17
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Metrización y Particiones de la Unidad

Tesis

que para obtener el título de

matemático

presenta

Armando García Martínez

Noviembre de 1991

FALLA DE ORIGEN

INDICE

INTRODUCCION

El concepto de espacio paracompacto fué introducido por Dieudonné en el año 1944 como generalización de ciertos espacios compactos. Posteriormente, se les han dado diferentes aplicaciones, a nosotros nos interesará el hecho que en las variedades la propiedad de ser metrizable es equivalente a la paracompacidad (III.8).

Trabajando sobre este tema de metrización, Urysohn estableció que para los espacios segundo numerables la metrización y la regularidad son propiedades equivalentes. En 1951, Nagata y Smirnov dieron, cada uno por su cuenta, una caracterización completa de los espacios metrizables mediante el siguiente teorema: un espacio X es metrizable si y sólo si es T_3 y poseé una base σ-localmente finita (III.4). Para esto, Stone había demostrado ya la necesidad de dichas condiciones al notar que todo espacio métrico es paracompacto (III.2). Para probar que estas condiciones son suficientes, se demuestra que el espacio es perfectamente normal y a continuación se le sumerge en un espacio de Hilbert generalizado.

Ahora bien, nuestra forma de atacar este problema será por medio de particiones de la unidad, quienes juegan un importante papel en la topología moderna, el análisis y la geometría diferencial. Preguntas como: ¿Se puede definir una estructura Riemanniana *sobre cierta variedad diferencial? (III.3) ¿Cuando se puede extender diferenciablemente una función diferenciable definida en un subconjunto cerrado de una variedad? (II.5) encuentran su respuesta con esta poderosa herramienta.*

En 1953 Michael demostró el teorema principal que caracteriza los espacios paracompactos mediante la existencia de una partición de la unidad subordinada a una cubierta dada (II.7).

Otro hecho importante, es que dada una partición de la unidad $\Phi=\left\{f_i : X \longrightarrow I\right\}$ *y una familia de funciones continuas* $\Psi=\left\{g_i : X \longrightarrow I\right\}$ *la función* $F: X \longrightarrow I$ *dada por* $F(x)=\sum_{i\in I} f_i(x)g_i(x)$ *es continua. De esta menera, propiedades locales pueden ser extendidas a todo el espacio* **X**. *Por ejemplo, un espacio de Hausdorff localmente metrizable es metrizable si y sólo si es paracompacto (III.6).*

PRIMERA PARTE

PARTICIONES DE LA UNIDAD

EN ESPACIOS TOPOLOGICOS

I. ESPACIOS NORMALES Y PARTICIONES DE LA UNIDAD

I.1.DEFINICION. Dada una cubierta abierta $\mathcal{U}=\{U_i\}_I$ de X una *reducción precisa* de $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta $\mathcal{V}=\{V_i\}_I$ tal que $\bar{V}_i\subset U_i\ \forall i$.

I.2.DEFINICIONES. Una familia de subconjuntos de X es *punto finita* si cada $x\in X$ pertenece solo a un número finito de elementos de la familia. Una familia $\{U_i\}_I$ de subconjuntos de X es *localmente finita* si $\forall x\in X$ existe una vecindad N_x tal que $N_x\cap U_i=\phi$ excepto para un número finito de U_i.

I.3.PROPOSICION. Toda cubierta abierta punto finita de un espacio normal admite una reducción precisa.

DEMOSTRACION. Sea $U=\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta punto finita de X.Démosle al cojunto I una relación $\leq$ de buen orden (teo. de Zermelo). Sea i_0 el primer elemento de $(I,\leq)$; definimos el primer cerrado $F_{i_0}= X-(\bigcup_{i>i_0}U_i) \subset U_{i_0}$ y como X es normal, existe V_{i_0} abierto tal que $F_{i_0}\subset V_{i_0}\subset \bar{V}_{i_0}\subset U_{i_0}$ por lo que $V_{i_0}\cup(\bigcup_{i>i_0}U_i)$ es cubierta abierta de X ya que

$$X = F_{i_0}\cup(\bigcup_{i>i_0}U_i) \subset V_{i_0}\cup(\bigcup_{i>i_0}U_i).$$

Dado $i^*\in I$ supongamos que para $i<i^*$ se ha definido V_i abierto tal que $F_i\subset V_i\subset \bar{V}_i\subset U_i$ con $F_i=X-((\bigcup_{j<i}V_j)\cup(\bigcup_{j>i}U_j))$ cerrado, además $(\bigcup_{j<i}V_j)\cup(\bigcup_{j\geq i}U_j)$ es cubierta abierta de X y consecuentemente $(\bigcup_{j\leq i}V_j)\cup(\bigcup_{j>i}U_j)$ también es cubierta abierta de X, ya que $X=F_i\cup((\bigcup_{j<i}V_j)\cup(\bigcup_{j>i}U_j)) \subset (\bigcup_{j\leq i}V_j)\cup(\bigcup_{j>i}U_j)$.

De esta manera se puede obtener $F_{i^*} = X-((\bigcup_{j<i^*}V_j)\cup(\bigcup_{j>i^*}U_j))$. Y para construir V_{i^*} mostremos ahora que $(\bigcup_{j<i^*}V_j)\cup(\bigcup_{j\geq i^*}U_j)$ es cubierta abierta de X. Supongamos que no lo es

i.e. existe $x\in X-((\bigcup_{j<i^*}V_j)\cup(\bigcup_{j\geq i^*}U_j))$

$\Rightarrow x\notin\bigcup_{j<i^*}V_j$ y $x\notin\bigcup_{j\geq i^*}U_j$

$\Rightarrow x\notin\bigcup_{j<i^*}V_j$ y $x\in\bigcup_{j<i^*}U_j$

Por otro lado, U localmente finita $\Rightarrow$ existe $k_0<i^*$ tal que U_{k_0} es el último elemento para el cual $x\in U_{k_0}$. Además sabemos que $(\bigcup_{j\leq k_0}V_j)\cup(\bigcup_{j>k_0}U_j)$ es cubierta abierta de X y $x\notin U_j$ para $j>k_0$

$\therefore$ $x \in V_j$ para alguna $j \le k_0 < i^*$!!

$\therefore$ $(\bigcup_{j<i^*} V_j) \cup (\bigcup_{j \ge i^*} U_j)$ es cubierta abierta de X

$\therefore$ $F_{i^*} = X - ((\bigcup_{j<i^*} V_j) \cup (\bigcup_{j>i^*} U_j)) \subset U_{i^*}$ y ya que X es normal existe V_{i^*} abierto tal que $F_{i^*} \subset V_{i^*} \subset \bar{V}_{i^*} \subset U_{i^*}$ y $(\bigcup_{j \le i^*} V_j) \cup (\bigcup_{j>i^*} U_j)$ es cubierta abierta de X.

De esta manera, por inducción transfinita se construye $V = \{V_i\}_{i \in I}$ cubierta abierta de X tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ ya que para $x \in X$ y U punto finita existe $i_0 \in I$ tal que $x \notin \bigcup_{j>i_0} U_j$ y como $\bigcup(V_j : j \le i_0) \cup \bigcup(U_j : j > i_0)$ es cubierta de X, $x \in \bigcup(V_j : j \le i_0) \subset \bigcup(V_i : i \in I)$.

$\therefore$ **V** es una reducción precisa de **U**.

I.4.DEFINICIONES. Una *partición de la unidad* sobre X es una familia de funciones $\Phi = \{f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}\}_I$ continuas tales que $f_i(x) \ge 0$, $f_i(x) = 0$ excepto para un número finito de f_i's y $\sum_I f_i(x) = 1$ $\forall x \in X$. Decimos que Φ está subordinada a la cubierta $U = \{U_i\}_I$ si $\forall i$ $f_i(X - U_i) = 0$. Φ es localmente finita cuando todo $x \in X$ tiene una vecindad N_x cuya imagen bajo cada función f_i es cero salvo para un número finito de f_i's.

I.5.PROPOSICION. Si una partición de la unidad Φ está subordinada a una cubierta abierta localmente finita de X entonces Φ es localmente finita.

DEMOSTRACION. Sea $\Phi=\{f_i\}_{i\in I}$ subordinada a $U=\{U_i\}_{i\in I}$ $\Rightarrow$ $f_i(X-U_i)=0$ $\forall i$. Para cada $x\in X$ existe N_x tal que $N_x\cap U_i=\phi$ excepto para $i_1,\ldots,i_n\in I$ luego $N_x\subset X-U_i$ y $f_i(N_x)=0$ $\forall i$ diferente de i_j con $j=1,\ldots,n$.

I.6.PROPOSICION. Si Φ es una partición de la unidad localmente finita, entonces $\forall\Phi'\subset\Phi$ $\sum_{\Phi'}f_i:X\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua.

DEMOSTRACION. Sea $\Phi'\subset\Phi$ y dada $x\in X$ sea M_x tal que $f_i(M_x)=0$ excepto para $i_1,\ldots,i_n$. f_{i_j} contínua $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ existe U_{i_j} vecindad de x tal que $y\in U_{i_j}$ $\Rightarrow$ $|f_{i_j}(y)-f_{i_j}(x)|<\varepsilon/n$ $\forall j=1,\ldots,n$.

Sea $N_x=M_x\cap(\bigcap_{j=1,\ldots,n}U_{i_j})$, $y\in N_x$

$$\Rightarrow \quad \left|\sum_{\Phi'}f_i(y)-\sum_{\Phi'}f_i(x)\right| \le \left|\sum_{j=1}^{n}f_{i_j}(y)-f_{i_j}(x)\right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\left|f_{i_j}(y)-f_{i_j}(x)\right| \le n\varepsilon/n = \varepsilon.$$

$\therefore$ $\sum_{\Phi'}f_i$ es contínua.

I.7.PROPOSICION. Si $\Phi=\{f_j\}_J$ es una partición de la unidad localmente finita sobre X y $U=\{U_i\}_I$ es una cubierta abierta de X tal que $\forall f_j\in\Phi$ existe $U_i\in U$ con $f_j(X-U_i)=0$ entonces hay una partición de la unidad en X localmente finita y subordinada a U.

DEMOSTRACION. Dada $\Phi=\{f_j\}_j$ para cada $j\in J$ sea $V_j=X-f_j^{-1}(0)$ y elegimos $i(j)\in I$ tal que $f_j(X-U_{i(j)})=0$. Para cada $i\in I$ sea $W_i=\bigcup\{V_j:i(j)=i\}$ y $W_i=\phi$ si no existe j tal que $i(j)=i$. Claramente, W_i es un abierto contenido en U_i. $\mathbf{W}=\{W_i:i\in I\}$ es un refinamiento abierto de $\mathbf{U}$ veremos que es localmente finito. Observese que Φ es localmente finita $\Leftrightarrow$ $\{V_j\}_{j\in J}$ es localmente finita, pues una vecindad N de x intersecta solo a $V_{j_1},..,V_{j_m}$ $\Leftrightarrow$ $f_j(N)=0$ excepto para $j_1,..,j_m$.De esto se sigue que $\mathbf{W}$ es localmente finita, en efecto con la notación anterior si i es distinto de $i(j_1),..,i(j_m)$ $N\cap W_i=\bigcup\{N\cap V_j:i(j)=i\}=\phi$. Definimos $g_i:X\longrightarrow I$ como $g_i(x)=\sum_A f_j(x)$ con $A=\{j:i(j)=i\}$ y $g_i=0$ si $W_i=\phi$; cada g_i es contínua por (I.6) y $g_i(X-U_i)=0$ $\forall i$ porque si $x\in X-U_i$ entonces $x\in X-V_j=f_j^{-1}(0)$ para todo j tal que $i(j)=i$. Finalmente $\sum g_i=\sum f_j=1$.

I.8.DEFINICION. X es *perfectamente normal* $\Leftrightarrow$ $\forall$ $A,B\subset X$ cerrados ajenos existe $f:X\longrightarrow I$ continua tal que $f^{-1}(0)=A$ y $f^{-1}(1)=B$.

I.9.PROPOSICION. Para un espacio X son equivalentes:

a) X es perfectamente normal.

b) Para todo cerrado $C\subset X$ existe una función contínua $f:X\longrightarrow I$ tal que $f^{-1}(0)=C$.

c) X es normal y todo cerrado de X es un G_δ.

DEMOSTRACION. (a⇒b) Basta tomar C y ϕ cerrados ajenos para que con la hipótesis (a) exista f que satisface (b).

(b⇒c) Sean C y f como en (b) entonces $C=f^{-1}(0)=\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}[0,1/n)$ *i.e.* C es intersección numerable de abiertos. Ahora, dada U vecindad abierta de C, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}[0,1/n_0) \subset U$. Sea $V=f^{-1}[0,1/2n_0) \Rightarrow C \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Por lo que X es normal.

(c⇒a) Sean A y B cerrados ajenos de X normal, por (c) $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ podemos suponer que $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$. Como X es normal, para cada n existe $g_n : X \longrightarrow I$ continua tal que $g_n(A)=0$ y $g_n(X-U_n)=1$.

$f_n=\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i$ converge a una función continua $f=\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} g_i : X \to I$ ya que $\left| f(x)-\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i(x) \right| = \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} g_i(x) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon$ para n suficientemente grande, con lo cual tenemos convergencia uniforme y f es continua. Además, si $x \notin A$ existe g_k tal que $g_k(x)>0$ por lo que $f(x)>0$, así $f^{-1}(0)=A$. Análogamente, existe g contínua tal que $g^{-1}(0)=B$. Sea $h(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}$ como A y B son ajenos el denominador no se anula, h es continua y $h^{-1}(0)=A$ y $h^{-1}(1)=B$.

I.10.PROPOSICION. Un espacio X es normal (perfectamente normal) ⇔ $\forall \mathcal{U}=\{U_i\}_i$ cubierta abierta localmente finita puede encontrarse una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$ (tal que $f_i^{-1}(0)=X-U_i \ \forall i$).

DEMOSTRACION. Sea X normal (perfectamente normal) $\Rightarrow$ para U localmente finita existe una reducción precisa $V=\left\{V_i : \bar{V}_i \subset U_i\right\}_{i\in I}$ y para todo $i\in I$ existe $g_i : X \longrightarrow I$ tal que $g_i(X-U_i)=0$ y $g_i(\bar{V}_i)=1$ ($g_i^{-1}(0)=X-U_i$ y $g_i^{-1}=\bar{V}_i$) además $\sum_I g_i(x)>0$ y $\sum_I g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Así que $f_i=\dfrac{g_i}{\sum g_i} : X \longrightarrow I$ es continua, con $f_i(x)=0$ $\forall i\in I$ excepto para un número finito de i'es y $\sum_I g_i(x)=1$. *i.e.* $\Phi=\left\{f_i : X \longrightarrow I\right\}_i$ es una partición de la unidad tal que $f_i(X-U_i)=0$ por lo que está subordinadaa la cubierta U ($f_i^{-1}(0)=g_i^{-1}(0)=X-U_i$)

Recíprocamente, supongamos que para toda cubierta abierta U localmente finita de X puede encontrarse una partición de la unidad Φ subordinada a U (tal que $f_i^{-1}(0)=X-U_i$).

Sean A,B cerrados ajenos de X $\Rightarrow$ $U_1=X-A$ y $U_2=X-B$ forman una cubierta abierta localmente finita de X.

$\Rightarrow$ existe $\Phi=\left\{f_1, f_2 : X \longrightarrow I\right\}$ con $f_1(X-U_1)=f_1(A)=0$ y $f_2(X-U_2)=f_2(B)=0$

($f_1^{-1}(0)=X-U_1=A$ y $f_2^{-1}(0)=X-U_2=B$)

Así que $f_1(x)+f_2(x)>0$. Sea $F : X \longrightarrow I$; $F(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_1(x)+f_2(x)}$

F resulta ser continua y $F(A)=0$, $F(B)=1$ ($F^{-1}(0)=A$; $F^{-1}(1)=B$).

$\therefore$ X es normal (perfectamente normal).

II ESPACIOS PARACOMPACTOS Y PARTICIONES DE LA UNIDAD

II.1.DEFINICIONES. Dada una cubierta $U=\{U_i\}_{i\in I}$ un *refinamiento* de U es una cubierta $V=\{V_j\}_{j\in J}$ tal que para toda V_j existe U_i con $V_j\subset U_i$. Un espacio X es *paracompacto* si toda cubierta abierta posee un refinamiento abierto localmente finito.

II:2.PROPOSICION. La paracompacidad es una propiedad débilmente hereditaria.

DEMOSTRACION. Dado un subespacio cerrado E de X y una cubierta abierta $A=\{A_i\}_{i\in I}$ de E con cada $A_i=E\cap U_i$, U_i abierto de X. La cubierta abierta $(X-E)\cup\{U_i\}_{i\in I}$ de X tiene un refinamiento abierto $V=\{V_j\}_{j\in J}$ localmente finito, entonces $\{E\cap V_j\}_{j\in J}$ es un refinamiento abierto localmente finito de A.

II.3.PROPOSICION. Si F es una familia de subconjuntos de X localmente finita, entonces $\{\bar{E}:E\in F\}$ es localmente finita y $\bigcup(\bar{E}:E\in F)=\overline{\bigcup(E:E\in F)}$.

DEMOSTRACION. Dada $x\in X$ sea N una vecindad abierta de x que solo intersecta a $E_1,..,E_m$ de F. Ahora bien, $E\cap N=\phi$ significa que el cerrado X-N contiene a E, luego contiene a $\bar{E}$, de donde $\bar{E}\cap N=\phi$; esto sucede para todo $E\in F$ diferente de E_i, $i=1,..,m$ por lo tanto $\{\bar{E}:E\in F\}$ es localmente finita. La inclusión $\bigcup(\bar{E}:E\in F)\subset\overline{\bigcup(E:E\in F)}$ siempre se cumple, veamos la otra contensión. Si $x\in\overline{\bigcup(E:E\in F)}$ y $N,E_1,..,E_m$ son como antes, toda vecindad M de x intersecta a $\bigcup(E:E\in F)$ luego $M\cap\bigcup(E_i:i=1,..,m)\supset(M\cap N)\cap\bigcup(E:E\in F)$ es diferente del vacío, así que $x\in\overline{\bigcup(E_i:i=1,.,m)}=\bigcup(\bar{E}_i:i=1,.,m)\subset\bigcup(\bar{E}:E\in F)$.

II.4.PROPOSICION. Sea X paracompacto.

a) Si es regular, entonces es normal.

b) Si es Hausdorff, entonces es T_4.

DEMOSTRACION. a) Sean A y B dos cerrados ajenos de X, para cada $b\in B$ sea U_b vecindad abierta de b tal que $A\cap\bar{U}_b=\phi$. La cubierta abierta $(X-B)\cup\{U_b:b\in B\}$ de X tiene un refinamiento $\mathbf{V}$ localmente finito. Sea $\mathbf{V}'=\{V\in\mathbf{V}:V\cap B$ es no vacío$\}$. Como cada $V\in\mathbf{V}'$ está contenido en algún U_b, $A\cap\bar{V}=\phi$, y puesto que $\mathbf{V}'$ es localmente finita $A\cap\overline{\bigcup_{\mathbf{V}'} V} = A\cap\bigcup_{\mathbf{V}'}\bar{V} = \phi$, luego $X-\bigcup_{\mathbf{V}'}\bar{V}$ y $\bigcup_{\mathbf{V}'}V$ son vecindades ajenas de A y B respectivamente.

Ahora si X es T_2 para $A=\{a\}$ y B un cerrado que no contiene al punto *a*, lo anterior es válido, con lo que X es regular y aplicando el inciso anterior X es T_4.

II.5.DEFINICION. Una familia de subconjuntos de X es *σ-localmente finita* si es la unión numerable de familias localmente finitas. Las familias localmente finitas son σ-localmente finitas.

II.6.PROPOSICION. Para un espacio regular X son equivalentes:

a) X es paracompacto.

b) Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito.

c) Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento localmente finito.

d) Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito.

DEMOSTRACION. Es obvio que $(a\Rightarrow b)$. Supongamos que X satisface b). Dada $\mathbf{U}$ una cubierta abierta de X, sea $\mathbf{V}=\mathbf{V}_1\cup\mathbf{V}_2\cup\cdots$ un refinamiento abierto de $\mathbf{U}$ donde cada $\mathbf{V}_n$ es localmente finita. Si $V_n=\bigcup_{v\in\mathbf{V}_n} V$ y $W_n=V_n-\bigcup_{i<n} V_i$ entonces $\mathbf{W}=\{W_1,W_2,..\}$ es una cubierta de X que es localmente finita, pues dado $x\in X$, si n es el menor entero tal que $x\in V_n$, se tiene que $x\in W_n$ y $V_n\cap W_m=\phi$ para todo $m>n$. Luego $\{W_n\cap V: V\in\mathbf{V}_n, n\in\mathbb{N}\}$ es un refinamiento de $\mathbf{U}$ localmente finito. Entonces X satisface (c).

Veamos $(c\Rightarrow d)$. Dada una cubierta abierta $\mathbf{U}$ de X, elegimos para cada punto x un elemento $U_x\in\mathbf{U}$ que lo contiene. Ahora bien, por ser X regular, existe un abierto V_x tal que $x\in V_x\subset\bar{V}_x\subset U_x$. Sea $\mathbf{W}$ un refinamiento localmente finito de $\{V_x:x\in X\}$, entonces $\{\bar{W}:W\in\mathbf{W}\}$ es una cubierta cerrada localmente finita de X que refina a $\mathbf{U}$.

Finalmente, supongamos que X sdatisface (d). Consideremos una cubierta abierta $\mathbf{U}$ de X. Sea $\mathbf{F}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathbf{U}$. Para cada punto x elegimos una vecindad abierta V_x que intersecta a solo un número finito de elementos de $\mathbf{F}$. Por (d) $\{V_x:x\in X\}$ tiene un refinamiento cerrado $\mathbf{C}$ localmente finito. Ahora, para $F\in\mathbf{F}$ el conjunto $A_F = X-\bigcup\{C\in\mathbf{C}:C\subset X-F\}$ contiene a F y por el lema anterior es abierto. Veremos que $\{A_F:F\in\mathbf{F}\}$ es localmente finita. Sea N una vecindad de x que intersecta únicamente a los elementos $C_1,..,C_m$ de $\mathbf{C}$; dado que $C_i\subset V_{x_i}$ para algún punto x_i y que V_{x_i} intersecta solamente a los elementos

$F_{i_1},\ldots,F_{i_{m(i)}}$ de $\mathcal{F}$, se tiene para F diferente de F_{i_j} que $N\cap F\subset \bigcup_{i=1}^{m} C_i\cap F=\phi$; luego $N\cap A_F = N-\left\{N\cap C: C\in\mathcal{C} \text{ y } C\subset X-F\right\} \subset N-\bigcup_{i=1}^{m} C_i = \phi$.
Con el fin de obtener un refinamiento de $\mathcal{U}$, para cada $F\in\mathcal{F}$ elegimos un elemento $U_F\in\mathcal{U}$ que lo contenga, ahora es fácil comprobar que $\left\{A_F\cap U_F : F\in\mathcal{F}\right\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$.

II.7.PROPOSICION. Un espacio regular o de Hausdorff es paracompacto $\Leftrightarrow$ toda cubierta abierta de X tiene subordinada una partición de la unidad; y en este caso existe siempre una partición de la unidad localmente finita subordinada a una cubierta dada.

DEMOSTRACION. $\Rightarrow$) X paracompacto y regular (o de Hausdorff) $\Rightarrow$ X es normal.Sea $\mathcal{U}=\left\{U_i\right\}_{i\in I}$ cubierta abierta de X y $\mathcal{V}=\left\{V_j\right\}_{j\in J}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$.
Por la proposición (I.10), existe una partición de la unidad sobre X subordinada a $\mathcal{V}$, y por (I.7) existe una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathcal{U}$. Observamos que la partición obtenida es localmente finita.
$\Leftarrow$)Dada una cubierta abierta $\mathcal{U}=\left\{U_i\right\}_{i\in I}$ de X y $\Phi=\left\{f_i\right\}_{i\in I}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$ no necesariamente localmente finita. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $\mathcal{V}_n=\left\{f_i^{-1}(1/n,1]\right\}_{i\in I}$.

Por otro lado, $\forall x\in X$ $f_i(x)=0$ para $i\in I-\left\{i_1, i_2, \ldots, i_n\right\}=I'$ por lo que $X-\bigcap_{i\in I'} f_i^{-1}[1/n, 1]$ es una vecindad de x que intersecta a un número finito de elementos de V_n precisando,

$(X-\bigcap_{i\in I'} f_i^{-1}[1/n, 1]) \cap f_i^{-1}(1/n, 1] = \phi$ excepto para $i_1, \ldots, i_n$.

Veamos que $V=\bigcup_n V_n$ cubre a X. Sea $x\in X$, como $\sum_{i\in I} f_i(x)=1. \Rightarrow$ existe i_0 tal que $f_{i_0}(x)>0$; sea $n_0\in\mathbb{N}$ con $0<1/n_0<f_{i_0}(x) \Rightarrow x\in f_{i_0}^{-1}(1/n_0, 1]\in V$.

Finalmente, $f_i(X-U_i)=0 \Rightarrow f_i^{-1}(1/n, 1]\subset U_i$.

$\therefore$ V es un refinamiento abierto σ-localmente finito de U.

$\therefore$ X es paracompacto. Y entonces, por la primera parte de la demostración X admite una partición de la unidad Ψ localmente finita subordinada a U.

III METRIZACION Y PARTICIONES DE LA UNIDAD

III.1.PROPOSICION. Sea ϕ una partición de la unidad localmente finita sobre X, entonces $\sigma: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\sigma(x,y)=\sum_{i\in I} |f_i(x)-f_i(y)| \text{ es una seudométrica sobre X.}$$

Además, la topología de X es más fina que la topología τ_σ definida por σ.

DEMOSTRACION. $\forall$ $x,y,z \in X$ se tiene que: $\sum_{i\in I} |f_i(x)-f_i(y)|$ está bien definida porque $\sum_{i\in I} |f_i(x)-f_i(y)| \leq \sum_{i\in I} f_i(x) + \sum_{i\in I} f_i(y) = 2$

$\sigma(x,y)\geq 0$ es claro.

$$\sigma(x,y) = \sum_{i\in I} |f_i(x)-f_i(y)| = \sum_{i\in I} |f_i(y)-f_i(x)| = \sigma(y,x)$$

$$\sigma(x,y) = \sum_{i\in I} |f_i(x)-f_i(y)| \le \sum_{i\in I} |f_i(x)-f_i(z)|+|f_i(z)-f_i(y)|$$

$$=\sum_{i\in I} |f_i(x)-f_i(z)| + \sum_{i\in I} |f_i(z)-f_i(y)| = \sigma(x,z) + \sigma(z,y).$$

$\therefore \sigma$ es una seudométrica en X.

Por demostrar $\tau_\sigma \subset \tau$. Sea A en $\tau_\sigma \Rightarrow \forall x\in X$ existe $\varepsilon(x)>0$ tal que $B(x,\varepsilon)\subset A$. Φ partición de la unidad localmente finita $\Rightarrow$ para x existe N_x tal que $f_i(N_x)=0$ $\forall i\in I$ excepto para $i_1,\ldots,i_n$ y como cada f_i es contínua existe N_x^i tal que

$y \in N_x^i \Rightarrow |f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon/n \quad \forall i=1,\ldots,n.$

Sea $N = N_x \cap \bigcap_{i\in I} N_x^i \in \tau$. P.D. $N\subset B(x,\varepsilon)\subset A$

$$\text{Sea } z\in N \Rightarrow \sigma(x,z)=\sum_{i\in I} |f_i(x)-f_i(z)| = \sum_{j=1}^{n} |f_{i_j}(x)-f_{i_j}(z)|<\varepsilon$$

$\therefore A\in\tau$ y 1_x es contínua.

III.2.PROPOSICION. Todo espacio métrico es paracompacto.

DEMOSTRACION. Como X es regular, basta probar que dada U cubierta abierta de X esta admite un refinamiento σ-localmente finito.

Sea $U=\{U_i\}_{i\in I}$ por el teorema de Zermelo podemos asignar a I una relación de buen orden $\le$. Para cada $U_i\in U$ y cada $n\in\mathbb{N}$.

$U^*_{i,n}=\left\{x\in X: d(x,X-U_i)\ge 1/2^n \text{ y } d(x,X-U_j)<1/2^{n+1} \text{ para todo } j<i\right\}$ es un

conjunto contenido en U_i. Ahora, si $\dot{U}_{i,n}=\phi$ definimos $V(\dot{U}_{i,n})=\phi$ pero si $\dot{U}_{i,n}$ es no vacío sea $V(\dot{U}_{i,n})=\left\{x\in X: d(x,\dot{U}_{i,n})<1/2^{n+3}\right\}$. $V(\dot{U}_{i,n})$ es un abierto que contiene a $\dot{U}_{i,n}$ y contenido en U_i.

Sean U_i y U_j dos elementos distintos de U, podemos suponer $j<i$. Si $z\in V(\dot{U}_{i,n})\cap V(\dot{U}_{j,n})$ existen $x\in\dot{U}_{i,n}$ y $x'\in\dot{U}_{j,n}$ que distan a lo más $1/2^{n+3}$ de z, de donde $d(x,x')\leq 2(1/2^{n+3})=1/2^{n+2}$. Por otro lado, $d(x',x)\geq d(x',X-U_j')-d(x,X-U_j')>1/2^{n}-1/2^{n+1}=1/2^{n+1}$ lo que no puede ser por lo anterior. Luego $V_n=\left\{V(\dot{U}_{i,n}):U_i\in U\right\}$ es una familia ajena dos a dos. Mostremos que $V=\bigcup_n V_n$ cubre a todo X: dado $x\in X$, sea U_k el primer elemento de U al cual pertenece x, para n un natural tal que $d(x,X-U_k)\geq 1/2^n$, $x\in\dot{U}_{k,n}\subset V(\dot{U}_{k,n})$, esto es porque $d(x,X-U_j)=0$ $\forall j<k$.

$\therefore$ V es un refinamiento σ-localmente finito de U.

III.3.DEFINICION. $A\subset X$ es un *conjunto cero* si existe $\psi:X\longrightarrow I$ contínua con $\psi^{-1}(0)=A$. $B\subset X$ es un *conjunto cocero* si existe $\psi:X\longrightarrow I$ contínua con $X-\psi^{-1}(0)=B$

III.4.TEOREMA DE METRIZACION. Son equivalentes:

a) X es metrizable.

b) X es T_3 y tiene una base σ-localmente finita.

c) X es T_1 y tiene una sucesión de particiones de la unidad $(\Phi_n)_n$ localmente finitas tal que la colección de coceros $\left\{X-f_i^{-1}(0) : f_i\in\Phi_n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ es base de X.

DEMOSTRACION. X metrizable $\Rightarrow$ X es T_3 y paracompacto.

Consideremos $V_n=\left\{B(x,1/n):x\in X\right\}$ cubierta abierta con alguna métrica que defina su topología. Por ser X paracompacto, existe U_n refinamiento abierto localmente finito de V_n.

$\Rightarrow U=\bigcup_n U_n$ es una familia σ-localmente finita. Veamos que es base de la topología. Sea A abierto y $x\in X$ consideremos $n\in\mathbb{N}$ tal que $B(x,1/n)\subset A$ y $U\in U_{2n}$ tal que $x\in U \Rightarrow \operatorname{diam}(U)<1/n \Rightarrow U\subset B(x,1/n)\subset A$.

$\therefore$ U es base σ-localmente finita de la topología de X.

b)$\Rightarrow$c).Sea $B=\bigcup_n B_n$ base σ-localmente finita de X, con cada B_n una cubierta abierta localmente finita de X (de no ser así, agregamos conjuntos abiertos para que cumpla esta condición). Dada cualquier cubierta abierta U de X siempre tiene un refinamiento por elementos de esta base, por lo cual X es paracompacto y con ello T_4, de hecho es perfectamente normal.

Sea A abierto de X $\Rightarrow \forall x\in A$ existe $V_n\in B_n$ tal que $x\in V_n\subset\bar{V}_n\subset A$.

Sea $F_n=\bigcup\left\{\bar{V}_n : \bar{V}_n\subset A\right\}$ el cual es cerrado ya que es la unión de una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de X. Y $A=\bigcup_n F_n$

$\therefore$ todo abierto A es F_σ y X perfectamente normal.

$\therefore$ Para cada B_n existe Φ_n partición de la unidad localmente finita tal que B_n es la colección de los coceros de las funciones de Φ_n.

$\therefore$Se cumple la afirmación.

c)$\Rightarrow$a) Para cada Φ_n partición de la unidad consideremos la seudométrica σ_n definida anteriormente, así (X,σ_n) es un espacio topológico seudométrico. Y la función identidad $g_n: X \longrightarrow (X,\sigma_n)$ es contínua. De esta manera $F: X \longrightarrow \prod_n (X,\sigma_n)$ dada por $F(x)=(g_n(x))_n$ es contínua, y el espacio producto es seudometrizable por tener una cantidad numerable de factores.

Sea $C \subset X$ cerrado y $x \notin C$; la familia de coceros es base $\Rightarrow$ $X - f_{i,n}^{-1}(0) \subset X - C$ para alguna n y alguna i.

$\Rightarrow C \subset f_{i,n}^{-1}(0)$ *i.e.* $f_{i,n}(x)>0$ y $f_{i,n}(C)=0$.

$\therefore \sigma_n(x,C)>0$ y $x \notin \overline{g_n(C)}$.

$\therefore$ F distingue puntos de cerrados y por ser X T_1 también distingue puntos.

$\therefore$ F es un encaje.

$\therefore$ X es homeomorfo a un subespacio de $\prod_n (X,\sigma_n)$ seudometrizable.

$\therefore$ X es seudometrizable. Y como es T_1 es metrizable.

III.5.DEFINICION. Un espacio X es *localmente metrizable* si para cada $x \in X$ existe N_x vecindad de x metrizable.

III.6.PROPOSICION. Un espacio de Hausdorff localmente metrizable es metrizable $\Leftrightarrow$ es paracompacto.

DEMOSTRACION. $\Rightarrow$) Por proposición III.2.

$\Leftarrow$) X de Hausdorff y paracompacto implica X T_3. Basta por III.4 probar que X tiene una base σ-localmente finita.

Por las hipótesis existe $U=\{U_i\}_{i\in I}$ cubierta abierta localmente finita de X con cada U_i metrizable. Usando el teorema anterior, sea $B_i=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{i,n}$ una base de U_i con cada $B_{i,n}$ localmente finita; entonces $V_n=\{B\in B_{i,n}:i\in I\}$ es localmente finita (para $x\in X$ existe una vecindad N de x tal que N intersecta sólo a U_{i_j} $j=1,.,k$; y para $n\in\mathbb{N}$ existe N_{n,i_j} vecindad de x que intersecta un número finito de B's en cada una de las $B_{i_j,n}$ correspondientes $\therefore$ $N\cap\bigcap\{N_{ij}:j=1,.,k\}$ es una vecindad de x que intersecta un número finito de elementos de V_n) y dado $x\in A$ abierto de X, $x\in U_i$ para alguna $i\in I$ $\Rightarrow$ existe $B_{i,n}\in V_n$ tal que $x\in B_{i,n}\subset A\cap U_i$. $\therefore$ $V=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$ es base de X.

III.7.DEFINICION. Una *variedad topológica* M de dimensión m es un espacio topológico de Hausdorff localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^m$, *i.e.* para $p\in M$ hay un homeomorfismo $\varphi:U\longrightarrow V$, con U abierto de $\mathbb{R}^m$ y V vecindad abierta de p en M.

III.8.PROPOSICION. Una variedad topológica es metrizable $\Leftrightarrow$ es paracompacta.

DEMOSTRACION. Es consecuencia inmediata de la proposición anterior.
Además, notamos que toda variedad segundo numerable es metrizable por ser paracompacta.

APENDICE

Una familia $F=\left\{f_s:X\longrightarrow I\right\}_{s\in S}$ de funciones continuas es una partición de la unidad sobre X si $\sum_{s\in S} f_s(x)=1$, donde esta igualdad significa que para cada $x\in X$ solo un conjunto numerable de f_s no son cero en x, y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{s_n}(x)$ converge a 1 donde $\left\{s_1,s_2,\ldots\right\}=\left\{s\in S: f_s(x) \text{ es diferente de cero}\right\}=S(x)$. Como la serie es absolutamente convergente ; por el siguiente

Teorema: (Bartle. The elements of real analysis. pág 292)

Dada $\sum X_n$ serie absolutamente convergente en $\mathbb{R}^p$, cualquier reordenamiento de la serie converge absolutamente al mismo valor.

$\therefore$ No importa como se haga el ordenamiento de términos de $S(x)$ para obtener que la serie $\sum f_s(x)$ converge a 1.

$F=\left\{f_s:X\longrightarrow I\right\}_{s\in S}$ es localmente finita si $\left\{f_s^{-1}(0,1]\right\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta localmente finita de X. Esto es, para cada $x_0\in X$ existe U_0 vecindad de X y $S_0=\left\{s_1,s_2,..,s_k\right\}\subset S(x_0)$ tal que para todo $x\in U_0$ $f_s(x)=0$ $\forall s\in(S(x_0)-S_0)$ y $\sum_{n=1}^{k} f_{s_n}(x)=1$.

Una partición de la unidad $F=\left\{f_s:X\longrightarrow I\right\}$ sobre X está subordinada a una cubierta U de X si la cubierta $\left\{f_s^{-1}(0,1]\right\}$ de X es un refinamiento de U.

De manera que nuestra definición original de partición de la unidad localmente finita coincide con esta última. Observamos que sin hacer ningún cambio escencial a todo nuestro desarrollo referente a particiones de la unidad, los resultados son válidos.

SEGUNDA PARTE

PARTICIONES DE LA UNIDAD EN VARIEDADES DIFERENCIALES

I DEFINICIONES

I.1. DEFINICION. Una *variedad diferencial* es una variedad topológica **M** junto con una familia de homeomorfismos $\left\{X_i : U_i \longrightarrow X_i(U_i) \subset M\right\}_{i\in I}$ con U_i abierto en $\mathbb{R}^m$ tal que:

(a) $\left\{X_i(U_i)\right\}_{i\in I}$ es cubierta abierta de **M**.

(b) $\forall$ i,j $X_j^{-1} \circ X_i$ es una función $\mathbb{C}^\infty$.

(c) La familia $\left\{(U_i, X_i)\right\}_{i\in I}$ es maximal relativa a las condiciones (a) y (b).

Una parametrización en $p\in M$ es una pareja (U_i, X_i) tal que $p\in X_i(U_i)$, se puede suponer en general que $U_i = B(0,\varepsilon)$ $\varepsilon>0$ y $X_i(0)=p$. Una familia $\left\{(U_i, X_i)\right\}_{i\in I}$ que satisface (a) y (b) es una estructura diferencial en **M**. Indicaremos una variedad de dimensión m por M^m.

Ejemplos. $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferencial con estructura $\left\{(\mathbb{R}^n,\text{identidad})\right\}$.

Sean M^m y N^n variedades diferenciales y $\mathcal{U}=\left\{(U,X)\right\}$ $\mathcal{V}=\left\{(V,Y)\right\}$ sistemas coordenados de vecindades para **M** y **N** respectivamente. Entonces **MxN** es una variedad diferencial de dimensión m+n y un sistema de coordenadas está dado por $\left\{(W,Z)\right\}$ con $W=U\times V$ y $Z:U\times V\longrightarrow M\times N$ dada por $Z(u,v)=(X(u),Y(v))$.

Análogamente, para A abierto de la variedad **M** resulta ser una subvariedad, con sistemas de coordenadas $\left\{(U\cap A,X|_A)\right\}$ para las U tales que $U\cap A$ es diferente del vacío.

I.2.DEFINICION. Sean M^m y N^n variedades diferenciales. Una función $\psi:M\longrightarrow N$ es *diferenciable* si es contínua, y $\forall p\in M$ dada una parametrización $Y_j:V_j\longrightarrow N$ en $\psi(p)$ existe una parametrización $X_i:U_i\longrightarrow M$ en p con $\psi(X_i(U_i))\subset Y_j(V_j)$ tal que $Y_j^{-1}\circ\psi\circ X_i:U_i\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es una función $\mathcal{C}^\infty$. Se sigue de (b) que la definición es independiente de la elección de las parametrizaciones.

Para $A\subset M$, se dice que $\psi:A\longrightarrow N$ es diferenciable si existe $\psi^*:W\longrightarrow N$ diferenciable con W subvariedad abierta de **M** que contiene a A y $\psi^*|_A=\psi$.

Definamos ahora la noción de vector tangente. Usando nuestra experiencia en $\mathbb{R}^3$, un vector tangente en un punto p de una superficie en $\mathbb{R}^3$ se define como $\alpha'(0)$ la velocidad en $p=\alpha(0)$ de una curva $\alpha=\alpha(t)$ en la superficie. Como en el caso de variedades diferenciales no tenemos un espacio ambiente, usemos una propiedad característica de vector tangente que sustituya la noción de velocidad. Para la variedad $\mathbb{R}^n$, sea $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una curva diferenciable con $\alpha(0)=p$. $\alpha(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ entonces $\alpha'(0)=(x_1'(0),x_2'(0),\ldots,x_n'(0))=v\in\mathbb{R}^n$.

Sea f una función diferenciable definida en una vecindad de p con valores en $\mathbb{R}$. Podemos restringir f a la curva α y calcular la derivada direccional según el vector $v\in\mathbb{R}^n$ como :

$$\left.\frac{df\circ\alpha}{dt}\right|_{t=0} = \nabla f\cdot\alpha'\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f$$

$\therefore$ La derivada direccional según v es un operador sobre funciones diferenciables que depende unicamente de v. Esta es la propiedad característica que usaremos para definir vector tangente en variedades.

Sea **M** una variedad diferencial. Una función diferenciable $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M$ es una *curva diferenciable* en **M**. Supongamos que $\alpha(0)=p\in M$, y sea $\mathfrak{D}$ el conjunto de funciones $M\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciables en p. El *vector tangente* a la curva en t=0 es la función:$\alpha'(0):\mathfrak{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\alpha'(0)(f)=\left.\frac{df\circ\alpha}{dt}\right|_{t=0}.$$

En particular, si tomamos la curva coordenada $x_i \longrightarrow X(0,..,x_i,..,0)$ el vector tangente a esta curva es $(\frac{\partial}{\partial x_i})_o$

Un *vector tangente a* **M** *en p* es el vector tangente en t=0 de alguna curva $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M$ con $\alpha(0)=p$.

Para una parametrización $X:U\longrightarrow M$ en $p=X(0)$ podemos escribir la función f y la curva α en esta parametrización por $f\circ X(q)=f(x_1,\ldots,x_n)$, $q=(x_1,\ldots,x_n)\in U$ y $X^{-1}\circ\alpha(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ respectivamente. $\therefore$ restringiendo f a α obtenemos:

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{df\circ\alpha}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d(f\circ X)\circ(X^{-1}\circ\alpha)(t)}{dt}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left.\frac{\partial(f\circ X)}{\partial x_i}\right|_o x_i'(0) = (\sum_{i=1}^{m} x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_o)f.$$

Expresando $\frac{\partial(f\circ X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

En otras palabras, un vector tangente a **M** en p se expresa por

(*) $$v=\alpha'(0)=\sum_{i=1}^{m} x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_o$$

independiente de la parametrización X_i; depende solamente de las derivadas de α en un sistema de coordenadas.

El *espacio tangente* T_pM es el conjunto de vectores tangentes a **M** en p con las operaciones usuales en las funciones y una parametrización $X_i:U_i\longrightarrow M$ determina una base asociada $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ en T_pM.

Sean M^m y N^n variedades diferenciales y sea $\psi:M\longrightarrow N$ una función diferenciable. Para cada $p\in M$ y cada $v\in T_pM$ escójase una curva diferenciable $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M$ tal que $\alpha(0)=p$ y $\alpha'(0)=v$, entonces $\beta=\psi\circ\alpha$ es una curva diferenciable en N con $\beta(0)=\psi(p)$ y $\beta'(0)\in T_{\psi(p)}N$. La función $d\psi_p:T_pM\longrightarrow T_{\psi(p)}N$ dada por $d\psi_p(v)=\beta'(0)$ es una función lineal que no depende de la elección de α, esta es la diferencial de ψ en p.

Para $X_i:U_i\longrightarrow M$ y $Y_j:V_j\longrightarrow N$ parametrizaciones de p y $\psi(p)$ respectivamente la expresión de $\beta'(0)$ en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}_{i=1}^{n}$ de $T_{\psi(p)}N$ asociada a la parametrización Y_j está dada por:

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i'(0)\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} x_i'(0)\frac{\partial y_n}{\partial x_i} \right) \ldots(*)$$

La relación $(*)$ muestra que $\beta'(0)$ no depende de la elección de α y $\beta'(0) = d\psi_p(v) = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)(x_i'(0))$ con $i=1,..,m$; $j=1,..,n$.

Donde $\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$ indica una matriz de nxm y $(x_i'(0))$ una matriz columna de m elementos. $\therefore$ $d\psi_p$ es una función lineal de T_pM en $T_{\psi(p)}N$ cuya matriz en las bases asociadas a las parametrizaciones X_i , Y_j es $\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$.

Para M una variedad diferencial sea $TM=\left\{(p,v):\ p\in M,\ v\in T_pM\right\}$.

Dada $\left\{(X_i,U_i)\right\}_{i\in I}$ una estructura diferencial en M consideremos las parejas $\left\{((X_i,dX_{ip}),(U_i,\mathbb{R}^m))\right\}$ definidas por

$(X_i, dX_{ip}): Y_i: U_i \times \mathbb{R}^m \longrightarrow X_i(U_i) \times T_pM \subset TM$

$$(q,v) \longrightarrow (X_i(q), dX_{iq}(v))$$

De esta manera, $TM=\cup\left\{\{p\}\times T_pM : p\in M\right\}$ y dando a TM la topología inducida por estas funciones, obtenemos una estructura diferencial sobre dicho espacio.

I.3. DEFINICIONES. $\psi: M \longrightarrow N$ diferenciable y biyectiva es un *difeomorfismo* si $\psi^{-1}: N \longrightarrow M$ es diferenciable. Se dice que $\psi: M \longrightarrow N$ es un *difeomorfismo local* en $p\in M$ si existe una vecindad abierta U de p tal que $\psi|_U: U \longrightarrow \psi(U)$ es un difeomorfismo con $\psi(U)$ abierto de N.

De estas definiciones es fácil ver que si ψ es un difeomorfismo local en $p\in M$ y que si denotamos $\psi_o=\psi|_U$ y ψ_o^{-1} a su inversa en $\psi(U)$ aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$1_{T_pM}=d\left((\psi_o)_p\circ(\psi_o^{-1})_{\psi(p)}\right)=d(\psi_o)_p\circ d(\psi_o^{-1})_{\psi(p)}$$

y análogamente para la identidad en $T_{\psi(p)}N$; de esta manera, $d\psi_p: T_pM \longrightarrow T_{\psi(p)}N$ es un isomorfismo.

II PARTICIONES DE LA UNIDAD DIFERENCIABLES

II.1.PROPOSICION. Sean $K,F\subset\mathbb{R}^n$ compacto y cerrado respectivamente, $K\cap F=\phi$. Entonces existe una función $\sigma\in\mathcal{C}^\infty$ cuyo dominio es todo $\mathbb{R}^n$, su rango es $[0,1]$ y tal que $\sigma(x)=1$ $\forall x\in K$ y $\sigma(x)=0$ $\forall x\in F$.

DEMOSTRACION. En dos partes

a) Sea $B(a,\varepsilon)=\left\{x\in\mathbb{R}^n : |x-a|<\varepsilon\right\}$. Mostremos que existe $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ positiva en $B(a,\varepsilon)$, que toma el valor 1 en $\overline{B(a,\varepsilon/2)}$ y cero fuera de $B(a,\varepsilon)$.

Sea $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $h(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ e^{-1/t} & t>0\end{cases}$

Dada de esta forma $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es positiva en $(0,\infty)$, todas sus derivadas existen y son cero en $t=0$.

Sea $\bar{g}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\bar{g}(x) = \dfrac{h(\varepsilon^2-|x|^2)}{h(\varepsilon^2-|x|^2)+h(|x|^2-\varepsilon^2/4)}$.

Como el denominador no se anula, $\bar{g}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está bien definida y es de clase $\mathbb{C}^\infty$. Cuando $|x|\geq\varepsilon$ el numerador es cero, $\bar{g}(x)>0$ para $|x|<\varepsilon$ y cuando $0\leq|x|\leq\varepsilon/2$ $\bar{g}(x)=1$. Así que $g(x)=\bar{g}(x-a)$ tiene las propiedades deseadas.

b) Consideremos ahora $B(a_i,\varepsilon)$ $i=1,..,k$ tal que $B(a_i,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n-F$ y $K\subset\bigcup_{i=1}^{k}B(a_i,\varepsilon/2)$. Para cada $B(a_i,\varepsilon)$ sea g_i como en el inciso (a) y definimos $\sigma:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sigma(x)=1-\prod_{i=1}^{k}(1-g_i(x))$.

$\forall x\in K$ $\sigma(x)=1$; esto es, $\sigma(K)=1$ y $\forall x\notin\bigcup_{i=1}^{k}B(a_i,\varepsilon)$ $\sigma(x)=0$, en particular para todo $x\in F$; $\therefore$ $\sigma(F)=0$.

II.2.DEFINICION. Sea **M** una variedad diferencial, dada $U=\{U_i\}_{i\in I}$ cubierta abierta localmente finita de **M**, una *partición diferenciable de la unidad* subordinada a **U** es una familia $\Phi=\{f_i:\mathbf{M}\longrightarrow\mathbb{R}\}_{i\in I}$ de funciones diferenciables tal que:

1) $\forall x\in\mathbf{M}$ $f_i(x)\geq0$ y es cero excepto para un número finito de i'es en I

2) $\mathrm{Sop}f_i=\overline{(f_i^{-1}(0,1])}\subset U_i$ $\forall i\in I$

3) $\sum_{i\in I}f_i(x) = 1$ $\forall x\in\mathbf{M}$.

Observemos que la definición de Φ partición de la unidad subordinada a **U** dada en la primera parte, difiere de esta en que las funciones $f_i:M \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables y además en aquella definición se pedía $f_i(X-U_i)=0$ *i.e.* $f_i^{-1}(0)\supset X-U_i$ $\therefore$ $f_i^{-1}(0,1]\subset U_i$ y aquí se pide $\overline{(f_i^{-1}(0,1])}\subset U_i$.

II.3.PROPOSICION. Sea **M** una variedad diferencial paracompacta. Entonces dada cualquier cubierta abierta **U** de **M** existe una partición diferenciable de la unidad subordinada a un refinamiento localmente finito de **U**.

DEMOSTRACION. Sea **U** cubierta abierta de **M**, existe **W** refinamiento de **U** por elementos de la forma $W=X_i(B(0,1))$ y $\bar{W}$ compacto (esto se puede hacer tomando adecuadamente las vecindades coordenadas).

M paracompacto $\Rightarrow$ existe **V** refinamiento abierto localmente finito de **W** y por tanto de **U**. Además, si $V\in$**V** $\bar{V}$ es compacto y V es una vecindad coordenada. Es más, existe **V'** reducción precisa de **V** (porque **M** es metrizable). Ahora bien, como V es vecindad coordenada y $\bar{V}'\subset V$ $\Rightarrow$ existen $K\subset A\subset B(0,1)$ compacto y abierto respectivamente tales que: $\bar{V}'=X_i(K)$ y $V=X_i(A)$.

Por II.1 existe $g_v:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $g_v(K)=1$ y $g_v(\mathbb{R}^n-A)=0$.

Sea $h_v:M \longrightarrow I$ definida por $h_v=g_v\circ X_i^{-1}$ diferenciable.

h_v es tal que $h_v(x)=0$ $\forall x\notin V$ y $h_v(x)=1$ $\forall x\in\bar{V}'$.

Sea $F:M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x)=\sum_{v\in V} h_v(x)$, F está bien definida es siempre mayor que cero y es diferenciable porque V es localmente finita. $\therefore$ $f_v:M \longrightarrow \mathbb{R}$; $f_v(x)=\dfrac{h_v(x)}{F(x)}$ es diferenciable y $\Phi=\left\{f_v\right\}_{v\in V}$ es una p.d.u. subordinada a V.

En el siguiente resultado haremos una aplicación diferente de las particiones de la unidad, ahora para la extensión a toda la variedad de una función diferenciable dentro de un conjunto cerrado, la cual es continua en todo M; de manera que fuera de ese conjunto cerrado nuestra nueva función diferenciable se aproxime tanto como deseemos a la original. Para ello necesitaremos del siguiente teorema de Weierestrass sobre aproximación de funciones continuas por medio de polinomios.
Sea $f:K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua cuyo dominio K es compacto en $\mathbb{R}^n$. Entonces dada $\varepsilon>0$ existe una función polinomial $P:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in K$ (Bartle. The elements of real analysis pág. 186).

II.4.PROPOSICION. Sea M una variedad diferencial paracompacta y $A\subset M$ cerrado (posiblemente vacío). Para $g:M \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $g|_A$ es diferenciable y $\varepsilon:M \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua y positiva , existe $h:M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $g(p)=h(p)$ si $p\in A$ y $|g(p)-h(p)|<\varepsilon(p)$ si $p\in M$.

DEMOSTRACION. Como g diferenciable en A cerrado $\Rightarrow$ existe $g^*:W'\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciable con W' abierto de M que contiene a A y $g^*\big|_A=g$. Dado $p\in A$ existe U_p vecindad abierta de p con cerradura compacta tal que $\bar{U}_p\subset W'$. Sea $\varepsilon=\min\left\{\varepsilon(q):q\in\bar{U}_p\right\}$ $\Rightarrow$ existen abiertos $V_p', V_p''\subset U_p$ tales que $|g(q)-g(p)|<\varepsilon/2$ $\forall q\in V_p'$ y $|g^*(q)-g^*(p)|<\varepsilon/2$ $\forall q\in V_p''$. Sea $V_p=V_p'\cap V_p''\Rightarrow$ $|g(q)-g^*(q)|<\varepsilon$.

Sea $W_0=\bigcup_{p\in A}V_p$ $\Rightarrow$ W_0 es un abierto que contiene a A y $\forall q\in W_0$ $|g(q)-g^*(q)|<\varepsilon(q)$. Sea $h_0=g^*|_{W_0}$.

Consideremos ahora $M-A$, cubrámosla con vecindades coordenadas, $\left\{(U_i,X_i)\right\}_{i\in I'}$ con $X_i:U_i=B(0,2\delta_i)\longrightarrow X_i(U_i)\subset M-A$ y si $X_i(\overline{B(0,\delta_i)})=\bar{W}_i$; $\left\{W_i\right\}_{i\in I'}$ cubre a $M-A$. Sea $\varepsilon_i=\min\left\{\varepsilon(q):q\varepsilon\bar{W}_i\right\}$ y sea P_i un polinomio que satisfaga la condición de Weierstrass para ε_i y $g\circ X_i$ en $\overline{B(0,\delta_i)}$

Definimos $h_i:M\longrightarrow\mathbb{R}$; $h_i(p)=P_i\circ X_i^{-1}(p)$ si $p\in W_i$ y cero en otro caso. $\Rightarrow$ $|h_p(q)-g(q)|<\varepsilon(q)$ en W_i (notemos que h_i es diferenciable en W_i y puede no ser continua fuera de W_i).

Para simplificar nuestra notación hagamos $I=I'\cup\{0\}$, así, sea $\left\{f_i:M\longrightarrow I\right\}_{i\in I}$ una partición de la unidad subordinada a $\left\{W_i\right\}_{i\in I}$ $\Rightarrow$ $f_i\cdot h_i:M\longrightarrow\mathbb{R}$ es una funcıón diferenciable que se anula fuera de $\mathrm{sop}f_i\subset W_i$. Sea $h:M\longrightarrow\mathbb{R}$; $h(p)=\sum_{i\in I}f_i(p)h_i(p$ diferenciable, como $\sum_{i\in I}f_i=1$ se tiene que: $|g(p)-h(p)|$ $=\left|\sum_{i\in I}f_i(p)g(p)-\sum_{i\in I}f_i(p)h_i(p)\right| \leq \sum_{i\in I}f_i(p)\,|g(p)-h_i(p)|$

si $p\notin W_i$ $\Rightarrow$ $f_i(p)(g(p)-h_i(p))=0$ y si $p\in W_i$ $\Rightarrow$ $|g(p)-h_i(p)|<\varepsilon(p)$. Por lo que $|g(p)-h(p)|<\varepsilon(p)$ $\forall p\in M$ y $h|_A=g$.

Como una consecuencia de este resultado veamos una nueva forma del teorema de extensión de Tietze (Un espacio topológico X es normal $\Leftrightarrow$ para cada cerrado $A \subset X$, cada función continua $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una extensión continua $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dugundji. Topology pág.149.)

II.5.PROPOSICION. (*Teorema de extensión de Tietze para variedades diferenciales*). Sea M una variedad diferencial paracompacta y $A \subset M$ un subespacio cerrado de la variedad. Entonces cualquier función diferenciable $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una extensión diferenciable $\bar{f}: M \longrightarrow \mathbb{R}$

DEMOSTRACION. Como $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable significa que tiene una extensión diferenciable a un abierto U de M que contiene a A, y ya que M es normal, por el teorema de Tietze, f tiene una extensión continua $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$. Aplicando la proposición anterior para $\varepsilon: M \longrightarrow \mathbb{R}$; $\varepsilon(p) = 1 \ \forall p \in M$, existe $\bar{f}: M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\bar{f}|_A = f$.

III METRICA RIEMANIANA

III.1.DEFINICION. Un *campo vectorial diferenciable* **V** sobre **M** es una función $V:M \longrightarrow TM$ tal que $V(p) \in T_pM$

con $V_p \in T_pM$ y tal que para cualquier sistema de coordenadas (X,U) las componentes $V^i(p):M \longrightarrow \mathbb{R}$ del vector $V(p)=\sum_{i=1}^{m} V^i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}$ son diferenciables.

III.2.DEFINICIONES. Un *producto interno* en un espacio vectorial **V** es una función $\varphi:V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal simétrica y positiva definida. Usaremos también la notación $<,>$. Al producto interno usual en $\mathbb{R}^m$ lo denotaremos $«V,W» = \sum_{i=1}^{m} V_i W_i$.

Una *estructura Riemanniana* sobre una variedad M consiste de una función φ en M que a cada $p\in M$ le asocia φ_p un producto interno en T_pM tal que para cualesquiera dos campos vectoriales diferenciables V,W la función $M \longrightarrow \mathbb{R}$; $p \longrightarrow \varphi_p(V(p),W(p))$ es diferenciable.

Observemos que en un sistema de coordenadas (X,U) podemos escribir

$$\varphi_p(V(p),W(p)) = \varphi_p\Big(\sum_{i=1}^{m} V^i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{m} W^j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$$

$$= \sum_{i\,j=1}^{m} V^i(p)W^j(p)\varphi_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = \sum_{i\,j=1}^{m} V^i(p)W^j(p)g_{i,j}(p)$$

así las funciones $g_{i,j}(p)=\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$ son diferenciables.

III.3.PROPOSICION. Sobre cada variedad diferenciable paracompacta se puede definir una estructura Riemanniana.

DEMOSTRACION. Por II.3, podemos tomar $U=\{(U_i,X_i)\}_{i\in I}$ cubierta abierta localmente finita de M con una partición diferenciable de la unidad $\Phi=\{f_i:M\longrightarrow\mathbb{R}\}_{i\in I}$ subordinada a U.

El difeomorfismo $X_i:U_i\longrightarrow X_i(U_i)$ induce el producto interno $\varphi^i_p(V,W) = \langle\langle\, dX^{-1}_{i\,p}(V),dX^{-1}_{i\,p}(W) \,\rangle\rangle$. $\forall$ $V,W\in T_pX_i(U_i)$ que identificamos con T_pM $\forall$ $p\in X_i(U_i)$.

Para cada $i\in I$ y cada $p\in M$ sea $F^i_p:T_pM\times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F^i_p(V,W)=f_i(p)\varphi^i_p(V,W)$ si $p\in X_i(U_i)$ y $F^i_p(V,W)=0$ si $p\notin X_i(U_i)$; como $sop(f_i)\subset X_i(U_i)$ F^i_p está bien definida.

Observemos que $F^i_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ es bilineal simétrica $\forall p \in M$. Como la suma de formas simétricas es simétrica, $\varphi_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_p(V,W) = \sum_{i\in I} F^i_p(V,W)$, donde todos los sumandos excepto un número finito son cero, es bilineal y simétrica $\forall p \in M$. Además φ_p es positiva definida, ya que para cada $p \in M$ existe al menos alguna $j \in I$ tal que $f_j(p) > 0$ por lo que $\varphi_p(V,V) = \sum_{i\in I} f_i(p)\varphi_i(V,V) = 0$

$\Rightarrow \varphi_j(V_p,V_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\!\langle dX^{-1}_{jp}(V_p), dX^{-1}_{jp}(V_p) \rangle\!\rangle = 0$ lo cual solo puede ser si $V_p = 0$. $\therefore$ φ_p es la estructura Riemanniana que estabamos buscando.

III.4. DEFINICION. Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ una curva de clase $\mathfrak{D}^1$ *i.e.* de clase $\mathfrak{C}^1$ por pedazos sobre una variedad Riemanniana M. Su longitud está dada por el valor de la integral

$$L(\gamma) = \int_a^b ((\varphi_{\gamma(t)}(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}))^{1/2} dt$$

El valor de la integral es independiente de la parametrización.

En vista que las variedades son localmente conexas por trayectorias, toda variedad conexa es conexa por trayectorias; es más, cualesquiera dos puntos están conectados por una curva de clase $\mathfrak{D}^1$.

III.5. PROPOSICION. En una variedad Riemanniana conexa $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ $d(p,q) = \text{ínfimo}\left\{L(\gamma) : \gamma \text{ de } p \text{ a } q \text{ es de clase } \mathfrak{D}^1\right\}$ es una métrica, la *métrica Riemanniana*, cuya topología coincide con la de variedad.

DEMOSTRACION. De su definición se tiene que es simétrica y no negativa. Para la desigualdad del triángulo, usando el hecho que una curva α de P_1 a P_2 y una β de P_2 a P_3 se puede juntar a una curva γ de P_1 a P_3 pasando por P_2 cuya longitud es la suma de las longitudes de las dos curvas.

$d(P_1,P_3)=\inf\left\{L(\gamma):\gamma \text{ de } p_1 \text{ a } p_3\right\}\leq L(\gamma_0)$ tal que γ_0 de p_1 a p_3 pasa por p_2, así que tomando ínfimo del lado derecho, se tiene la desigualdad requerida.

Nos resta ver que p diferente de $q \Rightarrow d(p,q)>0$.

Para esto, veamos las siguientes desigualdades; sea $p\in M$, (U,X) vecindad coordenada de p tal que $\overline{B(0,1)}\subset U_1$ y $X_1(0)=p$. Para $x\in U$ sean $g_{i,j}(x)=g_{i,j}(q)$ con $q=X(x)$ las funciones del producto interior φ_q; son simétricas y positivas $\forall x\in U_1$. Entonces para cada $r\in(0,1]$ la función $G_r:\overline{B(0,r)}\times S^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada $G_r(x,\alpha)=(\sum_{i,j=1}^{m} g_{i,j}(x)\alpha_i\alpha_j)^{1/2}$ es continua y positiva con dominio compacto por lo que su imagen tiene un mínimo m_r y un máximo M_r (notemos que si definimos $<\alpha_x,\beta_x>_x=\varphi_q(dX(\alpha_x),dX(\beta_x))$ con $\alpha_x,\beta_x\in T_x\mathbb{R}^m$ $q=X(x)$ $\forall x\in U$ estamos trasladando el producto interno del espacio tangente en la variedad al tangente en $\mathbb{R}^m$. De esta manera, $<\alpha,\alpha>_x^{1/2}=(\varphi_q(dX(\alpha),dX(\alpha)))^{1/2}=(\sum_{i,j=1}^{m} g_{i,j}(x)\alpha_i\alpha_j)^{1/2})$.

Así tenemos:

$$0 < m_1 \leq m_r \leq (\sum_{i,j=1}^{m} g_{i,j}(x)\alpha_i\alpha_j)^{1/2} \leq M_r \leq M_1$$

Más aún, si $\beta=(\beta^1,..,\beta^n)\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, $\alpha=\beta/|\beta|\in S^{n-1}$ y entonces

(1) $$0 < m_1|\beta| \le m_r|\beta| \le \left(\sum_{i,j=1}^{m} g_{i,j}(x)\alpha_i\alpha_j\right)^{1/2} \le M_r|\beta| \le M_1|\beta|$$

Si $q\in\overline{B(0,1)}$, consideremos una curva $\gamma:[a,b]\longrightarrow X(\overline{B(0,1)})$ diferenciable por pedazos tal que $\gamma(a)=p$ y $\gamma(b)=q$, luego

$$dX^{-1}_{\gamma(t)}(\dot\gamma)=(\dot x_1(t),..,\dot x_m(t)) \text{ y } L(\gamma)=\int_a^b\left(\sum_{i,j=1}^{m} g_{i,j}(x(t))\dot x_i(t)\dot x_j(t)\right)^{1/2}dt$$

$$\text{y } \int_a^b |dX^{-1}_{\gamma(t)}(\dot\gamma)|dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m}\dot x_i^2(t)\right)^{1/2}dt = |X^{-1}(q)-X^{-1}(p)| = |X^{-1}(q)|$$

por (1) e integrando obtenemos

$$0<m_1|X_1^{-1}(q)|\le m_r|X_1^{-1}(q)| \le L(\gamma)\le M_r|X_1^{-1}(q)| \le M_1|X_1^{-1}(q)|$$

de donde $\forall q\in X(\overline{B(0,1)})$

(2) $$0<m_1|X_1^{-1}(q)|\le m_r|X_1^{-1}(q)| \le d(p,q)\le M_r|X_1^{-1}(q)| \le M_1|X_1^{-1}(q)|$$

$\therefore$ si $q\in X(\overline{B(0,1)})$ y q diferente de p, $X^{-1}(q)$ es diferente de cero por lo que $d(p,q)\ge m_1>0$

Ahora supongamos que $q\in M$ es diferente de p y $q\notin X(\overline{B(0,1)})$. Por conexidad, para cualquier curva γ de p a q como antes existe c, $a<c<b$, $\gamma'=\gamma|_{[a,c]}\subset X(\overline{B(0,1)})$ y $|X^{-1}(\gamma'(c))|=1$, entonces $q'=\gamma'(c)\in X(\overline{B(0,1)})$, q' diferente de p. Es claro que $L(\gamma)\ge L(\gamma')\ge d(p,q')\ge m_1>0$ de donde $d(p,q)\ge m_1>0$. $\therefore$ $\forall$p diferente de q $d(p,q)>0$ y $d:M\times M\longrightarrow\mathbb{R}$ es una métrica.

Para probar la equivalencia de las topologías basta probar para $p\in M$ y con la notación anterior que toda $B_r=X_1(B(0,r))$ $0<r\le1$

vecindad de p en la topología original de **M** contiene una ε-vecindad $V\varepsilon=\{q\in M:d(p,q)<\varepsilon\}$ en la topología de la métrica Riemanniana d e inversamente.

Dado $0<r\leq 1$ sea $\varepsilon=m_1 r>0$, si $q\in V\varepsilon(p)$ por (2)

$|X^{-1}(q)|\leq(1/m_1)d(p,q)<\varepsilon/m_1=r \therefore Vm_1r(p)\subset B_r$.

Ahora dada $\varepsilon>0$ sea $r=\min\{\varepsilon/M_1,1\}$ si $q\in B_r$ $|X^{-1}(q)|<r$ y por (2)

$d(p,q)\leq M_r|X^{-1}(q)|<M_1 r\leq\varepsilon \therefore B_r\subset V\varepsilon(p)$; y las topologías coinciden.

III.6.DEFINICION. Un grupo de Lie es un grupo $\mathfrak{G}$ con una estructura diferencial tal que la función $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}\longrightarrow\mathfrak{G}$

$$(x,y)\longrightarrow xy^{-1} \text{ es diferenciable.}$$

Con lo que las traslaciones izquierda y derecha definidas de $\mathfrak{G}\longrightarrow\mathfrak{G}$ por: $L_x(y)=xy$; $R_x(y)=yx$ son difeomorfismos.

Una estructura Riemanniana en $\mathfrak{G}$ es invariante a la izquierda si:

$<u,u>_y = <d(L_x)u,d(L_x)v>_{L_x(y)}$ $\forall x,y\in\mathfrak{G}$; $u,v\in T_y\mathfrak{G}$. *i.e.* si L_x es una isometría. Análogamente definimos una estructura Riemanniana invariante a la derecha; y una estructura invariante a la derecha e izquierda es bi-invariante.

Para introducir en $\mathfrak{G}$ una estructura invariante a la izquierda tomemos cualquier producto interno $<,>_e$ en $T_e\mathfrak{G}$ y definimos:

$<u,v>_x = <d(L_{X^{-1}})u,d(L_{X^{-1}})v>_e$ $\forall x\in\mathfrak{G}$; $u,v\in T_x\mathfrak{G}$.

Como L_x es un difeomorfismo, esto define una estructura Riemanniana invariante a la izquierda.

III.7.DEFINICION. Una función afín propia de $\mathbb{R}$ es una función $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g_{x,y}(t)=yt+x$; $t,x,y\in\mathbb{R}$, $y>0$.

El conjunto $\mathcal{A}$ de las funciones $g_{x,y}$ con $(x,y)\in\mathbb{H}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y>0\right\}$ es un grupo con la composición, esto es:

Sean $g_{x,y}$; $g_{x',y'}\in\mathcal{A}$

1) $g_{x,y}\circ g_{x',y'}(t) = g_{x,y}(y't+x') = y(y't+x')+x = yy't+yx'+x = g_{yx'+x,yy'}(t)\in\mathcal{A}$.

2) $g_{0,1}\circ g_{x,y}(t) = g_{x,y}(t)$.

3) $g_{-x/y,1/y}\circ g_{x,y}(t) = g_{0,1}(t)$

Ahora, daremos a $\mathbb{H}$ una estructura de grupo através de la función biyectiva

$$\Psi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathbb{H}$$
$$g_{x,y}\longrightarrow(x,y).$$

Denotemos por $Z=(x,y)$ los puntos en $\mathbb{H}$, entonces

$Z\star Z' = (x,y)\star(x',y') = \Psi\left((\Psi^{-1}(x,y)\circ(\Psi^{-1}(x',y')\right) = (yx'+x,yy')$

$i=(0,1)$ es la unidad de $(\mathbb{H},\star)$ y $Z^{-1}=(-x/y,1/y)$.

$\mathbb{H}$ es una variedad diferencial de dimensión 2 y las funciones

$$\mathbb{H}\times\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H} \qquad ; \qquad \mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$$
$$(Z_1,Z_2)\longrightarrow Z_1\cdot Z_2 \qquad\qquad Z\longrightarrow Z^{-1}$$

son diferenciables por cómo están definidas.

$\therefore$ $\mathbb{H}$ es un grupo de Lie.

Tomemos ahora el producto interno euclideano usual en $\mathbb{R}^2$ en $T_i\mathbb{H}$

$\langle\langle u,v\rangle\rangle_i = u_1v_1+u_2v_2$ con $u,v\in T_i\mathbb{H}$

Recordemos que si $Z_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{H}$ $L_{Z_0}^{-1} = L_{Z_0}^{-1}:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$ está dado por $L_{Z_0}^{-1}(z) = Z_0^{-1}\star Z = (\frac{x}{y_0} - \frac{x_0}{y_0}, \frac{y}{y_0}) = (f_1(Z),f_2(Z))$.

Ahora, dado $U=(u_1,u_2)\in T_z\mathbb{H}$ calculemos

$$d(L_{Z_0}^{-1})_z(U) = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/y_0 & 0\\ 0 & 1/y_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \frac{1}{y_0}(u_1,u_2) = \frac{1}{y_0}U$$

Definamos ahora $\langle U,V\rangle_z = \langle\langle\frac{1}{y_0}U,\frac{1}{y_0}V\rangle\rangle = \frac{1}{y_0}(u_1v_1+u_2v_2)$

$\forall u,v\in T_z\mathbb{H}$; $\forall z\in\mathbb{H}$

$\therefore$ $g_{11}=g_{22}=\frac{1}{y_0}$, $g_{12}=g_{21}=0$ en $Z_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{H}$ y $g_{11}=g_{22}=1$, $g_{12}=g_{21}=0$ en i la unidad en $\mathbb{H}$. *i.e.* hemos construido una estructura Riemanniana invariante a la izquierda sobre $\mathbb{H}$ a partir de la estructura euclideana en la identidad del grupo; y hemos probado la siguiente:

III.8.PROPOSICION. El conjunto de funciones afines propias con la ley usual de composición es un grupo de Lie $\mathfrak{G}$. Como variedad diferencial es el espacio hiperbólico $\mathbb{H}$ y una estructura Riemanniana invariante a la izquierda de $\mathfrak{G}$ que coincide con la euclideana $g_{11}=g_{22}=1$; $g_{12}=g_{21}=0$ está dada por $g_{11}=g_{22}=1/y_0^2$; $g_{12}=g_{21}=0$.

BIBLIOGRAFIA

Dugundji. Topology. Allyn and Bacon, Inc. Boston. 1966.

Engelking. General Topology. Heldermann Verlag. Berlin. 1989.

Hocking, Young. Topología. Reverté. Barcelona. 1966.

Michael. A Note on Paracompact Spaces. 1953.

De Neymet. Notas de Topología General.

Boothby. An Introduction to Differentiable Manifolds and Rimannian Geometry. Academic Press. New York. 1975.

Do Carmo. Geometría Riemanniana. I.M.P.A. Río de Janeiro. 1979.

Bartle. The Elements of Real Analysis. J. Wiley. New York. 1964.