

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



MODELACION DE DEFORMACIONES DE  
TERRENO ALREDEDOR DE VOLCANES  
MEDIANTE EL USO DE ELEMENTOS  
FINITOS.

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
F I S I C O  
P R E S E N T A :  
RAFAEL CABRERA GUTIERREZ

MEXICO, D.F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1991.



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

INTRODUCCION. \_\_\_\_\_ 1

### CAPITULO I.

DEFORMACION DEL TERRENO ASOCIADA A FENOMENOS VOLCANICOS. — 4

- Causas de deformación del terreno asociada al Vulcanismo. \_\_\_\_\_ 4
- La observación de la deformación del terreno asociada a fenómenos volcánicos. \_\_\_\_\_ 5
- Determinación experimental de los cambios en la inclinación del terreno. \_\_\_\_\_ 5
  - ) Inclinómetro Húmedo. \_\_\_\_\_ 6
  - ) Inclinómetro de Mercurio. \_\_\_\_\_ 8
  - ) Inclinómetro Electrónico de burbuja. \_\_\_\_\_ 9
  - ) Inclinómetro de péndulo. \_\_\_\_\_ 12
  - ) Inclinometría Seca. \_\_\_\_\_ 13
- Ventajas y desventajas de los distintos Instrumentos y Técnicas. \_\_\_\_\_ 15
- Determinación de los desplazamientos verticales. \_\_\_\_\_ 16
  - ) Nivelación de Precisión. \_\_\_\_\_ 16
  - ) Nivelación Geométrica. \_\_\_\_\_ 17
  - ) Nivelación Trigonométrica. \_\_\_\_\_ 19
- Determinación de deformaciones horizontales. \_\_\_\_\_ 21
  - ) Instrumentación. \_\_\_\_\_ 21
  - ) Métodos de medición. \_\_\_\_\_ 26
    - \*) Triangulación. \_\_\_\_\_ 26
    - \*) Trilateración. \_\_\_\_\_ 30

- Medición de la inclinación del terreno por medio del nivel de agua en mares y lagos. _____	32
-) Mareógrafos. _____	32
-) Transductor de presión. _____	34
-) Medidor lacustre de nivel de agua. _____	34
- Diseño de Redes de medición de deformación. _____	36
- Uso de Satélites. _____	38
- Comentarios. _____	38

## CAPITULO II.

### EJEMPLOS DE DEFORMACION EN VOLCANES ACTIVOS \_\_\_\_\_ 40

- Introducción. _____	40
I) Volcán Kilauea, Hawai, E.U. (1967-1968). _____	40
II) Volcán Kilauea, 1968-1970 (Cima). _____	47
III) Volcán Kilauea, 1968-1970 (Rift Oriental). _____	48
IV) Volcán Asama, Japón (1932). _____	48
V) Volcán Asama, 1935. _____	51
VI) Volcán Asama, 1936. _____	54
VII) Volcán Miyake-sima, Japón (1940). _____	57
VIII) Volcán Sakurajima, Japón (1914). _____	60
IX) Volcán Sakurajima, 1946. _____	66
X) Volcán Usu, Japón (1977-1978). _____	68

XI)	Volcán Vesubio, Italia (1937-1961).	75
XII)	Volcán Askja, Islandia (1961).	77
XIII)	Volcán Katla, Islandia (1966).	77
XIV)	Volcán Surtsey, Islandia (1967-1969).	77
	- Conclusiones.	78

### CAPITULO III.

	MODELOS TEORICOS DE ANALISIS DE DEFORMACION.	80
I)	Modelo de Mogi (1958).	80
II)	Modelo de Yokoyama (1971).	82
III)	Modelo de Walsh y Decker (1971).	85
IV)	Modelo de Elementos Finitos.	87
-)	Funciones de desplazamiento en un elemento finito.	88
-)	Conceptos de Elasticidad.	91
-)	Minimización de la Energía Potencial.	92
-)	Cálculo de las integrales para un estado de deformación plana.	95
-)	Construcción de la matriz de rigidez global y del vector de fuerza global.	98

### APENDICE I.

	CALCULO DE DEFORMACIONES DE TERRENO POR MEDIO DE DATOS TOPOGRAFICOS.	101
I)	Cálculo de deformaciones de cisallamiento.	101

II)	Obtención de las componentes de deformación por medio de las líneas de igual desplazamiento vertical y horizontal. _____	103
III)	Localización de valores de deformación. _____	105
IV)	Método de la Base para la obtención de la deformación del terreno. _____	106
V)	Método del Triángulo Único para el cálculo de la deformación del terreno. _____	108

#### APENDICE II.

##### MODELO Y PROGRAMAS DE COMPUTACION. \_\_\_\_\_

I)	Descripción del modelo empleado. _____	109
II)	Discretización del modelo mediante el programa GRID. _____	111
III)	Programa FINITO. _____	117
-)	Subrutina BDYVAL. _____	120
-)	Subrutinas DESCOMP y SOLUC. _____	121
IV)	Código, ejemplos y resultados de los programas. _____	123

#### APENDICE III.

##### MODELO DE MOGI. \_\_\_\_\_

##### BIBLIOGRAFIA. \_\_\_\_\_

171

El volcán Kilauea es la pesadilla de los geodestas : Los bancos de nivel situados en la cima se desplazan en sentido vertical y horizontal hasta 50 ó 100 cm. anuales.

## INTRODUCCION

Desde tiempos inmemoriales, el hombre ha aprendido a través de su experiencia directa lo que significa el peligro asociado a una erupción volcánica. En la Antigüedad relacionó la actividad de los volcanes con la furia de los dioses; Vulcano, por ejemplo, tenía una forja donde fundía armas para los otros habitantes del Olimpo. En México, se rindió culto al dios del fuego, Xiuhtecuhtli, y se crearon bellos mitos tales como la leyenda de los volcanes Popocatepetl (Montaña que humea) e Iztaccíhuatl (Mujer blanca).

En el año 79 de nuestra era, Plinio el Viejo describió la erupción del Vesubio, que sepultó a las ciudades de Pompeya y Herculano. Sus contemporáneos explicaban vagamente al vulcanismo como un resultado de combustión y tormentas subterráneas. A mediados del siglo XVIII y principios del XIX, se abandonó la teoría del Neptunismo, según la cual las rocas ígneas fueron precipitadas de un antiguo Oceano Universal, y se asentaron las bases de la geología moderna. A partir de entonces se han hecho grandes progresos en el conocimiento de los volcanes. En este siglo particularmente, el punto de vista geofísico para el estudio de los volcanes ha resultado ser un complemento de gran valía.

Las técnicas geofísicas fueron utilizadas inicialmente, entre otros, por los italianos, quienes el 27 de junio de 1914 utilizaron un sismógrafo en el Observatorio instalado en uno de los flancos del Vesubio para estudiar y pronosticar sus erupciones. Sin embargo, los avances más notables fueron realizados por Omori y otros geofísicos japoneses cuyos estudios aportaron una nueva comprensión, entre otros aspectos sobre la relación entre la deformación de terreno asociada a un volcán y la intrusión y migración de magma desde la profundidad.

En la actualidad, para el pronóstico de erupciones volcánicas, se

emplean varios métodos geofísicos y geoquímicos; entre los más ampliamente utilizados se cuentan los basados en las observaciones de los siguientes fenómenos:

- 1) La actividad sísmica.
- 2) La deformación del terreno.
- 3) Los cambios en la actividad geotérmica.
- 4) Los cambios en los campos de gravedad, geomagnético y geoelectrico.
- 5) La composición química de los gases y otros fluidos volcánicos.

Los métodos modernos de pronóstico de erupciones volcánicas requieren del empleo conjunto de estos métodos; sin embargo es pertinente hacer notar que, de los métodos geofísicos mencionados, los dos primeros son los más ampliamente utilizados entre otras razones por ser mejor conocidos y de más fácil aplicación e interpretación.

En el presente trabajo se analizará el empleo de la deformación del terreno para la evaluación del peligro o amenaza volcánica. Esta técnica se basa en la observación de la deformación que sufre el terreno por efecto de los esfuerzos inducidos a causa de la presencia de los materiales magnéticos que yacen bajo un volcán.

La interpretación de los datos de deformación requiere de un modelo adecuado para explicarla. Uno de los primeros fue propuesto por Mogi en 1958 y consiste en suponer una pequeña esfera en un semiespacio infinito. La deformación en el semiespacio debida a los cambios de presión en la esfera puede ser obtenida analíticamente. Yokoyama (1971) mejoró el modelo de Mogi considerando una distribución variable de presión sobre las paredes de una esfera logrando con esto un mejor ajuste de las soluciones con los datos observados. Walsh y Decker (1971) obtuvieron soluciones al problema de un dique de longitud infinita en un medio espacio infinito cuando las paredes del dique sufren desplazamientos en respuesta a cambios de presión en su interior. Estos modelos resultan convenientes puesto que describen de manera general las dimensiones de un posible depósito magnético a la vez que pueden ser resueltos analíticamente. Sin embargo resultan, en ocasiones, inadecuados para modelar tanto la forma y tamaño de las cámaras magnéticas como la estructura litológica y la topografía.



Es en este punto donde surge la necesidad de implementar métodos numéricos que permitan una mayor variedad tanto en las fuentes de deformación como en el medio en que se hayan inmersas.

Dieterich y Decker (1977) aplicaron las técnicas de elementos finitos para obtener aproximaciones a la solución de problemas de cuerpos tabulares y con simetría axial sujetos a cambios de presión y desplazamientos especificados inmersos en un medio de topografía arbitraria. La aplicación de sus resultados al caso del volcán Kilauea en Hawai les permitió encontrar un excelente ajuste entre los desplazamientos teóricos y los asociados a dos erupciones de este volcán.

En este trabajo de tesis se exponen los métodos de observación de las deformaciones en terrenos volcánicos y se presentan ejemplos típicos de las observaciones que se han reportado en la literatura. Después se presentan los métodos de análisis más utilizados tales como son los modelos de Mogi, Yokoyama y Walsh y Decker. Posteriormente se considera el problema de la intrusión de un cuerpo tabular en un semiespacio homogéneo. Se presenta la solución a este problema por medio del método de elementos finitos cuando la intrusión es representada por desplazamientos a lo largo de las fronteras del cuerpo. Dicha solución se obtiene a través de un programa elaborado en lenguaje FORTRAN.

El objetivo principal de esta tesis es presentar la técnica de elementos finitos aplicada al estudio de las deformaciones del terreno inducidas por la actividad volcánica. Esta aplicación no se ha implementado en México y, como se verá al final del trabajo, tiene un gran futuro como método de pronóstico de erupciones volcánicas sobre todo en los grandes volcanes como el de Fuego de Colima.

## CAPITULO I

### DEFORMACION DEL TERRENO ASOCIADA A FENOMENOS VOLCANICOS

#### CAUSAS DE DEFORMACION DEL TERRENO ASOCIADA AL VULCANISMO

La deformación de terreno relacionada con la actividad volcánica es provocada por la intrusión de magma bajo el edificio volcánico. En la figura 1 (A) se muestra el caso del inflamiento provocado por una cámara magmática. Las deformaciones que sufre el terreno provocadas por este fenómeno incluyen elevación, extensión e inclinación de la superficie terrestre.

Por otro lado, en la figura 1 (B) se observa que la intrusión de un dique ocasiona la aparición en la superficie de la Tierra de una sierra - llamada de compresión - la cual presenta en su parte central un graben, algo semejante a un surco arado.

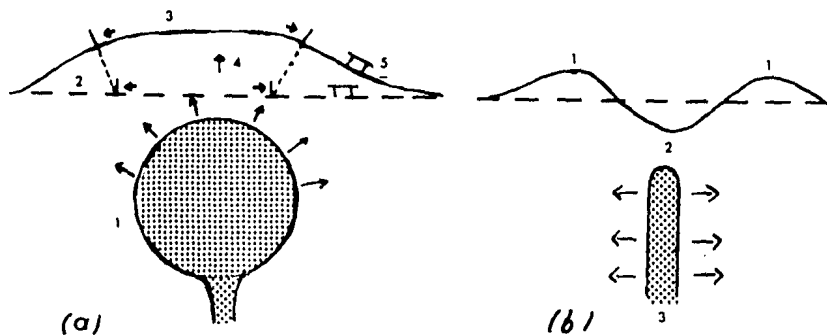


Figura 1. Deformación de terreno provocada por: (A) una cámara magmática. 1) Cámara magmática, 2) Superficie original, 3) Superficie deformada, 4) Ascenso de terreno, 5) Inclinación de terreno. (B) por un dique de lava. 1) Sierra de compresión, 2) Graben, 3) Dique. (Modificado de Banks, 1984).

La dilatación "in situ" del magma ocasionada por calentamiento o vesiculación, la expansión térmica de las rocas de los alrededores del volcán y el desplome por gravedad del área que ha sufrido levantamiento, se cuentan entre otras causas posibles de deformación.

En general la inyección continua de magma implica el levantamiento o inflamamiento del terreno, mientras que la liberación de esfuerzos, ya sea a causa de la erupción o por migración del magma en figuras laterales, resulta en un hundimiento o desinflamamiento del edificio volcánico. La razón de deformación del terreno es función del tamaño y profundidad, así como de la razón de cambio de volumen y presión, del depósito de magma y de los mantos freáticos ( Banks, 1984 ).

#### **LA OBSERVACION DE LA DEFORMACION DEL TERRENO ASOCIADA A FENOMENOS VOLCANICOS.**

Como se ha mencionado, la deformación del terreno se traduce en cambios en las coordenadas verticales y horizontales de un punto así como en la inclinación del terreno. Las observaciones están dirigidas, por lo tanto, a detectar los cambios en estos parámetros. Existe una variedad de técnicas tanto instrumentales como topográficas para lograr estos objetivos. En los siguientes párrafos se exponen los métodos mas ampliamente utilizados.

#### **DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LOS CAMBIOS EN LA INCLINACION DEL TERRENO.**

La inclinación del terreno puede determinarse esencialmente por dos métodos, uno es a través de instrumentos llamados inclinómetros y otro por métodos topográficos llamados de inclinometría seca.

El primer instrumento empleado como inclinómetro era en realidad un sismógrafo de péndulo horizontal. Este aparato era muy sensible a los cambios de temperatura ambiente, lo cual impedía una correcta interpretación de los datos de inclinación recabados, por lo que fue sustituido por los inclinómetros húmedos, de mercurio, y los de burbuja.

El inclinómetro húmedo tiene como principio básico la medición del

nivel de agua en dos depósitos conectados por un tubo y colocados a alturas distintas del terreno. Por otro lado, el inclinómetro de mercurio emplea el mismo principio que el instrumento húmedo, pero en este caso el cambio de nivel del depósito se relaciona con el cambio de la capacitancia eléctrica en un circuito. Finalmente, las medidas de inclinometría seca se basan en las técnicas de nivelación topográfica. A continuación se exponen brevemente estas técnicas e instrumentos.

#### -) Inclinómetro Húmedo

Este instrumento se subdivide a su vez en dos clases, dependiendo del tamaño de su base: corta o grande. Su única diferencia consiste en la forma de instalar el depósito de agua que ambos portan.

El primer inclinómetro húmedo fue desarrollado en el Japón merced a la iniciativa de Hagiwara (1947), quien lo empleó con éxito para medir la inclinación secular del Monte Tsukuba desde 1943. Básicamente consiste en dos depósitos con agua que son conectados por un tubo; los cambios en el nivel de agua son una medida de los cambios en inclinación. En la figura 2 (A) se ilustra un diagrama del dispositivo utilizado por este investigador. Para las medidas realizadas en el Tsukuba, se instalaron dos inclinómetros con una distancia de separación de 20 m. El agua contenida en cada uno de los depósitos se conectaba por medio de un tubo de vidrio de 2.5 cm de diámetro. El cambio en la inclinación del terreno se obtenía de la diferencia en la lectura de los micrómetros de los dos depósitos, donde .001 mm. corresponden a .0103 " de arco.

Las variaciones en inclinación debidas a fenómenos atmosféricos como la lluvia, no afectan de manera significativa al inclinómetro de Hagiwara, por lo que es más adecuado para la medición de cambios seculares en la inclinación del terreno.

Basándose en el éxito obtenido por Hagiwara, Eaton (1959) instaló tres inclinómetros húmedos en tres tuneles de concreto enterrados alrededor de la caldera del Kilauea. Estos instrumentos son los llamados de base corta y se instalan de forma permanente en cavernas para que el efecto de la temperatura sobre el agua del depósito sea mínimo. El arreglo de medición empleado consiste en tres aparatos dispuestos en forma de "L" separados entre 3 y 3.5 m

y conectados por sendas mangueras para el aire y el agua del depósito. El instrumento es leído diariamente; al presentarse deformaciones asociadas con erupciones, la lectura se realiza con más frecuencia.

El inclinómetro húmedo portátil o de base larga, sufre en menor escala las perturbaciones locales que sufren los inclinómetros húmedos de base corta o fijos.

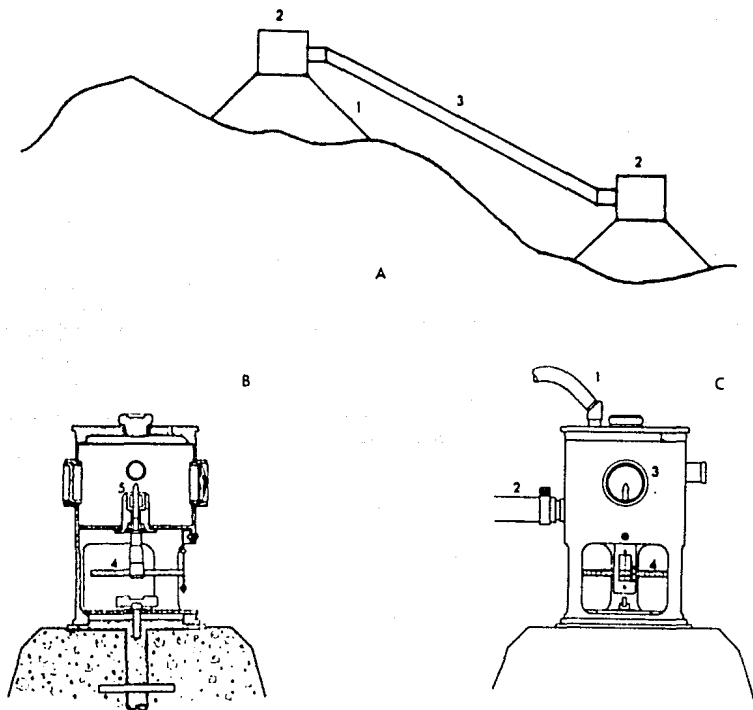


Figura 2. Inclinómetro húmedo. (A) Diagrama del arreglo de dos inclinómetros húmedos empleado por Hagiwara (1947). 1) Pilar de concreto, 2) Inclinómetro, 3) Tubo de agua. (B) y (C) Inclinómetro húmedo empleado por Eaton (1959). (B) Corte del pilón de concreto con el instrumento empotrado en él. (C) Vista lateral del Inclinómetro. 1) Manguera de aire, 2) Tubo de agua, 3) Ventana, 4) Micrómetro, 5) Indicador metálico.

En el caso de los inclinómetros de base larga las mojoneras se colocan de manera que formen triángulos equiláteros de lados entre 25 y 30 m de largo. Estas mojoneras consisten en pilares de concreto cuya parte superior se ha adaptado para que se empotren el eje y el depósito del inclinómetro (figura 2 (B) ). Una vez colocados los depósitos en cada vértice de un lado del triángulo, éstos se conectan por un tubo de agua y otro de aire, éste último para igualar la presión sobre el agua de los recipientes. Dentro de cada depósito se ha colocado un micrómetro con una barra metálica en su parte superior, cuya función es de indicador del nivel del agua en el depósito. (figura 2 (C) ) La escala del micrómetro se divide en 50 partes y se puede leer incluso 1/10 de división que equivale a  $1 \mu$ . ( Eaton, 1959 ).

En el pasado los datos de los inclinómetros húmedos se obtenían en forma discreta cada vez que se realizaba una lectura pero la instrumentación moderna utilizada por ejemplo en Japón permite un registro continuo.

#### -) Inclinómetro de Mercurio.

En este instrumento el cambio de nivel del mercurio entre dos depósitos conectados se refleja en cambios en la capacitancia entre la superficie del líquido y una placa situada sobre el mismo depósito. Un transductor analógico convierte las medidas de capacitancia a valores de inclinación, es decir, microradianes (Benioff, 1965). En la figura 3 se muestra un esquema de este inclinómetro. Debido a que son instrumentos de una sola componente, deben colocarse de manera que en pares formen ángulo recto entre sí. La línea de base de estos inclinómetros mide un metro. Cuando es posible, los instrumentos se colocan en cavernas o perforaciones y son orientados en la dirección en que se espera la mayor inclinación. A pesar de que con este instrumento no es posible tener una medida absoluta de inclinación en el sitio donde se ha colocado, se pueden obtener medidas relativas de inclinación. La sensibilidad de los instrumentos actualmente en operación es de  $5 \times 10^{-6}$  radianes y tienen una capacidad de resolución de  $1 \times 10^{-7}$  radianes, pudiendo registrar cambios de  $25 \times 10^{-6}$  radianes antes de que sea necesario reinstalar la base del inclinómetro mecánicamente.

Dado que con estos instrumentos la inclinación se obtiene midiendo cambios en la conductancia de un circuito su registro continuo no constituye una dificultad.

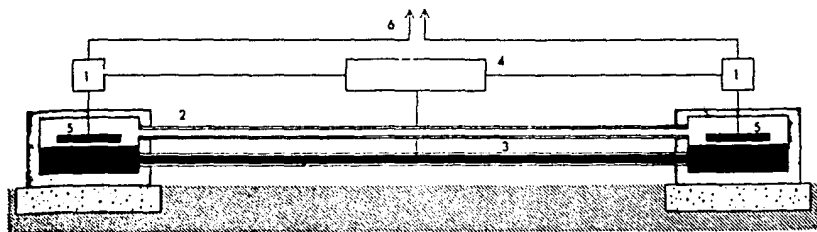


Figura 3. Inclinómetro de mercurio. 1) Circuito resonante, 2) Tubo de aire, 3) Mercurio, 4) Oscilador de radio-frecuencia, 5) Placa del condensador, 6) Conexión a los registradores. (Tomado de - Press, 1965).

-) Inclinómetro electrónico de burbuja.

Este instrumento consta de dos sensores electrolíticos los cuales presentan una burbuja de aire en su interior (figura 4 (A)). Al desplazarse la burbuja en el sensor por efecto de una inclinación del suelo, se registra un cambio en la conductividad eléctrica en el líquido interior entre los alambres 3 y 4 y 5 y 4. Estos sensores tienen una resolución de  $0.1 \mu$ -radianes.

Este instrumento puede ser utilizado de dos formas: instalándolo en una plataforma o en un pozo practicado expresamente en el terreno. A continuación se describen brevemente cada una de estas dos formas de instalación.

\* Inclinómetro de dos sensores instalado en una plataforma.

Este instrumento consta de dos sensores electrolíticos de burbuja, como los anteriormente descritos, que se colocan en ángulo recto dentro de una caja que se ha aislado térmicamente (figura 4 (B)).

Esta caja queda sobre una base de metal invar ( aleación de acero y níquel cuyo coef. de dilatación es 1/13 del del acero, viéndose afectado en menor escala que éste por los cambios de temperatura ) que a su vez se fija sobre una plataforma de cerámica. Finalmente, esta plataforma se pega con cemento a la roca sólida. La disposición de los sensores en ángulo recto permite obtener las componentes de inclinación N-S o E-O.

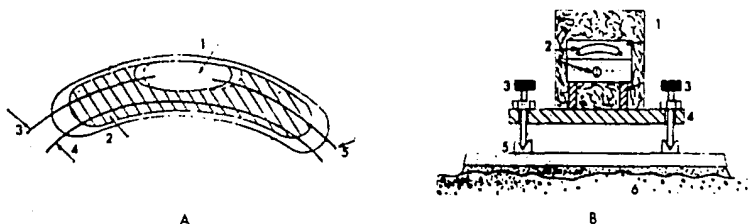


Figura 4. Inclinómetro electrónico de burbuja. (A) Sensor electrolítico. 1) Burbuja, 2) Electrólito, 3), 4), 5) Cables del sensor. (B) Instalación del instrumento. 1) Aislante térmico, 2) Sensores ortogonales, 3) Tornillos de ajuste, 4) Base de invar, - 5) Plataforma de cerámica, 6) Roca. (Modificado de Banks, 1984).

\* Inclinómetro de uno o dos sensores instalado en un pozo.

Al enterrarse en el suelo se minimizan los efectos de la temperatura que los afectan cuando son instalados en una plataforma; su funcionamiento es semejante al aparato descrito anteriormente. En la figura 5 se muestra la instalación de un inclinómetro en un pozo practicado en el fondo de un pozo pequeño.



Debido a que los inclinómetros de burbuja son de una base bastante corta, deben colocarse en áreas donde la deformación local del terreno tenga más parecido con la deformación global del volcán. Así, por ejemplo, no deben instalarse en el centro de una línea de cráteres de fisura o cerca de una falla.

La roca sólida es un sitio estable para fijar el instrumento, pero como ésta se distorsiona por la temperatura ambiente, es mejor instalarlo dentro de un tubo de lava, en una cueva natural o en una caseta de cemento para reducir los efectos de la temperatura.

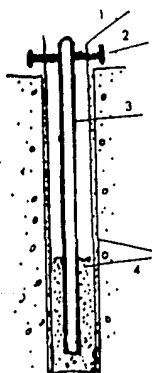


Figura 5. Instalación de un inclinómetro de burbuja en un pozo. 1) Tubo de cemento con una capa de asbesto, 2) Tornillos, 3) Inclinómetro, 4) Arena de sílice. (Tomado de Banks, 1984).

Cuando la instalación deba realizarse en material no consolidado, como por ejemplo ceniza, se construye un pilote de la siguiente manera (figura 6 (A)) : Se entierra una barra de acero inoxidable ( en general en el fondo de una caverna pequeña ); a su alrededor se excava un pozo de 1 m de profundidad que se rellena de cemento; en la parte superior de este pilote se fijan la

plataforma de cerámica y el instrumento propiamente dicho. En Indonesia (figura 6 (B)) se utiliza este procedimiento para instalar el inclinómetro dentro de cavernas artificiales construidas en las pendientes de los estratovolcanes.

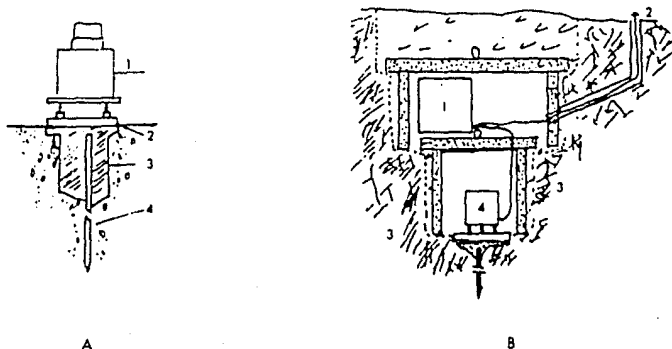


figura 6. Instalación de un inclinómetro de burbuja en material no consolidado. (A) Construcción del pilón en el terreno. 1) Inclinómetro, 2) Placa de cerámica, 3) Pílon de cemento, 4) Barra de acero inoxidable. (B) Instalación en una caverna artificial construida en la pendiente de un estratovolcán en Indonesia. 1) Dispositivos electrónicos para el inclinómetro, 2) Cable de la batería, 3) Geniza, 4) Instrumento instalado en el terreno. (Modificado de Banks , 1984).

-) Inclinómetro de péndulo.

Debido a que los sismómetros de péndulo horizontal de período largo se balancean por la acción de la gravedad cuando su base se inclina, éstos instrumentos fueron los primeros inclinómetros de registro continuo.

Como ventaja, éstos aparatos poseen una resolución de 0.1 a 0.2  $\mu$ -radianes si se colocan dos de ellos en ángulo recto. Sus desventajas son su gran sensibilidad a movimientos sin relación

alguna con la inclinación del suelo, su falta de movilidad y un rango dinámico muy reducido (figura 7). El rango dinámico se refiere al intervalo de amplitudes sísmicas que el instrumento puede detectar.

Actualmente existen inclinómetros electrónicos de péndulo que soslayan el inconveniente del pequeño rango dinámico. Estos instrumentos se pueden colocar en agujeros practicados en el suelo y de esta manera disminuir los inconvenientes provocados por la temperatura y las condiciones atmosféricas (Banks, 1984).

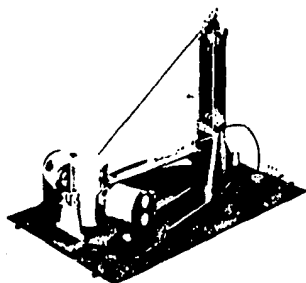


Figura 7. Inclinómetro de péndulo. (Tomado del - UED Manual of Instruments, 1968).

#### -) Inclinometría seca.

Este método fue empleado por primera vez en el Kilauea en 1968. Para ello se establecieron en la cima cuatro triángulos de lados entre 155 a 185 m con niveles de burbuja en los vértices. Las técnicas convencionales de alta precisión utilizadas mostraron que era posible medir inclinaciones del terreno del orden de  $10^{-5}$  radianes con este instrumento. Sin embargo, se precisaba que el inclinómetro tuviera mayor exactitud. Al año siguiente fue posible disminuir el tamaño de los triángulos a 40 m manteniendo la misma resolución en los vectores principales de inclinación.

Para medir la inclinación del terreno se colocan un nivel y dos estadales dispuestos en los vértices del triángulo, como se

ilustra en la figura 8. A continuación se nivela el lado donde se encuentran ambos estadales; posteriormente son intercambiados repitiéndose la medición. Las dos series de lecturas son promediadas y se repite el proceso para los demás lados del triángulo.

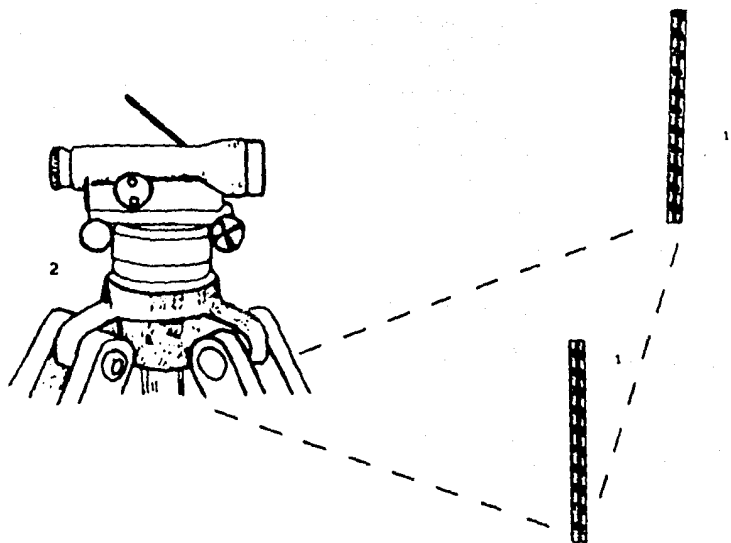


Figura 8. Arreglo empleado para calcular inclinación de terreno por medio de un nivel. 1) Estadal, 2) Nivel.

Un segundo método consiste en emplear tres estadales, donde cada uno de ellos siempre se sitúa en el mismo vértice del triángulo. Así, las diferencias de inclinación deben medirse alrededor de la

figura triangular o, si se desea cerrar las medidas, pueden realizarse un número de lecturas con dos estadales al mismo tiempo.

Para cada lado del triángulo se realizan seis nivelaciones entre pares de estadales. Después, se promedian los resultados y se calcula y ajusta el error al cerrar las medidas. Kinoshita et. al. (1974) recomiendan emplear dos estadales para la nivelación del triángulo e intercambiar la posición de los estadales en cada lado, repitiéndose la nivelación. A partir de las medidas de los ángulos proporcionadas por la nivelación, es posible obtener los valores de las componentes de inclinación.

En el Kilauea Kinoshita et.al. (1974) emplearon un nivel óptico Wild N-3 con estadales Kern. Este instrumento puede leer 0.1 mm directamente con una estimación de 0.01 mm. Tryggvason (1968), empleando en Islandia un sistema similar, encontró que el error probable en la diferencia entre dos nivelaciones sucesivas es  $0.21 \times D^{1/2}$  mm donde D es la distancia (en km) entre los bancos de nivel. La utilización de triángulos equiláteros de 40 m permite obtener una precisión de  $1-2 \times 10^{-6}$  radianes.

Como es evidente las determinaciones de inclinación por medio de las técnicas señaladas solo permiten determinaciones periódicas de la inclinación del terreno.

## **VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LOS DISTINTOS INSTRUMENTOS Y TECNICAS**

Consideremos el caso del Kilauea. En este volcán la mayoría de los bancos de nivel - necesarios para la inclinometría seca - se han instalado en la región cimera, pero otros se encuentran en áreas donde no es posible emplear los sistemas húmedos debido a las características del terreno. Debido a que el método de inclinometría seca es menos sensible a los cambios de inclinación que el método húmedo, únicamente aquellos bancos de nivel que se encuentren alrededor de 2.5 km de distancia del centro de deformación podran proporcionar datos confiables.

En la siguiente tabla se muestran los órdenes de resolución para los diversos tipos de inclinómetros mencionados.

TABLA 1

Tipo de Instrumento	Orden de Resolución.
Inclinómetro Húmedo.	$10^{-6}$ rad.
Inclinometría Seca.	$10^{-6}$ .
Inclinómetro de Mercurio.	$10^{-6}$ .
Inclinómetro de Péndulo.	$10^{-7}$ .
Inclinómetro Electrónico de burbuja.	$10^{-7}$ .

## DETERMINACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS VERTICALES

Para poder calcular los desplazamientos verticales producidos por una deformación del terreno, es necesario medir las alturas entre un punto escogido como base y las estaciones sucesivas de una red. Para este tipo de trabajo se requiere lo que se ha venido a llamar nivelación de tercer orden, que es una de las clasificaciones de la nivelación de precisión. A continuación se presenta en que consiste dicha clasificación.

### \*) Nivelación de precisión.

Cuando la nivelación ha sido realizada con cuidado, la mayoría de los errores que pueden existir serán del tipo aleatorio. La precisión en cada medida se determina al comparar las diferencias en elevación obtenidas por un nivel al recorrer los dos sentidos de una misma línea. La clasificación de la nivelación en tres ordenes distintos depende de su precisión.

La nivelación de precisión de primer orden incluye aquellas nivelaciones cuyas diferencias entre las medidas de ida y regreso de una línea no es mayor que  $4 \sqrt{K}$  mm donde K es la longitud de la línea en km. La nivelación de segundo orden presenta una precisión de  $8.4 \sqrt{K}$  mm y la de tercer orden  $12 \sqrt{K}$  mm. (Bouchard y Moffit, 1965; Kissam, 1966).

Existen varios métodos para llevar a cabo una nivelación independientemente de la precisión que se requiera. En particular se mencionarán dos de los más utilizados: Nivelación geométrica,

empleando un nivel de burbuja y nivelación trigonométrica, con un teodolito.

#### \*) Nivelación geométrica.

El instrumento de nivelación, como se aprecia en la figura 9, consta fundamentalmente de un telescopio y de un nivel de burbuja empotrado rigidamente en aquél. El aparato puede rotar alrededor del eje vertical (4). Dicho eje, una vez que el instrumento ha sido colocado en un tripié, se alinea con la vertical de aquél por medio de unos tornillos nivelantes y de un nivel de plataforma. Asimismo, los tornillos nivelantes se emplean para centrar de manera precisa la burbuja del nivel antes de cada medición. Cuando se ajusta el nivel, la línea de visión (5) y el eje del nivel (6) (tangente a la burbuja) son paralelos. Así, la línea (5) será horizontal. (figura 9 (A)).

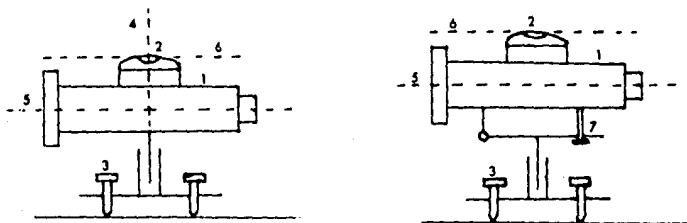


Figura 9. (A) Nivel de burbuja, (B) Nivel de burbuja con tornillo de movimiento vertical lento. 1) Telescopio, 2) Burbuja, 3) Tornillos nivelantes, 4) Eje vertical, 5) Línea de visión, 6) Eje del nivel, 7) Tornillo de movimiento vertical lento (Tomado de Mueller y Ramsayer, 1979)

En la figura 9 (B) se muestra un instrumento donde los tornillos nivelantes se emplean para colocar la línea de visión paralela a la horizontal únicamente de manera aproximada. El ajuste se logra por medio del tornillo (7) de movimiento vertical lento.

En la actualidad existen los niveles llamados automáticos que emplean un péndulo invertido en lugar de un nivel de burbuja. El péndulo se sostiene merced a cuatro hilos el cual conserva siempre la línea visual de manera horizontal.

En la figura 10 se ilustra el procedimiento de nivelación geométrica. Se desea obtener la diferencia de alturas entre los puntos A y B. Para ello se coloca un estadal en A y a aprox. 50 m. de distancia se sitúa el nivel ( punto  $S_1$  ). Una vez que se ha ajustado la línea de visión, se realiza una observación  $r_1$  hacia el punto A. En seguida el estadal se coloca en un punto  $W_1$  a una distancia de  $S_1$  de tal manera que  $\overline{AS_1} \approx \overline{S_1W_1}$  . Se ajusta nuevamente la burbuja del nivel y se realiza la lectura  $v_1$  hacia el punto  $W_1$ . De esta manera, la diferencia de alturas entre A y  $W_1$  es  $h_1 = r_1 - v_1$ . Ahora se coloca el instrumento entre 20 y 50 metros más lejos en  $S_2$  y el estadal en  $W_1$ . Después de ajustar la burbuja se efectúa la lectura  $r_2$ . El estadal se sitúa en el punto  $W_2$  y se hace la lectura  $v_2$ . Siguiendo este proceso hasta llegar al punto B se obtiene que la diferencia de alturas entre A y B es

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + \dots = \sum r_i - \sum v_i$$

Para evitar ciertos errores en el ajuste del instrumento se hace necesario realizar mediciones desde puntos situados en medio de dos posiciones consecutivas del estadal. Para revisar las medidas se puede efectuar una nivelación continua hasta que se alcance un punto de altura conocida.

Los errores que se pueden presentar en la nivelación pueden ser sistemáticos o aleatorios. Entre los sistemáticos se encuentran el hundimiento en el terreno tanto del nivel como del estadal; distinto coeficiente de refracción en lecturas hacia adelante y hacia atrás del aparato; errores en la calibración y en la posición vertical del estadal. Los errores aleatorios se pueden



presentar al realizar las lecturas, en el ajuste de la burbuja, en la graduación, etc. El error estándar para una longitud de la línea de nivelación de un km no debe ser mayor de 3 a 5 mm (Mueller y Ramsayer, 1979).

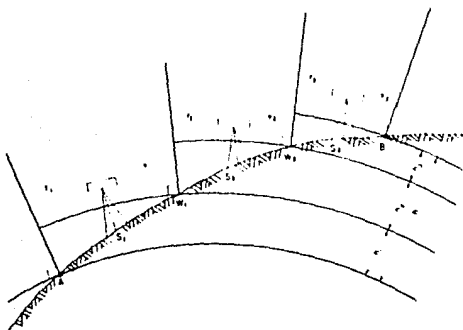


Figura 10. Esbozo del procedimiento de nivelación geométrica (Tomado de Mueller y Ramsayer, (1979). (Explicación en el texto).

#### \* Nivelación Trigonométrica.

En la figura 11 se ilustra el principio fundamental de la determinación trigonométrica de alturas. Se desea medir la altura entre los puntos A y B. El instrumento se centra sobre el punto A y se mide la altura  $i$  que tiene sobre el terreno. Se coloca un estadal de altura fija  $z$  ya conocida, con una señal visible en su parte superior, en el punto B. La distancia horizontal entre A y B es  $e$ . Se mide el ángulo vertical  $\alpha$  que corresponde al estadal en B. La altura  $H_b$  del punto B con respecto a A se calcula con ayuda de la figura 11 y se obtiene:

$$H_b = i + h - z \quad \text{donde } h = e * \tan \alpha \quad (3)$$

$e$  se puede calcular por medio de las coordenadas del punto de estación y del punto visado.

Esta igualdad sirve para puntos situados a distancias menores a 500 m porque esta se ve afectada por la curvatura de la Tierra y por la refracción de la luz en capas de distinta densidad.

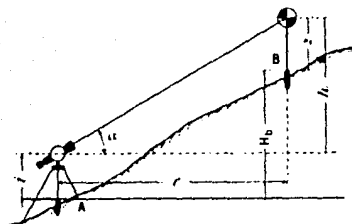


Figura 11. Esbozo del procedimiento de nivelación trigonométrica (Tomado de Werkmeister, 1947).  
(Explicación en el texto).

Para puntos situados a mayor distancia, se emplea la siguiente expresión:

$$H_b = i + r \tan \alpha + \frac{e^2}{2r} (1 - k) - z \quad (4)$$

,donde  $r$  es el radio de la Tierra y  $k$  el coeficiente de refracción del medio.

El coeficiente de refracción cambia de un sitio de observación a otro e incluso en un mismo sitio durante el día pues depende de la temperatura, humedad y presión atmosférica. Se puede eliminar a  $k$  de la ecuación (4) realizando mediciones en los dos puntos de interés al mismo tiempo. (Werkmeister, 1947)

## DETERMINACION DE DEFORMACIONES HORIZONTALES

### \* Instrumentación.

La precisión del instrumento que se necesita para calcular las deformaciones horizontales depende esencialmente del tiempo transcurrido entre uno y otro períodos de medición, el tamaño de las deformaciones y la localización en el volcán del área por medir. Por ejemplo, en el Kilauea, la precisión necesaria en el trabajo que se realiza diaria o semanalmente debe ser de una parte en  $10^5$  e incluso es deseable tener una de varias partes en  $10^6$ . Para lograr dicha precisión se emplean instrumentos de medición electro-óptica de distancias. Para este tipo de medidas, se emplean como señales tanto el espectro visible ( $\lambda = 0.36 \text{ -- } 0.78 \mu\text{m}$ ) como micro-ondas ( $\lambda = 1\text{mm a } 1\text{ m}$ ). Lo que se mide es el tiempo de recorrido  $t$  que la señal tarda en cubrir de ida y vuelta una distancia  $L$ . Así  $L = c/2t$  donde  $c$  es la velocidad promedio de la onda en la trayectoria. La señal es modulada a una frecuencia entre 7.5 y 150 MHz., que depende de  $\lambda$ , debido a que la medición del tiempo de recorrido con una exactitud de  $10^{-10}$  s -necesaria si se desea una precisión menor a 1.5 cm en la distancia- es en general muy difícil de obtener. En la actualidad se emplea más profusamente la medición de fases, debido a su mayor exactitud. Para calcular  $t$  en función de  $\Delta\phi$ , la diferencia de fase, tenemos :

$$t = \frac{r + (\Delta\phi/2\pi)}{f}$$

, donde  $r$  es el número de ciclos completados y  $f$  la frecuencia. Substituyendo en la fórmula de  $L$  :

$$L = \frac{c}{2f} \left[ r + \frac{\Delta\phi}{2\pi} \right]$$

En los instrumentos electro-ópticos ( desarrollados por primera vez por E. Bergstrand en 1948 ) la señal se genera por medio de un láser de helio-neón o por una fuente infrarroja, siendo su amplitud modulada. Esta se transmite a través de un sistema óptico y es reflejada por un prisma reflector al final de la línea.

Después la señal se recibe de regreso a través del sistema óptico del receptor, guiada por un multiplicador electrónico. La fase de la señal modulada recibida se mide y se compara con la fase de la señal inicial.

Para los instrumentos que emplean micro-ondas (el primer desarrollo data desde 1956 por T.L. Wadley), la onda portadora ( $\lambda = 8 \text{ mm}$  a  $100 \text{ mm}$ ) se genera por medio de un oscilador de cuarzo situado en un dispositivo central del aparato, modulándose su frecuencia. El receptor se compone de un reflector activo, el cual transmite una onda modulada en respuesta a la señal recibida. La diferencia de fase entre las dos señales se mide después que la onda reflejada ha regresado al dispositivo central (Mueller y Ramsayer, 1979). En la actualidad, este tipo de instrumento ha sido desplazado por su contaparte electro-óptica. En la figura 12 se muestran algunos de los instrumentos modernos de medición electrónica de distancias.

La precisión del instrumento se ve afectada por las condiciones de la atmósfera; es por ello que se han implementado métodos de corrección de errores (Thompson y Janes, 1967).

En el primer método, se realizan mediciones de temperatura, humedad y presión barométrica en uno o más puntos de las cercanías de la línea a estudiar. Con estos datos se calcula la velocidad de propagación para la longitud de onda de la señal empleada. Así, este valor se aplica a la trayectoria por medir, corrigiendo en consecuencia las medidas del tiempo de tránsito.

El segundo método (Véase la figura 13) se basa en el empleo de una trayectoria auxiliar. La línea 1 cruza la zona donde ocurrieron deformaciones, mientras que la 2 pasa por una región donde aquellas son despreciables. Al realizar una diferencia de las dos mediciones efectuadas, los efectos atmosféricos tienden a cancelarse, permaneciendo la diferencia real de las deformaciones ocurridas en las dos regiones cruzadas por las líneas.

El análisis de la dispersión de las ondas electromagnéticas en la atmósfera constituyen el tercer método. Mediciones del tiempo de tránsito se efectúan para dos o más longitudes de onda. Las diferencias entre esos valores se emplean para obtener la velocidad promedio en la atmósfera sobre la trayectoria completa para una longitud de onda determinada.



Figura 12 (A). Instrumento de medición electrónica de distancias. Distomat DI 3000. Para obtener distancias con este instrumento se mide el tiempo - que necesita un pulso de luz infrarroja en viajar de éste a un reflector y regresar. Su precisión es de  $\pm 5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$  y su alcance máximo en condiciones atmosféricas favorables es de 14 Km.

(Tomado de Distomat Wild DI 3000 Technical Data).



Figura 12 (B). Instrumento de medición electrónica de distancias. Geodimeter 440. Emplea pulsos de luz infrarroja para medir la distancia que existe entre el mismo y un conjunto de reflectores. Tiene una precisión de  $\pm 3 \text{ mm} + 3 \text{ ppm}$  y un alcance máximo en condiciones óptimas de 7 Km.  
(Tomado de Geodimeter 440 Technical Specification).

Debido a que los efectos del vapor de agua atmosférico sobre una onda óptica son casi nulos, la aplicación de los tres métodos anteriores a sistemas ópticos de medición de distancia puede proporcionar en la precisión un incremento en un orden de magnitud.

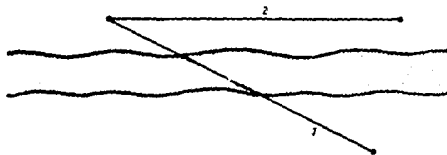


Figura 13. Trayectoria auxiliar empleada por el segundo método de corrección de errores atmosféricos. (Tomado de Thompson y Janes, 1967).

La precisión de los instrumentos láser es tal que la única fuente posible de error consiste en proporcionarles un dato erróneo del índice de refracción atmosférico a lo largo de la trayectoria a medir.

En la medición de distancias por micro-ondas, las altas frecuencias de las ondas portadoras divergen menos, reducen la pérdida de energía y disminuyen la influencia de las reflexiones en el terreno. Para los instrumentos de micro-ondas la precisión se ve afectada sobremanera por la humedad (unas 100 veces más que para las ondas ópticas). Así, los mayores errores provienen de una determinación incorrecta de la humedad, sobre todo para grandes distancias. Debido a que las micro-ondas son absorbidas en gran escala por la atmósfera, las distancias que se pueden medir (50 - 75 km tanto de día como de noche) dependen de la visibilidad que se presente al momento de la medición. Los

resultados de varios análisis muestran que en el caso de instrumentos que funcionan en base a micro-ondas, es posible obtener una precisión de 1 parte en  $10^6$  ( 1 micra en 1 km. ).

#### \*) Métodos de Medición.

##### \* Triangulación.

La triangulación es un método topográfico que se basa en la conocida regla de trigonometría de que si se conocen un lado y los tres ángulos de una figura triangular, entonces se pueden calcular los otros dos lados. Además, si se conoce la dirección de un lado, la de los demás también puede ser calculada.

Para su mayor efectividad la triangulación requiere una gran cantidad de medidas precisas de ángulos junto con un mínimo de medición de distancias. La red de triangulación se forma a partir de triángulos interconectados junto con ciertas líneas llamadas de base a partir de las cuales se calculan las medidas de las restantes líneas de la red, por lo que aquellas deben medirse con gran precisión.

Para que los errores de medición sean mínimos se efectúan más lecturas de las que se necesitan para obtener la posición de los vértices de la red. Las mediciones adicionales proporcionan los datos para el ajuste de la red por mínimos cuadrados.

A continuación se esboza el procedimiento de triangulación en un área cualquiera (figura 14). Se mide la distancia entre los puntos que forman la línea base, en este caso A y B. A partir de la base se determina E midiendo los ángulos  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  en el triángulo ABE. La posición de E con respecto a la base se puede determinar analítica o gráficamente. A partir del lado BE se localiza al punto C a partir de los ángulos  $\alpha_2, \beta_2$ . Conociendo CE, se puede obtener D, etc. Para tener una revisión e incrementar la precisión de las medidas, se leen todos los ángulos de cada triángulo (Mueller y Ramsayer, 1979).

Las redes de triangulación son de dos tipos; Uno es de tipo geodésico, la cual toma en cuenta la curvatura de la Tierra, que se emplea en la implementación de la red principal de control horizontal de un país y su campo se extiende hasta la determinación de la forma y dimensión de la Tierra. El otro es la



red de triangulación local o topográfica, que se emplea en el levantamiento municipal o regional, enlazándose con la triangulación geodésica para establecer tanto la orientación como la posición en conjunto de la red.

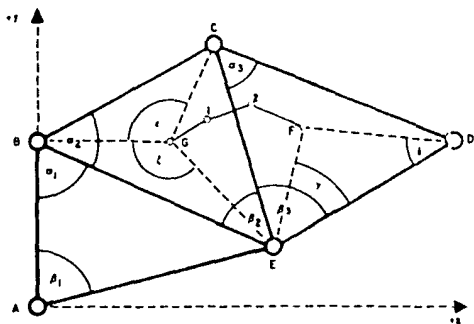


Figura 14. Red de triangulación  
(Tomado de Mueller y Rassayer, 1979)  
(Explicación en el texto).

La triangulación se divide en varias clases, dependiendo de la precisión que se quiera lograr, así como del tamaño del terreno a levantar. Existen tres ordenes de precisión, los dos primeros divididos a su vez en subclases.

La triangulación de primer orden es la más precisa. Se divide en tres clases. La clase I se emplea en aplicaciones de Ingeniería y de ciencia que requieran una alta precisión sobre distancias moderadamente grandes - 1.5 a 8 km -, por ejemplo en la medición de pequeños movimientos de terreno en zonas sísmicas.

La clase II se emplea para implementar la red básica de control horizontal de un país. La red consta de series de triángulos separados entre sí 100 km en cada dirección.

La triangulación de primer orden de clase III se clasificaba antiguamente como triangulación primaria. La mayor parte de la red de triangulación que existe en un país es de esta clase, la cual se aplica a proyectos de carreteras, localización de puentes,

donde se debe tener un alto grado de precisión en distancias más o menos grandes, pero las tolerancias son menos rígidas que en el caso de la red nacional.

Para la triangulación de primer orden - de las tres clases - se requiere la determinación precisa del azimut. El azimut de una línea es el ángulo que forman el plano vertical que pasa por ésta y el meridiano. Este ángulo se mide, para trabajos topográficos, desde el norte, desde  $0^{\circ}$  a  $360^{\circ}$  en el sentido de las manecillas del reloj.

Antes de establecer los vértices para una red de triangulación de primer orden, es necesario realizar un reconocimiento del área de trabajo para elegir adecuadamente el lugar del emplazamiento de aquellos. Otros criterios para la localización de las estaciones son su mutua intervisibilidad y que la figura que formen los presuntos vértices sea consistente, i.e. que formen triángulos equiláteros de lados entre 20 y 50 km de largo.

La triangulación de segundo orden se clasifica en dos subclases. La clase I - con un espacio entre cada estación de 6.5 a 16 km. - se emplea en la red nacional para llenar los espacios que dejan las grandes triangulaciones geodésicas. En general, dependiendo de la topografía, se planifican como triangulación local donde las estaciones se distribuyen uniformemente en una zona dada.

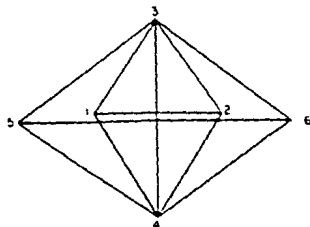
La clase II se emplea para establecer levantamientos hidrográficos en la costa y en cuencas fluviales.

La triangulación de tercer orden se usa para elaborar mapas topográficos, enlazándose a triangulaciones de orden superior. (Bouchard y Moffit, 1965; Higashida, 1972; Mueller y Ramsayer, 1979).

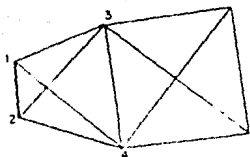
La línea base es, como se indicó más arriba, el primer segmento que se mide en una red de triangulación y a partir del cual se consideran las medidas de los lados de los triángulos de la red. Actualmente, los instrumentos de medición electrónica de distancias leen directamente tanto las longitudes de la base como de los triángulos que forman la red. Un geodímetro preciso, como el mostrado en la figura 12, se utiliza para medir electrónicamente la base en el caso de una red de triangulación de primer orden. Para triangulaciones de menor precisión, se omite en general la medición de la línea base al ligar la red de trabajo a

otra de orden superior.

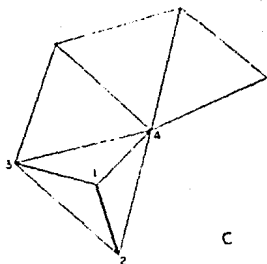
El empleo de métodos electrónicos en la medición de líneas base requiere que la visual sea clara entre los extremos de la línea. Si se mide una base a través de un cuerpo de agua, debe tenerse gran cuidado en las reflexiones de la señal, sobre todo en el caso de micro-ondas. Un método útil consiste en aislar con un protector tanto el transmisor como el receptor.



A



B



C

Figura 15 (A,B,C). Diversos procedimientos para incrementar el tamaño de una base en una red de triangulación, dependiendo de la configuración del terreno. (Tomado de Higashida, 1972).

En una red de triangulación de primer orden la base mide aprox. 45 km. Aún con métodos electrónicos no es fácil medir esta distancia, pues se necesita que las condiciones atmosféricas sean estables. De este modo se hace necesario ir incrementando el tamaño de una base elegida de antemano hasta empalmar con un lado de la red de triangulación.

En la figura 15 (A) se ilustra el procedimiento para la incrementación de la base utilizando la llamada red de triángulos de la base (vértices 1,2,3,4). El lado 1-2 es la base que se mide directamente. Se miden los ángulos formados por los vértices 1 a 4, calculándose en seguida el lado 3-4 que a continuación servirá de base. Ahora se miden los ángulos que resultan de los vértices 3,4,5 y 6 para obtener la base de la segunda incrementación, i.e. el lado 5-6. Dependiendo de la configuración del terreno, se utiliza otra forma para la red de triángulos de la base. (figuras 15 (B),(C)). (Higashida, 1972).

Al unirse varios puntos para formar una red de triangulación se pueden emplear una cadena de triángulos o una cadena de cuadriláteros (figuras 16 (A),(B)). Cada uno de estos métodos implica diferentes técnicas de ajuste de las medidas de la red. En una cadena de triángulos se necesita que en cada miembro de ésta la suma de los ángulos interiores sea  $180^\circ$ . Pero en el caso del cuadrilátero cada medida se puede obtener empleando un conjunto distinto de triángulos. Por ello la suma de los ocho ángulos interiores (figura 16 (C)) debe ser de  $360^\circ$  y para cada triángulo,  $180^\circ$ . Además se debe cumplir que :

$$1 = \frac{\text{sen}b \times \text{sen}d \times \text{sen}f \times \text{sen}h}{\text{sen}a \times \text{sen}c \times \text{sen}e \times \text{sen}g}$$

,para que cualquiera de los lados que sea calculado no dependa de los triángulos empleados para ello. (Bouchard y Moffit, 1965).

#### \* Trilateración.

En este método la red de triangulación se calcula a partir de las longitudes de sus lados medidos electrónicamente. Estas son suficientes para conocer tanto los ángulos horizontales como las

posiciones de los vórtices de la red. Empero, se efectúan mediciones del azimut en vórtices determinados para que se mantenga la precisión de aquél en los lados de la red.

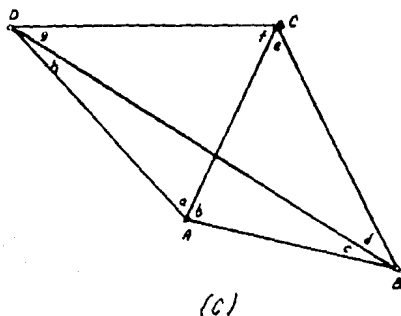
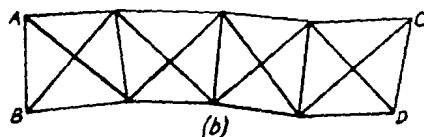
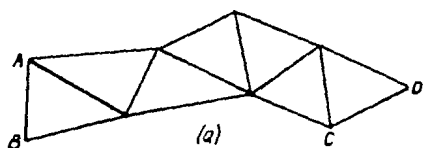


Figura 16. Redes de triangulación formadas por (A) una cadena de triángulos y por (B) una cadena de cuadriláteros. (C) Ajuste de la triangulación en un cuadrilátero. (Tomado de Bouchard y Moffit, 1965).

(Explicación en el texto).

Los valores de los lados obtenidos deben ajustarse antes de realizar cualquier cálculo. Para ello se emplean los recíprocos de los ángulos verticales ( o de las elevaciones ) medidos en cada vértice del lado considerado.

Si en la red de trilateración no se requiere una gran exactitud, sólo debe revisarse que los ocho ángulos internos de los cuadriláteros y los tres de los triángulos sumen  $360^{\circ}$  y  $180^{\circ}$  respectivamente. Pero si se necesita una gran precisión, debe emplearse el método de mínimos cuadrados para ajustar la red.

En el ajuste de un trabajo de trilateración, se debe tener precaución en lo referente a los "pesos" asignados a las longitudes medidas. El peso de una medida es el valor de ésta relativo a cualquier otra medición. Cuando es posible asignar el error probable de cada medición efectuando la medida varias veces, entonces los pesos de las medidas son proporcionales a los cuadrados de dichos errores probables. Una vez que se ajustan los ángulos de la red de trilateración, deben calcularse de nueva cuenta los lados de los triángulos de acuerdo con los ángulos ya ajustados. (Bouchard y Moffit, 1965).

En el apéndice I se mencionan los distintos métodos de cálculo de los desplazamientos horizontales y verticales empleando los datos obtenidos con los métodos de medición ya mencionados.

#### **MEDICION DE LA INCLINACION DEL TERRENO POR MEDIO DEL NIVEL DE AGUA EN MARES Y LAGOS.**

Si un volcán posee un lago en el cráter o se encuentra cerca de uno o del mar, es muy útil tener una red de mareógrafos o de otros instrumentos alrededor de éstos para medir levantamientos o hundimientos relacionados con el edificio volcánico.

##### **-) Mareógrafos.**

El mareógrafo básicamente consta de un flotador unido a un cable con uno de sus extremos enrollado alrededor de un cilindro, mientras que el otro se amarra a un contrapeso. Al girar el cilindro - merced a los cambios de marea percibidos por el flotador - transmite su movimiento, por medio de un tornillo sin

fin y de un engrane, a un estilete que traza un gráfico que refleja dichos cambios, el cual lleva marcas de hora - en analogía con los sismogramas - para poder corregir los efectos propios de la marea diaria (figura 17). En los mareógrafos más modernos se substituye la transmisión mecánica del cambio de nivel por una de tipo eléctrico o incluso empleando ondas electromagnéticas.

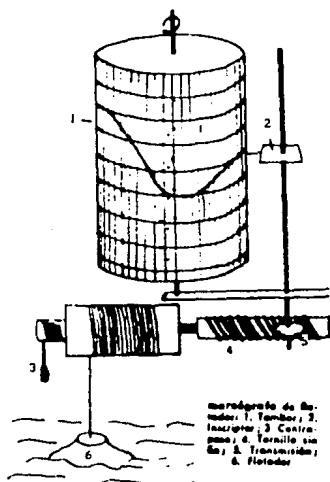


Figura 17. Mareógrafo de flotador. 1) Tambor, 2) Inscriptor, 3) Contrapeso, 4) Tornillo sin fin, 5) Transmisión, 6) Flotador. ( Modificado del Pequeño Larousse de Ciencias y Técnicas, 1980).

En relación con los datos recabados por el mareógrafo, los cambios relativos al nivel del mar pueden considerarse que son absolutos, pero los cambios registrados alrededor de la línea costera de un lago son relativos entre sí, a menos que se relacionen por medio de otro tipo de medidas con una altura dada; de este modo pueden integrarse a la red de mediciones de deformación. Para este propósito pueden servir las medidas de nivelación. (Banks, 1984).

-) Transductor de presión.

Otra opción para este tipo de medidas es utilizar un transductor de presión, esto es, un instrumento que mida alguna otra variable y después transforma las lecturas a unidades de presión. Son aparatos muy costosos, pero tienen la ventaja de poderse usar en aguas profundas.

-) Medidor lacustre de nivel de agua.

Este instrumento ha sido empleado con éxito para medir las variaciones de nivel del Lago Myvatn asociadas a la actividad del Volcán Krafla, Islandia. (Tryggvason, 1987). Un total de seis estaciones se han colocado alrededor del Myvatn, cuyas dimensiones son 11 km X 7 km (figura 18). Cada estación consiste de un clavo empotrado con cemento en la roca sólida, el cual se sitúa a aprox. 5 m de la orilla y a menos de 1.5 m sobre el nivel del lago.

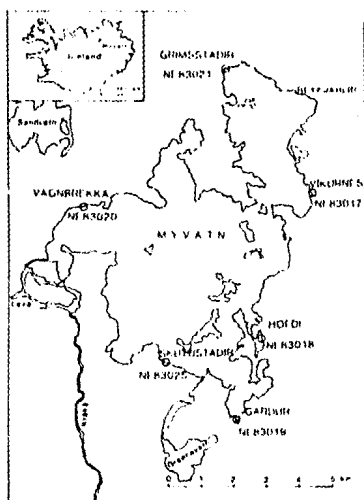


Figura 18. Localización de las estaciones de medición del nivel de agua del Lago Myvatn, Islandia. (Tomado de Tryggvason, 1987).



-) Transductor de presión.

Otra opción para este tipo de medidas es utilizar un transductor de presión, esto es, un instrumento que mida alguna otra variable y después transforma las lecturas a unidades de presión. Son aparatos muy costosos, pero tienen la ventaja de poderse usar en aguas profundas.

-) Medidor lacustre de nivel de agua.

Este instrumento ha sido empleado con éxito para medir las variaciones de nivel del Lago Myvatn asociadas a la actividad del Volcán Krafla, Islandia. (Tryggvason, 1987). Un total de seis estaciones se han colocado alrededor del Myvatn, cuyas dimensiones son 11 km X 7 km (figura 18). Cada estación consiste de un clavo empotrado con cemento en la roca sólida, el cual se sitúa a aprox. 5 m de la orilla y a menos de 1.5 m sobre el nivel del lago.

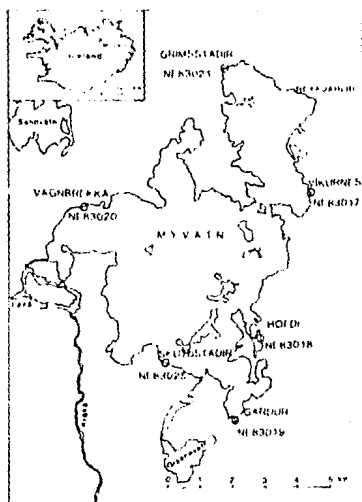


Figura 18. Localización de las estaciones de medición del nivel de agua del Lago Myvatn, Islandia. (Tomado de Tryggvason, 1987).

En la figura 19 se ilustra el medidor lacustre, que consta de un cilindro de 60 cm x 7 cm abierto en la parte superior y cerrado en el fondo. El agua penetra al cilindro y a un tubo transparente a través de dos agujeros practicados en el fondo. Unido al cilindro se encuentra un estadal de 2 m de largo graduado en mm.

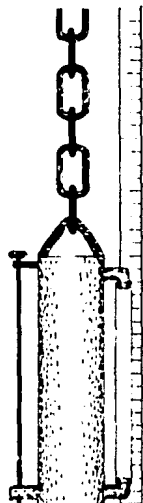


Figura 19. Medidor lacustre - de nivel de agua utilizado en el Lago Myvatn, Islandia. (Tomado de Tryggvason, 1987).

Las observaciones se realizan con el medidor sostenido por trípode en aguas poco profundas. Una válvula abierta permite la entrada del agua en el instrumento. Después de que se alcanza el equilibrio con el agua exterior (aprox. en 5 minutos) la válvula se cierra. A continuación el cilindro se eleva para poder medir el nivel del agua que se indica en el tubo transparente, después de lo cual el cilindro se vuelve a bajar al agua para realizar otra medida dentro de 3 ó 5 minutos. Se realizan cuatro o más mediciones consecutivas en cada estación dependiendo de las condiciones meteorológicas.

Antes de cada medición la altura del instrumento se nivela. La altura del nivel óptico sobre el nivel del lago se obtiene de la diferencia entre la lectura del nivel del agua obtenida por el medidor lacustre y la lectura de la altura del medidor obtenida a partir del nivel óptico. A continuación se nivela un estadal que ha sido colocado en el clavo de la estación. Esta medida da la elevación del nivel óptico a partir de la estación. La altura sobre el nivel del lago del clavo de la estación se calcula de la diferencia entre la altura del nivel óptico sobre el agua y la altura del nivel óptico medida desde la estación. Las mediciones en todas las estaciones se realizan de la misma forma.

Al terminar las medidas de la red, se vuelve a medir la primera estación para observar si ocurrió un cambio del nivel del lago durante el tiempo que duraron las medidas. Estas duran aprox. 4 horas y el cambio de nivel del lago es generalmente menor que 2 mm. (La incertidumbre en las observaciones es en promedio de 1mm.). El cambio de nivel observado entre dos medidas sucesivas de la red debe ser referido a una estación cualquiera, escogida como referencia. El cambio de nivel medido en dicha estación, se considera como el cambio de nivel del lago ocurrido en todas las estaciones. La marca de elevación en cada estación se corrige a partir del cambio de nivel del lago. Así, la marca anterior se resta de la marca actual corregida, donde las diferencias positivas indican un levantamiento relativo de las estaciones. Las medidas deben realizarse en días en que la superficie del lago permanezca horizontal, i.e. cuando las condiciones atmosféricas sean favorables antes de y durante el trabajo de medición. Para el caso del lago Myvatn una velocidad del viento de 2.5 m/seg produce una diferencia de nivel de 0.5 cm. en lados opuestos del lago. Si consideramos que la exactitud de las mediciones gira alrededor de 0.1 cm., se comprende que deben buscarse días sin viento para realizar las medidas.

#### **DISEÑO DE REDES DE MEDICION DE DEFORMACION.**

El emplazamiento de los instrumentos de medición es uno de los aspectos más importantes en el estudio de las deformaciones de terreno asociadas con los volcanes.

Dependiendo de su localización en el terreno, los instrumentos son capaces de detectar distintos tipos de deformaciones. Los inclinómetros y las redes de triangulación que se encuentran cerca de la cima del volcán registran las deformaciones pequeñas, mientras que las situadas a una distancia horizontal de la fuente de presión equivalente a aproximadamente 0.5 y 0.7 veces la profundidad de aquella, captan las deformaciones máximas.

Las redes de nivelación, así como las estaciones de gravimetría - señaladas por Banks (1984) como parte integrante de un programa de deformación volcánica - , registran la máxima deformación directamente sobre la fuente de presión.

Para obtener un registro completo de las deformaciones es recomendable la instalación de tres o cuatro - o al menos uno - arreglos radiales con varias estaciones localizadas lejos del centro de deformación.

La localización del centro de deformación se obtiene por medio del trazo en un plano del terreno de los contornos y vectores de igual desplazamiento hasta encontrar el centro de máximo levantamiento ó hundimiento del suelo, según el caso. Si se cuenta con una red completa, el procedimiento es fácil. Por otro lado, se puede suponer, con un primer grado de aproximación, que el centro de deformación es el cráter mismo e instalar estaciones a su alrededor para registrar la componente radial de desplazamiento.

En los volcanes de tipo escudo, las estaciones de inclinometría y de medición electrónica de distancias, situadas a muchos kilómetros del cráter, son capaces de detectar cambios significativos en el volcán.

Para los estratovolcanes la situación es diferente. Las estaciones emplazadas en las laderas inferiores de éstos, no detectan en general deformaciones lo suficientemente notorias como para ser empleadas en propósitos de prevención a corto plazo. Para que estas estaciones proporcionen datos útiles es necesario que las medidas se obtengan con instrumentos de alta precisión colocadas en esa misma zona o cercanas al cráter.

Debido a que las laderas superiores de los estratovolcanes son muy empinadas, es difícil establecer redes de triángulos para inclinometría. Así, se hace necesario reducir el tamaño de éstos, aunque con ello se disminuya la precisión en las medidas.

Lo más conveniente para el análisis de deformaciones en estratovolcanes es el disponer de al menos tres arreglos de medición electrónica de distancias y tres estaciones de nivelación y/o de inclinometría. De esta manera es posible obtener datos adecuados para el modelado del depósito, estimaciones de volumen del mismo, pronóstico de erupciones y detección de colapsos inminentes del terreno.

#### USO DE SATELITES.

El empleo de instrumentos precisos de navegación instalados en satélites, permite obtener la posición de los bancos de nivel de manera precisa. Esto se conoce como método GPS (Global Positioning System, i.e. Sistema de Posicionamiento Global).

Los métodos GPS proporcionan una precisión en medidas horizontales de 10 ppm para una línea base típica con una longitud entre .5 y 5 km; i.e., mantienen la precisión asignada a la triangulación de primer orden.

Si se requieren medidas verticales con una precisión mayor de 3-5 cm, se puede realizar una nivelación de tercer orden. Sin embargo, los topógrafos pueden emplear la capacidad de visualización tridimensional del GPS, para obtener la precisión deseada en las medidas verticales y horizontales simultáneamente.

Mientras que los datos de una triangulación de primer orden realizada en todo el territorio de un país definen la posición horizontal de los bancos de nivel empleados por el GPS, la posición vertical de los mismos se refiere al elipsoide teórico que tiene aproximadamente la forma de la Tierra (Hajela, 1990).

La determinación de la altura de los bancos de nivel de GPS en base al elipsoide es muy útil en estudios de deformación y "hundimiento" del terreno donde el interés reside en conocer el cambio de altura de una posición entre una fecha y otra.

#### COMENTARIOS.

Como podemos observar, existe una gran variedad de métodos de observación de deformación de terreno provocada por el vulcanismo. Sin embargo, no todos los métodos se pueden aplicar a un caso

dato. Ello dependerá, esencialmente, de las condiciones topográficas de la zona a estudiar, así como del orden de resolución que se quiere obtener de las diversas mediciones efectuadas.

En nuestro país, debido a la falta de infraestructura y de recursos económicos, apenas se está implementando la aplicación de estos métodos a la vigilancia de volcanes activos. Se ha comenzado por el establecimiento de redes de nivelación y de triangulación en los volcanes Popocatepetl y Colima (De la Cruz et. al., 1988). Por esto se hace necesario la ampliación y el establecimiento de estas redes, además de la implementación de los métodos mencionados anteriormente, v.g. inclinometría húmeda, en los volcanes de México. La actividad reciente del volcán de Fuego de Colima pone de relieve la importancia de disponer de todos los métodos posibles de monitoreo volcánico para una evaluación completa de los posibles riesgos que pudieran ocurrir.

## CAPITULO II

### EJEMPLOS DE DEFORMACION EN VOLCANES ACTIVOS.

#### 2).- INTRODUCCION.

Hemos visto ya los distintos métodos e instrumentos empleados en la medición de deformación del terreno, relacionados con el vulcanismo. A continuación se presentarán algunos ejemplos importantes de erupciones volcánicas que fueron precedidas y/o seguidas por fenómenos de deformación. Entre estos ejemplos se distinguen por su importancia en el desarrollo de las técnicas de observación de deformación del terreno asociada a la actividad volcánica, los del Volcán Sakurajima (1914 y 1946) en Japón y del Kilauea (1967-70) en Hawai. Además, se agrega un apartado dedicado a las varias interpretaciones que se han hecho a las deformaciones de algunos de los volcanes mencionados.

#### 1).- VOLCAN KILAUEA, HAWAI, E.U. (1967-1968).

El Volcán Kilauea, localizado en las coordenadas  $19.42^{\circ}\text{N}$ ,  $155.27^{\circ}\text{O}$ , sufre un proceso de "inflado" y "desinflado", semejante a un globo gigantesco, antes y durante una erupción respectivamente.

Los registros que relacionan los ciclos de deformación con las erupciones, sugieren que el combamiento de la cima del Kilauea se debe a una inyección de magma basáltico en un sistema de depósito subterráneo. Este volcán es uno de los más activos del planeta; sus deformaciones por ende, son frecuentes y ocurren en un intervalo de tiempo muy corto, de ahí que sea un volcán típico para realizar este tipo de estudios. Las técnicas empleadas para monitorear la deformación del Kilauea incluyen medidas de inclinometría realizadas tanto con inclinómetros húmedos como de burbuja, así como con el método de inclinometría seca; cambios de altitud sobre el nivel del mar medidos mediante nivelación y cambios en la distancia horizontal medidos electrónicamente con un geodímetro.

De acuerdo con Fiske y Kinoshita (1969) el combamiento previo a la erupción de 1967-68 empezó después de la depresión asociada a la

erupción fisural ocurrida el 24 y 25 de diciembre de 1965, la que continuó ininterrumpidamente durante 22.5 meses hasta que empezó la erupción címica el 5 de noviembre de 1967. Las medidas de inclinometría acusan una tendencia positiva, aunque las componentes N-S y E-O suben a tasas variables y en ciertos períodos una o ambas caen.

La elevación total de la superficie ocurrida desde enero de 1966 a octubre de 1967, tuvo un máximo de 700 mm (relativo al flanco oriental del Mauna Loa, elegido como cero arbitrario). El sitio donde ocurrió el máximo levantamiento del terreno fue ubicado un kilómetro al sudeste del cráter Halemaumau (figura 20).

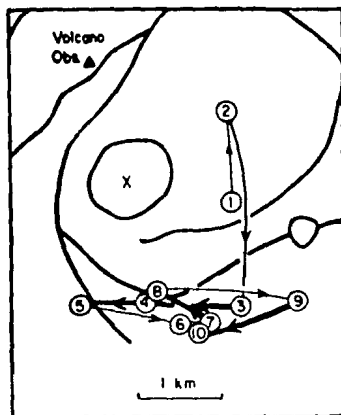


Figura 20. Cambios de la posición del punto donde se origina el "levantamiento" del terreno ocurridos en el Volcán Kilauea durante 1966-67. ( X simboliza al cráter Halemaumau). (Tomado de Fiske y Kinoshita, 1969). (Explicación en el texto)

El punto origen o centro del levantamiento cambiaba de posición, conforme el combamiento avanzaba (Véase la figura 20). De enero a



julio de 1966 con un levantamiento de 90 mm, el origen se ubicó al  
 sudoeste del Halemaumau (posición 1). Durante los meses de julio a  
 octubre, el terreno se levantó otros 90 mm; pero el centro de la  
 deformación se situó al noreste del cráter, en la posición 2. A  
 principios de octubre se desplazó a la posición 3, o sea más de 2  
 km al sur de la posición que tenía en julio. En los siguientes  
 cuatro meses no hubo cambio alguno y sólo después de este período  
 se deformó la cima 100 mm más. En el intervalo de una semana  
 solamente (principios de febrero de 1967) cambió su posición de 3  
 a 4 y finalmente al punto 5. Durante mayo y junio se desplazó a  
 los puntos 6 y 7 y en diez días (a fines de junio) al punto 8. De  
 julio a agosto, cambió lentamente de la posición 8 a la 9. Y  
 finalmente, se desplazó del punto 9 al 10 a principios de octubre,  
 no habiendo cambio en la región hasta que comenzó la erupción el 5  
 de noviembre de 1967.

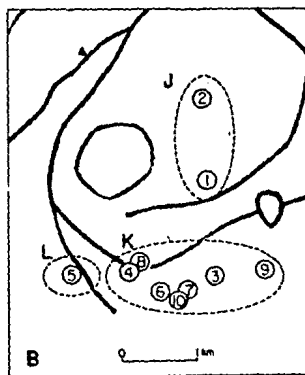


Figura 21. Sistema de depósitos del Kilauea, según se infiere de la deformación de terreno ocurrida en 1966-67.  
 (Tomado de Fiske y Kinoshita, 1969).

La cima del Kilauea está aparentemente soportada por un complejo sistema de depósitos. La migración del centro de "levantamiento" sugiere que regiones sucesivas dentro del sistema se "inflan" en cierto orden conforme progresa el "inflatamiento" general. El problema es más complejo debido a que el "levantamiento" del terreno ocurre en oleadas, en particular cuando se desplaza el punto central a partir del cual asciende el suelo; el área del sistema de depósitos, de acuerdo con las medidas de inclinometría, puede ser esbozada del siguiente modo: las posiciones 1 y 2 del centro del levantamiento (figura 20) se encuentran sobre zonas diferentes de un mismo depósito J (figura 21), que se fue "inflatando" entre enero y septiembre de 1966. El desplazamiento de 2 km hacia el sur probablemente representa el inicio del llenado de un nuevo depósito K, que engloba siete de los diez centros de levantamiento; esta región K abarca el sitio de máxima deformación vertical. La región L se considera independiente del depósito K debido al desplazamiento del centro de levantamiento hacia el occidente ocurrido en febrero de 1967, el cual indica una ampliación del sistema de depósitos.

Fiske y Kinoshita (1969) aplicaron el modelo de Mogi (descrito en el capítulo III) al Kilauea obteniendo los resultados mostrados en las figuras 22 y 23. Para el período enero-julio de 1966, los desplazamientos verticales de los bancos de nivel (figura 22) se han comparado con los obtenidos teóricamente para fuentes de deformación situadas a profundidades de 2, 3 y 4 km; en este caso el máximo desplazamiento vertical es  $\Delta h_0 = 107$  mm. A pesar que en la figura 22 el desplazamiento de la mojonera de referencia es nulo, en realidad es de 5 ó 10 % de  $\Delta h_0$ ; corrigiendo los puntos de la gráfica se encuentra que los datos experimentales se localizan más cerca de la curva correspondiente a los 3 km. Así, para este período la deformación se relaciona con una fuente situada entre 2 y 3 km de profundidad. Durante el período entre agosto y octubre de 1967, los datos de nivelación nuevamente sugieren un depósito con una profundidad cercana a los 3 km (figura 23). De este modo se concluye que el depósito de magma se localiza a esta profundidad aproximadamente.

Debido al "inflatamiento" del Kilauea, la distancia entre dos puntos situados en lados opuestos del volcán, aumenta en el transcurso de

un período de deformación. Se ha instalado y medido con un geodímetro una red de 70 líneas sobre el volcán, veinte de las cuales forman la red principal de la cima. Los cambios en longitud para las líneas de la red durante el período entre enero y febrero de 1967 se muestran en la figura 24.

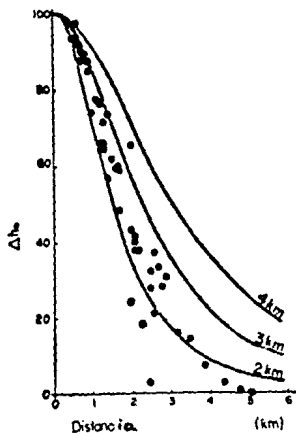


Figura 22. Desplazamientos verticales ocurridos en el Kilauea durante el período enero-julio de 1966. (Tomado de Fiske y Kinoshita, 1969).

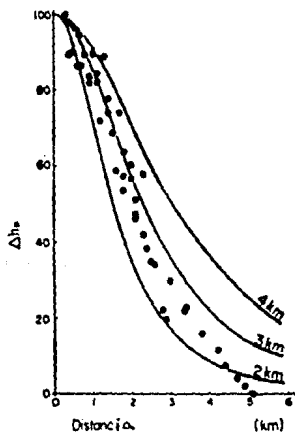


Figura 23. Desplazamientos verticales ocurridos en el Kilauea durante el período agosto-octubre de 1967. (Tomado de Fiske y Kinoshita, 1969).

El modelo de Yokoyama (1971), consistente en una fuente intrusiva de presión - en contraposición a Mogi que emplea fuentes implosivas o explosivas - aplicado a una intrusión situada a 2 km de profundidad, se compara con los cambios mencionados anteriormente. En este caso  $\Delta h_0 = 100$  mm y con este dato el aumento o contracción teórica de las líneas de la red puede ser calculado; a partir de estos contornos se observa que la línea R-S de la figura 24 se extiende más de lo que cualquier modelo simple sobre la fuente puede explicar. Esta línea tiene la peculiaridad de pasar directamente sobre el centro del "levantamiento" acotado para dicho período, de donde se sugiere que la región cercana a dicho centro se deforma de manera inelástica en la dirección horizontal.

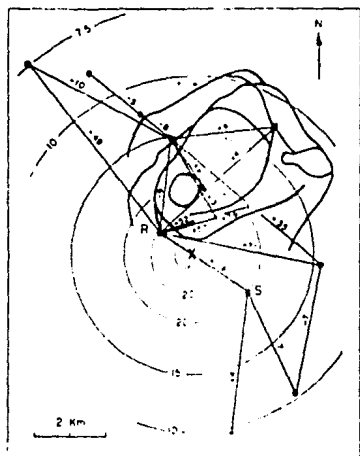


Figura 24. Cambios registrados en la longitud (en mm) de la red de triangulación situada en la cima del Kilauaea.

(Tomado de Yokoyama, 1971).

Fiske y Kinoshita suponen que el aumento en la longitud de la línea R-S es igual a 110 mm; modificando de esta manera la línea R-S, la comparación entre los cambios de longitud calculados empleando el modelo de Yokoyama y los medidos indica que para una fuente situada a 2 km de profundidad 11 líneas de la red muestran gran concordancia (las diferencias son <10 mm), 7 líneas mediana (diferencia entre 10 y 25 mm) y una línea poca concordancia (diferencia >25 mm). Utilizando el modelo de Mogi las concordancias corresponden a 13, 6 y 1 línea respectivamente.

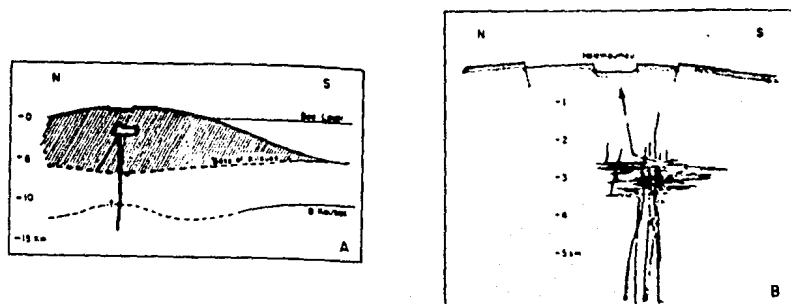


Figura 25. Sección transversal del Kilauea. (A) Cámara magmática situada entre 2 y 3 km. de profundidad. (B) Detalle del sistema de depósitos.  
(Tomado de Yokoyama, 1971).

Aplicando el modelo de Mogi a los desplazamientos horizontales ocurridos entre agosto y octubre de 1967 y bajo el argumento presentado anteriormente de extender la longitud de la línea R-S, la concordancia entre las extensiones teóricas y las medidas para las 20 líneas sobre la cima del volcán es mejor para la fuente

colocada a 3 km de profundidad, que coincide con los datos de nivelación para el mismo período.

La interpretación de los datos de desplazamientos verticales y horizontales sugieren que el "inflamiento" de la cima del Kilauea se puede explicar en términos de la expansión de un sistema de depósitos bastante complejo situado a una profundidad entre 2 y 3 km. Fiske y Kinoshita consideran este sistema como un agregado de diques y filones enlazados de tal manera que conectan el sistema de depósitos somero con una cámara magnética situada a una mayor profundidad, mientras que otros diques conectan el depósito con fisuras eruptivas superficiales (figura 25).

Debido a que la tasa de "inflamiento" del Kilauea no fue constante durante el intervalo de enero de 1966 a febrero de 1967, estos autores sugieren que el magma asciende desde una profundidad cercana a los 30 km hasta el sistema superficial de depósitos a una razón variable.

## II).- VOLCAN KILAUEA, 1968-70 (CIMA).

Las observaciones en este volcán durante este período (1968-70) fueron publicadas por Swanson y Jackson (1970) quienes reportaron los siguientes datos. La región cimera del Volcán Kilauea tuvo un hundimiento máximo entre 10-20 cm en respuesta a cada una de las tres erupciones ocurridas en la zona superior del rift oriental durante agosto y octubre de 1968 y febrero de 1969. Las deformaciones y los desplazamientos horizontales máximos fueron :

- Deformación del suelo hacia dentro: 50-90 partes por millón (ppm).
- Contracción del terreno (tangencialmente a los contornos de hundimiento): 50-150 ppm.
- Desplazamiento absoluto hacia el punto de hundimiento máximo: 12-20 cm.

De acuerdo con las observaciones de deformación realizadas, la liberación de esfuerzos se completó dentro de los 2 primeros días de la erupción, durante los cuales cada centro de "desinflamiento" emigró de 2 a 3 km hacia el sur de su posición inicial, localizada en la parte centro-sur de la caldera. El levantamiento y la inclinación del terreno regresaban aproximadamente a sus niveles pre-eruptivos entre cada una de las tres erupciones mencionadas,

aunque las deformaciones horizontales no alcanzaron su valor inicial anterior al período de agosto de 1968 a diciembre de 1969. El hundimiento de la parte superior del rift oriental durante la primera erupción entre mayo de 1969 y abril de 1970 fue sólo del 30-50 % de las erupciones precedentes. La liberación de esfuerzos durante los últimos episodios de la erupción reportada por los anteriores autores alcanzó un valor de 20 a 40 ppm. Los datos sugieren que los focos de "inflamamiento" y "desinflamamiento" se encuentran a una profundidad entre 2 y 3 km; la expansión y contracción de una cámara magnética ó un ascenso y descenso de una columna de magma pudieron haber causado dicho proceso en el Kilauea.

### III).- VOLCAN KILAUEA, 1968-70 (RIFT ORIENTAL).

El "hundimiento" de la región cimera del volcán durante cada una de las erupciones del rift oriental desde agosto de 1968 estuvo acompañado por un levantamiento de las áreas del mismo, cercanas a los sitios de la erupción. El levantamiento del terreno varió de 15 a 90 cm y los bancos de nivel fueron desplazados lejos del rift hasta 58 cm. En dos erupciones tuvieron lugar un fracturamiento del terreno así como un hundimiento local de los graben centrales a lo largo de las fisuras activas. Un graben de más de 40 m de profundidad se formó donde la zona de falla se dilató 2.9 m. El alargamiento continuo de una línea de referencia de 900 m de longitud, situada a lo largo de la zona de rift cercana al sitio de la erupción que comenzó en mayo de 1969 y continuaba incluso hasta abril de 1970, llegó hasta 8 cm en enero de ese mismo año.

En esta erupción, las elevaciones del terreno observadas son interpretadas como un reflejo de la inyección de magma desde la misma fuente que controla el "inflamamiento" de la cima del Kilauea hasta el sistema del rift oriental. La formación del graben y la dilatación positiva del rift son considerados como características tensionales causadas por la inyección de un dique en la zona del rift oriental.

### IV).- VOLCAN ASAMA, JAPON (1932).

El Monte Asama, uno de los volcanes más activos del Japón, se localiza en las coordenadas 36.37° N, 138.6° E (aprox. 100 km al

noroeste de Tokio); su altura alcanza los 2542 metros s.n.m. y sus erupciones se han clasificado como pertenecientes al tipo Stromboliano.

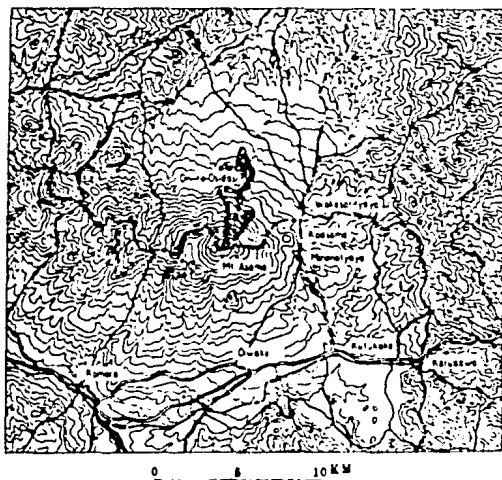


Figura 26. Mapa topográfico del Volcán Asama y sus alrededores. (Tomado de Takahasi, 1933).

El geofísico japonés R. Takahasi instaló el 3 de junio de 1932 un par de inclinómetros en las direcciones N-S y E-O en un sótano del pueblo de Komoro (figura 26), situado a 23.8 km al suroeste del Monte Asama. Esencialmente, el tipo de inclinómetro empleado es un péndulo horizontal fabricado con cuarzo; la sensibilidad del instrumento es tal que una desviación de 200 mm se produce merced a una inclinación del terreno de un segundo de arco (Takahasi, 1933). Al día siguiente de instalado el instrumento, ocurrió una explosión que provocó una lluvia de cenizas en una gran área



alrededor del volcán. Este fue el inicio de unas 70 explosiones de diversa magnitud hasta finales de agosto de 1932.

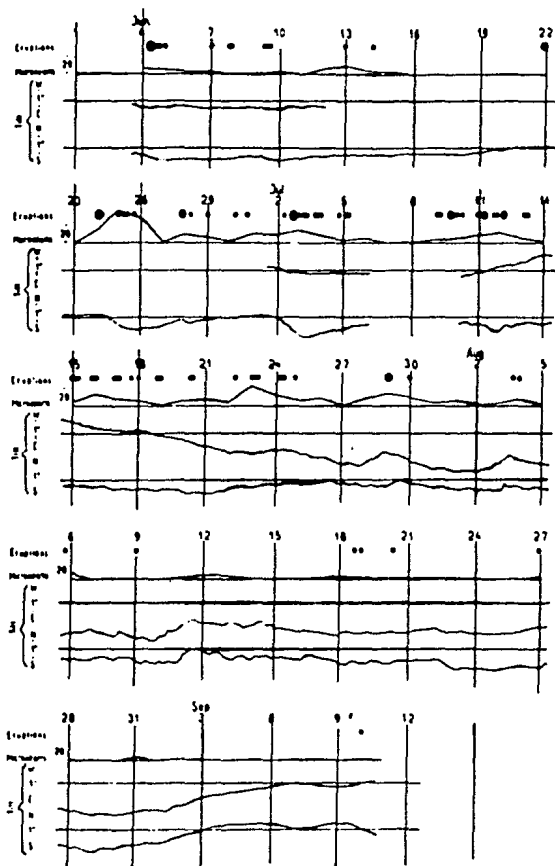


Figura 27. Gráficas correspondientes a la inclinación de terreno registrada en el Volcán Asama del 3 de junio al 10 de septiembre de 1932. (Tomado de Takahasi, 1933).

En la figura 27 se muestra el registro de inclinaciones del terreno, además del número diario de tremores volcánicos y las explosiones del Asama para el período comprendido entre el 3 de junio y el 10 de septiembre de 1932. En las acotaciones de la gráfica se encuentran las letras N, S, E y W que muestran la dirección hacia la cual el terreno se ha inclinado. Por ejemplo, en la curva E-W la desviación hacia la letra E indica que el suelo se ha inclinado hacia el este, elevándose hacia el oeste. La magnitud de las explosiones se señala de acuerdo al tamaño relativo de los puntos de la figura.

Como se observa en la figura 27, las erupciones acaecidas durante este año ocurrieron en grupos, en los que las de mayor tamaño se situaron al principio y las más pequeñas al final. Takahasi (1933) explica lo anterior por medio del análisis de la energía empleada para romper el tapón que bloquea el conducto volcánico. Para la primera erupción, la energía tiene que ser mayor que para los eventos subsiguientes; si el tapón del conducto no es muy sólido, la energía se disipará por una serie de erupciones pequeñas.

La mayor parte de las variaciones en la inclinación del terreno ilustradas en la figura 27, se relacionan con la actividad del Asama (un porcentaje mínimo se asocia con fenómenos atmosféricos). Las primeras y más notables inclinaciones en la dirección N-S comenzaron el 18 de junio de 1932, aumentando constantemente hasta el 24 de junio en que ocurrió la explosión. Para las erupciones de los días 28 de junio, 3 y 29 de julio se tiene un patrón similar, pero las inclinaciones ocurrieron en la dirección E-W.

Takahasi, plantea como causa de la deformación del terreno, el aumento de presión del magma bajo el volcán por diferenciación magnética; también supone que las características de la inclinación alrededor del Asama dependen de la velocidad con que la presión bajo éste aumenta o disminuye, así como de la situación que presente el fondo del cráter en ese momento.

#### V).- VOLCAN ASAMA, 1935.

Este volcán presentó en 1935 un período activo que duró desde el 20 de abril hasta finales de mayo de ese año. El combamiento del suelo alrededor al cráter, que se inició en octubre de 1934 y la inclinación del terreno que fue observada desde ese mismo mes

-merced a dos inclinómetros de péndulo-, son los eventos premonitores de dicha actividad.

La razón diaria promedio de ascenso del fondo del cráter fué de 20 cm; antes de la erupción el suelo había ascendido 50 cm por encima de la posición que tenía en octubre (Minakami, 1935).

La inclinación del terreno no cambió de manera significativa desde octubre de 1934 hasta finales de febrero del año siguiente; a partir de marzo aumentó notablemente, como se puede observar en la figura 28. El terreno comenzó a inclinarse a razón de 1.5" por día en la dirección señalada en la ilustración, llegando a los 2.5" diarios, con una inclinación total de 50".



Figura 28. Cambios en la inclinación de la superficie del terreno inducidos por la actividad del Volcán Asama durante el período marzo-mayo de 1935.

(Modificado de Minakami, 1935).

El 17 de abril la inclinación cambió hacia la dirección opuesta, cuando el terreno comenzó a inclinarse a una tasa diaria mayor; el día 20 tuvo lugar la erupción, cuando la inclinación diaria llegó a su máximo (2.5"). El 2 de mayo la dirección de la inclinación cambió por segunda vez; una fuerte explosión tuvo lugar días después. A continuación, la tasa diaria de inclinación comenzó a disminuir debido a que el terreno volvía a recuperar su posición preeruptiva.



La inclinación del terreno asociada con las explosiones volcánicas del Asama ocurrida en 1935 fue interpretada por Minakami (1935) en términos de cambios de presión, donde dicha inclinación se ve acompañada de explosiones fuertes, luego de las cuales el suelo recobra el valor que tenía inicialmente; menciona que la lava que se encuentra en el fondo del cráter, soporta la presión que los gases ejercen sobre aquél, merced a sus propiedades de rigidez y viscosidad. Al aumentar la presión de vapor, se incrementan también los esfuerzos en la lava la cual termina por romperse provocando una explosión y por lo tanto la inclinación del terreno cercano al cráter.

Después de ocurrida la erupción, la lava restante es incapaz de soportar la enorme presión, por lo que el volcán presenta nuevas explosiones - de menor magnitud que la primera - y la inclinación disminuye gradualmente.

Minakami (1935) basa su teoría en los siguientes hechos: señala el ya mencionado ascenso del suelo cratérico; la emisión de gases resultó irregular varios días antes de la erupción, pero en los dos o tres días previos al estallido, la emisión fue muy pequeña; la frecuencia diaria de temores volcánicos (figura 29) corresponde con la inclinación del suelo; la primera erupción siempre es más fuerte que las restantes. Sin embargo, como reconoce el mismo Minakami, dos inclinómetros son insuficientes para un estudio completo de la deformación del terreno.

#### VI).- VOLCAN ASAMA, 1936.

Después que cesó la actividad del Asama en 1935, las mediciones de inclinometría quedaron confiadas a tres estaciones: Komoro, 12 km al suroeste del cráter; el Observatorio del Asama, situado a 4 km al este del volcán y Osidasi, localizado a 5 km al norte de la montaña. El volcán se mostró tranquilo entre noviembre de 1935 y febrero de 1936, entrando en un nuevo período de actividad al ocurrir gran cantidad de explosiones entre julio y agosto de ese año. En la figura 30 se muestran las gráficas de inclinación en las tres estaciones consideradas, las explosiones ocurridas con una escala gráfica de la magnitud de las mismas de acuerdo al tamaño de los círculos y la temperatura ambiente a mediodía en el Observatorio del Asama, para el año 1936 (Takahasi y Minakami,

1937). Como se observa en las gráficas, las inclinaciones del terreno son independientes de la temperatura y pueden considerarse en relación directa con la actividad del volcán; asimismo, en la figura se muestra que la mayor inclinación del terreno tuvo lugar en el observatorio y la menor en Osidasi. Lo anterior se debe a la disposición de la estructura subterránea del volcán y a la topografía particular del sitio donde se localizaba cada estación; por ejemplo, el inclinómetro del observatorio estaba situado dentro de un agujero practicado a un enorme bloque de lava, mientras que en Osidasi se encontraba en una cueva formada por el flujo de lava de 1783.

En el observatorio, el aumento en las inclinaciones del terreno comenzó a registrarse a principios de enero de 1936, un mes antes de que tuviera lugar el primer grupo de explosiones; por otro lado en Komoro, no se registraron inclinaciones relacionadas con ese grupo. Una vez que cesó esta actividad explosiva, las inclinaciones menguaron gradualmente y durante mayo y junio los registros no mostraron mayor cambio; a partir de mediados de mayo y hasta julio la inclinación aumentó únicamente en la dirección de Komoro, indicando un nuevo período de explosiones que principió el 20 de julio de ese año. Después de esta serie de explosiones, la inclinación en el Monte Asama permaneció estable hasta finales del año 1936.

De la figura 30 se puede establecer el patrón de inclinación, la cual empieza a aumentar 7 ó 30 días antes que se presente un nuevo grupo de explosiones; una vez que éstas han comenzado, las inclinaciones disminuyen lentamente (Takahasi y Minakami, 1937).

El ciclo eruptivo de tres años del Monte Asama consiste de dos periodos: en uno, el volcán se encuentra en estado activo, mientras que en el otro permanece dormido; después de dicho período se repite nuevamente el ciclo. Las explosiones que tienen lugar en cada período se pueden dividir en grupos, cada uno de los cuales consiste en 5 ó 19 explosiones sucesivas. Por otro lado, la violencia de éstas va disminuyendo conforme el volcán pasa de un grupo a otro, mientras que la inclinación de terreno relacionada con el primer grupo de explosiones es mayor que la conectada con el último de los grupos.

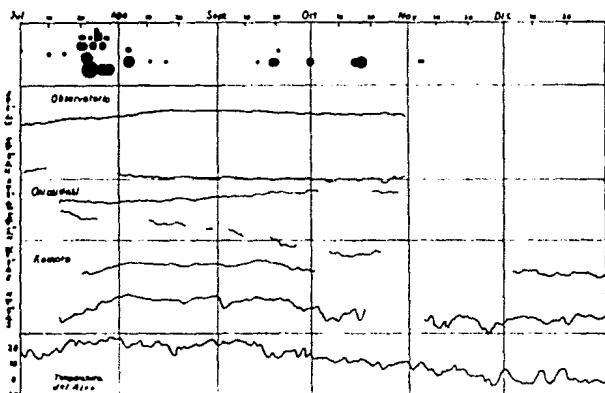
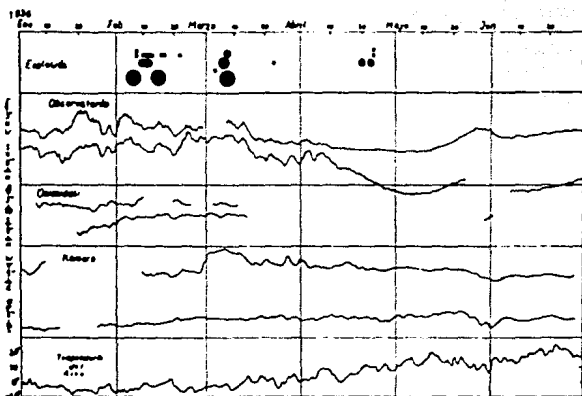


Figura 30. Gráficas correspondientes a la inclinación del terreno asociada con la actividad del Volcán Asama en 1936. La observación fué realizada en tres estaciones distintas. Se muestran asimismo las explosiones ocurridas y la temperatura ambiente a mediodía registrada en el observatorio del Volcán.

(Modificado de Takahasi y Minakami, 1937).

VII).- VOLCAN MIYAKE-SIMA, JAPON (1940).

Este volcán está situado en la isla del mismo nombre a  $34.08^{\circ}$ N,  $139.53^{\circ}$ E, en el archipiélago de las siete islas de Izu, a 168 km al sur de Tokio.

El 12 de julio de 1940 el Miyake-sima tuvo una erupción de fisura siendo seguida poco después por otra erupción cimera, que fue acompañada por una notable deformación de terreno. El Instituto de Investigación de Terremotos de la Universidad Imperial de Tokio calculó en 1941 los desplazamientos horizontales producidos basándose para ello en una red de triangulación de 16 puntos (Earthq. Res. Inst., 1941).

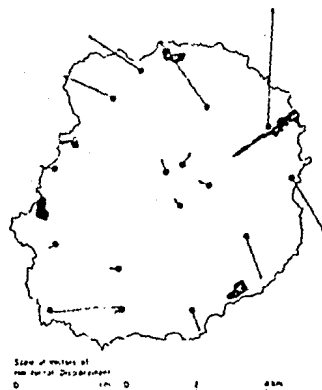


Figura 31. Desplazamientos horizontales de terreno corregidos a la actividad del Volcán Miyake-sima en 1940.  
(Tomado de Mogi, 1958)

Omote (1942) corrigió los desplazamientos calculados por el Instituto de Tokio. En la figura 31 se muestra la posición y el tamaño relativo del desplazamiento horizontal corregido para cada uno de los puntos considerados. En la figura 32 se señalan los



desplazamientos verticales originados por la erupción; dichos desplazamientos están referidos al nivel medio del mar en la bahía de Tubota.

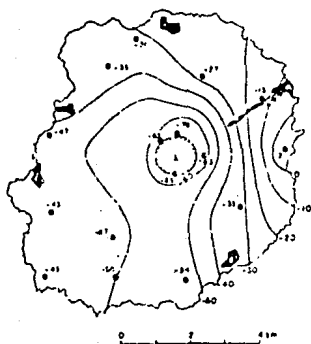


Figura 32. Desplazamientos verticales de terreno (en cm.) correspondientes a la actividad del Volcán Miyake-sima en 1940.

(Tomado de Mogi, 1953).

Como se observa en la figura 31 los puntos situados en el extremo SO de la isla, a pesar de su lejanía de la zona de erupción (la fisura se localiza hacia el NE), no presentan desplazamientos horizontales iguales a cero, sino que toman valores pequeños. Omote (1942) supone dos causas para explicar esos desplazamientos: una consiste en suponer que la isla se ha estado contrayendo desde hace varios años, con lo que dichos desplazamientos son resultado de esa contracción; la otra supone que los puntos de la red elegidos como línea base presentaron cambios apreciables en el azimut.

Omote realizó también cálculos acerca de las componentes de los esfuerzos, rotación y cizallamiento máximo de los desplazamientos horizontales. En sus resultados se aprecia que la zona donde ocurre mayor densidad de líneas que representan a cada uno de estos tópicos, se encuentra en la región donde se localiza la

erupción de fisura, como se observa en la figura 33 que muestra las líneas de igual dilatación.

Antes de la medición de 1941 de la red de triangulación, sólo se había efectuado una revisión superficial de los puntos cercanos al centro de erupción. En esa época existían dos hipótesis para explicar las deformaciones verticales : o bien la isla se hundió en su parte central, sufriendo un levantamiento en uno de sus bordes, o la isla como un todo se inclinó; empero, de la figura 32 que muestra las líneas de igual desplazamiento vertical, se observa que ocurrieron al mismo tiempo dos movimientos del terreno. La isla se inclinó en su totalidad hacia el suroeste, mientras que la parte central tuvo un hundimiento notable (Omote 1942).

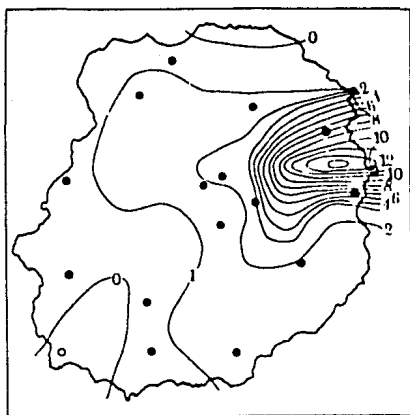


Figura 33. Dilatación de terreno ocurrida en el Volcán Miyake-sima a raíz de su actividad de 1940. (Tomado de Omote, 1942)

Como en esta zona se encuentra la caldera señalada con una X en la figura 32, parece ser que el depósito de magma se encuentra debajo

de aquella; sin embargo, la exactitud de los desplazamientos verticales no es suficiente para que esto último sea considerado un hecho cuantitativamente probado (Mogi 1958).

#### VIII).- VOLCAN SAKURAJIMA, JAPON (1914).

Este volcán se encuentra en el sitio que hasta 1914 pertenecía a la isla - en la actualidad convertida en península debido a la lava del Sakurajima - del mismo nombre localizada en la bahía de Kagoshima, al sur de Kyushu, la más meridional de las islas metropolitanas japonesas, en las coordenadas  $31^{\circ}35'N$ ,  $130^{\circ}40'E$ . Esta bahía corresponde al lugar que antiguamente ocupaba la caldera Aira.

El Sakurajima ha tenido varias erupciones a lo largo de su historia, siendo la más importante la de 1914 que fue acompañada por una gran deformación del terreno. Esta erupción asociada con deformaciones, fue la segunda de su clase en ser estudiada en el Japón por F. Omori (el primer ejemplo es el Usu en 1910) empleando la red de nivelación precisa establecida entre 1890 y 1900. En la figura 34 se muestran los desplazamientos verticales encontrados por Omori (1916). La ruta de nivelación, como se observa, se encuentra principalmente sobre la costa de la bahía de Kagoshima; los bancos de nivel se señalan por medio de puntos.

En la figura 35 se presentan los resultados de las medidas de triangulación, llevadas a cabo después de la erupción de 1914 por el Instituto Geográfico de Mediciones del Japón, donde se observa que la parte central del volcán muestra un levantamiento local del terreno en sus alrededores.

En la figura 36 se ilustran los desplazamientos horizontales ocurridos durante el período 1895-1914, obtenidos por medio de una red de triangulación precisa.

Mogi (1958) aplicó su modelo a la erupción de 1914 del Sakurajima, obteniendo para la fuente de presión esférica una profundidad de 10 km suponiendo una depresión máxima de 150 cm en el punto A de la figura 34. Yokoyama (1971), empleando su modelo intrusivo (descrito en el capítulo III) encontró que la fuente de presión se encontraba a 6 km de profundidad; este autor desplazó el punto de depresión máxima un km al oeste, encontrando que las curvas de distribución radial de los desplazamientos verticales para los



y la profundidad de esta ( $f=10$  km para el modelo de Mogi y  $F=6$  km para el modelo de Yokoyama). Para que estos cálculos se puedan aplicar a las observaciones, es necesario que  $f$  o  $F > 10\alpha$  (donde  $\alpha$  es el radio de la fuente). Para el modelo de Mogi se obtiene  $P=20$  kbar, mientras que para el de Yokoyama  $P=3$  kbar (Yokoyama 1971).

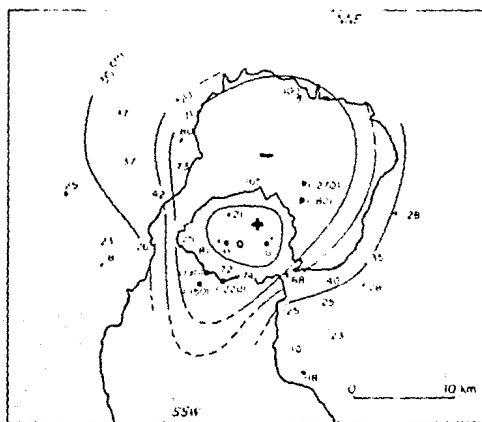


Figura 35. Desplazamientos verticales relacionados con la erupción de 1914 del Volcán Sakurajima, deducidos de las medidas de triangulación efectuadas por el Instituto Geográfico de Mediciones del Japón.

(Tomado de Yokoyama, 1986).

Otro método para estimar la presión es empleando el alcance máximo de los fragmentos arrojados por el volcán. Se dice que esta distancia fue de 3 a 3.5 km desde el cráter (Koto 1916); esto corresponde a una velocidad de las partículas de 170 m/s y  $P=300$  bar. La diferencia entre este último valor y el de la fuente intrusiva (3 kbar) puede atribuirse a que el valor de la rigidez de la corteza,  $\mu=10^{11}$  c.g.s., se reduce un décimo en las regiones volcánicas. Swanson et. al. (1976) comenta que se debe tomar en

cuenta que estos modelos sólo pueden proporcionar una estimación gruesa de la profundidad de la fuente debido a las suposiciones que se emplean y a la complejidad de la deformación del terreno.

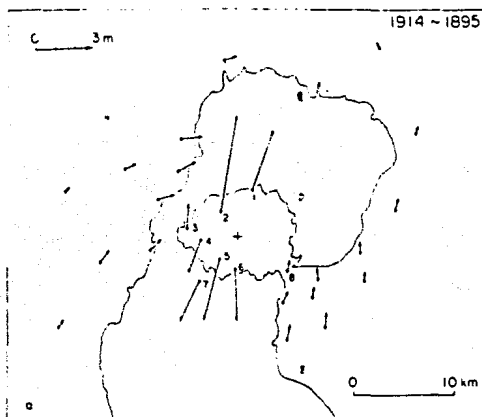


Figura 36. Desplazamientos horizontales de terreno ocurridos alrededor del Volcán Sakurajima de 1895 a 1914. La cruz indica el centro de deformación.  
(Tomado de Yokoyama, 1986)

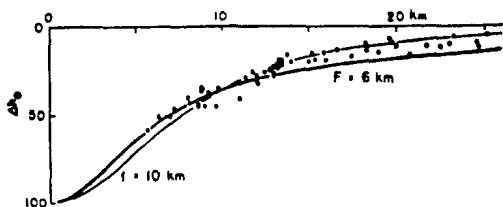


Figura 37. Comparación entre los desplazamientos verticales observados anterior y posteriormente a la erupción de 1914 del Volcán Sakurajima (puntos negros) y las gráficas obtenidas a partir de los modelos de Mogi y Yokoyama para fuentes situadas a  $f = 10$  km y  $F = 6$  km de profundidad respectivamente. (Tomado de Yokoyama, 1974).

Tsuboi (1930, 1933) explica por medio del movimiento rígido de bloques del terreno las deformaciones alrededor del Sakurajima. En la figura 38 se muestran la dirección y magnitud de las inclinaciones sufridas por los bloques; las flechas señalan que estas inclinaciones apuntan hacia el centro de depresión localizado en la bahía. Sin embargo, Yokoyama (1986) apunta que las deformaciones ocurridas en 1914 son proporcionales a las tasas en que el terreno recupera su posición anterior a la erupción de ese año; es decir, que las deformaciones son elásticas, no por medio de bloques.

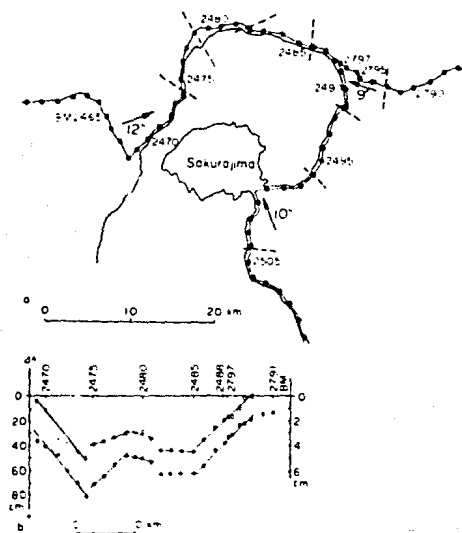


Figura 38. Modelo de bloques elaborado por Tsuboi (1933) para explicar la -deformación de terreno ocurrida alrededor del Volcán Sakurajima en 1914. Los bloques están separados por medio de líneas punteadas y su inclinación se indica en segundos de arco. En la parte inferior se muestran las gráficas de los movimientos de los bloques ocurridos de 1891 a 1914 (círculos negros) y de 1914 a 1915 (círculos blancos). (Tomado de Yokoyama, 1986).

Yokoyama (1986) clasifica la deformación de 1914 en dos partes: una regional, correspondiente a los resultados obtenidos de la nivelación alrededor de la bahía de Kagoshima y un levantamiento local (figuras 34 y 35) provocado por una intrusión de magma.

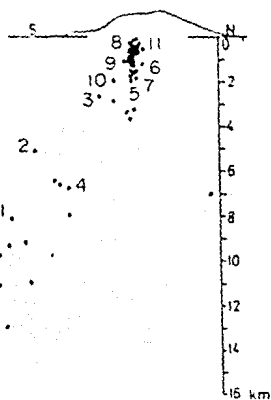
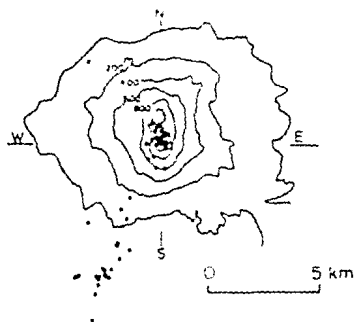


Figura 39. Hipocentros de los sismos volcánicos localizados debajo del Volcán Sakurajima ocurridos entre agosto de 1975 y diciembre de 1977. Los números indican la secuencia de la actividad sísmica.

(Tomado de Yokoyama, 1986).



También considera un modelo donde los desplazamientos verticales se atribuyen a la presencia de una fuente de presión situada en una posición oblicua respecto a la vertical de los cráteres del volcán con una profundidad aproximada de 8 km bajo el nivel del mar. Las observaciones realizadas a partir de 1956, año en que ocurrieron descensos regionales del terreno alrededor del volcán, muestran la credibilidad de este modelo; otra prueba que se observa en la figura 39 a favor de esta fuente de presión, reside en la localización hipocentral de los sismos volcánicos (efectuado por el observatorio del Volcán Sakurajima), cuya distribución resultó a lo largo de una columna que principia a profundidades someras y termina hacia el sur del volcán a mayor profundidad. Debido a que la parte central del volcán sufrió un levantamiento importante, Yokoyama (1986) sugiere la presencia de una fuente de presión intrusiva exactamente bajo el centro del mismo; además supone que la lava llegó a la superficie através del conducto central del Sakurajima deformándolo, para después bifurcarse en varios ramales originando los cráteres pequeños en una línea este-oeste. No es posible conocer la inclinación del eje de la fuente debido a que se encuentra a una profundidad muy somera (~ 2 km); de este modo se plantea la existencia de dos fuentes de presión: una a 8 km y otra a 2 km de profundidad. Yokoyama (1986) en torno a estas fuentes, sugiere que la más profunda sufrió una liberación de presión provocando el hundimiento regional, mientras que el levantamiento local superó el límite elástico de la corteza dejando a la intrusión poco profunda llena de magma solidificado.

#### IX.- VOLCAN SAKURAJIMA, (1946).

En el año de 1946 tuvo lugar una nueva erupción de este volcán, la cual fue de menor magnitud a la ocurrida en 1914.

Minakami e Iwama (1946) realizaron medidas de triangulación precisa en abril de 1946, un mes después de la erupción. En la figura 40 se observa que la isla se inclinó notablemente en marzo durante dos semanas; en octubre Minakami y Sakuma (1946) repitieron las medidas (figura 41) observándose que la inclinación continuó en la misma dirección que en abril, pero reduciendo su tasa diaria en 1/9.

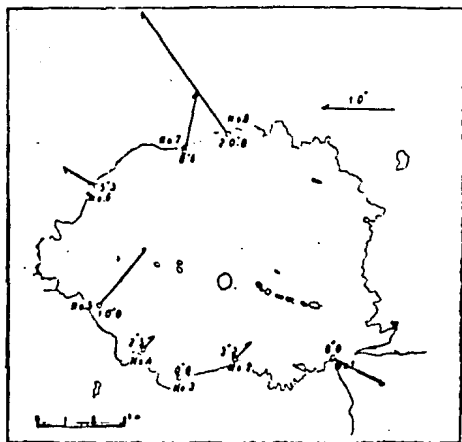


Figura 40. Inclínación de terreno ocurrida en la península del Volcán Sakurajima inducida por la actividad volcánica que tuvo lugar en 1946. Medidas realizadas en abril de ese año. (Tomado de Minakami e Iwama, 1946).

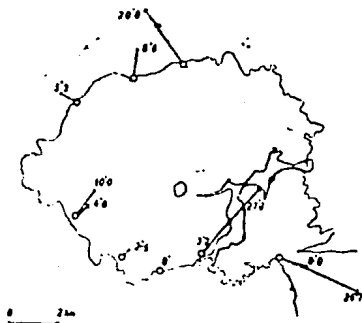


Figura 41. Inclínación de terreno producida por el Volcán Sakurajima en 1946. Medidas registradas en octubre del mismo año. (Tomado de Minakami y Sakuma, 1946).

X).- VOLCAN USU, JAPON (1977-1978).

Este volcán dacítico se localiza en el sur de Hokkaido, la isla septentrional del Japón, en las coordenadas  $42.61^{\circ}\text{N}$ ,  $140.52^{\circ}\text{E}$ . La actividad de este tipo de volcanes se caracteriza por enjambres persistentes de temblores y notables deformaciones del terreno, debido a la gran viscosidad de los magmas. Dichas deformaciones acompañan la formación de domos de lava o criptodomos.

Las observaciones de este evento fueron reportadas por Yokoyama et. al. (1981) a quienes seguimos en este trabajo.

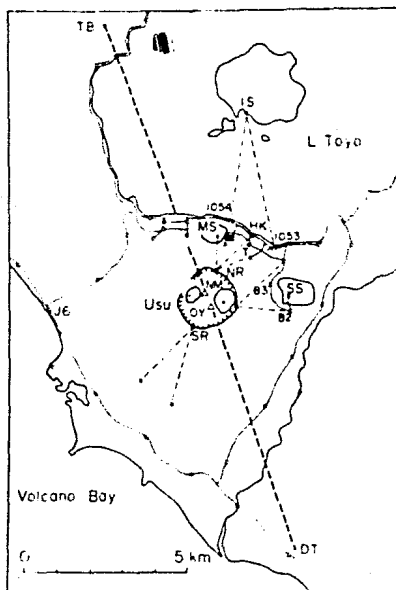


Figura 42. Red de triangulación establecida alrededor del Volcán Ugu. (Tomado de Yokoyama et. al., 1981).  
(Explicación en el texto).

El 6 de agosto de 1977 un día antes de la erupción, apareció una grieta cruzando una vereda al sureste del domo Ko-usu, en medio del cráter cimero; al día siguiente la grieta había aumentado de tamaño, esto sugiere que el terreno en la cima se empezó a deformar unos cuantos días antes de la erupción.

El Observatorio Volcánico del Usu (UVO) realizó levantamientos topográficos y mediciones precisas de distancia al oriente y al norte del volcán. El banco de nivel No 3, localizado entre el Usu y el domo Showa-shinzan (ver la figura 42) y a 2.5 km del sitio de la erupción, tuvo un hundimiento gradual con una tasa de 5 mm por año desde 1968 en que fue instalado; diez días después de la erupción se detectó un levantamiento de 14 cm en la mojonera, que probablemente también comenzó pocos días antes de dicha erupción.

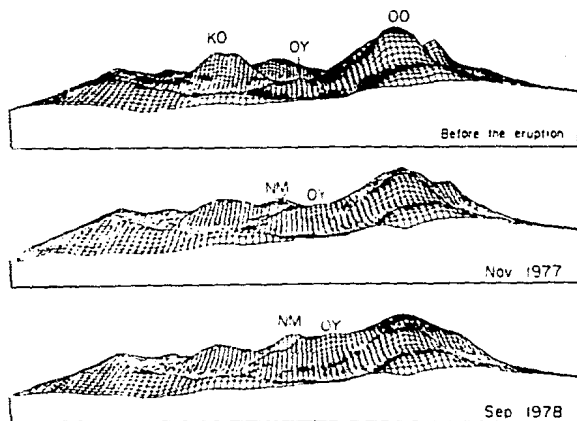


Figura 43. Perfiles topográficos obtenidos por computadora de los domos situados dentro del cráter cimero del Volcán Usu antes y después de la erupción de 1977. "KO", Ko-usu; "OY" Ogariyama; "OO", Oo-usu; "NM", Montaña nueva. (Tomado de Yokoyama et. al., 1981).

Una semana después de la erupción, apareció una falla conectando

los domos Oo-usu y el Ko-usu a través del criptodomo de Ogariyama; el lado noreste de la falla siguió levantándose hasta llegar a una razón máxima de levantamiento de un metro diario.

Durante el primer período de la erupción, desde la ciudad de Date, situada a 8 km del volcán (ver figura 42), no se podía ver la Montaña Nueva (al oriente del Ko-usu), pero se observó claramente a partir del 27 de septiembre. Antes de la erupción, las alturas del Ogariyama y de la Montaña Nueva eran de 487 y 488 m.s.n.m. respectivamente; a fines de septiembre de 1978 su elevación llegó a 630 m.s.n.m. (figura 43).

Las alturas de los domos Oo-usu y ko-usu antes de la erupción eran de 727 y 608.8 m.s.n.m.: entre octubre y noviembre de 1977 el Oo-usu sufrió un colapso, recuperándose a partir del mes siguiente. Por su parte, el Ko-usu presentó un hundimiento gradual de unos de 55 m (figura 44).

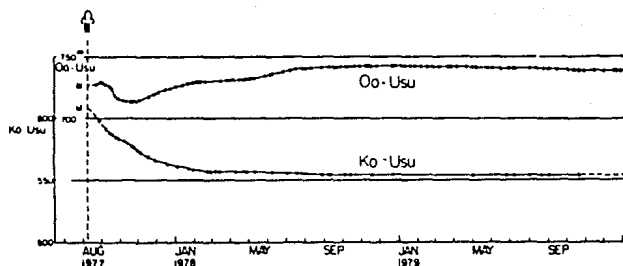


Figura 44. Cambios en la altura de los domos Oo-usu y Ko-usu ocurridos entre agosto de 1977 y enero de 1980. (Tomado de Yokoyama et. al., 1981).

Los desplazamientos horizontales ocurridos dentro del cráter, se ilustran en la figura 45. La falla en forma de U, abierta al noreste, se desplazó en esa dirección 160 m hasta finales de 1979.

mientras que la parte meridional del cráter permaneció estable; los cambios en la distancia NR-HK (figura 42), que se redujo de 1750 a 1630 m, confirman los desplazamientos de la falla anterior.

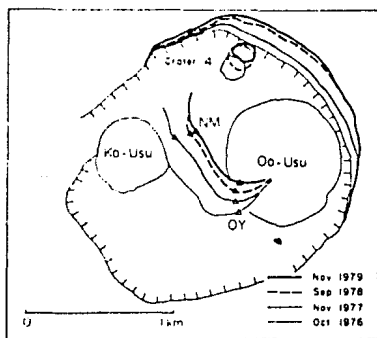


Figura 45. Desplazamientos horizontales de terreno ocurridos dentro del cráter del Volcán Usu. NM, Montaña nueva; OY, Ogariyama.  
(Tomado de Yokoyama et. al., 1981).

En la figura 46 se muestran los desplazamientos verticales que tuvieron lugar en la ladera norte del volcán, junto al lago Toya; el empuje hacia el noreste de la cima del cráter provocó la contracción y el corrugamiento del flanco noreste del Usu.

El Usu presenta en el cráter y sus alrededores un cierto número de domos, entre los cuales el Ogariyama y la Montaña Nueva, como se mencionó anteriormente, sufrieron una elevación notable después de la erupción del volcán (figura 43). La gran similitud entre la altura de ambos domos - cercana a los 650 m en agosto de 1979

(figura 47) - y la distancia de separación entre ellos - 500 m - indican que la parte superior del cuerpo magmático situado por debajo de la superficie debe tener el mismo tamaño que la distancia entre las dos alturas del terreno. Por otro lado, el Oo-usu sufrió fracturas y se colapsó debido a intrusiones profundas y a movimientos sísmicos, mientras que el hundimiento del Ko-usu pudo haber sido una compensación a los levantamientos del magma bajo la superficie en el centro del cráter.

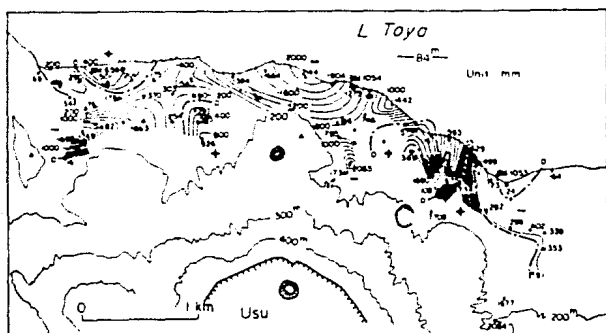


Figura 46. Desplazamientos verticales de terreno ocurridos en la ladera norte del Volcán Usu desde el momento de la erupción hasta abril de 1921. Los desplazamientos se encuentran referidos al banco de nivel J6 (Véase figura 42).

(Tomado de Yokoyama et. al., 1981).

Mediciones frecuentes de la distancia NR-HK (figura 42) fueron efectuadas para observar la relación entre la aparición de sismos y las deformaciones. La figura 48 muestra los cambios en la distancia NR-HK, así como los cuadrados de la amplitud de los sismos relacionados con los cambios en inclinación de un punto cercano a la línea NR-HK, medidos con un inclinómetro de burbuja.

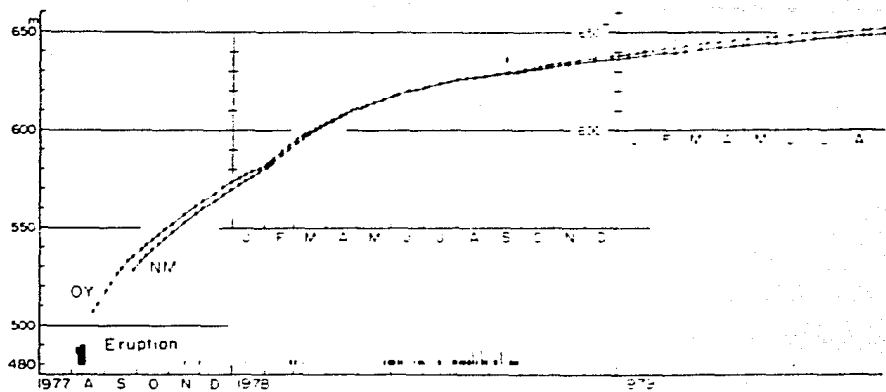
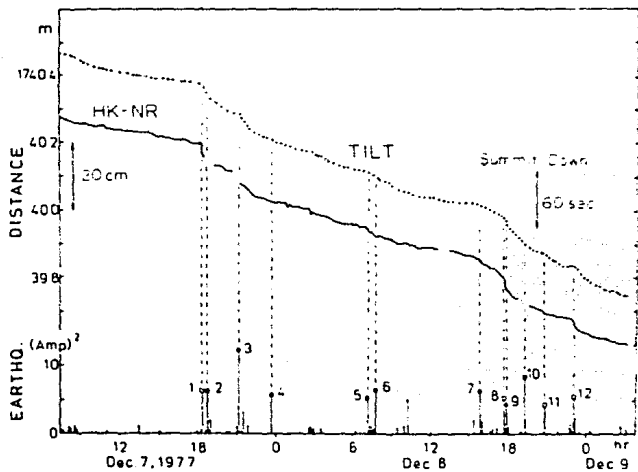
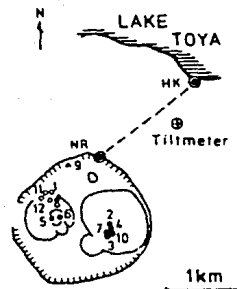


Figura 47. Cambio en la altura de los domos Ogariyama y Montaña Nueva, de agosto de 1977 a agosto de 1979. (Modificado de Yokoyama et. al., 1981).





A



B

Figura 48 (A). Relación entre la disminución de tamaño de la línea base establecida en el Volcán Usu y algunos sismos ocurridos dentro del cráter del mismo. (B) Localización de los epicentros de los sismos. La cruz indica la ubicación del Inclinómetro - empleado durante las mediciones. (Explicación en el texto).

(Tomado de Yokoyama et. al., 1991).

La distancia NR-HK cambia de manera discontinua, asociada a sismos individuales y la cantidad de deformación está relacionada con la magnitud y el hipocentro del sismo.

Las energías explosiva, sísmica y de deformación acumulan una cantidad de energía total constante que Yokoyama et. al.(1981) estiman en  $4.2 \times 10^{10}$  ergios. De este total,  $4 \times 10^{10}$  ergios corresponden a la energía sísmica y  $3.8 \times 10^{10}$  ergios corresponden a la energía de deformación; es decir, ésta última es aproximadamente 10 veces más grande que aquella.

#### XI).- VOLCAN VESUBIO, ITALIA (1937-1961).

Las primeras medidas de inclinometría en el Observatorio Vesubiano - empleando dos niveles de burbuja - se llevaron a cabo de manera continua de 1935 a junio de 1962. Este observatorio se localiza a 2400 m de distancia del eje del cráter del volcán en la dirección NO del mismo, a  $40^{\circ}49'36''$  N,  $14^{\circ}23'55''$  E.

Para tener una idea completa de las inclinaciones del terreno sufridas durante dicho período, es necesario eliminar las tendencias anuales debidas a los elementos meteorológicos como la lluvia y el aumento de temperatura. Una vez hecho esto, se tienen los datos que proporcionan la inclinación que depende de la actividad del volcán.

En la figura 49 se muestran las tendencias de la desviación aparente de la vertical durante las etapas eruptiva y de quietud. A partir de 1936 y hasta marzo de 1944, el Vesubio estuvo en actividad casi continua, con flujos de lava de unos  $3 \times 10^7$  m<sup>3</sup>/por año. En consecuencia, el suelo se inclinó  $70^{\circ}$  en la dirección noreste hasta 1939;  $20^{\circ}$  en la misma dirección de 1939 a 1940 y  $30^{\circ}$  en la dirección noroeste de 1940 a 1942. A partir de este último año, ocurrió una inversión, con la dirección de la inclinación hacia el sur y después nuevamente en la dirección  $70^{\circ}$  noreste, continuando hasta 1945. Esto se explica por la presencia de lava arrojada durante la actividad ocurrida al Este del observatorio, la cual aumentó la carga sobre el terreno en esa misma dirección. El aumento de la presión interna del volcán que ocurrió durante el mismo período explica la inversión de la inclinación del terreno descrita anteriormente. Un poco antes de la erupción de 1944, se observó una inclinación del suelo hacia el Este, que probablemente

se debió a un aumento de la presión del magma y gases volcánicos en la cámara magnética, anunciando la erupción del mes de marzo de ese año.

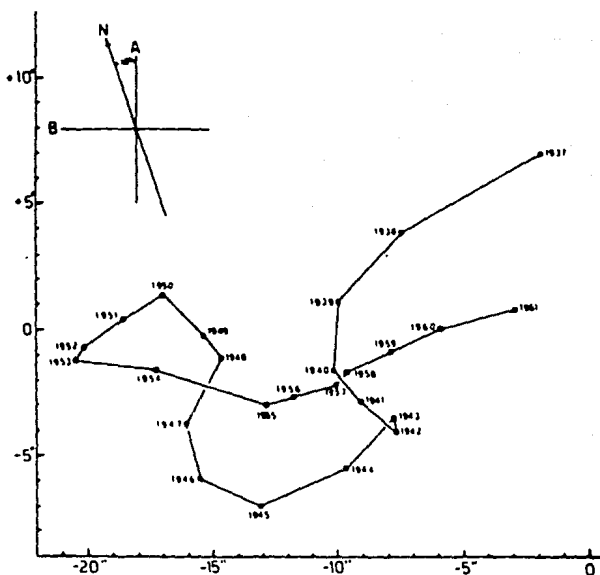


Figura 49. Tendencias de la inclinación del terreno alrededor del Volcán Vesubio calculadas a partir de los datos obtenidos por dos niveles de burbuja situados en las laderas del mismo. El registro abarca de 1937 a 1961, incluyendo la erupción de 1944. (Tomado de Lo Bascio, 1968).

Los flujos de lava arrojados por el Vesubio en 1944 significaron un aumento de carga en las laderas del volcán, lo que se reflejó en la inclinación del terreno hasta 1954, detectado por uno de los instrumentos, mientras que el otro equipo mostró una inversión de la inclinación desde 1953. Hacia 1961 la inclinación vertical se desplazaba al oriente (Lo Bascio, 1968).

XII).- VOLCAN ASKJA, ISLANDIA (1961).

El Askja se localiza en las coordenadas  $65^{\circ}2' N$ ,  $16^{\circ}47' O$  en Islandia central. Este volcán presentó una erupción violenta en 1875 la cual fue seguida por la formación de una segunda caldera dentro de la antigua caldera del Askja. Después de la erupción de 1961, las medidas de nivelación precisa llevadas a cabo en 1966 se realizaron dentro de la caldera prehistórica, donde se ha observado una inclinación de 20 a  $40 \mu$ -radianes/año. La dirección de ésta ha cambiado en el transcurso del tiempo, pero en general parece que la parte norte del piso de la caldera se ha hundido, mientras que la zona este-suroeste aparentemente se ha levantado (Tryggvason, 1970).

XIII).- VOLCAN KATLA, ISLANDIA (1966).

El Katla, situado en las coordenadas  $65^{\circ}42.7' N$ ,  $16^{\circ}47.8' O$ , tuvo una erupción grande en 1918, pero es probable que haya ocurrido una más pequeña en 1955. El volcán se localiza bajo cientos de metros de hielo de un glaciar, mientras que los tres contornos de nivelación realizados en 1966 se encuentran aproximadamente a 10 km del sitio de la erupción; se ha observado una inclinación de 1 a  $3 \mu$ -radianes, pero su dirección es irregular. Tryggvason (1970) ha sugerido que esta inclinación fue debida a la variación de la cantidad de nieve en el campo de hielo de Myrdalsjökull.

XIV).- VOLCAN SURTSEY, ISLANDIA (1967-1969).

Las mediciones en la isla de Surtsey -situada en las coordenadas  $63.3225^{\circ} N$ ,  $20.6817^{\circ} O$ - comenzaron tres semanas después de la erupción de junio de 1967. El escudo de lava ha estado descendiendo principalmente en su parte central, donde la tasa de hundimiento disminuyó de casi 1 mm/día en 1967 a alrededor de 0.5 mm/día en 1969, según los trabajos de nivelación precisa llevados a cabo por Tryggvason (1970). Adicionalmente toda la isla se hundió 5 cm por año.

### 3).- CONCLUSIONES.

A manera de conclusión podemos decir que la observación de la deformación en edificios volcánicos relacionada con eventos eruptivos es altamente variable y depende del tipo de vulcanismo y de las características del terreno involucrado. Sin embargo, se pueden establecer ciertos límites para la observación de estos fenómenos. En la figura 50 se representan los desplazamientos verticales observados en relación con la actividad de los volcanes Sakurajima, Kilauea y Miyake-sima durante los años 1914, 1921-1927 y 1940, respectivamente. Como se puede apreciar en la grafica, los desplazamientos decrecen conforme aumenta la distancia al cráter, siendo aproximadamente entre 25 y 30 km la máxima distancia a la que todavía es posible observar los desplazamientos verticales de terreno.

En el caso de los desplazamientos horizontales no es posible realizar una comparación semejante debido a que en cada volcán se establece una línea base particular a partir de la cual se miden dichos desplazamientos. Esta línea se sitúa a distancias y orientaciones distintas respecto al cráter dependiendo de la topografía y de la geología del terreno.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

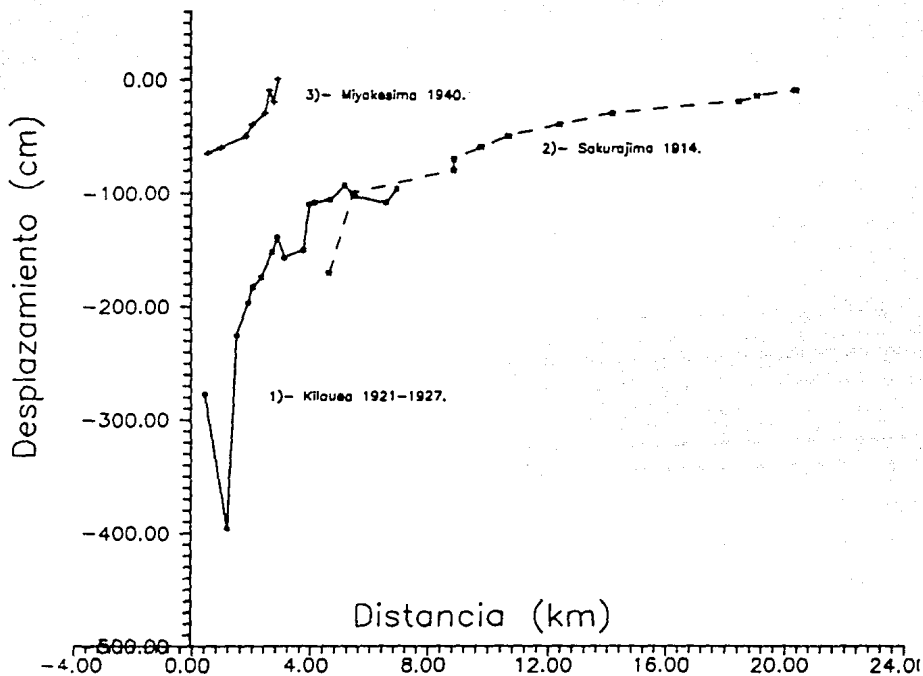


Figura 50. Comparación entre los desplazamientos verticales de terreno asociados con algunas erupciones volcánicas.

## MODELOS TEORICOS DE ANALISIS DE DEFORMACION

## I).- MODELO DE MOGI (1958).

Mogi (1958) toma como modelo para la corteza terrestre a un cuerpo elástico, semi-infinito y homogéneo. Las deformaciones en la superficie terrestre, de acuerdo con este autor, reflejan los cambios de presión hidrostática provocados por una fuente esférica situada a cierta profundidad. En la figura 51 (A) se ilustra la geometría del modelo donde "f" es la profundidad del centro de la esfera, "a" el radio de la esfera y "A" el punto en la superficie colocado exactamente sobre el centro de la fuente.

Mogi (1958) obtiene las siguientes expresiones para los desplazamientos horizontales ( $\Delta d$ ) y verticales ( $\Delta h$ ) para puntos situados a una distancia d del punto A y donde  $a/f \ll 1$ .

$$\Delta d = \frac{3a^3 P}{4\mu} \frac{d}{(f^2 + d^2)^{3/2}} \quad (1)$$

$$\Delta h = \frac{3a^3 P}{4\mu} \frac{f}{(f^2 + d^2)^{3/2}} \quad (2)$$

donde, además de las cantidades ya mencionadas, se tiene que P, es el cambio de la presión hidrostática en la esfera y  $\mu$  es la rigidez de la corteza terrestre. La forma en que la presión se distribuye en la esfera se expresa en términos de los polinomios asociados de Legendre,  $P_0^0(\cos\theta)$ , llamándose a este tipo de fuente de presión explosiva o implosiva.

Debido a que los desplazamientos dependen de los valores de a, P y  $\mu$  que en general son desconocidos,  $\Delta d$  y  $\Delta h$  se discuten en términos de sus razones respecto a  $\Delta h_0$  el cual representa el valor de  $\Delta h$

$$\text{evaluado en } d=0; \text{ i.e. } \Delta h_0 = \frac{3a^3 P}{4f^2 \mu}$$

De este modo se tiene que:

$$\Delta d / \Delta h_o = \frac{f^2 d}{(f^2 + d^2)^{3/2}} \quad (1-A)$$

$$\Delta h / \Delta h_o = \frac{f^3}{(f^2 + d^2)^{3/2}} \quad (2-A)$$

La gráfica de estos desplazamientos contra la distancia -expresada en términos de  $f$ - se muestra en la figura 51 (B).

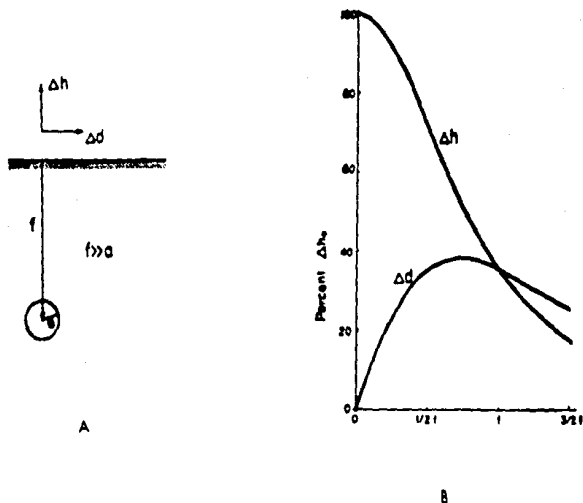


Figura 51. Modelo de Mogi para obtener los desplazamientos de terreno inducidos por la actividad volcánica. (A) Geometría del modelo. (B) Gráfica de los desplazamientos verticales  $\Delta h$  y horizontales  $\Delta d$  obtenidos con este modelo. (Modificado de Fiske y Kinoshita, 1969).



A partir del modelo de Mogi se pueden obtener las siguientes cantidades relacionadas con los desplazamientos para puntos situados a una distancia  $d$  (Ishihara, 1990).

$\delta$ , Inclinación hacia el punto A.

$$\delta = \frac{3\alpha^3 P}{4\mu} \frac{3fd}{(f^2 + d^2)^{5/2}} \quad (3)$$

$\epsilon_r$ , Deformación en la dirección radial.

$$\epsilon_r = \frac{3\alpha^3 P}{4\mu} \frac{f^2 - 2d^2}{(f^2 + d^2)^{5/2}} \quad (4)$$

$\epsilon_t$ , Deformación en la dirección tangencial.

$$\epsilon_t = \frac{3\alpha^3 P}{4\mu} \frac{1}{(f^2 + d^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Expresando estas cantidades en términos de su razón con respecto a  $\Delta h_0$ , se obtiene:

$$\delta/\Delta h_0 = \frac{3f^3 d}{(f^2 + d^2)^{5/2}} \quad (3-A)$$

$$\epsilon_r/\Delta h_0 = \frac{(f^2 - 2d^2) f^2}{(f^2 + d^2)^{5/2}} \quad (4-A)$$

$$\epsilon_t/\Delta h_0 = \frac{f^2}{(f^2 + d^2)^{3/2}} \quad (5-A)$$

En la figura 52 se grafican estas funciones con respecto a  $d/f$ . En el apéndice III se presenta un programa de computación en lenguaje FORTRAN 77 que permite calcular algunos de los valores de las fórmulas anteriores, así como las gráficas correspondientes.

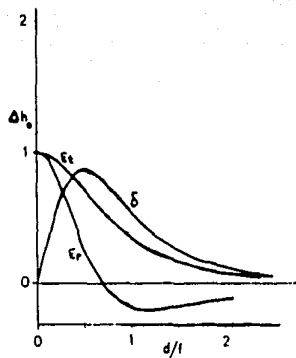


Figura 52. Gráfica de la inclinación de terreno  $\delta$  y de las deformaciones radial y tangencial  $\epsilon_r$  y  $\epsilon_t$  respectivamente. (Modificado de Ishihara, 1990).

#### II).- MODELO DE YOKOYAMA (1971).

En este modelo se sigue considerando una fuente de presión esférica en un medio elástico, semi-infinito y homogéneo, pero ahora aquella corresponde a una fuerza de empuje hacia arriba o hacia abajo. La distribución de presión se expresa en términos de  $P_0^0(\cos\theta)$ . Este modelo corresponde a una fuerza de empuje (hacia arriba o hacia abajo) debida al movimiento del magma en el extremo superior de un conducto volcánico de gran tamaño.

Los desplazamientos en la superficie del terreno para puntos situados a una distancia  $d$  de la fuente son los siguientes:

$$\Delta d = - \frac{a^2 P}{18\mu} \left[ \frac{6Fd}{(F^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{3(F - (F^2 + d^2)^{1/2})}{d(F^2 + d^2)^{1/2}} \right] - \frac{a^4 P}{126\mu} \left[ \frac{19Fd}{(F^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{2d}{F(F^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{2(F - (F^2 + d^2)^{1/2})}{F^2 R(F^2 + d^2)^{1/2}} \right] \quad (6)$$

$$\Delta h = - \frac{a^2 P}{6\mu} \left[ \frac{3}{(F^2 + d^2)^{1/2}} + \frac{2F^2}{(F^2 + d^2)^{3/2}} \right] + \frac{a^4 P}{6\mu} \left[ \frac{2}{7F^2 (F^2 + d^2)^{1/2}} + \frac{2}{7(F^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{5(2F^2 - R^2)}{21(F^2 + d^2)^{3/2}} \right] \quad (7)$$

donde F, profundidad de la fuente; a, radio de la esfera; P, cambio de presión hidrostática y  $\mu$ , rigidez de la corteza.

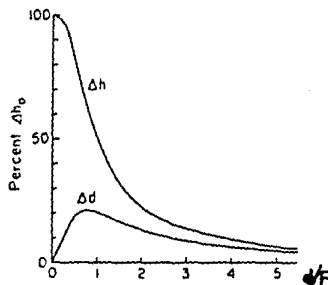


Figura 53. Desplazamientos  $\Delta h$  y horizontales  $\Delta d$  obtenidos con el modelo de Yokoyama (1971).

Los desplazamientos horizontales y verticales en la superficie exactamente por encima del centro de la fuente esférica son:

$$\Delta d_0 = 0$$

$$\Delta h_0 = - \frac{5}{6} \frac{a^2 P}{F\mu} \quad (F \gg a)$$

En la figura 53 se muestran los desplazamientos verticales y horizontales (referidos a  $\Delta h_0$ ) graficados con respecto a  $d/F$  (La razón de la distancia a la profundidad de la fuente).

### III).- MODELO DE WALSH Y DECKER (1971).

Según este modelo, los cambios en la presión del magma dentro de un dique vertical o la intrusión de material en nuevos conductos, son la causa de deformaciones en la corteza terrestre asociadas al vulcanismo.

Para representar matemáticamente al modelo, se considera igualmente un semi-espacio elástico y homogéneo, en este caso  $z \geq 0$ . Sean  $i, j$  y  $k$  los vectores unitarios. Los desplazamientos producidos por una fuente puntual localizada en el punto  $(0, 0, c)$  que presenta incrementos en su intensidad son

$$u = f (xi + yj - ck) / (x^2 + y^2 + c^2)^{3/2} \quad (B-A)$$

donde:

$$f = \frac{2(1-\nu)f'}{\mu}$$

en la que  $\nu$ , es la razón de Poisson y  $f'$  la constante que indica la intensidad de la fuente.

En coordenadas polares  $(r, z)$   $u$  se expresa como:

$$u = f (rr - ck) / (r^2 + c^2)^{3/2} \quad (B-B).$$

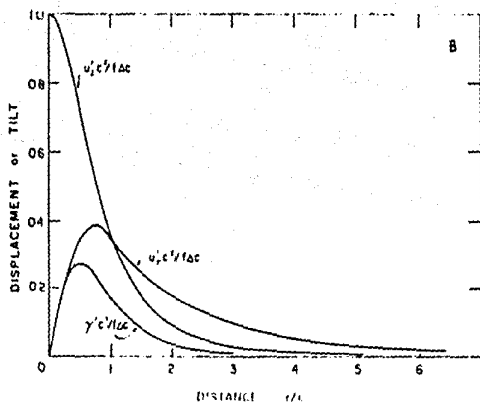
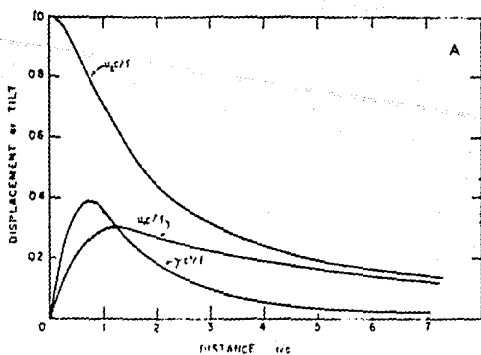


Figura 54. Desplazamientos verticales  $u_z$ , horizontales  $u_x$  y la inclinación  $\gamma$  del terreno obtenidos por el modelo de Walsh y Decker (1971) empleando: (A) un incremento en la intensidad  $f$  de una fuente vertical y (B) por medio de un incremento  $\Delta c$  en la longitud de una fuente vertical que alcanza una profundidad  $c$ .

Consideremos ahora un dique vertical de material magnético con un ángulo de buzamiento  $\beta = \pi/2$ . Debido a que este problema presenta simetría, los desplazamientos se pueden expresar en términos de coordenadas polares. Así, se tiene que:

$$u/f = r (1 - c(r^2 + c^2)^{-1/2})/r - k (r^2 + c^2)^{-1/2} \quad (9)$$

Diferenciando a  $u/f$  con respecto a  $r$ , se obtienen los vectores de inclinación  $\gamma$ :

$$\gamma = r/r (r^2 + c^2)^{-3/2} \quad (10)$$

Al ocurrir una intrusión de material, puede decirse que la fuente de desplazamientos se ha incrementado. Supongamos que la fuente ha experimentado un incremento  $\Delta c$  ( $\Delta c < c$ , donde  $c$  es la profundidad de la fuente). En este caso se obtiene:

$$u/f\Delta c = (rr - ck)/(r^2 + c^2)^{3/2} \quad (11)$$

$$\gamma/\Delta c = 3rr/(r^2 + c^2)^{5/2} \quad (12)$$

Comparando las ecuaciones (11) y (8-B), se observa que los desplazamientos producidos por el aumento de la intensidad de una fuente puntual son iguales, salvo una constante, a un incremento del tamaño de la fuente lineal.

En la figura S4 se observan los desplazamientos y la inclinación de terreno que resultan de (A) un incremento en la intensidad  $f$  de una fuente vertical y (B) de un incremento  $\Delta c$  en la longitud de una fuente vertical situada a una profundidad  $c$ .

#### IV). -MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.

El método de elementos finitos ha resultado muy conveniente para la modelación de deformaciones en áreas volcánicas. Por ser una técnica ampliamente conocida, en lo que sigue se expondrán solamente los aspectos más importantes de su aplicación al problema que nos ocupa. Aspectos más detallados pueden consultarse en una gran variedad de textos. En el presente trabajo se ha seguido el planteamiento de Segerlind (1976). Resultados

anteriores de la aplicación del método a deformaciones volcánicas fueron publicados por Dieterich y Decker (1975) quienes sin embargo no proporcionan los detalles de sus algoritmos.

\*).- **Funciones de desplazamiento en un elemento finito.**

Consideremos una región dividida en elementos triangulares cuyos vértices o nodos son numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj (figura 55 A).

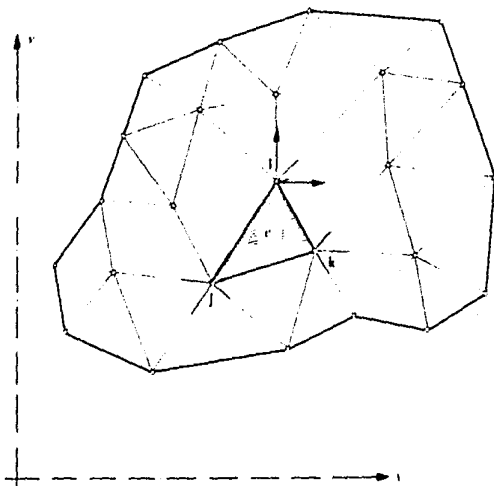


Figura 55 (A). Región dividida en elementos triangulares cuyos nodos se han numerado en sentido contrario a las manecillas del reloj. (Modificado de Zienkiewicz, 1971).

Para representar los desplazamientos correspondientes a cada nodo al aplicarse una fuerza a la región, se debe tomar en cuenta el carácter vectorial de aquellos y por ende asignarle a cada nodo

dos grados de libertad, uno por cada eje coordenado si se trabaja en un sistema bidimensional.

Los desplazamientos nodales (figura 55 B) correspondientes a un elemento triangular son:

$$\{U\} = \begin{pmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{pmatrix} \quad (13)$$

La posición de los nodos de un elemento triangular queda representada en la matriz [N], llamada de funciones de forma, la cual es igual a:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde:

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A}$$

que por su parte incluye a:

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

con  $(x_i, y_i)$  coordenadas del nodo  $i$ ,  $i = j, k$ . (Los otros coeficientes se obtienen por medio de una permutación cíclica de los subíndices  $i, j, k$ ).



$$2A = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

donde A, es el área del elemento triangular.

La función de desplazamiento para un elemento triangular es definida por la relación:

$$\{u\} = [N]\{U\} \quad (15)$$

donde, en el caso bidimensional,

$$\{u\}^T = \{u \ v\}$$

donde u, es el desplazamiento en la dirección x; v, el desplazamiento en la dirección y.

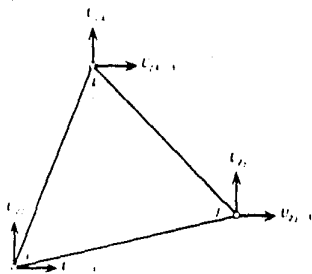


Figura 55 (b). Desplazamientos nodales correspondientes a un elemento triangular. (Tomado de Segerlind, 1976).

Los desplazamientos nodales  $\{U\}$  en general son desconocidos; por lo tanto, el objetivo del método de elementos finitos aplicado a

problemas que incluyen cantidades vectoriales, consiste en hallar los valores de las entradas del vector (U).

**e).- Conceptos de elasticidad.**

La relación entre esfuerzos y deformaciones viene dada por la ley de Hooke, cuya forma general es:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} - [D]\{\epsilon_0\} \quad (16)$$

donde,  $\{\epsilon\}$  es el vector de deformación total,  $\{\epsilon_0\}$  el vector de deformación inicial,  $[D]$  la matriz que contiene las constantes elásticas del material considerado y  $\{\sigma\}$  el vector de esfuerzos. Por otra parte, las relaciones entre desplazamiento y deformación son las siguientes:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (17)$$

donde,  $\gamma_{ij}$  es la deformación en la dirección  $i, j$ ;  $u, v$  y  $w$  son los desplazamientos en las direcciones  $x, y, z$  respectivamente. Para un caso bidimensional de deformación plana - i.e. donde el cuerpo en estudio no se puede expandir en la dirección perpendicular a donde la carga es aplicada - los vectores  $\{\epsilon\}^T$  y  $\{\sigma\}^T$  vienen dados por:

$$\{\epsilon\}^T = \{ \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \} \quad (18)$$

$$\{\sigma\}^T = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \} \quad (19)$$

Derivando cada miembro de (15) respecto a  $x$  ó  $y$  según el caso y empleando las relaciones (17) entre desplazamiento y deformación, se obtiene que:

$$\{c\} = [B]\{U\}$$

$$(20)$$

donde [B], que resulta de derivar la matriz [N], es igual a:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

### 4). - Minimización de la energía potencial.

Para obtener la solución de problemas de elasticidad empleando el método de elementos finitos, es necesario minimizar una expresión integral relacionada con el trabajo -tanto externo como interno- realizado por las cargas aplicadas y por las componentes de esfuerzo. En este caso, debido a que serán empleadas las ecuaciones de desplazamiento que satisfagan las condiciones de frontera para desplazamientos, se debe minimizar la energía potencial en el sistema en cuestión.

La energía potencial de un sistema elástico se puede expresar en dos componentes. Una resulta de la energía de deformación en el cuerpo y la otra de la energía potencial de las cargas aplicada e interna. De esta manera se tiene que  $\Pi = A + W_p$  donde  $\Pi$  es la energía potencial total,  $A$  la energía de deformación y  $W_p$  es el potencial de las cargas aplicadas.

El trabajo  $W$  realizado por las cargas es  $W = -W_p$ . Sustituyendo en la expresión de  $\Pi$ ,  $\Pi = A - W$ . Al subdividir la región en un número  $E$  de elementos, se tiene que:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (A^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \Pi^{(e)} \quad (21)$$

Consideremos ahora a la energía de deformación para un elemento de volumen  $dV$ . Esta debe ser igual a:

$$dA = \frac{1}{2} \langle \epsilon \rangle^T \langle \sigma \rangle - \frac{1}{2} \langle \epsilon_0 \rangle^T \langle \sigma \rangle \quad (22)$$

La energía de deformación total resulta al integrar  $dA$  sobre todo el volumen  $V$ . Así, la energía de deformación para un elemento e de la región es:

$$A^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left[ \langle \epsilon^{(e)} \rangle^T \langle \sigma^{(e)} \rangle - \langle \epsilon_0^{(e)} \rangle^T \langle \sigma^{(e)} \rangle \right] dV \quad (23)$$

Substituyendo (16) y (20) en  $A^{(e)}$  se obtiene que:

$$A^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left[ \langle U \rangle^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \langle U \rangle - 2 \langle U \rangle^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \langle \epsilon_0^{(e)} \rangle + \langle \epsilon_0^{(e)} \rangle^T [D^{(e)}] \langle \epsilon_0^{(e)} \rangle \right] dV \quad (24)$$

El trabajo realizado por las cargas aplicadas, se clasifica de la siguiente manera:  $W_c$  es el efectuado por las cargas concentradas;  $W_p$  es el que resulta de la suma de las componentes de esfuerzo que actúan en la superficie exterior de la región y  $W_b$  que es el proveniente de las fuerzas del cuerpo.

Las expresiones para  $c/u$  de los tipos de trabajo es la siguiente:

$$W_c = \langle P \rangle^T \langle U \rangle$$

donde  $\langle P \rangle$

son las fuerzas de nodo.

$$W_p^{(e)} = \int_{S^{(e)}} \langle U \rangle^T [N]^{(e)T} \begin{bmatrix} P_x^{(e)} \\ P_y^{(e)} \\ P_z^{(e)} \end{bmatrix} dS$$

La integral anterior se define sobre la superficie S de la región;  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_z$  son las componentes de esfuerzo paralelas a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$W_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \langle U \rangle [N^{(e)}]^T \begin{bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \\ z^{(e)} \end{bmatrix} dV$$

$x$ ,  $y$ ,  $z$  fuerzas de cuerpo en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Substituyendo la ecuación (24) en la (21), añadiendo las expresiones correspondientes a cada una de las clases de trabajo realizado y minimizando a  $\Pi$  con respecto a  $\langle U \rangle$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \langle U \rangle} = & - \langle P \rangle + \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \langle U \rangle + \right. \\ & - \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \langle \epsilon_0^{(e)} \rangle dV - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \\ z^{(e)} \end{bmatrix} dV + \\ & \left. - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{bmatrix} dS \right] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

La fórmula (25) se puede expresar, para un solo elemento, en la forma:

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \langle U \rangle} = [k^{(e)}] \langle U \rangle + \langle f^{(e)} \rangle = 0$$

donde

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV$$

;  $\{f^{(e)}\}$  es la suma de  $\{P\}$  con las integrales restantes.

A  $[k^{(e)}]$  se le conoce como matriz de rigidez y a  $\{f^{(e)}\}$  como el vector de fuerza.

Para la suma de todos los elementos se tiene que:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (26)$$

donde:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \quad (27)$$

que es la matriz global de rigidez y:

$$\{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (28)$$

es el vector columna global (Segerlind, 1976).

#### \*).-Cálculo de las integrales para un estado de deformación plana.

En el modelo presentado en este trabajo se consideran diques de lava que pueden ser representados como estructuras bidimensionales que soportan un estado de deformación plana en un plano transversal (Dieterich y Decker, 1975).

Un estado de deformación plana ocurre cuando las componentes de deformación en la dirección  $z$  son iguales a cero (ver las ecuaciones (17)). De igual manera las componentes de esfuerzo  $\tau_{zy}$  y  $\tau_{zx}$  son cero, pero no  $\sigma_{zz}$ , el cual se puede calcular con la ley de Hooke una vez que  $\{\sigma\}$  y  $\{\epsilon\}$  son conocidos.

La matriz de propiedades del material para el caso de deformación plana es:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (29)$$

donde E es el módulo de elasticidad y  $\nu$  la razón de Poisson. Por su parte, el vector de deformación inicial más empleado -el de expansión térmica- para este mismo caso es igual a:

$$\epsilon_0 = (1+\nu)\alpha\Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica y  $\Delta T$  es el cambio de temperatura medido desde un valor en equilibrio. (Al ocurrir una deformación del terreno, previa a la temporada en que se efectúan mediciones cuyos datos servirán de base para la elaboración del modelo, las coordenadas de los nodos de la red reflejarán los efectos de esa deformación, por lo que en el modelo empleado en este trabajo no se utiliza una deformación inicial de manera explícita. De todos modos, en los párrafos que siguen se seguirá hablando de  $\epsilon_0$  para continuar con la descripción del caso general de deformación plana).

Al ser conocidos los valores de las expresiones (29) y (30), es posible evaluar las integrales que definen a  $[k^{(e)}]$  y a  $\{f^{(e)}\}$ . Debido a que las matrices  $[B]$  y  $[D]$  están formadas por elementos constantes, la matriz de rigidez se puede conocer fácilmente. De esta manera se tiene que:

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] \int_V dV = [B]^T [D] [B] tA \quad (31)$$

siendo  $t$  y  $A$  el espesor y área del elemento triangular respectivamente.

Veamos ahora las integrales que forman a  $\{f^{(e)}\}$ . Este vector está

conformado, en el caso bidimensional, por las expresiones siguientes:

$$\langle f \rangle^{(e)} = - \int_V [N]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} dV - \int_V [B]^T [D] \langle \epsilon_0 \rangle dV - \int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS - (P) \quad (32)$$

Inmediatamente observamos que la integral que incluye a  $\epsilon_0$  es igual a:

$$\int_V [B]^T [D] \langle \epsilon_0 \rangle dV = [B]^T [D] \langle \epsilon_0 \rangle tA \quad (33)$$

La integral que involucra a las fuerzas de cuerpo es:

$$\int_V [N]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} dV = \frac{V}{3} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (34)$$

donde  $V$  es el volumen de la región.

La integral relacionada con los esfuerzos superficiales, puede tomar tres valores distintos dependiendo cual lado del elemento triangular se encuentra sujeto a los esfuerzos  $p_x$  y  $p_y$ .

Entonces, para el lado  $ij$  se tiene:

$$\int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS = \frac{S_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (35-A)$$

donde  $S_{ij} = t x_{ij}$ ; siendo  $x_{ij}$  la distancia entre los nodos  $j$  e  $i$ ;



de manera análoga se obtienen los coeficientes  $S_{jk}$  y  $S_{lk}$ . Para los dos lados restantes se tiene que:

Lado  $jk$ :

$$\int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS = \frac{S_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \quad (35-B)$$

Lado  $lk$ :

$$\int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS = \frac{S_{lk}}{2} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \quad (35-C)$$

#### e).- Construcción de la matriz de rigidez global y del vector de fuerza global.

Supongamos que tenemos un elemento triangular  $\alpha$ ; los nodos dentro de este elemento están numerados como 1, 2 y 3. En la numeración global de los nodos de la región a estudiar, estos mismos se nombran  $k, i, j$  respectivamente (figura 56).

Los elementos de la matriz de rigidez  $k_\alpha$  para el elemento  $\alpha$  ocuparán su sitio correspondiente dentro de la matriz global  $K$  de la siguiente manera: por ejemplo, el coeficiente  $k_{11}$  de  $k_\alpha$  corresponde a  $K_{ij}$  de  $K$ ; por lo tanto ocupará ese lugar en la matriz global.

Algo similar ocurre con el vector de fuerza  $f_\alpha$ ; así, el coeficiente  $f_1$  ocupa el lugar  $F_k$  del vector columna global (Ver figura 56).

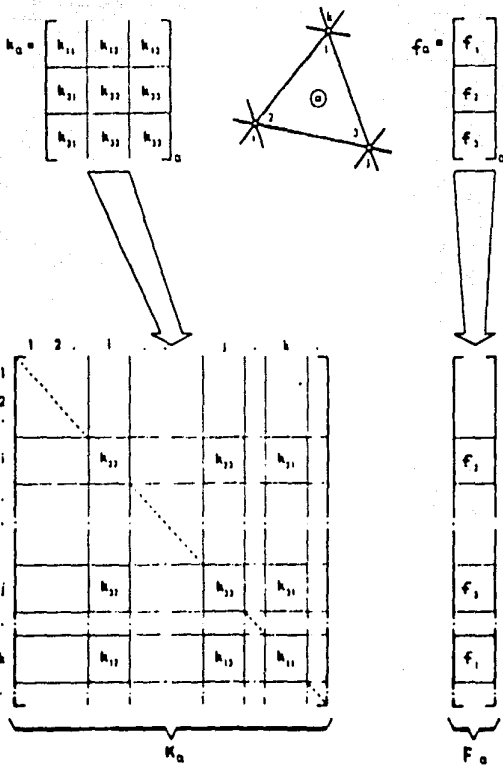


Figura 56. Armado de la matriz de rigides global  $K_\alpha$  y del vector de fuerza global  $F_\alpha$  a partir de la matriz de rigides  $k_\alpha$  y del vector de fuerza  $f_\alpha$  -respectivamente- correspondientes al elemento triangular  $\alpha$ .

(Tomado de Holand, 1973).

El programa FINITO, mostrado en el apéndice III, calcula los desplazamientos de terreno inducidos por un dique de material magnético haciendo uso en su algoritmo del material presentado en este capítulo como son las matrices [B] y [D], la ecuación (31) y la técnica mostrada para la construcción de [K] y {F}, la matriz de rigidez global y el vector de fuerza global respectivamente.

## APENDICE I

### CALCULO DE DEFORMACIONES DE TERRENO POR MEDIO DE DATOS TOPOGRAFICOS.

#### 1).- CALCULO DE DEFORMACIONES DE CIZALLAMIENTO.

Las deformaciones locales de cizallamiento se expresan como  $\gamma_1 = (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})$  y  $\gamma_2 = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$  (véanse las relaciones (17) del capítulo 3) donde  $\gamma_1$  mide una deformación pura correspondiente a una dilatación E-O y una compresión N-S, mientras que  $\gamma_2$  mide una deformación pura correspondiente a una dilatación NE-SO y una compresión NO-SE.

Consideremos un triángulo de una red de triangulación (figura A1) donde  $\phi_a, \phi_b, \phi_c$  son los ángulos interiores. Los azimuts de los lados a, b y c son  $\theta_a, \theta_b$  y  $\theta_c$  respectivamente.



Figura A1. Notación para ángulos y lados empleada en un triángulo de una red de triangulación.

(Tomado de Frank, 1966).

Los azimuts y los ángulos se relacionan de la sig. manera:

$$\phi_a = \theta_b - \theta_c + 180^\circ$$

$$\phi_b = \theta_c - \theta_a + 180^\circ$$

$$\phi_c = \theta_a - \theta_b + 180^\circ$$

Los incrementos ocurridos en los ángulos interiores merced a deformaciones de terreno se pueden expresar como:

$$\delta\phi_a = \delta\theta_b - \delta\theta_c$$

con expresiones similares para los ángulos restantes.

De acuerdo con Frank (1966) las deformaciones locales de cizalla se calculan a partir de las siguientes fórmulas:

$$\gamma_1 = \frac{\sin(\theta_c + \theta_a) * (\delta\phi_a / \sin\phi_a) - \sin(\theta_b + \theta_c) * (\delta\phi_b / \sin\phi_b)}{\sin\phi_c} \quad (3)$$

$$\gamma_2 = \frac{\cos(\theta_a + \theta_c) * (\delta\phi_a / \sin\phi_a) - \cos(\theta_b + \theta_c) * (\delta\phi_b / \sin\phi_b)}{\sin\phi_c} \quad (4)$$

La deformación total de cizallamiento es:

$$\gamma = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2}$$

y el azimut  $\psi$  observado a partir de la estrella polar en su punto aparente más occidental u oriental (elongación occidental u oriental) es:  $\tan \psi = \gamma_1 / \gamma_2$ . Substituyendo las fórmulas (3) y (4) en las expresiones de  $\gamma$  y  $\tan(2\psi)$  se obtiene:

$$\gamma = \frac{[(\delta\phi_a/\text{sen}\phi_a)^2 + (\delta\phi_b/\text{sen}\phi_b)^2 + 2(\delta\phi_a/\text{sen}\phi_a)(\delta\phi_b/\text{sen}\phi_b)\cos\phi_c]^{1/2}}{(\text{sen}\phi_c)} \quad (5)$$

$$\tan 2\psi = \frac{\text{sen}(\theta_a + \theta_c) * (\delta\phi_a/\text{sen}\phi_a) - \text{sen}(\theta_b + \theta_c) * (\delta\phi_b/\text{sen}\phi_b)}{\cos(\theta_a + \theta_c) * (\delta\phi_a/\text{sen}\phi_a) - \cos(\theta_b + \theta_c) * (\delta\phi_b/\text{sen}\phi_b)} \quad (6)$$

Si el triángulo es equilátero,

$$\gamma = [(\delta\phi_a)^2 + (\delta\phi_b)^2 + \delta\phi_a * \delta\phi_b]^{1/2}$$

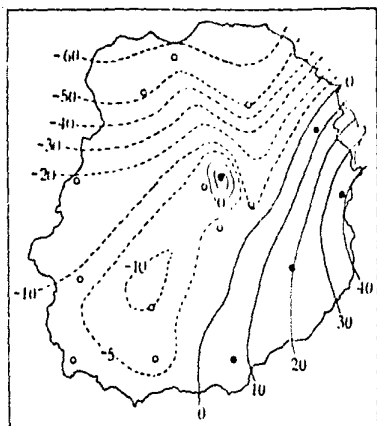
i.e., se reduce la aparición de errores al encontrarse menos cantidades a medir, por lo que siempre se busca establecer redes de triangulación y/o trilateración que consten de triángulos aproximadamente equiláteros (Frank, 1966).

## II).- OBTENCION DE LAS COMPONENTES DE DEFORMACION POR MEDIO DE LAS LINEAS DE IGUAL DESPLAZAMIENTO VERTICAL Y HORIZONTAL.

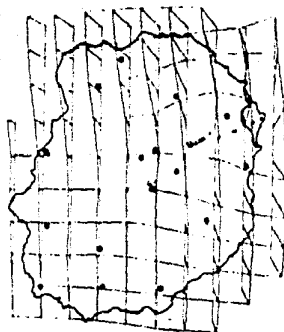
Omote (1942) empleó un método propuesto por Tsuboi (1926) para calcular las componentes de deformación producidas por la erupción del volcán Miyake-sima, Japón en 1940.

En primer lugar se grafican las líneas de igual componente horizontal  $u$  y de igual componente vertical  $v$  (figuras A2 (A) y (B), respectivamente). En este ejemplo, el eje "x" está dirigido hacia el este y el "y" hacia el norte tomando como base uno de los extremos de la red de triangulación. El mapa de la isla se divide en rectángulos de  $1 \text{ km}^2$ , por medio de una cuadrícula orientada E-O y N-S (figura A2 (C)). Se sobreponen los mapas cuadrículado y de líneas de igual componente para poder obtener por interpolación los valores de  $u$  y  $v$  en cada punto de la cuadrícula. La diferencia de dos valores consecutivos de  $v$  a lo largo del eje "x" es el valor de  $\partial v/\partial x$ ; en el punto medio de la línea que une a dichos valores.  $\partial u/\partial y$  se calcula análogamente.

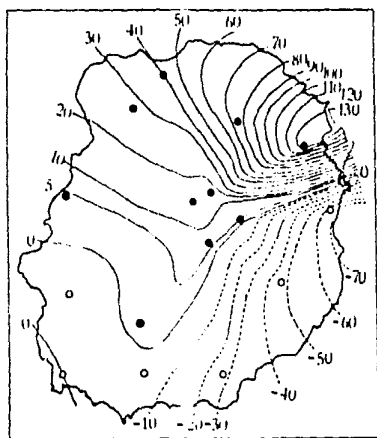
Por medio de este método fueron obtenidas las líneas de igual dilatación para la erupción de 1940 del Miyake-sima (figura 33).



A



C



B

Figura A2. Ilustración del método empleado por Cmote (1942) para calcular las componentes de deformación inducida por la erupción de 1940 del Volcán Miyake-sima. Líneas de igual desplazamiento (A) horizontal, (B) vertical del terreno (en cm) y (C) Cuadrícula correspondiente a la isla Miyake-sima. Cada rectángulo tiene un área de  $1 \text{ km}^2$  (Explicación en el texto).

### III).- LOCALIZACION DE VALORES DE DEFORMACION.

Supongamos que una región de deformación uniforme se ha subdividido en triángulos. La deformación que tiene lugar en cada uno de esos triángulos mide lo mismo que para la región en su conjunto. Si en una región dada existen gradientes de deformación, entonces en cada triángulo habrá una deformación promedio. Pero si ese gradiente es uniforme, la deformación promedio para un vector dado será la del punto medio de éste.

En la figura A3 se muestra un triángulo donde existe un gradiente uniforme de deformación paralelo al lado AB. Si suponemos que este lado no está sujeto a rotaciones pequeñas, los cambios de dirección de los lados AC y BC corresponden a los puntos medios D y E, según se expresó más arriba. Así, las deformaciones  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  para este triángulo también son válidas para la línea ED en particular. Procediendo análogamente si los lados BC o AC se consideran fijos, las deformaciones del triángulo serán válidas para las líneas EF y DF respectivamente.

En la práctica se deducen los valores de deformación para cada triángulo a partir de un punto de referencia. Para ello, el mejor punto es el centro de gravedad G del triángulo. Después se interpolan gráficamente estas medidas.

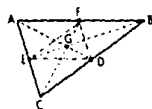


Figura A3. Líneas correspondientes a las deformaciones ocurridas en un triángulo en presencia de un gradiente uniforme de deformación.

(Tomado de Frank, 1964).



#### IV).- METODO DE LA BASE PARA LA OBTENCION DE LA DEFORMACION DEL TERRENO.

La posición de cada una de las estaciones de la red de deformación se obtiene por el método de trilateración.

En la siguiente temporada de mediciones, se compara la posición actual con la anterior para saber si ocurrió algún desplazamiento horizontal. Los triángulos que se emplean para calcular las deformaciones en la forma descrita anteriormente son casi equiláteros y de tamaño pequeño. Sin embargo, también se obtienen las deformaciones para algunos triángulos que no cumplen con las condiciones anteriores porque pueden proporcionar una manera de revisar los datos, así como deformaciones adicionales si los datos son correctos. El siguiente paso consiste en graficar las deformaciones a partir del centro de gravedad de cada triángulo.

Los desplazamientos sin ajustar se pueden obtener gráficamente como se ilustra en la figura A4. El método funciona si los desplazamientos son pequeños en comparación con las distancias. El lugar geométrico de los puntos equidistantes a una estación dada se encuentra a lo largo de una línea aprox. perpendicular a la distancia medida desde dicha estación. Los desplazamientos se ilustran adyacentes a cada lado del triángulo y el orden en que se calcularon fue C, D y E.

Las distancias medidas se ajustan empleando los ángulos verticales o de acuerdo con la figura de la Tierra, i.e. con el geoide.

Las ventajas que presenta el método de la base son las siguientes.

- Los desplazamientos relativos a bancos de nivel permanentes se pueden determinar a partir de la línea base.

- Las deformaciones se pueden obtener incluso para triángulos cuyos lados no han sido medidos debido a la disponibilidad de las coordenadas de las mojoneras que también permiten realizar los cálculos necesarios.

- Se puede calcular el vector de rotación  $\omega$ , que se expresa como:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

, por el método empleado por Omote, (1942).

- Al medirse varias veces una misma distancia es posible el ajuste por mínimos cuadrados.

Sin embargo, las desventajas son serias e incluso pueden ser insuperables, porque es necesario colocar la base en un sitio estable, i.e. que las deformaciones en esta zona deben ser menores al menos en un orden de magnitud a las que se desean estudiar en la red de trilateración y ello es muy difícil de lograr en un volcán activo por lo que se debe suponer que la base cumple al pie de la letra con la condición de estabilidad. Si además se considera que la base debe ser más o menos concéntrica a la red y encontrarse casi a la misma altura que ésta para evitar alteraciones atmosféricas, se verá que rara vez pueden cumplirse estas condiciones. La otra desventaja consiste en que los errores en las medidas de las distancias pueden acarrear otros al aplicar el método de mínimos cuadrados. (Kinoshita et. al., 1974).

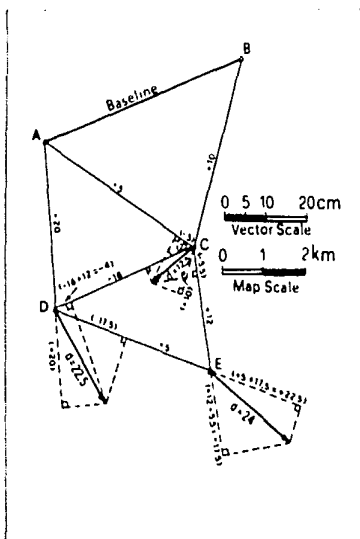


Figura A4. Ejemplo de la obtención gráfica de desplazamientos de terreno por medio del método de la base. (Tomado de Kinoshita et. al., 1974).

V).- METODO DEL TRIANGULO UNICO PARA EL CALCULO DE LA DEFORMACION DEL TERRENO.

En este método se miden directamente los tres lados de todos los triángulos de la red de triangulación y no existe la necesidad de implementar una línea base a partir de la cual se calculan las medidas restantes. Con ello se obtienen valores de deformación de mayor precisión con el método ya discutido y se evitan los errores acumulados al ajustar la base. Sin embargo, con el procedimiento del triángulo único no es posible calcular la componente de rotación pues para ello se necesita un origen de coordenadas.

Uno de los inconvenientes de este método es que para que se puedan medir los lados del triángulo, es necesario que los vértices sean visibles entre sí. De este modo la topografía del lugar tiene la última palabra acerca del mejor sitio para la instalación de la red de triangulación.

## APENDICE II

### MODELO Y PROGRAMAS DE COMPUTACION.

#### I).- DESCRIPCION DEL MODELO EMPLEADO.

Para ilustrar el empleo del programa FINITO, al que se hizo referencia en el capítulo III, se ha elegido como modelo de trabajo un edificio volcánico de 1 km de altura, 330 m de ancho en la cima y 29.970 km de ancho en la base. A partir de la distancia media del cráter se consideran 25 km a derecha e izquierda del mismo. La profundidad máxima del modelo es de 25 km a partir de la superficie terrestre.

Debido a la simetría vertical del modelo, sólo se considera la mitad derecha de aquél; es decir, el ancho del cráter será de 165 m y el de la base del volcán 14.985 km, considerándose aún 25 km a la derecha del origen de coordenadas localizado en la prolongación de la superficie del terreno sobre el conducto volcánico (Ver figura A5).

Se analizarán tres tipos de diques de lava localizados en la región anterior situados a 2.5, 5 y 10 km de profundidad - medidos desde la superficie hasta el extremo superior del dique. El ancho de éste en todos los casos es de 62.5 m y su altura 5 km.

El medio en el cual está localizada la región se considera isotrópico, con una constante de rigidez  $\mu = 10^{10}$  Pa y una razón de Poisson  $\nu = 0.25$ . El módulo de elasticidad se expresa como

$$E = 2\mu(1 + \nu) \quad (\text{Sokolnikoff, 1946}).$$

Substituyendo los valores anteriores, se encuentra que  $E = 2.5 \times 10^{10}$  kg/ms<sup>2</sup>.

En el modelo que se describe es conveniente trabajar con unidades de km para evitar la molestia de los exponentes de las coordenadas de la región. Convirtiendo E a unidades de km se obtiene que :

$$E = 2.5 \times 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{km s}^2} .$$

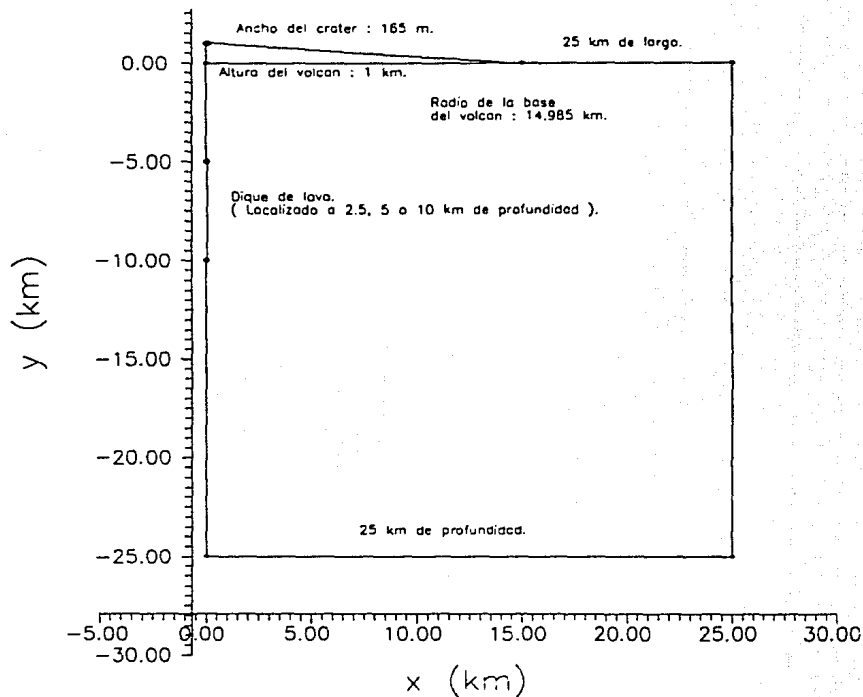


Figura A5. Dimensiones del modelo empleado para ser resuelto por el programa FINITO.

## 11).- DISCRETIZACION DEL MODELO MEDIANTE EL PROGRAMA GRID.

Para la discretización del modelo es necesario emplear el programa GRID (malla o rejilla) el cual forma en el modelo un conjunto de  $n$  elementos triangulares basándose en la subdivisión previa de éste en un cierto número de regiones cuadrilaterales. Así, por ejemplo, el modelo considerado en este trabajo se subdividió en diez regiones (figura A6).

Cada una de estas regiones consta de ocho nodos encontrándose tres por lado, compartiendo siempre los colocados en las esquinas. Los ocho nodos se numeran como se ilustra en la figura A7, i.e. en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si  $\xi, \eta$  son los ejes  $x, y$  respectivamente para los cuales están referidos los lados de cada región, entonces el nodo 1 debe estar siempre en las coordenadas  $\xi = \eta = -1$ . El nodo situado en el centro de cada lado puede ser desplazado hacia las esquinas del mismo para hacer más pequeños los elementos triangulares, debiendo permanecer siempre las coordenadas del nodo en el intervalo  $-1/2 < \xi < 1/2$  ó  $-1/2 < \eta < 1/2$ . El programa también acepta regiones con lados no rectilíneos (i.e. curvos) así como triangulares en las cuales la hipotenusa está formada por dos lados de la región cuadrilátera normal (figura A7).

Las regiones que conforman el modelo se conectan entre sí a través de sus lados comunes. Para que el programa considere dichos lados comunes, es necesario que los nodos situados en ellos tengan la misma numeración independientemente de la región considerada. Esto queda asegurado con los llamados datos de conexidad para una región dada, los cuales consisten de cuatro números - uno para cada lado del cuadrilátero - que indican el número de la región conectada a un lado particular. Para la numeración de los lados se utiliza el orden siguiente: El lado 1 es el situado entre los nodos 1 y 3, el 2 entre los nodos 3 y 5, etc (figura A8). La numeración de las distintas regiones es arbitraria, pero la orientación de los ejes  $\xi, \eta$  debe realizarse de acuerdo a la dimensión más pequeña del cuerpo analizado.

Al emplear el método de elementos finitos, las ecuaciones lineales que surgen presentan gran cantidad de ceros. Examinando esas

ecuaciones se observa que todos los elementos distintos de cero - junto con algunos ceros aislados - se encuentran entre dos líneas paralelas a la diagonal principal de la matriz asociada. El ancho de banda es la distancia de la diagonal a una de dichas líneas paralelas. De este modo, la computadora únicamente necesita almacenar los coeficientes que caen dentro del ancho de banda, ya que los demás elementos son iguales a cero. Al reducirlo, disminuye el espacio de memoria destinado al almacenamiento de datos, así como el tiempo empleado en los cálculos para resolver el problema (Segerlind, 1976).

El ancho de banda  $W$  se obtiene por medio de la expresión

$$W = (\mathcal{R} + 1)g$$

, donde  $\mathcal{R}$  es la diferencia máxima entre los números de nodo en un solo elemento, tomándose en cuenta todos los elementos del cuerpo considerado;  $g$  es el número de incógnitas o grados de libertad en cada nodo (En el modelo utilizado en este trabajo,  $g = 2$ ).

Si  $\mathcal{R}$  es pequeño,  $W$  también lo es por lo que es necesario minimizar previamente a aquél.  $\mathcal{R}$  disminuye cuando el numerado de los nodos se realiza a través de la dimensión más corta del cuerpo considerado. Como se mencionó más arriba, la orientación de los ejes  $\xi, \eta$  se realiza de acuerdo con el procedimiento anterior para minimizar a  $\mathcal{R}$ .

Los datos iniciales de entrada para el programa son: el no. de regiones del cuerpo,  $R$ ; el no. de nodos empleado para señalar la frontera entre las regiones,  $B$ ; las coordenadas  $x(i), y(i)$  de esos nodos ( $i = 1$  a  $B$ ) y los datos de conexidad  $J_2(R_1, j)$  para cada región en particular  $R_1$  y  $j = 1$  a  $4$  (por el no. de lados de la región).

El programa imprime a continuación las coordenadas de los nodos y los datos de conexidad para cada región. Enseguida comienza el ciclo principal (sobre el no. de regiones) del programa donde se pide que sean proporcionados: el no. de hileras  $H$  y columnas  $C$  asignados a cada región particular, tomando en cuenta las fronteras de aquella (El no. de hileras  $H'$  y columnas  $C'$  de elementos triangulares que tendrá la región es  $H' = H - 1$ ,  $C' = C - 1$ , mientras que el no. total de elementos triangulares por región es  $2H'C'$ ), así como los números de los nodos que forman la frontera de la región considerada.

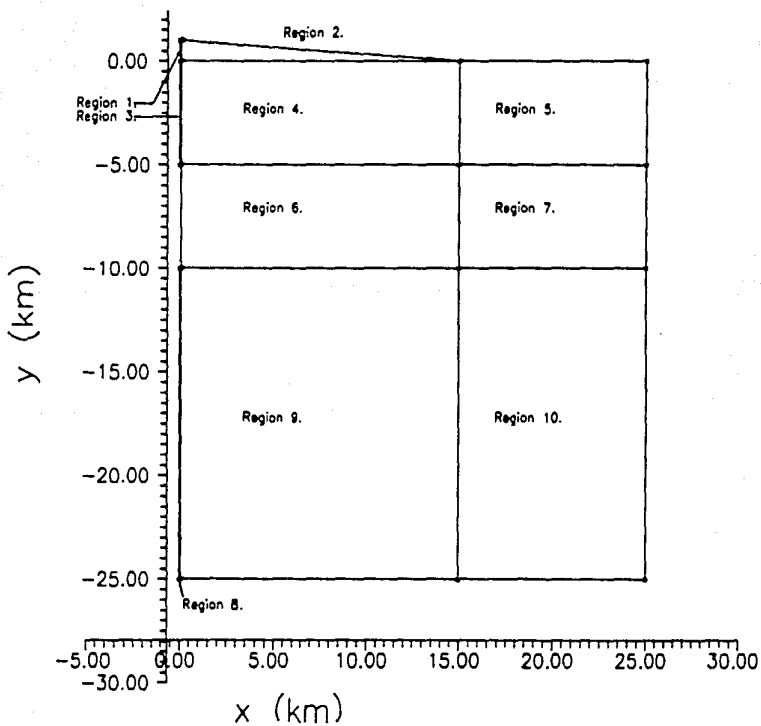


Figura A6. Regiones en que se dividió el modelo para poderse fraccionar en elementos finitos por medio del programa GRID.



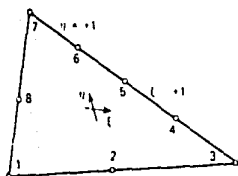
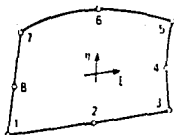
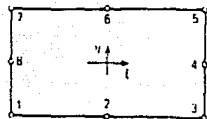


Figura A7. Tres tipos diferentes de regiones cuadrilateras que pueden ser aceptados por el programa GRID.  
(Tomado de Segerlind, 1976).

Es en el ciclo anterior donde el programa realiza su cometido principal, i.e. la discretización de cada región, y lo lleva a cabo en los siguientes pasos.

- 1).- Se define el no. de hileras y columnas de nodos de acuerdo con los datos proporcionados.
- 2).- Se revisa si cualquiera de los nodos que forman la frontera ha sido previamente numerado. Si este es el caso, esos nodos llevarán la misma numeración que anteriormente les fue asignada.
- 3).- Los nodos son numerados empezando por el situado en  $\xi = -1$ ,  $\eta = 1$  siguiendo de izquierda a derecha (de  $\xi = -1$  a  $\xi = 1$ ) y de

arriba hacia abajo (de  $\eta = 1$  a  $\eta = -1$ ). A los nodos numerados previamente no se les efectúa ningún cambio.

4).- Los nodos situados en la frontera son almacenados para referirse a ellos cuando se consideren las regiones adyacentes a la región en estudio.

5).- La región se subdivide en elementos tomando en cuenta conjuntos de cuatro nodos, los cuales forman un cuadrilátero. La longitud de las dos diagonales de aquí son comparadas empleándose en la construcción de los elementos triangulares a la más pequeña de las dos. Esto es debido a que si se emplea la diagonal más pequeña, el cuadrilátero queda dividido en triángulos de forma equilátera los cuales proporcionan resultados más exactos en el programa principal que aquellos triángulos de forma larga y estrecha.

6).- Cada elemento triangular es numerado y se calcula la cantidad  $(\alpha + 1)$ , correspondiente a dicho elemento, comparándose con el valor más grande obtenido anteriormente.

7).- Se despliegan en pantalla el no. del elemento triangular, los números de nodo que lo forman y sus coordenadas - grabándose éstos dos últimos en archivos separados.

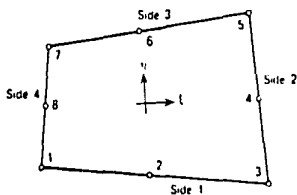


Figura A8. Numeración de los lados de una región cuadrilateral.  
(Tomado de Segerlind, 1976).

Al salir de este ciclo, con todas las regiones analizadas, se cierran los archivos mencionados en el punto 7) y se despliega el ancho de banda obtenido, así como el número de elemento en que fue calculado.

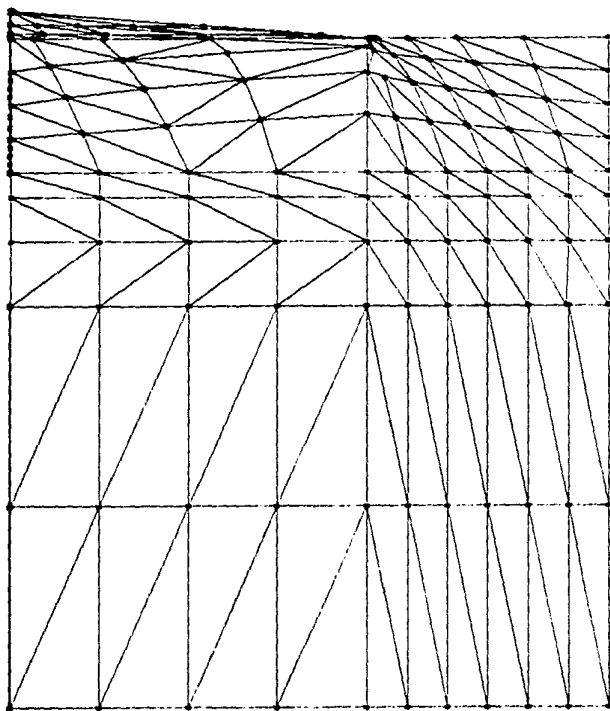


Figura A9. Aspecto que ofrecen los 258 elementos que constituyen el modelo utilizado.

En la figura A9 se hallan representados los 258 elementos -obtenidos con el programa GRID- que conforman el modelo.

### III).- PROGRAMA FINITO.

Este programa, basado en el trabajo de Segerlind (1976), calcula los desplazamientos de los nodos de una región sujeta a la acción de una fuerza dada. Para ello, es necesario proporcionar al programa las coordenadas y los números adjudicados a cada uno de los nodos que resultan de la discretización por medio del programa GRID de la región, así como las condiciones de frontera para el problema específico que se quiere resolver.

Dentro de su bloque principal el programa comienza por pedir al usuario que proporcione los siguientes valores:

- Número de desplazamientos globales,  $g$ . Este valor es igual a dos veces el número de nodos de la región dada  $g = 2*n$ .
- Número de elementos  $e$  de la región.
- Ancho de banda  $W$ . El ancho de banda calculado por el programa GRID es para modelos con un solo grado de libertad, por lo que en el caso de elasticidad bidimensional es necesario multiplicar el resultado de  $W$  ya obtenido por 2.
- Módulo de elasticidad, representado por  $e3$ .
- Razón de Poisson, representada por  $m$ .
- Espesor de los elementos  $t$ . Aunque el elemento sea bidimensional es necesario considerar un cierto espesor, porque el cálculo de la matriz de rigidez involucra una integral de volumen que es igual al espesor por el área del elemento. En el modelo considerado se tomó  $t = 0.01$  km.

A continuación, con los datos proporcionados, el programa calcula los elementos de la matriz de propiedades  $[D]$ .

Como se vió en la descripción del programa GRID, la minimización del ancho de banda  $W$  disminuye los espacios de memoria necesarios para almacenar los datos en una computadora. El sistema de ecuaciones resultante de un modelo donde  $W$  se ha minimizado, es tal que su matriz asociada es simétrica y definida positiva. (En una matriz simétrica aproximadamente la mitad de los términos

diferentes de cero es necesario que sean almacenados; por otro lado, en una matriz definida positiva los términos de la diagonal principal siempre son positivos y, en general, mucho mayores que los restantes términos de la hilera y columna correspondiente.) Esto reduce aún más el espacio necesario para el almacenamiento así como el número de pasos necesarios para obtener la solución del sistema.

Un procedimiento de programación para reducir el espacio de almacenamiento, consiste en transformar primero a la matriz de rigidez global  $[K]$  en un arreglo con un ancho igual a  $W$  y con una longitud igual al número de grados de libertad  $g$  del sistema. Una vez logrado lo anterior se arma un vector columna  $A$  donde en primer lugar se deja espacio para los valores nodales - i.e. los  $U_i$  - hasta el lugar indicado por el apuntador  $j_1 = g$ . En seguida se colocan los términos del vector de fuerza global  $(F)$  hasta la posición señalada por el apuntador  $j_2 = j_1 + g$ , y en último lugar el arreglo en que se transformó a  $[K]$  ensamblándolo columna por columna en orden sucesivo, hasta la última localidad indicada por el apuntador  $j_3 = j_2 + g + W$ .

Como ejemplo de lo anterior se presenta la figura A10 (A) donde se observa un sistema de ecuaciones de la forma  $[K](U) = (F)$ . Este sistema está compuesto por seis ecuaciones y tiene un ancho de banda  $W = 4$ , por lo que puede ser almacenado en un arreglo de 4 columnas por 6 hileras como se muestra en la figura A10 (B), donde las columnas del arreglo están formadas por las diagonales de la matriz  $[K]$  comenzando por la diagonal principal como primera columna. La letra  $x$  indica localidades vacías que la computadora considera como ceros durante el proceso de inicialización del arreglo. En la figura A10 (C) se observa al sistema de ecuaciones almacenado en forma de vector, como se describió en el párrafo anterior.

En el programa FINITO los valores de los apuntadores del vector  $A$  se calculan utilizando los datos iniciales de entrada.

Después de estos cálculos, el programa imprime los datos iniciales de entrada. A continuación comienza el ciclo principal sobre el número de elementos.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{matrix} = \begin{matrix} 932 \\ 5464 \\ 2556 \\ 4884 \\ 6508 \\ 1976 \end{matrix}$$

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & \lambda \\ 6 & 1 & \lambda & \lambda \\ 2 & \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

B

$\phi_1$
$\phi_2$
$\phi_3$
$\phi_4$
$\phi_5$
$\phi_6$
-----
932
5464
2556
4884
6508
1976
-----
2
6
2
6
6
2
-----
1
1
0
2
1
$\lambda$
$\lambda$
-----
0
2
1
1
$\lambda$
$\lambda$
-----
1
2
0
$\lambda$
$\lambda$
-----
$\lambda$

C

Figura A10. (A,B,C). Procedimiento para almacenar en forma de vector a un sistema de ecuaciones. (Explicación en el texto). (Tomado de Segerlind, 1976).

En este ciclo el programa lee los datos de los números de nodo  $n_1$  y las coordenadas ( $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ ) de los tres nodos del elemento correspondiente, contenidos en los archivos "nodo.dat" y "coordena.dat" respectivamente. Con estos datos el programa calcula los grados globales de libertad  $n_2$ , -que indican la posición de los números de nodo dentro del vector A- los elementos de las matrices  $[B]$ ,  $[C] = [B]^T[D]$  y  $[K1]$ , la matriz de rigidez del elemento correspondiente. El último paso del ciclo consiste en colocar los elementos de  $[K1]$  en su lugar respectivo dentro del vector A.

Para llevar a cabo la inclusión de las condiciones de frontera, así como la posterior solución del sistema de ecuaciones es necesario expresar al vector A en dos arreglos; uno correspondiente al vector de fuerza global, llamado  $G_2$  y otro  $G_1$  correspondiente a la matriz de  $g * W$  proveniente de la reducción del espacio de memoria necesario para almacenar a  $[K1]$ .

A continuación el bloque principal del programa llama a las subrutinas BDYVAL, -que realiza la inclusión de las condiciones de frontera- DESCOMP, -la cual descompone a  $G_1$  en una matriz triangular superior mediante un procedimiento basado en el método de eliminación de Gauss- y SOLUC -que proporciona la solución del sistema de ecuaciones, finalizando de este modo el programa FINITO.

#### \*1) Subrutina BDYVAL.

Las condiciones de frontera que se requieren para un problema de elasticidad planteado en términos de elementos finitos, contemplan el establecer qué nodos se hayan sujetos a fuerzas y/o desplazamientos conocidos, así como el tamaño de éstos.

La subrutina comienza por pedir al usuario que teclee los números de los nodos donde las fuerzas actúan así como el valor de éstas. Esto se realiza dentro de un ciclo de seis iteraciones (dos por cada nodo de un elemento triangular). En este ciclo se suma el valor tecleado de la fuerza, al valor que ya tenía la entrada correspondiente, al número de nodo tecleado del vector de fuerza  $G_2$ . El ciclo termina al introducir un valor negativo o cero.

El procedimiento para incluir los desplazamientos conocidos consiste en modificar al sistema de ecuaciones  $[k](U) = \{F\}$  de

cierta manera que no altere su estructura fundamental. Dicho procedimiento -que consta de dos pasos una vez que se conoce el número del nodo sujeto al desplazamiento dado- se mostrará con un ejemplo particular.

Supongamos que conocemos el valor de  $U_5$ ; entonces los pasos a seguir son los siguientes:

1).- Todos los coeficientes de la hilera cinco se igualan a cero, con la excepción del término de la diagonal principal.. i.e.  $K_{5j} = 0$  para  $j = 1, \dots, n$  y  $j \neq 5$ . El término  $F_5$  del vector columna se reemplaza por  $K_{55} * U_5$ .

2).- Todas las ecuaciones restantes se modifican restando  $K_{j5} * U_5$  de  $F_j$ , agregando después que  $K_{j5} = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  y  $j \neq 5$ .

BDYVAL comienza el procedimiento anterior solicitando al usuario que teclee el número del nodo y el tamaño del desplazamiento que actúa en aquél. La lectura y los cálculos se efectúan dentro de un ciclo de seis iteraciones, hasta que el número tecleado sea negativo o cero. En el modelo planteado en este trabajo, las condiciones de frontera establecen que los nodos correspondientes a la superficie de la tierra se encuentran libres para moverse tanto vertical como horizontalmente; los nodos localizados en los lados derecho, inferior e izquierdo (excepto la parte ocupada por el dique) presentan desplazamientos iguales a cero. Los nodos correspondientes a las paredes del dique se suponen bajo la acción de sendos desplazamientos en sentido vertical y horizontal cuyo módulo es de 10 m.

\* Subrutinas DESCOMP y SOLUC.

La modificación del método de Gauss que emplea el programa FINITO para resolver el sistema de ecuaciones, consiste en transformar a éste de tal manera que la matriz asociada -además de ser simétrica y definida positiva- tenga una forma triangular dentro de una banda de ancho W, así como obtener la solución del sistema mediante la técnica de sustitución en reversa.

El procedimiento para transformar al sistema para que tenga una forma triangular, consiste en expresar una variable en una ecuación en términos de las demás incógnitas, e ir la substituyendo en las restantes ecuaciones hasta que en la última ecuación se pueda obtener el valor de la variable mediante un simple despeje.



Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$K_{11} U_1 + F_{12} U_2 = F_1 \quad (1)$$

$$F_{21} U_1 + K_{22} U_2 + K_{29} U_3 = F_2 \quad (2)$$

$$K_{92} U_2 + K_{99} U_3 = F_3 \quad (3)$$

Despejando a  $U_1$  de la primera ecuación,

$$U_1 = \frac{F_1 - F_{12} U_2}{K_{11}}$$

y substituyendo en la segunda obtenemos:

$$F_{21} \left( \frac{F_1 - F_{12} U_2}{K_{11}} \right) + F_{22} U_2 + F_{29} U_3 = F_2$$

,factorizando

$$\left( K_{22} - \frac{F_{21} F_{12}}{K_{11}} \right) U_2 + F_{29} U_3 = F_2 - \frac{K_{21} F_1}{K_{11}}$$

En forma abreviada tenemos,

$$K_{22}^{(1)} U_2 + K_{29}^{(1)} U_3 = F_2^{(1)}$$

;donde:

$$K_{22}^{(1)} = K_{22} - \frac{K_{21} K_{12}}{K_{11}}$$

$$K_{29}^{(1)} = K_{29}$$

$$F_2^{(1)} = F_2 - \frac{K_{21} F_1}{K_{11}}$$

En este caso el superíndice  $\omega$  denota la primera eliminación de una incógnita.

El siguiente paso consistiría en despejar  $U_2$  de la nueva segunda ecuación, sustituirla en la tercera para de esta manera obtener una expresión sencilla para  $U_1$ . A continuación, el valor obtenido de  $U_1$  se substituye en la expresión para  $U_2$  y se obtiene el valor de éste. Finalmente se substituye  $U_2$  en la primera ecuación para obtener el valor de  $U_1$ . A este procedimiento de calcular las incógnitas basándose en el valor obtenido de la última variable, se le conoce como substitución en reversa. Generalizando este procedimiento para  $n$  incógnitas, podemos escribir los segmentos de programa necesarios para implementarlos en una computadora.

La subrutina DESCOMP calcula los coeficientes de las ecuaciones correspondientes a las "n" eliminaciones necesarias para que el sistema tenga una forma triangular superior. La forma general de la  $n$ -ésima eliminación es:

$$F_{ij}^{(n)} = F_{ij}^{(n-1)} - K_{ni}^{(n-1)} \frac{F_{nj}^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}}$$

La subrutina SOLUC calcula los coeficientes modificados del vector (F) -cuya forma general es:

$$F_i^{(n)} = F_i^{(n-1)} - K_{in}^{(n-1)} \frac{F_n^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}} \quad i > n.$$

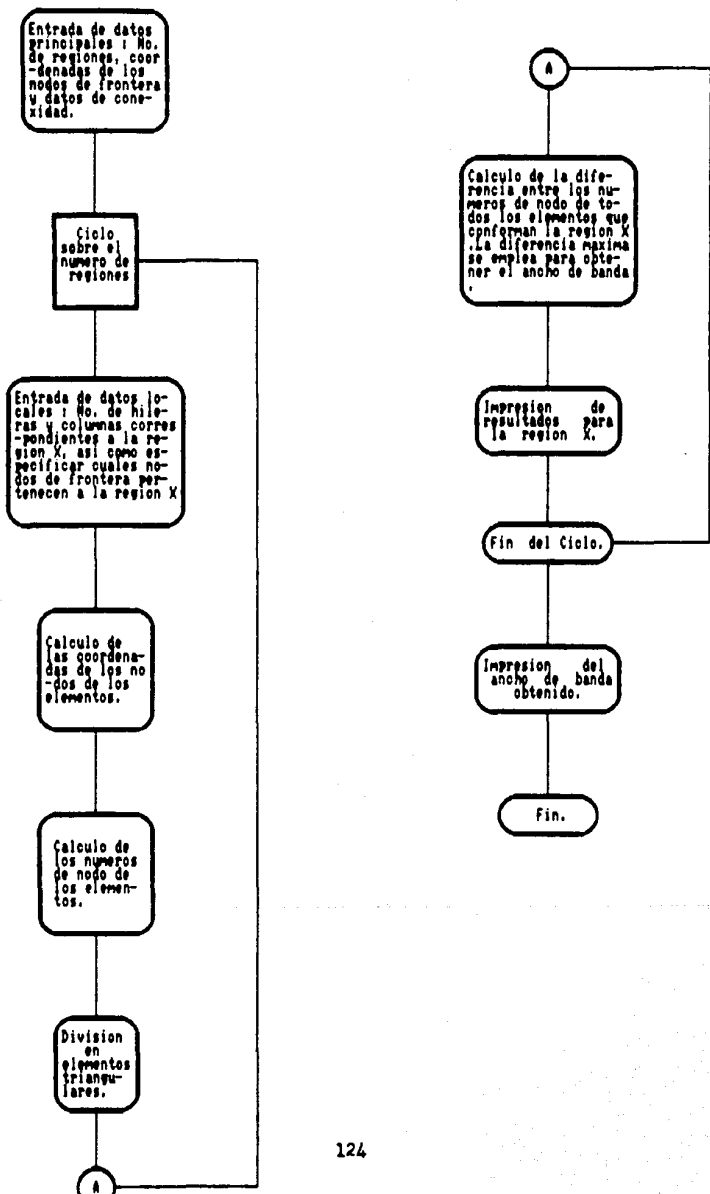
-y obtiene la solución del sistema mediante el método de substitución en reversa.

Al final de la subrutina se despliegan en pantalla los valores de los desplazamientos y se almacenan en el archivo "resulta2.dat".

#### IV).- CODIGO, EJEMPLOS Y RESULTADOS DE LOS PROGRAMAS.

A continuación se presentan los programas GRID y FINITO, escritos en TURBOBASIC y FORTRAN 77 respectivamente. GRID puede ser ejecutado en una microcomputadora PC; FINITO, debido al gran tamaño de las matrices que maneja, es necesario que se ejecute en una computadora de gran capacidad de memoria como la HP-9000.

# Diagrama de flujo del programa GRID.



```

print "Programa Grid "
print " Este programa crea elementos de forma triangular "
print "en una region dada"
dim x(50),y(50),x1(9),y1(9),N(8),D(8)
dim N1(21,21),x2(21,21),y2(21,21),N2(20,4,21),J2(20,4)
dim L2(3),N3(200),X3(200),Y3(200),N4(4),I2(4,4)
rem ** ENTRADA DE DATOS **
print
print "Teclear n° de regiones "
input R
print
print "Teclear n° de puntos de frontera"
input B
print
print "Teclear coordenadas de los nodos"
print
for i=1 to B
print "Nodo ";i
input x(i),y(i)
print
next i
print
print "Datos de conexidad (i.e. que regiones son adyacentes"
print " a una region dada). Teclear estos datos de acuerdo a"
print " la orientacion de los ejes xi,eta."
print "Recuerde que el nodo 1 esta en xi=eta= -1 y que el lado 1"
print " esta situado entre los nodos 1 y 3 ,el lado 2 entre los"
print " nodos 3 y 5, etc."
print
for i=1 to R
print "N° de la region"
input R1
print "Teclear datos de conexidad para la region ";R1
print
for j=1 to 4
input J2(R1,j)
next j
print
next i
for i=1 to 4
if i=1 or i=4 then gosub A1
if i=2 or i=3 then gosub A2
next i
N7=0
N8=0
N9=0
print "Coordenadas globales"
print
for i=1 to B
print "Nodo ";i;"="spc(4)
print using "+###.###";x(i),y(i)
print
next i
print
print "Datos de conexidad"
print

```

```

for i=1 to R
print i;"spc(6)
for j=1 to 4
print J2(i,j);
next j
print
next i
print
DEF FNR(x) = INT(x*1E2 + .5)/1E2
rem ** CICLO SOBRE LAS REGIONES PARA GENERAR LOS ELEMENTOS **
open "0".#7,"Trian1"
open "0".#8,"Vert1"
for Q=1 to R
print "Teclee el n° de hileras y de columnas para la region ";Q
print ". en ese orden .Con esto se indica cuantas hileras y "
print "columnas de elementos triangulares tendra la region "
print "considerada.Recuerde la orientacion de los ejes xi,eta "
print "que uso para la conexidad."
print
input H,C
print
R1=Q
print "Nodos de frontera pertenecientes a la region ";R1
for i=1 to B
input D(i)
next i
print
print " Region N° ";R1" N° de hileras ";H" N° de columnas ";C
print "Nodos de frontera de la region ";R1
for i=1 to B
print D(i)
next i
print
rem ** GENERACION DE LAS COORDENADAS DE LOS NODOS DE LOS ELEMENTOS *
for i=1 to B
I1=D(i)
x1(i) = x(I1)
y1(i) = y(I1)
next i
x1(9) = x1(1)
y1(9) = y1(1)
T1 = H - 1
D1 = 2/T1
T1 = C - 1
D2 = 2/T1
for i=1 to H
T1 = i - 1
E1 = 1 - T1*D1
for j=1 to C
T1 = j - 1
S1 = -1 + T1*D2
N(1) = -0.25*(1-S1)*(1-E1)*(S1 + E1 + 1)
N(2) = 0.50*(1 - S1^2)*(1-E1)
N(3) = 0.25*(1+S1)*(1-E1)*(S1 - E1 - 1)
N(4) = 0.50*(1+S1)*(1 - E1^2)
N(5) = 0.25*(1+S1)*(1+E1)*(S1 + E1 - 1)

```

```

N(6) = 0.50*(1 - S1^2)*(1+E1)
N(7) = 0.25*(1-S1)*(1+E1)*(E1 - S1 - 1)
N(8) = 0.50*(1-S1)*(1 - E1^2)
x2(i,j) = 0
y2(i,j) = 0
for i=1 to 8
  x2(i,j) = x2(i,j) + x1(1)*N(1)
  y2(i,j) = y2(i,j) + y1(1)*N(1)
next i
next j
next i
rem ** GENERACION DE LOS NUMEROS DE NODO REGIONALES **
K1=1
K2=1
K3=H
K4=C
for i=1 to 4
  N5 = J2(R1,i)
  if N5=0 or N5>R1 goto 50
  for j=1 to 4
    if J2(N5,j)=R1 then N6=j
  next j
  K=C
  if i=2 or i=4 then K=H
  J3=1
  J4=I2(i,N6)
  if J4 = -1 then J3=K
  for j=1 to K
    on i goto 10,20,30,40
    10 N1(H,j) = N2(N5,N6,J3)
    K3 = H - 1
    goto 49
    20 N1(j,C) = N2(N5,N6,J3)
    K4 = C - 1
    goto 49
    30 N1(1,j) = N2(N5,N6,J3)
    K1 = 2
    goto 49
    40 N1(j,1) = N2(N5,N6,J3)
    K2 = 2
    49 J3 = J3 + J4
  next j
50 next i
  if K1 > K3 goto 53
  if K2 > K4 goto 53
  for i=K1 to K3
    for j=K2 to K4
      NB = NB + 1
      N1(i,j) = NB
    next j
  next i
rem ** ALMACENAMIENTO DE LOS NUMEROS DE NODO FRONTERIZOS **
for i=1 to C
  N2(R1,1,i) = N1(H,i)
  N2(R1,3,i) = N1(1,i)
next i

```

```

for i=1 to H
N2(R1,2,i) = N1(i,C)
N2(R1,4,i) = N1(i,1)
next i
rem ** IMPRESION DE LOS NUMEROS DE NODO DE LA REGION **
print
print "Numeros de nodo de la region ";R1
print
for i=1 to H
for j=1 to C
print N1(i,j)
next j
print
next i
print
rem ** DIVISION EN ELEMENTOS TRIANGULARES **
S3 print "Elementos Triangulares de la region ";R1
print
K=1
for i=1 to H
for j=1 to C
x3(K) = x2(i,j)
y3(K) = y2(i,j)
N3(K) = N1(i,j)
K = K + 1
next j
next i
l = H - 1
for i=1 to l
for j=2 to C
D3 = SQRT((x2(i,j) - x2(i+1,j-1))^2 + (y2(i,j) - y2(i+1,j-1))^2)
D4 = SQRT((x2(i+1,j) - x2(i,j-1))^2 + (y2(i+1,j) - y2(i,j-1))^2)
N4(1)=C*i + j - 1
N4(2)=C*i + j
N4(3)=C*(i-1) + j
N4(4)=C*(i-1) + j - 1
for J3=1 to 2
N9 = N9 + 1
if FNR(D4) >= FNR(D3*1.02) goto 55
J4 = N4(1)
J5 = N4(J3 + 1)
J6 = N4(J3 + 2)
goto 60
55 J4 = N4(J3)
J5 = N4(J3 + 1)
J6 = N4(4)
60 L2(1) = ABS( N3(J4) - N3(J5) ) + 1
L2(2) = ABS( N3(J5) - N3(J6) ) + 1
L2(3) = ABS( N3(J4) - N3(J6) ) + 1
for I6=1 to 3
if L2(I6) <= N7 goto 70
N7 = L2(I6)
N10 = N9
70 next I6
print
print "Triangulo elemental N° ";N9

```

```

print
print "Nodo ";N3(J4)="spc(4)
print using "+###.###":x3(J4),y3(J4)
print
print "Nodo ";N3(J5)="spc(4)
print using "+###.###":x3(J5),y3(J5)
print
print "Nodo ";N3(J6)="spc(4)
print using "+###.###":x3(J6),y3(J6)
print
print #7,using"###.##",";N3(J4),N3(J5),N3(J6)
print #8,using"###.###,";x3(J4),y3(J4),x3(J5),y3(J5),x3(J6),y3(J6)
90 next J3
next j
next i
print
next Q
close #7
close #8
print
print "El ancho de banda es ";N7
print "Fue calculado en el elemento ";N10
print
print "Fin del programa"
print
print
end
rem ** ZONA DE SUBROUTINAS **
A1:

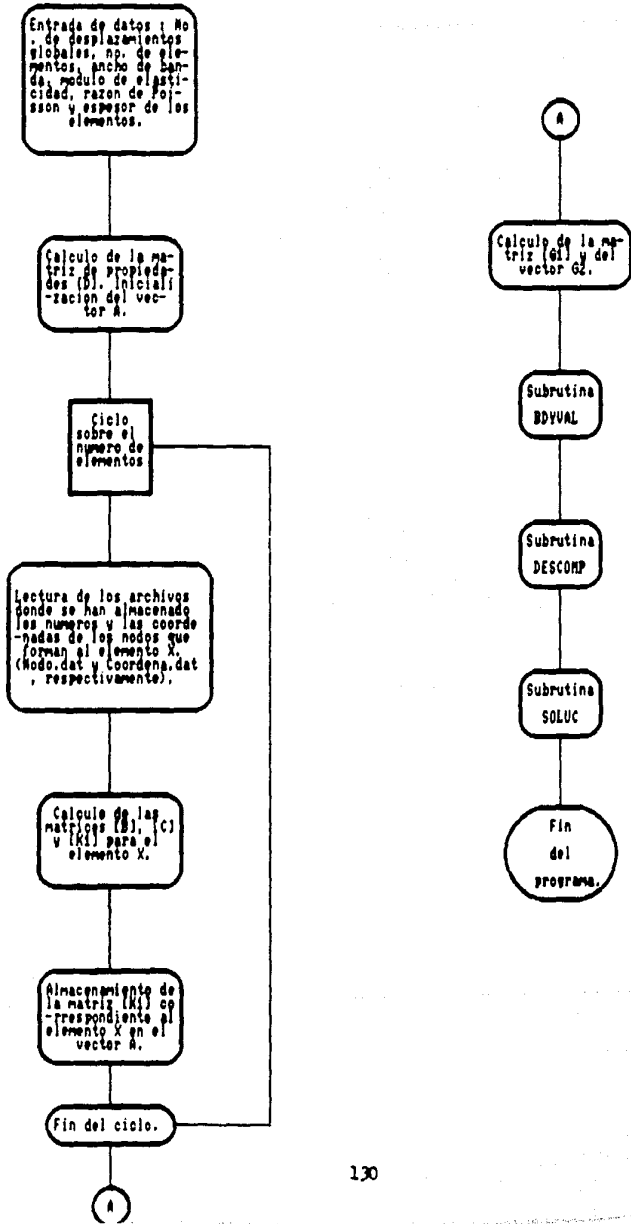
    I2(i,1)=-1
    I2(i,2)=1
    I2(i,3) = 1
    I2(i,4) = -1
return
A2:

    I2(i,1) = 1
    I2(i,2) = -1
    I2(i,3) = -1
    I2(i,4) = 1
return
rem ** FIN DE LAS SUBROUTINAS **

```



# Diagrama de flujo del programa FINITO.



## Diagrama de flujo de la subrutina BDYUAL.



## Diagrama de flujo de la subrutina DESCOMP.



## Diagrama de flujo de la subrutina SOLUC.



```

c  PROGRAMA FINITO
real*4 K1,f1,B,C,D,s1,s2,e2,e3,n1,n2,G1
real*4 m,t,r,m1,m2,A,x1,y1,z2,y2,x3,y3,A4,s,G2
integer*2 g,e,w,p1,p2,p3
integer*2 j1,j2,j3,i,j,k,v,z,j5,k2
dimension D(3,3),n1(3),n2(6),k1(6,6),G2(316)
dimension f1(6),B(3,6),C(6,3),A(32000),G1(316,98)
common G1,G2,q,w,A
write(*,*)
write(*,*) 'Programa Finito'
write(*,*) 'Caso de deformaciones planas'
write(*,*)
write(*,*) 'No. de desplazamientos globales '
read(*,*) g
if (g) 4,4,5
goto 5
4  goto 1000
5  write(*,*)
write(*,*) 'No. de elementos '
read(*,*) e
if (e) 8,8,9
goto 9
8  goto 1000
9  write(*,*)
write(*,*) 'Ancho de banda '
read(*,*) w
write(*,*)
write(*,*) 'Modulo de Elasticidad '
read(*,*) e3
write(*,*)
write(*,*) 'Razon de Poisson '
read(*,*) m
write(*,*)
write(*,*) 'Espesor de los elementos '
read(*,*) t
write(*,*)
r = (e3*(1-m))/((1+m)*(1-2*m))
m1 = m/(1-m)
m2 = (1-2*m)/(2*(1-m))
c  CALCULO DE LA MATRIZ DE PROPIEDADES [D]
do 14 i=1,3
do 14 j=1,3
D(i,j)=0
14  continue
D(1,1) = r
D(1,2) = r*m1
D(2,1) = r*m1
D(2,2) = r
D(3,3) = r*m2
c  CALCULO DE APUNTADES E INICIALIZACION DEL VECTOR [A]
j1=g
j2=j1+g
j3=j2 + (g*w)
do 15 i=1,j3
A(i)=0
15  continue

```

```

c      write(*,*)
      IMPRESIÓN DE LOS DATOS A EMPLEAR
      write(*,*) ' No. de desplazamientos globales '
      write(*,*) g
      write(*,*)
      write(*,*) ' No. de elementos '
      write(*,*) e
      write(*,*)
      write(*,*) ' Ancho de banda '
      write(*,*) w
      write(*,*)
      write(*,*) ' Modulo de Elasticidad '
      write(*,*) e3
      write(*,*)
      write(*,*) ' Razon de Poisson '
      write(*,*) m
      write(*,*)
      write(*,*) ' Espesor del elemento '
      write(*,*) t
      write(*,*)

c      ARMADO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL Y DEL VECTOR DE FUERZA
c      ENTRADA DE DATOS
      open(2, file = 'nodo.dat')
      open(3, file = 'coordena.dat')
      do 800 k2=1,e
16      read(2,16,end = 900 ) n1(1),n1(2),n1(3)
      format(1X,F6.2,1X,F6.2,1X,F6.2)
      read(3,18,end = 900 ) x1,y1,x2,y2,x3,y3
18      format(1X,F8.4,1X,F8.4,1X,F8.4,1X,F8.4,1X,F8.4,1X,F8.4)
      write(*,*)
      write(*,*) 'Elemento'
      write(*,*) k2
      write(*,*)
      write(*,*) '      Nodos      Coordenadas
      write(*,*)
      write(*,20) n1(1),x1,y1
      write(*,*)
      write(*,20) n1(2),x2,y2
      write(*,*)
      write(*,20) n1(3),x3,y3
      write(*,*)
20      format(6X,F4.0,9X,F9.4,3X,F9.4)
c      CALCULO DE LOS GRADOS GLOBALES DE LIBERTAD A PARTIR
c      DE LOS Nos. DE NODO.
      do 30 i=1,3
30      n2(2#i-1) = n1(i)*2 - 1
      n2(2#i) = n1(i)*2
c      CALCULO DE LA MATRIZ [B]
      do 40 i=1,3
      do 40 j=1,6
40      B(i,j)=0
      B(1,1) = y2-y3
      B(1,3) = y3-y1
      B(1,5) = y1-y2
      B(2,2) = x3-x2
      B(2,4) = x1-x3

```

```

B(2,6) = x2-x1
B(3,1) = B(2,2)
B(3,2) = B(1,1)
B(3,3) = B(2,4)
B(3,4) = B(1,3)
B(3,5) = B(2,6)
B(3,6) = B(1,5)
A4 = (x2*y3 + x3*y1 + x1*y2 - x2*y1 - x3*y2 - x1*y3)
c  CALCULO DE [C] = [Bt][D]
do 50 i=1,6
do 50 j=1,3
C(i,j)=0
do 50 k=1,3
50  C(i,j) = C(i,j) + B(k,i)*D(k,j)
c  CALCULO DE [K1]
do 60 i=1,6
do 60 j=1,6
s=0
do 55 k=1,3
55  s = s + C(i,k)*B(k,j)
K1(i,j) = (s*t)/(2*A4)
60  continue
c  CALCULO DEL VECTOR A
do 90 i=1,6
v=n2(i)
do 80 j=1,6
z=n2(j)
z=z+1-v
if (z) 80,80,70
70  j5 = j2 + (z-1)*g + v
80  A(j5) = A(j5) + K1(j,i)
90  continue
write(*,*)
800 continue
900 write (*,*)
c  CALCULO DE G1 Y G2
do 930 j=(j1+1),j2
930 G2(j-j1)=A(j)
do 960 k=1,w
p1 = j2 + (k-1)*g + 1
p2 = k*g + j2
do 950 j=p1,p2
950 p3 = j-(j2+(k-1)*g)
G1(p3,k)=A(j)
960 continue
write(*,*)
980 write(*,*)
c  LLAMADO DE SUBRUTINAS
call BDYVAL
write(*,*)
call DESCOMP
write(*,*)
call SOLUC
1000 write(*,*)
write(*,*) 'Fin del programa'

```

```

write(1,1)
stop
end
c ZONA DE SUBROUTINAS
subroutine BDYVAL
c PRINCIPIO
integer*2 i,j,k,m,15,16,1,11,B1,p,q,g,w
real*4 B2,B3,x7,G1,G2
dimension B1(6),B2(6),G1(316,98),G2(316)
common G1,G2,g,w,A
1010 write(1,1)
11=0
15=0
write(1,1) 'Fuerzas de nodo conocidas'
write(1,1)
1020 write(1,1) 'Teclear los numeros de desplazamiento'
write(1,1) 'y los valores de las fuerzas que son'
write(1,1) 'conocidas. (Este patron seguira hasta'
write(1,1) 'que se teclee un valor negativo o cero)'
write(1,1)
do 1025 i=1,6
read(1,1) B1(i),B2(i)
if (B1(i).LE.0) goto 1030
1025 write(1,1)
1030 I6=0
do 1040 l=1,6
if (B1(l).LE.0) goto 1060
I6=I6+1
p=B1(l)
1040 G2(p) = (B2(l) + G2(p))
goto 1070
1060 I5=1
if (I6.EQ.0) goto 1100
1070 if (i1.EQ.1) goto 1080
write(1,1)
write(1,1)
1080 write(1,1) 'Caso a ejecutar'
write(1,1)
write(1,1) 'No de desplazamiento Valor de la fuerza'
write(1,1)
do 1090 l=1,16
write(1,1) B1(l),B2(l)
1090 write(1,1)
if (I5.EQ.1) goto 1100
I1=1
1095 goto 1020
1100 write(1,1)
write(1,1)
write(1,1) 'Desplazamientos nodales conocidos'
write(1,1)
1110 write(1,1) 'Teclear el No y el valor del'
write(1,1) 'desplazamiento, en ese orden.'
write(1,1) 'El ciclo terminara hasta que'
write(1,1) 'se teclee un numero negativo o cero'
write(1,1)

```

```

do 1120 i=1,6
read(*,*) B1(i),B2(i)
if (B1(i).LE.0) goto 1130
1120 write(*,*)
1130 I6=0
c MODIFICACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
x7=5.0E5
do 1160 l=1,6
if (B1(l).LE.0) goto 1170
I6=I6+1
p=B1(l)
B3=B2(l)
q=p-1
do 1150 j=2,w
m=(p+j-1)
if (m.GT.g) goto 1140
G2(m) = ( G2(m) - G1(p,j)*B3 )
G1(p,j) = 0
1140 if (q.LE.0) goto 1150
G2(q) = ( G2(q) - G1(q,j)*B3 )
G1(q,j) = 0
q=q-1
1150 continue
write(*,*)
if (G1(p,1).LT.0.05) G1(p,j)=x7
G2(p)=G1(p,1)*B3
1160 continue
goto 1180
1170 I5=1
if (I6.EQ.0) goto 1205
1180 write(*,*)
write(*,*) 'Numero de desplazamiento y '
write(*,*) 'valor del desplazamiento'
write(*,*)
write(*,*) 'Numero Valor'
write(*,*)
do 1190 l=1,I6
write(*,*) B1(l),B2(l)
1190 write(*,*)
if (I5.EQ.1) goto 1205
1200 goto 1110
1205 do 1210 k=1,5
1210 write(*,*) '*'
c FIN DE BDYVAL
return
end
subroutine DESCOMP
c PRINCIPIO
integer*2 g3,i,m1,n5,m2,n3,n4,k,n6,j,g,w,m5
real*4 G1,G2
dimension G1(316,98),G2(316)
common G1,G2,g,w,A
g3=g-1
write(*,*)
1300 do 1350 i=1,g3
m1 = i+w-1

```

```

      if (m1.GT.g) m1=g
      n5=n5+1
      m2=w
      m5=g-1+1
      if (m5.LT.w) m2=g-1+1
      n3=0
      do 1340 j=n5,m1
      m2=m2-1
      n3=n3+1
      n4=n3+1
      do 1340 k=1,m2
      n6=n3+k
1340  G1(j,k) = (G1(j,k) - (G1(i,n4)*G1(i,n6))/G1(i,1))
1350  continue
c     FIN DE DESCOMP
      return
      end
c     subroutine SOLUC
      PRINCIPPIO
      integer*2 g3,i,m1,n5,l,j,n4,k,m6,p,g,w
      real*4 m5,s,G1,G2,A
      dimension G1(316,98),G2(316),A(32000)
      common G1,G2,g,w,A
      write(*,*)
      g3=g-1
c     DESCOMPOSICION DEL VECTOR G2
      do 1400 i=1,g3
      m1=i+w-1
      if (m1.GT.g) m1=g
      n5=i+1
      l=1
      do 1400 j=n5,m1
      l=l+1
1400  G2(j) = G2(j) - (G1(i,l)*G2(i))/G1(i,1)
      write(*,*)
c     SUBSTITUCION EN REVERSA PARA DETERMINAR LOS DESPLAZAMIENTOS
      A(g) = G2(g)/G1(g,1)
1420  write(*,*)
      do 1460 k=1,g3
      p=g-k
      m1=w
      m6=p+w-1
      if (m6.GT.g) m1=g-p+1
      s=0
      do 1430 j=2,m1
      n4=p+j-1
1430  s = s + (G1(p,j)*A(n4))
      A(p) = (G2(p)-s)/G1(p,1)
1460  continue
      do 1470 k=1,5
1470  write(*,*) '*'
      write(*,*)
      write(*,*) 'Valores de los desplazamientos'
      write(*,*)
      open(5, file = 'resulta2.dat',status = 'new')
      write(5,1480)(i,A(i),i=1,g)

```



```
1480 format(I5,4X,F20.12)
      write(*,*)
      close(5,status='keep')
      do 1500 i=1,g
        write(*,*) i,A(i)
1500  write(*,*)
      write(*,*)
c      FIN DE SOLUC
      return
      end
```

A continuación, se presentan los datos de entrada y salida correspondientes a los programas GRID y FINITO aplicados al modelo de un dique situado a 5 km de profundidad.

Programa Grid

Este programa crea elementos de forma triangular en una region dada

Teclear n° de regiones

10

Teclear n° de puntos de frontera

47

Teclear coordenadas de los nodos

Nodo 1  
0,1

Nodo 2  
0.020833,1

Nodo 3  
0.0625,1

Nodo 4  
0.11375,1

Nodo 5  
0.165,1

Nodo 6  
10.994,0.2692

Nodo 7  
14.985,0

Nodo 8  
16.6542,0

Nodo 9  
25,0

Nodo 10  
25,-2.5

Nodo 11  
25,-5

Nodo 12  
19.9925,-5

Nodo 13  
14.985,-5

Nodo 14  
14.985,-1.25

Nodo 15  
25,-6.66667

Nodo 16  
14.985,-6.66667

Nodo 17  
14.985,-10

Nodo 18  
19.9925,-10

Nodo 19  
25,-10

Nodo 20  
25,-17.5

Nodo 21  
14.985,-17.5

Nodo 22  
25,-25

Nodo 23  
19.9925,-25

Nodo 24  
14.985,-25

Nodo 25  
7.52375,-25

Nodo 26  
0.0625,-25

Nodo 27  
0.0208333,-25

Nodo 28  
0,-25

Nodo 29  
0,-17.5

Nodo 30  
0.0625,-17.5

Nodo 31  
0,-10

Nodo 32  
0.0208333,-10

Nodo 33  
0.0625,-10

Nodo 34  
7.52375,-10

Nodo 35  
0.0625,-6.66667

Nodo 36  
0.0625,-5

Nodo 37  
7.52375,-5

Nodo 38  
0.0208333,-5

Nodo 39  
0,-5

Nodo 40  
0,-3.75

Nodo 41  
0.0625,-2.5

Nodo 42  
0,0

Nodo 43  
0,0.3333

Nodo 44  
0.0208333,0

Nodo 45  
0.0625,0

Nodo 46  
3.793125,0

Nodo 47  
0.0625,0.3333

Datos de conexidad (i.e. que regiones son adyacentes a una region dada)

Teclear estos datos de acuerdo a la orientacion de los ejes xi,eta.

Recuerde que el nodo 1 esta en  $x_i = \eta = -1$  y que el lado 1 esta situado entre los nodos 1 y 3, el lado 2 entre los nodos 3 y 5, etc.

N° de la region  
1

Teclear datos de conexidad para la region 1

3,2,0,0

N° de la region

2

Teclear datos de conexidad para la region 2

4,0,0,1

N° de la region

3

Teclear datos de conexidad para la region 3

0,4,1,0

N° de la region

4

Teclear datos de conexidad para la region 4

6,5,2,3

N° de la region

5

Teclear datos de conexidad para la region 5

7,0,0,4

N° de la region

6

Teclear datos de conexidad para la region 6

9,7,4,0

N° de la region

7

Teclear datos de conexidad para la region 7

10,0,5,6

N° de la region

8

Teclear datos de conexidad para la region 8

9,0,0,0

N° de la region

9

Teclear datos de conexidad para la region 9

10,6,8,0

N° de la region

10

Teclrear datos de conexidad para la region 10

0,0,7,9

-----

Tecllee el n° de hileras y de columnas para la region 1  
. en ese orden. Con esto se indica cuantas hileras y  
columnas de elementos triangulares tendra la region  
considerada. Recuerde la orientacion de los ejes xi,eta  
que uso para la conexidad.

4,4

Nodos de frontera pertenecientes a la region 1

42,44,45,47,3,2,1,43

-----

Tecllee el n° de hileras y columnas para la region 2

4,5

Nodos de frontera pertenecientes a la region 2

45,46,7,6,5,4,3,47

-----

Tecllee el n° de hileras y columnas para la region 3

5,4

Nodos de frontera pertenecientes a la region 3

39,38,36,41,45,44,42,40

-----

Tecllee el n° de hileras y columnas para la region 4

5,5

Nodos de frontera pertenecientes a la region 4

36,37,13,14,7,46,45,41

-----

Tecllee el n° de hileras y columnas para la region 5

5,7

Nodos de frontera pertenecientes a la region 5

13,12,11,10,9,8,7,14

Teclee el n° de hileras y columnas para la region 6

4,5

Nodos de frontera pertenecientes a la region 6

33,34,17,16,13,37,36,35

Teclee el n° de hileras y columnas para la region 7

4,7

Nodos de frontera pertenecientes a la region 7

17,18,19,15,11,12,13,16

Teclee el n° de hileras y columnas para la region 8

4,3

Nodos de frontera pertenecientes a la region 8

26,30,33,32,31,29,28,27

Teclee el n° de hileras y columnas para la region 9

5,3

Nodos de frontera pertenecientes a la region 9

24,21,17,34,33,30,26,25

Teclee el n° de hileras y columnas para la region 10

3,7

Nodos de frontera pertenecientes a la region 10

24,23,22,20,19,18,17,21

Con estos datos, el programa GRID realiza la discretización del modelo. A continuación se muestran los resultados proporcionados por este programa, i.e., los números (almacenados en el archivo "Trian1.dat") y las coordenadas (almacenadas en el archivo "Vert1.dat") de los nodos de los 258 elementos triangulares que constituyen al modelo (figura A9). Asimismo, se indica el ancho de banda  $W$  calculado suponiendo que cada nodo presenta un solo grado de libertad.

Archivo Triani (Para que el programa FINITO pueda leer los datos, es necesario renombrarlo como Nodo.dat)

5.00	6.00	1.00	39.00	40.00	35.00
6.00	2.00	1.00	40.00	36.00	35.00
6.00	7.00	2.00	41.00	42.00	37.00
7.00	3.00	2.00	42.00	38.00	37.00
7.00	8.00	3.00	42.00	43.00	38.00
8.00	4.00	3.00	43.00	39.00	38.00
9.00	10.00	5.00	43.00	44.00	39.00
10.00	6.00	5.00	44.00	40.00	39.00
10.00	11.00	6.00	45.00	46.00	41.00
11.00	7.00	6.00	46.00	42.00	41.00
11.00	12.00	7.00	46.00	47.00	42.00
12.00	8.00	7.00	47.00	43.00	42.00
13.00	14.00	9.00	47.00	48.00	43.00
14.00	10.00	9.00	48.00	44.00	43.00
14.00	15.00	10.00	36.00	49.00	16.00
15.00	11.00	10.00	49.00	29.00	16.00
15.00	16.00	11.00	49.00	50.00	29.00
16.00	12.00	11.00	50.00	30.00	29.00
8.00	21.00	4.00	50.00	51.00	31.00
21.00	17.00	4.00	50.00	31.00	30.00
21.00	22.00	17.00	51.00	52.00	31.00
22.00	18.00	17.00	52.00	32.00	31.00
22.00	23.00	18.00	40.00	53.00	36.00
23.00	19.00	18.00	53.00	49.00	36.00
23.00	24.00	20.00	53.00	54.00	49.00
23.00	20.00	19.00	54.00	50.00	49.00
12.00	25.00	8.00	54.00	55.00	50.00
25.00	21.00	8.00	55.00	51.00	50.00
25.00	26.00	21.00	55.00	56.00	52.00
26.00	22.00	21.00	55.00	52.00	51.00
26.00	27.00	22.00	44.00	57.00	40.00
27.00	23.00	22.00	57.00	53.00	40.00
27.00	28.00	23.00	57.00	58.00	53.00
28.00	24.00	23.00	58.00	54.00	53.00
16.00	29.00	12.00	58.00	59.00	55.00
29.00	25.00	12.00	58.00	55.00	54.00
29.00	30.00	25.00	59.00	60.00	56.00
30.00	26.00	25.00	59.00	56.00	55.00
30.00	31.00	26.00	48.00	61.00	44.00
31.00	27.00	26.00	61.00	57.00	44.00
31.00	32.00	27.00	61.00	62.00	57.00
32.00	28.00	27.00	62.00	58.00	57.00
33.00	34.00	13.00	62.00	63.00	59.00
34.00	14.00	13.00	62.00	59.00	58.00
34.00	35.00	14.00	63.00	64.00	60.00
35.00	15.00	14.00	63.00	60.00	59.00
35.00	36.00	15.00	52.00	71.00	32.00
36.00	16.00	15.00	71.00	65.00	32.00
37.00	38.00	33.00	71.00	72.00	65.00
38.00	34.00	33.00	72.00	66.00	65.00
38.00	39.00	34.00	72.00	73.00	66.00
39.00	35.00	34.00	73.00	67.00	66.00



73.00	74.00	67.00	101.00	102.00	96.00
74.00	68.00	67.00	102.00	97.00	96.00
74.00	75.00	68.00	102.00	103.00	97.00
75.00	69.00	68.00	103.00	98.00	97.00
75.00	76.00	69.00	103.00	104.00	98.00
76.00	70.00	69.00	104.00	99.00	98.00
56.00	77.00	52.00	105.00	106.00	101.00
77.00	71.00	52.00	105.00	101.00	100.00
77.00	78.00	71.00	106.00	107.00	102.00
78.00	72.00	71.00	106.00	102.00	101.00
78.00	79.00	72.00	107.00	108.00	103.00
79.00	73.00	72.00	107.00	103.00	102.00
79.00	80.00	73.00	108.00	109.00	104.00
80.00	74.00	73.00	108.00	104.00	103.00
80.00	81.00	74.00	99.00	110.00	64.00
81.00	75.00	74.00	110.00	89.00	64.00
81.00	82.00	75.00	110.00	111.00	89.00
82.00	76.00	75.00	111.00	90.00	89.00
60.00	83.00	56.00	111.00	112.00	90.00
83.00	77.00	56.00	112.00	91.00	90.00
83.00	84.00	77.00	112.00	113.00	91.00
84.00	78.00	77.00	113.00	92.00	91.00
84.00	85.00	78.00	113.00	114.00	92.00
85.00	79.00	78.00	114.00	93.00	92.00
85.00	86.00	79.00	114.00	115.00	93.00
86.00	80.00	79.00	115.00	94.00	93.00
86.00	87.00	80.00	104.00	116.00	99.00
87.00	81.00	80.00	116.00	110.00	99.00
87.00	88.00	81.00	116.00	117.00	110.00
88.00	82.00	81.00	117.00	111.00	110.00
64.00	89.00	60.00	117.00	118.00	111.00
89.00	83.00	60.00	118.00	112.00	111.00
89.00	90.00	83.00	118.00	119.00	112.00
90.00	84.00	83.00	119.00	113.00	112.00
90.00	91.00	84.00	119.00	120.00	113.00
91.00	85.00	84.00	120.00	114.00	113.00
91.00	92.00	85.00	120.00	121.00	114.00
92.00	86.00	85.00	121.00	115.00	114.00
92.00	93.00	86.00	109.00	122.00	104.00
93.00	87.00	86.00	122.00	116.00	104.00
93.00	94.00	87.00	122.00	123.00	116.00
94.00	88.00	87.00	123.00	117.00	116.00
95.00	96.00	48.00	123.00	124.00	117.00
96.00	61.00	48.00	124.00	118.00	117.00
96.00	97.00	61.00	124.00	125.00	118.00
97.00	62.00	61.00	125.00	119.00	118.00
97.00	98.00	62.00	125.00	126.00	119.00
98.00	63.00	62.00	126.00	120.00	119.00
98.00	99.00	63.00	126.00	127.00	120.00
99.00	64.00	63.00	127.00	121.00	120.00
100.00	101.00	95.00	131.00	132.00	128.00
101.00	96.00	95.00	132.00	129.00	128.00

132.00	133.00	129.00
133.00	130.00	129.00
134.00	135.00	131.00
135.00	132.00	131.00
135.00	136.00	132.00
136.00	133.00	132.00
137.00	138.00	134.00
138.00	135.00	134.00
138.00	105.00	135.00
105.00	136.00	135.00
139.00	140.00	137.00
140.00	138.00	137.00
140.00	106.00	138.00
106.00	105.00	138.00
141.00	142.00	139.00
142.00	140.00	139.00
142.00	107.00	140.00
107.00	106.00	140.00
143.00	144.00	141.00
144.00	142.00	141.00
144.00	108.00	142.00
108.00	107.00	142.00
145.00	146.00	143.00
146.00	144.00	143.00
146.00	109.00	144.00
109.00	108.00	144.00
146.00	147.00	109.00
147.00	122.00	109.00
147.00	148.00	122.00
148.00	123.00	122.00
148.00	149.00	123.00
149.00	124.00	123.00
149.00	150.00	124.00
150.00	125.00	124.00
150.00	151.00	125.00
151.00	126.00	125.00
151.00	152.00	126.00
152.00	127.00	126.00
145.00	153.00	146.00
153.00	147.00	146.00
153.00	154.00	147.00
154.00	148.00	147.00
154.00	155.00	148.00
155.00	149.00	148.00
155.00	156.00	149.00
156.00	150.00	149.00
156.00	157.00	150.00
157.00	151.00	150.00
157.00	158.00	151.00
158.00	152.00	151.00

Archivo Vert1 (Para que el programa FINITO pueda leer los datos, es necesario renombrarlo como Coordena.dat).

0.0000	0.5185	0.0116	0.5185	0.0000	1.0000
0.0116	0.5185	0.0116	1.0000	0.0000	1.0000
0.0116	0.5185	0.0324	0.5185	0.0116	1.0000
0.0324	0.5185	0.0324	1.0000	0.0116	1.0000
0.0324	0.5185	0.0625	0.5185	0.0324	1.0000
0.0625	0.5185	0.0625	1.0000	0.0324	1.0000
0.0000	0.1852	0.0116	0.1852	0.0000	0.5185
0.0116	0.1852	0.0116	0.5185	0.0000	0.5185
0.0116	0.1852	0.0324	0.1852	0.0116	0.5185
0.0324	0.1852	0.0324	0.5185	0.0116	0.5185
0.0324	0.1852	0.0625	0.1852	0.0324	0.5185
0.0625	0.1852	0.0625	0.5185	0.0324	0.5185
0.0000	0.0000	0.0116	0.0000	0.0000	0.1852
0.0116	0.0000	0.0116	0.1852	0.0000	0.1852
0.0116	0.0000	0.0324	0.0000	0.0116	0.1852
0.0324	0.0000	0.0324	0.1852	0.0116	0.1852
0.0324	0.0000	0.0625	0.0000	0.0324	0.1852
0.0625	0.0000	0.0625	0.1852	0.0324	0.1852
0.0625	0.5185	1.1503	0.5043	0.0625	1.0000
1.1503	0.5043	0.0881	1.0000	0.0625	1.0000
1.1503	0.5043	2.8598	0.4901	0.0881	1.0000
2.8598	0.4901	0.1138	1.0000	0.0881	1.0000
2.8598	0.4901	5.1911	0.4758	0.1138	1.0000
5.1911	0.4758	0.1394	1.0000	0.1138	1.0000
5.1911	0.4758	8.1442	0.4616	0.1650	1.0000
5.1911	0.4758	0.1650	1.0000	0.1394	1.0000
0.0625	0.1852	1.4526	0.1710	0.0625	0.5185
1.4526	0.1710	1.1503	0.5043	0.0625	0.5185
1.4526	0.1710	4.0863	0.1567	1.1503	0.5043
4.0863	0.1567	2.8598	0.4901	1.1503	0.5043
4.0863	0.1567	7.9634	0.1425	2.8598	0.4901
7.9634	0.1425	5.1911	0.4758	2.8598	0.4901
7.9634	0.1425	13.0842	0.1283	5.1911	0.4758
13.0842	0.1283	8.1442	0.4616	5.1911	0.4758
0.0625	0.0000	0.9952	0.0000	0.0625	0.1852
0.9952	0.0000	1.4526	0.1710	0.0625	0.1852
0.9952	0.0000	3.7931	0.0000	1.4526	0.1710
3.7931	0.0000	4.0863	0.1567	1.4526	0.1710
3.7931	0.0000	8.4564	0.0000	4.0863	0.1567
8.4564	0.0000	7.9634	0.1425	4.0863	0.1567
8.4564	0.0000	14.9850	0.0000	7.9634	0.1425
14.9850	0.0000	13.0842	0.1283	7.9634	0.1425
0.0000	-2.1875	0.0116	-1.8750	0.0000	0.0000
0.0116	-1.8750	0.0116	0.0000	0.0000	0.0000
0.0116	-1.8750	0.0324	-1.5625	0.0116	0.0000
0.0324	-1.5625	0.0324	0.0000	0.0116	0.0000
0.0324	-1.5625	0.0625	-1.2500	0.0324	0.0000
0.0625	-1.2500	0.0625	0.0000	0.0324	0.0000
0.0000	-3.7500	0.0116	-3.3333	0.0000	-2.1875
0.0116	-3.3333	0.0116	-1.8750	0.0000	-2.1875
0.0116	-3.3333	0.0324	-2.9167	0.0116	-1.8750
0.0324	-2.9167	0.0324	-1.5625	0.0116	-1.8750

0.0324	-2.9167	0.0625	-2.5000	0.0324	-1.5625
0.0625	-2.5000	0.0625	-1.2500	0.0324	-1.5625
0.0000	-4.6875	0.0116	-4.3750	0.0000	-3.7500
0.0116	-4.3750	0.0116	-3.3333	0.0000	-3.7500
0.0116	-4.3750	0.0324	-4.0625	0.0116	-3.3333
0.0324	-4.0625	0.0324	-2.9167	0.0116	-3.3333
0.0324	-4.0625	0.0625	-3.7500	0.0324	-2.9167
0.0625	-3.7500	0.0625	-2.5000	0.0324	-2.9167
0.0000	-5.0000	0.0116	-5.0000	0.0000	-4.6875
0.0116	-5.0000	0.0116	-4.3750	0.0000	-4.6875
0.0116	-5.0000	0.0324	-5.0000	0.0116	-4.3750
0.0324	-5.0000	0.0324	-4.0625	0.0116	-4.3750
0.0324	-5.0000	0.0625	-5.0000	0.0324	-4.0625
0.0625	-5.0000	0.0625	-3.7500	0.0324	-4.0625
0.0625	-1.2500	1.6946	-1.0156	0.0625	0.0000
1.6946	-1.0156	0.9952	0.0000	0.0625	0.0000
1.6946	-1.0156	4.7258	-0.7813	0.9952	0.0000
4.7258	-0.7813	3.7931	0.0000	0.9952	0.0000
4.7258	-0.7813	9.1559	-0.5469	8.4564	0.0000
4.7258	-0.7813	8.4564	0.0000	3.7931	0.0000
9.1559	-0.5469	14.9850	-0.3125	8.4564	0.0000
14.9850	-0.3125	14.9850	0.0000	8.4564	0.0000
0.0625	-2.5000	2.3941	-2.1875	0.0625	-1.2500
2.3941	-2.1875	1.6946	-1.0156	0.0625	-1.2500
2.3941	-2.1875	5.6584	-1.8750	1.6946	-1.0156
5.6584	-1.8750	4.7258	-0.7813	1.6946	-1.0156
5.6584	-1.8750	9.8554	-1.5625	4.7258	-0.7813
9.8554	-1.5625	9.1559	-0.5469	4.7258	-0.7813
9.8554	-1.5625	14.9850	-1.2500	14.9850	-0.3125
9.8554	-1.5625	14.9850	-0.3125	9.1559	-0.5469
0.0625	-3.7500	3.0936	-3.5156	0.0625	-2.5000
3.0936	-3.5156	2.3941	-2.1875	0.0625	-2.5000
3.0936	-3.5156	6.5911	-3.2813	2.3941	-2.1875
6.5911	-3.2813	5.6584	-1.8750	2.3941	-2.1875
6.5911	-3.2813	10.5549	-3.0469	9.8554	-1.5625
6.5911	-3.2813	9.8554	-1.5625	5.6584	-1.8750
10.5549	-3.0469	14.9850	-2.8125	14.9850	-1.2500
10.5549	-3.0469	14.9850	-1.2500	9.8554	-1.5625
0.0625	-5.0000	3.7931	-5.0000	0.0625	-3.7500
3.7931	-5.0000	3.0936	-3.5156	0.0625	-3.7500
3.7931	-5.0000	7.5237	-5.0000	3.0936	-3.5156
7.5237	-5.0000	6.5911	-3.2813	3.0936	-3.5156
7.5237	-5.0000	11.2544	-5.0000	10.5549	-3.0469
7.5237	-5.0000	10.5549	-3.0469	6.5911	-3.2813
11.2544	-5.0000	14.9850	-5.0000	14.9850	-2.8125
11.2544	-5.0000	14.9850	-2.8125	10.5549	-3.0469
14.9850	-0.3125	15.2632	-0.4688	14.9850	0.0000
15.2632	-0.4688	15.1096	0.0000	14.9850	0.0000
15.2632	-0.4688	16.0978	-0.6250	15.1096	0.0000
16.0978	-0.6250	15.3560	0.0000	15.1096	0.0000
16.0978	-0.6250	17.4888	-0.7813	15.3560	0.0000
17.4888	-0.7813	16.6542	0.0000	15.3560	0.0000

17.4888	-0.7813	19.4361	-0.9375	16.6542	0.0000
19.4361	-0.9375	18.6943	0.0000	16.6542	0.0000
19.4361	-0.9375	21.9399	-1.0938	18.6943	0.0000
21.9399	-1.0938	21.4762	0.0000	18.6943	0.0000
21.9399	-1.0938	25.0000	-1.2500	21.4762	0.0000
25.0000	-1.2500	25.0000	0.0000	21.4762	0.0000
14.9850	-1.2500	15.7269	-1.4583	14.9850	-0.3125
15.7269	-1.4583	15.2632	-0.4688	14.9850	-0.3125
15.7269	-1.4583	16.8396	-1.6667	15.2632	-0.4688
16.8396	-1.6667	16.0978	-0.6250	15.2632	-0.4688
16.8396	-1.6667	18.3233	-1.8750	16.0978	-0.6250
18.3233	-1.8750	17.4888	-0.7813	16.0978	-0.6250
18.3233	-1.8750	20.1780	-2.0833	17.4888	-0.7813
20.1780	-2.0833	19.4361	-0.9375	17.4888	-0.7813
20.1780	-2.0833	22.4035	-2.2917	19.4361	-0.9375
22.4035	-2.2917	21.9399	-1.0938	19.4361	-0.9375
22.4035	-2.2917	25.0000	-2.5000	21.9399	-1.0938
25.0000	-2.5000	25.0000	-1.2500	21.9399	-1.0938
14.9850	-2.8125	16.1905	-2.9688	14.9850	-1.2500
16.1905	-2.9688	15.7269	-1.4583	14.9850	-1.2500
16.1905	-2.9688	17.5815	-3.1250	15.7269	-1.4583
17.5815	-3.1250	16.8396	-1.6667	15.7269	-1.4583
17.5815	-3.1250	19.1579	-3.2813	16.8396	-1.6667
19.1579	-3.2813	18.3233	-1.8750	16.8396	-1.6667
19.1579	-3.2813	20.9198	-3.4375	18.3233	-1.8750
20.9198	-3.4375	20.1780	-2.0833	18.3233	-1.8750
20.9198	-3.4375	22.8672	-3.5938	20.1780	-2.0833
22.8672	-3.5938	22.4035	-2.2917	20.1780	-2.0833
22.8672	-3.5938	25.0000	-3.7500	22.4035	-2.2917
25.0000	-3.7500	25.0000	-2.5000	22.4035	-2.2917
14.9850	-5.0000	16.6542	-5.0000	14.9850	-2.8125
16.6542	-5.0000	16.1905	-2.9688	14.9850	-2.8125
16.6542	-5.0000	18.3233	-5.0000	16.1905	-2.9688
18.3233	-5.0000	17.5815	-3.1250	16.1905	-2.9688
18.3233	-5.0000	19.9925	-5.0000	17.5815	-3.1250
19.9925	-5.0000	19.1579	-3.2813	17.5815	-3.1250
19.9925	-5.0000	21.6617	-5.0000	19.1579	-3.2813
21.6617	-5.0000	20.9198	-3.4375	19.1579	-3.2813
21.6617	-5.0000	23.3308	-5.0000	20.9198	-3.4375
23.3308	-5.0000	22.8672	-3.5938	20.9198	-3.4375
23.3308	-5.0000	25.0000	-5.0000	22.8672	-3.5938
25.0000	-5.0000	25.0000	-3.7500	22.8672	-3.5938
0.0625	-5.9259	3.7931	-5.9259	0.0625	-5.0000
3.7931	-5.9259	3.7931	-5.0000	0.0625	-5.0000
3.7931	-5.9259	7.5237	-5.9259	3.7931	-5.0000
7.5237	-5.9259	7.5237	-5.0000	3.7931	-5.0000
7.5237	-5.9259	11.2544	-5.9259	7.5237	-5.0000
11.2544	-5.9259	11.2544	-5.0000	7.5237	-5.0000
11.2544	-5.9259	14.9850	-5.9259	11.2544	-5.0000
14.9850	-5.9259	14.9850	-5.0000	11.2544	-5.0000
0.0625	-7.5926	3.7931	-7.5926	0.0625	-5.9259
3.7931	-7.5926	3.7931	-5.9259	0.0625	-5.9259

3.7931	-7.5926	7.5237	-7.5926	3.7931	-5.9259
7.5237	-7.5926	7.5237	-5.9259	3.7931	-5.9259
7.5237	-7.5926	11.2544	-7.5926	7.5237	-5.9259
11.2544	-7.5926	11.2544	-5.9259	7.5237	-5.9259
11.2544	-7.5926	14.9850	-7.5926	11.2544	-5.9259
14.9850	-7.5926	14.9850	-5.9259	11.2544	-5.9259
0.0625	-10.0000	3.7931	-10.0000	3.7931	-7.5926
0.0625	-10.0000	3.7931	-7.5926	0.0625	-7.5926
3.7931	-10.0000	7.5237	-10.0000	7.5237	-7.5926
3.7931	-10.0000	7.5237	-7.5926	3.7931	-7.5926
7.5237	-10.0000	11.2544	-10.0000	11.2544	-7.5926
7.5237	-10.0000	11.2544	-7.5926	7.5237	-7.5926
11.2544	-10.0000	14.9850	-10.0000	14.9850	-7.5926
11.2544	-10.0000	14.9850	-7.5926	11.2544	-7.5926
14.9850	-5.9259	16.6542	-5.9259	14.9850	-5.0000
16.6542	-5.9259	16.6542	-5.0000	14.9850	-5.0000
16.6542	-5.9259	18.3233	-5.9259	16.6542	-5.0000
18.3233	-5.9259	18.3233	-5.0000	16.6542	-5.0000
18.3233	-5.9259	19.9925	-5.9259	18.3233	-5.0000
19.9925	-5.9259	19.9925	-5.0000	18.3233	-5.0000
19.9925	-5.9259	21.6617	-5.9259	19.9925	-5.0000
21.6617	-5.9259	21.6617	-5.0000	19.9925	-5.0000
21.6617	-5.9259	23.3308	-5.9259	21.6617	-5.0000
23.3308	-5.9259	23.3308	-5.0000	21.6617	-5.0000
23.3308	-5.9259	25.0000	-5.9259	23.3308	-5.0000
25.0000	-5.9259	25.0000	-5.0000	23.3308	-5.0000
14.9850	-7.5926	16.6542	-7.5926	14.9850	-5.9259
16.6542	-7.5926	16.6542	-5.9259	14.9850	-5.9259
16.6542	-7.5926	18.3233	-7.5926	16.6542	-5.9259
18.3233	-7.5926	18.3233	-5.9259	16.6542	-5.9259
18.3233	-7.5926	19.9925	-7.5926	18.3233	-5.9259
19.9925	-7.5926	19.9925	-5.9259	18.3233	-5.9259
19.9925	-7.5926	21.6617	-7.5926	19.9925	-5.9259
21.6617	-7.5926	21.6617	-5.9259	19.9925	-5.9259
21.6617	-7.5926	23.3308	-7.5926	21.6617	-5.9259
23.3308	-7.5926	23.3308	-5.9259	21.6617	-5.9259
23.3308	-7.5926	25.0000	-7.5926	23.3308	-5.9259
25.0000	-7.5926	25.0000	-5.9259	23.3308	-5.9259
14.9850	-10.0000	16.6542	-10.0000	14.9850	-7.5926
16.6542	-10.0000	16.6542	-7.5926	14.9850	-7.5926
16.6542	-10.0000	18.3233	-10.0000	16.6542	-7.5926
18.3233	-10.0000	18.3233	-7.5926	16.6542	-7.5926
18.3233	-10.0000	19.9925	-10.0000	18.3233	-7.5926
19.9925	-10.0000	19.9925	-7.5926	18.3233	-7.5926
19.9925	-10.0000	21.6617	-10.0000	19.9925	-7.5926
21.6617	-10.0000	21.6617	-7.5926	19.9925	-7.5926
21.6617	-10.0000	23.3308	-10.0000	21.6617	-7.5926
23.3308	-10.0000	23.3308	-7.5926	21.6617	-7.5926
23.3308	-10.0000	25.0000	-10.0000	23.3308	-7.5926
25.0000	-10.0000	25.0000	-7.5926	23.3308	-7.5926
0.0116	-25.0000	0.0116	-17.5000	0.0000	-25.0000
0.0116	-17.5000	0.0000	-17.5000	0.0000	-25.0000

0.0116	-17.5000	0.0116	-10.0000	0.0000	-17.5000
0.0116	-10.0000	0.0000	-10.0000	0.0000	-17.5000
0.0324	-25.0000	0.0324	-17.5000	0.0116	-25.0000
0.0324	-17.5000	0.0116	-17.5000	0.0116	-25.0000
0.0324	-17.5000	0.0324	-10.0000	0.0116	-17.5000
0.0324	-10.0000	0.0116	-10.0000	0.0116	-17.5000
0.0625	-25.0000	0.0625	-17.5000	0.0324	-25.0000
0.0625	-17.5000	0.0324	-17.5000	0.0324	-25.0000
0.0625	-17.5000	0.0625	-10.0000	0.0324	-17.5000
0.0625	-10.0000	0.0324	-10.0000	0.0324	-17.5000
3.7931	-25.0000	3.7931	-17.5000	0.0625	-25.0000
3.7931	-17.5000	0.0625	-17.5000	0.0625	-25.0000
3.7931	-17.5000	3.7931	-10.0000	0.0625	-17.5000
3.7931	-10.0000	0.0625	-10.0000	0.0625	-17.5000
7.5237	-25.0000	7.5237	-17.5000	3.7931	-25.0000
7.5237	-17.5000	3.7931	-17.5000	3.7931	-25.0000
7.5237	-17.5000	7.5237	-10.0000	3.7931	-17.5000
7.5237	-10.0000	3.7931	-10.0000	3.7931	-17.5000
11.2544	-25.0000	11.2544	-17.5000	7.5237	-25.0000
11.2544	-17.5000	7.5237	-17.5000	7.5237	-25.0000
11.2544	-17.5000	11.2544	-10.0000	7.5237	-17.5000
11.2544	-10.0000	7.5237	-10.0000	7.5237	-17.5000
14.9850	-25.0000	14.9850	-17.5000	11.2544	-25.0000
14.9850	-17.5000	11.2544	-17.5000	11.2544	-25.0000
14.9850	-17.5000	14.9850	-10.0000	11.2544	-17.5000
14.9850	-10.0000	11.2544	-10.0000	11.2544	-17.5000
14.9850	-17.5000	16.6542	-17.5000	14.9850	-10.0000
16.6542	-17.5000	16.6542	-10.0000	14.9850	-10.0000
16.6542	-17.5000	18.3233	-17.5000	16.6542	-10.0000
18.3233	-17.5000	18.3233	-10.0000	16.6542	-10.0000
18.3233	-17.5000	19.9925	-17.5000	18.3233	-10.0000
19.9925	-17.5000	19.9925	-10.0000	18.3233	-10.0000
19.9925	-17.5000	21.6617	-17.5000	19.9925	-10.0000
21.6617	-17.5000	21.6617	-10.0000	19.9925	-10.0000
21.6617	-17.5000	23.3308	-17.5000	21.6617	-10.0000
23.3308	-17.5000	23.3308	-10.0000	21.6617	-10.0000
23.3308	-17.5000	25.0000	-17.5000	23.3308	-10.0000
25.0000	-17.5000	25.0000	-10.0000	23.3308	-10.0000
14.9850	-25.0000	16.6542	-25.0000	14.9850	-17.5000
16.6542	-25.0000	16.6542	-17.5000	14.9850	-17.5000
16.6542	-25.0000	18.3233	-25.0000	16.6542	-17.5000
18.3233	-25.0000	18.3233	-17.5000	16.6542	-17.5000
18.3233	-25.0000	19.9925	-25.0000	18.3233	-17.5000
19.9925	-25.0000	19.9925	-17.5000	18.3233	-17.5000
19.9925	-25.0000	21.6617	-25.0000	19.9925	-17.5000
21.6617	-25.0000	21.6617	-17.5000	19.9925	-17.5000
21.6617	-25.0000	23.3308	-25.0000	21.6617	-17.5000
23.3308	-25.0000	23.3308	-17.5000	21.6617	-17.5000
23.3308	-25.0000	25.0000	-25.0000	23.3308	-17.5000
25.0000	-25.0000	25.0000	-17.5000	23.3308	-17.5000

El ancho de banda es 49 ;Fue calculado en el elemento 147

Fin del programa.

-----

Datos para el programa FINITO.

Programa Finito.

Caso de deformaciones planas

N° de desplazamientos globales

316

N° de elementos

258

Ancho de banda

98

Modulo de elasticidad

2.5E13

Razon de Poisson

0.25

Espesor de los elementos

0.01

-----

Fuerzas de nodo conocidas

Teclar los numeros de desplazamiento y los valores de las fuerzas que son conocidas.

(Este patron seguira hasta que se teclee un valor negativo o cero)

0

Desplazamientos nodales conocidos

Teclar el N° y el valor del desplazamiento , en ese orden

El ciclo terminara hasta que se teclee un numero negativo o cero.

1,0	26,0	82,0
9,0	65,0	89,0
10,0	66,0	90,0
17,0	73,0	91,0.01
18,0	74,0	92,0.01
25,0	81,0	93,0.01



---

94,0.01	163,0	189,0.01
95,0.01	164,0	190,0.01
96,0.01	175,0	199,0.01
140,0	176,0	200,0.01
151,0	187,0	209,0.01
152,0	188,0	210,0.01

---

229,0	255,0	261,0
230,0	256,0	262,0
241,0	257,0	265,0.01
242,0	258,0	266,0.01
257,0	259,0	267,0
254,0	260,0	268,0

---

271,0.01	281,0	303,0
272,0.01	282,0	304,0
273,0	285,0	305,0
274,0	286,0	306,0
277,0	289,0	307,0
278,0	290,0	308,0

---

309,0	315,0
310,0	316,0
311,0	0
312,0	
313,0	
314,0	

---

Con estos datos, FINITO calcula los desplazamientos de cada uno de los nodos de los elementos triangulares que conforman al modelo.

Los resultados que arroja el programa FINITO -contenidos en el archivo "resulta2.dat"- representan los desplazamientos de los nodos que forman el modelo.

Debido a que este estudio está dedicado a los desplazamientos ocurridos en la superficie de la Tierra, de éstos solo se eligen los correspondientes a los nodos superficiales para que sean graficados.

Los nodos superficiales son los números 1,2,3,4,17,18,19,20,24,28,32,65,66,67,68,69 y 70. Los desplazamientos horizontal y vertical del nodo 1 quedan representados por U(2i-1) y U(2i), respectivamente. Entonces, los desplazamientos superficiales correspondientes al modelo de un dique de lava situado a 5 km de profundidad, en unidades de km, son:

U(1) = 0.00000000	U(33) = -0.00004756
U(2) = 0.00064255	U(34) = 0.00069519
U(3) = -0.00000963	U(35) = -0.00004173
U(4) = 0.00064391	U(36) = 0.00070407
U(5) = -0.00002486	U(37) = -0.00003564
U(6) = 0.00065190	U(38) = 0.00071049
U(7) = -0.00004295	U(39) = -0.00002955
U(8) = 0.00067447	U(40) = 0.00071692

U(47) = 0.00181284	U(131) = 0.00313632
U(48) = 0.00247457	U(132) = 0.00333809
U(55) = 0.00278360	U(133) = 0.00293344
U(56) = 0.00336865	U(134) = 0.00268651
U(63) = 0.00309157	U(135) = 0.00242412
U(64) = 0.00366879	U(136) = 0.00192042
U(129) = 0.00313081	U(137) = 0.00159482
U(130) = 0.00351118	U(138) = 0.00115314

U(139) = 0.00007340	U(140) = 0.00000000
---------------------	---------------------

-----

Para poder graficar los desplazamientos es necesario saber la distancia (i.e. coordenada x) a la que se encuentra cada uno de los nodos superficiales con respecto al origen. Esta información se obtiene al buscar el número de nodo requerido en el archivo "Nodo.dat" y ver que coordenadas le corresponden en "Coordena.dat".

A continuación se muestran las tablas de valores de los desplazamientos correspondientes al modelo analizado, así como sus graficas correspondientes. En estas tablas y en las siguientes, los desplazamientos tienen una escala de  $10^{-3}$  km.

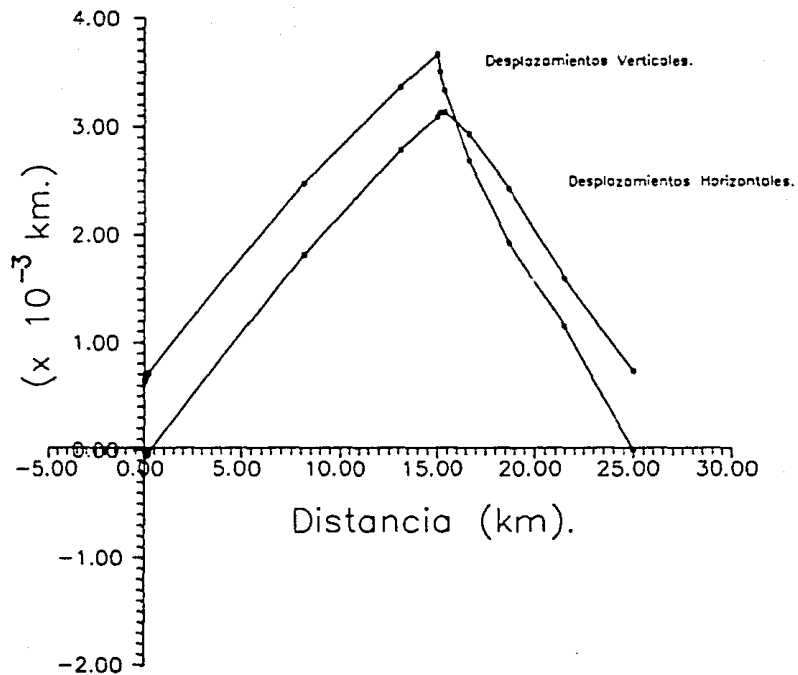
Dique situado a 5.0 km de profundidad.

Desplazamientos Horizontales.

X	$\Delta d$
0.000000	0.000000
0.011600	-0.009630
0.032400	-0.024859
0.062500	-0.042949
0.088100	-0.047565
0.113800	-0.041732
0.139400	-0.035642
0.163000	-0.029550
8.144200	1.812843
13.084200	2.783601
14.985000	3.091574
15.109600	3.130811
15.356000	3.136318
16.654200	2.933444
18.694300	2.424125
21.476200	1.594819
25.000000	0.734011

Desplazamientos Verticales.

X	$\Delta h$
0.000000	0.642552
0.011600	0.643915
0.032400	0.651903
0.062500	0.674474
0.088100	0.695191
0.113800	0.704071
0.139400	0.710495
0.165000	0.716925
8.144200	2.474573
13.084200	3.368650
14.985000	3.668790
15.109600	3.511182
15.356000	3.338096
16.654200	2.686516
18.694300	1.920425
21.476200	1.153140
25.000000	0.000000



Desplazamientos Verticales y Horizontales. Dique a 5 km de profundidad.

Para los modelos de diques a 2.5 km y a 10 km de profundidad, se emplea el procedimiento detallado con anterioridad.

A continuación se presentan las graficas correspondientes a dichos modelos.

-----

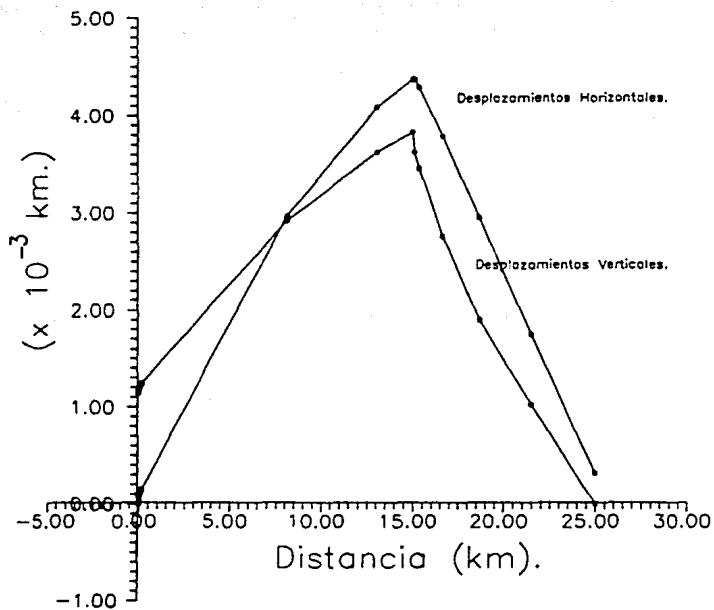
Dique situado a 2.5 km de profundidad.

Desplazamientos Horizontales.

X	$\Delta d$
0.000000	0.000000
0.011600	0.012279
0.032400	0.038135
0.062500	0.082983
0.088100	0.106803
0.113800	0.123400
0.139400	0.134659
0.165000	0.145932
8.144200	2.967099
13.084200	4.087547
14.985000	4.372080
15.109600	4.372905
15.356000	4.287404
16.654200	3.786374
18.694300	2.951232
21.476200	1.750887
25.000000	0.317696

Desplazamientos Verticales.

X	$\Delta h$
0.000000	1.144386
0.011600	1.146274
0.032400	1.159039
0.062500	1.196614
0.088100	1.220938
0.113800	1.231410
0.139400	1.238006
0.165000	1.244610
8.144200	2.916614
13.084200	3.623364
14.985000	3.829569
15.109600	3.622051
15.356000	3.454167
16.654200	2.761012
18.694300	1.896822
21.476200	1.028600
25.000000	0.000000



Desplazamientos Verticales y Horizontales. Dique a 2.5 km de profundidad.

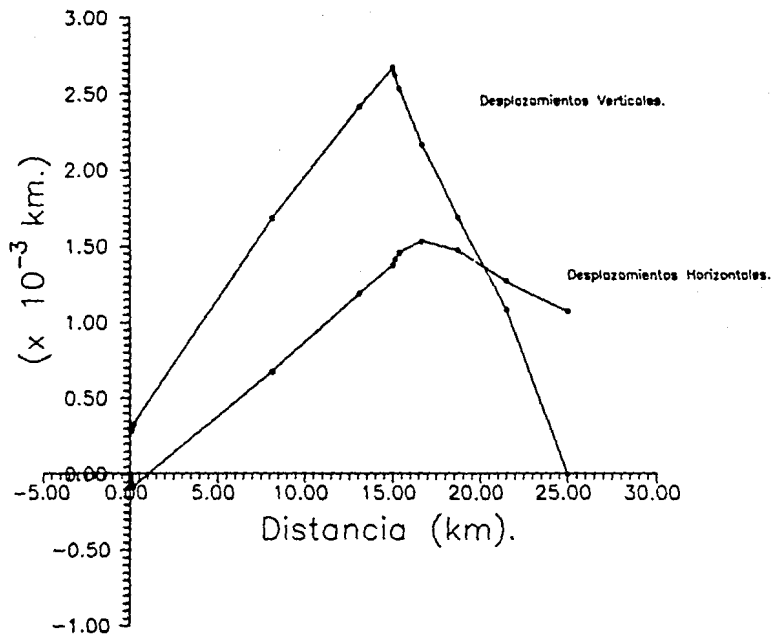
Dique situado a 10 km de profundidad.

Desplazamientos Horizontales.

X	$\Delta d$
0.000000	0.000000
0.011600	-0.013833
0.032400	-0.037790
0.062500	-0.070806
0.088100	-0.083328
0.113800	-0.083658
0.139400	-0.081880
0.165000	-0.080104
8.144200	0.676310
13.084200	1.191752
14.985000	1.377300
15.109600	1.413110
15.356000	1.459297
16.654200	1.534577
18.694300	1.475852
21.476200	1.270864
25.000000	1.070096

Desplazamientos Verticales.

X	$\Delta h$
0.000000	0.283935
0.011600	0.284718
0.032400	0.288749
0.062500	0.299637
0.088100	0.312590
0.113800	0.318891
0.139400	0.323748
0.165000	0.328608
8.144200	1.685166
13.084200	2.417040
14.985000	2.671372
15.109600	2.625580
15.356000	2.535428
16.654200	2.169394
18.694300	1.690831
21.496201	1.081011
25.000000	0.000000



Desplazamientos Verticales y Horizontales. Dique a 10 km de profundidad.



## APENDICE III

### MODELO DE MOGI

El modelo de Mogi (1958) por su simpleza, es muy utilizado para obtener estimaciones de la deformación en terrenos volcánicos. A continuación se presenta un programa escrito en FORTRAN 77 que permite el cálculo automático de los resultados de este modelo.

Al principio del programa se pide al usuario que proporcione la profundidad de la fuente de presión. A continuación se entra a un ciclo en donde se calculan los desplazamientos horizontal y vertical así como la inclinación y las deformaciones radial y tangencial con respecto a  $\Delta h_0$  -que es el valor del desplazamiento vertical, en el punto de la superficie colocado exactamente sobre el centro de la fuente de presión- para distancias en la superficie de 0 a 25 km a partir de la fuente; i.e. se calculan las fórmulas (1-A), (2-A), (3-A), (4-A) y (5-A) del capítulo III. Después, los valores obtenidos para  $\Delta h$ ,  $\Delta d$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon_r$  y  $\epsilon_t$  se almacenan en sendos archivos de dos columnas cada uno, una para la distancia y otra según la fórmula calculada.

Con este programa se obtuvieron los valores de las fórmulas para las profundidades de 5, 7.5 y 12.5 km, i.e. las mismas que presentan los centros de los diques situados a 2.5, 5 y 10 km de profundidad (Todos los diques tienen una longitud de 5 km). Esto se realizó con el propósito de establecer una comparación entre los desplazamientos del suelo inducidos por una fuente de presión esférica y aquellos ocasionados por la presencia de un dique rectangular, si bien teniendo en cuenta que en el modelo de Mogi se supone una superficie plana sin ningún accidente topográfico, al contrario que en el modelo de elementos finitos donde se ha supuesto un edificio volcánico en una llanura.

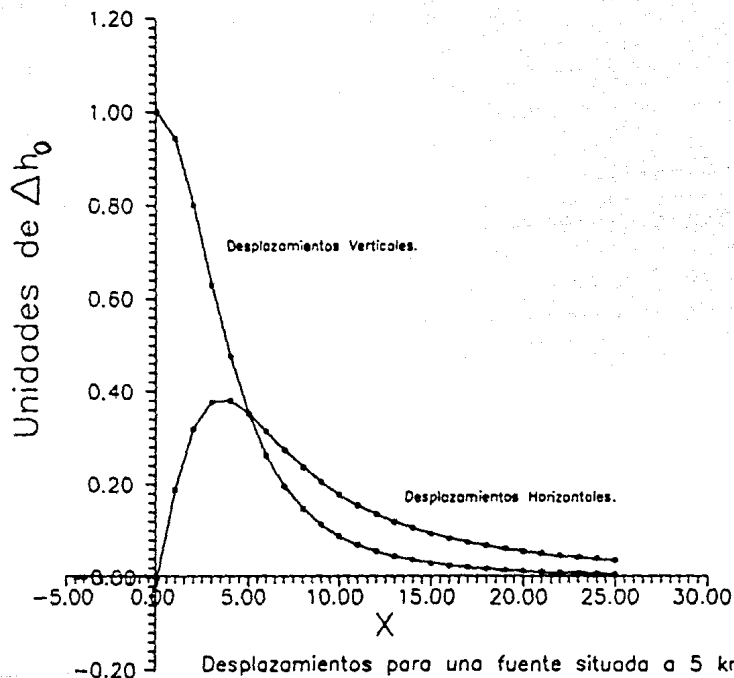
Comparando las gráficas que a continuación se muestran con las presentadas en el apéndice anterior, se observa que los desplazamientos horizontales inducidos en un terreno llano por una fuente esférica son menores que aquellos que lo son por un dique vertical situado debajo de un edificio volcánico, todo ello considerando que los desplazamientos verticales en ambos casos son

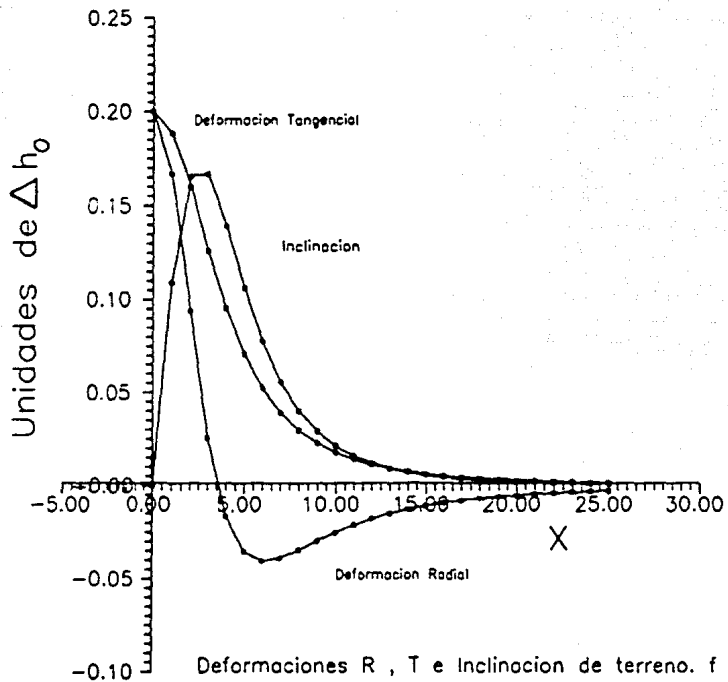
exactamente iguales. Sin embargo, la suposición anterior no puede comprobarse en modo alguno, o incluso decir si es falsa, porque los desplazamientos en el modelo de Mogi están graduados en una escala que depende de  $\Delta h_0$  y esta cantidad depende de  $\mu$ , la rigidez de la corteza; P, la presión sobre las paredes de la fuente; f, la profundidad del centro de la esfera y de a, el radio de la misma. De estas cantidades, la presión no puede conocerse a priori porque es un dato que precisamente se determina gracias a los valores obtenidos de los desplazamientos -el radio a se puede suponer como  $f \approx 10a$  (Yokoyama, 1971)-. El único modo de poder comparar los dos modelos, es disponiendo de datos reales observados de deformación de terreno y de esta manera observar qué tipo de fuente, ya sea un dique rectangular o una esfera, y qué profundidad de la misma se ajusta mejor a los datos recabados.

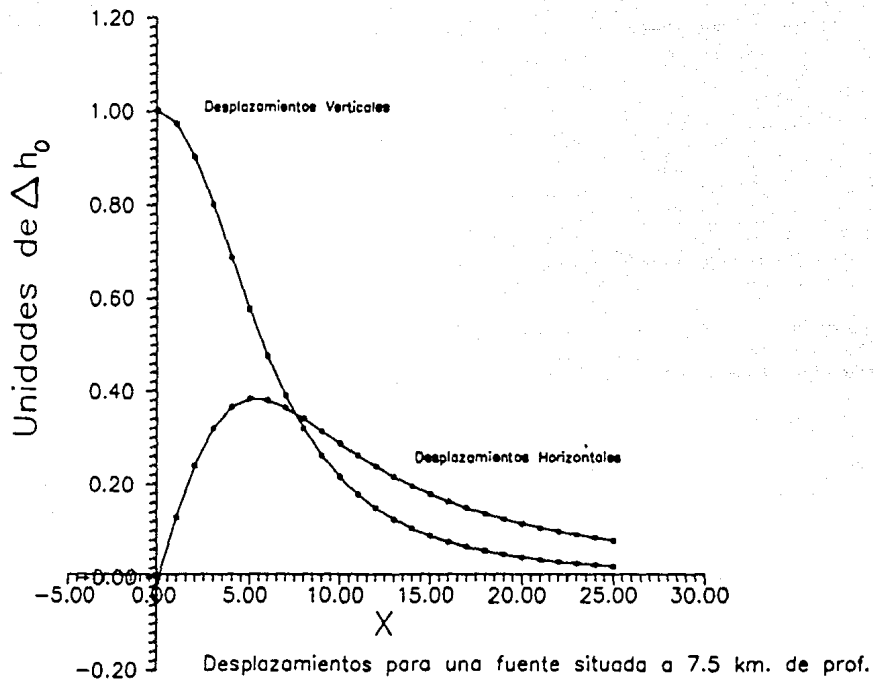
```

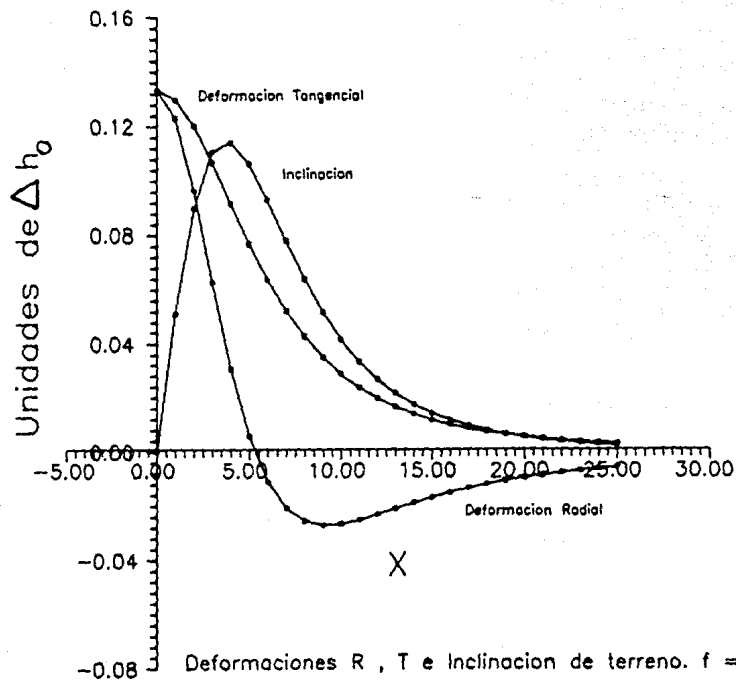
C   programa para calcular los desplazamientos del terreno
C   producidos por una esfera segun el modelo de Mogi.
   dimension h(50),v(50),d(50),er(50),et(50)
   write(*,*)
   write(*,*) 'Modelo de Mogi'
   write(*,*)
   write(*,*)
   write(*,*) 'Profundidad del centro de la esfera'
   read(*,*) f
   write(*,*)
   do 20 i =1,26
   i1=i-1
   R1 = ((f**2) + ((i1)**2))**(3.0/2.0)
   R2 = ((f**2) + ((i1)**2))**(5.0/2.0)
   h(i1) = (i1*(f**2))/R1
   v(i1) = (f**3)/R1
   er(i1) = (f**2)*((f**2) - 2*(i1**2))/R2
   et(i1) = (f**2)/R1
   d(i1) = (3*(f**3)*i1)/R2
20  continue
   write(*,*)
   open(5, file = 'vert.dat',status = 'new')
   write(5,30) (i-1,v(i-1),i=1,26)
30  format(I4,7X,F20.10)
   close(5,status='keep')
   open(6, file = 'hor.dat',status = 'new')
   write(6,40) (i-1,h(i-1),i=1,26)
40  format(I4,7X,F20.10)
   close(6,status='keep')
   open(7, file = 'incl.dat',status = 'new')
   write(7,50) (i-1,d(i-1),i=1,26)
50  format(I4,7X,F20.10)
   close(7,status='keep')
   open(8, file = 'def-r.dat',status = 'new')
   write(8,60) (i-1,er(i-1),i=1,26)
60  format(I4,7X,F20.10)
   close(8,status='keep')
   open(9, file = 'def-t.dat',status = 'new')
   write(9,70) (i-1,et(i-1),i=1,26)
70  format(I4,7X,F20.10)
   write(*,*)
   write(*,*) 'Fin del programa'
   write(*,*)
   stop
   end

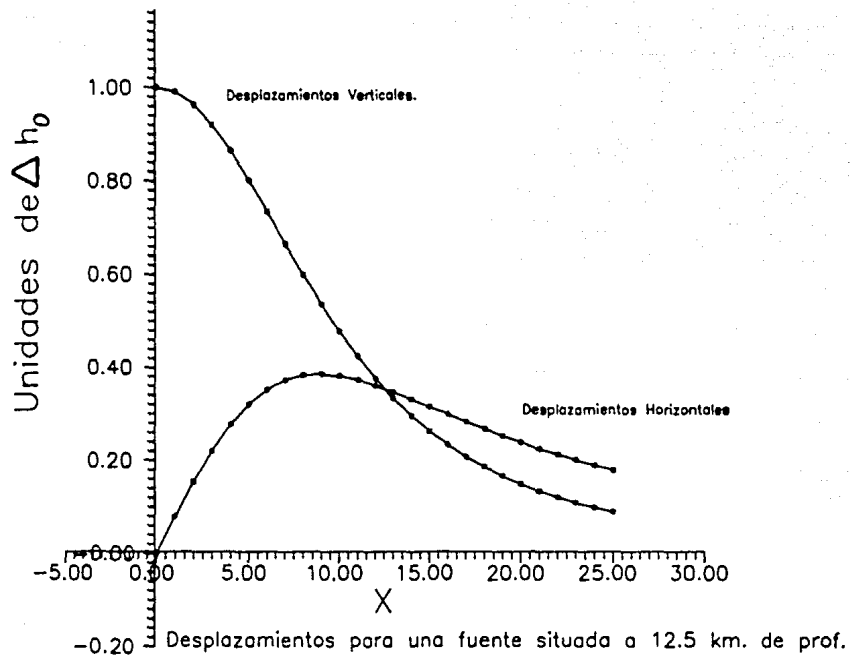
```



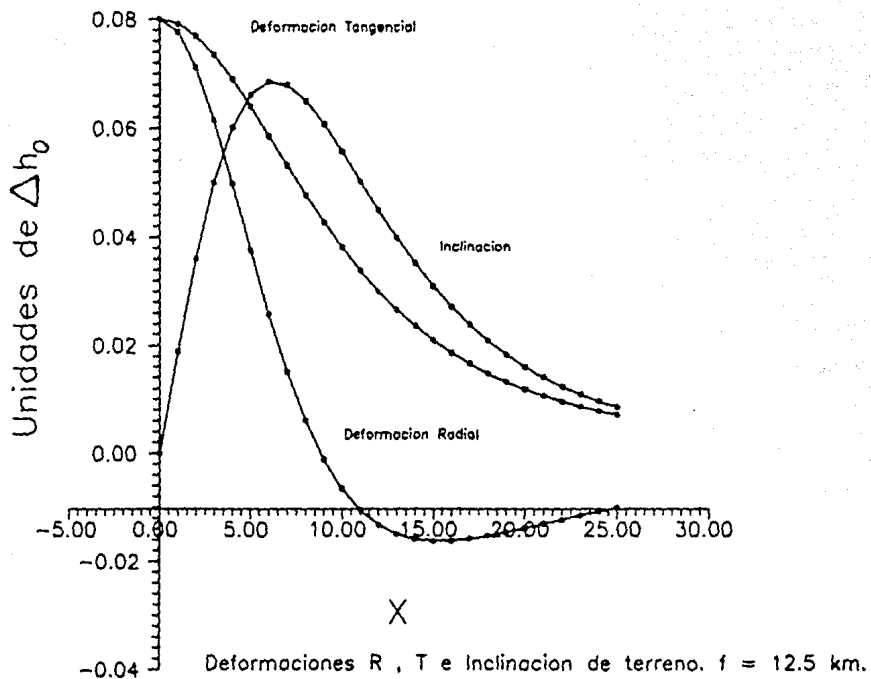












## BIBLIOGRAFIA

- Banks, N.G., 1984. *Measuring and interpreting deformation of volcanoes*. UNESCO Training Course - Legaspi City, Manila Philippines. (Rough draft). November 15- December 7, 1984.
- Benioff, H., 1965. *A liquid mercury pendulum seismograph. (abstract)*. Trans.Am.Geophys.Union. Vol. 46, # 1, pag. 149.
- Bonasia, V. y F. Pingue, 1981. *Ground deformations on Mt. Vesuvius from 1947 to 1981*. Bull.Volcanol. Vol. 44, # 3, pag. 513-520.
- Bouchard, H. y F.H. Moffit, 1965. *Surveying*. Fifth. edition. International Textbook Company. Scranton Pennsylvania.
- Decker, R.W., 1965. *Vertical ground displacements over the East rift zone of Kilauea Volcano, Hawaii. (abstract)*. Trans.Am.Geophys.Union. Vol. 46, # 1, pag. 185.
- Decker, R.W., D.F. Hill y T.L. Wright, 1966. *Deformation measurements on Kilauea Volcano, Hawaii*. Bull.Volcanol. Vol. 29, pag. 721-732.
- De la Cruz, S., Z. Jiménez, F. A. Nava, J. M. Espindola, M. Mena, E. Ramos, I. Yokoyama, B. Márquez y N. Segovia, 1988. *Primera etapa de instalación de la red de monitoreo del Volcán de Colima*. Comunicaciones Técnicas. Serie: Datos, Instrumentación y Desarrollo # 4. Instituto de Geofísica, UNAM.
- Dieterich, J.H. y R.W. Decker, 1975. *Finite element modeling of surface deformation associated with volcanism*. Jour. Geophys. Res., Vol. 80, # 29, pag. 4094-4102.
- Dieterich, J.H. y E.T. Onat, 1969. *Slow finite deformations of viscous solids*. Jour.Geophys.Res. Vol. 74, # 8, pag. 2081-2088.

- Distomat Wild DI3000 Technical Data.* Folleto impreso por Wild Heerbrugg Ltd., 1985.
- Dvorak, J. y A. Okamura, 1981. *Analysis of surface deformation data, Kilauea Volcano, Hawaii. (abstract).* Eos, Trans.Am.Geophys.Union. Vol. 62, # 45, pag. 1071.
- Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ., 1941. *Results of re-triangulation in Miyake-sima, 1941.* Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 19, # 3, pag. 544-547.
- Eaton, I.P., 1959. *A portable water-tube tiltmeter.* Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 49, # 4, pag. 301-316.
- Fiske, R.S., 1969. *Anatomy of an active volcano - Kilauea. (abstract).* Eos, Trans.Am.Geophys.Union. Vol. 50, # 4, pag. 113.
- Fiske, R.S. y W.T. Kinoshita, 1969. *Inflation of Kilauea Volcano prior to its 1967-1968 eruption.* Science, Vol. 165, # 3891, pag. 341-349.
- Frank, F.C., 1966. *Deduction of Earth strains from survey data.* Bull. Seismol. Soc. Am. Vol. 56, # 1, pag. 35-42.
- Geodimeter 440. Technical Specification.* Folleto impreso por Geotronics AB, 1986.
- Hajela, D., 1990. *Obtaining centimeter-precision heights by GPS observations over small areas.* GPS World. Vol. 1, # 1, pag. 55-59.
- Hagiwara, T., 1947. *Observation of changes in the inclination of the Earth's surface at Mt. Tsukuba. (Third report).* Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 25, pag. 27-31.
- Hansen, S., 1968. *A highly stable geophysical tiltmeter. (abstract)* Trans. Am. Geophys. Union. Vol. 49, # 4, pag. 664.

- Higashida, S., 1972. *Topografía General*. S.E.P. México D.F., México.
- Holand, I., 1973. *Application of Finite Element Methods to Stress Analysis*. En : J.G. Gram (Editor). *Numerical solution of partial differential equations*. D. Reidel Publishing Company.
- Ishimoto, M., 1928. *Construction d'un pendule horizontal de quartz et observations sur les variations de l'inclinaison de la surface terrestre*. Jap. Jour. Astro. Geophys. Vol. 6, pag. 85-110.
- Jackson, D.B y D.A. Swanson, 1970. *1968-70 Kilauea deformation : East rift. (abstract)*. Eos, Trans. Am. Geophys. Union. Vol. 51, #4, pag. 441.
- Kinoshita, W.T., R.S. Fiske y T.L. Wright, 1968. *Ground deformation during the November 1967 Kilauea summit eruption. (abstract)* Trans. Am. Geophys. Union. Vol. 49, # 4, pag. 664.
- Kinoshita, W.T., D.H. Swanson y D.B. Jackson, 1974. *The measurement of crustal deformation related to volcanic activity at Kilauea Volcano, Hawaii*. En : L. Civetta, P. Gasperini, G. Luongo y A. Rapola. (Editores). *Physical Volcanology*. Elsevier, Amsterdam.
- Kissam, P., 1966. *Topografía para Ingenieros*. Mc. Graw Hill Book Company, 1956. E.U. Traducido por Ediciones Castilla, S.A. Madrid, España.
- Lo Bascio, A., 1968. *Considerations on tilt observations at the Vesuvius Observatory*. Bull. Volcanol. Vol. 32, pag. 377-381.
- Minakami, T., 1935. *The explosive activities of Volcano Asama in 1935 (Part I)*. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 13, pag. 629-643.

- Minakami, T. y K. Iwama, 1946. *Recent activity of Volcano Sakura-sima (I)*. (in *japanese*). Bull. Earth. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 24, pag. 171-178.
- Minakami, T. y S. Sakuma, 1946. *Recent activity of Volcano Sakura-sima (II)*. (in *japanese*). Bull. Earth. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 24, pag. 179-184.
- Mogi, K., 1958. *Relations of the eruptions of various volcanoes and the deformations of the ground around them*. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 36, pag. 98-134.
- Moore, J.G. y H.L. Krivoy, 1964. *The 1962 flank eruption of Kilauea Volcano and structure of the East rift zone*. Jour. Geophys. Res. Vol. 69, # 10, pag. 2033-2044.
- Mueller, I.I. y K.H. Ramsayer, 1979. *Introduction to Surveying*. Frederick Ungar Publishing Company. New York.
- Omote, S., 1942. *Crustal deformations in Miyake-sima Island that accompanied the volcano activities in 1940*. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 20, pag. 127-140.
- Pequeño Larousse de Ciencias y Técnicas*. Versión castellana de Tomás de Galiana Mingot. Editorial Larousse, 1980.
- Pollard, D.D., P.T. Delaney, W.A. Duffield, E.T. Endo y A.T. Okamura, 1983. *Surface deformation in volcanic rift zones*. Tectonophysics. Vol. 94, pag. 541-584.
- Press, F., 1965. *Resonant Vibrations of the Earth*. En : Bruce A. Bolt (Editor). *Readings from Scientific American. Earthquakes and Volcanoes*. W.H. Freeman and Company, 1979.
- Segerlind, L.J., 1976. *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, New York.

- Sokolnikoff, I.S., 1946. *Mathematical Theory of Elasticity*. First Edition. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London.
- Swanson, D.A. y D.B. Jackson, 1970. *1968-70 Kilauea deformation : Summit. (abstract)*. Eos, Trans. Am. Geophys. Union. Vol. 51, #4, pag. 441.
- Takahasi, R., 1933. *Tilt of the Earth's crust observed at the Asama Volcano*. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 11, pag. 25-36.
- Takahasi, R. y T. Minakami, 1937. *Tilt observations during the recent activities of Volcano Asama*. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 15, # 2, pag. 463-491.
- Thompson, M.E. y H.B. Janes, 1967. *Correction of atmospheric errors in electronic measurements of Earth crust movements*. Bull. Seis. Soc. Am. Vol. 57, # 4, pag. 641-655.
- Timoshenko, S., 1934. *Theory of Elasticity*. First Edition. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London.
- Tryggvason, E., 1968. *Measurement of surface deformation in Iceland by precise levelling*. Jour. Geophys. Res. Vol. 73, # 22, pag. 7039-7050.
- Tryggvason, E., 1970. *Surface deformation on and near three volcanoes in Iceland. (abstract)*. Eos, Trans. Am. Geophys. Union. Vol 51, # 4, pag. 441.
- Tryggvason, E., 1989. *Ground deformation in Askja, Iceland : its course and possible relation to flow of the mantle plume*. Jour. Volcanol. Geoth. Res. Vol. 39, pag. 61-71.
- Tsuboi, C., 1930. *Block movements as revealed by means of precise levellings in some earthquake districts of Japan*. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ. Vol. 7, pag. 103-114.

- Tsuboi, C., 1933. *Investigation on the deformation of Earth's crust found by precise geodetic means.* Jap. Jour. Astron. Geophys. Vol. 10, pag. 93-248.
- Walsh, J.B. y R.W. Decker, 1971. *Surface deformation associated with volcanism.* Jour. Geophys. Res. Vol. 76, # 14, pag. 3291-3302.
- Werkmeister, F., 1947. *Topografía II.* Segunda Edición. Editorial Labor, S.A. Barcelona, España.
- Yokoyama, I., 1971. *A model for the crustal deformations around volcanoes.* Jour. Physics. Earth. Vol. 19, # 3, pag. 199-207.
- Yokoyama, I., 1974. *Crustal deformations associated with volcanic activities.* Tectonophysics. Vol. 23, pag. 349-360.
- Yokoyama, I., 1986. *Crustal deformation caused by the 1914 eruption of Sakurajima Volcano, Japan and its secular changes.* Jour. Volcanol. and Geoth. Res. Vol. 30, pag. 283-302.
- Yokoyama, I., H. Yamashita, H. Watanabe y H.M. Okada, 1981. *Geophysical characteristics of dacite volcanism - The 1977-1978 eruption of Usu Volcano.* Jour. Volcanol. and Geoth. Res. Vol. 9, pag. 335-358.
- Zienkiewicz, O.C., 1967. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.* First Edition. McGraw-Hill Publishing Company Limited, London.
- Zienkiewicz, O.C., 1971. *The Finite Element Method in Engineering Science.* Second Edition. Mc. Graw Hill Publishing Company Limited, London.