó a ser conocida y después de la muerte de Scipio. El italiano Nícolo Tartaglia ("El Tartamudo"), redescubrió sus métodos (1535). Finalmente reveló sus ideas a un erudito doctor milanés Gerolamo Cardano, quien tuvo que jurar que las mantendría en secreto. Pero cuando Cardano en 1545 publicó su muy corto libro sobre álgebra *el Ars Magna*, Tartaglia descubrió que el método expuesto en el libro, con el debido reconócimiento al descubridor, pero robado, y en el debate, Cardano fue defendido por un joven caballero erudito, Ludovico Ferrari. El *Ars Magna* llegó a ser muy famoso.

La solución se conoce con el nombre de solución de Cardano, la cual para el caso $x^3 + px = q$

$$x = \sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + \sqrt{\frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + \sqrt{\frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}$$

El *Ars Magna* de Cardano contenía otro brillante descubrimiento: el método de Ferrari para reducir la solución de la ecuación bicuadrática general a la de una ecuación cúbica. La ecuación de Ferrari era $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ reducida a $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$. Cardano también consideró los números negativos. llamándalos "ficticios", pero no trabajo con el llamado "caso irreductible" de la ecuación cúbica.

Esta dificultad fue resuelta por Rafael Bombelli, cuya *Algebra* apareció en 1572. Introdujo una teoría consistente de los números complejos imaginarios. El libro de Bombelli fue leído profusamente; Leibniz lo seleccionó para el estudio de las ecuaciones cúbicas, y Euler cita a Bombelli en su propia Algebra en el capítulo sobre ecuaciones bicuadráticas. Los números complejos, desde esa época en adelante, perdieron algo de su carácter sobrenatural, aunque la completa aceptación solamente llegó hasta el siglo XIX.

Es curioso que la primera introducción de los imaginarios ocurrió en la teoría de las ecuaciones cúbicas, donde era claro que las soluciones reales existen aunque en una forma irreconocible, y no en la teoría de las ecuaciones cuadráticas, donde los libros de texto actuales los introducen.

Francois Viète, un abogado francés adscrito a la corte de Enrique IV, redujo la solución de Cardano, fue uno de los primeros en representar números por letras, con lo cual hubo grandes progresos en la teoría de ecuaciones. Viète adelantó a Arquímedes y encontró un valor de π de *nueve decimales* y como un producto infinito (1593); un poco después π fue computado con *treinta y cinco decimales* por Ludolph van Ceulen.

El mejoramiento en la técnica fue un resultado del mejoramiento en la notación. Nuevos resultados han llegado a ser posibles solamente debido a un nuevo modo de escribir. La introducción de los numerales hindú-arábigos es un ejemplo; la notación de Leibniz para el cálculo es otro. Una notación adecuada refleja la realidad en mejor forma que una deficiente, y como tal aparece dotada con una vida propia que a su vez crea nueva vida, gracias a esto este período alcanzó nuevas alturas, y al fin comenzó a sobrepasar las hazañas del mundo islámico.

El italiano Simón Stevin, un tenedor de libros de la Cd. de Brujas, llegó a ser un ingeniero en el ejército del príncipe Mauricio de Orange, quien apreció la manera en que Stevin combinó el sentido práctico con el entendimiento y la originalidad teóricas. En *la disme* (1585) él introdujo las fracciones decimales como parte de un proyecto para unificar el sistema total de medidas sobre una base decimal.

Otro gran progreso de cómputo fue la invención de los logaritmos. El escocés John Napier (o Neper), quien en 1616 publicó *Mirifisi Logarithmorum canonis descriptio*. Su idea central era la de construir dos sucesiones de números de tal manera relacionadas que cuando una aumentara en progresión aritmética, la otra decreciera en forma geométrica.

El primer intento de Napier era engorroso, puesto que sus dos sucesiones corresponden a la forma moderna $y = ae^{-x/a}$ (o $x = log$ Nep. y) en la cual $a = 107$. Cuando $x = x_1 + x_2$, no obtenemos $y = y_1 y_2$, sino $y = y_1 y_2 / a$. Este sistema no satisfizo ni al mismo Napier, como lo expreso a su admirador el inglés Henry Briggs, ellos decidieron usar 10^x, en lugar de e^{-x}, posteriormente en 1624, Briggs en su *Aritmética logarithmica*, publicó logaritmos con catorce cifras decimales para los enteros desde 1 hasta 20.000 y desde 90.000 hasta 100.000.

La explicación de los logaritmos por exponenciales es históricamente algo engañosa, Napier no tenía la noción de una base. Los logaritmos naturales, basados e^x, aparecieron casi contemporáneamente con los logaritmos de Briggs, pero su importancia fundamental no fue reconocida hasta que el cálculo infinitesimal fue mejor entendido.

EL SIGLO DIECISIETE

Las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo en el Renacimiento (a mediados del siglo XV), en parte por el uso productivo y perfeccionamiento de las máquinas, éstas fueron conocidas en Oriente y en la antigüedad clásica, e inspiraron el genio de algunos, como por ejemplo Arquímedes, pero la esclavitud y la ausencia de una vida urbana económicamente productiva frustraron su uso. En las obras de Herón, se describen las máquinas, pero sólo con el propósito de diversión o supercheria.

Una muy bien establecida industria de la seda existió en Luca y en Venecia ya en los inicios del siglo XV. La minería en la Europa central evolucionó hacia una industria completamente capitalista. La invención de armas de fuego y de la imprenta, la construcción de molinos de viento y canales, la construcción de barcos para navegar en el océano, requirieron de la habilidad ingenieril y produjeron gente técnicamente consciente. La perfección de relojes produjo piezas de mecanismos admirables ante la opinión pública; el reloj fue tomado como modelo del Universo.

Los libros sobre máquinas aparecieron mucho antes que la invención de la imprenta (1440), primero descripciones empíricas, posteriormente más teóricas, tal como el libro de León Battista Alberti concerniente a la arquitectura (hacia 1450) y los escritos de Leonardo da Vinci (hacia 1500).

Fue característico de varios autores su complacencia por abandonar el rigor arquimedeano por consideraciones muy a menudo basadas en suposiciones no rigurosas, algunas veces "atómicas".

La revolución en la astronomía, ligada a los nombres de el polaco Nicolás Copérnico, Tycho Brahe y el alemán Johannes Kepler, inauguró visiones completamente nuevas del lugar del hombre en el universo y dio el poder para explicar los fenómenos de la astronomía de una manera racional. Aun Kepler rompió con el rigor arquimedeano; su área del círculo estaba compuesta de un sin número de triángulos con vértice común en el centro; su esfera consistía de una infinidad de pirámides puntiagudas. Otro ejemplo del rompimiento del rigor, es el principio de Cavalieri que infiere que dos sólidos de alturas iguales tienen el mismo volumen, si las secciones transversales planas a igual altura tienen la misma área.

El espíritu de la ciencia moderna se basó en la armonía del experimento y la teoría, con énfasis en el uso intensivo de la matemática. *La Géométrie* (1637) de el francés Rene Descartes, puso todo el campo de la geometría clásica al alcance de los algebristas, él investigó un método general de pensamiento idóneo para facilitar las invenciones y encontrar la verdad en las ciencias. Puesto que la única ciencia natural conocida con algún grado de coherencia sistemática era la mecánica y la llave para el entendimiento de la mecánica era la matemática, ésta llegó a ser el medio más importante para la comprensión del universo. La aplicación de su método general de unificación del álgebra y la geometría, consiste en la creación de la llamada *geometría analítica*. Es verdad que esta rama de la matemática con el tiempo se desarrolló bajo la influencia del libro de Descartes, pero en sí, la *Géométrie* difícilmente puede ser considerada un primer libro de texto sobre este tema. No hay ejes "cartesianos" y no son derivadas ecuaciones de la línea recta ni de las secciones cónicas.

El mérito de Descartes consiste sobre todo en su aplicación conveniente de la bien desarrollada álgebra del siglo dieciséis al análisis geométrico de los antiguos; y el rechazo final a las restricciones de homogeneidad de sus predecesores los cuales incluso viciaron los escritos de Viète, así que x^2, x^3, xy eran ahora considerados como segmentos de línea. Una ecuación algebraica se convirtió en una relación entre números. Vietè todavía escribía aa por a^2 (lo que aun se encuentra en Gauss), aunque él tiene a^3 para aaa, a^4 para $aaaa$, etc. Un poco más próximo a tal geometría analítica estuvo el francés Pierre Fermat, un abogado de Toulouse. Como se aprecia en un corto artículo la *Isagoge* donde aparecen expresiones como $y = mx$, $xy = k^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2a^2y^2 = b^2$

En el período de 1630 a 1660 varios autores se limitaron a cuestiones concernientes a las curvas algebraicas, y hay varios rasgos característicos del cálculo que comenzaron a aparecer. Fermat descubrió en 1638 un método para encontrar máximos y mínimos cambiando ligeramente la variable en una simple ecuación algebraica y dejando que el cambio desapareciera. El francés Blaise Pascal defendió su procedimiento de despreciar los términos de dimensiones inferiores recurriendo a la *intuición* (esprit de finesse) en vez de a la *lógica* (esprit de géométrie).

Las academias cristalizaron más allá de los grupos de discusión de hombres eruditos, surgieron como oposición a las universidades con su espíritu del período escolástico con algunas excepciones tales como la Universidad de Leiden que alentó a la actitud medieval de presentar el conocimiento en formas fijas y no con espíritu de investigación como las otras.

Muchos grandes pensadores estuvieron en búsqueda de un *"método general"* algunas veces concebido en un sentido restringido como un método de entender la naturaleza y crear nuevas invenciones. Esta es la razón del por qué en este período todos los filósofos destacados eran matemáticos y todos los destacados matemáticos eran filósofos.

La actividad de los matemáticos de este período se extendió hacia muchos campos, nuevos y viejos, enriquecieron temas clásicos con resultados originales, lanzaron nueva luz sobre campos antiguos y aun crearon temas completamente nuevos de investigación matemática.

Algunos ejemplos son: el estudio de Fermat sobre Diofanto; la teoría matemática de las probabilidades por Fermat y Pascal (fue el Caballero de Méré, de considerable erudición, quien aproximo a Pascal con una cuestión concerniente al llamado *probleme des points*), continuado por De Witt y Halley (1671, 1693).

Pascal a los 16 años descubrió el *"teorema de Pascal"* concerniente a un hexágono inscrito en un círculo, publicado en 1641, unos años más tarde inventó una máquina calculadora y fue el primero en establecer una formulación satisfactoria del principio de inducción completa. También el francés Gérard Desargues publica su teorema sobre triángulos de perspectiva en 1648.

Después de 1660 el cúmulo de los conocimientos matemáticos existentes dio paso al descubrimiento del *"Cálculo"* que ha servido por más de tres siglos como el principal lenguaje cuantitativo de la Ciencia Occidental. Un método general de diferenciación e integración, deriva del completo entendimiento de que un proceso es el inverso de otro, pudo solamente ser descubierto por hombres que dominaban el método geométrico de los griegos y de Cavalieri, así como el método algebraico de Descartes y de Wallis. Tales hombres que conjugaron todos los descubrimientos de sus épocas, son entre otros el inglés Isaac Newton (1642-1727) y el alemán Gottfriend Wilhelm Von Leibniz (1646-1716) (mucho se ha escrito de la prioridad del descubrimiento), ambos encontraron métodos independientemente el uno del otro. Newton tuvo primero el cálculo (1665-66); Leibniz (1637-76), lo publicaron Leibniz (1684-86); Newton (1704-36). La escuela de Leibniz fue mucho más brillante que la escuela de Newton.

Newton fue el hijo de un caballero de Lincolnshiere, Inglaterra, estudió en Cambridge, en 1669 su profesor Isaac Barrow le cedió su lugar reconociendo que Newton era superior a él. La tremenda autoridad de Newton está basada principalmente en sus *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), un enorme volumen que establece la mecánica sobre una fundamentación axiomática y que contiene la *Ley de la gravitación universal.* Newton demostró por rigurosa deducción matemática, cómo las leyes establecidas por Kepler sobre el movimiento planetario, encuentran su explicación en la ley gravitacional de los cuadrados inversos y dio una explicación dinámica de muchos aspectos de los movimientos de los cuerpos celestes y de las mareas. El resolvió el problema de los dos cuerpos para esferas y puso los principios de una teoría del movimiento de la luna. Mediante la resolución del problema de la atracción de las esferas puso el fundamento de la teoría del potencial. Su tratamiento axiomático postulaba el tiempo y espacio absolutos.

El descubrimiento de la *"teoría de fluxiones"* por Newton estuvo íntimamente conectado con su estudio de las series infinitas a través de la *Arithmetica* de Wallis. Esto lo condujo a extender el teorema del binomio a exponentes fraccionarios y negativos y así, al descubrimiento de las series binomiales. Esto, otra vez le ayudó grandemente para establecer su teoría de fluxiones para "todas" las funciones, ya fueran algebraicas o trascendentes. Una "fluxión" (velocidades, o celeridades), expresada por un punto colocado sobre una letra, tenía un valor finito, una velocidad; las letras sin el punto representaban "fluentes". El entendimiento de la teoría de las fluxiones de Newton no fue claro e implicó grandes dificultades manejarlas, estas dificultades se eliminaron hasta que el concepto de límite fue bien establecido.

Newton también escribió sobre cónicas y curvas cúbicas planas. En la *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704) dio una clasificación de curvas cúbicas planas en setenta y dos especies, fue un resultado nuevo importante alcanzado por la aplicación del álgebra a la geometría. Otra contribución de Newton fue su método de encontrar aproximaciones a las raíces de las ecuaciones numéricas.

Otras contribuciones importantes de Newton son entre otras, su *Arithmetica universalis*, que consiste de conferencias sobre álgebra pronunciadas entre 1673-83, pero fue publicada hasta 1707. Su trabajo sobre *series*, que data de 1669 y apareció publicado en 1699. Su *cuadratura de curvas*, de 1963, no fue publicada hasta 1704, esta fue la primera vez que la *teoría de fluxiones* fue totalmente presentada ante el mundo. Su antiguo *Method of Fluxions* apareció hasta 1736, nueve años después de su muerte.

Leibniz nació en Leipzig, Alemania, su filosofía abarcó historia, teología, lingüística, biología, geología, matemática, diplomacia y el arte de la invención. Fue uno de los primeros, después de Pascal, en inventar una máquina calculadora: imaginó máquinas de vapor, estudió filosofía china y trató de promover la unidad de Alemania. La búsqueda de un método universal por el cual él podría obtener el conocimiento, hacer invenciones y entender la unidad esencial del universo fue la razón principal de su vida. La *scientia generalis* que trató de construir tenía muchos aspectos y varios de ellos condujeron a Leibniz a descubrimientos en matemática. Su investigación de una *characteristica generalis* lo condujo a permutaciones, combinaciones y a la lógica simbólica; su investigación de la *lingua universalis*, en la cual todos los errores del pensamiento aparecerían como errores de cómputo, condujo no solamente a la lógica simbólica, sino también a muchas innovaciones en la notación matemática.

Leibniz, fue uno de los más grandes inventores de símbolos matemáticos, su método para el tratamiento de cálculo era geométrico. La primera publicación de la forma leibniziana del cálculo ocurrió en 1684 en un artículo de seis páginas en el *Acta eruditorum*, una revista matemática que él había fundado en 1682. El artículo tenía el título característico. *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tagentibus. quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (Un nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene frente a cantidades fraccionarias e irracionales y un curioso tipo de cálculo para determinarlos). Fue un informe obscuro y árido, sin embargo, contenía los símbolos dx, dy y las reglas de la *diferenciación*, incluyendo $d(uv) = udv + vdu$ y la diferencia para el cociente, con la condición $dy = 0$ para valores extremos y $d^2y = 0$ para los puntos de inflexión. Este artículo fue seguido en 1686 por otro con las reglas del *cálculo integral*, conteniendo el símbolo de integración actual.

Un período extremadamente fértil de productividad matemática comenzó con la publicación de estos artículos, se unió con los hermanos Bernoulli quienes con anhelo absorbieron su métodos.

Antes de 1700 estos hombres habían establecido la mayor parte del cálculo universitario. Apareció en 1696 el primer texto sobre cálculo, el *Analyse des infiniment petits*, escrito por el Marqués de l'Hôpital bajo la fuerte influencia de Johann Bernoulli.

EL SIGLO DIECIOCHO

La productividad matemática en el siglo XVIII se concentró sobre el cálculo y sus aplicaciones a la mecánica. La actividad científica usualmente se concentraba entorno a las Academias, de las cuales las de París, Berlín y San Petersburgo eran las más sobresalientes.

Los países europeos eran gobernados por hombres ilustrados (que se consideraban despotas: Federico el Grande, Catalina la Grande, Luis XV y XVI), cuya satisfacción era rodearse de hombres sabios, por algún entendimiento del papel importante que la ciencia natural y la matemática aplicada estaban tomando en el mejoramiento de las manufacturas y aumento de la eficiencia de la guerra.

Entre algunos de los matemáticos representativos de este período se citan a: Los hermanos Bernoulli: Jakob (1654-1705), Johann (1667-1748) de Basilea, Suiza. La lista de sus resultados es larga e incluye no solamente mucho del material ahora contenido en nuestros textos elementales sobre cálculo diferencial e integral, sino también de muchas ecuaciones diferenciales ordinarias. Además también Jakob escribió las *Ars Cojectandi*, donde trata de la teoría de probabilidades, y a Johann se le considera el inventor del cálculo de variaciones, por su contribución al problema de la braquistócrona, es decir, la curva de descenso más rápida para un punto masa moviéndose entre dos puntos en un campo gravitacional.

Nicolaus (1695-1726), hijo de Johann, es llamado a San Petersburgo, Rusia, y propuso el problema de la teoría de las probabilidades. Daniel (1700-1782), también hijo de Johann, cuya actividad prolífica estuvo dedicada a astronomía, física e hidrodinámica, y exploró en ecuaciones diferenciales parciales.

También de Basilea vino el matemático más productivo del siglo XVIII, Leonhard Euler (1707-1783), quien estuvo en la Academia de San Petersburgo (1725-1741), de 1741 hasta 1766 en la Academia de Berlín, en 1766-83 nuevamente en San Petersburgo. Su vida casi estuvo dedicada a trabajar en los diferentes campos de la matemática pura y aplicada. En vida aparecen 530 libros y artículos, a su muerte él dejó muchos manuscritos, que aumenta el número de trabajos a 771. Pierde un ojo a los 28 años, y el otro a los 59 años, nada pudo interrumpir su enorme productividad ya ciego hasta su muerte, a los 76 años.

Como ejemplos de sus obras tenemos: Nuestra trigonometría actual, la notación en álgebra y cálculo; Lagrange, Laplace y Gauss conocieron y siguieron a Euler en todas sus obras. La *Introductio*, de 1748 cubre en sus dos volúmenes una amplia variedad de temas sobre series infinitas incluyendo las de e^x, $senx$ y $cosx$ y presenta la relación $e^{ix} = cosx + isenx$. La *Introductio* se puede considerar como el primer libro escrito sobre geometría analítica ya que las curvas y superficies son tan libremente investigadas con la ayuda de ecuaciones,. se presenta también la *función Zeta*.

Otro gran y rico texto fue *Institutiones calculi differentialis* (1755) de Euler, seguido por tres volúmenes de *Institutiones de calculi integralis*, se encuentra el cálculo diferencial e integral, la teoría de la ecuaciones diferenciales, el teorema de Taylor, la fórmula de la suma de Euler y las integrales Eulerianas. *La Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (1736) de Euler, fue el primer texto en el cual la dinámica de Newton del punto masa fue desarrollado con métodos analíticos. Fue seguido por la *Theoria motus corporum solidorum* trata la mécanica de los cuerpos sólidos. *La Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770) escrita en alemán y dictada a un sirviente debido a la ceguera de Euler, ha sido el modelo de muchos textos posteriores de álgebra. Conduce a la teoría de las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas y termina con un amplio capítulo sobre ecuaciones indeterminadas. Son demasiadas las obras de Euler para ser citadas aquí.

Una gran parte de la actividad de Euler fue dedicada a la astronomía. Sus trabajos abundaban en aplicaciones de importancia para el ejército y la armada (hay libros sobre hidráulica, sobre construcción de barcos, sobre artillería).

La fundamentación de Euler del cálculo puede haber tenido su debilidad, pero él expresó su punto de vista sin vaguedad.

Francia también continuó produciendo trabajo de gran originalidad en cálculo y mecánica. Aquí, más que en cualquier otro país, la matemática fue concebida como la ciencia que iba a llevar la teoría de Newton a una mayor perfección, por un grupo de matemáticos entre los más notables Clairaut, D'Alembert y Maupertuis quienes estaban, además, conectados con los filósofos de la ilustración.

De Moivre Abraham, Stirling y Landen fueron buenos representativos de los matemáticos ingleses del siglo XVIII. La tradición del venerado Newton pesó excesivamente sobre la ciencia inglesa, y lo engorroso de su notación, comparada con la de Leibniz, hizo que el progreso fuera difícil. Hubo razones sociales muy profundas del porqué los matemáticos ingleses rehusaron emanciparse de los métodos fluxionales de Newton. Inglaterra estaba en constantes guerras comerciales con Francia y desarrolló un sentido de superioridad intelectual el cual fue no solamente fomentado por sus victorias en la guerra y el comercio sino también por la admiración con la cual los filósofos continentales juzgaron su sistema político.

El más destacado de habla inglesa fue Colin Maclaurin, profesor en la Universidad de Edimburgo, un discípulo de Newton. Su estudio y extensión de los métodos fluxionales, de curvas de segundo de orden superior y de la atracción de los elipsoides brotan paralelos a los esfuerzos contemporáneos de Clairaut y Euler, varios de sus teoremas ocupan un lugar en la teoría de las curvas planas y geometría proyectiva actuales.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) nació en Turín, de ascendencia italiano-francesa. A sus primeros trabajos pertenecen sus contribuciones al cálculo de variaciones. En 1775 había aparecido una memoria de Euler sobre este tema. Lagrange observó que el método de Euler tenía "no toda la simplicidad que es deseable en un tema de análisis puro". Dedicó la segunda parte de su vida a la composición de sus grandes obras: *Mécanique analityque* (1788); *Theorie des fonnctios analytiques* (1797) y su continuación *Lecons sur le calcul des fonctions* (1801). Los dos libros sobre funciones fueron un intento para dar una fundamentación sólida al cálculo reduciéndolo al álgebra, buscando eliminar el uso de los infinitesimales de Leibniz y respecto a la peculiar concepción de Newton sobre el límite.

Pierre Simon Laplace (1749-1827). Sus dos grandes obras que unifican no solamente sus propias investigaciones, sino todo trabajo previo en sus temas respectivos, son *Theorie analytique des probabilités* (1812) y *Mécanique céleste* (5 vols., 1799-1825) fue la culminación de la obra de Newton, Clairaut, D'Alembert, Euler, Lagrange y Laplace sobre la figura de la tierra, la teoría de la luna, el problema de los tres cuerpos y la perturbación de los planetas, que condujo al trascendental problema de la estabilidad del sistema solar.

Es un hecho curioso que hacia final del siglo dieciocho algunos de los matemáticos destacados expresaron la opinión de que el campo de la matemática estaba de algún modo agotado. Por la tendencia de identificar el progreso de la matemática con el de la mecánica y la astronomía, parecía como si el desarrollo hubiera alcanzado su clímax. Sin embargo, una nueva generación, inspirada por las nuevas perspectivas abiertas por la Revolución Francesa y el florecimiento de las ciencias naturales, iba a demostrar que infundado era este pesimismo. Este nuevo gran impulso vino por Gauss, en Göttingen, Alemania.

EL SIGLO DIECINUEVE

La Revolución Francesa y el período napoleónico crearon condiciones extremadamente favorables para el más amplio desarrollo de la matemática. El camino fue abierto para la Revolución Industrial en el continente de Europa. Ello estimuló el cultivo de las ciencias físicas; creó nuevas clases sociales con una nueva perspectiva sobre la vida, interesadas en la ciencia y en la educación técnica.

La nueva y turbulenta productividad matemática no se debió principalmente a los problemas técnicos ocasionados por las nuevas industrias. Inglaterra, el corazón de la Revolución Industrial, permaneció matemáticamente estéril por varias décadas. La matemática progresó más saludablemente en Francia y algo más tarde en Alemania, países en los cuales la ruptura ideológica con el pasado fue más agudamente sentida y en donde los cambios arrolladores se hicieron, o tenían que ser hechos, para preparar el terreno para la nueva estructura económica y política capitalista. El ejercicio de la ciencia como un todo llegó a estar aún más separado de las demandas de la vida económica o de la guerra. Se desarrolló el especialista, interesado en la ciencia por sí misma, hubo una división entre matemática "*pura*" y "*aplicada*" aunque nunca estuvo enteramente rota. Y el desarrollo de las matemáticas está dado exclusivamente en las Universidades que van formando su propia tradición. Hacia el final del siglo, uno de los énfasis fue hacia la fundamentación y formalización de las matemáticas.

Ahora la responsabilidad de enseñar aumentó, los profesores de matemática se convirtieron en educadores y examinadores de la juventud. Los matemáticos comenzaron a trabajar en campos especializados.

Sobre la línea divisoria entre la matemática del siglo dieciocho y la del siglo diecinueve se destaca la figura majestuosa de Carl Friedrich Gauss, nacido en Brunswick, Alemania (1777-1855). A los 17 años ya había comenzado a hacer pasmosos descubrimientos. Las *Disquisitiones arithmeticae* reunieron todas las obras sobresalientes en la teoría de números de sus predecesores y se enriquecieron en tal extensión que algunas veces, el comienzo de la teoría moderna de números se fecha a partir de la publicación de este libro. Tuvo interés en la astrononúa al descubrir el primer planetoide Ceres (enero 1, 1801), fue director del observatorio y profesor de la Universidad de Alemania desde 1807. Después de 1820 comenzó a interesarse activamente en geodesia, aportando la teoría de las superficies en las *Disquitiones generales circa superficies curvas* (1827). Nunca olvidó a su primer amor, la "reina de la matemática" (la aritmética). El tratado de 1831 no sólo dio un álgebra de números complejos, sino también una aritmética y desvaneció para siempre el misterio que todavía rodeaba a los números complejos, por su representación mediante puntos en un plano.

Gauss y su más joven colega Wilhelm Weber inventaron el telégrafo en 1833-34; Gauss comenzó a dirigirse hacia la física, en trabajos experimentales sobre magnetismo terrestre. En sus últimos años se concentró más y más en la matemática aplicada. Algunas ideas de Gauss estaban "en el aire" (en 1800, había descubierto las funciones elípticas y en 1816 estaba en posesión de la *geometría no-euclideana* pero no publicó nada sobre estos temas), puesto que el matemático francés Andrie Marie Legendre (1752-1833) en forma independiente trabajó en la mayoría de los temas que ocuparon a Gauss. La cultura matemática de Gauss era tan amplia como la de Euler que prácticamente aportó algo en todas las ramas que había, y es considerado el último de los matemáticos que tuvo dominio sobre toda la matemática existente.

Legendre, también hizo trabajo fundamental en la teoría de los números, en geodesia y en astronomía teórica. También como Gauss, fue un asiduo calculador de tablas; se interesó en integrales Eulerianas y elípticas así como en los fundamentos y métodos de la geometría euclideana. Sus textos completos fueron por largo tiempo autorizados, especialmente sus *Exercises du calcul intégral* y su *Traité des fonctions elliptiques et des intégrals eulériennes*, el cual es todavía una obra clásica. El libro *Elements de géométrie* tuvo muchas ediciones y fue traducido a varios idiomas; y ha tenido una influencia perdurable.

El establecimiento de escuelas y academias militares en Francia (probablemente se puede fechar como la última parte del siglo XVIII), se le presto considerable atención a la enseñanza de las matemáticas como una parte de la instrucción de ingenieros militares. La fundación de la Ecole Polytechnnique de París (1794) respondió a la necesidad de la instrucción más centralizada de la ingeniería militar, convirtiéndose en modelo.

El énfasis fue dirigido tanto hacia la investigación así como hacia la enseñanza. La instrucción requería un nuevo tipo de libro para transmitir los conocimientos.

Gaspard Monge, el director de esta escuela, fue el líder científico del grupo de matemáticos que estuvieron conectados con este instituto, y por su influencia la geometría comenzó a florecer ahí. Jean Hachette y Jean Baptiste Biot desarrollaron la *geometría analítica de cónicas y cuádricas*; en el *Essai de géométrie analítica* de Biot (1802) se comienza al fin a reconocer los actuales libros de texto de geometría analítica. El discípulo de Monge, Charles Dupin, aplicó sus métodos y encontró las líneas asintóticas y conjugadas, fue un promotor industrial. Otro discípulo fue Víctor Poncelet quien aplicando los métodos y técnicas de Monge se convirtió en el fundador de la geometría proyectiva.

Aún cuando Monge perdió su posición en 1815, en la Ecole Polytechnique su espíritu perduro y sus investigadores trajeron muchos beneficios directos e indirectos a la matemática ya que no separaron a la pura de la aplicada. La mecánica, física matemática, electromagnetismo, la geometría de los rayos luminosos ayudó a modernizar la óptica. El elemento geométrico en la estática fue introducido en su totalidad por Louis Poinsot, por muchos años miembro de la oficina superior francesa de instrucción pública.

Aparte de Lagrange y Monge, también Siméon Poisson, Joseph Fourier y Augustin Cauchy, estaban profundamente interesados en al aplicación de la matemática a la mecánica y a la física y fueron conducidos por este interés a descubrimientos en matemática pura. Poisson con su ecuación $\Delta V = 4\pi\rho$, reconocida ahora como una ley fundamental en los problemas de radiación, de tráfico y de distribución en general. La serie de Fourier se ha convertido en un instrumento de operación en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. Fourier amplió sobre lo que se entiende por *función*, la introducción de las series de Fourier forzó a la consideración de las series discontinuas al mismo nivel que las funciones continuas y condujo al desarrollo de integración de funciones discontinuas, llevada a cabo por Cauchy y Riemann. Cauchy contribuyó a la teoría de la luz y la mecánica, con la teoría de funciones de variable compleja y su insistencia sobre el rigor del análisis. Cauchy atacó problemas de convergencia de funciones principalmente. Las funciones de variable compleja se convirtieron en una herramienta útil en la hidrodinámica y en la aerodinámica.

Los matemáticos del siglo XVIII no habían puesto mucha atención a la fundamentación de su obra — "allez en avant, et la foi vous viendra" (Marcha hacia adelante y la fe vendrá a ti), se supone que dijo D'Alembert. Cuando ellos se preocuparon respecto al rigor, como Euler y Lagrange ocasionalmente lo hicieron, sus argumentos no siempre fueron convincentes. El tiempo había llegado para una concentración inmediata sobre el significado de los resultados.

Lo que Eudoxo había hecho en el período posterior a la caída de la democracia ateniense, Cauchy y sus meticulosos contemporáneos comenzaron a llevar a cabo la fundamentación de la matemática, durante el período del industrialismo expansionista. Cauchy y Gauss fueron seguidos por Weierstrass y Cantor.

Evariste Galois (como un cometa apareció) alrededor de 1830 en París, dos de sus artículos contenían prácticamente la ***teoría de los grupos*** actuales, la clave para las ***modernas álgebra y geometría***. Las ideas ya habían sido anticipadas hasta cierto grado por

Lagrange y por el italiano Ruffini, pero Galois tuvo la concepción de una completa *teoría de los grupos*, sus artículos fueron publicados posteriormente a su muerte por Lioville en su *Journal de Mathématiques* en 1846, en tal período Cauchy ya había comenzado a publicar artículos sobre *grupos* (1844-46).

El noruego Niels Herik Abel, su vida fue tan corta como la de Galois, demostró la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado por medio de radicales; escribió varios artículos que contienen su obra sobre la *convergencia de series*, sobre las "*integrales Abelianas*" y sobre las *funciones elípticas*.

William Rowan Hamilton, Astrónomo Real de Irlanda, en 1827 a la edad de 21 años, expuso su teoría de los rayos ópticos (1824) que le permitió predecir las reflexiones cónicas en cristales biaxiales, e hizo de la óptica y de la dinámica dos aspectos del cálculo de variaciones. La relatividad moderna, así como la mecánica cuántica, han sido basadas en las "*funciones hamiltonianas*".

Los principales exponentes de la escuela alemana son Carl Gustav Jacob Jacobi, Peter Lejeune Direchlet, Georg Friedrich Berhard Riemann, y Karl Theodor Wilhelm Weirstrass.

En 1829 Jacobi, publicó sus *Fundamenta nova theoriae functinun elipticarum* donde planteó su teoría sobre cuatro funciones definidas por series infinitas y llamadas "funciones Theta", las cuales satisfacen ciertas identidades y teoremas de adición muy semejantes a las funciones seno y coseno de la trigonometría ordinaria. Con esta obra se suscitó la cuestión de que si las integrales hiperelípticas habían sido invertidas para dar funciones elípticas. La solución fue encontrada por Jacobi en 1832, y nació la *teoría de las funciones abelianas* de p variables. Uno de los trabajos de Jacobi más conocido es la teoría del determinante ("Jacobiano" por Sylvester), aunque esta idea es más antigua. Su hermano Moritz, en San Petersburgo, fue uno de los primeros científicos rusos que experimentaron en electricidad.

Dirichlet asociado estrechamente con Gauss y Jacobi, llegó a familiarizarse con las *Disiquisitionses arithmeticae* de Gauss, y dio una demostración rigurosa de la convergencia de Fourier, contribuyendo a un correcto entendimiento de la naturaleza de una función, e introdujo también en el cálculo de variaciones el llamado *principio Dirichlet*, el cual es una modificación de un principio que Gauss introdujo en su teoría del potencial de 1839-40 y que más tarde sirvió a Riemann como una poderosa herramienta al resolver problemas de la teoría del potencial.

Riemann, más que cualquier otro, ha influido sobre el curso de la matemática moderna, publicó un número relativamente pequeño de artículos pero cada uno de ellos fue importante, por ejemplo la teoría de las *funciones complejas*; consideraciones *topológicas* —un tema casi sin tocar—: dos trabajos fundamentales, uno sobre *series trigonométricas* y los *fundamentos del análisis*; el otro sobre los *fundamentos de la geometría*, el espacio fue introducido como una variedad topológica de un arbitrario número de dimensiones.

La fama de Weierstrass está basada en su razonamiento extremadamente cuidadoso, en la precisión de conceptos como el número irracional y de límite.

A la Escuela de Berlín, pertenecieron eminentes matemáticos, especialistas en álgebra y en la teoría de los números algebraicos, tales como Leopold Konecker, Kummer y Frobenius. Con estos hombres se puede asociar a Julius Wilhelm Dedekind y a Georg Cantor.

Kummer desarrolló más la geometría diferencial de congruencias, que Hamilton había delineado, descubrió la superficie cuártica con dieciséis puntos nodales que lleva su nombre.

Las principales contribuciones de Kronecker fueron en las funciones elípticas, teoría del ideal y en la aritmética de las formas cuadráticas.

Cantor creó un campo enteramente nuevo de investigación matemática, capaz de satisfacer las demandas más sutiles de rigor una vez que sus premisas fueran aceptadas. Sus publicaciones comenzaron en 1870 y continuaron por muchos años. Desarrolló una teoría de los *números cardinales transfinitos* basada en un tratamiento sistemático del infinito real. Cantor defendió la aceptación total de San Agustín del infinito real, pero tenía que defenderse de la opinión de muchos matemáticos que rehusaban aceptar el infinito excepto como un proceso expresado por ∞. Su más destacado opositor fue Kronecker, quien representaba una tendencia totalmente opuesta en el proceso mismo de la aritmetización de la matemática, sin embargo, ganaron las teorías de Cantor y aparecieron nuevas paradojas en relación a la lógica de la teoría de los números transfinitos, tales como las de Burali Forti y de Russell. La controversia entre Cantor y Kronecker continuó, a un nuevo nivel, en el siglo veinte entre los *formalistas* y los *intuicionistas*.

El enfoque sintético como el algebraico de la geometría estuvieron representados por geómetras alemanes. El representante de la escuela sintética (o "*pura*") fue Jakob Steiner, en opinión de Steiner, la geometría estimula el pensamiento, descubrió la superficie con una doble infinidad de cónicas sobre ella (también llamada superficie romana).

Los representantes de la geometría algebraica fueron: Augus Ferdinand Möbius (primero en introducir las coordenadas homogéneas y uno de los fundadores de la ciencia moderna de la *topología*) y Julius Pücker (fue tanto físico experimental como geómetra, mostró el poder de la notación abreviada) en Alemania; Michel Chasles (con una gran habilidad para obtener el máximo de información geométrica a partir de sus ecuaciones, una operación hábil con líneas isotrópicas y puntos circulares en el infinito, generando la llamada *geometría enumerativa*) en Francia.

Los primeros en retar abiertamente a la autoridad de dos milenios y en construir una *geometría no-euclideana* fueron el ruso

Nikolai Ivanovich Lobachevski, disertó sobre el axioma de paralelas en 1826 e hizo publicaciones al respecto y el húngaro Janos Bolyai, quien acepto el postulado de Euclides como un axioma independiente y descubrió que era posible construir una geometría, basada en otro axioma, en la cual, dada una línea en un plano y un punto fuera de ella se pueden trazar una infinidad de líneas que no intersecten a la línea dada. Escribió sus reflexiones, las cuales fueron publicadas en 1832.

La *geometría no-euclideana* permanecía como un campo obscuro de la matemática, pero Riemann entendió su importancia y trató de difundirla. Su completa aceptación vino una generación después, es decir, posterior a 1870.

Hermann Grassmann en 1844 construyó una geometría en un espacio de n dimensiones, primero en el espacio afín, después en el métrico, usó simbolismo invariante el cual se reconoce como una notación vectorial y tensorial (sus productos "vacíos", son tensores) pero que hizo su obra casi inaccesible para sus contemporáneos; en 1854 Riemann hizo más fácil su apreciación total.

Una completa aceptación de las *geometrías de más de tres dimensiones* ocurrió solamente en la última parte del siglo diecinueve, debido principalmente a su uso en la interpretación de la teoría de las formas algebraicas y diferenciales de más de tres variables.

Hasta bien avanzado el siglo diecinueve, los rectores de Cambridge y de Oxford consideraban como una revuelta impía en contra de la sagrada memoria de Newton cualquier intento de progreso de la teoría de las fluxiones. La escuela Newtoniana de Inglaterra y la escuela Leibniziana del continente europeo derivaron separadamente a tal grado que Euler, en su cálculo integral (1768), consideró inútil la unión de ambos métodos de expresión. En 1812 un grupo de jóvenes matemáticos de Cambridge, formaron una Sociedad Analítica para propagar la notación diferencial. Los líderes eran George Peacock, Charles Babbage y John Hershel. Inglaterra comenzó a participar en la matemática moderna.

La primera contribución importante vino de algunos matemáticos que habían aceptado la matemática continental europea, William Rowan Hamilton y George Green.

Hamilton se dedicó al álgebra rigurosa de los números complejos en 1835, su principal producto en esta área fueron los *cuaternios*. La luz alboreaba sobre él —como sus admiradores gustaban decir— en un cierto día de octubre de 1843, cuando caminando sobre el puente de Dublin descubrió el *cuaternio*. La parte mejor conocida de este cálculo de cuaternios fue la *teoría de los vectores*.

Algunos matemáticos británicos vieron en el cálculo de los cuaternios una clase de *arithmetica universalis leibniziana*, la cual naturalmente levantó una reacción (Healviside contra Tait) en la cual los cuaternios perdieron mucho de su gloria. La teoría de los *números hipercomplejos*, elaborada por Peirce, Study, Frobenius y Cartan, finalmente colocó a los cuaternios en su legítimo lugar, como el más simple sistema numérico asociativo de más de dos unidades.

Green, quien fue un autodidacta, hijo de un molinero de Nottingham, realizó trabajos que dieran cuenta de la teoría matemática en los fenómenos eléctricos y escribió el *Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism* (1828). Gauss no conocía el trabajo de Green, el cual solo llegó a ser ampliamente conocido cuando William Thomson (posteriormente Lord Kelvin) lo imprimió en el Journal de Crelle de 1846. Sin embargo, el parentesco de Gauss y de Green era tan próximo que donde Green seleccionó el término "función potencial", Gauss seleccionó "potencial". Dos identidades íntimamente relacionadas, fórmula de Green y fórmula de Gauss.

De particular importancia fue el *Treatise on Electricity and Magnetism* (2 vols., 1873) de Maxwell, que dio una exposición sistemática de la teoría del electromagnetismo basada en los experimentos de Faraday. Más tarde inspiró las teorías de Lorents sobre el electrón y de Einstein sobre la relatividad.

La matemática pura del siglo diecinueve en Inglaterra fue, álgebra, con aplicaciones fundamentalmente a la geometría. En los cuarentas, mientras Arthur Cayley ejercía la jurisprudencia en Londres se reunió con James Joseph Sylvester, actuario en ese tiempo; y de esos años data el interés común de Cayley y Sylvester por el álgebra de formas cuánticas, como Cayley las llamó. Su colaboración significó el comienzo de la *teoría de los invariantes algebraicos*.

La obra voluminosa de Cayley cubrió una gran variedad de tópicos en los campos de los grupos finitos, curvas algebraicas, determinantes, e invariantes de formas algebraicas. A sus obras mejor conocidas pertenecen sus nueve *Memoirs on Quantics* (1854-78). El sexto artículo de esta serie (1859) contenía la definición proyectiva de una métrica con respecto a una sección cónica. La relación de esta métrica proyectiva con la geometría no-euclideana escapó a la vista de Cayley; fue descubierta más tarde por Félix Klein.

Sylvester fue con Leibniz, el más grande creador de nuevos términos en toda la historia de la matemática. Con la enseñanza de Sylvester, la matemática comenzó a florecer en los Estados Unidos.

Dos de las muchas contribuciones de Sylvester al álgebra han llegado a ser clásicas: su *teoría de los divisores elementales* (1851, redescubierta por Weierstrass en 1868) y su *ley de inercia de las formas cuadráticas* (1852, ya conocida por Jacobi y Riemann, pero no publicada). Los términos invariante, covariante, contravariante, cogradiente y sicigia.

El tercer algebrista-geómetra inglés fue George Salmon, su principal mérito radica en sus bien elaborados libros *Conic Sections* (1848), *Higher Plane Curves* (1852), *Modern Higher Algebra* (1859) y la *Analitur Geometry of Three Dimensions* (1862), que abrieron el camino hacia la *geometría analítica* y a la *teoría de invariantes* a varias generaciones de estudiantes en muchos países y aún ahora son recomendables a todos los estudiantes de geometría.

William Kingdom Clifford fue uno de los primeros ingleses que comprendió a Riemmann y con él compartió un profundo interés en el origen de las concepciones espaciales. Clifford desarrolló los llamados bicuaternios (1873-76), un sistema de números complejos $a + b\varepsilon$, donde ε^2 puede ser $+1$, -1, ó *cero*, en espacios no euclideanos.

La tendencia formalista en la matemática inglesa puede también explicarse por la aparición de una investigación de *The Laws of Thought* (1854) por George Boole del Queens College, Dublin. Aquí se demostró cómo las leyes de la lógica formal que habían sido codificadas por Aristóteles y enseñadas por siglos en las universidades, podían ellas mismas ser el tema de un cálculo. El "*álgebra de la lógica*" abrió una escuela de pensamiento que intentó establecer una unificación de la lógica y de la matemática. Recibió su ímpetu del libro de el alemán Friedrich Gottlob Frege *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) el cual ofreció una derivación de los conceptos aritméticos a partir de la lógica. Estas investigaciones alcanzaron un clímax en el siglo veinte con los *Principia Mathematica* de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead (1910-13); ellos también influyeron en el trabajo de el alemán David Hilbert sobre los fundamentos de la aritmética y la eliminación de las paradojas del infinito.

La teoría de las invariantes por Cayley y Sylvester recibieron la más grande atención en Alemania. Hesse demostró la potencia de los métodos abreviados de la geometría analítica, le gustaba razonar con la ayuda de las coordenadas homogéneas y de los determinantes. En 1861 el simbolismo "*Clebsh-Aronhold*" (en honor a los que lo desarrollaron) llegó a ser el método casi universalmente aceptado para la investigación sistemática de los invariantes algebraicos. Esta teoría de los invariantes fue enriquecida por Paul

Gordan de la Universidad de Erlangen, quien demostró (1868-69) que a toda forma binaria pertenece un sistema finito de invariantes y covariantes racionales.

Por el año de 1870 la matemática, se había convertido en una estructura enorme y difícil de manejar, dividida en un gran número de campos en los cuales solamente los especialistas conocían el camino. Aun Hermite, Weirstrass, Cayley, Beltrami, a lo más podían ser peritos en solo pocos de estos variados campos.

El siglo diecinueve agregó a estos nuevos principios de unificación, la *teoría de los grupos* y la concepción de *función* y de *espacio* de Riemann. Su significado puede ser mejor entendido en la obra de Klein, Lie y Poincaré.

Félix Klein fue asistente de Plücker en Bonn, allí fue donde él aprendió geometría. Aquí se reunió con Sophus Lie. Los jóvenes se reunieron con los matemáticos franceses, entre ellos Camille Jordan de la Ecole Polytechnique.

Klein y Lie comenzaron a entender la importancia central de la *teoría de los grupos* y subsecuentemente dividieron el campo de la matemática más o menos en dos partes. Klein, como regla, se concentraba en los grupos discontinuos y Lie en los grupos continuos.

En 1872 Klein, declaraba que cada geometría es la teoría de los invariantes de un grupo de transformación particular. La geometría euclideana es el estudio de los invariantes del grupo métrico, la geometría proyectiva de aquellos del grupo proyectivo. La teoría de los invariantes algebraicos y diferenciales de cada grupo nos da la estructura analítica de la geometría. La "adición" de una cónica invariante a una geometría proyectiva en el plano nos da las geometrías no euclideanas. Aun la *topología* relativamente desconocida recibió su lugar propio como la teoría de los invariantes de transformaciones continuas de puntos.

Un año antes, Klein había dado un ejemplo importante de su modo de pensar, cuando demostró cómo las geometrías no-euclideanas pueden ser concebidas como geometrías proyectivas con una métrica de Cayley.

La *teoría de los grupos* hizo posible una síntesis de la obra geométrica y algebraica de Monge, Poncelet, Gauss, Cayley, Clebsch, Grassmann y Riemann. El "problema del espacio de Lie-Helmholtz" ha sido de importancia no solamente para la relatividad y la teoría de grupos, sino también para la fisiología.

Klein dio una exposición de la concepción de Riemman de las funciones complejas en su folleto *über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen* (1881), en la cual puso de relieve cómo las consideraciones físicas pueden influenciar aun el más sutil tipo de matemática. En las *Vorlesungen über das Ikosaeder* (1884), demostró que el álgebra moderna podía enseñar muchas nuevas y sorprendentes cosas acerca de los antiguos cuerpos platónicos. Fue un estudio de los grupos de rotación de los cuerpos regulares y su relación con los grupos de ecuaciones algebraicas de Galois. Bajo la inspirada dirección de Klein, Göttingen, con sus tradiciones de Gauss, Dirichlet y Riemann, se convirtió en un centro mundial de investigación matemática. Klein dio conferencias inspiradoras, las notas de estas conferencias circulaban en forma mimeografiada y proveyeron a generaciones enteras de matemáticos de información especializada y —sobre todo— de un entendimiento de la unidad de su ciencia.

Francia, encarada con el enorme desarrollo de la matemática en Alemania, continuó produciendo excelentes matemáticos en todos los campos. Es interesante comparar a los matemáticos alemanes y franceses: Hermite con Weierstrass, Daboux con Klein, Hadamrd con Hilbert, Paul Tannery con Moritz Cantor. De los cuarentas a los sesentas, el matemático sobresaliente fue Joseph Liouville. El estableció la existencia de los *números trascendentes* y en 1844 demostró que ni e ni e^2 pueden ser una raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes racionales, la demostración de Lambert en 1761 de que π es irracional hasta la demostración de Hermite de que e es trascendente (1873) y a la demostración final por F. Lindemann (un discípulo de Weierstrass) de que π es trascendente (1882).

Charles Hermite, llegó a ser el más sobresaliente del análisis en Francia después de la muerte de Cauchy en 1857. Las funciones elípticas, funciones modulares, funciones Theta, teoría del número y de invariantes, todas recibieron su atención, como lo testifican los nombres de "número de Hermite" "formas Hermitianas". Su amistad con el matemático holandés Stieltjes, fue un estímulo para el descubridor de la integral de Steiltjes y de la aplicación de las fracciones continuas a la teoría de los momentos. Los cuatro volúmenes de la *Correspondence* (1905) entre Hermite y Stieltjes contiene una riqueza de material, sobre funciones de variable compleja.

La tradición geométrica francesa fue gloriosamente continuada en los libros y artículos de Gaston Darboux, por su habilidad administrativa y pedagógica, su fina intuición geométrica, su maestría en la técnica analítica y su entendimiento de Riemann, ocupó una posición en Francia algo parecida a la de Klein en Alemania.

El más grande matemático francés de la segunda mitad del siglo diecinueve fue Henri Poincaré, quien, desde 1881 hasta su muerte (1912), fue profesor de la Sorbona de París. Poincaré, escribió un número de obras populares y semipopulares en las cuales trató de dar un conocimiento general de los problemas de la matemática moderna. Entre sus obras están *La valeur de la science* (1905), y *La science et l'hypothese* (1906). Aparte de estas conferencias, Poincaré publicó un gran número de trabajos sobre las llamadas funciones automorfías y fuchsianas, sobre ecuaciones diferenciales, sobre topología y sobre los fundamentos de la matemática, tratando con gran maestría técnica y completo conocimiento todos los campos pertinentes de la matemática pura y aplicada.

La clave para el entendimiento de la obra de Poincaré puede encontrarse en sus meditaciones sobre la mecánica celeste y, en particular, sobre el problema de los tres cuerpos. Poincaré fue como Euler y Gauss; siempre que nos aproximamos a él descubrimos el estímulo de la originalidad. Nuestras modernas teorías concernientes a la *relatividad, cosmogonía, probabilidad y topología* están todas influidas vitalmente por la obra de Poincaré.

El *Risorgimiento*, el renacimiento nacional de Italia, significó también el renacimiento de la matemática italiana. Entre los fundadores de la nueva escuela italiana de matemáticos estaban Brioschi, Cremona y Betti. En 1858 Francesco Brioschi, en compañia de Beti y Casorati, visitó a los matemáticos más sobresalientes de Francia y Alemania. Volterra sostuvo más tarde que "la existencia científica de Italia como nación" databa de este viaje.

Eugenio Beltrami fue discípulo de Brioschi y ocupó cátedras en Bolonia, Pisa, Pavia y Roma. Su trabajo principal en geometría fue llevado a cabo entre 1860 y 1870, un cálculo de diferenciales invariantes en la teoría de superficies.

David Hilbert, profesor en Göttingen, presentó al Congreso Internacional de Matemáticos en París, en 1900, una serie de veintitrés proyectos de investigación. Hilbert, en su libro, dio un análisis de los axiomas, sobre los cuales, está basada la geometría euclideana y explicaba cómo la investigación axiomática moderna había sido capaz de progresar con respecto a las realizaciones de los griegos.

Lo primero que Hilbert propuso fue la formulación aritmética del concepto del continuo como fue presentado en las obras de Cauchy, Bolzano y Cantor. Los siguientes proyectos trataban de los fundamentos de geometría, con el tratamiento matemático de los axiomas de la física.

La irracionalidad o trascendencia de ciertos números era todavía desconocida (por ejemplo a^β para una a algebraica y una

β irracional). Igualmente era desconocida la demostración de la hipótesis de Riemann concerniente a las raíces de la función Zeta. Otro proyecto en este campo era la demostración de la finitud de ciertos sistemas completos de funciones sugerida por la teoría de invariantes. Otro problema concernía a la división del espacio mediante poliedros congruentes. Los proyectos restantes trataban de ecuaciones diferenciales y del cálculo de variaciones. Hilbert terminaba su enumeración con un llamado para un mayor desarrollo del cálculo de variaciones.

El programa de Hilbert demostró la vitalidad de la matemática al final del siglo diecinueve y contrastaba enormemente con la mirada pesimista que existía hacia el final del siglo dieciocho.

Ahora bien, el desarrollo de la matemática en el siglo XX, no es posible abordarlo en esta Tesis, pues considerando que el 90% de la matemática que existe en la actualidad ha sido descubierta (inventada) en los últimos cien años (1880-1980), también su retroalimentación constante por sus múltiples aplicaciones a las ciencias y técnicas, hacen imposible un seguimiento de sus mayores logros.

Las matemáticas del siglo XX son sumamente especializadas y abstractas. El progreso en la teoría de conjuntos y los descubrimientos comprendidos en los conjuntos infinitos, números transfinitos, y las paradojas puramente lógicas, están muy relacionadas con la fundamentación de la matemática. Además los desarrollos teóricos puros, e instrumentos tales como las computadoras influyen en el contenido y la enseñanza de las matemáticas. Entre las áreas de investigación matemática que han sido desarrolladas en el siglo XX están el álgebra abstracta, análisis abstracto y aplicado a la física, análisis numérico, lógica matemática, fundamentos de las matemáticas, matemáticas discretas, topología, teoría de probabilidades y estadística, entre otras.

CAPITULO 2

APLICACIONES DE LAS MATEMATICAS

Se puede sintetizar, tomando en consideración conclusiones del capítulo anterior, que la actividad matemática (matemática "*pura*" o "*aplicada*") se ha dado en todas las etapas de la evolución del hombre.

La matemática ha estado interrelacionada con la agricultura, el comercio y la manufactura, con la guerra, con la ingeniería y la filosofía, con la física y con la astronomía. Hubo una estrecha relación entre el desarrollo de la matemática y la astronomía, el progreso de esta última dependió de la autoridad de los libros de matemáticas.

Se ha citado por ejemplo, la presencia de las matemáticas en las sociedades primitivas, con las ideas de forma y número, y procesos que finalizaron en técnicas primitivas para responder a necesidades como la de contar objetos, de hacer mediciones, cómputo del tiempo, actividades comerciales, etc.

La matemática oriental como ciencia práctica, facilitó el cómputo del calendario, la administración de las cosechas, la organización de obras públicas, resolver complicados problemas de diseño arquitectónico e ingeniería y la recolección de impuestos. Se desarrolló una gran habilidad en la aplicación de procedimientos básicamente aritméticos.

Desde la época de los griegos, la matemática ha sido el más poderoso instrumento usado para explicar el mecanismo de los procesos que en forma innumerable y continua suceden alrededor del hombre y atraen su atención. La matemática no sólo planteaba la cuestión oriental "*¿Cómo?*" sino también la cuestión científica moderna "*¿Por qué?*". Esta diferente perspectiva, condujo a la matemática hasta los niveles de una verdadera ciencia. La nueva matemática se abordo con un espíritu de entendimiento, más que con el de utilidad, fundamentándolo con el pensamiento riguroso, dando comienzo a la *axiomatización*, el arte de la demostración deductiva matemática.

Con la fusión de la ciencia oriental y griega surgen nuevas perspectivas para el desarrollo de la ciencia matemática. Pero después hubo un oscurecimiento en las ciencias por varios siglos. No obstante, durante el medievo el mundo musulmán absorbe la matemática griega y logra grandes adelantos en álgebra particularmente, que influyen en forma decisiva para el resurgimiento del siglo XVII.

"En opinión de Bertrand Russell, Arquímedes y su contemporáneo Apolonio de Perga, completan la lista de matemáticos griegos de primer orden, y supone que llegaron demasiado tarde para influenciar en forma decisiva al pensamiento filosófico. Después de ellos, la decadencia intelectual del mundo helénico fue manifiesta y hubieron de pasar muchos siglos, veinte exactamente, para que un renacimiento del pensamiento matemático que verdaderamente influyese en la filosofía fuera posible."*

En el Renacimiento, las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo, en parte por el uso productivo y perfeccionamiento de las máquinas.

Las industrias de la seda y minería, evolucionaron hacia industrias completamente capitalistas. La invención de armas de fuego y de la imprenta, la construcción de molinos de viento y canales, la construcción de barcos para navegar en el océano, requirieron de la habilidad ingenieril y produjeron gente técnicamente consciente.

En el siglo XVII la ciencia moderna basada en el experimento y la teoría y sobre todo en el uso intensivo de la matemática, hace posible el desarrollo de todas las ramas de la ingeniería y que la

*Navarrete, Manuel, et al, Matemáticas y realidad, Méx., 1982, p. 47

actividad matemática se extienda hacia muchos campos, nuevos y viejos, iniciando el movimiento científico no interrumpido hasta nuestros días.

Así pues, una teoría física queda perfectamente considerada sólo cuando las leyes propuestas son expresadas por medio de una notación matemática y pueden deducirse condiciones reales desde estos esquemas y, a la inversa, datos del mundo en torno pueden ser introducidos dentro de expresiones matemáticas, procedimiento por el cual se verifica la validez de la explicación de un fenómeno.

También han existido varios instrumentos matemáticos que permanecen dentro del ámbito de la matemática pura, hasta que alguien descubre que su esquema resulta apropiado para la racionalización y explicación de algún fenómeno de la naturaleza*, así se tiene por ejemplo los siguientes casos:

- El tratado sobre cónicas escrito por Apolonio de Perga fue usado muchos siglos después por Galileo para analizar el movimiento de los proyectiles y por Kepler para examinar el de los planetas. Fundido con el álgebra por Descartes, da origen a la geometría analítica, base de la cinemática, ciencia indispensable para la comprensión de los fenómenos del movimiento.

- Los conceptos de la geometría de Euclides, después de veinte siglos fueron tomados por Newton, para explicar los mecanismos de la realidad, por ejemplo, Newton cita lo siguiente en el prefacio de su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathemática* (1686):

"Yo ofrezco este trabajo como los principios matemáticos de filosofía, ya que el peso entero de la filosofía parece consistir en esto: Partiendo de los fenómenos de movimiento investigar las fuerzas de la naturaleza, y entonces, partiendo de estas fuerzas demostrar los otros fenómenos; y a

*Navarrete, op. cit

este fin las proposiciones generales en el primero y segundo libros son dirigidas. En el tercer libro doy un ejemplo de esto en la explicación del Sistema del Mundo; porque de las proposiciones matemáticamente demostradas en los primeros libros, en el tercero derivo de los fenómenos celestiales las fuerzas de gravedad por las cuales los cuerpos tienden al Sol y a los varios planetas."*

- Arquímedes es claramente un precursor del moderno método científico y también de las matemáticas aplicadas, por ejemplo aplicó la geometría y el método racional deductivo para analizar el equilibrio de los planos y el centro de gravedad estableciendo la ley de la palanca, además fue uno de los más grandes físicos e ingenieros de la antigüedad, y tuvo que hacer incursiones en el terreno de la matemática pura, en donde realizó descubrimientos que lo consagran como uno de los más grandes matemáticos, por ejemplo, el desarrollo del método de exhausión iniciado por Eudoxo es una anticipación del cálculo infinitesimal creado por Leibniz y Newton en el siglo XVII. En opinión de Bertrand Russell, Arquímedes sentó las bases teóricas para la fundación de la hidrostática, la estática y la teoría de la palanca. Inventó varios aparatos como la polea compuesta, el tornillo sin fin, etc.

- La teoría de los conjuntos de Cantor, que se refiere al estudio de los conjuntos y sus propiedades pero que son de especial utilidad para el análisis matemático y la teoría de la integral y de la medida, transcurrió aproximadamente un siglo antes de ser sacada del dominio puramente matemático para aplicarse a datos experimentales de física nuclear y agruparlos en sistemas coherentes, es decir, como acontecen determinados fenómenos, tales como el problema de la discontinuidad espacio-temporal que indujo modernamente a la creación de la geometrodinámica cuántica para racionalizar y explicar cabalmente por medio de una estructura racional deductiva, los fenómenos subnucleares que en forma cada vez más perfecta irá captando el hombre.

---

*Navarrete, op. cit., pp. 78-79

Otros ejemplos de la influencia de la matemática en el desarrollo científico y tecnológico (ideas tomadas básicamente de Enciclopedia de las Ciencias) son:

- La matemática es usada por el físico y por el químico para expresar sus leyes, por ejemplo la velocidad que un cuerpo alcanza en un tiempo determinado o bien las reacciones químicas que se expresan por medio de ecuaciones.

- El cálculo diferencial vino a resolver el problema del cálculo de las tangentes a cualquier curva, dado que sólo se habían encontrado soluciones por métodos geométricos a algunas curvas, abriendo camino a la telegrafía sin hilos, el perfeccionamiento de la artillería, el cálculo de fuerzas centrífugas. La obtención de máximos y mínimos por medio del cálculo diferencial es trascendente para optimizar muchos recursos industriales. También el estudio de fenómenos que tengan que ver con velocidad y aceleración o cualquier situación de cambio, son analizables por el cálculo diferencial.

- Una aplicación importante del cálculo integral es la de encontrar áreas limitadas por curvas cerradas o volúmenes limitados por superficies cerradas. Otra aplicación es la de encontrar la longitud total de una curva o área total de una superficie. El procedimiento por el cual se resuelven ecuaciones diferenciales (ecuación que incluye una razón instantánea de cambio) se le llama integración de ecuaciones diferenciales aplicadas a la ciencia y a toda la ingeniería.

- La geometría no euclideana —la geometría riemanniana— ha explicado mejor ciertos aspectos astronómicos de la teoría especial de la relatividad de Einstein, teoría que es usada tanto en el uso pacífico de la energía como en la fabricación de la bomba atómica.

- La geometría del espacio ha permitido a los astrónomos dar una interpretación útil de los cielos y calcular la distancia y posición de los cuerpos celestes. Otro ejemplo es el uso del método de análisis dimensional que se usa para medir el batir de alas de un pájaro que puede sintetizarse en una fórmula.

- La trigonometría es de gran importancia en la agrimensura, en la ingeniería, la navegación, la cartografía y la astronomía, también en todos los fenómenos que se repitan a intervalos de tiempos regulares, por ejemplo las mareas, el movimiento pendular, etc.

- La geometría analítica explicando las figuras geométricas por medio de notaciones algebraicas, ha influido en el desarrollo de aplicaciones prácticas. Por ejemplo, la ecuación de la hiperesfera (más de tres dimensiones) se ha aplicado en la fabricación de tubos de rayos catódicos para televisión.

- Actualmente la teoría de la probabilidad y estadística son fundamentales en muchas actividades, por ejemplo el ejecutivo las usa para tomar decisiones, el comerciante y el industrial para el control de calidad y el análisis de mercado, el agricultor para la experimentación de cultivos, las compañías. de seguros en la predicción de la esperanza de vida, de modo que puedan fijar primas de seguro de vida adecuada. También la teoría de la probabilidad permite a los científicos fijar el límite dentro del cual deben mantenerse las desviaciones respecto a una ley física dada para que no se contradigan dicha ley. Se le ha empleado para calcular las posiciones y velocidades de electrones que orbitan en torno de los núcleos atómicos. Mediante su aplicación se han analizado las fluctuaciones en densidad de un volumen dado de gas. Ha desempeñado un papel importante en genética; entre otras cosas calcular el porcentaje de individuos con rasgos similares y disímiles en generaciones sucesivas. Se pueden programar computadoras electrónicas y predecir el resultado del fenómeno simulado con un alto grado de precisión.

- La ciencia presta cada vez más atención a los problemas de organización y mando. Ha quedado en el pasado la época en que los dirigentes lograban elaborar una dirección más eficiente "a ciegas" o por el método de pruebas y errores. Hoy día para elaborarla es preciso aplicar un enfoque científico pues las pérdidas ocasionadas por los errores son demasiado grandes. Las exigencias prácticas originaron métodos científicos especiales agrupados bajo el nombre de *investigación de operaciones.* Término que se entiende como la *aplicación de métodos matemáticos, cuantitativos utilizados para argumentar las decisiones en todas las esferas de la actividad humana orientada hacia una finalidad.*

La investigación de operaciones es una ciencia relativamente joven. Por primera vez el término "*investigación de operaciones*" apareció en los años de la Segunda Guerra Mundial cuando en las fuerzas de varios países (Estados Unidos, Inglaterra) se formaron grupos especiales (físicos, matemáticos, ingenieros, etc.), cuya misión consistía en preparar proyectos de decisiones para los jefes de mando de operaciones militares. Luego la investigación de operaciones extendió la esfera de sus aplicaciones a las más diversas ramas de la práctica; a la industria, agricultura, construcción, al comercio, transporte, a las comunicaciones, a la salud pública, protección de la naturaleza, servicios públicos, etc. Hoy día es difícil hallar una esfera de la actividad humana donde los *modelos matemáticos y los métodos de investigación de operaciones* no se utilicen de una u otra forma.

Algunos problemas de investigación de operaciones pueden ser atacados con estrategias de teoría de juegos, por ejemplo, dieta óptima, rutas críticas, situaciones con riesgo en los negocios, en las finanzas, en la guerra, en las que el objetivo es maximizar ganancias y minimizar pérdidas.

• Algunos problemas de investigación de operaciones pueden ser atacados con estrategias de teoría de juegos, por ejemplo, dieta óptima, rutas críticas, situaciones con riesgo en los negocios, en las finanzas, en la guerra, en las que el objetivo es maximizar ganancias y minimizar pérdidas.

- La lógica matemática ha sido de importancia para el desarrollo de los lenguajes de programación, puesto que ha permitido establecerlos como sistemas axiomáticos formales, en forma tal que es posible "deducir" si una expresión en un lenguaje de programación está correctamente escrito. Otras áreas de la lógica matemática como el álgebra booleana, la lógica proposicional y el lenguaje de los conjuntos han tenido aplicaciones desde el desarrollo de las mismas computadoras, pasando por las intrucciones del lenguaje de máquina y la formalización de la gramática de los lenguajes de programación. Las teorías que se han desarrollado alrededor de la computación han recurrido a técnicas que tienen su origen en la lógica matemática como la teoría de compiladores, teoría de sistemas, teoría de redes, teoría de autómatas, teoría de sistemas de bases de datos, etc.

  Uno de los campos de mayor actividad de la investigación lógica actual concierne al uso de la lógica en la planificación de programas, la verificación de que son correctos, y la ideación y puesta a punto de programas capaces de escribir otros programas. Como es obvio, interviene la lógica en toda forma de resolución de problemas, en los programas de juegos, en la traducción de idiomas, en los programas de investigación de operaciones, de gráficos por computadora, de música por computadora, etc., así como máquinas capaces de "percepción" y robots y autómatas de todas las variedades.

- Inclusive las matemáticas se incursionan en la actividad artística del hombre, tales son los casos como en la arquitectura, pintura, música.

- La fabricación de todo aparato o instrumento técnico, telescopios, vehículos terrestres, aéreos, marítimos, espaciales, maquinaria industrial, aparatos de precisión para ciencias biomédicas, bioquímicas, físicas, para el desarrollo de la metalurgia, electrónica, telecomunicaciones, la industria del petroleo, computadoras, aparatos domésticos, etc, etc, necesita forzosamente de la aplicación de las matemáticas.

En fin, existe una amplia estructura matemática que da un poder inmenso para desarrollar otras ciencias y técnicas; y al hombre le corresponde decidir que pueden hacer con él, vivir mejor o autodestruirse.

La matemática del siglo XX, tiene tantos aspectos en relación a su estructura en si misma como en aplicaciones, que es imposible hacer un seguimiento de las principales tendencias. Sin embargo, se quiere resaltar algo de lo que se concibe como matemática moderna (tomado de Diccionario de las Ciencias de la Educación).

La *matemática moderna* es una expresión usada a partir de 1930 para significar la organización *actual de las matemáticas*, con la que se trata de unificar los distintos campos de éstas, tanto en el lenguaje empleado, que se obtiene de la teoría de conjuntos como en la fundamentación y sistematización a partir de la idea de estructura matemática.

Es aceptado desde 1950 que la *matemática moderna* se caracteriza por ser *abstracta, polivalente y axiomática*, es decir, la función de la *abstracción* es formar ideas generales, que sean universales y que no estén sujetas a un todo, el término *polivalente* se refiere a que la matemática debe ser de lo más amplia para que sea utilizada en diversos fines e influya en todos los campos del desarrollo social, *axiomática* que se debe investigar y organizar en sistemas los axiomas implicados en una ciencia dada o en una deductiva.

La construcción actual de la matemática está realizada sobre dos campos esenciales, que son el *álgebra y la topología*. La primera precisa y estudia la idea general de operación, estudia las estructuras algebraicas y su hilo conductor es el concepto de función; la segunda hace uso de ideas tales como, límite, continuidad, espacio, y estudia las estructuras topológicas.

La matemática moderna, tiene aplicaciones en muchísimos campos del conocimiento y en casi todos de los que depende el progreso técnico: informática, cibernética, teoría de juegos, teoría de gráficas, investigación operativa, etc. Estos aspectos de la matemática actual permiten resolver muchos problemas de transporte, de estrategia de decisión, de comunicación, de gestión, etc.

Por el acelerado desarrollo de la informática y en particular el desarrollo tecnológico de las computadoras y el impacto que están teniendo en casi todos los ámbitos de las actividades sociales, se presenta a grosso modo, como se han aplicado las matemáticas en el desarrollo de esta tecnología. Para esto se sintetizan algunas ideas que se encuentran en (Calderon)*.

> La realización de todo tipo de cálculos para hacer mediciones y estimaciones, hacía necesario contar con una estrategia más general y notaciones adecuadas para describir estas estrategias. En el transcurso del tiempo, se crearon y desarrollaron éstas y finalmente sobrevivieron las más fáciles de usar y que describieron rutinas más y más complejas o útiles.
>
> Los objetivos de los hacedores de métodos de cálculo fueron siempre la búsqueda de la generalidad. Los mejores métodos o algoritmos fueron aquellos que permitían resolver el mayor número de problemas, más que casos particulares.
>
> La creación de nuevos algoritmos y de notaciones más poderosas para describirlos es una de las motivaciones del desarrollo de las matemáticas a través de la historia.
>
> La construcción de barcos y puentes a finales del siglo XIX, requería de grandes grupos de calculistas que trabajaran y revisaran cálculos durante semanas y meses enteros; era necesario diseñar mecanismos que realizaran los grandes volúmenes de trabajo rutinario.
>
> En el siglo XVII Blas Pascal inventó una máquina capaz de realizar sumas aritméticas. En el siglo XIX un ingeniero inglés Charles Babbage, ideó una máquina de cálculo a la que llamó *The Analytical Machine*, definiendo y estableciendo una meta por alcanzar en la primera mitad del siglo XX. Los ingenieros lograron construir máquinas capaces de realizar cálculos complicados. George Boole desarrolló, metodologías y notaciones que contenían los gérmenes para el éxito de las computadoras.

*Calderon Alzati, E., Computadoras en la Educación, Méx., 1988

A finales del siglo XIX un grupo de matemáticos se dedicaba a estudiar los fenómenos más variados de la física y la química, mientras que otros trataban de formalizar los conocimientos matemáticos.

Los éxitos que se obtenían en uno y otro campo eran formidables, los fisicomatemáticos lograban describir familias enteras de problemas con una simple ecuación diferencial. Tal era el caso de la ecuación *Poisson Laplace* que era capaz de describir y explicar muchos de los fenómenos observados en los líquidos, incluyendo los de los fluidos de los fenómenos electromagnéticos. Maxwell obtenía resultados sorprendentes al establecer un conjunto de cuatro operaciones diferenciales que explicaban todo el electromagnetismo de la misma manera como la ley de gravitación de Newton podía explicar el movimiento de los cuerpos celestes. Con el tiempo, el estudio del electromagnetismo y de la electrodinámica hizo posible el desarrollo de las telecomunicaciones y la electrónica de donde surgiría finalmente la computadora digital.

Por otra parte el matemático George Boole establece una nueva forma del álgebra que permite formalizar el pensamiento lógico de la deducción, para ello crea el álgebra de dos valores: *verdadero o falso*. Así surge la nueva lógica con la cual los matemáticos pueden iniciar la construcción de las estructuras formales de la matemática moderna. El lógico italiano Giuseppe Peano estableció un sistema formal de postulados a partir de los cuales se pudieran deducir todos los posibles teoremas de la aritmética.

Con el tiempo, los trabajos de Boole y Peano tendrían gran importancia en el desarrollo de la computación, el primero en la técnica de diseño de los circuitos lógicos que constituyen los elementos básicos de las computadoras; el segundo acelerando los procesos de formalización de toda la matemática.

Kurt Gödel en 1926 presenta un planteamiento diciendo que al establecer un sistema formal completo iba a existir un teorema que no se pueda demostrar, lo cual generó a partir de 1930 que se establecieran las bases de las teorías de la *recurrencia* y de la *computabilidad*, logrando asi un avance enorme en la dirección de la computación

En 1936 casi ocho años antes de que entraran en operación las primeras computadoras, el inglés Alan Turing, fue el creador de una máquina diminuta, prácticamente de juguete, que parecía ser capaz de calcular cualquier cosa y resolver cualquier problema matemático, sin importar su grado de complejidad, según aseguraba su inventor.

Turing nunca construyó tal máquina, su invento era más bien una abstracción matemática; no empezó por hablar de la máquina para calcular todo, sino que decía y de hecho demostró que dado un problema matemático, sin importar su grado de complejidad era posible construir una máquina determinada dotada de un número muy pequeño de instrucciones (extraordinariamente simples), que pudiera resolver el problema propuesto. Es decir una máquina para cada problema.

Tiempo después, y cuando se dominó la metodología para entender estas máquinas hechas a la medida, él hizo un segundo planteamiento sobre la posibilidad de construir una sola máquina que sustituyera a todas las anteriores y pudiera resolver cualquier problema que se le planteara; dicha explicación debería darse en forma de sucesión de instrucciones, cada una de ellas muy simples, serían ejecutadas una a una en forma muy rudimentaria. Sus implicaciones están presentes en todos los equipos y técnicas de computación y telecomunicaciones.

De las operaciones básicas de la máquina de Turing que combinadas por miríadas o quizá por millones, resulta la solución al problema (las microcomputadoras tienen conjuntos de instrucciones más sofisticados que el de la máquina de Turing). Las tablas de la máquina de Turing no son sino sucesiones de instrucciones que le indican a la máquina que hacer cuando está en cada estado particular y encuentra cierto símbolo.

Aunque la idea de Turing era extraordinaria, los aspectos prácticos de la solución de un problema requerían de otros tipos de mecanismos, que siendo equivalentes a los propuestos por él, funcionaran a velocidades mucho mayores y tuvieran mayores facilidades para su programación.

Faltaba la construcción de máquinas reales que integraran la capacidad de los prototipos con restricciones económicas y tecnológicas del momento. A principios de la década de los cuarentas, un reducido grupo de ingenieros y científicos se avocó a esta tarea utilizando la tecnología más avanzada: la electrónica de los tubos de vacío. Para ese momento ya se conocían varios mecanismos de cálculo y se utilizaban en máquinas de contabilidad, por lo que el primer paso fue la incorporación de los nuevos elementos electrónicos a los viejos. Los viejos elementos daban lugar a máquinas electrónicas gigantes, las cuales servían para resolver un tipo de problemas o a lo más una variedad limitada de éstos, se habían construido máquinas para integrar, para diferenciar, para clasificar datos o para tabular. La innovación significativa, fue la de construir una máquina capaz de realizar distintas funciones mediante tableros e interconexión que permitían armar las unidades de la máquina en formas distintas. Por sus características, se consideró la primera computadora real, llamada ENIAC, por sus inventores, los ingenieros Eckert y Manchy.

Como colaborador del grupo ENIAC, el húngaro físico matemático John Von Newman, aplicó la tecnología electrónica, que dio por resultado el diseño de una nueva computadora, que trabajaría con un programa almacenado en su memoria. La nueva máquina, llamada JONIAC, construida en la Universidad de Princeton se convertiría con el tiempo en el prototipo de todas las computadoras existentes hasta ahora.

Meses después del fin de la Segunda Guerra Mundial, la computación fue teniendo un impresionante impacto en prácticamente todos los ámbitos de la actividad humana.

Por lo anterior, podemos ver a la matemática desde dos puntos de vista. Por una parte, las matemáticas son, en sí, un *arte casi independiente de medios auxiliares exteriores o de otras ciencias.* Tienen su propia curva de evolución, que no se deja influir por la utilidad práctica de los resultados abstractos. Y por el otro lado *sus descubrimientos se aplican a la realidad*, siendo las matemáticas la base teórica de la civilización técnica, tanto en el aspecto bueno como en el malo. Las matemáticas ofrecen al mismo tiempo, el lenguaje simbólico que es común a centenares de ramas de especialización dentro de las ciencias naturales.

Las matemáticas *tienen por lo tanto, una posición clave dentro de la sociedad activa.* Sin ciertos conocimientos matemáticos nos sería muy difícil comprender un mundo en el cual el dominio técnico crece a un ritmo cada vez más acelerado.

Para redondear estos dos puntos de vista se puede citar lo siguiente, y tener presente la importancia e influencia de las matemáticas, tanto en el campo puro como en el aplicado, es decir, no debe haber una dicotomía en la teoría y práctica de las matemáticas.

"... Las matemáticas son un arte en que se crean grandes sinfonías con ideas, así como bellísimas piezas pequeñas. Pero también las matemáticas son un arma poderosísima para comprender y planear, y cada vez se van infiltrando más y más en todas las disciplinas, eriqueciéndolas y enriqueciéndose con ideas nuevas; lo cual, por otra parte, implica una tremenda responsabilidad.

... La teoría de la probabilidad surgió por una discrepancia entre jugadores ociosos y hoy es un arma insustituible de todas las ciencias naturales y sociales. La geometría se originó, según se dice, en un problema del cual dependía toda la economía del antiguo Egipto, se volvió belleza pura con los griegos y aguda herramienta con Descartes y algunas de sus descendientes se cultivan en la actualidad por su belleza propia.

Atacar problemas concretos, descubrir nuevas trivialidades, enriquecer lo trivial, estructurar lo amorfo. captar las ideas esenciales, aclarar detalles delicados, contribuir a las grandes teorías, buscar principios unificadores, pulir, simplificar, especular con vagas generalidades y, cerrando el círculo, conectar las estructuras abstractas con las realidades concretas; todas estas son tareas para el investigador en matemáticas."*

Como se puede apreciar en el contexto de las notas históricas; las sociedades que alcanzaron un mayor grado de desarrollo científico y tecnológico, fueron también en las que su ciencia matemática tomó la debida importancia tanto en cultivarla por si misma, como por la aplicación que se le dio en otros ámbitos. Por otra parte, se observa que en la historia de las matemáticas ésta presentó ciertas "*crisis*", coincidiendo curiosamente con una "*crisis*" social, es decir, hubo períodos en los que no evolucionaron notablemente las matemáticas, ni tampoco las sociedades (por ejemplo, el occidente bajo el dominio romano vivió un período de oscurantismo en sus ciencias).

Hasta este momento es posible inferir la hipótesis de que *un factor determinante* para que exista la dependencia científica y tecnológica de una sociedad, es el grado de conciencia que ésta tenga, en relación al papel que desempeñan las matemáticas en estos aspectos, y su interés en seguir desarrollándolas, aplicándolas y sobre todo transmitirlas de la mejor forma al mayor número de su población.

Ahora, haciendo un análisis, en relación a la transmisión del conocimiento matemático y considerando que a través de la historia de la matemática, el hecho de que se cuente con fuentes matemáticas originales para su estudio por los historiadores muy probablemente se debió a que la elaboración de materiales que sirven como fuente de investigación tuvieron fines educativos, cuyo objetivo

*López de Medrano, S. "Las puras y las Aplicadas" En. Revista Matemática, Sociedad Matemática Mexicana, agosto 1969, pp. 19-20 era preservar y transmitir el conocimiento matemático desarrollado. Por otra parte se puede considerar que en su sentido más amplio *la educación* es un proceso inherente al hombre, necesario y legítimo para su supervivencia, ya que se ve obligado a aprender las respuestas para vivir, lo que al mismo tiempo le hace ser diferente de los demás. Este proceso de inculcación-asimilación cultural, moral y conductual, es el medio por el cual las generaciones jóvenes se incorporan o asimilan el patrimonio cultural de los adultos.

Así pues teniendo presentes estas consideraciones en el aspecto matemático, se tiene que la educación de las matemáticas en las primeras civilizaciones orientales estuvo basada en una continuidad y afinidad, que se transmitía generación tras generación, aunque después hubo divisiones entre las culturas egipcia, babilónica, china, hindú y árabe, persiste en algunas, su tradición milenaria con influencias actuales en su educación matemática. También es necesario recalcar que esta educación se daba solamente en los centros intelectuales y económicos de esas civilizaciones.

Existe una tradición en la matemática griega, con respecto a una filosofía determinada, que ocasionó la formación de diferentes corrientes del pensamiento así como la fundación de diferentes escuelas. En todas ellas existió una situación privilegiada para unas cuantas personas, en comparación con el aumento sorprendente de la clase esclavizada que no recibía este tipo de educación.

Aunque en mayor o menor grado, en los diferentes períodos históricos que se citaron en relación a la historia de las matemáticas, se fue formando una amplia estructura en el conocimiento de la ciencia matemática, se presentaba ahora el problema de transmitir todo ese cúmulo de conocimiento, un medio que fue subsanando el problema fue la elaboración de libros que permitió preservar grandes obras y difundirlas, esto tuvo lugar en todo el curso histórico de la humanidad, en la que se dio el ingenio de una u otra manera de dejar huella de sus pensamientos, por ejemplo en pinturas, pápiros, pergaminos, artículos, etc.

Fue hasta el siglo XIX cuando las matemáticos ya no estuvieron en las cortes reales o en los salones de la aristocracia, su principal ocupación ya no consistía en ser miembros de alguna doctrina académica; usualmente eran empleados por universidades o escuelas técnicas y eran tanto profesores como investigadores, otro de sus retos era la responsabilidad de enseñar y preparar materiales para enseñar, entre otros materiales la producción de libros de texto.

Los matemáticos comenzaron a trabajar en diferentes campos especializados, la amplia estructura matemática hace difícil que se puedan dominar todos los temas matemáticos y sus aplicaciones.

No hay que olvidar la conexión entre problemas antiguos y las modernas teorías que fueron surgiendo, ya que para dominar y asimilar el conocimiento matemático es necesario ir construyendo una estructura sólida con unas bases firmes. En ocasiones las formas anecdóticas en las cuales se transmiten algunos problemas —los oráculos de Deifos, la manzana de Newton, la promesa rota de Cardano o los barriles de vino de Kepler— no debe crear prejuicios en comparación con su importancia fundamental, los grandes matemáticos de la antigüedad tenían conocimiento de la matemática existente hasta su época, por lo cual pudieron entender los fenómenos que ocurrían y dar una respuesta lógica.

EN RESUMEN SE PUEDE DECIR QUE:

La matemática tiene presencia en todos los períodos de la vida del hombre y le permite entender el mundo que le rodea.

No hay duda, de la importancia del papel que juegan las matemáticas en el desarrollo científico y tecnológico de una sociedad y que éstos a su vez marcan su progreso.

Actualmente, de su efectiva enseñanza depende el objetivo de conseguir el hábito de la matematización de situaciones no necesariamente empleando las ideas de número y espacio, sino de abstracción y modelación impregnadas de ideas que se pueden describir mediante la utilización de las estructuras matemáticas. No debe reducirse a la simple transmisión por el profesor de capítulos considerados importantes, sino que ha de consistir en auténticos procesos de descubrimiento por parte del alumno.

Debe pretenderse que los estudiantes consigan elaborar técnicas generales para actuar ante situaciones de problema, así como desarrollar estrategias mentales de tipo lógico que les permitan aproximarse a campos amplios del pensamiento y de la vida, por ejemplo enfocar su creatividad hacia el desarrollo científico y tecnológico.

Existe una gran dependencia científica y tecnológica por parte de los países en vías de desarrollo; que hace necesario analizar cual es la situación actual de su *Sistema Educativo*, y en particular en el área de matemáticas, ya que éstas, en gran medida, a parte del interés y motivación que se tenga por algún campo en especial, permitiran el desarrollo de la ciencia y tecnología propias, o quizá la adecuación de la ya existente para las necesidades de su país, o simplemente entender la tecnología con la que se tiene contacto día con día.

CAPITULO 3

¿POR QUE HACER INVESTIGACION EN EDUCACION MATEMATICA EN MEXICO?

Con marco de referencia en los dos capítulos anteriores, se puede apreciar que la actual estructura matemática es tan amplia y así mismo su aplicación, no sólo en el desarrollo científico y tecnológico de las sociedades, sino también en muchas actividades cotidianas, que es preciso observar la influencia que tuvieron los países occidentales en el nuestro en relación a las matemáticas, considerando que también hubo desarrollo matemático en nuestras civilizaciones prehispánicas, pero que como se vera la de mayor influencia fue y es la matemática occidental.

En el presente capítulo se pretende mostrar como comenzó en nuestro país la educación matemática y, así mismo, analizar que está sucediendo con ésta actualmente; para así poder enfatizar la importancia que tiene el realizar investigación en el campo de educación matemática en México.

INICIO DE LA EDUCACION MATEMATICA EN MEXICO

No es posible hasta el momento, hacer una análisis de la organización del cuerpo matemático y la forma de educación matemática de las culturas prehispánicas de nuestro país, porque:

"La destrucción sistemática de los documentos indígenas por parte de los españoles, después de la conquista de México, privó a los estudiosos modernos de muchos datos originales, importantes para determinar los logros literarios y científicos de la civilización mesoamericana. Una notación explicativa y fortuita acerca de un documento indígena del siglo XVIII permitió al estudioso alemán Ernst Förstemann comenzar en 1880 a descifrar la parte aritmético-calendárica del sistema jeroglífico maya. Gracias a los trabajos de Förstemann y de sus seguidores, los elementos básicos del sistema maya son hoy comprendidos. El temprano uso del símbolo del cero, por ejemplo, es uno de los logros más notables en el desarrollo matemático maya. Durante mucho tiempo se ha pensado, sobre todo entre los especialistas de la cultura maya, que los otros grupos étnicos (aztecas, mixtecos, zapotecos) estaban muy atrasados en aritmética. Sin embargo, como es bien sabido, los aztecas poseían un complejo sistema de cuentas, expresado en la escritura jeroglífica por numerosos símbolos. Al descifrar dos documentos de censo y catastro del Valle de México, que datan de los primeros años de la Colonia, encontramos que los aztecas-texcocanos utilizaron un sistema de notación posicional cuyo uso, hasta hoy, se atribuía exclusivamente a los mayas. Este hallazgo sugiere que entre los aztecas había un conocimiento aritmético semejante al de los mayas.

... Al igual que entre otros pueblos de Mesoamérica, entre los aztecas, el sistema aritmético está basado en el número 20.

... Al momento de la Conquista, los sistemas simbólicos para notación numérica varían en el Valle de México... entre los aztecas el más utilizado se componía de una serie de símbolos pictóricos... Tal sistema de notación puede resultar incómodo para el cálculo aritmético, a causa de la complejidad de tener que dibujar las figuras; sin embargo, es de un alto poder visual al denotar cantidades de productos recibidos como tributo.

... Como resultado del desciframiento y análisis preliminar de dos manuscritos pictóricos de Tepetlaoztoc, que datan de poco después de la Conquista, tres nuevos aspectos destacan acerca del sistema aritmético de los aztecas-texcocanos: 1) notación posicional de línea y punto; 2) un símbolo para representar algunas funciones de cero, y 3) una serie probable de algoritmos para calcular el área. Sin embargo, como ambos documentos fueron escritos alrededor de 1540, surge la duda de si el sistema era prehispánico en su uso y desarrollo o si era uno de los muchos elementos culturales introducidos por los españoles."*

*Harvey H. R. y Williams B. J., "Aritmética azteca, notación posicional y cálculo de área", Revista Vuelta, abril 1982, pp. 23-31

Como la mayoría de los estudios sobre la matemática prehispánica en México tienen un carácter indirecto, o las fuentes originales son muy pocas, por ejemplo, los "códices" y "estelas", además de que los estudios se enfocan más a la arqueo-astronomía de las culturas prehispánicas, las deducciones alcanzadas sobre la situación y características de la matemática prehispánica no son lo suficientemente fuertes, para un análisis del desarrollo matemático prehispánico en México. Por esta razón se analiza la influencia de la Matemática Occidental en nuestro país.

Considerando que España es el país occidental del Viejo Mundo que mayor influencia tuvo en nuestro país, por las razones propias de la conquista, a continuación se describe su situación científica en los siglos XVI y XVII,* y así mismo como influyó en nosotros en el campo matemático.

España y Portugal, tienen como figura matemática sobresaliente al portugués Pedro Núñez (1502-1570), quien estudió en Salamanca y llegó a ser Profesor en Lisboa y Coimbra. Núñez y el geógrafo matemático flamenco Gerhard Mercator (1513-1594) ayudaron a la navegación científica; en 1557 el primero desarrolló los conceptos de la línea de rumbo y los grandes círculos sobre la esfera y el segundo hizo uso de las líneas de rumbo como líneas rectas en su famoso Mapamundi de 1569.

La situación de la Península en los comienzos de su desarrollo matemático parecía ser bastante prometedor, debido a que los moros tuvieron un gran centro del saber en Córdoba; sus filósofos, astrónomos y matemáticos influenciaron a todo el mundo árabe y latino del saber. Contaban con grandes maestros de las artes y ciencias en las ciudades mercantiles que florecieron en las postrimerías de la Edad Media. Estas ciudades mercantiles bien podrían haber propiciado en España y en Portugal un desarrollo mercantil-industrial. Después del descubrimiento de la ruta marítima al Nuevo Mundo, los Reyes Católicos de España establecieron en

*vid. Struik, D. J. op. cit. pp. XV-XX & Trabulse, Elías, Historia de la Ciencia en México. Estudios y Textos, Siglos XVI y XVII, Méx., 1983

Sevilla la Casa de Contratación (1503), y al unir a ésta un departamento para entrenar pilotos se le dio un gran desarrollo a la geografía, cartografía y navegación científica en general.

La llamada *Edad de Oro* de España había comenzado y en sus primeras décadas hubo florecimiento de las ciencias, en las cuales las matemáticas participaron, especialmente en sus aplicaciones. Los manuales sobre el arte de la navegación por Pedro de Medina y Martin Cortés fueron utilizados ampliamente y traducidos a varios idiomas. Fue también bajo las demandas de la navegación trasatlántica que Núñez realizó su obra creativa.

Sin embargo, el interés de las ciencias matemáticas se apagó durante el curso del siglo XVI, no obstante algunos intentos, de reavivar este interés. En la *Edad de Oro* se produjo más arte y literatura admirables —Cervantes, Velázquez, Murillo, etc.— y no así se participó en la gran revolución científica del siglo XVII, esto se debió al hecho de que la clase media bien acomodada que fue la portadora del desarrollo capitalista mercantil-industrial nunca representó un papel decisivo en España y Portugal después del siglo XVI. La revolución científica tuvo lugar en aquellas partes de la Europa Occidental donde la clase burguesa o era la clase dominante como en Holanda, o era política y económicamente influyente como en Inglaterra y Francia.

El régimen burocrático de los Reyes de España (de 1580-1640 también de Portugal) llegó a estar basado cada vez más sobre las antiguas clases feudales terratenientes. La burguesía de las ciudades perdió mucho de su poder político y económico. La persecución de los judíos y moros, quienes en número considerable representaban a los elementos mercantiles y anti-feudales además de, la sangrienta represión de la revuelta de los comuneros (1519-1521), fueron algunas causas de la poca influencia de la burguesía al desarrollo industrial.

Bajo tales circunstancias no existió oportunidad, para que las riquezas que venían del Nuevo Mundo encontraran una oportunidad de inversión en España, más bien estas riquezas fueron gastadas en lujos para los nobles y la Corte y en guerras devastadoras y constituyeron una de las formas con las cuales la Europa Occidental creó su actividad mercantil e industrial. El recelo hacia las nuevas tendencias en la ciencia y la filosofía creció a tal grado, que en 1575 Felipe II prohibió a los estudiantes españoles el estudio en el extranjero. Esta falta de participación en el nuevo mundo científico en parte se atribuye a la influencia de la Inquisición.

El estado de la ciencia en el Nuevo Mundo estuvo influenciado grandemente por las condiciones que prevalecían en la Madre Patria, esto no quiere decir que la herencia prehispánica no haya tenido cabida dentro del desenvolvimiento de la ciencia posterior a la llegada de los españoles, pero para el estudio de la ciencia mexicana dentro del contexto universal es indudable que prevaleció la visión europea.

Así mismo como en España, la Nueva España tenía un prometedor desarrollo de la ciencia matemática en los siglos XVI y XVII y era tal la importancia de esta ciencia que se consideraba como *parámetro de evolución* del desarrollo de las ciencias mexicanas.

> "Uno de los más apasionantes capítulos de la ciencia colonial lo constituye el de las ciencias exactas, en particular la astronomía y las matemáticas, ya que en cierto sentido ambas fueron el termómetro de la modernidad alcanzada por nuestras ciencias en cada una de las etapas de ese período de la historia de México. El selecto grupo de sabios forman uno de los grupos más brillantes y distinguidos de la ciencia novohispana. Casi todo ellos fueron a la vez matemáticos y astrónomos."*

La difusión de la ciencia antigua durante el siglo XVI se dio a través de la impresión de los textos clásicos con que contaba España en ese período, pero además eran anotados y comenta-

*Trabulse, Elías, op. cit. p. 56

dos. El primer libro científico publicado en el continente americano fue el *Sumario compendioso de las quentas de plata y oro que en los reinos del Pirú son necesarias a los mercaderes y todo género de tratantes. Con algunas reglas tocantes al arithmética.* Fue el primer libro de texto conteniendo una *sección matemática* (hasta ecuaciones cuadráticas) editado en la Ciudad de México en 1556, siendo su autor Juan Diez. Los manuales que contenía el texto fueron útiles en operaciones mercantiles y de uso común durante toda la época colonial ya que eran de gran provecho en la conversión de valores, en los cálculos del impuesto del quinto real y para diversidad de operaciones aritméticas que resultaban muy difíciles de resolver.

La Universidad de México, inaugurada en 1555 e instituida según el ejemplo de la Universidad de Salamanca, en España, podía ser comparada también en su enseñanza matemática con muchas escuelas europeas.

Otra destacada figura de matemáticas teóricas del último tercio del siglo XVI, fue Juan de Porres Osorio, abogado con suma afición a las ciencias exactas. Escribió una obra de título *Nuevas proposiciones geométricas*, ideó nuevos métodos para dividir la circunferencia así como para la construcción aproximada del polígono de 36 lados (con error de 0.001).

En los principios del siglo XVII un destacado representante es Enrico Martínez de origen alemán (quien vino a la Nueva España en 1589 y murió en 1632, un monumento en el Zócalo le guarda viva memoria), en su persona reunía las funciones de ingeniero, impresor. astrónomo, escritor, matemático, astrólogo, naturalista y psicólogo. Fue además maestro de matemáticas y astronomía, materias que impartía siguiendo los textos clásicos de Sacrobosco, Purbach y Euclides. Fue también el director de las obras de desagüe del Valle de México. Su obra principal es el *Repertorio de los tiempos e historia natural de esta Nueva España* (1606), recopilación enciclopédica de todo lo que era de interés científico para la época.

Los textos matemáticos tradicionales, hechos muchas veces con fines prácticos, tales como el *Arte menor de arithmética* (1623) de Pedro Paz, primer libro destinado exclusivamente a la aritmética que se publicó en América o bien el *Arte menor de arithmética y modo de formar campos* (1649) de Atanasio Reaton, difícilmente ponen de manifiesto el estado de las matemáticas en México en el siglo XVII.

La corriente de apertura a la ciencia moderna que aparece desde los años treinta del siglo XVII y que no finaliza hasta el resto del período colonial, tiene como representante a una de las más prominentes figuras de la ciencia mexicana a fray Diego Rodríguez. Gracias a su labor fueron conocidos con cierta profundidad las teorías matemáticas y astronómicas que habían empezado a fermentar fuertemente el pensamiento científico europeo. Con fray Diego Rodríguez, lograron difusión y exposición en la cátedras de astronomía y física las teorías de Copérnico, Tycho Brahe, Kepler, Galileo, Gilbert, Lansberg, Magini, Reinhold, Maestrlin y Logomontano; y en la cátedra de matemáticas las de Tartaglia, Cardano, Clavio y Neper. Estas cátedras se impartían en la Real y Pontificia Universidad de México en 1637. Entre los escritos matemáticos de fray Diego, están los siguientes títulos: *Tractus promialium mathematices y de geometría, Tratado de las equaciones, fabrica y uso de la tabla algebraica discursiva, De los logaritmos y aritmética, y un Tratado del modo de fabricar reloxes.* La obra matemática de fray Diego está articulada en un tomo enciclopédico donde las filiaciones de dicha ciencia con la astronomía, la gnomónica (arte de hacer relojes solares) y la mecánica están clara y detalladamente expuestas. Su mayor aporte radica en el estudio de las ecuaciones de tercero y cuarto grados, donde desarrolla los descubrimientos de los algebristas italianos del siglo anterior; su amplia exposición de los logaritmos y la aplicación de éstos a los cálculos astronómicos y sus estudios de trigonometría esférica y de cronometría.

Uno de los primeros sucesores en la cátedra de fray Diego fue el erudito don Carlos de Sigüenza y Góngora (1645-1700). Sigüenza en su obra *La Libra astronómica* (escrita en 1681 pero impresa hasta 1690) da fe del avance astronómico y matemático a que había llegado la colonia en el siglo XVII.

La declinación del esfuerzo científico en España también tuvo su influencia frustrante en el mundo de la Nueva España. No obstante, un pequeño grupo continuó el desarrollo de las ciencias matemáticas. En el siglo XVIII las matemáticas puras y aplicadas fueron cultivadas aunque con diferente intensidad: el aspecto útil o pragmático de esta ciencia fue el que despertó mayor interés. Pero durante este siglo Europa conoce un desarrollo único y acelerado en novedosos campos tales como la geometría analítica, el cálculo diferencial y el álgebra, los cuales son llevados a un alto desarrollo de tal forma que para nuestros matemáticos no fue fácil estar, como en el siglo anterior, en la primera fila de los innovadores.

En la primera mitad del siglo XVIII son pocos los escritos matemáticos con que se cuenta. Una obra de mayor alcance es la del poblano Antonio de Alcalá, que no fue sino hasta 1753 que dio fin a su *Geometría fundamental: contiene los cuatro problemas hasta ahora no resueltos, con la práctica de las medidas de aguas y tierras*, en el que trata acerca de la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Sobre este último Alcalá trata largamente y propone tres soluciones distintas.

Las matemáticas aplicadas, sobre todo bajo la forma de estudios estadísticos, fueron ampliamente cultivadas en la Nueva España durante el siglo de las Luces. En este aspecto la ilustración científica mexicana recogía una tradición europea que venía de fines del siglo XVI y la aplicaba a las realidades del país. Las numerosas relaciones estadísticas novohispanas del período que corre entre 1740 y 1821 fueron una consecuencia lógica de las reformas administrativas emprendidas por los Borbonés en ese lapso. Son básicamente documentos de carácter político, geográfico, social, institucional y económico y fueron el fruto de varias generaciones de hábiles administradores y organizadores.

Las instituciones educativas de la primera mitad del siglo XVIII no fueron ajenas a la enseñanza de las matemáticas. La cátedra universitaria seguía impartiéndose regularmente a los médicos, aunque su nivel no era particularmente elevado. Dentro de las instituciones docentes fueron probablemente los jesuitas quienes más afanosamente se consagraban a enseñar las matemáticas y es larga la lista de obras de esta ciencia destinadas a la enseñanza producida por ellos además de que contaban con una detallada reglamentación tendiente a obtener frutos óptimos de esta cátedra. Sus programas seguían la pauta tradicional de un siglo atrás, por lo tanto había poca cabida para incluir los nuevos avances de estudios matemáticos. Las ramas de la matemática explicadas por los jesuitas en las aulas eran *aritmética, geometría, álgebra, trigonometría, secciones cónicas, óptica, acústica, gnomónica, cronología, música y astronomía.*

Por otra parte, las actividades de los universitarios a veces versaban sobre temas matemáticos, aunque solían derivar hacia temas más propios de metafísica, muy del gusto de la época.

Como en otros aspectos del saber científico los estudios de matemática moderna arribaron a la Nueva España en las postrimerías del siglo XVIII. A su paso por México en 1803, Humbolt observó que los estudios de matemáticas impartidos en el Real Seminario de Minería eran más avanzados que los seguidos en la Universidad. En el Plan original de estudios de la Escuela de Minas, data de 1790, se especificaba que durante el primer año los aspirantes debían cursar *aritmética, álgebra, geometría elemental, trigonometría plana y secciones cónicas* y en el segundo año *geometría práctica.* Desde esas fechas comenzó a utilizarse ampliamente el *cálculo infinitesimal* así como la *geometría analítica.* En esta obra de carácter eminentemente didáctico se formaron muchos de los matemáticos e ingenieros de fines del siglo XVIII y principios del XIX.

La revitalización científica en España iniciada por el rey Carlos III (1759-1788) trajo una nueva vida científica a la Nueva España. Entre otros, está el astrónomo-matemático Joaquín Velázquez

Cárdenas de León (1732-1780), quien realizó la primera triangulación precisa del Valle de México. El fue uno de los hombres que inspiraron la fundación del Colegio de Minería (1792), el primer instituto tecnológico en América, el cual también puso una considerable atención a la enseñanza de la matemática.

También se puede incluir la obra de un anónimo autor quien en 1772 desarrolló con gran ingenio e inventiva un *instrumento aritmético* al que bautizo con el nombre de *rueda calculatoria*. El calculista con sus conocimientos diseñó y construyó una máquina calculadora con capacidad para obtener guarismos del orden de los cien millones. El aparato *sumaba, restaba, multiplicaba y dividía* y fue construido por su autor para ayudar a realizar operaciones con todo tipo de cifras, incluidos quebrados. (Biblioteca Nacional de Madrid, Signatura 18744)

Este prometedor desarrollo en relación a los comienzos de la ciencia matemática de México, fue interrumpido por la Guerra de Independencia, no obstante, la ciencia mexicana no ha carecido de continuidad y constante aceleración, es decir, la transmisión de conocimientos de una comunidad científica a otra posterior, que si bien en ciertas etapas no es muy notoria, no por ello dejo de darse. Y es a partir del presente siglo donde podemos encontrar una renovación en las ciencias matemáticas.

LA EDUCACION MATEMATICA ACTUAL

Hay tres hechos importantes que recalcar, uno es el importante *papel que juegan las matemáticas en la vida del hombre*, otro es el hecho de que *el estado actual de la ciencia y la tecnología es el resultado de los logros acumulados a través de siglos de observación y experimentación*, y, el tercero es el reconocer *la gran relación existente entre la educación y el desarrollo de las sociedades*. Con respecto a este último, si se considera que las matemáticas son parte de la educación, vemos que las tres afirmaciones se relacionan entre sí, para dar por resultado una sociedad desarrollada y en progreso constante. Así pues podemos concluir lo siguiente:

LAS MATEMATICAS SON UNO DE LOS FACTORES DE MAYOR INFLUENCIA PARA EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y TECNOLOGIA DE UNA SOCIEDAD Y ESTA CIENCIA Y TECNOLOGIA SON LAS QUE PROPICIAN LOS CAMBIOS HACIA UNA MEJOR FORMA DE VIDA SI SE APROVECHAN DE MANERA ADECUADA.

Esto último, de que la ciencia y la tecnología propician los cambios hacia una mejor forma de vida coincide con lo que señalan otros autores, en estas ideas se puede ver la influencia de la ciencia y tecnología en el desarrollo social, dependiendo este desarrollo del nivel científico y tecnológico que se tenga.

"El desarrollo de la producción consiste no solo en el aumento cuantitativo de la producción de bienes materiales, sino también en la diversificación de los mismos para satisfacer las crecientes necesidades de la sociedad; pero además de la cantidad y diversidad, deben considerarse la calidad y el rendimiento que tienen los bienes producidos por el hombre socialmente organizado. La unidad real de todos estos aspectos ha dependido y depende actualmente, del estado en que se encuentre la ciencia y la técnica que ha dado la sociedad moderna.

Los procedimientos con que puede incrementarse la cantidad y diversidad, o mejorar la calidad y rendimiento de los objetos producidos por la sociedad, demandan investigaciones, pruebas y experimentos de riguroso nivel científico, imprescindibles para la producción moderna e industrializada. Este complejo proceso, que abarca la investigación pura y aplicada por una parte, y el empleo de los conocimientos y de los equipos que se requieren para la producción por otra, es lo que en términos generales se llama tecnología.

El enlace de la ciencia y la tecnología con la producción y reproducción de la vida material de la sociedad determina la esencia de la ciencia moderna y contemporánea, que ha devenido en componente esencial del progreso humano. En las condiciones actuales, las posibilidades de desarrollo de la ciencia y la tecnología son prácticamente infinitas. Sus avances en extensión y profundidad son tan grandes que no hay dominio alguno de la naturaleza o de la sociedad, incluyendo la propia actividad consciente o inconsciente del hombre, que no se convierta en objeto de la ciencia."*

Otra cita es:

"La tecnología ha sido y continuará siendo un estimulo de primera importancia para el cambio de nuestra sociedad. Las principales compañías en el mundo han tenido su origen y mantienen su posición por una exitosa aplicación de la tecnología en el desarrollo de productos y mejora a los procesos de manufactura..."**

También es posible afirmar que la formación de sociedades científicas en diversas naciones, agregando la creación de universidades y centros de educación superior contribuyen eficazmente al conocimiento de las nuevas tesis, nuevas verdades que formulan científicos, filósofos e inventores de la nueva sociedad, existiendo entonces relaciones recíprocas que convergen y se condensan en el proceso productivo, que son los fundamentos y logros de una educación superior. Asimismo,

"... siempre se ha aceptado desde que existen escuelas, que la matemática debe figurar entre las disciplinas a enseñar sin interrupción desde la escuela primaria hasta la universidad o escuelas superiores. Tampoco se discute que la enseñanza de la matemática debe contemplar el aspecto informativo, que consiste en dar los elementos que se estiman necesarios para desenvolverse en la vida o que otras ciencias necesiten para su comprensión y desarrollo, y el aspecto formativo, para enseñar a pensar, fomentar el espíritu crítico y practicar el razonamiento lógico."***

*Miranda Pacheco, M. La educación como proceso conectivo de la sociedad, la ciencia, la tecnología y la política, Méx., 1978 pp. 12-13

**Parada Avila, Jaime, "El papel del técnico en el proceso de desarrollo tecnológico", IPN, p. 83

***Santaló, Luis A., A. Sádaba La Educación Matemática hoy, España 1975, p. 37

También en la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas se tiene la opinión de que la educación es uno de los principales promotores del progreso social, aunado a esto estan las habilidades que desarrollan las matemáticas.

> "La revolución científica y tecnológica que se está produciendo en la actualidad, con la considerable diferenciación entre las ciencias que le acompañan, trae a primer plano la cuestión de cómo educar a la gente de manera que puedan convertirse en colaboradores activos del progreso social, con una comprensión de los hechos fundamentales de la ciencia y con la capacidad para aplicarlos de manera de lograr la organización más racional de la producción de bienes materiales y espirituales. Cualquiera que sea el sector de la economía que se considere, se encuentra que se le exige al trabajador, cada vez más, que posea no solamente conocimientos básicos y especializados, sino también la habilidad para trabajar creativamente, para mostrar iniciativa práctica así como la capacidad para aprender y educarse continuamente. Y son precisamente estas cualidades las que determinan la capacidad de una persona para adaptarse con éxito a las múltiples facetas, a las tendencias innovadoras y a las presiones de la industria moderna."*

Estructurado todo lo anterior, el problema que presenta esta Tesis es:

> Actualmente y a nivel Nacional existen dificultades para el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, e incluso las dificultades existen en varias partes del mundo en mayor o menor grado, y, bajo el entendimiento de la importancia que tiene su efectiva enseñanza y que no se están logrando sus metas, es necesario sumar más esfuerzos de toda índole —económicos, culturales, sociales y políticos—

---

*Kolyagin, Yu M., Lukankin, G. L., Oganesyan, V. A., "Formas de mejorar la Enseñanza de la Matemática en las Escuelas Secundarias Generales Soviéticas". En Estudios en Educación Matemática, V. 1, Morris, Robert, UNESCO, 1980, p. 93

para mejorar la calidad de la educación matemática.

Entre algunas de las muchas evidencias que existen de este problema se señalan las siguientes: (ver anexos para corroborar estas afirmaciones.)

- Alumnos con bajos promedios en la materia de matemáticas, o alguna de sus ramas, en todos los niveles educativos.
- Elección de otras áreas en parte por temor a las matemáticas. Se puede analizar la elección de carreras profesionales.
- Un alto índice de la poblacić estudiantil tiene repudio, desagrado, desinterés, por las matemáticas.
- No conocer muy profundamente los alcances de esta ciencia, por una gran mayoría de la población estudiantil.
- Un gran desconocimiento de algunos profesores de temas de matemática moderna e inclusive fundamentales, lo que va en detrimento de su enseñanza.

Por otra parte tenemos que este problema no es nuevo, pero es en fechas recientes que se le está dando la debida importancia. Tal como se afirma en la siguiente cita:

> "Aunque se han encontrado documentos de inicio de siglo que hablan de Educación Matemática, es hasta los años 40 cuando en EUA se concede el grado de doctor, por primera vez, en esta especialidad. En México no hace más de 15 años se desarrollan estudios de postgrado en esta rama, lo cual condujo al desarrollo de investigación en esta dirección con un mayor apoyo institucional."*

---

*Mancera Mtz., Eduardo. "Investigación y educación matemática" En: Revista Educación Matemática, Vol. 2 No. 1, abril 1990. p. 10

En nuestro país, como en muchos otros, se pueden citar casos, desde mediados de siglo, en los que se analiza el problema enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, entre otros se pueden citar los siguientes:

- Ya desde el 30 de junio de 1943, se fundó *La Sociedad Matemática Mexicana* en la Cd. de México, D.F., publicando esta sociedad la *Revista Matemática* desde enero de 1957 (dos publicaciones por año en enero y junio), cuyo propósito inicial fue brindar a los aficionados información de primera mano sobre el estado actual de las matemáticas y su creciente desarrollo. Pero es hasta la revista número XIV, de junio de 1963, donde se presentan tres artículos, en los que se hace mención de las fallas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, debido a que en 1960 se dio inicio a la Reforma de la Estructura Curricular de las Matemáticas en casi todo el mundo, sacudiendo fuertemente esta Estructura la Currícula de las Matemáticas.
- El primer artículo fue una ponencia presentada en la *Primera Conferencia Interamericana sobre Enseñanza de las Matemáticas*, en Bogotá Colombia en 1961, con 50 participantes de 20 países. En dicho artículo se señala lo siguiente:

> "Se ha dicho tantas veces que la enseñanza de las matemáticas adolece de graves defectos, que el hablar de ello ya constituye caer en un lugar común. Se dice, por ejemplo, que por razones de costumbre y de tradición es frecuente que el material que se trata en los cursos de matemáticas es un material fosilizado y que transcurren años antes que el estudiante universitario tropiece con alguna idea que no haya sido conocida por siglos.
>
> Por otra parte, se habla, y con razón, del constante e impresionante desarrollo de las matemáticas y de su influencia cada vez más decisiva en todo aquello que tenga que ver la razón.
>
> Así pues, por un lado se considera que la enseñanza de las matemáticas es muy defectuosa y por otra se admite que su vitalidad es mayor que nunca."*

*Torres, Guillermo. "Algunas ideas sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad" En. Revista Matemática No. XIV, Sociedad Matemática Mexicana, junio 1963, p. 1

- El siguiente artículo, tomado del Boletín del Centro de Cooperación Científico de la UNESCO para América Latina, 32, 1962, señala:

> "En el número de diciembre del año de 1957 de la revista *La Educación* editada por la Unión Panamericana, Washington, D. C., publicamos un artículo *Matemática para nuestra época* en el que señalábamos la preocupación del profesorado de enseñanza media (que comprende de los 12 a los 18 años) por la deficiente preparación matemática y en general científica, que obtenían los alumnos de este ciclo escolar.
>
> Transcurridos cuatro años hemos podido comprobar en la Primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática celebrada en Bogotá (Colombia) del 4 al 9 de diciembre de 1961, que las deficiencias en esta rama de la educación no se circunscribían en el reducido ambiente en que nos movíamos, sino que eran muy generales. Delegados de casi todos los países americanos y distinguidos matemáticos europeos dedicaron muchas horas de trabajo intensivo al estudio de los problemas que hoy día preocupan, no solamente a las personas directamente relacionadas con la enseñanza, sino a todo el mundo, ya que de su solución satisfactoria depende el futuro bienestar material de la gran mayoría de la humanidad."*

- El tercer artículo, también muy revelador de lo que ocurría en ese entonces, es el presentado en el *VII Congreso Nacional de Matemáticas*, Xalapa, Ver., 1962, señala que:

> "Hace ya unos años que se estudia el problema de la enseñanza de la matemática en los diferentes escalones, primario, medio y superior. Bastaría señalar, entre otras Reuniones Internacionales que se ocuparon de este problema, en los tres últimos años, el Seminario sobre enseñanza de la matemática, que se celebró en Royaumont, patrocinado por la D.E.C.E. en 1959; el Congreso en Mons y Bruselas en junio de 1959, bajo el tema "La Matemática de los Ingenieros"; La Reunión organizada por la American Mathematical Association, en el mismo año; la conferencia, también sobre enseñanza de la matemática, en el Sudoeste de Asia en 1960; el Seminario sobre la enseñanza de la matemática a los ingenieros y físicos, organizado por la D.E.C.E en París, en febrero de 1961; la Reunión Internacional para la enseñanza de las matemáticas, en Colombia, en diciembre de 1961, etc, etc.

*Santaló, Marcelo. "La Enseñanza de la Matemática en el nivel medio en América Latina" En: Revista Matemática No. XIV, Sociedad Matemática Mexicana, junio 1963, p. 4

> Como puede apreciarse, en todos las regiones del mundo existe considerable preocupación por el problema de renovar los métodos y el contenido de la formación matemática, tanto en la enseñanza primaria como secundaria, lo mismo en Facultades de Ciencias que en las Escuelas Técnicas Superiores. Se trata, pues, de un problema universal."*

- En 1968, la Sociedad Matemática Mexicana organizó el *I Coloquio Mexicano de Matemáticas* que se celebró en Oaxtepec, Morelos, del 6 de julio al 3 de agosto. Dos fueron los objetivos fundamentales; uno, el reunir a los profesores de enseñanza media y superior para que por medio del diálogo directo, de conferencias, de mesas redondas y de cursos, se creara un ambiente propicio para la urgente renovación del Sistema de educación matemática en el país, dos, el fomentar la redacción de manuales adecuados con la enseñanza moderna y avances de la matemática. Se planteo la problemática a la que se enfrentan en su salón de clases y se motivó a los asistentes para reunir más esfuerzos en la investigación sobre el tema.

A nivel internacional se puede citar lo siguiente:

- La UNESCO viene preocupándose desde hace varios años por promover esfuerzos tendientes a mejorar la educación matemática en los países en vías de desarrollo. Su acción en este campo se remota al año 1966 con la iniciación de un proyecto piloto en matemática para el nivel secundario en los Estados Arabes. En el verano de 1962, en un Simpósium Internacional de dos semanas realizado en Budapest y sustentado por la UNESCO, los países participantes —Australia, Bélgica, Bulgaria, Checoslovaquia, Dinamarca, Estados Unidos de América, Francia, Hungría, Italia, Japón, Países Bajos, Polonia, Rumania, Suecia, Suiza, Reino Unido de Gran Bretaña e Irlanda del Norte y Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas— adoptaron por unanimidad, un conjunto de conclusiones de la

*Sánchez Vásquez, G., "La Modernización de la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas Técnicas Superiores" En: Revista Matemática No. XIV, Sociedad Matemática Mexicana, junio 1965, p. 31

problemática a la que se enfrentaban y de recomendaciones relativas a la educación matemática.

Basándose en las recomendaciones, comenzaron en Hungría experiencias a gran escala en 1963. Estas experiencias condujeron a formulaciones más precisas tanto de la currícula recomendada como de las ideas metodológicas correspondientes. Hungría estimó que el proceso de plena adopción demandaría aproximadamente tres décadas. Hasta 1973/74 la currícula seguía líneas tradicionales, similares a las de otros países para los grados de 5° a 8° (10-18 años), se hizo algo superficial la implantación de la nueva currícula. Por lo tanto, muchos conceptos -tan básicos- tenían que ser enseñados -bajo la falsa apariencia de una revisión- en las escuelas secundarias, cuya tarea de preparar estudiantes se hizo, por ello, muy difícil. La currícula de estas escuelas tuvo que soportar, también, la presión que significaba la demanda creciente de educación superior de los estudiantes de matemática. Algunos problemas a los que se enfrentó Hungría los comentan expertos en educación matemática de este país:

"... No obstante, algunos alumnos están en desventaja debido a ambientes menos afortunados (por ejemplo zona rural versus zona urbana), a un nivel cultural inferior de sus padres, a situación económica de menores recursos, o a otras causas (por ejemplo, hogares desechos). Tales diferencias aparecen aumentadas en el aprendizaje de la matemática por el hecho que -debido a su estructuración fuertemente jerárquica- resulta ser la disciplina en la cual es más difícil llenar las carencias de base y neutralizar el peligro de quedar rezagado y, en consecuencia, sentirse desalentado.

Además existen, en el público en general, concepciones erróneas, profundamente arraigadas, acerca de lo que es la matemática, acompañadas de un sentimiento de aprensión hacia ella. Es también opinión prevalente que el estudio de la matemática requiere habilidades especiales y que la gran mayoría de la gente puede aprender, cuando mucho, las partes formales de la matemática, siendo totalmente incapaz de una comprensión cabal de las ideas matemáticas.

Lamentablemente, estas posiciones son compartidas por algunos profesores de matemática. Se cree que la enseñanza tradicional de la matemática escolar fue responsable, en gran medida, por la formación de esta actitud popular. La forma en que se acostumbra enseñar matemática condujo a la creencia de que la matemática está separada del mundo real, que ella existe por sí misma y que solamente muy pocos pueden llegar a dominarla. Esta creencia fue fortalecida por la introducción de la "nueva matemática" en muchas partes del mundo. Esta innovación, cuando se concibe en forma inadecuada hace menos accesible a la matemática, incrementando, además su acción selectiva (a través del fracaso de alumnos) y disminuyendo las posibilidades de ser apreciada por aquellos que estaban, inicialmente, menos inclinados a su estudio.

... El papel de las escuelas secundarias es suministrar los elementos básicos necesarios para el estudio de las humanidades y de las ciencias. En consecuencia, aquellos que después de terminarla no pueden ingresar a las Universidades (aproximadamente el 60%) se encuentra en situación desfavorable para incorporarse al mercado de trabajo..."*

- En el Sistema Educativo en Indonesia dentro de el Proyecto de Escuela para el Desarrollo, desde 1975, señalan que las matemáticas son una de las asignaturas que adoptaron la enseñanza modular como su estrategia de enseñanza-aprendizaje, en esto se contemplan tres factores principales: la calidad de la educación matemática; la calidad y cantidad de los profesores de matemáticas; y la introducción de la nueva matemática en las escuelas de Indonesia. Cuando se hizo el análisis de la calidad de la educación de las matemáticas se reporto lo siguiente:

"Cuando en 1974 se tomó la decisión de usar un método modular, no existían datos firmes relativos a la calidad de la educación en términos de resultados del aprendizaje de los alumnos. La decisión estuvo basada, por lo tanto, en observaciones informales que indicaron una declinación de los logros de los estudiantes en matemática. Los planificadores organizaron un estudio de la calidad de la educación y los resultados de este estudio confirmaron los arrojados por la observación informal. Resultó así que, mientras a nivel de escuela primaria la marca nacional promedio en aritmética había sido el 50% del puntaje máximo (fluctuando desde 46% en un distrito hasta el

*Ferenc Genzwein, Endre Hódi, Gyula Lastéczi, Dr. János Urbán y Dr. Tamás Varga, "Matemática de la Escuela Secundaria en Hungría" En Estudios en Educación Matemática, V. 1, Morris, Robert, UNESCO, 1980 pp. 9-13

> 63% en otro), el puntaje medio nacional en la escuela secundaria inferior llega solamente al 37% del puntaje máximo (fluctuando del 24% en un área a 47% en otra). Aunque el estudio en la escuela secundaria superior no se ha concluido todavía, los resultados parecen indicar que la calidad de la enseñanza en ella es, en el mejor de los casos, tan pobre como a nivel de la escuela secundaria inferior."*

- Se podría decir que el Sistema Educativo Japonés es un tanto envidiable (un alto porcentaje de egresados de las Universidades), en parte porque la mayoría de los padres piensan que lo mejor es que sus hijos ingresen a la Universidad ya que los que egresen de ésta tienen excelentes oportunidades de trabajo, por esta razón sus metas apuntan a que en el nivel secundario ingresen a escuelas donde se de un *alto contenido matemático.*

> "Pero, estas preferencias paternales tan marcadas por los cursos académicos ha puesto sobre los alumnos una carga que, para algunos, resulta demasiado pesada para soportarla, especialmente en el caso de alumnos poco capacitados. Y ha resultado otro severo problema social determinar cómo puede encararse esta situación.
>
> La selección para el ingreso a las escuelas ..., se hace, en todos los casos por medio de exámenes de admisión. Estos exámenes de admisión son de naturaleza competitiva, dado que hay disponibles un número limitado de lugares y la competencia por ingresar a escuelas o universidades que ostentan un alto prestigio social resulta, en consecuencia, muy severa. Aunque el porcentaje de candidatos exitosos podría lucir como más elevado de los que podría esperarse, debe tenerse en cuenta que las cantidades elevadas resultan por la incorporación de candidatos que fracasaron en su primer intento y se vieron obligados a realizar un segundo o tercer intento.
>
> Como la matemática es, corrientemente, una de las materias fundamentales en estos exámenes, las escuelas tienden a preparar a los alumnos para los exámenes de admisión con métodos que atentan contra una normal y deseable forma de enseñar matemática."**

- En Filipinas el Proyecto de Matemáticas iniciado en 1978, en cooperación con diversas instituciones educativas, sociedades

*Soedijarto, R. Ibrahim, y A. Khosit, "El Sistema Modular de Instrucción para la Matemática Escolar en Indonesia", En Estudios en Educación Matemática, V. 1, Morris, Robert, UNESCO, 1980 pp. 32-33

**Kawaguchi, Tadasu, "Matemática de la Escuela Secundaria en Japón", En Estudios en Educación Matemática, V. 1, Morris, Robert, UNESCO, 1980, p. 49

matemáticas y gubernamentales fue a raíz de la preocupación por mejorar la situación de la educación matemática.

> "... Este proyecto no se ocupa de experiencias específicas relativas al desarrollo del currículo o a la formación docente. Y no lo hace porque el análisis de la situación ha mostrado que los problemas que enfrenta la educación matemática en Filipinas son tan fundamentales y de tal amplitud que solamente un esfuerzo masivo e integrado puede producir el efecto de despegue necesario para efectuar mejoras perdurables.
>
> ... los resultados de un estudio del Ministerio de Educación, denominado SOUTELE (sigla que corresponde al título en inglés del Estudio de los Resultados de Educación Elemental). Entre los numerosos hallazgos inquietantes de SOUTELE, el más sorprendente fue que los temas que los alumnos de sexto grado de toda la nación parecían aprender más precariamente eran las destrezas tradicionalmente asociadas en inglés con las tres R: "reading", "riting", and "rithmetic", es decir la "lectura", la "escritura" y la "aritmética". La marca promedio arrojada por los tests de aprovechamiento en las tres áreas mencionadas estaban por debajo del 50%, siendo el de matemática la más baja (38%)."*

- La ideología que se tiene en la URSS es educar de la mejor manera a su gente, para que puedan ser colaboradores activos del progreso social, y en relación a la matemática se señala:

> "El progreso científico y tecnológico plantea, inevitablemente, nuevas exigencias a la enseñanza de la matemática. La matemática ha venido a desempeñar un papel cada vez mayor en cada rama de la industria como resultado de aplicaciones más amplias en décadas recientes, en áreas de la ciencia, la tecnología y la economía que, en otro tiempo, ofrecieron muy poco campo para las aplicaciones de la matemática.
>
> Se ha realizado al mismo tiempo, una utilización más amplia de los métodos matemáticos en muchas ramas de la economía. La formación especializada de ingenieros y de obreros capacitados para la industria y la agricultura está, ahora, firmemente unida a la utilización de métodos matemáticos y de la tecnología de la automatización y de la computación. De ello resulta que los especialistas deben ser instruidos cada vez en mayor medida en los métodos algorítmicos y de computación y ser capaces de aplicar la matemática a la solución

*Nebres, Bienvenido F. y Maraaigan José A., "Desarrollos recientes de la Educación Matemática en Filipinas", En: Estudios en Educación Matemática, V. 1, Morris, Robert, UNESCO, 1980, pp. 61-67 de problemas prácticos. Todo esto significa que las escuelas deben, ahora, enseñar matemática en forma tal como para asegurar que, no solamente los científicos y los ingenieros, sino también los obreros de hoy puedan actuar eficazmente.

... algunas de las dificultades encontradas (en la transformación hacia el nuevo programa de matemáticas) durante el proceso de cambio y que hubo que superar.

La insuficiencia de los textos de matemáticas existentes y los programas inadecuados que se utilizaban en las escuelas originaron las dificultades y fueron responsables de la carencia relativa de conocimientos, de habilidades y de experiencia que revelaban los alumnos.

... El resultado es que no todos los alumnos son capaces de lograr una comprensión clara y completa de los cursos de matemática dentro del tiempo que se designa para su desarrollo. En estas condiciones el profesor resulta imposibilitado de prestar la suficiente atención para comprender los problemas de sus alumnos o para recapitular y consolidar los temas ya tratados."*

- En el Reino Unido en su Proyecto multianual para la enseñanza de la matemática iniciado en 1971, formandose un pequeño grupo de investigadores entre 1976 y 1978, se señala:

"Este estudio procura proporcionar una descripción del "Continuing Mathematics Project (CMP) en el marco de las actividades actuales de desarrollo de currículo en el Reino Unido, prestando alguna atención a los problemas enfrentados y a la insuficiencia de los esfuerzos para superarlos conjuntamente con la evidencia de lo que fue logrado.

El proyecto brinda el ejemplo de un intento de enfrentarse con el endémico, aunque difuso, problema de los estudiantes que, pasando del nivel secundario al nivel terciario de educación, poseen un bagaje matemático que resulta inadecuado para la continuación exitosa de estudios especializados en disciplinas que utilizan la matemática. La implementación del proyecto implicó una inversión considerable de recursos en un área relativamente inexplorada del currículo."*

- En la República Unida de Tanzania se señala que en 1967, el Gobierno asignó más fondos al Ministerio de Educación de ese

*Kolyagin, Yu M., Lukankin, G. L., Oganesyan, V. A., op. cit. pp. 93-95

**Hayter, R. J. "El Continuing Mathematics Project en el Reino Unido", En: Estudios en Educación Matemática, V. 1, Morris, Robert, UNESCO, 1980, p. 113

entonces, para implantar el Documento Presidencial denominado "Educación para la Auto-confianza", algunas exigencias en el aprendizaje de las matemáticas se redescubrieron:

> "El sistema de aprendizaje tuvo que adaptarse tanto a las diferentes necesidades individuales como a las exigencias nacionales. Una disposición política, a nivel nacional en 1968, estableció la matemática como disciplina obligatoria en los primeros cuatro años de educación secundaria. Esta decisión llegó como una calamidad para los alumnos de bajo nivel para la matemática que habían esperado librarse de ella después de los primeros años. No obstante, las necesidades nacionales de mano de obra en campos científicos y técnicos establecieron la necesidad de una base universal en matemática para todos los egresados de la escuela secundaria. Fue así que en esta particular cuestión, donde los intereses de la nación y los del individuo estaban en conflicto, prevalecieron los primeros. Pero los últimcs no salieron impugnes. Pagaron con atraso su desconocimiento de la cultura matemática y su bajo rendimiento en los exámenes finales. Es opinión general entre los profesores de matemática que un número considerable de alumnos son capaces de un mayor rendimiento; la primera cuestión a resolver es motivarlos y la segunda determinar que tipo de matemática hay que enseñarles.
>
> ... Se incorporó en el proyecto original una componente de evaluación... Un informe preparado en 1966 mostró que cada programa tiene sus puntos fuertes... Pero los resultados generales siguieron siendo bajos y ello constituyó una preocupación para los organizadores del proyecto."*

- Se llevan a cabo Congresos Internacionales sobre Educación en Matemáticas, celebrándose el primero en Lyon, Francia en 1968; el segundo congreso en Exenter, Inglaterra en 1972, el tercer congreso en la ciudad de Karlsruhe, República Federal Alemana, en 1976. El objetivo primordial de estos congresos es el dar a conocer y discutir los avances más recientes de la educación en Matemáticas a todos los niveles. Actualmente hay varios congresos internacionales sobre Educación Matemática, Reunión Centro Americana y del Caribe, Simpósium en Educación Matemática, Psicologhy Mathematics Education (PME), Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática (C.I.A.E.M), etc.

*Mmari, G. "Matemática en la Enseñanza Secundaria en la República Unida de Tanzania", En: Estudios en Educación Matemática, V. 1, Morris, Robert, UNESCO, 1980, p. 154 y p. 156

- En México, en 1972 se le encargo al Departamento de Investigaciones Educativas, del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional, la elaboración de los Libros de Texto Gratuito de Primaria, el grupo de investigadores encargados de realizar esta tarea, tenían inquietudes por la situación que se presentaba en la educación matemática y promovieron que se formara algo a nivel Institucional, donde se abordara la problemática de la enseñanza de las matemáticas con fundamentos teóricos.

- En 1975, se fundó en México la *Sección de Matemática Educativa*, Sección que forma parte del CINVESTAV. Desde su fundación esta sección tiene como objetivos prioritarios:

  "1. Realizar investigación centrada en los procesos educativos de la Matemática, que permite plantear soluciones a la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de esta ciencia, en todos los niveles del Sistema Educativo Nacional.

  2. Preparar investigadores y profesores capacitados para realizar la investigación antes mencionada y para promover la constante superación de la educación matemática en sus áreas de influencia."

- Los cambios de la currícula de las matemáticas hicieron patente la necesidad de contar con profesores con conocimientos acordes a las nuevas ideas sobre la educación matemática, y conjuntamente, la formación de investigadores en el mismo campo, por tal razón se inició en 1979 el Programa Nacional de Formación de Investigadores en Matemática Educativa para las Universidades Estatales. Más tarde en 1984, surge en México el *Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas* (PNFAPM), con el apoyo de la Dirección General de Investigación Científica y Superación Académica de la Subsecretaría de Educación e Investigación Científica, uno de entre sus muchos objetivos es:

  "Difundir alternativas de solución a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática."

Sin embargo, aunque en años pasados se han canalizado esfuerzos con la finalidad de mejorar la educación matemática en todos los niveles educativos del país, persiste en la actualidad el problema, es entonces necesario reunir más esfuerzos para realizar trabajo multidisciplinario, ya que este problema no se circunscribe de forma definitiva al campo de la matemática o la pedagogía, sino que requiere un tratamiento más complejo a sus problemas.

IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACION EN EDUCACION MATEMATICA*

El hecho de hacer investigación en el campo de educación matemática se podría justificar simplemente al tratar de responder la pregunta *¿POR QUE LA GENTE APRENDE O NO APRENDE MATEMATICAS?*, sin embargo la respuesta no es tan sencilla, sino que es más bien, demasiado compleja.

La interacción que existe entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y el estudiante abarca muchos determinantes entre los que se tiene:

a). *Los parámetros del estudiante*, entre ellos se pueden citar; su madurez, habilidad intelectual, estilo de aprendizaje, actitudes, y estado emocional y social.

b) *Análisis del contenido de las matemáticas*, así como su alcance y secuencia, y el nivel esperado para el desarrollo y proceso de comprensión matemática y conocimiento.

c) Con respecto al *profesor de matemáticas*, debe considerarse que tanto conocimiento tiene de la misma, su arte de enseñar, sus características humanas individuales y el papel que desempeña en las experiencias de aprendizaje de sus estudiantes.

---

*v Begle, G Edward and Gibb, E. Glenadine, "Why Do Research", pp.3-19. In: Shumway Richard J., Research in Mathematics Education, Printed in the United States of America, National Concil of Teachers of Mathematics, 1980

d) Es de considerarse también los *métodos de enseñanza, el uso de medios y diseño de materiales de apoyo* dentro del contexto de educación.

Es necesario tener cuidado de no confundir las indagaciones que se hagan en un tema, con lo que es una verdadera investigación, ya que la investigación es un poderoso medio para poder tomar decisiones y hacer los cambios necesarios, una de sus características más importantes es su *calidad*, y mientras sea mayor, el resultado obtenido puede ser considerado confiable, y tener una base sólida para realizar cambios significativos en la práctica educacional.

Sin embargo, se debe tener presente que en ocasiones existen dificultades para aplicar los resultados obtenidos en la investigación en la práctica educativa, algunas limitantes son:

1.) *El impacto de la investigación y la práctica se estiman en 15 años o más, esta tardanza puede ser por:*

i) *Tiempo para la creatividad, desarrollo y publicación*, ya que una investigación requiere varios años desde su conceptualización hasta su terminación, tiempo para escribir el reporte, y de dos a seis meses (frecuentemente más) para que un editor lo revise y probablemente lo publique. Si es publicado de seis meses a dos años para que el público en general tenga acceso al conocimiento, el tema puede producir un debate con el cual se amplia el tiempo para que el cuerpo de la investigación provoque un cambio en la currícula de las matemáticas o su enseñanza.

ii) *La comunicación entre los investigadores y los usuarios de la investigación.* Los profesores, quienes tienen la posibilidad de minimizar el tiempo entre la investigación y su aplicación, comunmente no leen los descubrimientos realizados, ya sea por falta de tiempo o desconocimiento del tema. Otros lectores pueden ser aquellos que podrían aplicar directamente los resultados de la investigación, pero normalmente la información no aparece publicada con el detalle que lo requiere porque el espacio que se destina en el medio informativo para estas publicaciones es limitado.

2) *Otro factor de rezago de la transmisión de la investigación para su práctica es su relevancia.*

i) Ciertamente la idea de conocer porque a los estudiantes no les gusta aprender matemáticas, es atractiva, pero los progresos continuos y sistemas aprovechables para la enseñanza individual no funcionan de la misma manera con grupos masivos, debido a que la enseñanza en un grupo heterogéneo representa el empleo de otras técnicas.

ii) Para el investigador la identificación y los resultados de un problema, desde su punto de vista son relevantes, sin embargo en ocasiones no lo es para el profesor quien busca soluciones más prácticas. e inmediatas para evitar ese rezago.

3) *Otro factor es la falta de previsión de soluciones a futuros problemas*, debido a que en muchas ocasiones la investigación va detrás de las necesidades de la práctica escolar.

La investigación en educación matemática tendría un mejor futuro si existieran pocos obstáculos por vencer ya que en el pasado estos factores obstruyeron la realización de sus propósitos para llevarla a cabo.

También debemos considerar las diferentes explicaciones sobre la teoría del aprendizaje expuestas por Jean Piaget, Gagne, Z. P. Dienes, Emma Castelnuovo, Skiner, Miller, teorías Gestaltianas, etc, y tener en cuenta que tienen diversos seguidores, por lo que no existe un punto de vista común sobre el mejor método de aprendizaje. Así mismo, existen insuficiencias (por ejemplo la falta de un presupuesto suficiente, y la falta de investigadores capaciatados para realizar el estudio) para la planeación y realización de prácticas en el salón de clases.

Hay ocasiones en que dos investigadores pueden realizar estudios sobre el mismo tema y con los mismos datos pero sin embargo los resultados son diferentes, por eso debe existir una coordinación entre los investigadores, planear la investigación futura; reproducir, analizar y comparar conclusiones. Involucrar en el campo de educación matemática no solamente a los investigadores si no también a teóricos, estudiantes graduados, profesores de clase, autoridades competentes en el área educativa para que realicen estrategias de acción a nivel nacional, y sobre todo crear una mayor consciencia en los estudiantes para que aprovechen los esfuerzos que se realizan para ellos.

Mientras se logra formar este gran equipo de trabajadores que coordinen sus actividades para lograr las metas de solucionar el problema a nivel nacional, existe la necesidad de desarrollar la investigación en relación a la competitividad y actitudes de los profesores de clase, ya que éstos son los que finalmente tienen contacto con los alumnos, por ejemplo podemos ver los Nodos Regionales que en coordinación con el PNFAPM están trabajando en conjunto, involucrando a profesores a nivel nacional (ver anexo de objetivos y mapa de la República Mexicana donde se observa que se están integrando diferentes Estados por medio del PNFAPM). Los profesores de matemáticas en colaboración con los investigadores tienen una meta común: *mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.*

TIPOS DE INVESTIGACION QUE SE PUEDEN DESARROLLAR EN EDUCACION MATEMATICA

Aunque existen diversas reflexiones de lo que es Educación Matemática, se puede citar por ejemplo:

"La Educación Matemática, según G. T. Wain, se ha definido, en algunas instituciones del Reino Unido, como: el estudio de aspectos de la naturaleza e historia de la matemática, de la psicología de su aprendizaje y enseñanza, que contribuye a que el maestro reflexione sobre su trabajo con niños, junto con el estudio y análisis del currículo en las escuelas, los principios subyacentes en su desarrollo y la práctica educativa.

Hans Freudenthal discute en una de sus obras el sentido de la Educación Matemática como disciplina, en construcción, la cual y en sus inicios, se asemeja más a una ingeniería. En otro artículo, cuando Freudenthal presenta sus reflexiones en torno a los problemas educativos, expresa: si usted busca problemas mayores, el mejor paradigma de educación cognoscitiva es matemáticas; lo cual puede interpretarse como la posibilidad de estudiar algunos problemas educativos a partir de la comprensión de los problemas de la enseñanza en matemáticas.

E. C. Begle, cuando inicia una exposición sobre los objetos de la Educación Matemática, expresa: ¿Cuáles son los objetos de la Educación Matemática? ¿Qué matemáticas queremos que aprendan nuestros estudiantes? Es importante reconocer que no hay respuestas aceptadas universalmente a estas preguntas. La razón es simple. El número de clases de individuos y organizaciones que tienen alguna incidencia, en la definición de los objetivos de la Educación Matemática, es grande, y sus intereses son diversos para lograr unanimidad. Las variables que merecen atención según Begle, son las relativas a los maestros (características afectivas, conocimiento matemático, efectividad ...), el currículo (tratamiento alternativo, objetivo, textos comerciales, destrezas o habilidades, jerarquías de aprendizaje ...), la enseñanza o instrucción (calculadoras, computadoras, materiales manipulativos, descubrimiento, juegos ...), las evaluaciones (características, tipos de prueba, administración de pruebas, elaboración de evaluaciones ...) y la solución de problemas (habilidad para resolver problemas, formatos de los problemas, estrategias ...)

Otra reflexión sobre el tema es la de Carlos Imaz J.: Matemática Educativa es lo que surge cuando, haciendo cierto tipo de abstracciones, abordamos a la matemática como un problema de comunicación, entendida esta última en su sentido moderno, es decir, como emisión y recepción de mensajes que deben producir cambios conductuales observables en los receptores y que, en caso de que estos cambios no se producen o no suceden en la forma deseada, deben producir cambios en la conducta de los emisores, continuando el proceso hasta que se consiguen los objetivos alternos. De entrada, este problema de comunicación se verá constreñido por las muy particulares condiciones del sistema educativo operante.

Henrich Bauersfeld hace notar la necesidad de considerar la enseñanza de la matemática como una situación de interacción humana, en la cual se negocian y constituyen significados y se lleva a cabo en un ambiente institucional, lo cual tiene un impacto importante en el desarrollo de la personalidad.**

Ahora bien, aunque es importante tener una definición precisa de Educación Matemática, es más importante identificar que tipo de trabajo de investigación se puede realizar en esta área, —aún no existe una clasificación determinada de los tipos de investigación en Educación Matemática— pero con el fin de dar una visión mayor así como un marco para ubicar los proyectos desarrollados, proyectos en desarrollo y proyectos futuros, además de que con la clasificación de los tipos de investigación es posible reflexionar sobre la complejidad que presenta la Educación Matemática y ver las partes que requieren mayor atención y los intereses de la comunidad de investigadores.

Es conveniente conocer algunos tipos de investigación en Educación Matemática que se han desarrollado y la clasificación que se les ha dado atendiendo por ejemplo, a su *método*, a su *influencia*, a las *áreas de trabajo* y su *impacto en la enseñanza*, tal como lo cita Mancera**, a saber son:

1. *Clasificación de la investigación haciendo énfasis en el método empleado.*

Ejemplo de esto se encuentra en un reporte del Dr. Eugenio Filloy Y.*** En él se presentan algunas líneas de investigación de-

*Mancera, E., op. cit., pp. 11-12

**Mancera, E., op. cit., pp. 13-17

***Jefe de la Sección de Matemática Educativa sarrolladas en México hasta el inicio de los 80, y aunque en la actualidad la situación es diferente, debido al aumento de investigadores y de investigación en este campo, es ilustrativo un planteamiento de este tipo. Las líneas de investigación consideradas son:

1.1) *Desarrollo curricular.* Se plantea la construcción del currículo de acuerdo a la estructura del conocimiento, lo cual, en el caso de la matemática, puede referirse principalmente al análisis de los procesos matemáticos y las dificultades en la adquisición de los conceptos.

1.2) *Experimentación educativa.* Aplicación del diseño experimental y los métodos estadísticos, en el sentido usual, para la prueba de hipótesis sobre el uso de materiales o la influencia de otros factores presentes en la enseñanza, como la habilidad de traducir enunciados y las estrategias para la solución de problemas, por mencionar algunos.

1.3) *Análisis exploratorio de datos.* Aplicación del análisis multivariado de datos para estudios descriptivos que permiten el desarrollo de estudios en torno a las dificultades presente en ciertos temas de matemáticas.

1.4) *Análisis epistemológico.* Aplicación del método histórico-crítico en el estudio de la historia de la matemática con el fin de conocer el desarrollo o evolución de los conceptos y aplicar este conocimiento a la enseñanza.

1.5) *Observación clínica.* Estudios similares a los de Piaget y sus seguidores.

2. *Clasificación de la investigación a partir de la influencia de diversas problemáticas o disciplinas.*

Es una recopilación de los artículos realizados por Wain G. T., se incluyen algunos que resaltan la relación o influencia de diversas disciplinas en la enseñanza de la matemática, con la intención de proporcionar una visión de algunas áreas, sin embargo, se puede observar una clasificación implícita:

2.1) *Influencia del desarrollo de la matemática en la enseñanza.* Impacto que ha tenido la matemática pura en los planteamientos educativos. Cambios de la enseñanza que pueden ser provocados por nuevos enfoques de la matemática. Propuestas didácticas producidas por el análisis y estudio de las estructuras matemáticas y sus relaciones.

2.2) *Aplicaciones de la matemática.* Importancia de la matemática en la industria, el comercio y otras actividades. Habilidades y conocimientos necesarios para proveer a los estudiantes de una formación matemática adecuada para enfrentar algunos problemas prácticos. Relación de la matemática con otras ciencias y la modelación. Naturaleza de la matemática aplicada y sus implicaciones en la enseñanza.

2.3) *Sociología de la enseñanza de la matemática.* Relación entre la Educación Matemática y la sociedad. Valores de las comunidades matemática y educativa. Relaciones entre maestros, alumnos y contenido. Valores que se comunican con la enseñanza de la matemática. Papel de la matemática en la sociedad, impacto social de los resultados obtenidos en la enseñanza de la matemática.

2.4) *Formación de maestros.* Formas de enseñanza de la matemática. Modelos para la formación de profesores. Relación entre la formación de maestros y los diferentes niveles educativos.

2.5) *Psicología de la enseñanza de la matemática.* Discusión de las habilidades propias de la matemática (análisis, síntesis, generalización, ...) y la formación de conceptos. Características y desarrollo de procesos mentales como los de abstracción y generalización.

2.6) *Diseño curricular.* Análisis del currículo considerando el papel que desempeña la matemática en la sociedad, los valores que comunica, la formación que proporciona, los grupos sociales que la promueven, evaluación del currículo, propuestas curriculares y elementos importantes en su diseño.

2.7) *Evaluación.* Tipos de evaluaciones, utilidad y limitaciones de las evaluaciones, diseño de evaluaciones, identificación de conocimientos importantes para la evaluación.

3. *Clasificación de la investigación a partir de las áreas de trabajo desarrolladas.*

Shumway R. presenta una recopilación de artículos en los cuales los investigadores de reconocido prestigio en EUA, describen algunas áreas de investigación que sirven de referencia para tener una visión de los intereses y las facetas de la enseñanza de la matemática más exploradas.

3.1) *Desarrollo cognitivo.* Identificación de las dimensiones necesarias para describir el desarrollo de los conceptos, procesos y factores que intervienen en la construcción de los conceptos, interpretaciones subyacentes en los conceptos, efecto de las diferencias individuales, razonamiento en matemáticas y procesamiento de información.

3.2) *Aprendizaje de habilidades.* Identificación y desarrollo de habilidades matemáticas, pensamiento algorítmico, generalización, estimación y solución de problemas.

3.3) *Aprendizaje de conceptos y principios.* Variables del sujeto, de la tarea y aplicación correcta de conceptos o principios.

3.4) *Solución de problemas.* Comportamiento en la solución de problemas, diferencias individuales, características de las personas con habilidades para resolver problemas, desarrollo de la habilidad para resolver problemas y procedimientos heurísticos.

3.5) *Diferencias individuales.* Identificación e importancia de las diferencias individuales, dominio cognitivo, dominio afectivo e instrucción individualizada.

3.6) *Actitudes hacia la matemática.* Medición de las actitudes, factores relativos a las actividades, actitudes de alumnos y maestros y cambios de actitudes.

3.7) *Currículo e instrucción.* Selección del contenido matemático, estructuración del contenido matemático y presentación instruccional.

3.8) *Enseñanza y formación de maestros.* Variables de la enseñanza (afectivas, congnitivas, ...), formación de futuros maestros y tipos de conocimientos necesarios para los maestros (matemáticas, psicología, sociología, pedagogía, ...).

4. *Clasificación de la investigación a partir de su impacto en la enseñanza.*

Fennema E. presenta otra recopilación de artículos en los cuales discute el impacto de los resultados de la investigación en la enseñanza.

4.1) *Currículo.* Contenido matemático (aspectos psicológicos, sociológicos, estructurales, ...) procedimientos instruccionales (aprendizaje guiado, aprendizaje real y planeado, ...) evolución del currículo, evaluación de programas, estudio de variables curriculares, desarrollo de enseñanza significativa y efectividad de libros de texto.

4.2) *Valoraciones nacionales.* Definición de habilidades básicas, importancia de la comprensión de algunos conceptos o procedimientos, desarrollo continuo de habilidades matemáticas, implicaciones de las calculadoras y microcomputadoras, resultados de los cursos y percepciones de los estudiantes de los cursos.

4.3) *Pensamiento de los niños.* Procesos cognitivos generales (habilidades de razonamiento lógico, procesamiento de información, procesos y metaprocesos, ...), formación de conceptos y desarrollo de la simbolización.

4.4) *Toma de decisiones por parte de los maestros.* El proceso de toma de decisiones, tipo de decisiones (cognitivas, afectivas, ...) y análisis del proceso de enseñanza en el aula.

4.5) *Relación proceso-producto.* Influencia de la conducta del maestro, relación maestro-alumno y enseñanza efectiva.

4.6) *El factor sexo.* Diferencias relativas al sexo, el papel de la mujer en la matemática, participación de la mujer y expectativas profesionales de la mujer.

4.7) *Solución de problemas.* Problemas verbales, problemas no rutinarios, enseñanza pro solución de problemas y habilidades necesarias en solución de problemas.

4.8) *Computadoras.* El efecto de la computadora en la enseñanza y eficiencia de la enseñanza asistida por computadoras.

4.9) *Calculadoras.* Uso de las calculadoras en clase y desarrollo de habilidades con el uso de calculadoras.

Finalmente E. Mancera propone una clasificación con el fin de tener una visión más amplia de los tipos de investigación que se pueden realizar en Educación Matemática, (se podría considerar como una síntesis de todas las anteriores).

I. *Desarrollo cognitivo.*

I. 1 Habilidades matemáticas.

I. 2 Formación o construcción de conceptos.

I. 3 Solución de problemas.

I. 4 Factores que explican las diferencias individuales.

I. 5 Actitudes hacia la matemática.

I. 6 Razonamiento matemático.

I. 7 Transferencia del conocimiento.

I. 8 Procesos mentales relativos al uso de símbolos y el lenguaje matemático.

I. 9 Permanencia y reforzamiento del conocimiento.

I. 10 Ansiedad provocada por el proceso de enseñanza.

I. 11 Factores de tipo afectivo.

I. 12 Medición de los aspectos cognitivos.

II. *Currículo.*

II. 1 Papel de la matemática en la sociedad y/o en la educación.

II. 2 Valores que comunica la enseñanza de la matemática.

II. 3 Formación matemática que deben adquirir los estudiantes.

II. 4 Estructuración del currículo.

II. 5 Propuestas curriculares.

II. 6 Aplicaciones del currículo.

II. 7 Relación con la cultura.

II. 8 Concepciones acerca de la matemática.

II. 9 Definición de objetivos educativos.

II. 10 Tipos de instrucción.

II. 11 Modalidades de enseñanza.

II. 12 Efectividad de la enseñanza.

II. 13 Formas de medir el impacto, efectividad, etc. de las propuestas curriculares.

II. 14 Determinación de criterios para establecer la calidad de la educación.

III. *Estructura de la matemática.*

III. 1 Influencia del desarrollo de la matemática en su enseñanza.

III. 2 Enfoques de la matemática.

III. 3 Areas de la matemática.

III. 4 Jerarquía entre temas.

III. 5 Estructuras matemáticas.

III. 6 Relación entre áreas y/o estructuras de la matemática.

III. 7 Aspecto formativo desde una perspectiva matemática.

IV. *Aplicaciones de la matemática.*

IV. 1 Papel de la matemática en la industria, el comercio, etc.

IV. 2 Modelación y matemáticas.

IV. 3 Enfoques de la matemática aplicada.

IV. 4 Relación de la matemática con otras ramas del conocimiento.

IV. 5 Integración de aplicaciones como experiencias de aprendizaje.

V. *Formación de maestros.*

V. 1 Identificación de los factores que definen la tarea docente.

V. 2 Elementos necesarios en la formación de maestros.

V. 3 Relación maestro-alumno.

V. 4 Recursos para la enseñanza.

V. 5 Papel del maestro en las diversas modalidades educativas.

V. 6 Relación entre la docencia y la investigación.

V. 7 Interdisciplinariedad o multidisciplinariedad.

V. 8 Características afectivas y/o cognitivas.

V. 9 Programas de formación de maestros.

V. 10 Medición del aprendizaje y su relación con la evaluación y acreditación.

VI. *Materiales de apoyo.*

VI. 1 Enseñanza por computadora.

VI. 2 Enseñanza con calculadoras.

VI. 3 Materiales manipulativos.

VI. 4 Materiales escritos.

VI. 5 Materiales audiovisuales.

VII. *Práctica docente.*

VII. 1 Proceso de enseñanza en el aula.

VII. 2 Interacción entre maestro, alumno, contenido, institución, y otros elementos.

VII. 3 Factores que influyen en la práctica docente.

VII. 4 Proceso de comunicación en clase.

VII. 5 Constitución de significados.

VII. 6 Influencia de los factores culturales.

VII. 7 Influencia de los factores étnicos y sociales.

VIII. *El medio ambiente.*

VIII. 1 Ambiente generado en el salón de clases.

VIII. 2 Organización escolar y su impacto en el trabajo en el aula.

VIII. 3 Factores externos a la escuela que influyen en la calidad de la educación.

VIII. 4 Factores étnicos.

VIII. 5 Influencia del medio ambiente físico.

Como se puede observar con esta clasificación propuesta por E. Mancera, las líneas de acción que puede tener un profesor, un investigador, o cualquier otra persona interesada por la Educación Matemática son tan amplias que para cubrirlas es necesario la participación de más gente, así como también se puede confirmar lo complejo que resulta tratar el problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que es evidente que se deben realizar esfuerzos mayores, para alcanzar la meta de mejorar la Educación Matemática.

LAS MATEMATICAS Y EL TRATADO DE LIBRE COMERCIO

El reflexionar sobre las implicaciones del Tratado de Libre Comercio (TLC) en el campo de la educación rebasa los límites y propósitos de este subtítulo; sin embargo dándole un enfoque operativo al análisis que se ha venido haciendo respecto a la importancia de hacer investigación en educación matemática y su influencia en el desarrollo científico y tecnológico, además conscientes de la complejidad y amplitud de los problemas que en educación se presentan, pero que es necesario enfrentarlos, las reflexiones tienen que ser hechas bajo un análisis inter-cultural que implique un diálogo, ya no con otras Culturas sino con nosotros mismos dada nuestra doble herencia Cultural, lo que permitirá integrar crítica y conscientemente, por una parte, la enorme riqueza conceptual alcanzada por la Cultura Occidental, y por otro lado la herencia de nuestras Culturas Prehispánicas, abriendo otras posibilidades al desarrollo armónico de nuestra Cultura Mestiza.

Para que exista el desarrollo armónico de toda la sociedad mexicana y pueda interrelacionarse con otras sociedades en este caso con la de Canadá y Estados Unidos bajo el TLC, un punto estratégico de un análisis serio es el campo educativo, ya que la educación es un poderoso motor de cambio que permite la adaptación de los requerimientos que provienen de una revolución científico-tecnológica en empresas trasnacionales que compiten en el mercado mundial con calidad y eficiencia.

Es hoy el momento de planear las estrategias de acción adecuadas para una vinculación escuela-empresa, estrategias cuyas perspectivas deben considerar la formación y/o actualización de Recursos Humanos que en su propio terreno cultural y con su propia visión del mundo impulsen la investigación e innovación en el campo educativo, para esto, se requiere una fuerte inversión del gobierno federal y estatal, y sobre todo de la empresa privada, que incluyan en sus planes de desarrollo la investigación y el desarrollo de tecnología educativa propias.

Si se considera que México cuenta con suficiente población para formar lor Recursos Humanos necesarios que desarrollen investigación en ciencia y tecnología, que promueva el desarrollo social de nuestro País, es el momento de ejecutar programas para lograr esta formación. En el hecho de formar los Recursos Humanos necesarios se debe reflexionar sobre la problemática que existe en todo nuestro Sistema Educativo Nacional y en particular en el área de Educación

Matemática, porque mientras mayor sea nuestro conocimiento de la matemática, podremos aplicarla efectivamente con la utilización o creación de modelos matemáticos que permitan tomar mejores decisiones en las actividades empresariales. Así podremos tener una visión más amplia para competir en calidad y eficiencia con nuestros vecinos del norte.

También, al elevar el nivel de la cultura matemática de la gente con el fin de formar mejores profesionistas, se tienen mayores posibilidades de que se aproveche adecuadamente los avances tecnológicos que se vayan incorporando a nuestra industria y así mismo mayor probabilidad de desarrollar tecnología propia competitiva a nivel mundial.

Por otra parte, nuestra Investigación en Educación Matemática no está muy lejos de la que se hace en otros países, por lo que se debe propiciar todavía más su desarrollo, para que la Educación Matemática en México llegue a ser un Sistema Integral muy completo que se interrelacione con la naturaleza, el tiempo y espacio, tal como lo hacían nuestras Culturas Prehipánicas.

CAPITULO 4

LA COMPUTADORA PERSONAL COMO APOYO A LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

Es claro que, el problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es demasiado complejo, debido a todas las variables que involucra. Estas variables se pueden deducir de la clasificación de los diferentes tipos de investigación que se pueden llevar a cabo en la Educación Matemática. Una *alternativa de solución* sería considerar todas las áreas de investigación expuestas al final del capítulo 3, para que el trabajo conjunto de profesores, autoridades académicas e investigadores incida en la transformación de la Educación Matemática a nivel Nacional. Sin embargo, coordinando esfuerzos para que la investigación que se lleve a cabo se ponga en práctica, es menester tomar inicialmente, una dirección en una de las líneas de investigación en Educación Matemática. A este respecto el uso de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una de las líneas que se podría seguir como parte de esa *alternativa de solución*.

Considerando que actualmente estamos influenciados por la revolución tecnológica de la computación, debido al gran desarrollo de los circuitos integrados, la capacidad de la computadora para realizar tareas en varios ámbitos de la vida del hombre y la competencia de las compañías transnacionales por lograr el liderazgo en la miniaturización de los chips está dando como resultado equipo de menor volumen, pero de mayor capacidad, y, sobre todo la disminución de su costo, lo que hace de la computadora un elemento común en las empresas e institutos de investigación y cada vez más accesibles a los hogares y escuelas.

Actualmente por razones ajenas a una planeación educativa, están llegando a las escuelas *computadoras de uso personal* (de aquí en adelante solamente *computadora*), se puede suponer que la mayoría de las escuelas en breve tiempo contaran con equipo de cómputo, asimismo existen escuelas que ya lo tienen, por lo tanto, el reto y oportunidad es lograr el máximo beneficio utilizando de la manera más óptima todo el potencial de la computadora, para así apoyar a la educación, pero para ello es necesario llevar a cabo investigación en esta área que llevará varios años de esfuerzo en experimentación y desarrollo.

En este capítulo se presentan las diversas formas en que la computadora puede ser usada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para esto se analizan los enfoques que proponen diversos autores sobre la forma de usar la computadora en la educación matemática. Esto, con el propósito de criticar las bondades y defectos de sus propuestas para plantear una mejor y más amplia clasificación de las formas de uso de la computadora, con el fin de orientar la investigación y desarrollo que se puede llevar a cabo para explotar el potencial de la computadora en su uso en la Educación Matemática. Asimismo, se señalan algunos errores que se pueden cometer al no planear la forma en que la computadora debe ser introducida en la escuela. También se analizan las limitaciones que presenta el uso de la computadora, ya que a pesar de ser una herramienta tecnológica que esta teniendo un enorme impacto en el campo educativo, ésta no lo es todo para los fines de la Educación Matemática, es tan sólo una parte.

Con esto se pretende que los profesores de matemáticas y directivos puedan tener una mayor visión sobre la forma de introducir la computadora en la escuela, para que coordinen mejor sus actividades y elijan las formas más adecuadas de uso de la computadora, con el propósito de que sea mejorada la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

USOS DE LA COMPUTADORA: DIFERENTES ENFOQUES

A partir de la década de los sesentas, cuando se introdujo la matemática moderna en la currícula de las matemáticas en los sistemas educativos de los países desarrollados, el problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se acrecentó, y en parte esto obligo a que se iniciaran estudios de investigación para la introducción del uso de la computadora en la educación y en particular en matemáticas, ya que la educación de la matemática supone asumir teorías generales sobre la educación. En México es a partir de la década de los ochentas, cuando se inician proyectos para introducir el uso de la computadora en la escuela, pero estos esfuerzos se han encontrado con barreras: presupuestos reducidos, críticas o dudas acerca del potencial de las computadoras en la educación y la falta de métodos educativos acordes con el desarrollo de la computación.

Algunos de los primeros acercamientos del uso de la computadora en la educación en los EUA datan de los años 60, con la aparición del tiempo compartido, que consistía en propiciar un contacto directo del usuario con la computadora y la creación entre 1964 y 1965 del *Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code* (BASIC); el trabajo se orientó predominantemente a tareas de enseñanza asistida por computadora y de programación elemental en el lenguaje BASIC que fueron acogidos muy favorablemente en todos los niveles de la enseñanza. La tecnología de los años 70 —la microelectrónica— brindó la oportunidad de sacar la computadora de su uso únicamente en los laboratorios y desarrollar más su potencial.

Las universidades de EUA ofrecieron algunos modelos de como las computadoras podrían ayudar en el proceso de aprendizaje. Los modelos de aprendizaje son entre otros: los conductistas en los que los estudiantes siguen unas pautas estrictamente marcadas; los modelos inspirados en el suizo Jean Piaget y, los modelos desarrollistas en los que se estimula a los estudiantes para que vayan desarrollando sus propios caminos hacia el aprendizaje. Teniendo en cuenta estos modelos y otros más, Cynthia Solomon* realizó investigaciones de como se lleva a cabo este proceso de aprendizaje interactuando con la computadora en relación a la educación escolar básica. C. Solomon hace su análisis centrandose en dos enfoques diferentes:

1) *La computadora como un libro de texto interactivo que controla el alumno.*

a) Suppes: ejercitación y aprendizaje memorístico.
b) Davis: la interacción socrática y el aprendizaje como descubrimiento.

2) *La computadora como un medio de expresión bajo el control del alumno.*

c) Dwyer: eclecticismo y aprendizaje heurístico.
d) Papert: constructivísmo y aprendizaje piagetiano.

Desde el punto de vista de C. Solomon los trabajos de los investigadores Patrick Suppes, Robert B. Davis, Tom Dweyer y Sigmour Papert, son una buena muestra del pensamiento de los investigadores sobre la enorme influencia que la computadora tiene en la educación, a pesar de que cada uno de ellos representa una corriente distinta de pensamiento en el campo educativo. En cuanto a *la computadora como libro de texto*, escoge dos planteamientos distintos: Suppes y Davis, que se sintetizan a continuación.

a) El trabajo del investigador Patrick Suppes, profesor en la Universidad de Stanford, se analiza a partir de su concepción

*Solomon, Cynthia. Entornos de aprendizaje con ordenadores. Una reflexión sobre las teorías del aprendizaje, España, Paidós, 1987 que tiene de las matemáticas. Suppes concibe las matemáticas según un planteamiento lógico y asume un modelo conductista, matemático. Según su teoría del aprendizaje, las matemáticas o cualquier otra materia pueden descomponerse en una serie de datos elementales, estableciéndose entre cada elemento de la serie una relación jerarquizada. El estudio de la matemática por los alumnos se compone de conocimientos por niveles, de modo que un nuevo conocimiento conduce a otro nivel superior en la estructura lógica.

Así pues, Suppes al usar la computadora pone en práctica la teoría conductista del aprendizaje de las matemáticas, realizando programas de computadora que contenían un bloque de ejercicios a resolver correspondientes a cada uno de los diferentes niveles de conocimiento de la materia. Los ejercicios que se presentaban en cada nivel a los alumnos tenían una especie de estímulo y reforzamiento para las respuestas, el estímulo era a base de frases como por ejemplo "*correcto*", para reforzarlo se les planteaba otro ejercicio de mayor dificultad hasta que el alumno completara un bloque concreto de conocimientos; por otra parte si la respuesta era incorrecta, el programa le mandaba un mensaje al alumno diciéndole "*te has equivocado*", pidiéndole repetir el ejercicio, o dándole la respuesta correcta y haciéndole repetir el ejercicio. Además de que con las respuestas capturadas en un archivo de la computadora, Suppes tenía un banco de información que le servía para desarrollar nuevos programas, contemplando la interpretación de los datos analizados.

La currícula básica de matemáticas elaborada por Suppes está disponible en sistemas del *Computer Curriculum Corporation* (CCC) fundada en 1967. Este sistema tuvo cierto éxito en los centros escolares, para regularizar alumnos que no tenían los conocimientos estándares pedidos en la educación escolar básica.

b) El segundo investigador es Robert B. Davis, profesor de matemáticas en la Universidad de Illinois. El trabajo de Davis tiene un planteamiento diferente al de Suppes. Davis observó que había muchos problemas en el aprendizaje de las matemáticas elementales en los años 50 y que era necesario hacer algo al respecto. Para empezar, Davis consideró las matemáticas desde un punto de vista pragmático más que lógico y al proceso de aprendizaje más bien como un descubrimiento que como el resultado de un esfuerzo, Davis puso en práctica estas consideraciones para realizar su trabajo en relación al uso de la computadora en la educación matemática.

La estrategia de Davis consistía en enseñar en base a la experiencia cotidiana de los niños, por ejemplo como hacer que los alumnos compartiesen barras de caramelos, como medio de introducción a las matemáticas formales; y también configurar nuevas relaciones matemáticas mediante un diálogo de tipo socrático. Puso en práctica actividades en las que los niños jugaban a hacer el papel de matemáticos en la clase, en las que llevaran una serie de descubrimientos y, fundamentalmente, la posibilidad de establecer generalizaciones. En el sistema informático PLATO (*Programmed Logic for Automatic Teaching Operation*) en 1972 se pusieron en práctica estas teorías.

Se podría decir que el software no contuvo todas las consideraciones sobre las teorías del desarrollo propuestas por Davis ya que varió en calidad, aparte de que requiere de mucho tiempo para su elaboración, porque pretendía que con la curiosidad natural de cada niño, éste pudiera descubrir las leyes de las matemáticas por sí mismo, esto sería fantástico, pero difícil de alcanzar por las características individuales de cada niño, que se necesitaría suficiente tiempo para poder evaluarlo en su aplicación experimental con los niños y revisarlo.

Respecto a *la computadora como un medio de expresión*, C. Solomon, elige también dos planteamientos, el de Dwyer y Papert, que también se sintetizan a continuación.

c) Tom Dwyer y sus colaboradores del laboratorio Soloworks de la Universidad de Pittsburg, elaboraron toda una serie de actividades de programación usando BASIC. Dwyer considera que si se crean unas condiciones favorables a la investigación se da un descubrimiento del conocimiento y un aprendizaje efectivo. Para que el profesor y el alumno se conviertan en descubridores de la verdad, se debe utilizar la tecnología de la computadora con el fin de construir un entorno instrumental en el que el aprendizaje de las matemáticas sea, simultáneamente, sencillo y estimulante, es decir que permita al usuario asumir un proceso de aprendizaje autónomo.

Dwyer considera a la computadora como un medio de expresión y como un motivo de inspiración para profesores y alumnos. Además de usar el lenguaje BASIC por ser uno de los más populares, también apoya la creencia de que aprender a programar es una necesidad social para cualquier persona instruida.

d) El segundo investigador considerado es Seymour Papert y su grupo LOGO del Massachusetts Institute of Technology, aplicaron ideas de lo que significa el aprendizaje de las matemáticas mediante nuevos modelos.

Según Papert, el proceso de aprendizaje encuentra sus mejores condiciones cuando tiene lugar un medio activo en el que los niños participen en el propio proceso por medio de la construcción de objetos. Papert asume una filosofía educativa y una epistemología concreta, en parte derivadas de las teorías sobre aprendizaje de Piaget y de la inteligencia artificial, tiene una concepción amplia de las matemáticas que incluye el aprendizaje en relación al propio medio ambiente, la resolución de problemas por medios ingeniosos, la utilización de la intuición y la reflexión sobre los propios actos. Las operaciones matemáticas consisten en construir objetos físicos y mentales, y depurarlos. Con la creación, en 1976, del lenguaje de programación LOGO y puesto a disposición en 1982 para computadoras personales, se pretende que los niños sigan explicando libremente y aprendiendo por medio de la invención, proporcionándoles para esto un medio ambiente instrumental que incluye una serie de juegos ingeniosos controlados por la computadora, como tortugas robot, cajas de música y tortugas gráficas.

Un segundo enfoque de los usos de la computadora en la educación es el siguiente, en el que se puede observar la tendencia exclusiva a la simulación de situaciones:

> "Existen varias razones para pensar en la computadora como un instrumento valioso para la educación. Una de ellas es su capacidad para crear escenarios capaces de despertar la imaginación y el interés de niños y jóvenes, situándolos en la cabina de una nave espacial, en un laboratorio de biología celular, en el puesto de control de una gran central hidroeléctrica o en un quirófano donde se realiza una operación del corazón."*

Un tercer enfoque propuesto en una ponencia presentada en el Primer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, en 1989, en el Estado de Guanajuato, México, se señala:

> "... se trabaja en la búsqueda de mejores formas de aplicar las microcomputadoras a la enseñanza, generándose diversas tendencias que podemos agrupar en cuatro clases principales (nos referimos a su uso en la enseñanza de las matemáticas):
>
> 1. Enseñanza de las matemáticas a través de la enseñanza de la programación.
> 2. Las microcomputadoras como herramienta.
> 3. Las microcomputadora como laboratorio de Matemáticas.
> 4. La microcomputadora como profesor.
>
> * NOTA: Esta clasificación se anota solamente con fines de sistematización, ya que en realidad, las formas de uso se presentan matizadas unas con otras.
>
> Las tres primeras formas de uso de la micro en la educación anotadas, parten de la crítica a la micro como sustituto del profesor, sin embargo,

*Calderon, E., op. cit. p. 58

esto no significa que dicha idea sea errónea o que deba ser dejada de lado, en realidad, lo que tenemos que hacer es implementar prácticas que eviten o disminuyan sus desventajas. Y, al mismo tiempo, permitan sacar provecho de éste novedoso recurso pedagógico."*

Un cuarto enfoque es el de Patrick B. Scott, de la Universidad de Nuevo México. En el resumen de su ponencia ante el Primer Simposio Internacional de Educación Matemática que se llevó en México en octubre de 1988, se señala *El mejor uso de las computadoras en la enseñanza de las matemáticas.*

"1) *La Estimación* siempre ha sido importante, pero el uso de las calculadoras y computadoras resalta su importancia. El ser humano debería tener capacidad de estimación para juzgar si es razonable una respuesta dada por una máquina.

2) *La Resolución de Problemas* podría recibir más atención si una máquina está realizando cálculos engorrosos. También existen programas que permiten al alumno no fijarse en estrategias específicas para la resolución de problemas.

3) *La Representación Visual de Conceptos Matemáticos Abstractos* se facilita con los programas para gráficas. Dichos programas elaboran gráficas rápida y precisamente, y permiten con facilidad el cambio de parámetros.

4) *La Manipulación visual de Conceptos Matemáticos Abstractos* se facilita con los programas de cómputos simbólicos. Sin embargo, con programas como MuMATH, Coxford (1985) insistió en que a pesar que éstos podrían reducir la cantidad de destreza manipuladora que necesita el alumno, no reducen el nivel de comprensión de conceptos centrales ni la facultad de reconocer formas algebraicas.

5) *Práctica y Reforzamiento Paciente para Poblaciones con necesidades Especiales* podría ser otro buen uso de las computadoras. Si alumnos con dificultades especiales necesitan practicar destrezas específicas, la computadora con software adecuado podría ser un tutor o guía simpático y paciente."**

---

*Mata Ortiz G., La línea recta, prototipo didáctico por computadora, Memorias del Primer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, Méx., 1990, p. 43.

**Scott, B. P., Las computadoras y la enseñanza de las matemáticas, Educación Matemática, Vol. 2 No. 1, abril 1990, p. 48

Un quinto enfoque es de acuerdo a la clasificación dada por Fernando Hitt Espinosa,* en su Conferencia presentada en el Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, que se llevo a cabo en Cuernavaca, Morelos, México, en julio de 1990, en la que señala *las diferentes maneras de uso de la microcomputadora en el aula* que se sintetizan de la siguiente manera:

1). *El pizarrón electrónico.* Esta forma de uso requiere el empleo de software matemático ya elaborado, para ser empleado tanto por profesores como por alumnos. En este pizarrón, profesores y alumnos podrían escribir, dibujar, hacer cálculos, etc., tal como se realiza en una clase normal en el aula, además de que se tienen las ventajas que ofrece la computadora, como las de exhibir y ejemplificar conceptos, o también evitar cálculos tediosos que en ocasiones hacen que se pierda el enfoque del tema, así como también permite la posibilidad de hacer y mostrar mejores gráficas.

2). *Lecciones Tutoriales.* Desde el punto de vista de Educación Matemática, las lecciones tutoriales deben estar fundamentadas con elementos teóricos y didácticos y, preferentemente presentados en forma atractiva para el usuario, ya que en el mercado abundan tutoriales muy veloces y espectaculares, pero mecanizados y restringidos en cuanto a objetivos educativos.

3). *Simulación.* Produciendo un medio ambiente en el que el estudiante tenga las posibilidades de reflexionar sobre sus ideas intuitivas y obtenga conclusiones que se sintetizen en un concepto formal al tratar de experimentar un fenómeno de la vida real, es algo trascendente para un estudiante. Esto se puede lograr en poco tiempo con la simulación de un fenómeno en la computadora, ya que de lo contrario, si se tratará de realizar los experimentos en forma real en el aula, se presentarían obstáculos como por ejemplo, que no exista espacio

*Coordinador del PNFAPM y del Area Microcomputadoras y Educación suficiente, o que no se disponga de todos los materiales, o requiera de mucho tiempo estudiar el fenómeno, o que los experimentos impliquen fuertes gastos.

4). *Evaluación.* Considerando únicamente la evaluación formativa y utilizando software educativo que permita medir y registrar los procesos desarrollados por los alumnos, es otra forma de uso de la computadora que está al alcance de los profesores de matemáticas para poder evaluar a sus alumnos, y así mismo el alumno puede verificar su grado de avance en un tema dado.

5) *El uso de un lenguaje para el desarrollo de conceptos.* Considerando que existe una gran variedad de lenguajes de programación, es conveniente seleccionar el que se considere más adecuado y de dominio del profesor, para encargar a sus estudiantes la realización de actividades matemáticas, como son el desarrollo de un tema con el cual el programador adquiera el concepto del tema tratado mediante su programación.

6). *Software diseñado con propósitos no educativos que es útil en Educación Matemática.* En el mercado existen infinidad de paquetes de software que podrían tener implicaciones de uso en educación, sin embargo, se hace referencia sólo a las hojas electrónicas, tales como Lotus 1-2-3, Excel, Multiplan o VisiCalc, considerando que el uso de software de este tipo puede favorecer el desarrollo de conceptos algebraicos.

Teniendo como referencia estas propuestas, se puede observar que no todas ellas están sustentadas en el desarrollo e investigación del uso de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. También se puede observar que no existe una continuidad en relación al desarrollo de las primeras investigaciones que se consideraban como básicas o fundamentales, si no que más bien se podrían considerar como trabajos independientes y por consiguiente con un enfoque diferente, pero que sin embargo en su conjunto se podrían considerar como una buena clasificación de los usos de la computadora en la educación matemática. Con lo que respecta a los trabajos de C. Solomon y F. Hitt y la bibliografía que ellos citan, se pueden encontrar aplicaciones directas en relación al uso de la computadora en la educación matemática y confirmar lo benéfico que resulta la computadora para este propósito. Los otros enfoques citados se quedan cortos en su visión para explotar el amplio potencial de la computadora como herramienta para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, además de que no dan más características de como se podría implementar y aplicar estos usos, tampoco cuestionan toda la complejidad que involucra el considerar a la computadora en la educación. Es por ello la necesidad de llevar a cabo desarrollo e investigación en forma sistemática y continua para aplicar la computadora en la Educación Matemática. Esta investigación debe involucrar la formación de profesores quienes son el elemento indispensable para poner en práctica estos proyectos, además claro, de contar con el equipo de cómputo necesario.

Así pues, ampliando y estructurando los diferentes enfoques para explotar aún más los usos de la computadora en la educación matemática, y teniendo presente que:

> *La educación en matemáticas auxiliada por la computadora son cualesquiera aplicaciones o actividades orientadas hacia las metas y funciones de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que hacen que el estudiante o profesor tengan contacto directo con la computadora.*

A continuación se expone una clasificación más amplia en la que se cubren los enfoques de los autores citados. Esta clasificación es la que, para los propósitos de esta *Tesis*, mejor describe el potencial de la computadora en la educación matemática y es la que refiere *Larry L. Hatfield* de la Universidad de Georgia, clasificación que se interpretará y darán características de lo que implica cada uso.

Hatfield cita:

"... we shall divide the domain of mathematics instructional computing into three broad categories: *students programming, computer based instruction, and teacher utilities.*"*

Traducción:

"... debemos dividir el dominio de la educación matemática por computadora en tres amplias categorias: *programación de la computadora por el estudiante, enseñanza de las matemáticas a través de la computadora y la computadora como una herramienta de apoyo para el profesor.*"

PROGRAMACION DE LA COMPUTADORA POR EL ESTUDIANTE

Al aplicar este uso el estudiante tiene que construir sus propios programas para resolver problemas matemáticos. Al hacerlos ocurren experiencias de aprendizaje más efectivas, ya que en el proceso de razonamiento para realizar un programa, el estudiante mediante un procedimiento tiene que construirlo (tal vez a partir de una idea intuitiva), poner a prueba esta primera versión, realizar todas las correcciones necesarias (en las que puede efectuar una investigación más profunda sobre el tema) y al perfeccionar el programa para presentarlo, la comprensión del concepto matemático es más profunda, se podría decir que en parte redescubre la solución a el problema. Si el estudiante programa efectivamente, desarrolla procesos de análisis, síntesis, distinción, generalización, justificación, inferenciación y estructuración, habilidades necesarias que hay que desarrollar para tener una actitud más positiva hacia las matemáticas.

ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS A TRAVES DE LA COMPUTADORA

Este uso consiste básicamente en emplear diferentes tipos de programas ya elaborados con fines educativos, y en particular en

*Hatfield, L., Toward Comprensive Instructional Computing in Mathematics. Computers in Mathematics Education. 1984 Yearbook. USA. 1985. p. 1.

matemáticas. La ejecución del programa es por parte de los estudiantes y el profesor. Por lo general en este tipo de uso al estudiante no le interesa lo referente al proceso de elaboración del programa, sino más bien le interesa la salida producida por el programa.

Hatfield cita:"... Within this category we include eight types of uses: practicing, tutoring, simulating, gaming, demonstrating, testing, informing, and communicating."*

Traducción:

"... Dentro de esta categoría incluiremos ocho tipos de uso: programas para ejercitación y/o práctica, tutoriales, simuladores, para juegos, demostrativos, para evaluar, con bancos de información, para comunicar."

Programas para ejercitación y/o práctica. Este uso consiste en involucrar al estudiante en programas de computadora para hacer actividades de repaso, para mejorar el aprendizaje de conocimientos matemáticos ya transmitidos, como por ejemplo operaciones con números enteros, secuencias numéricas, factorización, graficación de funciones, etc. Programas que usualmente están diseñados para hacer un examen diagnóstico al estudiante, y sobre la base de los resultados proveer el nivel apropiado de práctica. El propio programa lleva el registro de los resultados, los cuales son resumidos, almacenados y puestos a disposición del estudiante o profesor.

Programas tutoriales. Las características que deben reunir este tipo de programas son difíciles de alcanzar. La dificultad consiste en que estos programas deben simular a un buen y experimentado profesor de matemáticas, sensible y estimulante, que en su salón de clases desarrolla una nueva habilidad o concepto en sus estudiantes mediante actividades como: introducción o presentación general de la sesión, explicaciones con ejemplos y características de las ideas a ser enseñadas, preguntas para verificar la comprensión de las ideas en diferentes puntos del desarrollo, diferentes métodos didácticos a

*Hatfield, L. op. cit. p. 4

seguir dependiendo de las respuestas del estudiante, retroalimentación correctiva y reforzamiento adecuado a las respuestas y, un registro de lo que ha hecho y de cómo lo ha hecho el estudiante durante la sesión. En la realidad los programas tutoriales se quedan considerablemente cortos por no reunir todas las características deseadas, y por lo general son pequeños segmentos de enseñanza diseñados en cuidadosa secuencia de pasos. Algunos tópicos de matemáticas que tienen un programa tutorial son: solución de ecuaciones, razones y proporciones, áreas y perímetros.

Programas simuladores. Estos programas son escritos para simular cualquier situación real. En matemáticas un programa de computadora puede simular fenómenos aleatorios, como el lanzar cientos de veces una moneda; probar un modelo matemático con aplicación a cualquier ciencia en relación al tema matemático que se está estudiando, por ejemplo un experimento de laboratorio que involucre genética o ecuaciones químicas, experimentos que pueden durar mucho tiempo, o ser muy peligrosos, o demasiado complejos y se caiga en especulaciones difíciles de justificar, o muy costosos para una experimentación real en el salón de clases. Con los modelos matemáticos es posible manipular interactivamente varios parámetros o variables con el objeto de examinar los resultados de un experimento según se elijan o generen algunos factores al azar.

Programas para jugar. El uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas está entre las aplicaciones más estimulantes para el estudiante. Abundan los juegos electrónicos, que generalmente son recreativos, y algunos pueden presentar claramente definidos objetivos educacionales, ofrecen situaciones de competencia en la cual una o más personas pueden jugar, llevar su puntuación y ganar o perder. El profesor de matemáticas debe seleccionar aquellos juegos que consistan en actividades que requieran lógica o estrategias, como parte integrante del desarrollo del pensamiento matemático.

Programas demostrativos. El profesor de matemáticas usando un programa de computadora lo puede integrar al desarrollo de su clase, con el propósito de mostrar ideas o procedimientos. Las ideas se pueden generalizar apoyándose en ejemplos gráficos o líneas de texto que citen un concepto o ejemplos del tema; además de que siendo la computadora una herramienta de cálculo poderosa, eficiente y rápida, los procedimientos que requieran largos y tediosos cálculos en los que interesa un simple resultado, estos cálculos pueden ser almacenados en la memoria, desplegarlos en la pantalla sistemáticamente y repetirlos o recuperarlos posteriormente, si hubiese alguna duda en el estudiante. Por ejemplo, en álgebra la computadora puede evaluar un sistema de ecuaciones, graficarlo en pantalla, y dar la solución, todo en cuestión de segundos.

Programas para evaluar. En las evaluaciones mediante la computadora el estudiante interactua con un programa que le presenta reactivos, acepta sus respuestas, se las califica y registra esta puntuación. Si es un programa simple presenta un sólo tipo de examen, pero si el profesor lo requiere existen versiones más complejas para generar diferentes tipos de exámenes a partir de un archivo de reactivos con que cuente el programa.

Programas con bancos de información. El estudiante de matemáticas podría aprender a buscar información interactuando con un sistema de almacenamiento, con el propósito de obtener los datos necesarios para resolver algún problema matemático. La información que puede obtener podría ser sobre cuadros estadísticos, gráficas, modelos dinámicos, aplicaciones de las matemáticas a otras actividades y descripciones históricas.

Programas para comunicar. Con este tipo de uso, se pretendería que el estudiante de matemáticas aprenda a manejar un programa procesador de texto, con el propósito de que desarrolle el hábito de la redacción y pueda presentar reportes de algún resultado o investigación matemática para ser divulgados más fácilmente en el salón de clases.

Finalmente, la tercera categoría definida por Hatfield como "*Teacher Utilities*" (*La computadora como una herramienta de apoyo para el profesor*) la explica muy brevemente de la siguiente manera:

> "... Within this we include six types of uses: generating tests, generating curriculum materials, scoring and analyzing tests, grading, managing, and communicating. In general, these applications can enhance aspects of a teacher's responsibilities in planning, managing, evaluating, and reporting on instruction an learning."*
>
> Traducción:
>
> "... Dentro de esta categoría incluiremos seis tipos de usos: generación de exámenes, producción de material didáctico, evaluación y análisis de datos, clasificación, administración y comunicaciones. Estas aplicaciones pueden mejorar varios aspectos de las responsabilidades del profesor en la planeación, administración, evaluación y elaboración de reportes sobre la instrucción y el aprendizaje".

Se puede interpretar y dar características en esta tercera categoría como:

LA COMPUTADORA COMO UNA HERRAMIENTA DE APOYO PARA EL PROFESOR

En este tipo de uso, el profesor puede ejecutar programas que le auxilien simulando a un "asistente electrónico". Bajo la dirección del profesor los programas pueden realizar actividades como:

Generar exámenes. Es posible producir diferentes tipos de examen modificando los datos sin variar demasiado la estructura general del examen. Esto es muy positivo al evaluar a un grupo de estudiantes.

Producir material didáctico. Existen varios paquetes que permiten manejar dibujos, gráficas, diseñar párrafos de texto con diferentes formas y tamaños de letras, etc, que pueden ser

*Hatfield, L. op. cit. p. 6

muy atractivos para el alumno. El profesor puede diseñar fácilmente este tipo de material con la ayuda de estos programas, almacenarlo e irlo modificando si así lo requiere, etc.

Realizar evaluaciones. Considerando como ideal la educación individualizada, entonces el hecho de evaluar a un alumno individualmente resultaría una tarea monumental para un profesor haciéndolo por el método tradicional que consistiría en identificar características individuales de su alumno para proporcionarle material apropiado a sus necesidades si los resultados en una evaluación general aplicada al grupo no fueron los óptimos para el alumno. El alumno tendría que hacer más ejercicios sobre el tema, o el profesor tendría que buscar otra estrategia de enseñanza si el alumno no ha comprendido el concepto. En este sentido el profesor podría emplear un programa que le ayude a evaluar al alumno lo mejor posible.

Analizar datos. Alimentando programas con los resultados que obtengan sus alumnos en diferentes actividades, el profesor podrá tener un mejor seguimiento del aprovechamiento de cada alumno mediante el análisis de los datos introducidos.

Clasificar resultados. Con el análisis de datos anterior el profesor podrá detectar si el grupo no entendió algún tema, o si es posible formar equipos de trabajo con alumnos que se complementen unos con otros.

Actividades administrativas. Existen programas que le pueden ayudar a tener un mejor control de asistencias, participación, o cualquier otra actividad administrativa en relación a sus alumnos.

Comunicación de avance. El profesor podría mejorar la presentación de los reportes del aprovechamiento de sus alumnos para informar la situación del alumno a los directivos y a sus padres, con sólo elaborar una sola vez el archivo de ese alumno e irlo alimentando, si emplea programas de computadora para esto.

En conclusión, las tareas fuera de clase que tiene que realizar un profesor como las de elaborar actividades de enseñanza previas a su clase, elaborar exámenes, analizar respuestas, comparar el progreso del estudiante, registrar información, preparar reportes, etc, etc, con la computadora como una mano extra el profesor tendría tiempo para pensar y enseñar.

Se considera que con estas descripciones es posible tener una visión más amplia sobre las aplicaciones que tiene la computadora en la educación matemática y que dichas aplicaciones tocan muchas ramas de la investigación que se puede llevar a cabo en la educación matemática. Asimismo, esto permite reflexionar sobre el papel que desempeña el profesor de matemáticas como elemento esencial en la toma de decisiones en la enseñanza de las matemáticas auxiliándose de la computadora.

ALGUNOS ERRORES COMUNES QUE SE COMETEN AL UTILIZAR LA COMPUTADORA

Se observa el rico y variado uso que se le puede dar a la computadora en materia educativa. Sin embargo, si no se tiene un plan de cómo investigar y desarrollar los usos de la computadora en la educación matemática se pueden cometer fallas como:

- Adquirir y usar las computadoras simplemente por estar a la "moda" dentro de un contexto computacional. No haciendo ningún análisis del impacto potencial que tiene la tecnología de las computadoras en la educación matemática.

- No considerar los nuevos papeles que adquieren el profesor y el estudiante de matemáticas. Ya que frecuentemente los profesores son únicamente informadores y los estudiantes receptores. Los profesores para lograr estimular al estudiante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la computadora tienen que elaborar forzosamente actividades y tareas encaminadas para este propósito, para que exista una interrelación de alumno, profesor y computadora.

- Utilizar por lo general la computadora en un solo tipo de uso no identificando a la computadora como un medio diferente a otros medios educativos, utilizarla para simular otros medios como televisor, textos, vídeos, etc.

  Como por ejemplo, simplemente para que el alumno practique un tema en particular, o un programa con el que se le pueda evaluar muy someramente, o ponerlo a programar por programar. Además de que por lo general se usan situaciones matemáticas simplemente para aprender un lenguaje de programación o conceptos de computación, o exhibir el potencial de la computadora, todo esto no contribuye a los objetivos de la enseñanza de la matemática, ni enfatiza su currícula.

- Los profesores de matemáticas han adoptado ampliamente la programación de la computadora por el estudiante, pero en muchas ocasiones de manera errónea como las siguientes:

  a) Dentro de la currícula de matemáticas, se imparte el curso de la computación pero con el objetivo de que los alumnos aprendan a programar y no se planean actividades en las que, lo principal sea el aprendizaje de las matemáticas, además de que se disminuye el tiempo destinado a desarrollar la currícula de la materia de matemáticas.

  b) Introducción de la computadora en los últimos grados del nivel escolar que tenga la escuela y frecuentemente con prerequisitos en alguna materia lo que ocasiona que se forme para una élite intelectual y restringiendo los usos de la computadora.

  c) Si se considera que el curso de matemáticas en el que se involucra la computadora debe ser transmitido por especialistas en computación y/o matemáticas, se puede fomentar la actitud de que no todos tienen la capacidad de involucrarse en esta actividad, y como una consecuencia directa no se aplica el potencial de la computadora en todos los niveles educativos.

d) Implementar la programación de computadoras como un fin, más que como un medio para aprender matemática, entonces la computadora tendrá poco impacto en los estudiantes para aplicarla como ayuda en la resolución de problemas matemáticos.

- Si el profesor de matemáticas no analiza cuidadosamente las bases pedagógicas y psicológicas que debe considerar en la realización de tareas en las que involucre a la computadora para enseñar matemáticas, no tan fácil logrará estimular y guiar a sus alumnos para que ellos construyan ideas y procesos matemáticos.

- Si no se planean y diseñan las actividades del uso de la computadora para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de ejecutarlos en el salón de clases, se podría consumir demasiado tiempo en estarlos improvisando en el momento de dar la clase y la exposición se podría reducir a presentar pobres conceptualizaciones y procedimientos matemáticos.

Aislar los usos de la computadora como una alternativa de solución diferente a todos los tipos de investigación que en educación matemática se pueden llevar a cabo, sería el mayor error que se pueda cometer, ya que la investigación de los usos de la computadora en la educación matemática toca varias ramas de la investigación en relación al desarrollo cognitivo, a la currícula de las matemáticas, a la estructura de la matemática, a las aplicaciones de la matemática, a la formación de profesores, a la práctica docente y a el medio ambiente.

LIMITACIONES DE LA COMPUTADORA

A pesar de su capacidad y lo avanzado de su tecnología, hay ciertas cosas que la computadora no es y no podrá ser, por ejemplo:

La computadora *no es una panacea* que curará todos los males de la educación matemática. Existe el peligro de que algunos promuevan la visión de que con la computadora se puede transmitir todo una currícula completa de matemáticas, cosa que no es posible; no se puede forzar uno o muchos usos de la computadora en temas donde no son apropiados.

La computadora *no es una ayuda inmediata*, las actividades para su uso deben ser planeadas. No se puede pensar que con sólo verla se puede improvisar algo con ella para remediar una situación problemática que tenga un profesor frente a sus alumnos. Usada a su pleno potencial la computadora puede llegar a ser parte integral de la currícula de matemáticas en cada uno de los diferentes niveles escolares. La computadora se debe considerar como una herramienta y como un medio para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y no como algo que se improvisa y adiciona a la currícula existente.

La computadora *no reemplazará al buen profesor*, sino que realzará su labor profesional. La computadora nunca hará nada por sí misma, pues es una pieza inanimada de hardware, hasta que es programada y controlada por el hombre.

Considerando que el acceso a alta tecnología computacional en las que su precisión de aproximación es hasta mucho más de cien dígitos y la fineza de su graficación visual por pixeles son increíbles, ésta no es alcanzable por sus altos costos para las grandes masas del sistema escolar. La tecnología de las computadoras con las que actualmente se trabaja en la mayoría de las escuelas tiene limitaciones tecnológicas como por ejemplo, la computadora es una compleja máquina sumadora que maneja sólo un número finito de dígitos y que aún no puede manipular la continuidad de los números racionales y mucho menos los complementos de los números reales. Teniendo en cuenta que las magnitudes discretas son una parte importante, rica y útil de las matemáticas, pero que no son la totalidad, sino que las magnitudes continuas forman la otra parte. Una computadora puede aproximar una función continua con un alto grado de exactitud al estarla evaluando pero la imagen que proporciona es discreta y la gráfica puede ser engañosa, es necesaria la presencia del profesor para que interprete y transmita este conocimiento esencial a sus estudiantes. Por otra parte existe software también increíble para manejar la continuidad de las funciones, pero que por las limitaciones de la capacidad de memoria de la computadora empleada en la mayoría de las escuelas no es posible la instalación de este tipo de software. En suma, va a depender mucho de la tecnología y software que se tenga disponible para manejar un conocimiento específico de la currícula de matemáticas.

El análisis de errores, aspecto relevante en la investigación en educación matemática, tiene que ver mucho con el desarrollo de la Inteligencia Artificial, pero que aún está muy lejos de su dominio.

Además, se puede decir que actualmente existe una gran pobreza de cultura en términos de como usar la computadora en el salón de clases para los objetivos y metas de la educación, por un gran número de profesores. Es evidente la necesidad de realizar investigación para buscar opciones inteligentes de ¿dónde y cómo usar? la computadora en el campo educativo, así también la necesidad de la formación de profesores para estos fines.

Buscando opciones inteligentes de donde y como usar la computadora en la educación matemática, se pueden señalar las siguientes estrategias:

I. Se podrían formular planes de acción en los que participen los estudiantes de carreras universitarias. Por ejemplo, los *universitarios* *de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación* podrían involucrarse en los usos de la computadora, como por ejemplo, analizando el software y viendo que perspectivas de implementación podría tener para una determinada materia; diseño y desarrollo de lecciones y/o programas tutoriales para una determinada materia y a un determinado nivel. El universitario de sus experiencias directas en la programación podría indicar el concepto matemático que desarrolló o algunas características de otros beneficios que le proporcionó el hecho de programar, para que sean registrados los datos y se analicen por un investigador. También el estudiante universitario podría proporcionar ideas en relación a que tipo de lenguaje para él presenta ventajas o desventajas sobre otros, comunicarle a el investigador para que éste con la información de experiencias directas y su evaluación pueda tomar decisiones. El estudiante universitario podría también señalar, si desde su punto de vista, el profesor que le imparte materias de matemáticas logra motivarlo y que él se interese aún más por seguir estudiando la materia, capte mejor el concepto y desarrolle nuevas habilidades cuando el profesor emplea como un medio a la computadora, o si no emplea este recurso tecnológico para ello.

II. Considerar las siguientes reflexiones, que se consideran necesarias para un buen acercamiento a los múltiples usos de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

- Suponiendo que ya se hizo un análisis detallado en cuanto a las metas educativas, los objetivos y contenidos de la materia y que se han tomado cuidadosas decisiones de los conocimientos que se desean transmitir a los estudiantes (conceptos y procesos matemáticos), se puede entonces considerar el realizar una amplia planeación e implementación de aplicaciones efectivas de la computadora en la currícula de las matemáticas.

- Considerar todas las formas conocidas en las que una computadora puede ser usada para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: *programación de la computadora por el estudiante, ocho tipos de enseñanza de las matemáticas a través* *de la computadora y seis tipos de uso de la computadora como una herramienta de apoyo para el profesor.* Teniendo en cuenta estos usos, se tendría que identificar cuál(es) de estos usos es(son) más efectivo(s) para un tema en particular, o si es mejor otro tipo de ayuda para ser adaptado dentro de los planes específicos de la educación matemática.

- La formación de nuevos profesores necesariamente debe incluir el uso efectivo de la computadora en la educación matemática, asimismo los profesores en servicio tendrían que ser capacitados. En ambos casos se pretendería que el profesor viviera la experiencia de la educación matemática como estudiante, lo cual implica que el profesor estudiará matemáticas y que en sus propias construcciones de conocimiento involucre varios tipos de uso de la computadora en forma práctica.

  El profesor debe explorar nuevos conceptos y generalizaciones, resolver problemas significativos, practicar nuevas habilidades, comprender la influencia potencial de la computadora en la enseñanza. El profesor debe experimentar el aprendizaje de la programación para resolver problemas matemáticos y analizar el problema para diseñar el programa adecuado. El profesor debe atestiguar que el formador de profesores emplea programas de computadora demostrativos, simuladores, juegos, de evaluación, etc. De manera que el profesor no sólo llegará a conocer la enseñanza por computadora desde la perspectiva de un estudiante, sino que será capaz de reflexionar sobre la naturaleza del ambiente de enseñanza creado por su formador, en el cual efectivamente lograba sus objetivos o en que partes será necesario mejorar.

- El profesor debe realizar un programa de actividades donde se contemple alcanzar determinadas metas, a corto y largo plazo, donde se consideren los recursos de computación disponibles en el salón de clases, todo en términos de sus propios compromisos.

- Establecer prioridades en términos de la visión y metas que se tengan de los usos de la computadora en la educación matemática. Qué es posible razonablemente intentar primero, enfocarse sobre ciertos tipos de uso de la computadora para desarrollarlos favorablemente para uno o dos temas de la currícula de matemáticas, o enfocarse sobre el desarrollo de un modo de uso de la computadora para varios temas.

- Analizar los planes maduros de la currícula de la matemática para especificar el acercamiento en el que se usará la computadora. Decidir sobre las metas y contenidos de la currícula. Solamente después de que estas decisiones han sido hechas deben formularse las decisiones para el uso de la computadora.

- Escribir una lista detallada describiendo los programas de computadora que se requieran durante la enseñanza de una unidad de la currícula de matemáticas. Los programas seleccionados se pueden adquirir o ser diseñados por el profesor.

- Planear en que momento de la clase se involucrará la computadora.

- Hacer una autoevaluación y reflexionar sobre los logros alcanzados, para ir formando un equipo de trabajo con otros profesores y se pueda ir formando una estructura con el trabajo investigado que efectivamente pueda propiciar un cambio sustancial para mejorar la calidad de la educación matemática.

Considerando que el desarrollo de software educativo (***programas tutoriales***), representa el mayor reto en su elaboración, por las características que debe contemplar, como son implantar estrategias de tipo educativo, considerar los estándares desde el punto de vista técnico de las computadoras y recursos técnicos de programación con los que se cuente. Pero sin duda alguna, es el que puede brindar una mayor facilidad de interacción del usuario con la computadora, ya que asume que dicho usuario no requiere experiencia previa en programación, ni ningún otro tipo de alfabetización en computación. Además se podrían tener experiencias de acercamiento más instantáneas para profesores y alumnos, para que posteriormente ellos se involucren en otras formas de uso.

Es mi interés involucrarme principalmente en este tipo de proyecto de investigación y para profundizar un poco más en este tema del desarrollo de programas tutoriales, se presenta la siguiente cita de un artículo titulado "*De programas generativos a tutores inteligentes*", presentado en el Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, México, 1990.

> "(...) La característica principal de los programas generativos es que los problemas o ejercicios propuestos por la micro (microcomputadora) al alumno en cada sesión son generados o elegidos mediante alguna técnica preestablecida, en forma tal que un mismo alumno puede volver a trabajar con el mismo programa sin que le sean propuestos problemas con los mismos datos o parámetros y, en general, a distintos alumnos se les proponen problemas con datos o parámetros diferentes. Como tutores estos programas utilizan el método socrático de conducir a la comprensión de conceptos a través de preguntas y problemas, aunque su uso principal es reforzamiento y ejercitación de conceptos cuya teoría no esta contenida en el paquete.
>
> Este es solo el punto de partida y aunque ya marca una diferencia sensible de uso entre otros medios y la micro, sería deseable que los programas tuvieran algunas características técnicas mínimas adicionales como:
>
> a) El programa debe ser lo suficientemente robusto (computacionalmente hablando) para que el alumno-usuario no enfrente situaciones como terminación abrupta del programa o que éste realice acciones que no fueron previstas. Lo anterior con el fin de no distraer al alumno con situaciones que puedan influir en su confianza en el medio computacional.
>
> b) Se deben aprovechar las técnicas audiovisuales, de enseñanza programada y todas aquellas técnicas para la presentación de imágenes y textos, las cuales han probado su utilidad principalmente en cuanto a la dosificación de la información en pantalla, señalamiento de los aspectos importantes, y mantenimiento de la atención del alumno. Para lo cual hay que hacer buen uso de los aspectos dinámicos e interactivos que la micro ofrece.

> Los PGEM (Programas Generativos de apoyo a la Enseñanza de las Matemáticas) con estas características mínimas han mostrado ser útiles principalmente en la ejercitación de habilidades cuya parte conceptual se ha adquirido por medios estandard ... Esta ejercitación libera al profesor de trabajo rutinario que significa plantear y revisar problemas que cubran las diversas situaciones contenidas en un concepto. El alumno puede probar su comprensión del tema tratado en el programa y, dependiendo de "la inteligencia" del programa, puede corregir errores o malas interpretaciones de los conceptos.
>
> Potencialmente, la micro tiene la posibilidad de retroalimentar e interactuar con el alumno a partir de las respuestas que éste da a las preguntas que la micro plantea y este es el elemento básico que nos puede permitir distinguir al software educativo de otros medios educativos. Realizar esta posibilidad parece conducir inminentemente hacia las fronteras actuales de la investigación en computación: la Inteligencia Artificial, los Sistemas Expertos, Manejadores de Bases de Conocimiento, interacción máquina-humano en lenguaje natural, etc."*

Los investigadores en esta área, consideran que existe una amplia brecha entre las transcripciones de *textos programados* que abundan en los países de habla inglesa y lo que se conoce còmo *Tutores Inteligentes o Sistemas Expertos de Enseñanza*, y que por lo menos en México se requiere realizar PGEM que abarquen temas de la currícula de matemáticas en los diferentes niveles educativos. Para esto se requiere llevar a cabo Investigación en Educación Matemática.

*Mejía V., Hugo, "De programas generativos a tutores inteligentes", p. 111-118 En: Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, PNFAPM, Méx., 1991."

CONCLUSIONES

1). Actualmente, el campo de las matemáticas es tan extenso debido a los conocimientos que se han ido acumulando a lo largo de la historia de la humanidad que sería imposible que una persona dominara todas las matemáticas, pero si es factible que domine una o más áreas de las matemáticas existentes mediante su estudio adecuado.

2). También, es innegable la enorme influencia de las matemáticas en el progreso de la ciencia y la tecnología de una sociedad, ya que constituyen una base sólida en las que se apoyan éstas para su desarrollo. Las diferentes ciencias y tecnologías requieren la utilización de determinados conocimientos matemáticos, por ejemplo la física requiere de matemática exacta, la economía, sociología y psicología requieren de la estadística y la teoría de la probabilidad, etc, para lo cual se necesita que se realice investigación. Esta investigación es necesaria para proveer a las nuevas generaciones de estudiantes en su formación matemática de habilidades y conocimientos adecuados, para que se enfrenten a algunos problemas prácticos de las ciencias y tecnologías.

3). Se puede entonces considerar que el estudiante de matemáticas podría desarrollarse profesionalmente en las siguientes actividades:

- Si es *conocedor de un amplio rango de conocimientos matemáticos* podría aplicarlos a situaciones reales. A este respecto debe desarrollar la habilidad de encontrar los modelos matemáticos más óptimos que resuelvan la situación científica, tecnológica, económica, política, social o cultural que se le presente. El matemático debe estudiar la situación, darle forma matemática mediante un modelo que mejor se adapte a ella, pero en ocasiones no es tan fácil encontrar dicho modelo, y aplicar la matemática adecuada al modelo para satisfacer con éxito dicha situación.

Además, el matemático, bien podría compartir este trabajo desarrollado en relación a la aplicación de las matemáticas a la situación real, mediante la transferencia de este conocimiento y si le es posible sintetizarlo para que sea accesible a un mayor público, para poder conservar y utilizar este conocimiento.

También es necesario que los conocedores de matemáticas traduzcan conocimientos aún no conocidos por una gran mayoría, a estructuras más simples para su mejor entendimiento por nuevos estudiantes de matemáticas, y se pueda crear un mayor interés por seguir estudiando y aplicando la matemática a niveles cada vez mayores.

- Una segunda actividad para el estudiante de matemáticas es ser un *investigador y desarrollar nueva matemática.* Pero hay que estar conscientes de lo que actualmente implica esto, porque debe ser realmente algo nuevo a la actual estructura matemática. El investigador requiere conocer todas las revistas especializadas en una o más ramas de las matemáticas y asistir a Congresos Internacionales sobre el desarrollo de las matemáticas, para comunicarse con otros matemáticos y actualizarse con las innovaciones que se hayan hecho en matemáticas, esto con el propósito de que su trabajo pueda considerarse original.

- Una tercera actividad del matemático profesional aquí considerada, es una de las más nobles de las tareas, perseguir —*el arte de la enseñanza*— con el cual se podrá transmitir toda la belleza que encierran las matemáticas a nuevas generaciones de niños y jóvenes, para despertar en algunos de ellos la motivación e interés por convertirse en matemáticos o encaminarse hacia el campo científico o tecnológico tan necesarios en nuestra sociedad.

Así pues, considerando que la labor del profesor de matemáticas es trascendente para cualquier sociedad, porque debe guiar y orientar el aprendizaje de los estudiantes, para que éstos puedan elaborar técnicas generales para actuar ante situaciones de problema, así como desarrollar estrategias mentales de tipo lógico que les permitan aproximarse a campos amplios del pensamiento y de la vida.

Para lograr los objetivos de los procesos de enseñanza y aprendizaje, el profesor debe coordinar los aspectos formativos y la aplicabilidad de los conocimientos matemáticos que desee transmitir en su clase. Para ello debe realizar actividades como preparar una introducción general de la sesión, explicaciones con ejemplos y características de las ideas a ser enseñadas, preguntas para verificar la comprensión de las ideas en diferentes puntos del desarrollo de la sesión, diferentes métodos didácticos a seguir dependiendo de las respuestas de los estudiantes, retroalimentación correctiva y reforzamiento adecuado a las respuestas y, un registro de lo que ha hecho y de cómo lo ha hecho el estudiante durante la sesión. Aún se pretendería que el profesor pudiera identificar las características individuales de sus alumnos, para proporcionarles el material apropiado a sus necesidades y se obtuviera como resultado evaluaciones favorables.

Obviamente para que el profesor alcance estas metas, es preciso que se le den estímulos de toda índole, tanto económicos como motivacionales, para fomentar su amor y pueda entregarse por completo al arte de la enseñanza.

El profesor tendría entonces que involucrarse en una constante actualización académica, una participación más dinámica en el proceso de cambio del sistema educativo, participar activamente en los proyectos de investigación dando sus puntos de vista, investigando, poniendo a prueba los resultados de la investigación, etc.

Todo lo anterior sería algo ideal, pero la realidad es que es demasiado complejo por la *actual situación* de la *Educación Matemática*, en la que podemos encontrar diversos problemas, en todos los niveles del Sistema Educativo Nacional, como por ejemplo deficientes métodos de enseñanza por una gran mayoría de los profesores, malos hábitos de estudio por parte de los estudiantes, poco tiempo de los profesores para involucrarse en proyectos de investigación, un buen porcentaje de profesores no cuentan con la información resultado de investigaciones en educación matemática, poco interés, desagrado, desmotivación de los estudiantes hacia las matemáticas no encontrando motivo alguno para estudiarlas y aplicarlas en su realidad, promedios bajos en la materia de matemáticas o alguna de sus ramas, una notoria tendencia hacia la reducción en la matrícula, en ciencias exactas y técnicas, etc, etc.

Estos problemas y muchos más, requieren de *Investigación en Educación Matemática*, en la que se involucren los investigadores, profesores, autoridades académicas y políticas, el sector industrial, centros de investigación, estudiantes, en fin todos los sectores de una sociedad, cada uno en su papel correspondiente, para ir formando una gran estructura que a nivel nacional incida en el mejoramiento progresivo de la calidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En conclusión la *Investigación en Educación Matemática se convierte en una cuarta actividad para el Matemático Profesional.*

4). Para el área de Investigación propuesta sobre el *Uso de la Computadora como apoyo a la Educación Matemática*, área en la cual se podría decir que hay mucho por hacer, ya que es una de las más recientes a nivel Institucional y requiere ser explorada, experimentada y desarrollada a gran escala, por el actual impacto de la tecnología de la computadora en la educación. También considerando que cada vez más escuelas tengan disponible equipo de cómputo, el reto y oportunidad es lograr aprovechar al máximo el potencial de la computadora para los objetivos y metas de la currícula de las matemáticas.

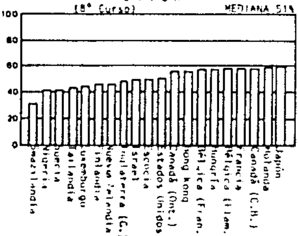
Este tipo de actividad queda inscrita en lo que ya se mencionó anteriormente como parte integral de la Investigación en Educación Matemática, las áreas de investigación mencionadas fueron: *el desarrollo cognitivo, el currículo, estructura de la matemática, aplicaciones de la matemática, formación de profesores, otros materiales de apoyo, práctica docente y medio ambiente*, a las cuales se debe integrar los *usos de la computadora* para formar parte del contenido curricular de las matemáticas.

5). Un objetivo principal en la presentación de este trabajo, es dar a conocer parte de lo que en Educación Matemática se está realizando, así como la trascendencia que tiene el Estudio adecuado de la Ciencia Matemática, para el desarrollo de otras Ciencias y Técnicas necesarias en una Sociedad. Es mi mayor deseo que los Profesores de Matemáticas puedan involucrarse en la Investigación en Educación Matemática.

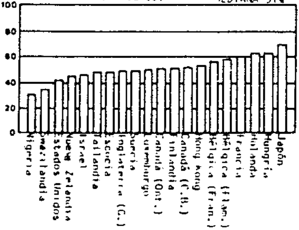
Anexos

SEGUNDO ESTUDIO INTERNACIONAL DE MATEMATICAS, RESULTADOS PRESENTADOS EN ENERO DE 1990, EN EL SIMPOSIO TITULADO "COMPARACIONES INTERNACIONALES DE LA EDUCACION MATEMATICA: IMPLICACIONES PARA UNA POLITICA DE LOS ESTADOS UNIDOS."

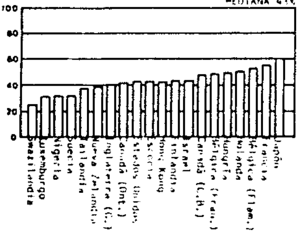
A R I T M E T I C A
(8° Curso) MEDIANA 51%



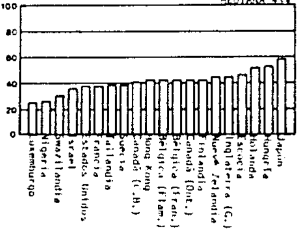
M E D I D A S
(8° Curso) MEDIANA 51%



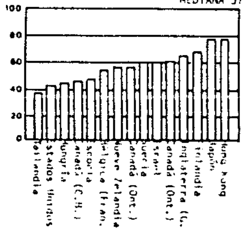
A L G E B R A
(8° Curso) MEDIANA 43%



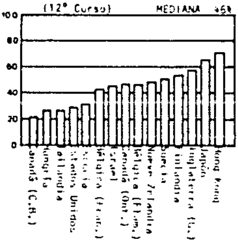
G E O M E T R I A
(8° Curso) MEDIANA 43%

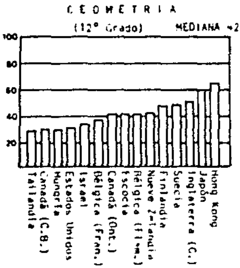


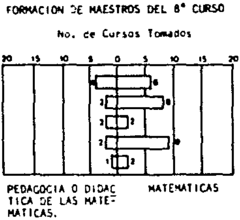
A L G E B R A
(12° Curso) MEDIANA 57%



T E O R I A DE F U N C I O N E S Y C A L C U L O
(12° Curso) MEDIANA 46%

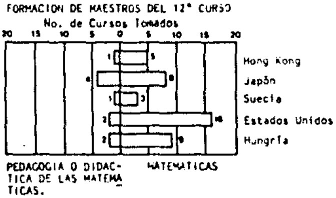


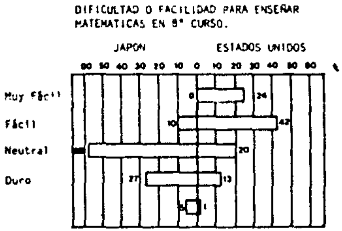




PROMEDIOS DE LA REPUBLICA DOMINICANA, APLICANDO INDEPENDIENTEMENTE EL ESTUDIO. (Unicamente 8° Curso)

ARITMETICA	27.1%
MEDIDAS	22.4%
ALGEBRA	27.5%
GEOMETRIA	24.7%





TOMADO DE: SUAREZ, PEDRO A. "ESTUDIOS COMPARATIVOS DE LA ENSEÑANZA MATEMATICA A NIVEL MEDIO: UN APORTE PARA EL CARIBE" En: Educación Matemática en la Américas VII. Actas de la Séptima Conferencia sobre Educación Matemática, UNESCO, París, 1990. pp. 55-59

BAJOS PROMEDIOS A NIVEL NACIONAL EN LAS ESCUELAS PRIMARIAS Y SECUNDARIAS[1]

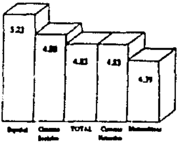
En mayo de 1990, nexos aplicó dos exámenes nacionales, uno en escuelas primarias y otro en secundarias para medir el aprovechamiento de los alumnos. El propósito exclusivo de los exámenes fue medir el nivel de conocimientos de los alumnos de acuerdo a los programas de estudio vigentes.

I. Examen de Primaria.

El examen se aplicó a 3,248 niños de sexto año de primaria de 175 grupos escolares de 161 escuelas distribuidas por todo el país. La prueba fue anónima. La muestra se elaboró por el método aleatorio-sistemático (la unidad fue el grupo) utilizando para ello información proporcionada por la Secretaría de Educación Pública. Se procuró que las preguntas aludieran a los contenidos centrales de los programas de primero a quinto grado y, en lo posible, que mostraran la capacidad de comprensión del alumno. En su mayoría fueron preguntas de opción múltiple.

Los examinados obtuvieron un promedio global de 4.83 puntos sobre diez. Sólo el 16.3% (529 de 3,248) de los examinados obtuvo calificaciones promedio superiores a 6.

PROMEDIO NACIONAL DE CALIFICACIONES DEL EXAMEN DE PRIMARIA



DISTRIBUCION DE CALIFICACIONES DEL EXAMEN PRIMARIA

Rango de Calificaciones	Español %	Matemáticas %	Ciencias Naturales %	Ciencias Sociales %	Total %
0.0 - 1.0	0.23	1.58	0.06	0.59	0.00
1.1 - 2.0	1.76	7.03	1.05	2.69	0.35
2.1 - 3.0	5.91	18.26	6.10	9.53	4.70
3.1 - 4.0	15.75	24.85	21.05	17.08	20.21
4.1 - 5.0	23.89	19.53	29.28	24.36	34.32
5.1 - 6.0	21.79	13.43	23.61	21.76	24.20
6.1 - 7.0	15.13	8.67	12.78	14.33	10.71
7.1 - 8.0	8.73	3.78	4.52	6.78	4.05
8.1 - 9.0	4.77	2.10	1.21	2.48	1.18
9.1 - 10.0	2.04	0.77	0.34	0.40	0.28
PROMEDIO	5.23	4.39	4.83	4.88	4.83

---

[1] Guevara Niebla Gilberto.- "Encuesta/la México: ¿Un país de reprobados? Revista Nexos No. 162, Junio 1991.

Matemáticas 20 preguntas

En matemáticas el promedio general fue de 4.39 de diez y el porcentaje de aprobados fue de 15.3%.

Los estudiantes tuvieron problemas en:
- *La operación con quebrados*
- *El uso de conceptos, de medidas y geometría*
- *La utilización correcta de los signos aritméticos*
- *El uso de equivalencias y operaciones con números decimales*
- *Aplicación de los conceptos matemáticos para la solución de problemas prácticos.*

En contraste, se observa facilidad en aspectos como:
- *Operaciones básicas de suma, resta y división*
- *Operaciones básicas para resolver problemas simples*
- *Memorización de conceptos.*

Algunas de las preguntas de esta parte fueron las siguientes:

Pregunta No. 20. El resultado de 3/4 + 1/8 es:
a) 4/12
b) 4/8
c) 7/8
d) 24/4

Sólo un 10.48% contestó esta pregunta correctamente, 86.19% lo hizo incorrectamente y 3.33% no contestó.

En contraste con el resultado anterior, está la pregunta de una división mecánica *(65/9)* que el 91.27% de los examinados contestó correctamente, 7.03% lo hizo de manera incorrecta y sólo un 1.70% no contestó.

Pregunta No. 34. A Federico le regalaron una bicicleta. El primer día recorrió con ella 23 km., el segundo día 5 km. más que el primero y el tercer día 10 km. menos que el segundo. ¿Cuántos kms. recorrió en total?

Las respuestas correctas alcanzaron un 17.39%, en tanto que las incorrectas llegaron a un 76.81%, sin contestar quedó un 5.80%.

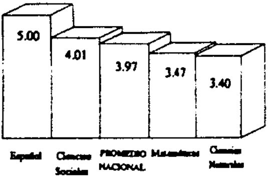
Matemáticas (Porcentaje de respuestas correctas)	
División mecánica	91.3
División en problema	61.7
Medición de parámetros y áreas	47.3
Estadística y probabilidad	46.2
Suma con negativos	44.0
Ubicación de coordenadas	40.2
Equivalencias, quebrados decimales	37.3
Signos diferenciales	35.3
Medición de volúmenes	34.7
Lógica matemática	33.5
Suma de quebrados	10.5

II. EXAMEN DE SECUNDARIA

Este examen se aplicó a 4,753 estudiantes de secundaria general y técnica de tercer año, en 174 escuelas distribuidas por todo el territorio nacional. El cuestionario comprendió 85 preguntas que se elaboraron de acuerdo a los contenidos del 1° y el 2° grado de Secundaria.

El promedio general de la prueba fue de 3.97 puntos sobre diez. Sólo el 3.8% de los alumnos obtuvo calificaciones promedio superiores a 6. Unicamente el 17% superó, en promedio, el 5 de calificación.

PROMEDIO DE CALIFICACIONES
DEL EXAMEN DE SECUNDARIA



DISTRIBUCION DE CALIFICACIONES DEL EXAMEN DE SECUNDARIA

Rango de Calificaciones	Español %	Matemáticas %	Ciencias Naturales %	Ciencias Sociales %	Total %
0.0 - 1.0	0.24	3.44	1.11	2.18	0.02
1.1 - 2.0	2.05	10.04	9.42	8.93	1.45
2.1 - 3.0	8.03	31.45	27.61	18.14	17.63
3.1 - 4.0	17.69	21.75	36.84	24.32	35.00
4.1 - 5.0	22.29	20.19	19.87	21.45	28.91
5.1 - 6.0	22.01	6.22	3.63	13.65	13.23
6.1 - 7.0	16.97	4.10	1.45	6.62	3.40
7.1 - 8.0	8.50	2.54	0.04	3.38	0.34
8.1 - 9.0	2.07	0.24	0.02	1.07	0.02
9.1 - 10.0	0.15	0.02	0.00	0.26	0.00
PROMEDIO	5.00	3.47	3.40	4.01	3.97

MATEMATICAS (24 preguntas)

El promedio general que obtuvieron los examinados fue de 3.47%; sólo aprobó esta área el 7%.

Aunque los alumnos manejan con mayor facilidad las cuatro operaciones básicas, presentan dificultades para:

- *Resolver problemas con quebrados*
- *Resolver problemas de álgebra, geometría y estadística*
- *La utilización adecuada de signos diferenciales*
- *Realizar operaciones con conjuntos*

Los alumnos observaron mejoría en aspectos como:

- *Operaciones básicas para resolver problemas*
- *Ubicación de coordenadas*

Esto probablemente es reflejo de un marcado acento propedéutico y una falta de atención en la enseñanza a la resolución de problemas practicos, vinculados a la vida cotidiana.

Ejemplos para ilustrar las bajas puntuaciones:

Pregunta no. 43. En una bolsa tengo 6 chocolates, 7 paletas y 5 caramelos. Si escojo sin ver, ¿que probabilidad tengo de sacar un chocolate?

a) 1/2
b) 1/3
c) 1/6
d) 3/4

Los resultados fueron: 26.21% contestó correctamente; el 70.47% incorrectamente. El 3.32% se abstuvo de responder.

Ejemplo para ilustrar las buenas calificaciones:

Pregunta No. 49. De una pieza de tela de 12 1/2 metros se han vendido 2 retazos de 3 1/2 y 2 3/4 metros respectivamente. ¿Qué cantidad de tela queda por vender?

a) 5 1/6 m.
b) 6 1/4 m.
c) 8 m.
d) 18 3/4 m.

Esta fue la pregunta en la que los estudiantes alcanzaron el más alto puntaje: hubo 60.49% de respuestas correctas y 34.0% de incorrectas. El 5.47% no contestó.

Matemáticas
(Porcentaje de respuestas correctas)

Multiplicacion en problemas	60.1
Aplicaciones combinadas	50.1
Ubicación de coordenadas	56.1
Conjuntos	43.3
Signos diferenciales	37.2
Operaciones con quebrados	34.1
Algebra	29.5
Geometria	27.8
Estadística	21.4

BAJOS PROMEDIOS EN EL EXAMEN DE INGRESO 1985-1986 AL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES (CCH) Y LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA (ENP)[1]

La UNAM ofrece 40.000 matrículas anuales de nuevo ingreso en su Bachillerato (Sistema CCH 25.000 y ENP 15.000). Para que se obtenga un lugar en el Bachillerato se aplica un examen de selección que contiene 120 reactivos de opción múltiple (5 opciones) de los cuales 25 pertenecen al área de matemáticas. Los reactivos se elaboran tomando en cuenta los objetivos y contenidos de los programas oficiales de secundaria, las preguntas han llegado a ser extremadamente sencillas, donde se pregunta lo mínimo de lo indispensable e incluso de bajo nivel taxonómico (lo contrario es muy difícil de obtener con un examen de opción mútiple). Así en el caso de matemáticas no es raro encontrar reactivos del tipo:

El menor de los siguientes números es:

A) 0.1
B) 0.02
C) 0.003
D) 0.0004
E) 0.00005

que son contestados corectamente por la mayoría de los aspirantes, pero ..., casi un 20% señala a la opción A) como la correcta. Claro por el otro lado están los reactivos con "alto" grado de dificultad a los que solo un 10% contesta corectamente:

De acuerdo a los datos de la siguiente figura, señala la opción corecta:

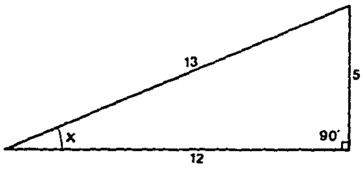
A) Sen $X = \frac{12}{13}$

B) Cos $X = \frac{5}{12}$

C) Tan $X = \frac{13}{5}$

D) Cot $X = \frac{12}{5}$

E) Sec $X = \frac{13}{5}$



---

[1] Loyola Campos, Elías. "El rechazo al estudio de las Matemáticas" Tesis de Maestría, Sec. Mat. Educ. del CINVESTAV, México, 1990.

LA SIGUIENTE TABLA MUESTRA LAS DISTRIBUCIONES DE CLASIFICACIÓN DE LOS ASPIRANTES, EN ESCALA DE 0 A 10.

Intervalo de Calificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia %	Acumulado (+) absoluta	Acumulado (+) %	Acumulado (-) absoluta	Acumulado (-) %	Observaciones
[0 - 2.5)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	85 095	100.00	[illegible]
[2.5 - 3.92)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[3.92 - 6.00)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	40 005	[illegible]	A partir de esta calificación fueron aceptados
[6.00 - 8.00)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[8.00 - 9.92]	[illegible]	[illegible]	85 095	100.00	[illegible]	[illegible]	9.92 fue la más alta (5 alumnos)

Fuente: Acumulados del examen de ingreso [illegible]

DATOS DE LA POBLACIÓN ADMITIDA DE LA TABLA ANTERIOR.

Intervalo de Calificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia %	Acumulado (+) absoluta	Acumulado (+) %	Acumulado (-) absoluta	Acumulado (-) %	Observaciones
[3.92-4.5)	16 439	41.23	16 439	41.23	40 005	100.00	44 alumnos de cada grupo (de 50 alumnos) tiene calificación menor que 6.00
[4.5 - 5.0)	9 481	23.70	25 974	64.93	23 512	58.77	
[5.0 - 5.5)	5 955	14.89	31 929	79.81	14 031	35.07	
[5.5 - 6.0)	3 411	8.53	35 340	88.34	8 076	20.19	
[6.0 - 6.5)	2 041	5.10	37 381	93.44	4 665	11.66	
[6.5 - 7.0)	1 065	2.66	38 446	96.10	2 624	6.56	
[7.0 - 7.5)	599	1.50	39 045	97.60	1 559	3.90	
[7.5 - 8.0)	295	0.74	39 340	98.34	960	2.40	
[8.0 - 8.5)	174	0.43	39 514	98.77	665	1.66	Solamente uno de cada 60 alumnos que fueron aceptados, posee los requisitos mínimos para abordar el bachillerato.
[8.5 - 9.0)	249	0.62	39 763	99.40	491	1.23	
[9.0 - 9.5)	193	0.48	39 956	99.88	242	0.60	
[9.5 - 9.92]	49	0.12	40 005	100.00	49	0.12	

TOTAL 40 005 $\bar{x} = 4.96$ $\sigma = 0.9330$ Fuente: Ibid.

Para efecto de analizar la situación en la que egresaron estos alumnos del Bachillerato y en qué situación se encuentran respecto a los egresados de otras instituciones, se diseñó un examen de opción múltiple, basado en los programas de los primeros cuatro semestres del CCH, del tronco básico (aprobado por SEP) y de los dos primeros años de la ENP.

El examen constaba de 120 reactivos de mucho mayor nivel taxonómico que el de ingreso al Bachillerato (guardando la relación entre los contenidos), cada reactivo tenía cinco opciones y se evaluaban siete áreas de conocimiento. En particular, 24 de los reactivos pertenecían al área de matemáticas. En cada una de las áreas, se procuró que el 50% de los reactivos midieran conocimientos y la otra mitad tratará de medir habilidades (principalmente el "razonamiento")

El examen se aplicó en noviembre de 1988 a una muestra aleatoria del 10.4% de la población de nuevo ingreso a Licenciatura (32,613 alumnos). Comprendió a las 22 facultades y escuelas de la UNAM en todas sus carreras.

Con el siguiente cuadro se puede analizar lo bajo de los promedios alcanzados por los estudiantes a nivel Licenciatura. Los resultados se dan en escala de 0 a 10 en el área de matemáticas y en el total de examen, separándolos en dos clases de procedencia.

BAJOS PROMEDIOS EN EL EXAMEN DIAGNOSTICO A NIVEL LICENCIATURA.

Procedencia	Población		Promedio de Calificación	
	Total	%	MATEMATICAS	TOTAL
UNAM (ENP y CCH)	2 205	64.70	2.86	4.19
OTRA	1 203	35.30	2.94	4.26
TOTAL	3 408	100.00	2.89	4.21

Fuente: Informe del Examen diagnóstico 1988. CUIECC. UNAM.

BAJOS PROMEDIOS EN LOS BACHILLERATOS DE LA UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA[1]

Examen diagnóstico de los conocimientos matemáticos de los alumnos que ingresaron al Bachillerato de la Universidad de Guadalajara, aplicado en 1990. El examen se diseño con temas de matemáticas que se consideran que el alumno necesitará en su trabajo posterior en el Bachillerato

Se consideraron cuatro bloques en la elaboración del examen diagnóstico: Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría. Se dividió el examen en tres A, B y C.

La muestra se integró con dos grupos de la Escuela Preparatoria #3 y otro más de la #7, de calendario B. Se les aviso a los alumnos una semana antes a la aplicación del examen y se les prometió puntos extras en su calificación final.

Los estudiantes examinados provenian de los siguientes tipos de escuelas secundarias:

Tipo de Escuela Secundaria	No. de alumnos	%
Estatal	65	42.48
Federal	32	20.92
Técnica Industrial	38	24.84
Particular	18	11.72

El alumno que más tardo en entregar el examen, empleo 75 minutos. En total se aplicaron 153 exámenes, 52 del tipo A, 51 del B y 50 del C

Los resultados que arrojaron los exámenes fueron los siguientes:

BLOQUE 1: ARITMETICA

PREGUNTA	Número de Res. Correctas y %		Número de Res. Incorrectas y %		Número de Abstenciones y %	
Suma de fracciones	12	7.84%	103	67.32%	38	28.84%
Resta de fracciones	11	7.19%	83	54.25%	59	38.56%
Multiplic. de frac.	6	3.92%	89	58.17%	58	37.91%
División de frac	47	30.72%	54	35.29%	52	33.99%
Potenciación de frac.	4	2.61%	90	58.83%	59	38.56%

---

1 Ulloa Azpeitia, Alfonso.- "Caracterización de factores en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: Análisis y propuesta de modificación curricular". Tesis de Maestría. Sec. Mat. Educ. del CINVESTAV. México, 1991.

BLOQUE 2: ALGEBRA

P R E G U N T A	Número de Res. Correctas y %		Número de Res. Incorrectas y %		Número de Abstenciones y %	
Adición	5	3.92	33	56.21	61	39.87
Multiplicación	3	1.96	97	63.40	53	34.64
División	4	2.61	74	48.37	75	49.02
Productos notables (3	31	6.75	268	58.39	160	34.86
Factorización (2)	7	2.29	141	46.08	158	51.63
Ecuaciones lineales	7	4.57	55	35.95	91	59.48
Ecs. simul. de 1°	1	0.65	39	25.49	113	73.86
Ecs. cuadráticas	2	1.31	50	32.68	101	66.01

BLOQUE 3: GEOMETRIA

P R E G U N T A	Número de Res. Correctas y %		Número de Res. Incorrectas y %		Número de Abstenciones y %	
Ang. entre paralelas	25	16.33	33	21.57	95	62.16
Ang. int de poligonos	5	3.26	53	34.64	95	62.10
Semejanza de triang.	6	3.92	38	24.84	109	71.24

BLOQUE 4: TRIGONOMETRIA

P R E G U N T A	Número de Res. Correctas y %		Número de Res. Incorrectas y %		Número de Abstenciones y %	
Solucion de triángulos	5	3.27	43	28.10	105	68.63

Además, se les preguntó sobre la cantidad relativa de clases que tuvieron de matemáticas, aunque las respuestas deben ser ponderadas con cautela, dado que, como se mencionó, el tiempo transcurrido pudo afectar recuerdos.

Se les pidió eligiésen la opción más conveniente para completa aseveración.

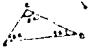
¿En secundaria tuvo Ud. clases de matemáticas?

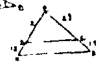
a) todas [ ] b) casi todas [ ] c) pocas [ ] d) muy pocas [ ]

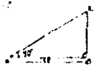
Se indican los porcentajes de respuestas señaladas para cada año

	PRIMER GRADO		SEGUNDO GRADO		TERCER GRADO	
	No.	%	No.	%	No.	%
Todas	46	30	50	32.68	48	31.37
Casi todas	74	48.37	72	47.06	65	42.48
Pocas	23	15.03	21	13.73	20	13.08
Muy pocas	8	5.23	9	5.88	18	11.76
Abstenciones	2	1.31	1	0.65	2	1.31

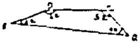
A

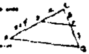


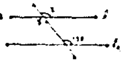


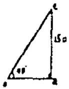


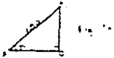
B

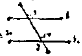


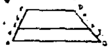




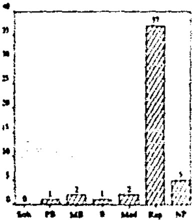








Gráficas elaboradas con datos tomados de una muestra de Actas de Examen Ordinario de la Universidad Autónoma de Puebla "Escuela Prepa Nueva (7)".
Actas con fecha agosto 1988 y junio 1989..



Acta de Examen Ordinario 257325 y 197994

Fecha 01-ago/88

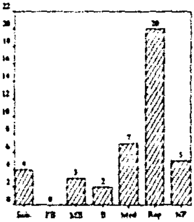
Materia Matemáticas I

Grupo Año I

Grupo VA

Total alumnos 48

PROMEDIO 2.79



Acta de Examen Ordinario 257336

Fecha 01/ago/88

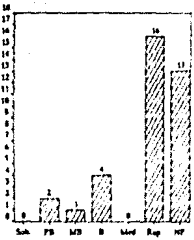
Materia Matemáticas I

Grado Año I

Grupo VB

Total alumnos 41

PROMEDIO 4.19



Acta de Examen Ordinario 226181

Fecha 21/jun/89

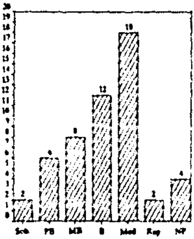
Materia Matemáticas II

Grado Año II

Grupo C

Total alumnos 36

PROMEDIO 2.72



Acta de Examen Ordinario 22710 y 22711.

Fecha 29/jun/89

Materia. Optativa Físico Matemáticas

Grado Año III

Grupo V

Total alumnos 53

PROMEDIO 6.56

Escala de Calificaciones señalada al revés del Acta

Calificaciones

B1 Equivalencias 0, 1, 2, 3, 4, y 5 Reprobados (Rep).

6 Mediano (Med).

7 Bien (B).

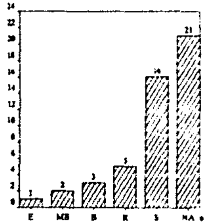
8 Muy Bien (MB).

9 Perfectamente Bien (PB).

10 Sobresaliente (Sob)

Gráficas elaboradas con datos tomados del Control de Calificaciones que se lleva en la Escuela Particular Instituto Ptolomei. En su nivel "Preparatoria" incorporada a la UNAM.

Se tomaron en cuenta los valores indicados en la columna "promedio". Estos datos son hasta el 18 de marzo de 1991, correspondientes a la sexta evaluación.



Fecha 18/3/91

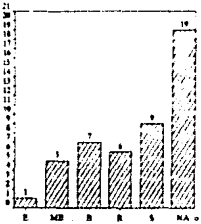
Materia Matemáticas IV

Curso 4

Sección A

Total de alumnos 48

PROMEDIO 5.8



Fecha 18/3/91

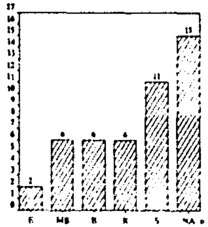
Materia Matemáticas IV

Curso 4

Sección B

Total de alumnos 47

PROMEDIO 6.35



Fecha 18/3/91

Materia Matemáticas IV

Curso 4

Sección C

Total de alumnos 46

PROMEDIO 6.56

Escala de Calificaciones

Excelente (E) = 10

Muy Bien (MB) = 9

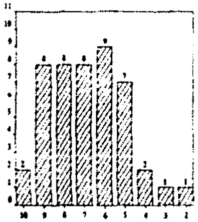
Bien (B) = 8

Regular (R) = 7

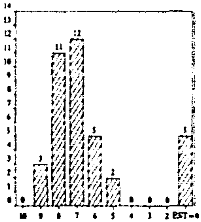
Suficiente (S) = 6

No Acreditado (NA) = 5 ó menos.

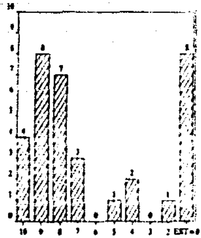
Gráficas elaboradas con datos tomados del Registro de Faltas de Asistencia, Calificaciones y Promedios de la Escuela Preparatoria Oficial No. 18. Clave CT 15EBH00873, Tlamanalco, Estado de México.
Las Actas corresponden al año escolar 1988-1989.



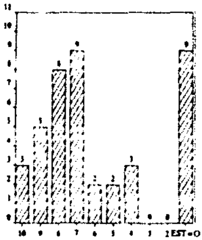
Asignatura: Matemáticas I
Primer año
Grupo "I"
Total alumnos 46
PROMEDIO 6.8



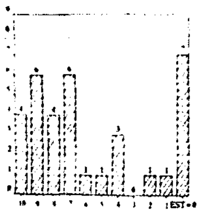
Asignatura: Matemáticas II
Primer año
Grupo "II"
Total alumnos 38
PROMEDIO 6.3



Asignatura: Matemáticas II
Primer año
Grupo "I"
Total alumnos 34
PROMEDIO 6



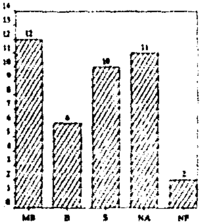
Asignatura: Matemáticas II
Primer año
Grupo "II"
Total alumnos 41
PROMEDIO 5.8



Asignatura: Matemáticas IV
Segundo año
Grupo "I"
Total de alumnos 34
PROMEDIO 5.7

La escala de calificaciones se maneja con número decimal (0-10).

Gráficas elaboradas con datos tomados de una muestra de Hojas de Calificaciones de la Escuela Particular Mexicano Americana A. C. del Curso Académico 89/90 en su enseñanza Preparatoria..

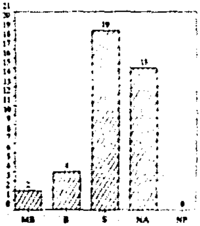


Materia: Matemáticas IV

Curso 4A

Total de alumnos 41

PROMEDIO 6.27

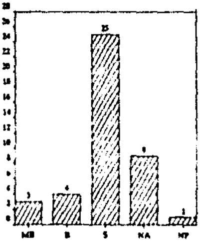


Materia: Matemáticas IV

Curso 4C

Total alumnos 42

PROMEDIO 6

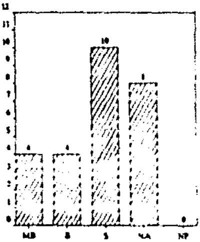


Materia Matemáticas IV

Curso: 4E

Total de alumnos

42PROMEDIO: 6



Materia: Cálculo Diferencial e Integral

Curso 6FMI

Total de alumnos 26

PROMEDIO 5.3

Escala de Calificaciones

No presentó NP

0-5.9 NA

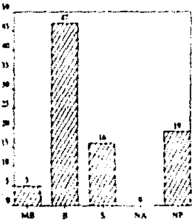
6-7.5 S

7.6-8.5 B

8.6-10 MB

Gráficas elaboradas con datos tomados de una muestra de Exámenes Ordinarios del Período 88-I de grupos de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación.

Considérese que las materias de Cálculo I y Estructuras Algebraicas son seriadas en esta Carrera que se imparte en la ENEP ACATLAN.



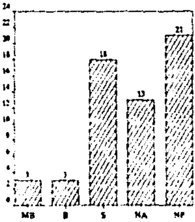
Asignatura Cálculo I

Profr. Domingo Vite Martínez

Grupo 1102

Total alumnos 87

PROMEDIO 6



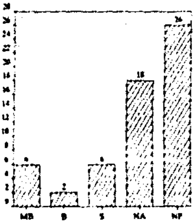
Asignatura: Cálculo I

Profr. Manuel E. Gtz. Sedano

Grupo. 1101

Total alumnos: 58

PROMEDIO 2.79



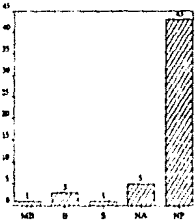
Asignatura Cálculo I

Profra. Liliana R. Salazar Hdez.

Grupo 1151

Total alumnos. 58

PROMEDIO 1.93



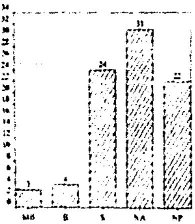
Asignatura Estructuras Algebraicas

Profr. Manuel V. Rodríguez

Grupo 1153

Total alumnos: 53

PROMEDIO: 0.75



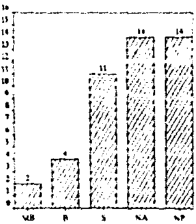
Asignatura Cálculo I

Profr. José Fco Arcos Pino

Grupo 1103

Total alumnos 84

PROMEDIO. 2.45



Asignatura Estructuras Algebraicas

Profr. Fernando Paya Porres

Grupo 1151

Total alumnos 45

PROMEDIO 2.62

Escala de Calificaciones: Muy Bien (MB) = 10, Bien (B) = 8, Suficiente (S) = 6, No Acreditó (NA) Sin equivalencia, No presentó (NP) Sin equivalencia.

ELECCION DE OTRAS CARRERAS EN PARTE POR TEMOR A LAS MATEMATICAS

Elías Loyola, en la investigación presentada en su tesis **"El rechazo al estudio de las matemáticas"** señala:

"... si analizamos las carreras que han tenido más demanda en nuestro país, no son precisamente carreras que incluyan a las matemáticas (cuando lo hacen) como un tema trascendente. Es justo manifestar que esta proporción disminuye cada año, pues las matemáticas se ofrecen cada vez mas en una mayor cantidad de carreras no tradicionales. Además, se han modificado los planes de estudio en otras; Biología puede ser el ejemplo más claro de estas modificaciones.

POBLACION DE PRIMER INGRESO A NIVEL LICENCIATURA REPUBLICA MEXICANA

	1970		1975		1981	
Carreras	TOTAL	%	TOTAL	%	TOTAL	%
Médico cirujano	8 720 (2)	12.5	18 021 (1)	14.2	13 135 (2)	6.6
Derecho	6 904 (3)	9.9	10 437 (3)	8.7	16 258 (1)	8.2
Cirujano dentista	2 132 (7)	3.0	7 226 (5)	5.7	6 955 (5)	3.5
Psicología	1 239 (8)	1.8	3 243 (8)	2.6	5 399 (7)	2.7
Administración	5 211 (5)	7.5	10 117 (4)	8.0	9 071 (3)	4.6
Biología	652 (10)	1.0	1 318 (10)	1.0	2 643 (10)	1.3
Ing. mecánica	5 558 (4)	8.0	7 097 (6)	5.6	4 601 (9)	2.3
Contaduría	9 437 (1)	13.5	11 227 (2)	8.9	8 525 (4)	4.3
Arquitectura	3 168 (6)	4.5	6 074 (7)	4.8	6 115 (6)	3.1
Médico veterinario	1 169 (9)	1.7	2 918 (9)	2.3	4 717 (8)	2.4
TOTAL	44 190	63.4	77 668	61.3	77 429	39.0

Porcentaje relativo al total de la matrícula por año: 1970 = 68 879; 1975=126 876; 1981=198 923

FUENTE: García Ruiz E. Elección de carrera 1971-1984

La actualización de los planes de estudio obliga a introducir más materias de matemáticas en las escuelas profesionales, lo que significa que cada día habra más profesionistas que "hablen el lenguaje" de las matematicas, pero serán los más jóvenes, y se esperaría aqui, tambien, una generacion de "angustiados" o "empanicados" por las matemáticas: los profesionistas que llevaron planes de estudio con pocas matemáticas.

La inclusión de mas contenidos matemáticos no obedece a gustos sino a necesidades de la profesión. Sin embargo la aceptación de nuevos planes de estudio ha tenido que hacerse muy lentamente. Por ejemplo en la UNAM, la Facultad de Economía ha incorporado muy pocas materias de matematicas con caracter obligatorio, mientras que la UAM, el Politécnico, El Colegio de Mexico, etc. llevan una gran ventaja en este aspecto. De esta manera, no sería de extrañar que los matemáticos, actuarios, etc. que optaran por hacer un posgrado en Economía no eligieran para ello a la Facultad de Economia, sino a otras instituciones, mientras que los egresados de Sociología, Ciencias Políticas, Estudios Latinoamericanos, etc, preferirian a esta Facultad. En otras palabras, el éxito favorable en las asignaturas de matematicas puede ser un factor mucho muy importante para elegir carreras relacionadas con esta area, así como el fracaso lo sería para evadirlas y por ello tener que recurrir a las que tienen menos contenidos matemáticos, incluso aunque no les parezcan atractivas."

COMPARACION DE ELECCION DE CARRERA

POBLACION ESCOLAR TOTAL DE PRIMER INGRESO Y EXAMENES PROFESIONALES APROBADOS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO EN 1988

ELECCION DE CARRERA	INGRESO TOTAL	%	EXAMENES PROFESIONALES APROBADOS 1988	%
1. Derecho	4,111	12.94	1,317	11.11
2. Contaduría	2,677	8.42	877	7.39
3. Administración	1,845	5.80	817	6.89
4. Médico Cirujano	1,762	5.54	1,530	12.91
5. Psicología	1,656	5.21	487	4.11
6. Ing. Mecánico Electricista	1,652	5.20	325	2.74
7. Ciencias de la Comunicación	1,476	4.64	75	0.63
8. Economía	1,183	3.72	201	1.69
9. Cirujano Dentista	1,131	3.56	1,619	13.66
10. Arquitectura	1,110	3.49	426	3.59
11. Ingeniero Civil	928	2.92	291	2.45
12. Pedagogía	898	2.82	103	0.87
13. Relaciones Internacionales	814	2.56	79	0.66
14. Médico Veterinario Zootecnista	781	2.45	374	3.15
15 Ingeniero en Computación	766	2.41	60	0.50
16. Químico Farmarcéutico Biólogo	739	2.32	220	1.85
17. Ciencias Políticas y Admón Pub	639	2.01	79	0.66
18. Ingeniero Químico	625	1.96	137	1.15
19. Biólogo	625	1.96	300	2.53
20. Matemáticas Aplic. y Comput.	567	1.78	2	0.01
21. Trabajo Social	534	1.68	304	2.56
22. Diseño Gráfico	524	1.64	10	0.08
23. Actuario	484	1.52	62	0.52
24. Sociología	462	1.45	94	0.79
25. Historia	325	1.02	31	0.26
26. Lengua y Literatura Hispánicas	253	0.79	30	0.25
27. Diseño Industrial	250	0.78	19	0.16
28. Enfermería y Obstetricia	211	0.66	177	1.49
29. Físico	208	0.65	61	0.51
30. Filosofía	191	0.60	21	0.17
31. Artes Visuales	182	0.57	6	0.05
32. Geografía	173	0.54	27	0.22
33. Matemático	165	0.51	38	0.32
34. Químico	144	0.45	46	0.38
TOTAL	30,091	94.73	10,245	86.44

EL PORCENTAJE MANEJADO ES RELATIVO A LA POBLACION TOTAL QUE INGRESO Y SE TITULO A NIVEL LICENCIATURA EN 1988.

POBLACION TOTAL DE INGRESO = 31,765
EXAMENES PROFESIONALES APROBADOS = 11,852

FUENTE: CUADERNOS DEL CONGRESO UNIVERSITARIO (23). "ESTADISTICAS BASICAS", 6 de febrero de 1990

MUESTRA DE RESPUESTAS A LA PREGUNTA:

¿TE GUSTAN LAS MATEMÁTICAS? SI ( ) NO ( )

¿ POR QUÉ?____

Se aplicó un Cuestionario con respuestas cerradas y abiertas (en total 15 preguntas) a una muestra aleatoria de estudiantes de Secundaria, Preparatoria,y de la ENEP Acatlán, en total 150, con la finalidad de obter parámetros de evaluación para la aceptación de un Curso Introductorio Paralelo en sus materias de Matemáticas. Este cuestionario se efectuó en septiembre de 1989.

A las preguntas señalas arriba el 83 % aproximadamente, contestó (entre otras):

ALGUNAS RESPUESTAS A NIVEL SECUNDARIA:

- No me gustan las matemáticas, son horribles.
- Como me van a gustar si son mi coco.
- No, porque son muy aburridas.
- No, porque las odio por difíciles.
- No, porque no entiendo para que sirven.
- No, porque no las saben enseñar.
- No, porque no me gusta pensar para resolver problemas.
- No, porque tengo mucha dificultad para aprenderlas.
- No, porque no entiendo lo que me explican.
- No, porque me duele la cabeza cuando pienso tanto.
- No, porque las tengo que estudiar a fuerza.
- No, porque si me distraigo tantito ya no entendí.
- No, porque me explican lo fácil y yo tengo que resolver lo difícil.
- No, porque me cae mal el maestro.
- No, porque es difícil y problemática.

ALGUNAS RESPUESTAS A NIVEL PREPARATORIA Y LICENCIATURA:

- No, porque pienso que son un poco difíciles y para mi las considero muy difíciles.
- No, porque no las entiendo.
- No, porque me chocan los números, hacer cuentas, etc., (la verdad es que me da flojera pensar y la verdad es que no te la enseñan de otra manera más amena).
- No, porque malos métodos pedagógicos.

:

(Son muy semejantes a las demás)

ALGO MAS SOBRE EL DESAGRADO POR EL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS

De la Encuesta Nacional de Valores Educativos (ENAVE) levantada durante las ocho primeras semanas de diciembre de 1989. La muestra abarcó 3,733 hogares distribuidos en todas las entidades federativas de la República. Se encuesto a un número total de 11,091 personas de las cuales 7,437 eran mayores de 25 años de edad. El cuestionario de 75 preguntas cerradas se aplicó a personas de 16 años o más que habitaban en el hogar.

En relación a el *Juicio sobre las materias de estudio*, se analizó con la siguientes preguntas:

"*De las materias que estudió en primaria y/o secundaria ¿cuál le gustó más? ¿Cuál menos? ¿Cuál le fue peor enseñada? y ¿A cuál piensa que debería dársele más importancia?* Curiosamente, en este paquete de preguntas las **matemáticas** destacan porque atraen opiniones opuestas ya que alcanzaron el **más alto puntaje** como la que más gustó y la que **menos gustó** y porque se le considera la **peor enseñada** ..."*

PREGUNTA	MATEMATICAS	ESPAÑOL	SOCIALES	NATURALES	OTRAS
Materia que más gustó.	28.7 %	25.9 %	20.6 %	11.5 %	7.9 %
Materia que menos gustó.	37.7 %	10.7 %	21.5 %	10.7 %	
Materia que fue la peor enseñada.	25.9 %	11.3 %	19.0 %	11.9 %	
Materia a la que debería darse más importancia.	48.0 %	10.5 %	10.0 %	6.1 %	

Nota: La suma de los porcentajes no totaliza 100% por la exclusión de los analfabetos.

* Guevara Niebla, Gilberto, "Encuestalia", En: Nexos 159, México, marzo de 1991, pp. 59-61.

FRAGMENTOS DE COMENTARIOS SOBRE EL RECHAZO POR LAS MATEMATICAS

Los trabajos de la ciencia y del arte. Este grabado muestra a numerosas personas estudiando, calculando y midiendo, y da en la figura central, llamada Temperantia, una imagen de la principal cualidad del hombre de estudio: la templanza, una de las cuatro virtudes cardinales.

LAS APASIONANTES MATEMÁTICAS

Algunas sugestiones para hacer fácil el camino, en una materia que causa no pocos dolores de cabeza

Es una lástima que la mayor parte de la gente haya pasado por la escuela sin darse nunca cuenta de que las matemáticas son divertidas. Las largas filas de signos y números, tan pulcros y, a veces, tan obstinados, pueden marchar juntos, evolucionar y formarse con la perfecta precisión de una columna de soldados o, por el contrario, ser tan indóciles y anárquicos como una multitud de niños que salen del colegio. Si se los domina y mantiene bajo una hábil dirección, cumplirán todas las órdenes y servirán con prontitud y eficacia, pero una vez que se pierda el dominio de ellos, la vida será una pesada carga cada vez que haya que utilizarlos.

Los consejos que siguen se exponen con la esperanza de que padres y maestros, o hermanos y hermanas mayores, encuentren una ayuda para enseñar a los jóvenes educandos cómo dar cada paso en las matemáticas, y de esa manera obtener un firme dominio de la materia en todas sus partes. De tal dominio podrá derivarse un placer que justificará cualquier esfuerzo que se haya empleado en alcanzarlo. Y las matemáticas, en lugar de una ciencia árida y penosa, llegarán a ser un juego fascinante.

También puede ayudarse al joven estudiante que hasta ahora no ha logrado encontrar el camino en esta materia. Debe hacerse que recorra una y otra vez todos los pasos iniciales y siempre con la mayor suavidad y calma. Para ello, hay que tratar de que nunca asimile un conocimiento erróneo y de que adquiera

Las matemáticas son una ciencia injustamente satanizada por la mayoría de los estudiantes. El poco interés que despiertan por ella los métodos de enseñanza y los mismos profesores, exige transformar las formas con que se aborda mediante ideas innovadoras.

LAS MATEMÁTICAS Y LA COMPUTADORA

La ciencia satanizada

Ulises Ladislao

A nadie sorprende que las matemáticas sean vistas como un terrible monstruo capaz de engullir [illegible] de los estudiantes de salvar todas las materias a que obliga la escuela. Al igual que la física y la química, la ciencia de los números es una carga fatal para la mayoría, cuando podría ser una fascinación.

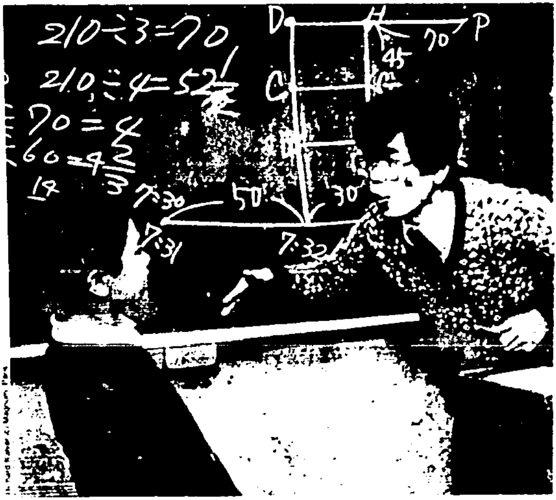
Como ocurre con cierto equipo mexicano de futbol, quien no ama las matemáticas las odia. Tal vez si sus acérrimos detractores percibieran que hay quienes encuentran belleza en la demostración de teoremas, en [illegible] y que adentrarse en los números también puede ser divertido, no las abandonarían con tanto [illegible]

Revuelo en el salón de clases

Quizá los métodos de enseñanza han hecho poco por conferir interés al estudio de las matemáticas. Por fortu-

NUEVA ENCICLOPEDIA TEMATICA, Tomo VII, Editorial Cumbre S. A. México, 1987 p. 20

LADISLAO, Ulises, "Las Matemáticas y la computadora". En Información Científica y Tecnológica, CONACYT, México No. 153, Junio de 1989, p.54



"Los juku, establecimientos privados que permiten a los niños mejorar su rendimiento escolar y que les preparan también para los concursos de ingreso en las universidades, son un complemento indispensable del sistema oficial de enseñanza en el Japón. En la foto, un profesor de un juku reprende a un alumno que no sabe su lección de matemáticas."*

*Kurimoto Kazuo, "La carrera por los títulos. Un sistema de enseñanza que absorbe las energías de los alumnos", En: El Japón de Hoy, El Correo de la Unesco, Francia, diciembre 1987, p. 11.

SI EXISTE INTERES POR EL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS NO SE CONOCE TODO EL ALCANCE QUE TIENEN

Con datos arrojados del mismo cuestionario para obtener parámetros de evaluación a la formulación de un Curso Introductorio a las materias de Matemáticas, se puede observar que si existe un gusto por las matemáticas es poca la visión que se tiene sobre su enorme importancia y/o utilidad.

ALGUNAS RESPUESTAS SOBRE: ¿Te gustan las matemáticas? "SI" ¿Por qué?

A nivel Licenciatura o más.

Edad	Grado de Escolaridad	Sexo	¿Por qué?
43	Especialidad en Mat. Fac. de Cienc. UNAM	F	Porque mi memoria es mala y en ellas se debe razonar.
32	Maestría/Urbanista	M	Por el grado de utilización en todas las Ciencias y Técnicas
28	4o. Sem. de MAC	M	Es una manera de conocer las cosas de la naturaleza para modificarlas
27	4o. Cuatrimestre de Maestría en Planeación y sistemas	M	Siempre he tenido facilidad para entenderlas. Me gusta pensar con números y variables.
23	8o. Sem. de Derecho	M	Es una carrera que sabe de todo un poco
23	4o. Sem. de MAC	M	Nos permite tener bases (claro si se estudian con constancia) para aplicarlas en nuestra profesión
22	4o. Sem. de Normal	F	Porque siempre me ha gustado resolver problemas utilizándola, así como la lógica
20	4o. Sem. de MAC	M	Porque me parece lo más práctico además de que lo social, histórico, o teórico no me agrada.
19	4o. Sem. de Lic.	M	Siendo las ciencias exactas los resultados siempre son los mismos para todo
20	4o. Sem. en la Esc. Superior	F	Pienso que son como un juego (cuando uno aprende las reglas de éste, se puede jugar con ella
18	1o. Sem. de Medicina	F	Su importancia es que, así entendiéndolas podremos usarlas más a menudo en nuestra vida cotidiana
17	1o. Sem. de Medicina	F	Mediante ecuaciones matemáticas podemos expresar una ley o teorema.
17	1o. Sem. de Medicina	F	Porque las aplicaciones que tiene para otras materias como física, química, etc. son muy empleadas e importantes para entender otros sistemas.

A nivel 3ro. de Secundaria también hubo algunas respuestas afirmativas sobre el gusto para las matemáticas y estas son sus razones:

- Son de mucha utilidad para poder trabajar.

- Porque más que nada hay que razonar.
- Porque no he tenido mucha dificultad en aprenderlas.
- Le he entendido más facilmente en este año por el profesor.
- Porque se me hacen interesantes
- Regular, porque las ecuaciones, productos notables y demás operaciones sí, pero geometría y conjuntos no.
- Porque es muy interesante.
- Porque me ha gustado todo lo que me explican.

Para completar la opinión de que se desconoce los alcances de la Ciencia Matemática por una gran mayoría de los estudiantes se cita lo siguiente:

> "... Como bien sabemos, en los países como el nuestro la sociedad en general tiene un desconocimiento casi absoluto de lo que son las ciencias y su papel en el progreso. Las matemáticas no sólo sufren igual suerte, sino que tampoco son bien comprendidas en el ámbito de los científicos. Paradójicamente, todo mundo opina que las matemáticas son muy importantes pero casi nadie, fuera de los matemáticos, sabe qué es y por qué se hace la investigación matemática. Esta situación no es privativa de los países subdesarrollados; ocurre inclusive en los países más avanzados, pero en ellos es menos importante porque hay comunidades matemáticas más fuertes y mayor madurez académica.
>
> (...) Es bien sabido que las deficiencias de la enseñanza de las matemáticas en México comienzan desde la educación elemental ... No puedo opinar sobre los programas de las licenciaturas en matemáticas que hay en México porque no los conozco bien, pero sí sé sus resultados por medio de los estudiantes que solicitan ingreso a la maestría en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV. Por lo general, es muy poco lo que saben y tienen una formación distorcionada; conocen conceptos abstractos pero no son capaces de reconocerlos o aplicarlos en los casos más sencillos. Creo que esto se debe a la autocomplacencia y la flojera que han dominado parte de la actividad matemática en el país, y a haber adoptado tendencias demasiado abstractas en la enseñanza. El fruto de ello son licenciados en matemáticas que no pueden hacer casi nada con sus conocimientos. En los últimos años la formación de los estudiantes que llegan de las licenciaturas ha ido en constante declinación."*

---

* GOROSTIETA, Luis G., "La perspectiva de las matemáticas", p. 33. En Avance y Perspectiva Vol. 10, México, CINVESTAV IPN, marzo de 1991

NECESIDAD DE ACTUALIZACION DE LOS PROFESORES DE MATEMATICAS EN LOS DISTINTOS NIVELES EDUCATIVOS

Varios Investigadores en Matemáticas y Educación Matemática, concuerdan que una de las principales necesidades a resolver es la Formación y Actualización de los Profesores de Matemáticas. A este respecto se tienen las siguientes citas:

> "(...) El maestro es más importante que el libro de texto, y los buenos maestros de matemáticas a nivel secundaria son muy escasos. Por otra parte, considero que en este nivel es esencial desarrollar en el estudiante gusto por las matemáticas, presentándole unos cuantos temas bien seleccionados que lo interesen y lo animen. Es la preparatoria donde el estudiante determina su área futura de estudio. Si se tienen en este nivel buenos profesores de matemáticas, es indudable que un mayor porcentaje que el actual decidirá con verdadera vocación las carreras científicas y técnicas que actualmente registran una baja matrícula y que tan necesarias son para el desarrollo de nuestro país. Aún estamos lejos de lograr este objetivo en los niveles preuniversitarios.
>
> Para tener una buena docencia a nivel superior, la investigación es fundamental e insustituible ..."*

Dentro del artículo donde se tomó esta cita se incluyen datos estadísticos de las necesidades del número justificable de doctores en matemáticas que se necesitan para los próximos diez años. Este artículo es Texto del discurso de inauguración del XX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Jalapa, México, 1987. A continuación se sintetizan.

Por el potencial de México se necesitan para el período (1987-1997), distribuidos en nuestras instituciones educativas, de servicio y de producción:

Doctores en:	Número
Matemáticas	1,000
Física	1,500
Química	2,500
Ciencias Biológicas	3,000
Dif. ramas de Ingeniería	2,500
Total	10,250

* Adem, José "Reflexiones sobre el desarrollo de las matemáticas en nuestro país" pp. 162-167 En Avance y perspectiva. Vol 10, México, CINVESTAV-IPN, Marzo de 1991

3,060 es el número total que forma actualmente (1987) el Sistema Nacional de Investigadores, número en el que se incluyen los investigadores pertenecientes al área de Ciencias Sociales y Economía. Comparando esta cifra con 500,000 que es aproximadamente el número de doctores en ciencias y tecnología con los que cuentan los Estados Unidos.

En 1987 se contaba con 150 doctores en matemáticas.

> "Querer tener 1000 dentro de diez años implica producir 100 doctores por año en promedio, cifra que estamos muy lejos de alcanzar, si consideramos el número de egresados que hemos estado manejando a este nivel en los últimos años.
>
> El Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, una de las instituciones más productivas en esta rama en nuestro país, ha producido 26 doctores en 25 años."

Ahora, observando las estadísticas efectuadas en otros países, por ejemplo en Indonesia y Filipinas, se puede tener una referencia de la situación de los profesores de matemáticas, que por sus características sería muy similar a la que se tiene en México.

> "Desde hace tiempo se sabe que la provisión de profesores de matemática calificados ha sido uno de los problemas más difíciles enfrentados por los educadores en Indonesia. Un estudio realizado en 1971 mostró que solamente el 21% de los que enseñaban matemática en las escuelas secundarias, tanto a nivel inferior como superior, estaban profesionalmente formados como profesores de matemáticas. Desde entonces, la situación no ha cambiado significativamente.
>
> Se introdujo la "nueva matemática", en las escuelas de Indonesia como un esfuerzo para hacer los contenidos de los programas de matemática, a nivel primario y secundario, más adecuados para atender las exigencias del desarrollo nacional. Enfrentar a profesores profesionalmente formados con nuevos contenidos no es tarea fácil; pero ella es aún más difícil cuando se trata de profesores carentes de aquella formación."*

En Filipinas con la finalidad de tener datos rigurosos para presentarlos en la Conferencia matemática sobre educación matemática, se llevaron a cabo estudios de los cuales se cita lo siguiente:

> "...Tomaron parte de esta reunión veinticinco representantes seleccionados de los Colegios de Formación Docente de todo el país.
>
> Los Seminarios y los Talleres se ocuparon de temas que eran particularmente importantes para los profesores. Ellos brindaron, también, la oportunidad para discutir problemas que son centrales para la educación matemática en Filipinas. Los problemas discutidos fueron de dos clases:

* Soedijarto, Ibrahim y Khodir, op. cit. p. 34

Aquellos que afectan a la educación en general, tales como: Bajos salarios de los profesores, pesada carga docente, clases superpobladas, falta de tiempo para enseñar temas fundamentales, etc.; y problemas que son específicos de la educación matemática, tales como una introducción poble de la nueva matemática en la mayoría de las escuelas, confusión acerca de los que es esencial en matemática y la débil formación básica de los profesores.

(...) El estudio que fue realizado en Metro Manila y en 25 provincias, fue publicado en forma completa a comienzos de 1979. El estudio comprendía un total de 126 instituciones de enseñanza, 130 administradores, 643 profesores de matemática y 2354 estudiantes. Se incluyen a continuación, los resultados más notables del estudio.

LA FORMACION DOCENTE INICIAL DE LOS PROFESORES DE MATEMATICA.

El sesenta y cinco por ciento de los profesores poseen título de bachiller solamente. De estos, menos de la mitad obtuvieron su grado en la mención matemática... Dejando de lado la debilidad general en el contenido de matemática del bachillerato científico para ingeniería, un relevamiento reciente puso en evidencia otro hallazgo perturbador: Los estudiantes matriculados en los programas de este bachillerato pertenecen en su mayor parte al primer cuartil y, además, solamente el 2.6% de sus profesores poseen grados de maestría en Artes o de Master en Ciencia con mención matemática; 13% poseen grado de Master en Enseñanza de Arte, o de Master en Enseñanza de la Ciencia y 1% el grado de Doctor en Matemática.

Esta debilidad en las calificaciones previas a la incorporación al servicio, está evidenciada por la debilidad en el contenido de los cursos cumplidos en los programas anteriores y posteriores a su graduación de bachilleres. Muy pocos profesores han seguido cursos más allá de los de Cálculo, Solamente el 39% ha tomado curses de Algebra Lineal, 28% de Algebra Abstracta, 16% Análisis Complejo, 11% Cálculo Avanzado, etc.

CAPACITACION DE PROFESORES DE MATEMATICA EN SERVICIO.

El panorama es igualmente desolador en lo que se refiere a la capacitación en servicio. Un 59% de los profesores encuestados no han participado en ningún seminario de matemática en los últimos tres años; 88% no están suscritos a ninguna revista profesional; 70% no pertenecen a ninguna organización profesional...

...Por ejemplo, el 61% de los profesores reconocen que su problema docente fundamental es su débil conocimiento en matemática."*

* Nebres, Bienvenido y Marasigan, José, op. cit. pp. 84-87.

RED UNIVERSITARIA Y TECNOLOGICA DEL P.N.A.F.P.M.
(Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas)

OBJETIVOS

Estas estrategias se adoptaron para conseguir los siguientes objetivos.

- Formar al profesor como un elemento transformador para crear un sistema escolar renovado.

- Activar el trabajo colectivo de profesores e investigadores para resolver problemas del sistema escolar actual.

- Promover la interacción entre grupos de técnicos e investigadores con los profesores para:
  - Producir cambios curriculares.
  - Producir nuevos materiales pedagógicos.
  - Tomar datos que permitan conocer la marcha del Sistema Escolar
  - Apoyar al profesor en el aula desde fuera de ella.

- Profesionalizar la labor docente en el campo de las matemáticas en los niveles de educación media superior y superior.

- Mejorar la formación académica del profesor en ejercicio.

- Difundir alternativas de solución a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

- Proporcionar estructuras académicas para que el profesor pueda obtener grados profesionales y posgrados.

- Crear estructuras de promoción profesional para el profesorado, según avance en su progreso académico.

BIBLIOGRAFIA

ADEM, José y SALMERON, Fernando, La Filosofía y las Matemáticas (dos ensayos), Ediciones Productividad, México, 1968.

BEGLE, G. Edward (Stanford University) and GIBB, E. Glenadine, (The University Texas at Austin), "Why Do Research?", pp. 3-19. In: SHUMWAY, Richard J., Research in Mathematics Education, Printed in the United States of America, National Council of Teachers of Mathemataics, 1980.

CALDERON ALZATI, Eduardo, Computadoras en la Educación, 1a. ed., México, Trillas, 1988.

DICCIONARIO DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACION, Diagonal Santillana, México, 1984.

ENCICLOPEDIA DE LAS CIENCIAS, V. 2, Editorial Cumbre S. A. Grolier, México, 1987.

ESTADISTICAS BASICAS, Cuadernos del Congreso Universitario (23), UNAM, 6 de febrero de 1990.

GENZWEIN Ferenc, HODI Endre, et al, "Matemática de la Escuela Secundaria en Hungría", pp. 7-30. En: MORRIS, Robert, Estudios en Educación Matemática V. 1, UNESCO, Oficina Regional de Ciencia y Tecnología para América Latina y el Caribe (Montevideo), 1980.

HARVEY, H. R., WILLIAMS, B. J., "Aritmética azteca: notación posicional y cálculo de área", Revista Vuelta, abril de 1982, pp. 22-31.

HAYTER, John, "El "Continuing Mathematics Project" en el Reino Unido", pp. 113-136. En: MORRIS, Robert, Estudios en Educación Matemática V. 1, UNESCO, Oficina Regional de Ciencia y Tecnología para América Latina y el Caribe (Montevideo), 1980.

HITT ESPINOSA, Fernando, "Las microcomputadoras en el aula e investigación en educación matemática", pp. 3-23. En: Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, México, 1991.

KAWAGUCHI, Tadusu, "Matemática de la Escuela Secundaria en Japón", pp. 55-80. En: MORRIS, Robert, Estudios en Educación Matemática V. 1, UNESCO, Oficina Regional de Ciencia y Tecnología para América Latina y el Caribe (Montevideo), 1980.

KOLYAGIN, U. M., ILUKANKIN, G., L., y OGANESYAN, V. A., "Formas de mejorar la Enseñanza de la Matemática en las Escuelas Secundarias Generales Soviéticas", pp. 93-112. En: MORRIS, Robert, Estudios en Educación Matemática V. 1, UNESCO, Oficina Regional de Ciencia y Tecnología para América Latina y el Caribe (Montevideo), 1980.

LOYOLA CAMPOS, Elias, El Rechazo al Estudio de las Matemáticas, Tesis de Maestría de Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV IPN, México, 1990.

MANCERA MARTINEZ, Eduardo, "Investigación y educación matemática", pp. 10-20. En: Educación Matemática, Vol. 2. No. 1, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.

MEJIA VELASCO, Hugo R., "De programas generativos a tutores inteligentes", pp. 111-115. En: Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, México, 1991.

MIRANDA PACHECO, Mario, La educación como proceso conectivo de la sociedad, la ciencia, la tecnología y la política, 1a. ed., México, Trillas, 1978.

MMARI, G., "Matemática en la Enseñanza Secundaria en la República Unida de Tanzania", pp. 137-154. En: MORRIS, Robert, Estudios en Educación Matemática V. 1, UNESCO, Oficina Regional de Ciencia y Tecnología para América Latina y el Caribe (Montevideo), 1980.

NAVARRETE, Manuel, et al, Matemáticas y realidad, 1a. ed., SepSetentas Diana, México, 1982.

NEBRES, Bienvenido F., MARASIGAN José A., "Desarrollos recientes de la Educación Matemática en Filipinas", pp. 81-92. En: MORRIS, Robert, Estudios en Educación Matemática, V. 1, UNESCO, Oficina Regional de Ciencia y Tecnología para América Latina y el Caribe (Montevideo), 1980.

SANCHEZ V., Gonzalo, "La Modernización de la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas Técnicas Superiores". En: Revista Matmática, Número XIV, Sociedad Matemática Mexicana, junio 1963.

SANTALO, Luis A., La educación matemática hoy, 1a., ed, España, Teide, S. A., 1975.

SANTALO, Marcelo, "La Enseñanza de las Matemática en el Nivel Medio en América Latina", pp. 4-16. En: Revista Matmática, Número XIV, Sociedad Matemática Mexicana, junio de 1963.

SODIJARTO, IBRAHIM, R., y KHODIR, A., "El Sistema Modular de Instrucción para la Matemática en Indonesia", pp. 31-54. En: MORRIS, Robert, Estudios en Educación Matemática V. 1, UNESCO, Oficina Regional de Ciencia y Tecnología para América Latina y el Caribe (Montevideo), 1980.

SOLOMON, Cynthia, Entornos de aprendizaje con ordenadores. Una reflexión sobre las teorías del aprendizaje, 1a. ed., España, Paidós/M.E.C., 1987.

STRUIK, Dirk Jan, Historia Concisa de las Matemáticas, 2a. ed., México, I.P.N., Serie Maestros del Pensamiento Científico, 1986.

TORRES, Guillermo, "Algunas ideas sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad", pp. 1-3. En: Revista Matmática, Número XIV, Sociedad Matemática Mexicana, junio 1963.

TRABULSE, Elías, Historia de la Ciencia en México. Estudios y Textos. Siglo XVI, 1a. ed., México, CONACYT/Fondo de Cultura Económica, 1983.

VIGGO, P. Hansen and ZWENG, Marilyn J., Computers in Mathematics Education. 1984 Yearbook, second printing, United States of America, National Council of Teachers of Mathematics, 1985.