7
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FALLA DE ORIGEN

SISTEMA INTERACTIVO PARA LA CONSULTA DE TABLAS ESTADISTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P r e s e n t a

SERGIO ANDRADE RIOS

Mexico D. F.   Septiembre 1991

SISTEMA INTERACTIVO PARA LA CONSULTA DE TABLAS ESTADISTICAS

TESISTA : SERGIO ANDRADE RIOS

ASESOR : DR. MANUEL MENDOZA RAMIREZ

I N D I C E

CAPITULO 1.

I N T R O D U C C I O N.

Las técnicas de Análisis Estadístico se utilizan cada vez con mayor frecuencia. En diferentes contextos se considera conveniente recolectar información cuantitativa y utilizar los procedimientos que ofrece la Estadística para explorar y organizar los datos. Cuando la naturaleza de la información lo permite, la Estadística se emplea además para realizar inferencias : pronósticos, contraste de hipótesis, estimaciones, etc.. Para llevar a cabo estas inferencias, o bien para evaluarlas, típicamente se requiere el cálculo de alguna función de distribución de probabilidades.

Ocurre que una buena parte de las funciones de distribución usuales deben ser evaluadas a través de métodos numéricos apropiados. En consecuencia, se han popularizado las llamadas Tablas Estadísticas. Estos tabulados que con frecuencia aparecen como apéndice en los textos de Estadística, simplemente presentan algunas evaluaciones útiles de las distribuciones más comunes y tradicionalmente han sido suficientes para implementar los métodos estadísticos.

Más recientemente,. con la aparición de las microcomputadoras, se cuenta con una variedad de programas o paquetes de Análisis Estadístico que incluyen las rutinas de cálculo de probabilidades como parte integral de los propios paquetes.

El propósito de este trabajo es presentar un sistema interactivo de consulta rápida de distribuciones que ha sido desarrollado como un apoyo a la enseñanza de la Estadística. Para producir el sistema se realizó una comparación de métodos numéricos y algoritmos. Habiendo seleccionado los algoritmos se diseñó un sistema que fuera de fácil acceso y eficiente en términos de rapidez y precisión. Todos los algoritmos utilizados trabajan con una exactitud mayor o igual a 4 dígitos decimales correctos y en la mayor parte de los casos se obtiene al menos 6 dígitos sin error.

En este trabajo se incluye, en el capítulo 2, una descripción general de algunos métodos numéricos que son suceptibles de aplicarse en la evaluación de probabilidades y cuantiles de una función de distribución.

En los capítulos 3 y 4 se presentan los algoritmos particulares que se consideraron para cada distribución específica. En cada caso esta información se acompaña de una nota técnica sobre la distribución correspondiente que incluye : Definición, Aspectos Históricos, Propiedades y Relación con otras distribuciones. El capítulo 3 se refiere a las distribuciones discretas mientras que el capítulo 4 incluye los modelos continuos.

Por último en el capítulo 5 se describe la estructura y el funcionamiento de TESSAR (el sistema).

CAPITULO 2.

M E T O D O S   G E N E R A L E S.

El propósito de este capitulo es presentar algunos de los diferentes métodos que se pueden utilizar para calcular probabilidades o cuantiles de diversas distribuciones de Probabilidad. Los métodos descritos no son los únicos que existen en la literatura, pero son frecuentemente utilizados y aplicados en este trabajo.

2.1) DETERMINACION DE RAICES NUMERICAS .

Un problema común en Estadistica es encontrar los cuantiles, x_p, de una distribución, $F(x)$, dada una cierta probabilidad p. Suponiendo que se cuenta con un buen algoritmo para evaluar $F(x)$, dado x, entonces el problema seria encontrar la raiz de $h(x)$, donde

$$h(x) = F(x) - p .$$

Hay diversos métodos disponibles para resolver este problema de los cuales describimos solamente cuatro, esto es debido a que aparecen en los algoritmos que se aplican en este trabajo. Todos ellos son iterativos y encuentran una nueva aproximación, x_{i+1}, dado x_i. De esta manera se obtiene una sucesión $\{x_i\}$ que termina cuando se cumple un determinado criterio de convergencia. Algunos ejemplos de uso frecuente son los siguientes :

(2.1) $\quad |x_i - x_{i-1}| < \varepsilon,$

(2.2) $$\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon, \qquad x_i \neq 0$$

(2.3) $$|h(x)| < \varepsilon,$$

para un nivel de precisión ε.

2.1.1) METODO DE LA BISECCION.

Este método está basado en el teorema del valor intermedio (Leithold, 1982, Pag.151). La idea es empezar con el intervalo $[x_i, y_i]$ tal que $h(x_i) \cdot h(y_i) < 0$. Sea z_i igual al punto medio de este intervalo, es decir,

$$z_i = \frac{y_i + x_i}{2} .$$

En este punto se evalúa la función, esto es, se calcula $h(z_i)$. Si $h(z_i) = 0$, entonces z_i es la raiz buscada; de lo contario $h(z_i)$ tiene el mismo signo que $h(x_i)$ o el mismo signo de $h(y_i)$. Si $h(z_i) \cdot h(x_i) < 0$, entonces $x_{i+1} = x_i$ y $y_{i+1} = z_i$; de otro modo $x_{i+1} = z_i$ y $y_{i+1} = y_i$. Entonces se repite este proceso con nuevo intervalo $[x_{i+1}, y_{i+1}]$ hasta que se satisfaga el criterio de convergencia.

2.1.2) METODO DE NEWTON-RAPHSON.

Este método (Burden, Faires and Reynolds, 1981, Cap.2) está basado en la serie de Taylor. Si h es una función de clase C^2 en el intervalo $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ es una aproximación a la raiz, x_p, tal que $h'(x_0) \neq 0$ y $|x_0 - x_p|$ es 'pequeño', entonces al considerar los primeros tres términos de la serie de Taylor para $h(x)$ alrededor de x_0 se tiene que

$$h(x) = h(x_0) + (x - x_0)\, h'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, h''(\xi(x))$$

donde $\xi(x)$ está entre x y x_0. Como $h(x_p) = 0$, sucede que

$$0 = h(x_0) + (x_p - x_0)\, h'(x_0) + \frac{(x_p - x_0)^2}{2\,!}\, h''(\xi(x_p)) .$$

El metodo supone que $|x_o - x_p|$ es 'pequeño', consecuentemente $|x_o - x_p|^2$ es una cantidad cercana a cero; entonces

$$0 \cong h(x_o) + (x_p - x_o)\, h'(x_o) .$$

Resolviendo esta ecuación para x_p obtenemos :

$$\text{(2.4)} \qquad x_p \cong x_o - \frac{h(x_o)}{h'(x_o)}$$

$$= x_1 .$$

Por lo tanto, x_1 debe ser una mejor aproximación a x_p que x_o. Aplicando (2.4), en forma repetida, se genera una sucesión $\{x_n\}$ definida por :

$$\text{(2.5)} \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{h(x_{n-1})}{h'(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1.$$

que se termina cuando se alcanza la condición prevista en el criterio de convergencia.

2.1.3) METODO DE LA SECANTE.

Este método (Burden, Faires and Reynolds, 1981, Cap.2) es una variación del de Newton-Raphson y utiliza, para la determinación de x_n, los valores de x_{n-1} y x_{n-2}. Está basado en el siguiente argumento : Por definición,

$$h'(x_{n-1}) = \lim_{x \to x_{n-1}} \frac{h(x) - h(x_{n-1})}{x - x_{n-1}} .$$

Si $x = x_{n-2}$, entonces

$$h'(x_{n-1}) \cong \frac{h(x_{n-2}) - h(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}$$

$$= \frac{h(x_{n-1}) - h(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} .$$

Usando esta aproximación para $h'(x_{n-1})$ en la fórmula de Newton-Raphson se tiene :

$$(2.6)\qquad x_n = x_{n-1} - \frac{h(x_{n-1})\,(x_{n-1} - x_{n-2})}{h(x_{n-1}) - h(x_{n-2})}$$

que se conoce como la fórmula del método de la secante, para encontrar raices de una función.

2.1.4) METODO DE LA REGLA FALSA.

Este es otro método (Burden, Faires and Reynolds, 1981, Cap.2) para encontrar una raiz de la ecuación $h(x)=0$, con $x \in [a,b]$. El método es similar a la técnica de bisección en lo que se refiere a la construcción de una sucesión de intervalos $[a_i,b_i]$ y también al método de la secante por la forma en que calcula las nuevas aproximaciones en cada intervalo.

Sea $x \in [a_i,b_i]$, tal que $h(x)=0$. A partir de los valores a_i y b_i se obtiene el valor x_i por el método de la secante. Si $h(x_i)\cdot h(a_i)<0$, se define $a_{i+1}= a_i$ y $b_{i+1}= x_i$ en otro caso, se define $a_{i+1}= x_i$ y $b_{i+1}= b_i$.La aplicación repetida de este procedimiento genera la sucesión de aproximaciones para x.

2.2) **SERIE DE TAYLOR.**

Este método ha sido desarrollado especificamente para encontrar los cuantiles de una función de distribución, F(y), con la propiedad de que existan las derivadas de todos los ordenes requeridos para la función inversa de F(y).

La expansión en serie de Taylor de g(x) alrededor de x_o está dada por :

$$(2.7)\qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)}{n\,!}\,(x - x_o)^n .$$

Este desarrollo se puede utilizar de la siguiente manera. Suponga que $\{F_n(y)\}$ es una sucesión de funciones de distribución que converge a F(y) cuando n aumenta. Si x_n y u son los correspondientes cuantiles de orden p para F_n y F respectivamente, entonces

$$(2.8) \quad F_n(x_n) = F(u),$$

si ahora, $f_n(x)$ y $f(x)$ son las correspondientes funciones de densidad, se puede definir la función

$$Z_n(x) = F_n(x) - F(x)$$

se sigue por (2.8) que

$$Z_n(x_n) = \int_{x_n}^{u} f(t)\, dt.$$

Por lo que la ecuación

$$\xi = \int_{x_n}^{u} f(t)\, dt$$

define una relación $u(\xi)$, para la cual $u(0) = x_n$. Se expande $u(\xi)$ en serie de Taylor alrededor de $\xi=0$, donde

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{f(u)}$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = -\frac{(df/du)\cdot(du/d\xi)}{f^2(u)}$$

$$= -\frac{f'(u)}{f^3(u)}$$

$$= \frac{\psi(u)}{f^2(u)}$$

con $\psi(u) = -f'(u)/f(u)$. Continuando de esta manera, se puede demostrar que

$$\frac{d^ku}{d\xi^k} = C_k(u)\cdot[f(u)]^{-k}$$

donde $C_1(u) = 1$ y

$$C_{k+1}(u) = k\, C_k(u)\, \psi(u) + \frac{dC_k(u)}{du} \qquad \text{para } k = 1,2,3,...$$

como $u(0) = x_n$, entonces (2.7) puede escribirse de la siguiente forma :

$$(2.9) \qquad u(\xi) = x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k(x_n)\ \xi^k}{[f(x_n)]^k\ k!}$$

$$= x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k(x_n)\ [Z_n(x_n)/f(x_n)]^k}{k!}$$

en donde $u(\xi)$ es la nueva aproximación para x_p.

Este trabajo fué derivadó por Hill y Davis(1968) y comentado por Kennedy y Gentle(1980, Cap.5), para obtener cuantiles de la distribución F(x). El método fué utilizadó por Best y Roberts(1975) con el fin de encontrar cuantiles de la distribución Ji-cuadrada y en este trabajo también se utilizó para hallar cuantiles de la distribución t. Por supuesto, este método requiere de tener una buena aproximación inicial (x_n) al cuantil buscado y se aplica como los anteriores metodos en forma iterativa usando algún criterio de convergencia.

2.3) FRACCIONES CONTINUAS.

Una expresión de la forma :

$$(2.10) \qquad \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + a_4 \cdots}}}$$

es llamada una fracción continua. En general los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ pueden ser reales o complejos y el número de términos puede ser finito o infinito.

Es mucho más conveniente escribir (2.10), en una forma más compacta como :

$$\frac{a_1}{b_1+}\ \frac{a_2}{b_2+}\ \frac{a_3}{b_3+}\ \frac{a_4}{b_4+}\ \cdots$$

donde los numeros a_k, b_k $k = 1,2,\ldots$ son llamados elementos de la fracción.

Abramowitz y Stegun(1965, Cap.26) citan ejemplos de interés, de los cuales estan los siguientes :

i) Distribución Normal Estándar

$$\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \operatorname{Exp}(-x^2/2)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, dt$$

$$= 1 - \phi(x) \left[\frac{1}{x+}\ \frac{1}{x+}\ \frac{2}{x+}\ \frac{3}{x+}\ \frac{4}{x+} \cdots \right] \quad (x>0)$$

ii) Distribución Ji-cuadrada

$$Q(x|v) = \left[2^{v/2}\, \Gamma(v/2)\right]^{-1} \int_{x}^{\infty} t^{v/2-1} \operatorname{Exp}(-t/2)\, dt$$

$$= \frac{x^{v/2} \operatorname{Exp}(-x/2)}{2^{v/2}\, \Gamma(v/2)} \left[\frac{1}{x/2+}\ \frac{1-v/2}{1+}\ \frac{1}{x/2+}\ \frac{2-v/2}{1+}\ \frac{2}{x/2+} \cdots \right]$$

para $0 \le x < \infty$.

Un método para evaluar (2.10) es el siguiente: Sea

$$\text{(2.11)} \quad \begin{aligned} A_k &= b_k\, A_{k-1} + a_k\, A_{k-2} \\ B_k &= b_k\, B_{k-1} + a_k\, Bk-2 \end{aligned} \qquad k = 1,2,\ldots$$

con $A_{-1} = 1$, $A_0 = 0$, $B_{-1} = 0$, y $B_0 = 1$. La convergencia n-ésima (llamada aproximación) está dada por

$$V_n = \frac{A_n}{B_n}$$

Este método para evaluar (2.10) es llamado *forward recurrence method* (método de recursividad hacia adelante).

Existe otro método llamado *backward recurrence* (recursividad hacia atras), el cual procede de la siguiente manera :

$$u_{n+1} = 0$$

$$u_k = \frac{a_k}{b_k + u_{k+1}} \qquad k = n,\ n-1,\ldots,1$$

$$\text{(2.12)} \quad V_n = u_1.$$

Usando este metodo, V_n, para n dado, aproxima el valor de la fracción dada.

Un camino para convertir una expresión racional a una fracción continua, puede ser el método de Viskovatov (Kennedy y Gentle, 1980, Cap.5). Este método se apoya en la relación siguiente :

$$\frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots}{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots} = \frac{c_0}{d_0} + \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots}{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots} - \frac{c_0}{d_0} \tag{2.13}$$

$$= \frac{c_0}{d_0} \quad \cfrac{x}{\cfrac{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots}{c_0^1 + c_1^1 x + c_2^1 x^2 + \cdots}}$$

donde las c_i^j denotan los valores transformados. Una descripción general es como sigue : Dada una expresión racional

$$g(x) = \frac{a_{10} + a_{11} x + a_{12} x^2 + \cdots + a_{1n} x^n + \cdots}{a_{00} + a_{01} x + a_{02} x^2 + \cdots + a_{0n} x^n + \cdots}$$

el primer paso es la relación dada por

$$g(x) = \cfrac{a_{10}}{a_{00} + x\,\cfrac{a_{20} + a_{21} x + a_{22} x^2 + \cdots}{a_{10} + a_{11} x + a_{12} x^2 + \cdots}}$$

donde $a_{2k} = a_{10}\ a_{0,k+1} - a_{00}\ a_{1,k+1}$.

Continuando la reducción, hasta encontrar :

$$g(x) = \cfrac{a_{10}}{a_{00} + \cfrac{a_{20} x}{a_{10} + \cfrac{a_{30} x}{a_{20} + \cdots}}}$$

donde $a_{m,n} = a_{m-1,0}\, a_{m-2,n+1} - a_{m-2,0}\ a_{m-1,n+1}$.

Para ilustrar el método de Viskovatov se considera el siguiente ejemplo :

$$\operatorname{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \,/\, k!$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!} - 1}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{x \sum_{k=0}^{\infty} x^k / (k+1)!}{\sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!}}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{\sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!}{\sum_{k=0}^{\infty} x^k / (k+1)!} - 1}}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{\sum_{k=0}^{\infty} x^k / (k+1)!}{\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{8} + \cdots} - 2}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{3 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{5 + \cdots}}}}}}$$

CAPITULO 3.

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

3.1) DISTRIBUCION BINOMIAL .

3.1.1) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una distribución binomial con parámetros n y p ($n \in \mathbb{N}$; $0<p<1$), si X tiene una distribución discreta cuya función de probabilidad $f(\cdot\,|n,p)$ está especificada por:

$$(3.1) \qquad f(x\,|n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} & \text{para } x=0,1,\dots,n \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $q = 1 - p$. Cuando $n = 1$, se obtiene la distribución Bernoulli. Esto es, Y tiene una distribución Bernoulli (Y es un ensayo Bernoulli) con parámetro p ($0<p<1$), si su función de probabilidad puede escribirse de la forma

$$(3.2) \qquad f(y\,|\,p) = \begin{cases} p^{y} q^{1-y} & \text{para } y=0,1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

La distribución Bernoulli es de importancia, por que describe cualquier experimento donde el resultado puede ser un fallo o un acierto.

Por otra parte, si $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ es una sucesión de ensayos Bernoulli independientes con parámetro p, entonces

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

tiene una distribución binomial con parámetros n y p. En otras palabras, si en un experimento que consiste en n ensayos independientes y tales que en cada ensayo la probabilidad de que ocurra el evento de interés es p, entonces la distribución del número total de ocurrencias del evento en el experimento tiene una distribución binomial con parámetros n y p.

En general, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes y X_i $(i=1,\ldots,n)$ tiene una distribución binomial con parámetros m_i y p, entonces la suma $X_1 + \cdots + X_n$ tiene una distribución binomial con parámetros $m_1 + \cdots + m_n$ y p.

La denominación de distribución binomial para la relación (3.1), tiene su origen en el desarrollo binomial:

$$(q + p)^n = q^n + n\, q^{n-1} p + \cdots + p^n$$

el término de este desarrollo correspondiente a p^x, donde x es un entero, viene dado por

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-x-1)}{1\cdot 2\cdots x}\, q^{n-x}\, p^x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x\, q^{n-x}$$

Así pues, los diversos términos del desarrollo binomial de $(q+p)^n$ dan las probabilidades de los diversos resultados posibles en el orden natural.

3.1.2) ASPECTOS HISTORICOS .

La distribución binomial es una de las primeras distribuciones que han sido objeto de estudio. Fué derivada por James Bernoulli en su tratado *Ars Conjectandi* en 1713 (Todhunter, 1965, Cap.7).

3.1.3) PROPIEDADES .

La distribución definida por (3.1) consiste en (n+1) probabilidades no cero asociadas con los valores 0,1,2,...,n de la variable aleatoria X. A partir de la relación

$$(3.3) \qquad \frac{P(x = k+1)}{P(x = k)} = \frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{q}\ , \text{ para } K = 0,1,2,\ldots,n-1$$

se puede comprobar que $P(x=k)$ aumenta con k, para $k<np-q$, y decrece con k, para $k>np-q$. Por lo tanto, el valor de la probabilidad $P(x=k)$ toma su valor máximo en el entero k que satisface

$$(n+1)p - 1 < k \leq (n+1)p.$$

Si $(n+1)p$ es un entero, entonces

$$P\left[x = (n+1)p - 1\right] = P\left[x = (n+1)p\right]$$

y en estos dos posibles valores de k es donde la probabilidad se maximiza.

La distribución es simétrica (respecto a $n/2$) si y solo si $p=0.5$. En la figura 3.1a se presentan algunas distribuciones binomiales.

Por otra parte, la función generatriz de momentos está dada por :

$$m(t) = [q + p\,\mathrm{Exp}(t)]^n \qquad t \in \mathbb{R}$$

de la cual se puede obtener que

$$E(x) = np$$
$$\mathrm{Var}(x) = npq\ .$$

Vale la pena observar que para toda variable binomial se tiene que $\mathrm{Var}(x) < E(x)$; esta propiedad se utiliza para comparar esta distribución con otros modelos discretos.

3.1.4) DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA .

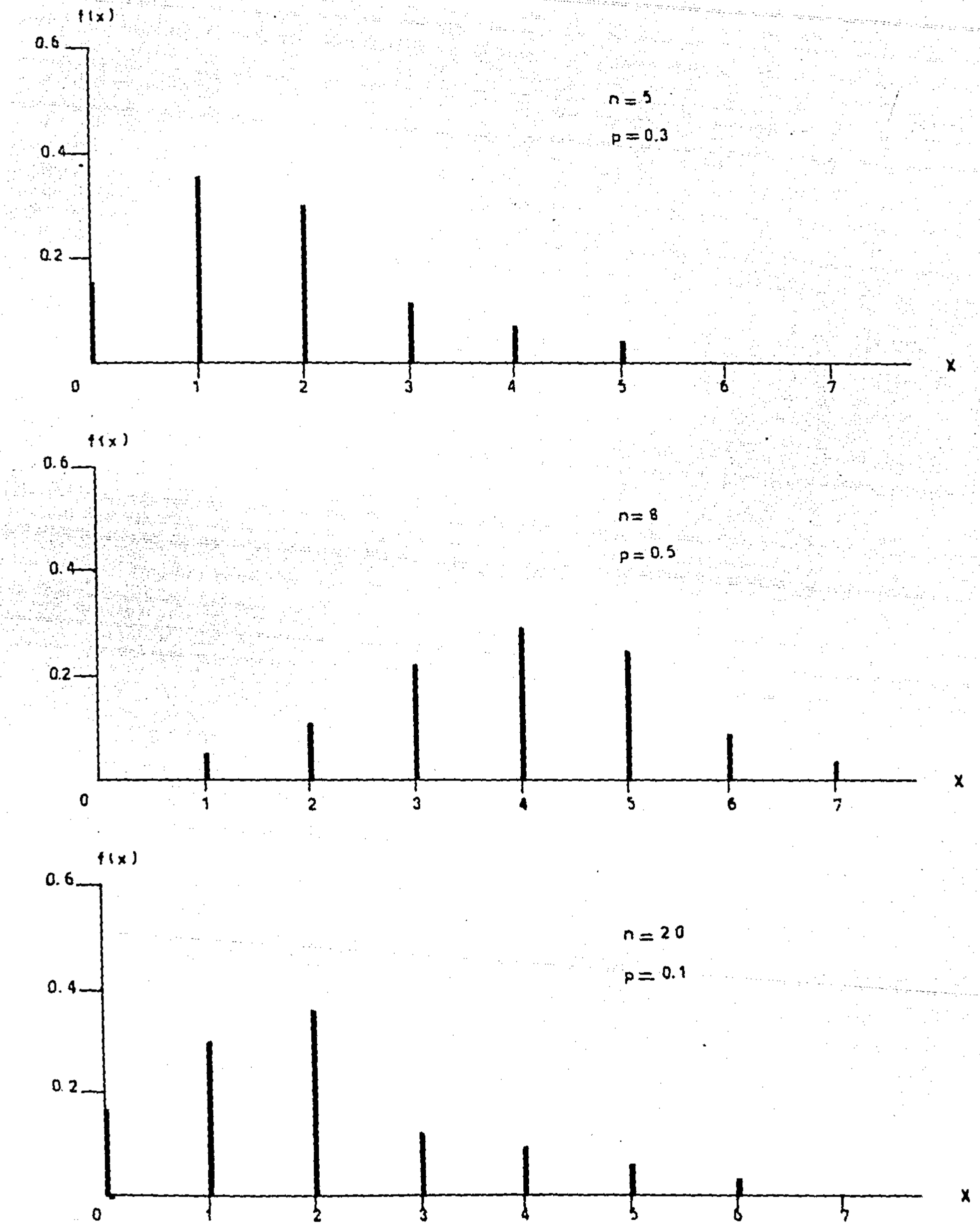
Una variable aleatoria Z tiene una distribución binomial negativa con parámetros r y ρ ($r>0$; $0<\rho<1$), si Z tiene una distribución discreta cuya función de probabilidad $H(\cdot|r,\rho)$ está dada por:

$$(3.4) \qquad H(z|r,\rho) = \begin{cases} \binom{z+r-1}{r-1} \rho^r (1-\rho)^z & \text{para } z=0,1,\ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si r es un entero positivo, entonces la distribución binomial negativa puede aparecer en la siguiente situación: En una secuencia

DISTRIBUCION BINOMIAL

Fig 3.1



de ensayos Bernoulli con parámetro ρ, sea W el numero total de ensayos que son requeridos hasta obtener r veces el valor 1 y sea Z = W-r, entonces Z tiene una distribución binomial negativa dada por la ecuación (3.4) y se define al número de ensayos en los que se obtuvo el valor cero antes del r-ésimo 1.

Cuando r=1, la distribución se transforma en :

$$(3.5) \qquad H(z|\rho) = \begin{cases} \rho \quad (1-\rho)^z & \text{para } z=0,1,\ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los valores de $H(z|\rho)$ distintos de cero corresponden a una progresión geométrica donde el primer término es ρ y la razón es $(1-\rho)$. Por lo tanto, esta distribución es llamada la Distribubión Geométrica.

Si Z se distribuye como (3.4), entonces su función generatriz de momentos está dada por:

$$m(t) = \rho^r \, [\rho - (1-\rho)(1 + \text{EXP}(t))]^{-r} \qquad t \in \mathbb{R}$$

de donde se puede obtener

$$E(z) = r(1-\rho) \; / \; \rho$$
$$Var(z) = r(1-\rho) \; / \; \rho^2$$

de manera que Var(z) > E(z).

Por otra parte, la distribución binomial y la binomial negativa están relacionadas de la siguente manera : si Z es una binomial negativa con parámetros r y ρ, entonces

$$(3.6) \qquad P(Z \leq z) = P(X \geq r)$$

donde X tiene una distribución binomial con parámetros n=r+z y p=ρ.

3.1.5) DISTRIBUCION MULTINOMIAL .

La distribución multinomial es una extensión natural de la distribución binomial. Está asociada con las pruebas repetidas de un suceso con más de dos resultados posibles.

Considere una serie de n ensayos independientes tales que en cada ensayo puede ser observado uno y solo uno de los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ y la probabilidad de que ocurra el evento E_j $(j=1,\ldots,k)$ es igual a P_j, por supuesto

$$\sum_{j=1}^{k} P_j = 1.$$

Sea X_j $(j=1,\ldots,k)$ el número de veces que ocurre el evento E_j en los n ensayos. Entonces, la distribución conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ se conoce como la distribución multinomial con parámetros $n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ y su función de probabilidad está determinada por la expresión

$$(3.7) \qquad f(x_1,\ldots,x_{k-1}) = n! \prod_{i=1}^{k} \left[P_i^{x_i} / x_i! \right]; \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Esta distribución se refiere sólo a k-1 variables aleatorias porque el valor de X_k queda totalmente determinado una vez que se conocen las primeras k-1 variables. Más específicamente, se tiene que :

$$\sum_{i=1}^{k} X_i = n.$$

La familia de distribuciones multinomial depende de k parámetros, a saber: n, $p_1, \ldots$ y p_{k-1}. En analogía con el caso de las variables, el otro parámetro p_k, no aparece porque está determinado a través de la relación:

$$p_k = 1 - p_1 - \cdots - p_{k-1}.$$

Si k=2, se reproduce a la distribución binomial.

3.1.6) RELACION CON OTRAS DISTRIBUCIONES .

Para npq > 9 (Sachs, 1984, Pag.160),

$$Z = (X - np)/(npq)^{1/2},$$

donde X tiene la distribución (3.1), sigue una distribución aproximadamente normal estándar.

Como aplicación de este resultado, la probabilidad exacta de la variable binomial X, es con frecuencia aproximada con la probabilidad de una variable normal, haciendo uso de lo que se llama corrección por continuidad. Probabilidades del tipo $P\left[x_1 \le X \le x_2\right]$ para cualesquiera x_1 y x_2 con $o \le x_1 < x_2 \le n$ son aproximadas por

$$P\left[\frac{x_1 - 0.5 - np}{(npq)^{1/2}} \le W \le \frac{x_2 + 0.5 - np}{(npq)^{1/2}}\right]$$

con W una variable normal estándar.

Los adjustamentos a las x_i $(i = 1,2)$ por adición y/o substracción de 1/2 es lo que se llama corrección por continuidad. La figura 3.1b muestra la aproximación a la probabilidad discreta, $P\left[X = x\right]$, que se obtiene como el área bajo la función de densidad en el intervalo de longitud uno y centrado en el valor de x.

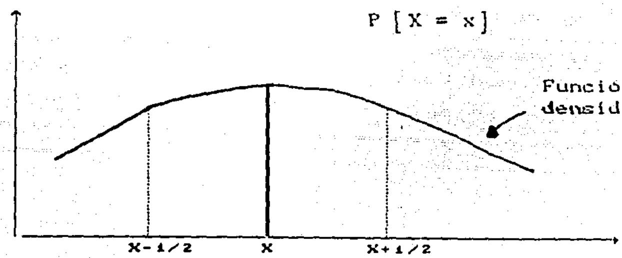


Figura 3.1b

Otra aproximación para las probabilidades de la distribución binomial se basa en la siguiente relación:

$$\begin{aligned} P(X \ge k) &= \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \left[B(k, n-k+1) \right]^{-1} \int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\, dt \\ &= I_p(k,\ n-k+1) \end{aligned}$$

que se sigue de aplicar en forma repetida, integración por partes y donde $I_p(\cdot,\cdot)$ es el cociente de la función beta incompleta. (ver capitulo 4, sección 4.4).

Por otra parte, cuando n tiende a infinito y p tiende a cero de manera que np (igual a θ) permanece constante, entonces

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np = \theta}} P(X = k) = \text{EXP}(-\theta)\ \theta^k / k!$$

de manera que se obtiene la distribución Poisson con parámetro θ. (ver sección 3.2).

3.1.7) ALGORITMOS .

Si X tiene una distribución binomial con parámetros n y p, entonces su función de ditribucion está dada por

$$(3.8) \qquad P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

ALGORITMO I Distribución Acumulativa Binomial.

Lenguaje: Fortran.

Descripción y Propósito.

El propósito es evaluar la función acumulativa dada por (3.8), para valores dados de n, p y k.

Método Numérico.

Si p ≤ 1/2, se hace uso de la relación dada por (3.3), de la siguiente manera :

$$(3.9) \qquad P(x = k + 1) = \frac{n - k}{k + 1}\ \frac{p}{q}\ P(x = k) ,$$

las probabilidades individuales pueden ser calculadas por la fórmula recursiva (3.9), donde :

$$P(x = 0) = q^n .$$

El método consiste en ir acumulando estas probabilidades. En el caso de que P(x = 0) = 0 (numéricamente), entonces (3.8) puede ser aproximado con la ayuda del cuantil normal estandarizado, z, dado por Moolenar(1970) y comentado por Sachs(1984, Pag.162) el cual afirma que es mejor a usar corrección por continuidad y está dada por :

$$z = \left| \sqrt{q(4k + 3.5)} - \sqrt{p(4n - 4k - 0.5)} \right|$$

donde (a) para $0.05 \le p \le 0.93$, 3.5 se reemplaza por 3 y 0.5 por 1; (b) para valores de p fuera de este rango, 3.5 se reemplaza por 4 y o.5 por 0. Es mucho más conveniente remplazar 0.93 por 0.95 para tener simétria.

Cuando $p > 1/2$, se intercambian los valores de p y q y se calcula

$$P\left[X \le n - (k+1)\right]$$

Por lo tanto, el complemento a uno de está probabilidad es el resultado.

3.2) DISTRIBUCION POISSON .

3.2.1) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una distribución Poisson con media $\lambda > 0$, si X tiene una distribución discreta y su función de probabilidad $f(\cdot|\lambda)$ está dada por :

$$(3.10) \quad f(x\,|\lambda) = \frac{\mathrm{Exp}(-\lambda)\ \lambda^{x}}{x!}, \qquad \text{para } x=0,1,2,\ldots$$

Bajo ciertas condiciones la distribución Poisson se aplica para describir aproximadamente el comportamiento de variables que se refieren al número de ocurrencias de un cierto fenómeno en un periodo de tiempo fijo o una región de espacio fijo. Un ejemplo de este tipo de variables es el número de llamadas telefónicas recibidas en un conmutador durante un periodo de tiempo dado.

3.2.2) ASPECTOS HISTORICOS .

En 1837 Poisson publicó la derivación de la distribución que lleva su nombre como un límite de la distribución binomial (véase sección 3.1.6).

Bortkiewicz en 1898 (ver Jonhson y Kotz, 1970), consideró circunstancias en las que se puede utilizar la distribución Poisson. Desde el punto de vista del propio enfoque de Poisson estas son situaciones en donde, además de los requerimientos de independencia entre ensayos y probabilidad constante de ensayo a ensayo, el número total de ensayos debe ser muy grande, mientras la probabilidad de ocurrencia del evento de interés debe ser pequeña. Aunque Bortkiewicz llamó a esto la 'Ley de los números pequeños' no hay necesidad para que $\lambda=np$ sea pequeño.

3.2.3) PROPIEDADES .

Si X sigue una distribución Poisson, entonces el cociente

$$(3.11)\quad \frac{P(x = k+1)}{P(x = k)} = \frac{\lambda}{k+1}$$

de donde se sigue que $P(x=k)$ aumenta con k hasta llegar a un valor máximo en $k = [\lambda]$ (si λ es un entero, se maximiza en $k = \lambda-1$ y $k = \lambda$) y después decrece cuando k aumenta.

Por otra parte, la función generatriz de momentos de X es :

$$m(t) = \mathrm{Exp}\left[\lambda\ (\mathrm{Exp}(t) - 1)\ \right]$$

de donde se obtiene

$$E(x) = \lambda$$
$$\mathrm{Var}(x) = \lambda$$

de manera que para toda distribución Poisson la media y la varianza son iguales.

Si $X_1,\ldots,X_k$ son variables aleatorias independientes y X_i $(i=1,\ldots,k)$ tiene una distribución Poisson con media λ_i, entonces

$$Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

tiene una distribución Poisson con media $\lambda_i+\cdots+\lambda_k$.

3.2.4) RELACION CON OTRAS DISTRIBUCIONES .

Como ya se indicó, si en la distribución binomial (ver sección 3.1) se tiene que n tiende a infinito, p tiende a cero y $np = \lambda$, se obtiene la distribución Poisson con parámetro λ.

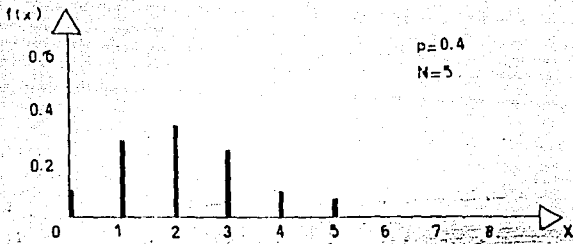
En las figuras 3.2a, 3.2b, 3.2c y 3,2d se ilustra este hecho, tomando $np = 2$ ($\lambda = 2$) y $n = 5, 10, 20$.

El límite de la distribución de la variable estándarizada

$$Y = \frac{(X - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}$$

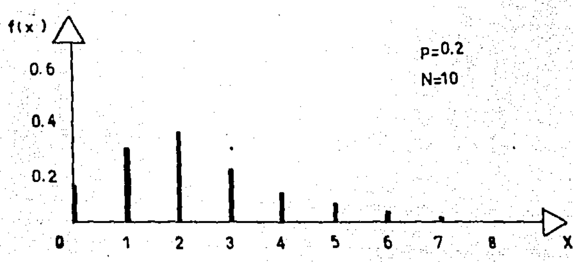
donde X tiene la distribución (3.10), es la distribución normal estándar. Esto es,

$$\lim_{\lambda \to \infty} P(\alpha < Y < \beta) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{Exp}(-u^2/2)\ du.$$



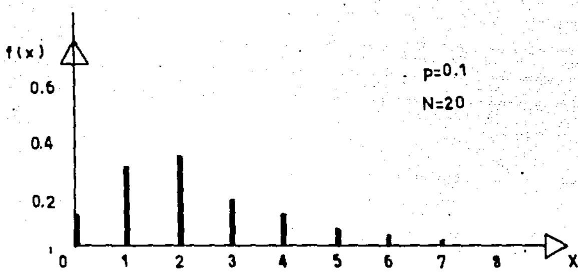
BINOMIAL

Fig 3.2a



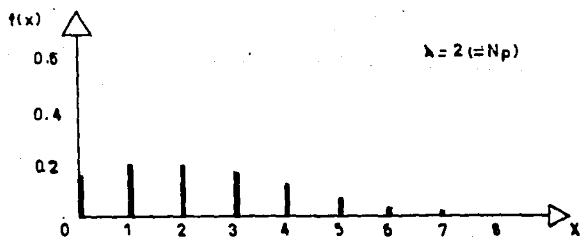
BINOMIAL

Fig 3.2b



BINOMIAL

Fig 3.2c



POISSON

Fig 3.2d

En este caso también se puede hacer uso de lo que se llama corrección por continuidad, entonces probabilidades del tipo, $P[X \leq x]$, pueden ser aproximadas por :

$$P\left[W \leq \frac{x + 1/2 - \lambda}{\lambda^{1/2}} \right]$$

donde 1/2 es la corrección por continuidad.

Otra aproximación, que se utiliza en el capitulo 4, sección 4.2, es la siguiente :

$$(3.12) \quad P(\chi^2_v > x) = P(Y < v/2)$$

donde Y tiene una distribución Poisson con parámetro x/2, v es un número par y χ^2_v es una variable aleatoria con distribución ji-cuadrada y v grados de libertad (véase capitulo 4, sección 4.2). Este resultado se puede verificar utilizando integración por partes.

3.2.5) ALGORITMOS .

Si X tiene una distribución Poisson con parámetro λ, entonces su función acumulativa de probabilidad está dada por

$$(3.13) \quad P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} \mathrm{Exp}(-\lambda)\, \lambda^{i} / \, i!$$

ALGORITMO 2 La Distribución Acumulativa Poisson.

Lenguaje: Fortran.

Descripción y Propósito.

El propósito es evaluar la función acumulativa de la distribución Poisson, dados x y λ.

Método Numérico.

Se hace uso de la relación (3.11), de la siguiente manera :

$$(3.14) \quad P(x = k) = \frac{k + 1}{\lambda} P(x = k + 1) ,$$

las probabilidades individuales pueden ser calculadas por la fórmula recursiva (3.14) y empezando en donde se maximiza lo probabilidad en el intervalo [o, x].

El método consiste en ir acumulando estas probabilidades. En el caso de que la probabilidad maxima sea cero (numéricamente), entonces (3.13) puede ser aproximado con la ayuda del cuantil normal estandarizado, z, dado por Moolenar(1970) y comentado por Sachs(1984, Pag.175) el cual es :

$$z = 2\left[\sqrt{k + \frac{t+4}{9}}\right] - 2\left[\sqrt{\lambda + \frac{t-8}{36}}\right],$$

con $t = (k - \lambda + 1/6)^2 / \lambda$.

3.3) DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA .

3.3.1) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una distribución Hipergeométrica con parámetros A, B y n (donde A, B y n son enteros positivos tales que $n \le A+B$), si X tiene una distribución discreta cuya función de probabilidad $f(\cdot|A,B,n)$ está dada por:

$$(3.15)\quad f(x\ |A,B,n) = \frac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}}\ ; \qquad x = 0,1,2,\ldots,n.$$

Para cualquier otro posible valor de x, la función de probabilidad es cero.

La situación clásica en donde aparece la distribución Hipergeométrica es la siguiente: Considere una población finita de A + B artículos, en la cual hay A artículos del tipo 1 y B artículos del tipo 2. Suponga que n artículos son seleccionados aleatoriamente de la población, sin reemplazo y denote por X el número de artículos (de entre esos n) que son del tipo 1. Entonces, se dice que X tiene la distribución Hipergeométrica.

De (3.15) se tiene que

$$f(x\ |A,B,n) = 0,\ \text{si}\ x > A \ \text{ o }\ n-x > B\ .$$

De manera que la función de densidad (3.15), toma valores distintos de cero, sólo cuando x se encuentra en el intervalo

$$\max(0,n-B) \le x \le \min(n,A).$$

3.3.2) PROPIEDADES .

De la expresión (3.15), se tienen las siguientes relaciones recursivas :

$$(3.16)\quad f(x+1\ |A,B,n) = \frac{(A-x)(n-x)}{(x+1)(B-n+x+1)}\ f(x\ |A,B,n)$$

$$(3.17)\quad f(x\mid A+1,B,n) = \frac{(A-1)(B-n+x)}{B\,(A+1-x)}\; f(x\mid A,B,n)$$

$$(3.18)\quad f(x\mid A,B+1,n) = \frac{(A+B+1-n)(B+1)}{(B+1-n+x)(A+B+1)}\; f(x\mid A,B,n)$$

$$(3.19)\quad f(x\mid A,B,n+1) = \frac{(B-n+x)(n+1)}{(n+1-x)(A+B-n)}\; f(x\mid A,B,n)$$

Utilizando (3.16) se puede demostrar que

$$f(x+1\mid A,B,n) \gtrless f(x\mid A,B,n)$$

siempre que

$$x \lessgtr \frac{(n+1)(A+1)}{A+B+2} - 1$$

de aquí se tiene que $f(x\mid A,B,n)$ aumenta con x, hasta alcanzar un valor máximo en el mayor entero que no excede $(n+1)(A+1)/(A+B+2)$ y después decrece.

Si $(n+1)(A+1)/(A+B+2)$ es un entero, entonces hay dos valores máximos que se alcanzan en

$$x = (n+1)(A+1) \,/\, (A+B+2) \quad \text{y} \quad x = (n+1)(A+1) \,/\, (A+B+2) - 1.$$

Por otra parte,

$$E(x) = nA \,/\, (A+B)$$

$$Var(x) = \frac{nAB}{(A+B)^2}\,\frac{A+B-n}{A+B-1}\,.$$

De donde se puede comprobar que como en el caso Binomial,

$$Var(x) < E(x).$$

3.3.3) DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA NEGATIVA .

Si utilizando un esquema de muestreo sin remplazo, como se describe en la subsección 3.3.1, se seleccionan artículos aleatoriamente hasta obtener exactamente a $(0 < a \leq A)$ artículos del tipo 1 (ó alternativamente, b $(0 < b \leq B)$ artículos del tipo 2) y se define Y igual al número de extracciones que se necesitan para tal efecto, entonces la variable aleatoria Y tiene una distribución *hipergeométrica negativa* cuya función de probabilidad está dada por:

$$(3.20) \quad g(y) = \frac{\binom{A}{a-1}\binom{B}{y-a}}{\binom{A+B}{y-1}} \; \frac{A-a+1}{A+B-y+1}$$

con $a \leq y \leq B+a$ y donde

$$E(y) = a(A+B)/(A+1)$$

$$Var(y) = \frac{aB\,(A+B+1)\,(A+1-a)}{(A+1)^2\,(A+2)}.$$

3.3.4) DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA MULTIVARIADA .

Considere ahora una población de M artículos, de los cuales M_i $(i=1,\dots,k)$ son del tipo i, con

$$\sum_{i=1}^{k} M_i = M.$$

Suponga que se extrae una muestra de tamaño N sin remplazo de los M individuos. Entonces la distribución conjunta de las variables aleatorias $n_1,n_2,\dots,n_k$, donde n_i $(i=1,\dots,k)$ representa el número de artículos del tipo i en la muestra, esta definido por

$$(3.21) \quad f(n_1,\dots,n_k) = \left[\prod_{j=1}^{k}\binom{M_j}{n_j}\right] \left[\binom{M}{N}\right]^{-1}$$

con $\sum_{j=1}^{k} n_j = N$; $\quad 0 \leq n_j \leq M_j \quad (j=1,\dots,k)$

Esta distribución es llamada la distribución *hipergeométrica multivariada* con parámetros $N,M_1,\dots,M_k$. Cuando $k=2$, se reduce a la distribución hipergeométrica. En este modelo solamente k-1 variables son independientes, debido a que la variable n_k esta determinada (cuando se conocen los valores de $n_1,\dots,n_{k-1}$) por

$$n_k = N - \sum_{j=1}^{k-1} n_j .$$

3.3.5) ALGORITMOS .

La función acumulativa de la distribución hipergeométrica está dada por :

$$(3.22)\quad P(X \leq x) = \sum_{i=a}^{x} \frac{\binom{A}{i}\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B}{n}} .$$

donde a = max(0, n-B).

Para el cálculo de (3.22) se presentan los dos algoritmos siguientes :

ALGORITMO 3 Probabilidades Hipergeométricas.

Freeman(1973) Lenguaje: ANSI Standar Fortran.

Descripción y Propósito.

El objetivo es calcular la función de probabilidad (3.15), es decir,

$$P\left[X = x\right] = f(x\ |A,B,n)$$

Método Numérico.

El método usado es directo, con multiplicaciones y divisiones sucesivas, pero reduciendo a un mínimo el número de términos, usando las relaciones :

$$\begin{aligned} f(x\ |A,B,n) &= f(A-x\ |A,B,A+B-n) \\ &= f(x\ |n,A+B-n,A) \\ &= f(n-x\ |n,A+B-n,B). \end{aligned}$$

Precisión.

El algoritmo tiene un error relativo de 10^{-5} o menor para I + J > 50, para una mantisa de 24 bits, donde

$$I = \min(n,\ A+B-n,\ A,\ B)$$

$$J = \begin{cases} x & \text{si } I = n \text{ o } I = A \\ A-x & \text{si } I = A+B-n \\ n-x & \text{si } I = B \end{cases}$$

Si se utiliza doble precisión, entonces se asegura al menos 10

digitos decimales correctos.

ALGORITMO 4 Distribución Acumulativa Hipergeométrica

Lund(1980) Lenguaje: ISO Fortran.

Descripción y Propósito.

El objetivo es evaluar la función acumulativa dada por (3.22).

Método Numérico.

Es una versión del algoritmo *3* que acumula las probabilidades individuales. Por lo tanto, el método numérico es esencialmente el mismo.

Para obtener las tablas de la distribución hipergeométrica se utilizará el algoritmo *4*, por que es una versión más general del algoritmo *3*, de manera que el algoritmo *3* esta contenido en el algoritmo *4*. (ver codificación de ambos algoritmos).

CAPITULO 4 .

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

4.1) DISTRIBUCION NORMAL .

4.1.1) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una función de distribución Normal con media μ y varianza σ^2 ($-\infty<\mu<\infty$; $\sigma>0$); si X tiene una distribución continua y su función de densidad $f(\cdot\ |\mu,\sigma^2)$ está especificada en cualquier punto x ($-\infty<x<\infty$) por la ecuación:

$$(4.1) \qquad f(x\ |\mu,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \ \mathrm{Exp}\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

La distribución Normal para la cual la media es cero y la varianza es uno es conocida con el nombre de la distribución Normal Estándar. La función de densidad y la función de la distribución Normal Estándar usualmente se denotan por ϕ y Φ respectivamente. Esto es, para cualquier número x ($-\infty<x<\infty$),

$$(4.2) \qquad \phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\ \mathrm{Exp}(-x\ /2)^2$$

$$(4.3) \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(x)\ dx.$$

En la distribución Normal algunas veces resulta más ventajoso trabajar en términos de la precisión que en lugar de varianza σ^2. La precisión τ de una variable aleatoria se define como el reciproco de su varianza; esto es,

$$\tau = \frac{1}{\sigma^2} .$$

En este caso, si X es una variable aleatoria que tiene una distribución Normal con media μ y precisión τ, entonces su función de densidad $g(\cdot|\mu,\tau)$ está especificada en cualquier punto x $(-\infty<x<\infty)$ por la ecuación:

$$(4.4) \quad g(x|\mu,\tau) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1/2} \operatorname{Exp}\left[\frac{-\tau(x-\mu)^2}{2}\right].$$

La distribución Normal tiene un rango infinito y su función de densidad nunca alcanza el eje horizontal, es decir,

$$f(x|\mu,\sigma^2) > 0, \ \forall \ x \in R.$$

Como consecuencia, cualquier intervalo tiene probabilidad mayor que cero.

En la figura 4.1 (reproducida parcialmente de Johnson y Kotz, 1970) se exhiben algunas función de densidades normales, donde se observa que un cambio en el valor de μ, solamente desplaza la curva sobre el eje horizontal, mientras que cambios en σ modifican la escala.

4.1.2) ASPECTOS HISTORICOS .

De acuerdo a Johnson y Kotz(1970) :

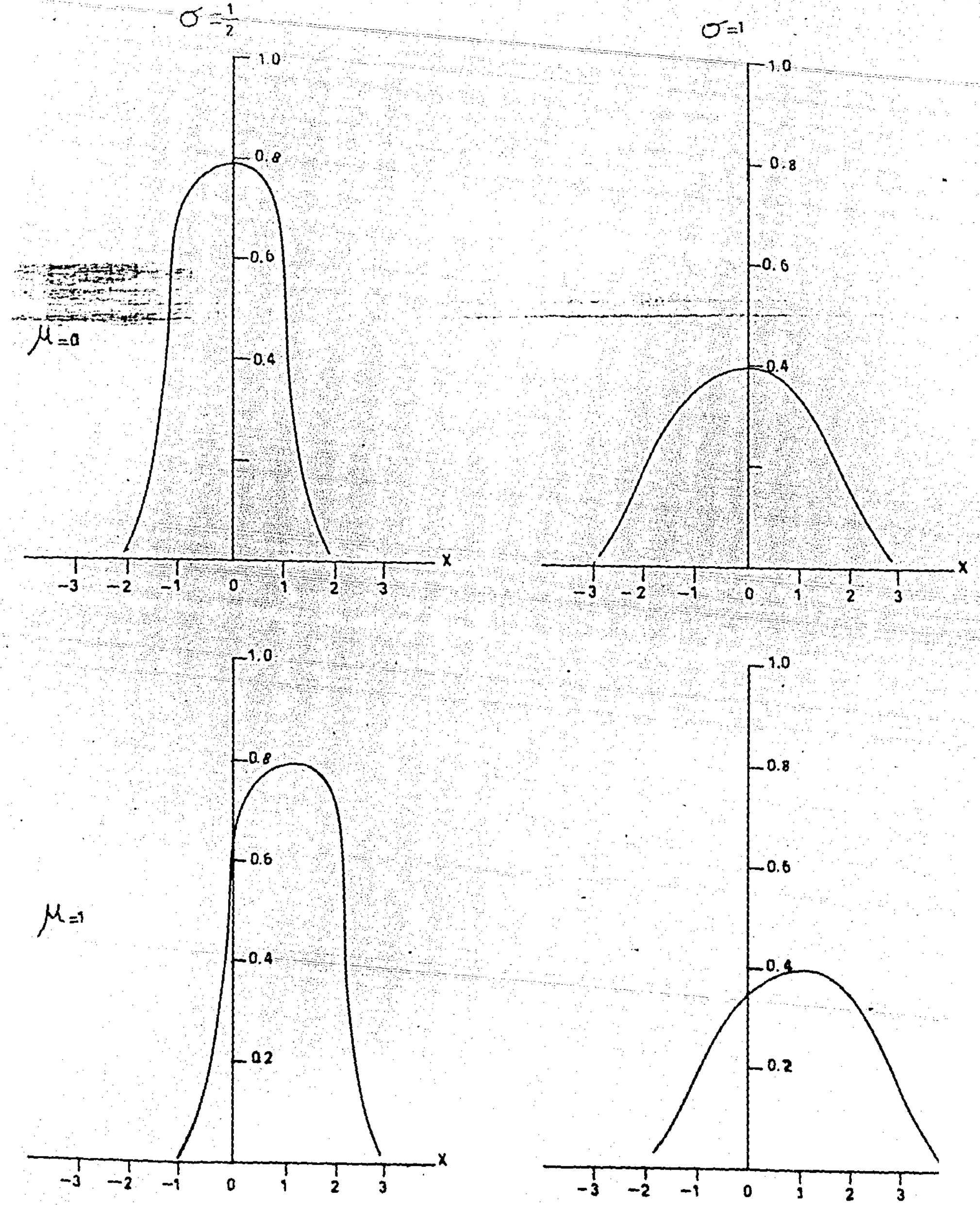
Las primeras personas que trabajaron el modelo, lo consideraban solamente como una aproximación útil al modelo Binomial. A principios del siglo XIX aumentó considerablemente la apreciación de su gran importancia teórica con los trabajos de Laplace y Gauss.

La distribución Normal empezó a ser aceptada ampliamente y sin critica como la base para la mayor parte del trabajo práctico estadistico, (esto sucedió principalmente en astronomía). A principios del presente siglo se desarrolló un espiritu más critico, dando atención a sistemas de '*curvas de frecuencia asimetricas (no normales)*'.

Este espiritu critico ha persistido, pero ha sido balanceado por desarrollos en la teoría y la práctica tanto de la Probabilidad como de la Estadistica. La distribución Normal tiene una posición única en la teoría de probabilidad y además es posible usarla como

DENSIDADES NORMALES

Fig 4.1



una aproximación a otras distribuciones.

La llamada *'Teoría normal'* puede aplicarse frecuentemente (con pequeños errores) a situaciones donde distribuciones no-normales explicarían mejor la realidad. Esto permite al investigador tomar ventaja de la elegancia y las numerosas y extensas tablas de la distribución Normal.

El primer trabajo publicado sobre la distribución Normal (como *una* aproximación a la distribución Binomial) fué el de DeMoivre(1733), en latín; en 1738, DeMoivre publicó una traducción al inglés con algunas modificaciones.

En 1774, Laplace obtuvo la distribución Normal como una aproximación a la distribución Hipergeométrica y cuatro años después propugnó por la elaboración de tablas de la integral de probabilidad. Los trabajos de Gauss en 1809 y 1816 respectivamente, establecen técnicas basadas en la distribución Normal, que fueron procedimientos comúnes usados durante el siglo XIX.

La mayoría de los argumentos en favor del uso de la distribución Normal, están basados en alguna variante del *'Teorema central del límite'*. Estos teoremas establecen condiciones bajo las cuales la distribución estandarizada de sumas de variables aleatorias, tiende a una distribución Normal conforme el número de variables en la suma aumenta. Gauss obtuvo la distribución Normal, como el resultado de haber sumado un gran número de errores independientes y se puede considerar que este trabajo es el primer resultado del tipo del *'Teorema central de límite'*.

4.1.3) PROPIEDADES .

Si X se distribuye como en (4.1), entonces la función generatriz de momentos es :

$$m(t) = \mathrm{Exp}[t\mu + (\sigma^2 t^2/2)]. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Derivando dos veces esta función y haciendo $t = 0$ en los resultados, hallamos :

$$\mu'_1 = \mu$$

$$\mu'_2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(x) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = \sigma^2,$$

lo que justifica el uso de los símbolos correspondientes a los momentos para los parámetros.

Por otra parte, observando la forma de la distribución Normal tenemos que, $\sigma\sqrt{2\pi}$ es una constante, la única parte que varia es el argumento de la exponencial $[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$ que involucra el valor particular de la variable aleatoria X.

El hecho de que el exponente sea negativo para cualquier valor de x, indica que entre mayor sea la diferencia entre x y μ, menor sera el valor de $Exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$ y menor el valor de $f(x\,|\mu,\sigma^2)$.

Además el valor máximo de $f(x\,|\mu,\sigma^2)$ esta en $x = \mu$ donde $f(x\,|\mu,\sigma^2)$ toma el valor $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$. De lo anterior es fácil concluir, que la grafica de f tiene la forma de *campana*; que μ esta a la mitad y divide el área en partes iguales, lo que implica que concide con la mediana, además como en $x = \mu$ se alcanza el máximo, entonces μ también es la moda.

Se puede demostrar que cualquier combinación lineal de variables aleatorias que se distribuyen normalmente, sigue una distribución Normal. En particular, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que se distribuyen como en (4.1), entonces

$$Y = \sum_{i=1}^{n} A_i\, X_i, \text{ (con Ai constantes)}$$

se distribuye como una $N(\sum_{i=1}^{n} A_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} A_i^2\sigma_i)$.

Un cambio de variable interesante es el siguiente, si X sigue una distribución dada por (4.1), entonces

$$(4.5) \qquad Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

se distribuye como una N(0,1).

Este cambio de variable es importante, por que todas las probabilidades relacionadas con una variable aleatoria Normal cualquiera, se pueden obtener calculando probabilidades a partir de una única distribución,

$$P[X \le x] = P[Y \le (x-\mu)/\sigma]$$
$$= \Phi[(x-\mu)/\sigma],$$

en donde como se indicó con anterioridad Φ es la distribución dada por (4.3).

Otros nombres para la distribución Normal son:

— Segunda Ley de Laplace
— Laplace
— Gaussiana
— Laplace-Gauss, Integral
— Integral de Probabilidad.

4.1.4) UNA CARACTERIZACION DE LA DENSIDAD NORMAL .

ENTROPIA.

Definición: La entropia de la distribución P con un soporte que consta de k puntos y probabilidades $\{P_1,\dots,P_k\}$ está dada por la expresión :

$$(4.6) \quad H[P] = -\sum_{i=1}^{k} P_i \ln(P_i).$$

H[P] es el único operador continuo que se maximiza cuando todos los puntos en el soporte tienen la misma probabilidad, es decir, en el estado de máxima incertidumbre o máximo desorden.

Esta definición se puede extender al caso continuo de la siguiente manera: si X es una variable aleatoria continua con función de densidad dadá por $f(x)$, entonces se define la entropia como

$$(4.7) \quad H[f] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, ln[f(x)]\, dx.$$

Aplicando esta definición a la distribución Normal, tenemos que su entropia es igual a :

$$\ln[\sqrt{2\pi}\,\sigma] + 1/2.$$

La relación del concepto de entropía y la distribución Normal es particularmente interesante por que esta distribución se puede caracterizar con el siguiente resultado :

'La distribución continua con varianza σ^2 finita, soporte en los reales y que tiene entropía máxima es la Normal $N(\mu,\sigma^2)$ para cualquier $\mu \in R$'.

4.1.5) DISTRIBUCION NORMAL TRUNCADA .

Una variable aleatoria X tiene una distribución Normal doblemente truncada; si X posee una función de densidad de la siguiente forma:

$$DNDT(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \operatorname{Exp}\left[- \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_A^B \operatorname{Exp}\left[- \frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)\right] dt\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \quad \frac{\phi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]}{\Phi\left[\frac{B-\mu}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{A-\mu}{\sigma}\right]}$$

donde ($A \le x \le B$).

Los puntos de truncación son A (por abajo) y B (por arriba); los grados de truncación son $\Phi\,[(A-\mu)/\sigma]$ (por abajo) y $\{1 - \Phi\,[(B-\mu)/\sigma]\}$ (por arriba). Si A se remplaza por $-\infty$, o B por ∞, se dice que tiene una truncación sencilla por arriba o por abajo respectivamente.

El valor esperado de X es,

$$E\left[X\right] = \mu + \frac{\phi\,[(A-\mu)/\sigma] - \phi\,[(B-\mu)/\sigma]}{\Phi\,[(B-\mu)/\sigma] - \Phi\,[(A-\mu)/\sigma]}\,\sigma$$

y la varianza de x por

$$\operatorname{Var}[X] = \left[1 + \frac{\frac{A-\mu}{\sigma}\,\phi\left(\frac{A-\mu}{\sigma}\right) - \frac{B-\mu}{\sigma}\,\phi\left(\frac{B-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{B-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-\mu}{\sigma}\right)} - \left(\frac{\phi\left(\frac{A-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{B-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{B-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-\mu}{\sigma}\right)} \right)^2 \right].$$

4.1.6) DISTRIBUCION NORMAL MULTIVARIADA .

Definición: Sea $X=(X_1,\dots,X_n)$ un vector aleatorio con función de densidad

$$(4.8) \qquad f_X(x\,|\,\mu,\Sigma) = (2\pi)^{-n/2}\,|\Sigma\,|^{-1/2}\,\operatorname{Exp}\left[\frac{-1}{2}\,(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]$$

con $x,\mu\in\mathbf{R}^n$ y Σ matrix (de $n\times n$) definida positiva y simétrica, entonces $\mathbf{X}$ tiene una distribución normal multivariada con vector de medias μ y matriz de varianzas y covarianzas Σ . Esta distribución se denota simplemente

$$\mathbf{X} \sim N_n(\mu,\Sigma),$$

el subindice n es para denotar que $\mathbf{X}$ es un vector en $\mathbf{R}^n$.

Esta es la más importante distribución multivariada en la teoria Estadistica. La forma cuadratica que aparece en la función de densidad

$$(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)$$

se puede expresar de la siguiente manera

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}\,(X_i-\mu_i)\,(X_j-\mu_j),$$

donde σ^{ij} es la entrada (i,j) de la matriz Σ^{-1}.

4.1.7) ALGORITMOS .

La distribución Normal es muy importante en la teoria de probabilidades y sus aplicaciones en la Estadistica, por esta razón con mucha frecuencia se requiere del cálculo de probabilidades asociadas a este modelo. Por otra parte, la función de densidad es relativamente simple pero su integral, que conduce a la distribución acumulada, existe para toda $x \in \mathbb{R}$ pero no tiene expresión analítica. En consecuencia es indispensable contar con tablas de la distribución Normal.

Recordando el cambio de variable dado por (4.5) se tiene que basta con calcular tablas de la distribución Normal estándar.

Se investigaron dos algoritmos para poder calcular las tablas de la integral Normal y cuatro algoritmos para encontrar los cuantiles de la distribución Normal.

ALGORITMO 5 La Integral de la Normal

Cooper (1968a) Lenguaje: ASA Estándar Fortran.

Descripción y Propósito.

Dada una serie de valores de X la subrutina regresa la correspondiente serie de ordenadas $\phi(x)$ y áreas P y Q, donde

$$P = \Phi(x) \qquad y \qquad Q = 1 - \Phi(x).$$

La subrutina calcula el menor de los valores P y Q, para que de esta forma evaluar el área más pequeña evitando así el problema de cancelación numérica cuando la probabilidad se acerca a uno.

Método Numérico.

Si x esta en el intervalo (-2.5,2.5), entonces

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)\, dy$$

$$= 1/2 + \int_{0}^{x} \phi(y)\, dy$$

$\phi(y)$ se expande en serie de Maclaurin e integrando término a término se obtiene

$$\Phi(x) = 1/2 + [2\pi]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\, 2^n\, (2n+1)} .$$

La serie se termina cuando una contribución a la integral es menor que 1.0E-6

Si x esta fuera de este intervalo, entonces se utiliza la fracción continua (Sheppard, 1939; Kendall y Stuart, 1977, Pag.143) siguiente :

$$\frac{1}{x}\left[1+\frac{-1}{x^2+3+}\,\frac{-6}{x^2+7+}\,\frac{-20}{x^2+11+}\,\frac{-42}{x^2+15+}\,\frac{-72}{x^2+19+}\cdots\right].$$

ALGORITMO 6 La Integral de la Normal

Hill (1973) Lenguaje: ISO Fortran.

Descripción y Propósito.

Calcular las áreas P y Q, de una distribución normal estándar. Donde para un valor dado de x

$$P = \Phi(x) \qquad y \qquad Q = 1 - \Phi(x).$$

Método Numérico.

El método numérico es el propuesto por Adams(1969), de la siguiente manera: Si $x < 1.28$, entonces

$$\Phi(x) = 0.5 - x\, f(x^2),$$

de lo contrario, si $x \geq 1.28$, entonces

$$\Phi(x) = \phi(x)\, g(x).$$

Siendo $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ funciones racionales, donde el autor no especifica que forma matemática tienen.

Estos dos algoritmos tienen el mismo propósito, pero Hill indica que el argumento escalar y la forma funcional del algoritmo *6* es mucho más simple. El tiempo que toma el cálculo de $\Phi(x)$, fue comparado por Hill obteniendo los siguientes resultados :

Tiempo en mseg.

Valor de x	ALG-5	ALG-6	Valor de x	ALG-5	ALG-6
-2.5	14.5	1.1	0.5	2.9	0.6
-2.0	2.9	1.0	1.0	3.0	0.5
-1.5	9.0	1.1	1.5	3.0	1.0
-1.0	3.0	0.5	2.0	3.0	1.0
-0.5	2.9	0.5	2.5	14.5	1.0
0.0	0.6	0.4	3.0	12.3	1.0

Como notó Hill, es mucho mayor el tiempo que requiere el algoritmo 5; esto puede ser una consecuencia de que emplea una salida en forma de arreglos.

En cualquier caso, en este trabajo se eligió el algoritmo 6 para producir las tablas de la integral normal.

En seguida se presentan los cuatro algoritmos considerados para calcular los cuantiles de la distribución normal.

ALGORITMO 7 Los Cuantiles de la Distribución Normal.

Cunningham (1969) Lenguaje: ASA Estándar Fortran.

Descripción y Propósito.

Dado un valor p que es el área bajo la curva de la distribución normal estándar, la subrutina regresa el correspondiente cuantil x. Así,

$$p = \Phi(x)$$

Método Numérico.

Tenemos dos casos :

i) $p \leq 1/2$. Se determina una aproximación x_0 de x con el método *propuesto* por Hasting(1955), de la siguiente manera

$$x_0 = \eta - \left(\frac{a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2}{1 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3}\right)$$

con $a_0=2.515517$, $a_1=0.802853$, $a_2=0.010328$, $b_1=1.432788$, $b_2=0.189269$, $b_3=0.001308$ y $\eta = [\ln(1/p^2)]^{1/2}$.

La correspondiente área p_0 se calcula con el algoritmo 5 (*Cooper*,1968a), entonces se aplica el método de la serie de Taylor (ver : capítulo 2, sección 2.2), para obtener el cuantil buscado x.

ii) $p > 1/2$. Se trabaja con (1-p), encontrando (-x) como se describe arriba, para después cambiar el signo y de esta manera obtener el cuantil buscado.

ALGORITMO 8 Cuantiles de la Distribución Normal

Odeh y Evans (1974) Lenguaje: ISO Fortran

Descripción y propósito.

Dado un valor p que es el área bajo la curva de la distribución normal estándar, la función regresa el correspondiente cuantil x. Así,

$$p = \Phi(x) .$$

Método Numérico.

Para p en el intervalo $(10^{-20}, 0.5)$, la función encuentra una aproximación a x, de la siguiente manera

$$x = Y + S_4(Y) / T_4(Y)$$

donde S_4 y T_4 son polinomios de grado 4, que fueron obtenidos empleando 85 puntos en el intervalo $(10^{-20}, 0.5)$, donde

$$Y = \left[\ln(1/p^2) \right]^{1/2}.$$

Si $0.5 < p < 1$, se emplea 1-p en lugar de p.

Precisión.

La precisión al valor de x es hasta 7 digitos decimales. El *error* máximo en que puede incurrir la aproximación es 1.5×10^{-8}. La *precisión* se reduce a 1.8×10^{-6} si la función se evalua en precisión sencilla.

ALGORITMO 9

Beasley y Springer (1977) .

Cuantiles de la Distribución Normal

Lenguaje: ISO Fortran.

Descripción y propósito.

Dado un valor p que es el área bajo la curva de la distribución *n*ormal estándar, la función regresa el correspondiente cuantil x. Así,

$$p = \Phi(x)$$

Método Numérico.

Si p está en el intervalo [0.08,0.92], entonces x es calculado con la siguiente aproximación racional

$$x = q\ A(q^2)\ /\ B(q^2),$$

donde q = p-0.5 mientras que A y B son polinomios de grados 3 y 4 respectivamente, si p no se encuentra en el intervalo indicado se utiliza una variable auxiliar ($r = \sqrt{\ln(0.5 - ABS(q))}$) y x se calcula como :

$$x = \frac{q}{ABS(q)}\ C(r)\ /\ D(r),$$

donde C y D son polinomios de grados 3 y 2 respectivamente.

Debe observarse que la cantidad 0.5-ABS(q) puede producir problemas al evaluar r si p es muy pequeño. Una forma de evitar esta dificultad consiste en trabajar con 1-p, en sustitución de p, y cambiar el signo al cuantil obtenido.

ALGORITMO 10 Cuantiles de la Distribución Normal

Wichura (1988) Lenguaje: Fortran 77.

Descripción y Propósito.

Son dadas dos funciones para calcular los cuantiles de la distribución normal estándar. Dado P que es el área bajo la curva normal estándar se calcula x. Así,

$$p = \Phi(x)$$

La primer rutina PPND7, es precisa hasta 7 digitos decimales para $10^{-316} < \min(p,1-p)$. La segunda rutina PPND16, es precisa hasta 16 digitos decimales para el mismo rango.

Método Numérico.

Si P está en el intervalo [0.075,0.925], que es de la forma $[0.5-\delta,0.5+\delta]$ con $\delta=0.425$, x se obtiene como

$$x = q\ A(\delta^2 - q^2)\ /\ B(\delta^2 - q^2)$$

$$= q\ R_1(q^2),$$

donde $q = P - 0.5$ y $R_1(t)$ es una aproximación racional a

$$\Phi^{-1}\left[0.5 + \sqrt{t}\right] / \sqrt{t}$$

para $0 \le t \le \delta^2$. Los polinomios A y B son de grado 3 para PPND7 y de grado 7 para PPND16.

En el caso, cuando P está fuera del intervalo, se utiliza una variable auxiliar $r = \left[-\ln\left[\min(P,1-p)\right]\right]^{1/2}$ y x se obtine como;

$$x = \frac{q}{abs(q)} \; \frac{C(r - 1.6)}{D(r - 1.6)}$$

$$= \frac{q}{abs(q)} \; R_2(t),$$

si $r \le 5$. Si $r > 5$, entonces

$$x = \frac{q}{abs(q)} \; \frac{E(r - 5)}{F(r - 5)}$$

$$= \frac{q}{abs(q)} \; R_3(t) \; ;$$

donde $R_2(t)$ y $R_3(T)$ son aproximaciones racionales a $-\Phi^{-1}\left[\mathrm{EXP}(-t^2)\right]$ en los rangos $1.6 \le t \le 5$ y $5 \le t \le 27$ respectivamente. Para PPND7, los polinomios C y D son de grado 3, mientras que para E y F son de *grado* 2. Para PPND16, C, D, E y F son de grado 7.

Los algoritmos anteriores tiene como propósito encontrar los *cuantiles* de la distribución normal estándar.

El Algoritmo 7 tiene una desventaja con respecto a los demás, en la medida de que requiere del uso de algoritmos auxiliares, mientras que sus *competidores obtiene* x a través de caculos directos. Más aún, puede observarse que este algoritmo puede mejorarse si el procedimiento de Cooper se sustituye por otro más eficiente (Hill, 1973 por ejemplo).

Beasley y Spriger(1977), compararon los algoritmos *8* y *9* concluyendo lo siguiente: Los cálculos con el algoritmo *9* toman aproximadamente la mitad del tiempo que consume el algoritmo *8* para el mismo valor de P. En ausencia del *error* de redondeo, la cota para

$|\Phi(x)-P|$ es (aproximadamente): 5.92×10^{-9} para el algoritmo *8* y 4.66×10^{-10} para el algoritmo *9*, mientras que con error de redondeo se tiene 1.01×10^{-6} y 1.14×10^{-6} para el algoritmo *8* y *9* respectivamente.

Por otra parte, Wichura(1988) compara el algoritmo *9* con el algoritmo *10* obteniendo los siguientes resultados :El algoritmo *9* es exacto entre 7 y 9 digitos decimales para $|x|<3.5$, pero su presición se deteriora en las colas de la distribución. Por ejemplo, su precisión disminuye hasta seis lugares en $x=-4$ ($p\cong3\times10^{-5}$), hasta cinco lugares en $x=-5.5$ ($p\cong2\times10^{-8}$) y hasta cuatro lugares en $x=9.5$ ($p\cong10^{-21}$).

Por lo que respecta al tiempo de ejecución, Wichura obtuvo los siguientes resultados:

Precisión	Rango	PPND7 (MS)	PPND16 (MS)	Alg-*9* (MS)
Sencilla	Abs(p-0.5)<0.42	0.56		0.59
	Abs(p-0.5)>0.425	0.82		0.76
Doble	Abs(p-0.5)<0.42		1.62	0.99
	Abs(p-0.5)>0.425		3.68	2.81

PPND7 es practicamente igual que el algoritmo *9*. PPND16 es de 1 y 1/3 a 1 y 2/3 veces más lento que el algoritmo *9* pero produce 2 y hasta 4 digitos significativos más. Para poder comparar el algoritmo *9* con PPND16 se tuvo que evaluar el algoritmo *9* en doble precisión.

En conclusión, la comparación de estos algoritmos sugiere el empleo de PPND7 y PPND16 (Algoritmo *10*). En forma complementaria, es interesante observar que las evaluaciones en todos los polinomios de este algoritmo (sumas y multiplicaciones) involucran solamente valores positivos; esto contribuye a la estabilidad numérica del algoritmo, pues evita el problema de cancelación.

4.2) DISTRIBUCION JI-CUADRADA .

4.2.1) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una distribución ji-cuadrada (χ^2) con v grados de libertad (v>o), si X tiene una distribución continua y su *función* de densidad $f(\cdot|v)$, está especificada en cualquier punto x>o por la ecuación :

$$(4.9) \quad f(x\ |v) = \frac{x^{v/2-1}\ \mathrm{Exp}(-x/2)}{2^{v/2}\ \Gamma(v/2)} .$$

Donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma (ver sección 4.3).

La distribución χ^2 se puede obtener con el siguiente procedimiento: Sean $X_1,\ldots,X_v$ variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal de medias μ_i y varianzas σ_i^2 ($i=1,\ldots,v$) y sea

$$(4.10) \quad u = \sum_{i=1}^{v} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2,$$

entonces u tiene una distribución χ^2 con v grados de libertad y puede observarse que los grados de libertad coinciden con el número de cuadrados independientes *en* la *suma* (4.10); no obstante, los grados de libertad en general son simplemente un parámetro positivo de la distribución correspondiente.

La distribución χ^2 se puede considerar como un caso particular de la distribución gamma, es decir, si en (4.21) de la sección 4.3 se toma $\alpha=v/2$, $\beta=2$ y $\gamma=0$, se obtiene la distribución ji-cuadrada con v grados de libertad.

Por otra parte, la distribución de la raiz cuadrada positiva de una variable aleatoria que tiene una distribución χ^2 (con v *grados de* libertad) es llamada la distribución ji (χ con v grados de libertad) y su función de densidad es :

$$(4.11)\qquad g(y) = \frac{y^{v-1}\,\mathrm{Exp}(-y^2/2)}{2^{v/2}\,\Gamma(v/2)}\ ;\quad (y > 0).$$

4.2.2) ASPECTOS HISTORICOS .

Los aspectos históricos de esta distribución son mencionados en la sección (4.3).

4.2.3) PROPIEDADES .

La función generatriz de momentos de la distribución χ^2 con v grados de libertad está dada por :

$$m(t) = (1 - 2t)^{-v/2}\ ; \qquad (t < 1/2),$$

de donde se tiene que

$$E(x) = v$$

$$Var(x) = 2v\ .$$

Por otra parte, el r-ésimo momento central está dado por

$$\mu_r = 2^{\,r}\,\Gamma(v/2 + r) \,/\, \Gamma(v/2).$$

Una propiedad importante es la reproductiva, la cual establece que si X_j (j=1,2) son variables aleatorias independientes y se distribuyen como χ^2 con v_j grados de libertad respectivamente, *entonces* (X_1+X_2) se distribuye como χ^2 con v_1+v_2 grados de libertad.

4.2.4) DISTRIBUCION JI CUADRADA NO-CENTRAL .

Sean $X_1,\ldots,X_v$ variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal estandar, $a_1,\ldots,a_v$ constantes y

$$\lambda = \sum_{i=1}^{v} a_i^2\ ,$$

entonces

$$(4.12) \quad \chi'^2 = \sum_{i=1}^{v} (X_i + a_i)^2$$

tiene una distribución ji-cuadrada no-central con v grados de libertad y parámetro de no centralidad λ.

La función de densidad de la ji-cuadrada no-central con v grados de libertad y parámetro de no centralidad λ es :

$$(4.13) \quad h(\chi'^2) = \mathrm{Exp}\left[\frac{-\lambda}{2}\right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\lambda}{2}\right]^r \mathrm{Exp}\left[\frac{-\chi'^2}{2}\right] \left[\chi'^2\right]^{v/2+r-1}}{2^{v/2+r}\, r!\, \Gamma(v/2+r)} \;;$$

y su función generatriz de momentos está dada por:

$$m(t) = (1-2t)^{-v/2}\, \mathrm{Exp}\left(\frac{\lambda t}{1-2t}\right) .$$

4.2.5) ALGORITMOS .

En esta sección se presentan dos algoritmos relacionados con la distribución ji-cuadrada. El primero, debido a Hill y Pike (1966a) calcula la función de probabilidad acumulada mientras que el segundo, debido a Best y Roberts (1975), se utiliza para obtener cuantiles.

ALGORITMO II INTEGRAL DE LA JI-CUADRADA

Hill y Pike (1966a) Lenguaje:Fortran

Descripción y Propósito.

Si X se distribuye como en (4.9), entonces la función acumulativa de X es:

$$(4.14) \quad F(x) = \left[2^{v/2}\, \Gamma(v/2)\right]^{-1} \int_0^x z^{v/2-1}\, \mathrm{Exp}(-z/2)\, dz,$$

el propósito es evaluar (4.14) dados x y v.

Método Numérico.

F(x) se puede calcular por medio de

$$P(X \le x) = 1 - P(X > x),$$

donde

$$P(X > x) = P(\chi^2_{v-2} > x) + \frac{(x/2)^{v/2-1}\ \mathrm{Exp}(-x/2)}{\Gamma(v/2)}$$

que se puede verificar utilizando integración por partes.

Se tiene que aplicando este resultado sucesivamente y si v es un número entero positivo par, se llega a la siguiente conclusión

$$P(X > x) = P(Y < m)$$

donde Y se distribuye como una Poisson con parámetro x/2 (ver, capítulo 3, sección 3.2) y donde m satiface la ecuación $v=2m$.

Cuando v *es* impar tal que $v=2m+1$, entonces

$$P(X > x) = \left[\frac{\mathrm{Exp}(-x/2)}{(\pi x/2)^{1/2}}\right] \sum_{i=1}^{m} \left(x^i \Big/ \left[\prod_{j=1}^{i} (2j-1) \right] \right)$$

$$+ 2(1 - \Phi\left[\sqrt{x}\ \right])$$

en donde Φ es la distribución normal estándar.

Por otra parte, cuando v *no es* un número entero, se puede utilizar el algoritmo *16*, de la sección 4.3, recurriendo a la relación (4.26) de la misma sección.

ALGORITMO 12 Cuantiles de la distribución χ^2

Best y Roberts (1975) Lenguaje: ISO Fortran.

Descripción y Propósito.

El propósito es encontrar los cuantiles, x, de la distribución χ^2 con v grados de libertad, dado F(x). Así,

$$F(x) = \int_0^x f(z/v)\ dz$$

donde f es la función dada por (4.9).

Método Numérico.

Se encuentra una primera aproximación x_0 de Wilson y Hilferty(1931) y comentado por Kendall y Stuart(1977, Pag.397), de la siguiente manera

$$x_0 = v\left[z(2/9v)^{1/2} + 1 - (2/9v)\right]^3,$$

donde z es el cuantil de orden F(x) de la distribución normal estándar. Sin embargo, es posible utilizar mejores aproximaciones en los casos siguientes :

i) Si F(x) es pequeña, especificamente si $v < -1.24\ln[F(x)]$, entonces

$$x_1 = \left[F(x)\ v\ 2^{v/2-1}\ \Gamma(v/2) \right]^{2/v},$$

es mejor aproximación que x_0. Para el caso especial de que $x_1 < 2*10^{-6}$, $x=x_1$, asegura al menos 6 decimales correctos en el resultado.

ii) Si F(x) es grande, se utiliza como primera aproximación

$$x_2 = -2\left\{ \ln\left[1-F(x)\right] - (\frac{v}{2} - 1)\ln(x_0/2) + \ln\left[\Gamma(v/2)\right] \right\}.$$

El resultado se mejora siempre y cuando

$$x_0 > 2.2v + 6$$

iii) Si v es pequeño. Cuando $v \leq 0.32$, F(x) se expresa en términos de una aproximación a la integral de la exponencial (Hasting,1955) y x_3 se obtiene por el método de Newton-Raphson.

La aproximación obtenida se emplea para utilizar el método de la serie de Taylor (ver capitulo 2, sección 2.2).

4.3) DISTRIBUCION GAMMA .

4.3.1) LA FUNCION GAMMA .

La función gamma con argumento α se define como :

$$(4.15)\quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\, \mathrm{Exp}(-t)\, dt\ ; \qquad (\alpha > 0).$$

Utilizando integración por partes se obtienen la siguiente fórmula recursiva

$$(4.16)\quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha),$$

y los valores particulares

$$(4.17)\quad \Gamma(1/2) = (\pi)^{1/2} \quad \text{y} \quad \Gamma(1) = 1,$$

en muchos casos α es un número entero, entonces por (4.16) y (4.17) se obtiene

$$(4.18)\quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!.$$

La función gamma incompleta se define como

$$(4.19)\quad \Gamma_x(\alpha) = \int_0^{x} t^{\alpha-1}\, \mathrm{Exp}(-t)\, dt$$

y el cociente de la función gamma incompleta

$$(4.20)\quad I_x(\alpha) = \Gamma_x(\alpha) / \Gamma(\alpha).$$

La derivada del logaritmo de $\Gamma(\alpha)$ es llamada la función digamma (con argumento α) ó la función Psi.

$$\Psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[\log \Gamma(\alpha)\right]$$

$$= \Gamma'(\alpha) / \Gamma(\alpha),$$

en forma similar

$$\Psi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[\Psi(\alpha)\right]$$

$$= \frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\log \Gamma(\alpha)\right]$$

es la función trigamma y en general

$$\Psi^{(s)}(\alpha) = \frac{d^{(s+1)}}{d\alpha^{(s+1)}}\left[\log \Gamma(\alpha)\right]$$

es la función (s+2)-gamma.

De la fórmula recursiva (4.16) de la función gamma, se deriva la siguiente formula recursiva para $\Psi(\cdot)$

$$\Psi(\alpha+1) = \Psi(\alpha) + \alpha^{-1}$$

Para el cálculo de la función gamma se utiliza el algoritmo *13* devido a Hill y Pike (1966b), que se basa en la fórmula de Stirling (Johnson y Kotz, 1970). Cabe notar que este algoritmo calcula el logaritmo de la función gamma y no es el único que existe en la literatura; se cuenta con los de Lipp (1961) y Herndon (1961) que utilizan una aproximación debida a Hasting(1965), con una precisión cercana a los 7 digitos decimales. De estos dos algoritmos Hill y Pike afirman que el desarrollado por Herndon es preferible en términos de rapidez. También están los algoritmos de Holsten (1962) y Gautschi (1964) , los cuales tienen una precisión y rapidez iguales al algoritmo de Hill y Pike (10 digitos decimales), pero en muchas aplicaciones es preferible usar el de Hill y Pike para evitar dificultades con el tamaño de palabra (overflow), por ejemplo, en el cociente de la función gamma incompleta ó el cociente de la función beta incompleta.

Todos los algoritmos mencionados están codificados en algol y para usar el algoritmo de Hill y Pike se produjo la recodificación en fortran y pascal.

4.3.2) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y γ, si X tiene una distribución absolutamente continua y su función de densidad $f(\cdot/\alpha,\beta,\gamma)$ satisface:

$$(4.21) \quad f(x/\alpha,\beta,\gamma) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1}\mathrm{Exp}[-(x-\gamma)/\beta]}{\beta^{\alpha}\ \Gamma(\alpha)}, \qquad (x > \gamma).$$

Esta densidad depende de tres parámetros α, β, y γ. Si $\gamma=0$, entonces (4.21) toma la siguiente forma

$$(4.22) \quad f(x/\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{Exp}[-x/\beta]}{\beta^{\alpha}\ \Gamma(\alpha)}, \qquad (x > 0).$$

la cual, si $\alpha = 1$, se transforma en la Distribución Exponencial con parámetro β. La forma estándar de la distribución gamma se obtiene cuando $\beta = 1$ en (4.22), de manera que

$$(4.23) \quad f(x/\alpha) = \frac{x^{\alpha-1}\ \mathrm{Exp}(-x)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad (x > 0),$$

Se puede observar que la función de distribución asociada a (4.23), coincide con el cociente de la función gamma incompleta (4.20).

Un resultado interesante es el siguiente : si $X_1,\ldots,X_n$ son variables aleatorias independientes, que se distribuyen cada una como una normal estándar, entonces la distribución de

$$(4.24) \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

es de la forma (4.22) con $\alpha=n/2$ y $\beta=2$. Esta particular forma de la distribución gamma coincide con la distribución ji-cuadrada con n grados de libertad. (Ver sección 4.2).

4.3.3) ASPECTOS HISTORICOS .

Sobre la historia de esta distribución existen diversos trabajos entre los cuales se pueden citar Lancaster(1966) y Johnson y Kotz(1970).

Bienaymé en 1938 obtiene la distribución Ji-cuadrada como el límite de la variable aleatoria discreta

$$\sum_{i=1}^{k} (N_i - n\,p_i)^2\,(n\,p_i)^{-1}$$

donde $(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ tiene una distribución multinomial con parámetros $n, p_1, p_2, \ldots, p_k$.

La distribución Gamma aparece en la teoría Estadística asociada con la distribución Normal con el siguiente resultado : Si $U_1, U_2, \ldots, U_v$ son variables aleatorias independientes que se distribuyen cada una como una normal estándar, entonces la distribución de

$$\sum_{i=1}^{v} U_i^2$$

es una χ^2 con v grados de libertad.

Por otra parte, Lancaster(1966) menciona el siguiente resultado : Si $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son variables aleatorias que se distribuyen como una χ^2 con 2 grados de libertad (es decir, exponencial), entonces la suma de todas ellas se distribuye como una χ^2 con 2k grados de libertad, esto fué demostrado por Ellis en 1844. El resultado general fué probado por Bienaymé en 1852; este mismo resultado también fué establecido, usando un diferente método por Helmert en 1875. En el siguiente año Helmert demostró que si : $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, entonces

$$S^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad \text{con} \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

tiene una distribución χ^2 con n-1 grados de libertad y las variables aleatorias S^2 y $\overline{X}$ son independientes.

La distribución Gamma aparece otra vez en 1900 (Pearson, 1900) como una distribución aproximada (en su versión χ^2) para las "estadísticas", usadas en varias pruebas de contingencia.

4.3.4) PROPIEDADES .

La función generatriz de momentos de la distribución gamma con dos parámetros (4.22) es :

$$m(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha} ; \qquad (t < 1/\beta)$$

de donde se puede concluir que

$$E(x) = \alpha \beta$$

$$Var(x) = \alpha \beta^2.$$

Generalizando el resultado de la propiedad reproductiva de la χ^2 (ver sección 4.2) puede comprobarse que la distribución gamma también tiene esta propiedad, es decir, si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes que se distribuyen como Gamma(α_1,β,γ) y (α_2,β,γ) respectivamente, entonces X_1+X_2 también tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha_1+\alpha_2$, β y γ.

La figura 4.2 muestra diversas densidades de la distribución Gamma. (Reproducida parcialmente de Johnson y Kotz, 1970)

4.3.5) ALGORITMOS .

La distribución acumulativa de la función de densidad (4.22) está dada por:

$$(4.25) \quad F(x \mid \alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1}\, \mathrm{Exp}(-t/\beta) \; dt, \quad \text{si } x > 0,$$

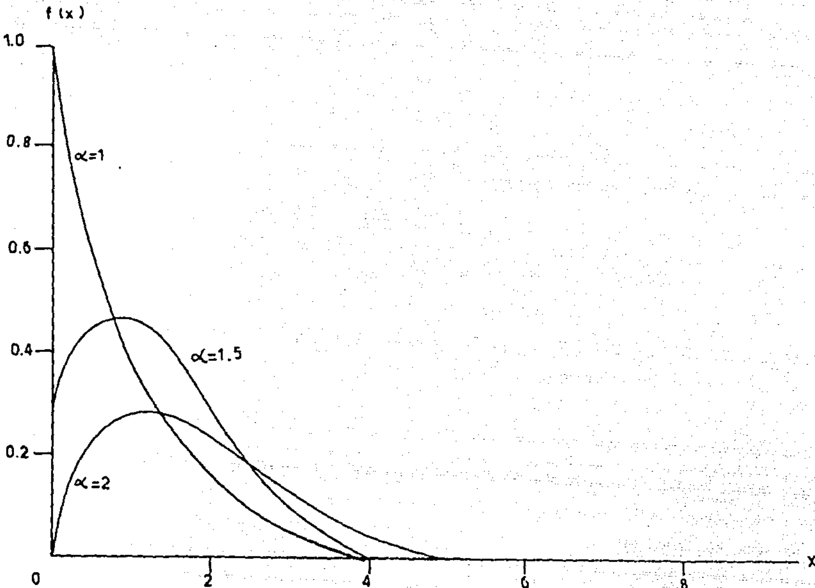
y se define como $F(x \mid \alpha,\beta) = 0$ cuando $x \leq 0$. Esta función se calcula con métodos numéricos, a menos que α sea un número natural, en cuyo caso la función puede evaluarse utilizando sucesivamente integración por partes de manera que :

$$F(x \mid \alpha,\beta) = 1 - \mathrm{Exp}(-x/\beta) \left[1 + \frac{x}{\beta} + \frac{1}{2\,!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \right]$$

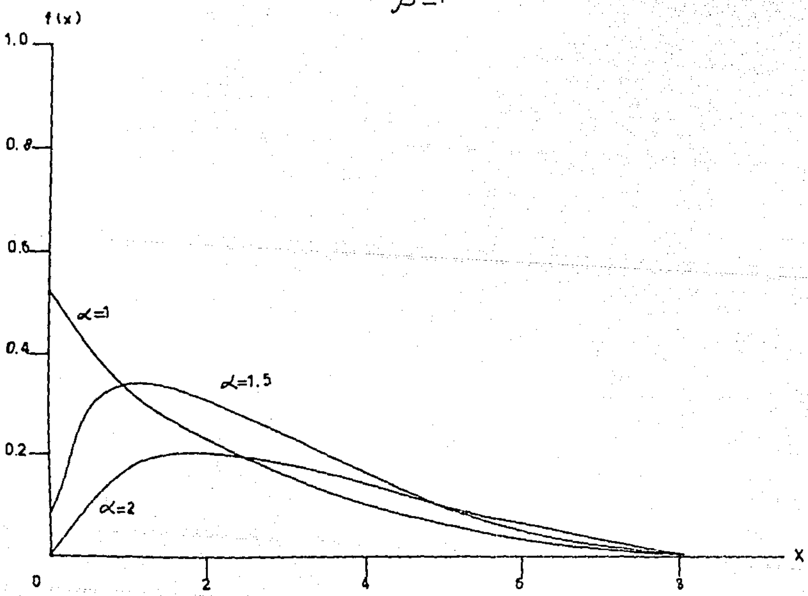
Por otra parte, si α no es un número natural, los tres siguientes algoritmos pueden aplicarse a este problema. Los tres evalúan la función

DENSIDADES GAMMA

Fig. 4.2



$\beta = 1$



$\beta = 2$

$$I_x(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} \, \mathrm{Exp}(-t) \, dt.$$

A partir de la cual se puede obtener la distribucion acumulativa (4.25) puesto que

$$F(x \mid \alpha,\beta) = I_{x/\beta}(\alpha).$$

En este punto es conveniente recordar que en virtud de que la distribución χ^2 es un caso particular de la distribución Gamma, entonces cualquier algoritmo para esta distribución puede aplicarse al caso χ^2 aún cuando los grados de libertad no sean enteros. Especificamente, se tiene que :

$$(4.26) \quad P\left[\chi^2_v < w\right] = I_{w/2}(v/2) .$$

ALGORITMO 14 La Integral de la Gamma Incompleta.

Bhattacharjee (1970) Lenguaje: ASA Standar Fortran.

Descripción y Propósito.

Para valores dados de x, α y la función Gamma, el algoritmo calcula el cociente de la función Gamma Incompleta, dada por (4.20).

Método Numérico.

El programa utiliza la siguiente expansión en serie de potencias

$$I_x(\alpha) = \frac{\mathrm{Exp}(-x)\, x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+r)}\right]$$

si ocurre que $x < \alpha$ o bien $\alpha \le x \le 1$. El cálculo se termina cuando una nueva contribución a la serie es menor que la constante ACU, definida en el programa. Para todo otro caso, se utiliza la expansión en fracciones continuas

$$I_x(\alpha) = 1 - \frac{\mathrm{Exp}(-x)\, x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{x+}\ \frac{1-\alpha}{1+}\ \frac{1}{x+}\ \frac{2-\alpha}{1+}\ \frac{2}{x+}\ \cdots\right]$$

que se termina cuando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas es menor que el valor ACU.

ALGORITMO 15 La Integral de la Gamma Incompleta.

Lau (1980) Lenguaje: ISO Fortran.

Descripción y Propósito.

El propósito es evaluar

$$I_x(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} \, Exp(-t) \, dt, \qquad \alpha, x > 0,$$

para valores dados de α, x y el logaritmo de $\Gamma(\alpha)$.

Método Numérico.

Sea

$$L(x,\alpha) = \int_0^1 t^{\alpha-1} \, Exp(-xt) \, dt, \qquad \alpha, x > 0.$$

Esta función tiene la siguiente propiedad

$$(4.27) \quad L(x,\alpha) = \frac{Exp(-x)}{\alpha} + \frac{x}{\alpha} L(x,\alpha+1)$$

y cuando α tiende a infinito, $L(x,\alpha)$ tiende a cero. Usando (4.27) repetidamente obtenemos

$$L(x,\alpha) = \frac{Exp(-x)}{\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{r} \frac{x}{\alpha + i} \right]$$

$$= \frac{Exp(-x)}{\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} C_r(x,\alpha),$$

donde $C_0(x,\alpha) = 1$ y $C_r(x,\alpha) = \frac{x}{\alpha + r} C_{r-1}(x,\alpha), \qquad r = 1,2,...$

Ahora,

$$I_x(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x u^{\alpha-1} \, Exp(-u) \, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xt)^{\alpha-1} \, Exp(-xt) \, dt$$

$$= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \quad L(x,\alpha)$$

$$= f(x) \sum_{r=0}^{\infty} C_r(x,\alpha)$$

con $f(x) = \dfrac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\ \mathrm{Exp}(x)}$.

ALGORITMO r6 La Integral de la Gamma Incompleta.

Shea (1988) Lenguaje: Fortran 77.

Descripción y Propósito.

Se evalúa

$$I_x(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1}\ \mathrm{Exp}(-t)\ dt, \qquad \alpha, x > 0,$$

para valores dados de α, x y el logaritmo de la función Gamma.

Método Numérico.

Si α es muy grande ($\alpha > 1000$), se utiliza una aproximación normal de la siguiente manera

$$I_x(\alpha) = \Phi\left\{ 3\ \alpha^{1/2} \left[(x/\alpha)^{1/3} + \frac{1}{9\alpha} - 1 \right] \right\}$$

de otra manera, se actúa como en el algoritmo 1.

Acerca de los tres algoritmos presentados para el cálculo de $I_x(\alpha)$, Shea (1988) señala que el algoritmo *r4* es preferible al algoritmo *r5*, puesto que la segunda rutina en un afán de utilizar un tiempo menor sacrifica precisión. Además, señala que tanto el algoritmo *r4* y el algoritmo *r5* intentan el cálculo de una expresión de la forma u·Exp(-v) donde u y v (ambos positivos) pueden ser muy grandes; el camino correcto para evaluar u·Exp(-v) es calcular Exp(-v·log(u)). Procediendo de esta manera se remueve el posible error (IFAULT=3 en el algoritmo *r4* e IFAULT=2 en el algoritmo *r5*) cuya detección han introducido recientemente Rice y Gaines Das(1985) en estos algoritmos.

En virtud de estas observaciones, se utilizará el algoritmo *r6* para calcular probabilidades de la distribución Gamma con α no necesariamente entero.

Para encontrar los cuantiles de la distribución gamma especificada por (4.22) se puede utilizar el algoritmo de Best y Roberts (ver sección 4.2, subsección 4.2.5) de la siguiente manera :

Sea Z que se distribuye como una Gamma(α,β), y sea $W = 2Z/\beta$, entonces

$$W \sim \chi^2_v \qquad \text{donde } v = 2\alpha.$$

Por lo tanto,

$$P[\, Z \leq z \,] = P[\, W \leq w \,]$$

con $z = \beta w \,/\, 2$, siendo w el resultado de Best y Roberts.

4.4) DISTRIBUCION BETA .

4.4.1) LA FUNCION BETA .

La función beta con argumentos p y q se define de la siguiente manera

$$(4.28)\quad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \quad (p>0;\ q>0).$$

Para el cálculo de la función beta se puede utilizar la función gamma (sección 4.3), a través de la siguiente relación

$$(4.29)\quad B(p,q) = \Gamma(p)\,\Gamma(q) \,/\, \Gamma(p+q).$$

Generalizando la función beta, se puede definir la función beta incompleta

$$(4.30)\quad B_x(p,q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \quad (0<x\leq 1),$$

y también el cociente de la función beta incompleta:

$$(4.31)\quad I_x(p,q) = B_x(p,q) \,/\, B(p,q).$$

4.4.2) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una distribución beta estándar con parámetros p y q ($p>0, q>0$), si X tiene una distribución continua *cuya función* de densidad $f(\cdot\ |p,q)$ satisface

$$(4.32)\quad f(x\ |p,q) = \frac{1}{B(p,q)}\, x^{p-1}(1-x)^{q-1} \quad (0\leq x\leq 1).$$

Es importante notar que la función de distribución asociada a (4.32), coincide con el cociente de la función beta incompleta especificada por (4.31). De la relación

$$(4.33)\quad I_x(p,q) = 1 - I_{1-x}(q,p)\ ,$$

se sigue que si X es beta con parámetros p y q, entonces $V=1-X$ es beta con parámetros q y p.

La distribución beta está relacionada con otras distribuciones de uso frecuente en la teoría Estadística. Por ejemplo, si

$$(4.34) \quad V^2 = \chi_1^2 \,/\, (\chi_1^2 + \chi_2^2)$$

donde χ_i^2 $(i=1,2)$ son variables aleatorias independientes que se distribuyen como ji-cuadradas con v_i grados de libertad respectivamente, entonces V^2 sigue una distribución beta estándar (4.32) con $p = v_1/2$ y $q = v_2/2$, además V^2 y $(\chi_1^2 + \chi_2^2)$ son variables aleatorias independientes.

La distribución beta también es muy usada como una densidad apriori en inferencia bayesiana para el caso de proporciones. De hecho constituye la familia conjugada básica para las verosimilitudes Binomial y Bernoulli.

La familia general de distribuciones beta esta compuesta por todas las distribuciones con función de densidad de la forma :

$$(4.35) \quad g(y) = \frac{1}{B(p,q)} \, \frac{(y-a)^{p-1} \, (b-y)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}} \quad (a \le y \le b)$$

con $p > 0$, $q > 0$ y $a < b$. Naturalmente la beta estándar (4.32) se obtiene como caso particular si $a=0$ y $b=1$.

4.4.3) PROPIEDADES .

Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución beta estándar, entonces el *r-ésimo momento* central está dado por :

$$m'_r = \frac{B(p + r,\ q)}{B(p,q)}$$

$$= \frac{\Gamma(p + r)\ \Gamma(p + q)}{\Gamma(p)\ \Gamma(p + q + r)}$$

$$= \frac{p^{(r)}}{(p+q)^{(r)}} \quad (\text{si } r \text{ es un entero positivo}) ,$$

donde $y^{(r)} = y(y+1)\cdots(y+r-1)$. En particular

$$E(x) = p \,/\, (p+q)$$

$$Var(x) = \frac{p\,q}{(p+q)^2\ (p+q+1)}$$

Por otra parte, si $p > 1$ y $q > 1$ entonces $f(x\ |p,q)$ tiende a cero cuando x tiende a cero ó x tiende a 1; si $0 < p < 1$, $f(x\ |p,q)$ tiende a infinito cuando x tiende a cero y si $0 < q < 1$, $f(x\ |p,q)$ tiende a infinito cuando x tiende a uno.

Si $p > 1$ y $q > 1$, $f(x\ |p,q)$ tiene una única moda en

$$x = \frac{p-1}{p+q-2} .$$

Si $p < 1$ y $q < 1$ hay un valor mínimo de $f(x\ |p,q)$ en el mismo valor de x. Si $p = q$, la función de densidad es simétrica con respecto a $x = \frac{1}{2}$.

En la figura 4.3 se exhiben algunos ejemplos de densidades Beta.

La función acumulativa de X tiene relación con la función acumulativa de la distribución F la cual está dada por :

$$P\,[X \le x] = P\,[Y \le y]$$

donde Y tiene una distribución F con α y β grados de libertad (ver sección 4.6) y

$$y = \frac{\beta\, x}{\alpha - \alpha\, x} .$$

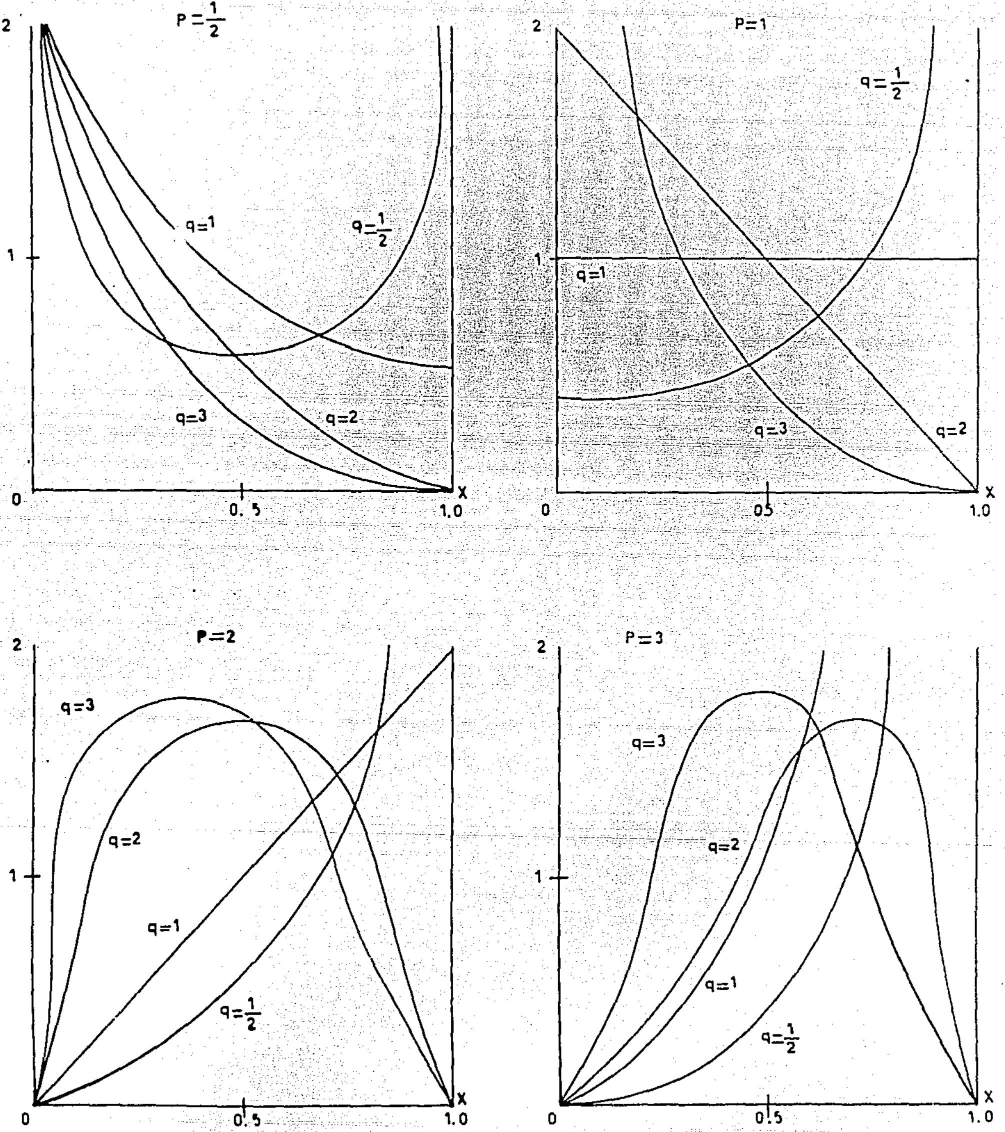
4.4.4) DISTRIBUCION BETA NO-CENTRAL .

Otra generalización de la distribución beta es la siguiente.

Si en la relación (4.34), la distribución de χ_1^2 se sustituye por una distribución ji-cuadrada no-central con ν_1 grados de

DENSIDADES BETA

Fig 4.3



libertad y parámetro de no centralidad λ_1, entonces la distribución de V^2 es una beta no-central con parámetros $v_1/2$, $v_2/2$ y parámetro de no centralidad λ_1.

Si χ_2^2 también tiene una distribución ji-cuadrada no-central con v_2 grados de libertad y parámetro de no centralidad λ_2, entonces la distribución de V^2 es una beta doblemente no-central con parámetros $v_1/2$, $v_2/2$ y parámetros de no centralidad (λ_1,λ_2).

4.4.5) ALGORITMOS .

Para poder evaluar la función acumulativa de la distribución beta y calcular sus cuantiles, se presentan cuatro algoritmos. Los dos primeros tiene como propósito evaluar el cociente de la función beta incompleta (4.31).

ALGORITMO 17.

El cociente de la función beta incompleta .

Majumder y Bhattacharjee (1973a) .

Lenguaje: ISO Fortran .

Descripción y Propósito.

Para valores dados de x ($0\leq x\leq 1$), $p>0$, $q>0$ y la función beta (4.28), se evalua el cociente de la función beta incompleta (4.31).

Método Numérico.

El método numérico es debido a Soper(1921), el cual utiliza las identidades

$$I_x(p,q) = \frac{\Gamma(p + q)}{\Gamma(p + 1)\,\Gamma(q)}\, x^p (1 - x)^{q-1} + I_x(p+1,\ q-1)$$

$$I_x(p+j,\ q+j) = \frac{\Gamma(p + q)}{\Gamma(p+j+1)\,\Gamma(q-j)}\, x^{p+j} (1 - x)^{q-j} + I_x(p+j+1,\ q-j)$$

La primera de estas relaciones es llamada 'reducción por partes' y la segunda 'reducción por aumento a p'.

Sea

$$j = [\, q + (1-x)(p+q)\,]$$

donde $[Z]$ denota el *mayor entero menor* o igual a Z.

Si $p \geq (p+q)\cdot x$, entonces primero se aplicá la relación de 'reducción por partes' y después 'la reducción por aumento a p' esto se hace al menos j veces. Si J es cero, entonces solo 'reducción por aumento a p' son aplicadas.

El proceso de reducción se termina cuando una contribución a la integral es menor o igual que el valor de ACU (0.1E-7).

Si $p<(p+q)\cdot x$, $I_{1-x}(q,p)$ es calculado con el procedimiento de arriba y $I_x(p,q)$ es obtenido por medio de la relación (4.33).

Un resumén de este método es :

$$I_x(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q)}\, x^p\, (1-x)^{q-1} \left[1 + \frac{q-1}{p+1}\, x \left[1 + \frac{p+q}{p+2}\, \frac{x}{1-x} \right.\right.$$

$$\left[1 + \frac{q-2}{p+3}\, x \left[1 + \frac{p+q+1}{p+4}\, \frac{x}{1-x} \left[1 + \frac{q-3}{p+5}\, x \left[1 + \cdots \right.\right.\right.\right.$$

ALGORITMO 18.

El cociente de la función beta incompleta .

Press, Flannery, Teukolsky y Vetterling (1989) .

Lenguaje : Fortran .

Descripción y Propósito.

Para valores dados de x $(0 \leq x \leq 1)$, $p>0$, $q>0$ y la función beta (4.28), se evalua el cociente de la función beta incompleta (4.31).

Método Numérico.

Este método utiliza una *fracción continua* debida a Aroian(1941, 1959). La forma de esta fracción es :

$$I_x(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)\, x^p\, (1-x)^q}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q)} \left[\frac{1}{1+}\; \frac{c_1}{1+}\; \frac{c_2}{1+} \cdots \right]$$

donde

$$c_{2i} = \frac{i\,(q-i)\,x}{(p+2i-1)\,(p+2i)}$$

$$c_{2i+1} = -\frac{(p+i)(p+q+i)\,x}{(p+2i+1)(p+2i)}$$

Este método converge *rapidamente* para $x < (p-1)/(p+q-2)$. Cuando x esta fuera de este rango se pude utilizar la relación (4.33).

Los algoritmos anteriores trabajan con una precisión cercana a 6 digitos decimales.

Por otra parte, el *algoritmo 17* puede tener problemas con el tamaño de palabra (overflow) para posibles valores de p y q como han notado Cran, Martin y Thomas (1975) mientras que en el *algoritmo 18* no sucede así.

Por lo tanto se elige el *algoritmo 18* para calcular el cociente de la función beta incompleta.

Los dos algoritmos siguientes estan diseñados para encontrar los cuantiles del cociente de la función beta incompleta.

ALGORITMO 19.
Cuantiles del cociente de la función beta incompleta.
Majumder y Bhattacharjee (1973b).
Lenguaje: ISO Fortran.

Descripción y Propósito.

Para valores dados de α ($0\leq\alpha\leq1$), $p>0$, $q>0$ y la función beta $B(p,q)$; se obtiene el valor x que satisface la relación

$$I_x(p,q) = \alpha .$$

Esto es,

$$[B(p,q)]^{-1}\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \alpha; \qquad 0\leq x\leq 1$$

Método Numérico.

Se calcula una aproximación al cuantil superior de orden α de una distribución ji-cuadrada con 2q grados de libertad, que se obtiene mediante la siguiente relación

$$\chi^2_\alpha = 2q\left[1 - (9q)^{-1} + y_\alpha\,(9q)^{-1/2}\right]^3$$

con y_α una aproximación al cuantil superior de orden α de la distribución normal estándar (Hasting,1955), calculado como sigue:

$$y_\alpha = \eta - \left(\frac{a_o + a_1\eta}{1 + b_1\eta + b_2\eta^2}\right)$$

con

$$\eta = \sqrt{\ln(1/\alpha^2)}$$

y las constantes

$$a_o = 2.30753,\ a_1 = 0.27061,\ b_1 = 0.99229,\ b_2 = 0.04481.$$

Se determina una aproximación x_o dependiendo de los tres casos siguientes:

$$x_o = \begin{cases} 1 - \left[(1 - \alpha)qB(p,q)\right]^{1/q} ; & \text{si } \chi^2_\alpha < 0 \\ \left[\alpha\ p\ B(p,q)\right]^{1/p} ; & \text{si } (4p+2q-2)/\chi^2_\alpha < 1 \\ 1 - 2/\left[(4p + 2q - 2)\chi^2_\alpha + 1\right] ; & \text{otro caso} \end{cases}$$

La solución final se obtiene por el método de Newton-Raphson. El proceso de iteración termina cuando el valor absoluto de la diferencia entre dos iteraciones sucesivas es menor o igual que ACU(0.1E-6).

ALGORITMO 20.

Cuantiles del cociente de la función beta incompleta.

IMSL Library (1977).

Lenguaje: Fortran.

Descripción y Propósito.

Para valores dados de α $(0\le\alpha\le1)$, $p>0$ y $q>0$; la función calcula el valor x que satisface la relación

$$I_x(p,q) = \alpha\ .$$

Esto es.

$$[B(p,q)]^{-1} \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \alpha; \qquad 0\leq x\leq 1$$

Método Numérico.

Se utiliza el método de la Bisección (ver capítulo 2, sección 2.1) en el intervalo [0,1].

Cran, Martin, Thomas (1975) comentan sobre el algoritmo *19* concluyendo lo siguiente :

a) El método de Newton-Raphson no siempre converge a una solución en el intervalo [0,1].

b) El método fracasa si x es exactamente 0 ó 1, cuando intenta evaluar el ln(0). (Etiqueta 7 en el código).

c) Puede tener problemas con el tamaño de palabra (overflow) para posibles valores de p y q.

Estas observaciones son las que llevan a utilizar el algoritmo *20* para obtener los cuantiles del cociente de la función beta incompleta. El cual se utilizará para producir tablas de la distribución Beta.

4.5) DISTRIBUCION t .

4.5.1) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una distribución t (de Student) con v grados de libertad (v>o), si X tiene una distribución continua cuya función de densidad $f(\cdot|v)$ está especificada en cualquier punto x $(-\infty<x<\infty)$ por la ecuación :

$$(4.36) \quad f(x|v) = \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{(v\pi)^{1/2}\,\Gamma(v/2)}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}.$$

En muchas aplicaciones, el parámetro v es un entero positivo.

La distribución t es importante en el trabajo de Estadística por varias razones entre las cuales esta la siguiente : Si X y Y son variables aleatorias independientes, tales que X sigue una distribución normal estándar y Y sigue una distribución ji-cuadrada con v grados de libertad, entonces la variable aleatoria

$$(4.37) \quad \frac{X}{(Y/v)^{1/2}}$$

tiene una distribución t con v grados de libertad.

Algunas veces a esta distribución se le llama la distribución t estandarizada con v grados de libertad. En analogía con el caso de la Familia Normal, se dice que la variable aleatoria Y tiene una distribución t de Student con v grados de libertad, parámetro de localización μ y precisión τ, si la variable

$$(4.38) \quad X = \tau^{1/2}(Y-\mu)$$

sigue la distribución dada por (4.36).

Otra posible extensión de esta familia produce la distribución multivariada t de Student con v grados de libertad, <u>vector</u> de localización $\boldsymbol{\mu}$ (en $\mathbb{R}^k$) y <u>matriz</u> de precisión T(de k por k). El vector X en $\mathbb{R}^k$ sigue esta distribución si su función de densidad está dada por :

$$(4.39) \quad g(\underline{X} \mid v,\mu,T) = C\left[1 + 1/v\,(\underline{X} - \mu)'T(\underline{X} - \mu)\right]^{-(v+k)/2}$$

donde $C = \dfrac{\Gamma\left[(v+k)/2\right]\,\left|T\right|^{1/2}}{\Gamma\left[v/2\right]\,(n\pi)^{k/2}}$.

4.5.2) ASPECTOS HISTORICOS .

De acuerdo a Johnson y Kotz (1970) :

Si $X_1,\ldots X_v$ son variables aleatorias independientes, con una distribución común normal de media μ y desviación estándar σ, entonces

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma \;/\sqrt{v}}$$

con

$$\bar{X} = (1/v)\sum_{i=1}^{v} X_i$$

tiene una distribución normal estándar. Esta estadística puede ser usada en la construcción de intervalos de confianza para el valor de μ, cuando σ es conocido. Si σ es desconocido, es razonable proponer su remplazo por el estimador

$$S = \left[(v-1)^{-1}\sum_{i=1}^{v}(X_i - \bar{X})^2\right]^{1/2}.$$

Este procedimiento fué adoptado por algún tiempo, como una solución aproximada, puesto que las distribuciones de

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{v}} \quad \text{y} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{v}}$$

son diferentes. En 1908, W.S.Gossett (que utilizó el seudónimo de 'Student') indicó el camino para resolver esta dificultad al obtener la distribución exacta de

$$T = \sqrt{(v-1)}\;\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{v}}$$

y publicar una tabla de la función de distribución acumulativa.

La Estadística T es usualmente llamada 't de Student' y la correspondiente distribución es llamada 'distribución de Student'. Ocasionalmente es llamada también la Estadística de Fisher y distribución de Fisher respectivamente.

4.5.3) PROPIEDADES .

La función de densidad de una variable aleatoria t con v grados de libertad (t_v) es simétrica en cero y tiene una única moda en cero. Se puede demostrar que

$$\lim_{v \to \infty} f(x|v) = (2\pi)^{-1/2} \operatorname{Exp}(-x^2/2).$$

Esto quiere decir, cuando v tiende a infinito, la distribución t tiende a la distribución normal estándar. (Este es un método básico de aproximación a la distribución t).

Todos los *momentos centrales* impares de t_v son cero. Si r es par y r<v, entonces el r-ésimo momento central está dado por :

$$m_r(tv) = v^{r/2} \frac{\Gamma\left[\frac{r+1}{2}\right] \; \Gamma\left[\frac{v-r}{2}\right]}{\Gamma[1/2] \; \Gamma[v/2]}$$

$$= v^{r/2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (r-1)}{(v-r)(v-r+2)\cdots(v-2)} .$$

Si r≥v,el r-ésimo *momento* no existe. En particular, si v>2, entonces

$$E(t_v) = 0$$

$$Var(t_v) = v/(v-2) .$$

Por otra parte, *cuando* v=1, no existe ningún momento central y t_v *sigue* la llamada distribución de Cauchy.

4.5.4) DISTRIBUCION T NO-CENTRAL .

La distribución de :

(4.40) $T' = (X + \delta) / (Y/v)^{1/2}$,

donde X y Y son variables aleatorias independientes que se distribuyen como una normal estándar y ji-cuadrada con v grados de libertad respectivamente y δ una constante, es llamada la distribución t no-central con v grados de libertad y parámetro de no centralidad δ. Si δ es igual a cero, la distribución se convierte en una t_v (distribución t estándar con v grados de libertad).

La esperanza y la varianza de T' son respectivamente :

$$E\,[T'] = \delta$$

$$Var\,[T'] = 1 + (1/2)\,\delta^2\,v^{-1}\ .$$

Si la variable Y en el *denominador* de (4.40) es remplazada por una ji-cuadrada no-central con parámetro de no centralidad λ y v grados de libertad (ver sección 4.2), la distribución se modifica y es llamada: 'La distribución t doblamente no-central con parámetros de no centralidad (δ,λ) y v grados de libertad.

4.5.5) ALGORITMOS .

Con el fin de evaluar la integral de la distribución t de Student con argumento x y grados de libertad v se presentan los dos algoritmos siguientes.

ALGORITMO 21 La Integral de la Distribución t de Student.
Cooper (1968b) Lenguaje : ASA Standar Fortran.

Descripción y Propósito.

El propósito es evaluar la función de distribución acumulativa de la t de Student, para un argumento x y grados de libertad v. Es decir,

$$(4.41)\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y|v)\ dy$$

donde $f(y|v)$ esta dada por (4.36).

Método Numérico.

El método numérico usado es obtenido como un caso especial de un método dado por Owen(1965) para una distribución t no-central.

La función de distribución acumulativa de la t no-central puede escribirse como

$$H(x|v,\delta) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(v/2)\, 2^{(v-2)/2}} \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{xy}{v^{1/2}} - \delta\right) y^{v-1}\, \phi(y)\, dy$$

donde $\Phi(y)$ y $\phi(y)$ son la funcion de distribución normal estándar y su función de densidad respectivamente.

H puede evaluarse aplicando en forma repetida integración por partes, obteniendose para valores impares de v

$$H(x|v,\delta) = \Phi(-\delta\sqrt{B}) + 2\, T(\delta\sqrt{B}, A) + 2[M_1, M_3, \ldots, M_{v-2}]$$

y para valores pares de v

$$H(x|v,\delta) = \Phi(-\delta) + \sqrt{2B}\, [M_0, M_2, \ldots, M_{v-2}]$$

donde $A = x/(v^{1/2})$, $B = v/(v+x^2)$,

$$T(h,a) = (2\pi)^{-1} \int_0^{a} \frac{\operatorname{Exp}\left[-\frac{h^2(1+u^2)}{2}\right]}{1+u^2}\, du,$$

y donde $\{M_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, satisface la recursión

$$M_{-1} = 0, \qquad M_0 = A\sqrt{B}\,\phi(\delta\sqrt{B})\Phi(\delta A\sqrt{B}),$$

$$M_1 = B[\delta A M_0 + (A/\sqrt{2\pi})\phi(\delta)], \qquad M_2 = B[\delta A M_1 + M_0]/2,$$

$$M_3 = 2B[\delta A M_2 + M_1]/3, \qquad M_4 = 3B[\delta A M_3 + M_2]/4,$$

.

.

.

$$M_k = (k-1)B[\xi_k\, \delta A M_{k-1} + M_{k-2}] / k,$$

con $\xi_k = [(k-2)\xi_{k-1}]^{-1}$, para $k \geq 3$ y $\xi_2 = 1$.

Si $\delta = 0$, la distribución t no-central se reduce a la distribución t de Student. Notando que,

$$T(0,a) = \arctan(a) \,/\, 2\pi.$$

Precisión.

El método es teoricamente exacto. La inexactitud es debido al redondeo o al truncamiento, pero el resultado puede ser exacto hasta 11 lugares decimales en una computadora que trabaja con 12 lugares significativos o más. El tiempo que toma el cálculo depende de los grados de libertad.

ALGORITMO 22 La Integral de la Distribución t de Student
Levine (1968) Lenguaje: Fortran.

Descripción y Propósito.

Se evalua el complemento a 1 de (4.41), para un argumento dado x y grados de libertad v. Es decir,

$$G(x) = \int_x^{\infty} f(y/v)\, dy$$

Método Numérico.

La evaluación exacta de G puede llevarse acabo utilizando integración por partes en forma repetida. De esta manera se obtiene :

Para v un entero impar,

$$G(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\left[\arctan(a) + ab\left[1 + b(2/3) + b^2\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\right) + b^{\frac{v-3}{2}}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{v-3}{v-2}\right]\right]\right]$$

y para v un entero par,

$$G(x) = 1 - a\sqrt{b}\left[1 + b\left(\frac{1}{2}\right) + b^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right) + \cdots + b^{\frac{v-2}{2}}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{v-3}{v-2}\right]\right],$$

donde $a = \dfrac{x}{(v^{1/2})}$ y $b = (1 + a^2)^{-1}$.

Los algoritmos *21* y *22* son muy rapidos y simples. El método numérico de estos dos algoritmos es teoricamente exacto, pero el algoritmo *21* da al menos 11 lugares significativos, mientras que el algoritmo *22* sólo da 6 lugares significativos. Estos dos algoritmos utilizan grados de livertad enteros, para resolver esta dificultad . se sugiere utilizar los algoritmos de la distribución Beta (ver sección 4.4) utilizando la relación dada por :

$$(4.42) \quad P\left[X \le x\right] = 1 - 0.5\ I_y(v/2,\ 1/2)\ ,$$

donde X tiene una distribución t de student con v grados de libertad y

$$y = \frac{v}{v + x^2}$$

El algoritmo siguiente esta diseñado para encontrar los cuantiles de la distribución t con v grados de libertad. el cual se utilizará para dar tablas de la distribución t.

ALGORITMO 23 Cuantiles de la distribución t.

Lenguaje : Fortran.

Descripción y Propósito.

El propósito es encontrar los cuantiles, x, de la distribución t dados F(x) (probabilidad) y v (grados de libertad). Así :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y|v)\ dy$$

donde $f(y|v)$ esta dada por (4.36).

Método Numérico.

El método numérico es el visto en el capitulo 2, sección 2.2, tomando la aproximación x_o de Gaver y Kafadar(1984) al cuantil buscado x, es decir,

$$x_o = \left[v\ \text{Exp}\left(\frac{z^2\ (v - 3/2)}{(v - 1)^2}\right) - v\right]^{1/2}.$$

donde z es el cuantil de orden F(x) de una normal estándar. Pero si sucede que v < 3/2 entonces se utiliza como aproximación a :

$$x_o = Z + \frac{1}{4}(Z^3 + Z)\, v^{-1} + \frac{1}{96}(5Z^5 + 16Z^3 + 3Z)\, v^{-2} .$$

ver Johnson y Kotz(1970).

4.6) DISTRIBUCION F .

4.6.1) DEFINICION .

Una variable aleatoria X tiene una distribución F con α y β grados de libertad (α>o, β>o), si X tiene una distribución absolutamente continua y su función de densidad $f(\cdot\ |\alpha,\beta)$ está especificada en cualquier punto x>o por la ecuación :

$$(4.43)\quad f(x\ |\alpha,\beta) = \frac{\Gamma[\ (\alpha+\beta)/2\ ]\ \alpha^{\alpha/2}\ \beta^{\beta/2}}{\Gamma(\alpha/2)\ \Gamma(\beta/2)} \frac{x^{(\alpha/2)-1}}{(\beta + \alpha x)^{(\alpha+\beta)/2}} .$$

Además, $f(x\ |\alpha,\beta) = 0$ en todo punto $x \leq 0$.

Una notación usual es $F_{\alpha,\beta}$, una abreviación para: 'F con α, β grados de libertad'.

La distribución F es importante en el trabajo estadístico por varias razones entre las cuales destaca la siguiente : Si X y Y son variables aleatorias independientes, X tiene una distribución Ji-cuadrada con α grados de libertad y Y tiene una distribución Ji-cuadrada con β grados de libertad, entonces la variable aleatoria

$$(4.44)\quad \frac{X\ /\ \alpha}{Y\ /\ \beta} ,$$

tiene una distribución $F_{\alpha,\beta}$.

Nótese que el orden α, β es importante. De hecho es claro que $F_{\alpha,\beta}$ y $F^{-1}_{\beta,\alpha}$ tienen la misma distribución. En particular,

$$\int_{-\infty}^{k} f(t\ |\alpha,\beta)\ dt = \int_{1/k}^{\infty} f(t\ |\beta,\alpha)\ dt .$$

Una consecuencia muy importante de la distribución F es que se puede representar por medio de un cociente de formas cuadraticas independientes, que puede ser construido a partir de variables aleatorias normales. Por ejemplo: Sea $X_1,\ldots,X_m$ ($m \geq 2$) una muestra aleatoria de una distribución Normal(μ_1, σ_1^2) y sea $Y_1, \ldots, Y_n$ $(n \geq 2)$ una muestra aleatoria de una distribución Normal(μ_2, σ_2^2). Si las muestras son independientes y

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2,$$

entonces el cociente

$$(4.45) \qquad \frac{S_1^2 \quad \sigma_2^2}{S_2^2 \quad \sigma_1^2}$$

tiene una distribución $F_{m-1,n-1}$.

En la teoría Estadística *este* cociente es utilizado en la prueba de hipótesis de igualdad de varianzas $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$.

4.6.2) PROPIEDADES .

Sea X una variable aleatoria con distribución $F_{\alpha,\beta}$, como en (4.43), entonces cuando x tiende a infinito $f(x \mid \alpha,\beta)$ tiende a cero; este también es el caso cuando x tiende a cero, con tal de que $\alpha >$ 2. En esta situación hay una única moda en

$$x = \frac{\beta(\alpha - 2)}{\alpha(\beta + 2)} .$$

Si $\alpha = 2$, hay una moda en $x = 0$; si $\alpha = 1$; $f(x \mid \alpha,\beta)$ tiende a infinito cuando x tiende a cero.

El r-ésimo momento central de la distribución F es:

$$\mu_r' = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\alpha(\alpha + 2)\cdots(\alpha + 2 \cdot \overline{r - 1})}{(\beta - 2)(\beta - 4)\cdots(\beta - 2r)}$$

para $\beta > 2r$. Si $\beta \leq 2r$, el r-ésimo momento es infinito. En particular, la media y la varianza son

$$E(X) = \frac{\beta}{\beta - 2} \qquad \text{para } \beta > 2.$$

$$Var(X) = \frac{2 \beta^2 (\alpha + \beta - 2)}{\alpha (\beta - 2) (\beta - 4)} \qquad \text{para} \quad \beta > 4.$$

La función de distribución acumulativa de X es :

$$(4.46) \quad P[X \leq X_o] = I_y(\alpha/2, \beta/2) \qquad \text{donde} \quad y = \frac{\alpha X_o}{\beta + \alpha X_o}$$

con $I_y(\cdot,\cdot)$ es el cociente de la función Beta Incompleta.

Está relación es muy importante, porque los algoritmos para claclular el cociente de la función Beta Incompleta, pueden ser utilizados para evaluar la función de distribución acumulativa de X.

4.6.3) DISTRIBUCION Z DE FISHER .

La distribución de

$$(4.47) \quad m + \theta \log F_{\alpha,\beta} ,$$

donde m y θ (ambos positivos) son parámetros fijos, se llama la distribución F Generalizada.

Si m es igual a cero y $\theta = 1/2$ obtenemos

$$(4.48) \quad \frac{1}{2} \log F_{\alpha,\beta} ,$$

que recibe el nombre de la distribución Z de Fisher. y se denota por $Z_{\alpha,\beta}$. Su principal uso es como una aproximación a la distribución F.

La función generatriz de *momentos* de $Z_{\alpha,\beta}$ es :

$$FGM(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{t/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha + t}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta - t}{2}\right)}{\Gamma(\alpha/2)\ \Gamma(\beta/2)} .$$

y todos los momentos de $Z_{\alpha,\beta}$ son infinitos.

4.6.4) DISTRIBUCIONES RELACIONADAS .

La relación entre la distribución F y la distribución Beta está descrita por la relación (4.46).

Existe una relación entre la distribución Binomial y la distribución F. Esta puede resumirse en la siguiente expresión :

$$P\left[F_{2(n-r+1),2r} > \frac{1-p}{p}\,\frac{r}{n-r+1} \right] = P\left[Y \geq r \right],$$

(r es un entero, $0 \leq r \leq n$) donde $Y \sim$ Binomial(n,p).

Hay diversas distribuciones Pseudo-F que se obtienen al remplazar una o ambas sumas de cuadrados (S_1 y S_2) en la expresión (4.45) por alguna otra medida de dispersión.

4.6.5) DISTRIBUCION F NO-CENTRAL .

Si en el cociente (4.44), la distribución de X es remplazada por una distribución Ji-cuadrada No-central con α grados de libertad y parámetro de no centralidad λ, entonces la distribución resultante se conoce con el nombre de F No-central con parámetro de no centralidad λ.

La función de densidad de la F No-central con α y β grados de libertad y parámetro de no centralidad λ, está dada por :

$$f(F') = \operatorname{Exp}(-\lambda/2) \sum_{r=}^{\infty} \frac{\left(\frac{(\lambda/2)^r}{r\,!}\right) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha/2+(r-1)}}{B\left[\,(\alpha/2)+r, \beta/2\,\right]} \frac{(F')^{\alpha/2+(r-1)}}{\left[1+\frac{\alpha}{\beta}F'\right]^{(\alpha+\beta)/2+r}}.$$

Sea $l = \lambda / \alpha$, entonces la media y la varianza son :

$$\mu'_1 = \left[\frac{\beta}{\beta-2} \right] (1 + l),$$

$$\mu_2 = \frac{2\,\beta^2\,(\alpha+\beta-2)}{\alpha\,(\beta-2)^2\,(\beta-4)} \left[1 + 2l + \frac{\alpha\, l^2}{\alpha+\beta-2}\right].$$

4.6.6) ALGORITMOS .

Si X se distribuye como (4.43) entonces la función acumulativa de X está dada por :

$$(4.49)\quad F(x) = \frac{\Gamma[\,(\alpha+\beta)/2\,]\ \alpha^{\alpha/2}\ \beta^{\beta/2}}{\Gamma(\alpha/2)\ \Gamma(\beta/2)} \int_0^x \frac{y^{(\alpha/2)-1}}{(\beta+\alpha y)^{(\alpha+\beta)/2}}\,dy\ .$$

ALGORITMO 24 Distribución F.

Davis y Khalil(1972) Lenguaje : Fortran.

Descripción y Propósito.

El propósito es evaluar la función acumulativa de la distribución F dada por (4.49) siendo α y β enteros positivos. Dorrer (1968) desarrollo este algoritmo en lenguaje Algol el cual más tarde fué recodificado en Fortran por Davis y Khalil (1972).

Método Numérico.

La distribución F se puede expresar de la siguiente manera :

$$F(x) = \frac{2\ \Gamma[\,(\alpha+\beta)/2\,]}{\Gamma(\alpha/2)\ \Gamma(\beta/2)} \int_0^{\operatorname{arcsen}(\sqrt{a}\,)} \operatorname{sen}^{\alpha-1}(\omega)\ \cos^{\beta-1}(\omega)\ d\omega$$

donde $a = \alpha\ x\ /\ (\beta + \alpha\ x)$. Utilizando integración por partes obtenemos :

$$F(x) = a^{\alpha/2} \sum_{i=R_2}^{v_2} \frac{\Gamma(\alpha/2 + i)\ (1-a)^i}{\Gamma(\alpha/2)\ \Gamma(1+i)}$$

$$= -2R_2\ (1-a)^{1/2} \sum_{i=R_1}^{v_1} \frac{\Gamma(1/2 + i)\ a^i}{\Gamma(1/2)\ \Gamma(1+i)}$$

$$= +4R_2\ (R_2 - R_1) + \frac{8}{\pi}\ R_1\ R_2 \operatorname{arcsen}(\sqrt{a}\,)$$

donde $v_1 = (\alpha - 2)/2$, $v_2 = (\beta - 2)/2$; R_1 y R_2 son la parte entera de $\alpha/2$ y $\beta/2$ respectivamente.

Este algoritmo es solamente para parámetros enteros y tiene una precisión de tres digitos decimales (Lackritz, 1984). Cuando los parámetros son reales se pueden utilizar los algoritmos vistos para la distribución Beta recurriendo a la relación (4.46); de esta manera se actuará para obtener los cuantiles de la distribución F con parámetros α y β positivos.

CAPITULO 5.

T E S S A R

En este capitulo se explica el funcionamiento y uso del sistema TESSAR (Tablas EStadisticas, Sistema de Acceso Rápido), cuyo propósito es facilitar la consulta de diferentes distribuciones de Probabilidad (especialmente, evaluación de probabilidades y determinación de cuantiles).

TESSAR está codificado en Turbo Pascal 5.0 que ofrece facilidades para graficar las funciones de probabilidad y densidad.

Para entrar al sistema se debe ejecutar el archivo TESSAR.EXE. Aparecerá una pantalla de presentación e inmediatamente depués un menú principal con 13 opciones, tal como se muestra en la figura 5.1.

```
T E S S A R
Laboratorio de Estadistica. Facultad de Ciencias. UNAM.

Para salir pulse : ESC.
PROGRAMA PARA CALCULAR PROBABILIDADES Y
CUANTILES DE LAS DISTRIBUCIONES MAS
USADAS EN LA TEORIA ESTADISTICA

  DISCRETAS                  CONTINUAS

  Bernoulli                  Normal
  Binomial                   Ji-Cuadrada
  Binomial Negativa          Gamma
  Geométrica                 Beta
  Poisson                    t de Student
  Hipergeométirca            F de Fisher
                             Exponencial

Elige opción...
```

Figura 5.1 : Menú Principal.

Seis de estas opciones corresponden a distribuciones discretas (lado izquierdo de la pantalla) y las restantes a distribuciones continuas (lado derecho de la pantalla).

Utilizando las teclas de flecha (derecha, izquierda, arriba ó abajo) se puede navegar a través del menú principal y para seleccionar una opción se pulsa la tecla ENTER.

Por ejemplo : pulsando la tecla de flecha a la derecha y enseguida ENTER se accede a la opción (distribución) Normal. Aparecerá la pantalla que se muestra en la figura 5.2 donde el sistema TESSAR presenta las tres opciones disponibles : Cuantiles, Probabilidades y Gráficas.

T E S S A R

Laboratorio de Estadistica. Facultad de Ciencias. UNAM.

Para salir pulse : ESC.

DISTRIBUCION NORMAL

$$P\,[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\ \sigma}\ \mathrm{EXP}\left[- \frac{(y-\mu)^{2}}{2\ \sigma} \right] dy$$

Cuantiles
Probabilidades
Graficas

Que opción quieres...

Figura 5.2 : Opción Normal.

Estas opciones son las mismas para todas las distribuciones continuas, mientras que para las distribuciones discretas solamente se cuenta con las opciones de Probabilidades y Gráficas; el formato de pantalla (figura 5.2) es el mismo para todas las funciones de distribución.

En este submenú también se utilizan las teclas de flecha (arriba ó abajo) así como la tecla ENTER para seleccionar cualquier opción. Independientemente de cual sea la elección TESSAR pide primero la entrada de el (o los) parámetro (s) y posterioemente el valor de la probabilidad, cuantil o intervalo de graficación dependiendo si se encuentra en la opción de Cuantiles Probabilidades o Gráficas respectivamente.

Para obtener las gráficas en papel se tiene que correr primero el archivo GRAPHICS.COM (con la impresora encendida)antes que el archivo TESSAR.EXE y después se utiliza la tecla de imprime pantalla.

Para salir de cualquier opción se pulsa la tecla ESC, que también es la via para abandonar TESSAR y regresar al sistema operativo.

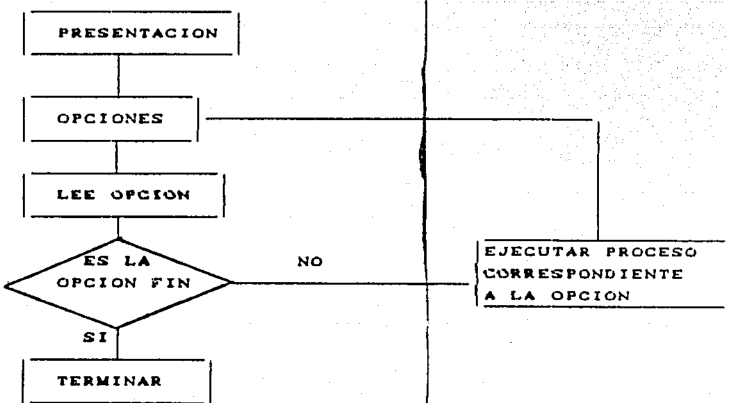
5.1) LIMITACIONES.

El sistema TESSAR solamente acepta números enteros que ocupen menos de siete cifras y números reales con menos de nueve cifras (se toma en cuenta el signo menos y el punto). Cuando se introducen números que tengan más cifras de las permitidas unicamente se toman en cuenta las primeras seis u ocho según se trate de números enteros o reales respectivamente.

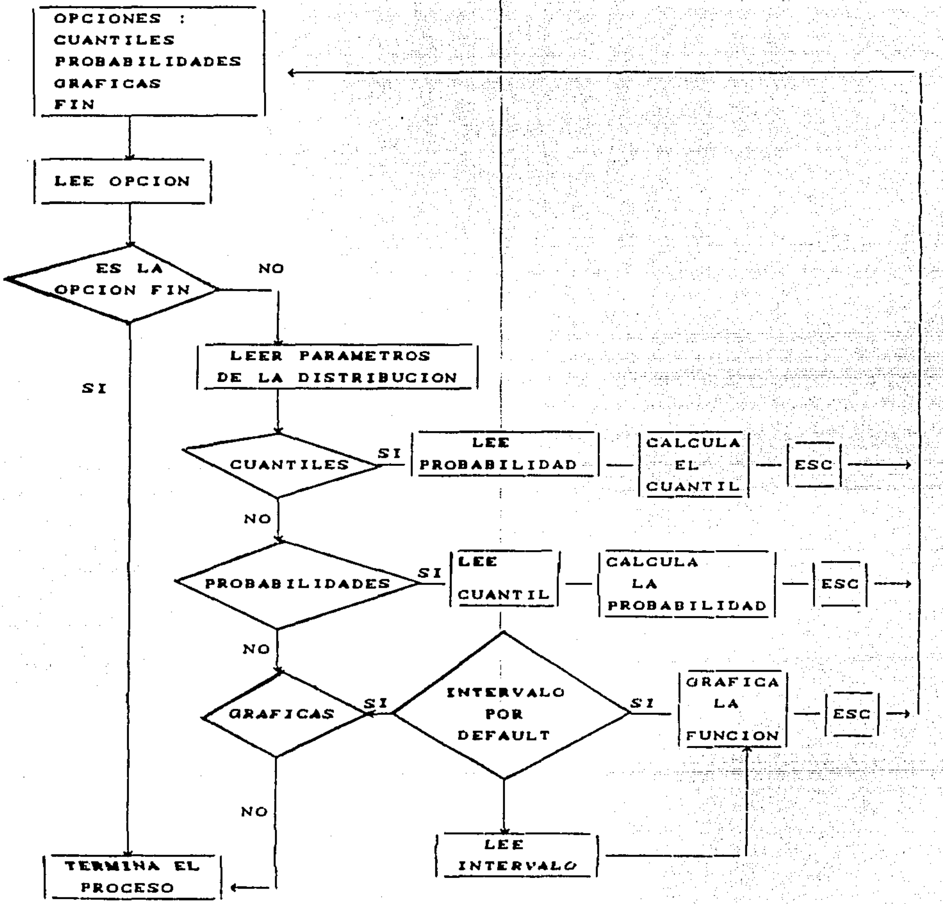
Por otra parte, cuando TESSAR opera en la opción gráficas para alguna distribución discreta y pide el intervalo donde se habrá de gráficar la función de probabilidad, la longitud del intervalo no debe ser mayor que 100, si esto sucede el sistema responde con un mensaje de error.

5.2) DIAGRAMA DE FLUJO.

Se presenta el diagrama de flujo del sistema TESSAR.



P R O C E S O S


OPCIONES :
CUANTILES
PROBABILIDADES
GRAFICAS
FIN
LEE OPCION
ES LA OPCION FIN
NO
SI
LEER PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION
CUANTILES
SI
LEE PROBABILIDAD
CALCULA EL CUANTIL
ESC
NO
PROBABILIDADES
SI
LEE CUANTIL
CALCULA LA PROBABILIDAD
ESC
NO
GRAFICAS
SI
INTERVALO POR DEFAULT
SI
GRAFICA LA FUNCION
ESC
NO
LEE INTERVALO
TERMINA EL PROCESO

COMENTARIOS FINALES

El propósito de esta tesis fué diseñar un sistema interactivo de consulta rápida de distribuciones. Para tal fin se llevó a cabo una investigación de métodos numéricos y la comparación de algoritmos. Todos los algoritmos que se emplean en el sistema TESSAR han sido reportados por sus autores con algún número de digitos correctos. Sin embargo no siempre indican en que aritmética de punto flotante se trabajo para lograr esa precisión. Una inspección empirica permite afirmar que en general los algoritmos trabajan con una exactitud mayor o igual a 4 digitos decimales correctos y en la mayor parte de los casos se obtienen al menos 6 digitos sin error en una computadora que trabaja con una mantisa de 32 bits.

Por otra parte, este trabajo se puede extender al caso de funciones de distribución un poca más complicadas, como por ejemplo : la distribución t no-central, La Beta no-central, χ^2 no-central, etc.. Otra posible extensión seria generar números aleatorios ó muestras aleatorias de las distribuciones consideradas ea el sistema.

Por último, el sistema TESSAR esta enfocado, como se indicó, a la enseñanza de la Estadística. De este material didáctico se puede adquirir una copia (del sistema) en el Laboratorio de Estadistica de la Facultad de Ciencias en la UNAM.

A P E N D I C E

C O D I F I C A C I O N   D E   A L G O R I T M O S

ALGORITMO 1.

Estructura.

Real Function Bino(p, k, n, ifault)

p	Real	Entrada : Valor del parámetro p.
k	Entero	Entrada : Limite superior de ls suma.
n	Entero	Entrada : Valor de N.
ifault	Entero	Indicador.

Ifault = 3, si $p \le 0$.

Ifault = 2, si $n<0$.

Ifault = 1, si $k<0$ o $k>n$.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos auxiliares :

Function Alnorm (algoritmo 6).

Codificación.

```
      REAL FUNCTION BINO(P, K, N, IFAULT)
      REAL P, Q, SUMA, PAUX1
      INTEGER K, N, I, J, IFAULT
      BINO = 0.
      IF (P.LE.0.0) THEN
        IFAULT = 3
        RETURN
      ENDIF
      IF (N.LT.0) THEN
        IFAULT = 2
        RETURN
      ENDIF
      IF (K.LT.0 .OR. K.GT.N) THEN
        IFAULT = 1
        RETURN
      ENDIF
      IFAULT = 0
      Q = 1.0 - P
      PAUX = 1.
```

```
      DO 10 I = 1,N
        PAUX1 = Q * PAUX1
 10   CONTINUE
      IF (PAUX1 .EQ. 0.0 .AND. K.GT.0) THEN
        IF (P.GE.0.5 .AND. P.LT.0.93) THEN
           I = 3
           J = 1
        ELSE
           I = 4
           J = 0
        ENDIF
        PAUX1 = SQRT(Q * (4.0 * K + I))
        PAUX1 = PAUX1 - SQRT(P * (4.0 * N - 4.0 * K - J))
        SUMA = ALNORM(PAUX1, .FALSE.)
      ELSE
        SUMA = PAUX1
        DO 20 I = 1,K
          PAUX1 = (FLOAT(N - I + 1)/FLOAT(I))*(P/Q)*PAUX1
          SUMA = SUMA + PAUX1
 20     CONTINUE
      ENDIF
      BINO = SUMA
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 2.

Estructura.

Real Function Pois(k, y, ifault)

k	Entero	Entrada : Limite superior de ls suma.
y	Real	Entrada : Valor del parámetro.
ifault	Entero	Indicador.

Ifault = 1, si $k<0$ o $y \le 0$.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos auxiliares :

Function Alnorm (algoritmo 6).

Codificación.

```
      REAL FUNCTION POIS(K, Y, IFAULT)
      REAL T, SUMA, AUX1
      INTEGER K, I, IFAULT
      POIS = 0.
      IF (K.LT.0 .OR. Y.LE.0.0) THEN
        IFAULT = 1
        RETURN
      ENDIF
      IFAULT = 0
      IF (Y .LE. 80.0) THEN
        AUX1 = EXP(-Y)
```

```
        SUMA = AUX1
        DO 10 I = 1,K
          AUX1 = AUX1 * Y / FLOAT(I)
          SUMA = SUMA + AUX1
 10     CONTINUE
      ELSE
        T = K - Y + 0.166666666
        T = T * T / Y
        AUX1 = K + (T + 4.0) / 9.0
        AUX1 = 2.0 * SQRT(AUX1)
        AUX1 = AUX1 - 2.0 * SQRT(Y + (T - 8.0) / 36.0)
        SUMA = ALNORM(AUX1, .FALSE.)
      ENDIF
      POIS = SUMA
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 3.

Estructura.

Function Hyper(kk,ll,mm,nn,ifault)

kk	entero	entrada : Valor de n.
ll	entero	entrada : Valor de k.
mm	entero	entrada : Valor de A + B.
nn	entero	entrada : Valor del parámetro A.
ifault	entero	indicador de salida.

ifault = 1, si cualquier parámetro esta fuera del rango permitido.

ifault = 0, en otro caso.

Codificación.

```
      FUNCTION HYPER(KK, LL, MM, NN, IFAULT)
      K = KK + 1
      L = LL + 1
      M = MM + 1
      N = NN + 1
C
C             CHECK ARGUMENTS ARE WITHIN PERMITTED LIMITS
C
      IFAULT = 1
      IF (M.LT.1.OR.N.LT.1.OR.M.LT.N.OR.K.LT.1.OR.K.GT.M.OR.L.LT.1
     *     .OR.L.GT.N.OR.K.LT.L.OR.K - L.GT.M - N) RETURN
      IFAULT = 0
      HYPER = 1.0
      IF (K.EQ.1.OR.K.EQ.M.OR.N.EQ.1 .OR.N.EQ.M) RETURN
C
C             INTERCHANGE K AND N IF THIS SAVES CALCULATIONS
C
      IF (MINO(K -1, M - K) .LE. MINO(N - 1, M - N)) GOTO 1
      I = K
```

```
      K = N
      N = I
 1    IF (M - K.GE.K - 1) GOTO 2
      L = N - L + 1
      K = M - K + 1
 2    IF (L .EQ. 1) GOTO 4
      LA = L - 1
      DO 3 I = 1,LA
 3    HYPER = HYPER * FLOAT((K - I) * (N - I)) / FLOAT((L - I)
     *           * (M - I))
      IF (L.EQ.K) RETURN
 4    J = M - N + L
      LA = K - 1
      DO 5 I = L,LA
 5    HYPER = HYPER * FLOAT(J - I) / FLOAT(M - I)
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 4.

Estructura.

Function Chyper(mode,kk,ll,mm,nn,ifault)

mode entero *entrada* : = 1 para probabilidad puntual, distinto de uno para probabilidad acumulada.

kk	Entero	Entrada : Valor de n.
ll	Entero	Entrada : Valor de k.
mm	*Entero*	Entrada : Valor de A + B.
nn	Entero	Entrada : Valor del parámetro A.
ifault	Entero	Indicador de salida.

ifault = 2, si l < max(0, k-*m+n*) *or* l > min(k.n), en este caso Chyper es igual a cero siempre y cuando mode = 1 y l ≤ min(k,n) de lo contrario Chyper es igual a uno.

ifault = 1, si cualquier parámetro esta fuera del rango permitido.

ifault = 0, en otro caso.

Codificación.

```
      FUNCTION CHYPER(MODE, KK, LL, MM, NN, IFAULT)
      DATA ZERO /0.0/, ONE /1.0/
      K = KK + 1
      L = LL + 1
      M = MM + 1
      N = NN + 1
      IDIR = 1
C
C              CHECK ARGUMENTS ARE WITHIN PERMITTED LIMITS
C
      IFAULT = 1
```

```
      IF (N.LT.1.OR.M.LT.N.OR.K.LT.1.OR.K.GT.M) RETURN
C
      IFAULT = 2
      CHYPER = ZERO
      IF (L.LT.1.OR.K - L.GT.M - N) RETURN
      IF (MODE .NE. 1) CHYPER = ONE
      IF (L.GT.N.OR.L.GT.K) RETURN
      IFAULT = 0
      CHYPER = ONE
      IF (K.EQ.1.OR.K.EQ.M.OR.N.EQ.1 .OR.N.EQ.M) RETURN
C
C           INTERCHANGE K AND N IF THIS SAVES CALCULATIONS
C
      IF (MINO(K -1, M - K) .LE. MINO(N - 1, M - N)) GOTO 1
      I = K
      K = N
      N = I
    1 IF (M - K.GE.K - 1) GOTO 2
      IDIR = - IDIR
      L = N - L + 1
      K = M - K + 1
    2 IF (L .EQ. 1) GOTO 4
      LA = L - 1
      DO 3 I = 1,LA
    3 CHYPER = CHYPER * FLOAT((K - I) * (N - I)) / FLOAT((L - I)
     *        * (M - I))
      IF (L.EQ.K) GOTO 6
    4 J = M - N + L
      LA = K - 1
      DO 5 I = L,LA
    5 HYPER = HYPER * FLOAT(J - I) / FLOAT(M - I)
    6 IF (MODE .EQ. 1) RETURN
C
C           CALCULATE CUMULATIVE PROBABILITY
C
      P = CHYPER
      PT = ZERO
      NL = N - L
      KL = K - L
      MNKL = M - N - KL + 1
      IF (L .GT. KL) GOTO 8
C
      IF (L.EQ.1) GOTO 10
      LA = L - 1
      DO 7 I = 1,LA
      P = P * FLOAT((L - I) * (MNKL - I)) / FLOAT((NL + I)*(KL + I))
      PT = PT + P
    7 CONTINUE
      GOTO 10
C
    8 IDIR = - IDIR
      IF (KL.EQ.0) GOTO 10
      DO 9 I = 1,KL
      J = I - 1
      P = P * FLOAT((NL - J)*(KL - J)) / FLOAT((L + J)*(MNKL + J))
```

```
      PT = PT + P
 9    CONTINUE
C
 10   IF (IDIR .LT.0) GOTO 11
      CHYPER = CHYPER + PT
      RETURN
 11   CHYPER = ONE - PT
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 5.

Estructura.

Subroutine Normal(x,n,p,q,z,ifault)

x	Arreglo real	Entrada : Valores de los cuantiles.
n	Entero	Entrada : Número total de cuantiles.
p	Arreglo real	Salida : Valores *de* F(x).
q	*Arreglo real*	*Salida* : Valores de 1 - F(x).
z	Arreglo real	Salida : Valores de *f*(x).
ifault	Entero	Indicador de salida.

ifault = 1, si n es menor que uno.

ifault = 0, en otro caso.

Codificación.

```
      SUBROUTINE NORMAL(X,N,P,Q,Z,IFAULT)
C
C           ALGORITHM AS 2 J.R.STATIST.SOC. C,(1968) vol 17.
C
C           COMPUTES NORMAL AREAS AND ORDINATES FOR AN ARRAY OF X
C           VALUES
C
      DIMENSION X(1),P(1),Q(1),Z(1)
      DIMENSION A(5)
C
      DIMENSION CONNOR(17)
      DATA CONNOR
     1/  8.0327350124E-17,    1.4483264644E-15,     2.4668270103E-14,
     2   3.9554295164E-13,    3.9477940136E-12,     8.3507027951E-11,
     3   1.0892221837E-9,     1.3122532964E-8,      1.4503852223E-7,
     4   1.4589169001E-6,     1.3227513228E-5,      1.0683760684E-4,
     5   7.5757575758E-4,     4.6296296296E-3,      2.380952381E-2,
     6   0.1,     3.3333333333E-1/
C
      DATA RRT2PI /0.3989422804/
C
      IFAULT = 0
      IF(N) 1,1,2
 1    IFAULT = 1
      GOTO 100
```

```
 2    DO 31 I = 1,N
      S = X(I)
      Y = S*S
      IF (S) 10,11,12
 11   Z(I) = RRT2PI
      P(I) = 0.5
      Q(I) = 0.5
      GOTO 31
C
C              SERIES APPROXIMATION
C
 10   S = - S
 12   Z(I) = RRT2PI * EXP(-0.5 * Y)
      IF (S - 2.5) 13, 14, 14
 13   Y = -0.5 * Y
      P(I) = CONNOR(1)
      DO 15 L = 2,17
 15   P(I) = P(I) * Y + CONNOR(L)
      P(I) = (P(I)*Y + 1.0) * X(I) * RRT2PI + 0.5
      Q(I) = 1.0 - P(I)
      GOTO 31
C
C              CONTINUED FRACTION APPROXIMATION
C
 14   A(2) = 1.0
      A(5) = 1.0
      A(3) = 1.0
      Y = 1.0 / Y
      A(4) = 1.0 + Y
      R = 2.0
 19   DO 17 L = 1,3,2
      DO 18 J = 1,2
      K = L + J
      KA = 7 - K
 18   A(K) = A(KA) + A(K)*R*Y
 17   R = R + 1.0
      IF (A(2)/A(3) - A(5)/A(4)) 19,20,19
 20   P(I) = (A(5)/A(4)) * Z(I)/X(I)
      IF (X(I)) 21,11,22
 21   P(I) = - P(I)
      Q(I) = 1.0 - P(I)
      GOTO 31
 22   Q(I) = P(I)
      P(I) = 1.0 - P(I)
 31   CONTINUE
 100  RETURN
      END
```

ALGORITMO 6.

Estructura.

Function Alnorm(x,upper)

x   Real   Entrada : Valor del cuantil.

upper   Logico   Entrada.

Si upper es verdadero entonces el área calculada es de x hasta infinito, de lo contrario si upper es falso el área calculada es de menos infinito hasta x.

Codificación.

```
      FUNCTION ALNORM(X, UPPER)
C
C             ALGORITHM AS 66 J.R.STATIST.SOC. C,(1973) vol 22.
C
C             EVALUATES THE TAIL AREA OF THE STANDARDISED NORMAL CURVE
C             FROM X TO INFINITY IF UPPER IS .TRUE. OR
C             FROM MINUS INFINITY TO X IF UPPER IS .FALSE.
C
      REAL LTONE, UTZERO, ZERO, HALF, ONE, CON, Z, Y, X
      LOGICAL UPPER, UP
C
C          LTONE AND UTZERO MUST BE SET TO SUIT THE PARTICULAR
C          COMPUTER (SEE INTRODUCTORY TEXT)
C
      DATA LTONE, UTZERO /7.0, 18.66/
      DATA ZERO, HALF, ONE, CON /0.0, 0.5, 1.0, 1.28/
      UP = UPPER
      Z = X
      IF (Z .GE. ZERO) GOTO 10
      UP = .NOT.UP
      Z = - Z
 10   IF (Z.LE.LTONE.OR.UP.AND.LE.UTZERO) GOTO 20
      ALNORM = ZERO
      GOTO 40
 20   Y = HALF * Z * Z
      IF (Z.GT.CON) GOTO 30
C
      ALNORM = HALF - Z * (0.398942280444 - 0.399903438504 * Y /
     1  (Y + 5.75885480458 - 29.8213557808 /
     2  (Y + 2.62433121679 + 48.6959930692 /
     3  (Y + 5.92885724438))))
      GOTO 40
C
 30   ALNORM = 0.398942280385 * EXP(-Y) /
     1  (Z - 3.8052E-8 + 1.00000615302 /
     2  (Z + 3.98064794E-4 + 1.98615381364 /
     3  (Z - 0.151679116635 + 5.29330324926 /
     4  (Z + 4.8385912808 - 15.1508972451 /
     5  (Z + 0.742380924027 + 30.789933034 / (Z + 3.99019417011))))))
C
 40   IF (.NOT.UP) ALNORM = ONE - ALNORM
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 7.

Estructura.

Subroutine XformP(p,x,ifault)

p	Real	Entrada : Valor de la probabilidad.
x	Real	Salida : Valor del cuantil.
ifault	Entero	Salida : Toma el valor de cero si o<p<1 y uno en otro caso.

Codificación.

```
      SUBROUTINE XFROMP(P,X,IFAULT)
C
C            ALGORITHM AS 24 J.R.STATIST.SOC. C,(1969) vol 18.
C
C            COMPUTES NORMAL DEVIATES FROM THE CORRESPONDING AREAS
C
      DIMENSION A(5)
      DIMENSION CONNOR(17)
      DATA CONNOR
     1/  8.0327350124E-17,    1.4483264644E-15,    2.4668270103E-14,
     2   3.9554295164E-13,    3.9477940136E-12,    8.3507027951E-11,
     3   1.0892221837E-9,     1.3122532964E-8,     1.4503852223E-7,
     4   1.4589169001E-6,     1.3227513228E-5,     1.0683760684E-4,
     5   7.5757575758E-4,     4.6296296296E-3,     2.380952381E-2,
     6   0.1,     3.3333333333E-1/
C
      DATA RTHFPI / 1.2533141373 /
C
      DATA RRT2PI / 0.3989422804 /
C
      DATA TERMIN / 1.0E-11 /
C
      DIMENSION HSTNGS(6)
      DATA HSTNGS
     1/ 2.515517, 0.802853, 0.010328, 1.432788, 0.189269, 0.001308 /
C
      IFAULT = 1
      IF ((P.LE.0.0).OR.(P.GE.1.0)) GOTO 100
      IFAULT = 0
C
C                GET FIRTS APPROXIMATION XO TO DEVIATE BY HASTINGS'
C           FORMULA
C
      B = P
      IF (B.GT.0.5) B = 1.0 - B
      F = -ALOG(B)
      E = SQRT(F+F)
      XO = -E + ((HSTNGS(3)*E+HSTGNS(2))*E+HSTGNS(1))/
     1(((HSTGNS(6)*E+HSTGNS(5))*E+HSTGNS(4))*E + 1.0)
      IF (XO.LT.0.0) GOTO 1
      XO = 0.0
      PO = 0.5
      X1 = -RTHFPI
```

```
      GOTO 7
C
C            FIND THE AREA PO CORRESPONDING TO XO
C
 1    Y = XO**2
      IF (XO.LE.-1.9) GOTO 3
      Y = -0.5*Y
C
C          (1) SERIES APPROXIMATION
C
      PO = CONNOR(1)
      DO 2 L = 2,17
 2    PO = PO * Y + CONNOR(L)
      PO = (PO*Y + 1.0) * XO
      X1 = -(PO+TTHFPI)*EXP(-Y)
      PO = PO * RRT2PI + 0.5
      GOTO 7
C
C          (2) CONTINUED FRACTION APPROXIMATION
C
 3    Z = 1.0/Y
      A(2) = 1.0
      A(3) = 1.0
      A(4) = Z + 1.0
      A(5) = 1.0
      W = 2.0
 4    DO 6 L = 1,3,2
      DO 5 J = 1,2
      K = L + J
      KA = 7 - K
 5    A(K) = A(KA) + A(K)*W*Z
 6    W = W + 1.0
      APPRXU = A(2)/A(3)
      APPRXL = A(5)/A(4)
      C = APPRXU - APPRXL
      IF (C.GE.TERMIN) GOTO 4
      X1 = APPRXL/XO
      PO = -X1*RRT2PI*EXP(-0.5*Y)
C
C          GET ACCURATE VALUE OF DEVIATE BY TAYLOR SERIES
C
 7    D = F + ALOG(PO)
      X2 = XO*X1*X1 - X1
      X3 = X1**3 + 2.0*X0*X1*X2 - X2
      X = ((X3*D/3.0+X2)*D/2.0+X1)*D + XO
      IF (P.LE.0.5) GOTO 100
      X = -X
 100  RETURN
      END
```

ALGORITMO 8.

Estructura.

Function Gauinv(p,ifault)

p Real Entrada : Valor de la probabilidad.

ifault Entero Salida : Toma el valor de cero si o<p<1 y uno en otro caso.

Si ifault = 1 el valor de Gauinv es cero.

Codificación.

```
      FUNCTION GAUINV(P,IFAULT)
C
C           ALGORITHM AS 70 J.R.STATIST.SOC. C,(1974) vol 23.
C
C        GAUINV FINDS PERCENTAGE POINTS OF THE NORMAL DISTRIBUTION
C
      DATA ZERO, ONE, HALF, ALIMIT /0.0, 1.0, 0.5, 1.0E-20/
      DATA P0, P1, P2, P3
     *   /-.322232431088, 1.0, -.342242088547, -.204231210245E-1/
      DATA P4, Q0, Q1
     *   / -.453642210148E-4, .993484626060E-1, .588581570495 /
      DATA Q2, Q3 ,Q4
     *   / .531103462366, .103537752850, .38560700634E-2 /
C
      IFAULT = 1
      GAUINV = ZERO
      PS = P
      IF (PS .GT. HALF) PS = ONE - PS
      IF (PS .LT. ALIMIT) RETURN
      IFAULT = 0
      IF (PS .EQ. HALF) RETURN
      Y1 = SQRT(ALOG(ONE / (PS * PS)))
      GAUINV = Y1+((((Y1 * P4 + P3) * Y1 + P2) * Y1 + P1) * Y1 + P0)
     *           / ((((Y1 * Q4 + Q3) * Y1 + Q2) * Y1 * Q1) * Y1 * Q0)
      IF (P .LT. HALF) GAUINV = - GAUINV
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 9.

Estructura.

Function Ppnd(p,ifault)

p Real Entrada : Valor de la probabilidad.

ifault Entero Salida : Toma el valor de cero si o<p<1 y uno en otro caso.

Si ifault = 1 el valor de Ppnd es cero.

Codificación.

```
      FUNCTION PPND(P,IFAULT)
C
C        ALGORITHM AS 111 J.R.STATIST.SOC. C,(1977) vol 26.
C
```

```
C         PPND FINDS PERCENTAGE POINTS OF THE NORMAL DISTRIBUTION
C
      REAL ZERO, SPLIT, HALF, ONE
      REAL A0, A1, A2, A3, B1, B2, B3, B4, C0, C1, C2, C3, D1, D2
      REAL P, Q, R
      DATA ZERO /0.0E0/, HALF / 0.5E0/, ONE /1.0E0/
      DATA SPLIT /0.42E0/
      DATA A0 /   2.50662 82388 4E0 /
      DATA A1 / -18.61500 06252 9E0 /
      DATA A2 /  41.39119 77353 4E0 /
      DATA A3 / -25.44106 04963 7E0 /
      DATA B1 /  -8.47351 09309 0E0 /
      DATA B2 /  23.08336 74374 3E0 /
      DATA B3 / -21.06224 10182 6E0 /
      DATA B4 /   3.13082 90983 3E0 /
C
C           HASH SUM AB 143.70383 55807 6
C
      DATA C0 / -2.78718 93113 8E0 /
      DATA C1 / -2.29796 47913 4E0 /
      DATA C2 /  4.85014 12713 5E0 /
      DATA C3 /  2.32121 27685 8E0 /
      DATA D1 /  3.54388 92476 2E0 /
      DATA D2 /  1.63706 78189 7E0 /
C
C           HASH SUM CD 17.43746 52092 4
C
      IFAULT = 0
      Q = P - HALF
      IF (ABS(Q) .GT. SPLIT) GOTO 1
      R = Q * Q
      PPND = Q * (((A3 * R + A2) * R + A1) * R + A0) /
     *  ((((B4 * R + B3) * R + B2) * R + B1) * R +ONE)
      RETURN
 1    R = P
      IF (Q .GT. ZERO) R = ONE - P
      IF (R .LE. ZERO) GOTO 2
      R = SQRT(-ALOG(R))
      PPND = (((C3 * R + C2) * R + C1) * R + C0) /
     *  ((D2 * R + D1) * R + ONE)
      IF (Q .LT. ZERO) PPND = - PPND
      RETURN
 2    IFAULT = 1
      PPND = ZERO
      RETURN
      END
```

ALGORITMO ro.

Estructura.

Function Ppnd7(p,ifault)

Function Ppnd16(p,ifault)

p Real Entrada : Valor de la probabilidad.

ifault Entero Salida : *Toma* el valor de cero si o<p<1 y uno en otro caso.

Si ifault = 1 el valor de Ppnd7 y *Ppnd16 es* cero.

Codificación.

```
      FUNCTION PPND7(P,IFAULT)
C
C          ALGORITHM AS 241 J.R.STATIST.SOC. C,(1988) vol 37.
C
C       PRODUCE THE NORMAL DEVIATE Z CORRESPONDING TO A GIVEN LOWER
C       TAIL AREA OR P; Z IS ACCURATE TO ABOUT 1 PART IN 10**7.
C
      REAL ZERO, ONE, HALF, SPLIT1, SPLIT2, CONST1, CONST2,
     *  A0, A1, A2, A3, B1, B2, B3, C0, C1, C2, C3, D1, D2,
     *  E0, E1, E2, E3, F1, F2, P, Q, R
      PARAMETER (ZERO = 0.0E0, ONE = 1.0E0, HALF = ONE/2.0E0,
     *  SPLIT1 = 0.425E0,     SPLIT2 = 5.0E0,
     *  CONST1 = 0.180625E0, CONST2 = 1.6E0)
C
C     COEFFICIENTS FOR P CLOSE TO 1/2
      PARAMETER (A0 = 3.38713 27179E0,
     *           A1 = 5.04342 71938E1,
     *           A2 = 1.59291 13202E2,
     *           A3 = 5.91093 74720E1,
     *           B1 = 1.78951 69469E1,
     *           B2 = 7.87577 57664E1,
     *           B3 = 6.71875 63600E1)
C     HASH SUM AB    32.31845 77772
C
C     COEFFICIENTS FOR P NEITHER CLOSE TO 1/2 OR 0 OR 1
      PARAMETER (C0 = 1.42343 72777E0,
     *           C1 = 2.75681 53900E0,
     *           C2 = 1.30672 84816E0,
     *           C3 = 1.70238 21103E-1,
     *           D1 = 7.37001 64250E-1,
     *           D2 = 1.20211 32975E-1)
C     HASH SUM CD    15.76149 29821
C
C     COEFFICIENTS FOR P NEAR 0 OR 1
      PARAMETER (E0 = 6.65790 51150E0,
     *           E1 = 3.08122 63860E0,
     *           E2 = 4.28682 94337E-1,
     *           E3 = 1.73372 03997E-2,
     *           F1 = 2.41978 94225E-1,
     *           F2 = 1.22582 02635E-2)
C     HASH SUM CD    19.40529 10204
C
      IFAULT = 0
      Q = P - HALF
      IF (ABS(Q) .LE. SPLIT1) THEN
         R = CONST1 - Q * Q
         PPND7 = Q * (((A3 * R + A2) * R + A1) * R + A0) /
```

```
     *                  (((B3 * R + B2) * R + B1) * R + ONE)
           RETURN
        ELSE
           IF (Q .LT. 0) THEN
              R = P
           ELSE
              R = ONE - P
           ENDIF
           IF (R.LE.ZERO) THEN
             IFAULT = 1
             PPND7 = ZERO
             RETURN
           ENDIF
           R = SQRT(-LOG(R))
           IF (R .LE. SPLIT2) THEN
              R = R - CONST2
              PPND7 = (((C3 * R + C2) * R + C1) * R + C0) /
     *                 ((D2 * R + D1) * R + ONE)
           ELSE
              R = R - SPLIT2
              PPND7 = (((E3 * R + E2) * R + E1) * R + E0) /
     *                 ((F2 * R + F1) * R + ONE)
           ENDIF
           IF (Q .LT. 0) PPND7 = - PPND7
           RETURN
        ENDIF
        END

        FUNCTION PPND16(P,IFAULT)
C
C            ALGORITHM AS 241 J.R.STATIST.SOC. C,(1988) vol 37.
C
C         PRODUCE THE NORMAL DEVIATE Z CORRESPONDING TO A GIVEN LOWER
C         TAIL AREA OR P; Z IS ACCURATE TO ABOUT 1 PART IN 10**16.
C
        REAL ZERO, ONE, HALF, SPLIT1, SPLIT2, CONST1, CONST2,
     *   A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7,
     *   C0, C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7,
     *   E0, E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7,
     *   P, Q, R
        PARAMETER (ZERO = 0.0E0, ONE = 1.0E0, HALF = ONE/2.0E0,
     *   SPLIT1 = 0.425E0,     SPLIT2 = 5.0E0,
     *   CONST1 = 0.180625E0, CONST2 = 1.6E0)
C
C       COEFFICIENTS FOR P CLOSE TO 1/2
        PARAMETER (A0 = 3.38713 28727 96366 6080E0,
     *            A1 = 1.33141 66789 17843 7745E2,
     *            A2 = 1.97159 09503 06551 4427E3,
     *            A3 = 1.37316 93765 50946 1125E4,
     *            A4 = 4.59219 53931 54987 1457E4,
     *            A5 = 6.72657 70927 00870 0853E4,
     *            A6 = 3.34305 75583 58812 8105E4,
     *            A7 = 2.50908 09287 30122 6727E3,
     *            B1 = 4.23133 30701 60091 1252E1,
     *            B2 = 6.87187 00749 20579 0830E2,
```

```
     *              B3 = 5.39419 60214 24751 1077E3,
     *              B4 = 2.12137 94301 58659 5867E4,
     *              B5 = 3.93078 95800 09271 0610E4,
     *              B6 = 2.87290 85735 72194 2674E4,
     *              B7 = 5.22649 52788 52854 5610E3)
C     HASH SUM AB     55.88319 28806 14901 4439
C
C     COEFFICIENTS FOR P NEITHER CLOSE TO 1/2 NOR 0 OR 1
      PARAMETER (C0 = 1.42343 71107 49683 57734E0,
     *              C1 = 4.63033 78461 56545 29590E0,
     *              C2 = 5.76949 72214 60691 40550E0,
     *              C3 = 3.64784 83247 63204 60504E0,
     *              C4 = 1.27045 82524 52368 38258E0,
     *              C5 = 2.41780 72517 74506 11770E-1,
     *              C6 = 2.27238 44989 26918 45833E-2,
     *              C7 = 7.74545 01427 83414 07640E-4,
     *              D1 = 2.05319 16266 37758 82187E0,
     *              D2 = 1.67638 48301 83803 84940E0,
     *              D3 = 6.89767 33498 51000 04550E-1,
     *              D4 = 1.48103 97642 74800 74590E-1,
     *              D5 = 1.51986 66563 61645 71966E-2,
     *              D6 = 5.47593 80849 95344 94600E-4,
     *              D7 = 1.05075 00716 44416 84324E-9)
C     HASH SUM CD     49.33206 50330 16102 89036
C
C     COEFFICIENTS FOR P NEAR 0 OR 1
      PARAMETER (E0 = 6.65790 46435 0103 77720E0,
     *              E1 = 5.46378 49111 64114 36990E0,
     *              E2 = 1.78482 65399 17291 33580E0,
     *              E3 = 2.96560 57182 85048 91230E-1,
     *              E4 = 2.65321 89526 57612 30930E-2,
     *              E5 = 1.24966 09473 88078 43860E-3,
     *              E6 = 2.71155 55687 43487 57815E-5,
     *              E7 = 2.01033 43992 92288 13265E-7,
     *              F1 = 5.99832 20655 58879 37690E-1,
     *              F2 = 1.3929 88092 27358 05310E-1,
     *              F3 = 1.48753 61290 85061 48525E-2,
     *              F4 = 7.86869 13114 56132 59100E-4,
     *              F5 = 1.84631 83175 10054 68180E-5,
     *              F6 = 1.42151 17583 16445 88870E-7,
     *              F7 = 2.04426 31033 89939 78564E-15)
C     HASH SUM EF     47.52583 31754 92896 71629
C
      IFAULT = 0
      Q = P - HALF
      IF (ABS(Q) .LE. SPLIT1) THEN
         R = CONST1 - Q * Q
         PPND16 = Q * (((((((A7*R + A6) * R + A5) * R + A4) *R + A3)
     *      * R + A2) * R + A1) * R + A0) /(((((((B7 * R + B6)
     *      * R + B5) * R + B4) * R + B3) * R + B2) * R + B1)
     *      * R + ONE)
         RETURN
      ELSE
         IF (Q .LT. 0) THEN
            R = P
```

```
         ELSE
            R = ONE - P
         ENDIF
         IF (R.LE.ZERO) THEN
           IFAULT = 1
           PPND16 = ZERO
           RETURN
         ENDIF
         R = SQRT(-LOG(R))
         IF (R .LE. SPLIT2) THEN
            R = R - CONST2
            PPND16 = (((((((C7 * R + C6) * R + C5) * R + C4) * R
     *         + C3) * R + C2) * R + C1) * R + C0) / (((((((D7 * R
     *         + D6) * R + D5) * R + D4) * R + D3 ) * R + D2)
     *         * R + D1) * R + ONE)
         ELSE
            R = R - SPLIT2
            PPND16 = (((((((E7 * R + E6) * R + E5) * R + E4) * R
     *         + E3) * R + E2) * R + E1) * R + E0) / (((((((F7 * R
     *         + F6) * R + F5) * R + F4) * R + F3) * R + F2)
     *         * R + F1) * R + ONE)
         ENDIF
         IF (Q .LT. 0) PPND16 = - PPND16
         RETURN
      ENDIF
      END
```

ALGORITMO II.

Estructura.

Real Function Chipro(x, v, ifault)

x Real Entrada : Valor del cuantil.

v Real Entrada : Grados de libertad.

ifault Entero Salida : = 1, si x≤0 o v<1; 0 en otro caso.

Algoritmos Auxiliares :

Function Pois (algoritmo 2).

Function Alnorm (algoritmo 6).

Codificación.

```
      REAL FUNCTION CHIPRO(X, V, IFAULT)
      REAL X, SUMA, X2, AUX1, AUX2
      INTEGER V, IFAULT, IFAU1, I, M
      PARAMETER (RAPI2 = 1.2533141373)
C
C        CHECA LOS ARGUMENTOS DE ENTRADA
C
      CHIPRO = 1.0
      IFAULT = 1
      IF (X .LE. 0.0 .OR. V .LT. 1) GOTO 100
      IFAULT = 0
```

```
C
      X2 = X / 2.0
C
C           SI V ES PAR
C
      IF (2*(V/2) .EQ. V) THEN
         M = V / 2
         SUMA = POIS(M, X2, IFAU1)
C
C        SI V ES IMPAR
C
      ELSE
        M = (V - 1) / 2
        X2 = EXP(- X2) / RAPI2
        SUMA = 0.0
        AUX1 = 0.0
        AUX2 = 0.0
        DO 10 I = 1,M
          AUX1 = AUX1 + ALOG(X)
          AUX2 = AUX2 + ALOG(FLOAT(2 * I - 1))
          SUMA = EXP(AUX1 - AUX2)
 10     CONTINUE
        SUMA = SUMA * X2
        SUMA = SUMA + 2 * (1 - ALNORM(SQRT(X)))
      ENDIF
C
      CHIPRO = SUMA
 100  RETURN
      END
```

ALGORITMO 12.

Estructura.

Function Ppchi2(p,v,g,ifault).

p	Real	Entrada : Valor de la probabilidad.
v	Real	Entrada : Grados de libertad.
g	Real	Entrada : logaritmo natural de $\Gamma(v/2)$.
ifault	Entero	Indicador de Salida.

ifault = 1, si $p < 0.000002$ o $p > 0.999998$.

ifault = 2, si $v \leq 0.0$.

ifault = 3, si el indicador de Gamain es mayopr que cero.

ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos auxiliares :

Function Gamain (algoritmo 14).
Function Gauinv (algoritmo 8).

Codificación.

```
      FUNCTION PPCHI2(P, V, G, IFAULT)
```

```
C
C       ALGORITHM AS 91 APPL. STATIST. (1975) VOL.24, NO.3
C
C       TO EVALUATE THE PERCENTAGE POINT OF THE CHI-SQUARED
C       PROBABILITY DISTRIBUTION FUNCTION.
C
      DATA E, AA /0.5E-6, 0.6931471805/
C
C       AFTER DEFINING ACCURACY AND LN(2), TEST ARGUMENTS AND
C       INITIALIZE
C
      PPCHI2 = -1.0
      IFAULT = 1
      IF (P.LT.0.000002 .OR. P.GT.0.999998) RETURN
      IFAULT = 2
      IF (V.LE.0.0) RETURN
      IAFULT = 0
      XX = 0.5 * V
      C = XX - 1.0
C
C       STARTING APPROXIMATION FOR SMALL CHI-SQUARED
C
      IF (V .GE. -1.24 * ALOG(P)) GOTO 1
      CH = (p * XX * EXP(G + XX * AA)) ** (1.0 - XX)
      IF ( CH - E) 6, 4, 4
C
C       STARTING APPROXIMATION FOR V LESS THAN OR EQUAL TO 0.32
C
 1    IF (V.GT.0.32) GOTO 3
      CH = 0.4
      A = ALOG(1.0 - P)
 2    Q = CH
      P1 = 1.0 + CH * (4.67 + CH)
      P2 = CH * (6.73 + CH * (6.66 + CH))
      T = -0.5 + (4.67 + 2.0 * CH) / P1 -
     *    (6.73 + CH * (13.32 + 3.0 * CH)) / P2
      CH = CH - (1.0 - EXP(A + G + 0.5 * CH + C * AA) * P2/P1) / T
      IF (ABS(Q/CH - 1.0) - 0.01) 4, 4, 2
C
C       CALL TO ALGORITHM AS 70
C
 3    X = GAUINV(P ,IF1)
C
C       STARTING APPROXIMATION USING WILSON ANDHILFERTY ESTIMATE
C
      P1 = 0.222222 / V
      CH = V * (X * SQRT(P1) + 1.0 - P1) ** 3
C
C       STARTING APPROXIMATION FOR P TENDING TO 1
C
      IF (CH .GT. 2.2*V + 6.0)
     *    CH = -2.0 * (ALOG(1.0 - P) - C * ALOG(0.5 * CH) + C)
C
C       CALL TO ALGORITHM AS 32 AND CALCULATION OF SEVEN TERM TAYLOR
C       SERIES
```

```
C
 4    Q = CH
      P1 = 0.5 * CH
      P2 = P - GAMAIN(P1, XX, G, IF1)
      IF (IF1 .EQ. 0) GOTO 5
      IFAULT = 3
      RETURN
 5    T = P2 * EXP(XX * AA + G + P1 - C * ALOG(CH))
      B = T / CH
      A = 0.5 * T - B * C
      S1 = (210.0+A*(140.0+A*(105.0+A*(84.0+A*(70.0+60.0*A)))))/420.0
      S2 = (420.0+A*(735.0+A*(966.0+A*(1141.0+1278.0*A)))) / 2520.0
      S3 = (210.0+A*(462.0+A*(707.0+932.0*A))) / 2520.0
      S4 = (252.0+A*(672.0+1182.0*A)+C*(294.0+A*(889.0+1740*A))) /
     *      5040.0
      S5 = (84.0 + 264.0 * A + C * (175.0 + 606.0 * A)) / 2520.0
      S6 = (120.0 + C * (346.0 + 127.0 * C)) / 5040.0
      CH = CH+T*(1.0+0.5*T*S1-B*C*(S1-B*(S2-B*(S3-B*(S4-B*(S5-B*S6
     *      ))))))
      IF (ABS(Q / CH - 1.0) .GT. E) GOTO 4
C
 6    PPCHI2 = CH
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 13

Estructura.

Real Function Alogam(x , ifault)

x	Real	Entrada : Valor de X.
ifault	Entero	Salida : = 1, si x≤0; cero en otro caso.

Codificación.

```
      REAL FUNCTION ALOGAM(X, IFAULT)
C
C       THIS FUNCTION EVALUATES THE NATURAL LOGARITHM OF GAMMA(X)
C       FOR ALL  X > 0, ACCURATE TO 10 DECIMAL PLACE.
C
      REAL XX, F, Z
      ALOGAM = 0.0
      IFAULT = 1
      IF (X .LE. 0.0) RETURN
      IFAULT = 0
      XX = X
      IF (XX .LT. 7.0) THEN
        F = 1.0
        Z = XX - 1.0
 101    Z = Z + 1.0
        IF (Z .GE. 7.0) GOTO 102
        XX = Z
        F = F * Z
        GOTO 101
```

```
 102    XX = XX + 1
          F = - ALOG(F)
        ELSE
          F = 0.0
        ENDIF
        Z = (1.0 / XX) ** 2
        ALOGAM = F + (XX - 0.5) * ALOG(XX) - XX + 0.91893 85332 04673
     *            + (((-0.00059 52380 95238 * Z + 0.00079 36507 93651)
     *            * Z - 0.00277 77777 77778) * Z + 0.08333 33333 33333)
     *            / XX
        RETURN
        END
```

ALGORTIMO r_4

Estructura.

Function Gamain(x, p, g, ifault)

x	Real	Entrada : El valor del cuantil.
p	Real	Entrada : El valor del parámetro.
g	Real	Entrada : Logartitmo natural de $\Gamma(p)$.
ifault	Entero	Indicador de Salida :

Ifault = 1, si $p \le 0.0$ o si $x < 0.0$.

Ifault = 0, en otro caso.

Codificación.

```
      FUNCTION GAMAIN(X, P, G, IFAULT)
C
C        ALGORITHM AS 32 J.R.STATIST.SOC. C. (1970) VOL.19 NO.3
C
C        COMPUTES INCOMPLETE GAMMA RATIO FOR POSITIVE VALUES OF
C        ARGUMENTS X AND P.
C
      DIMENSION PN(6)
C
C        DEFINE ACCUARACY AND INITIALIZE
C
      ACU = 1.0E-8
      OFLO = 1.0E30
      GIN = 0.0
      IFAULT = 0
C
C        TEST FOR ADMISSIBILITY OR ARGUMENTS
C
      IF (P.LE.0.0) IFAULT = 1
      IF (X.LT.0.0) IFAULT = 2
      IF (IFAULT.GT.0 .OR. X.EQ.0.0) GOTO 50
      FACTOR = EXP(P*ALOG(X)-X-G)
      IF (X.GT.1.0 .AND. X.GE.P) GOTO 30
C
C        CALCULATION BY SERIES EXPANSION
```

```
C
      GIN = 1.0
      TERM = 1.0
      RN = P
 20   RN = RN + 1.0
      TERM = TERM * X / RN
      GIN = GIN + TERM
      IF (TERM .GT. ACU) GOTO 20
      GIN = GIN * FACTOR / P
      GOTO 50
C
C        CALCULATION BY CONTINUED FRACTION
C
 30   A = 1.0 - P
      B = A + X + 1.0
      TERM = 0.0
      PN(1) = 1.0
      PN(2) = X
      PN(3) = X + 1.0
      PN(4) = X * B
      GIN = PN(3) / PN(4)
 32   A = A + 1.0
      B = B * 2.0
      TERM = TERM * 1.0
      AN = A * TERM
      DO 33 I = 1,2
 33   PN(I+4) = B*PN(I+2)-AN*PN(I)
      IF (PN(6).EQ.0.0) GOTO 35
      RN = PN(5) / PN(6)
      DIF = ABS(GIN - RN)
      IF (DIF.GT.ACU) GOTO 34
      IF (DIF.GE.ACU*RN) GOTO 42
 34   GIN = RN
 35   DO 36 I=1,4
 36   PN(I) = PN(I+2)
      IF (ABS(PN(5)).LT.OFLO) GOTO 32
      DO 41 I=1,4
 41   PN(I) = PN(I) / OFLO
      GOTO 32
 42   GIN = 1.0 - FACTOR*GIN
C
 50   GAMAIN = GIN
      RETURN
      END
```

ALGORTIMO 15

Estructura.

Function Gammds(y, p, ifault)

y	*Real*	Entrada : El valor del cuantil.
p	*Real*	Entrada : El valor del parámetro.

ifault Entero Indicador de *Salida* :

Ifault = 1, si y o p ≤ 0.0.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos auxiliares :

Function Alogam (algoritmo 13).

Codificación.

```
      FUNCTION GAMMDS(Y, P, IFAULT)
C
C        ALGORITHM AS 147 APPL.STATIST. (1980) VOL.29 NO.1
C
C        COMPUTES INCOMPLETE GAMMA INTEGRAL FOR POSITIVE VALUES OF
C        PARAMETERS Y, P USING AN INFINITE SERIES.
C
      DATA E /1.0E-6/
C
C        CHECKS ADMISSIBILITY OR ARGUMENTS AND VALUES OF F
C
      IFAULT = 1
      GAMMDS = 0.0
      IF (Y .LE. 0.0 .OR. P .LE. 0.0) RETURN
      IFAULT = 2
C
C        ALOGAM IS NATURAL LOG OF GAMMA FUNCTION
C
      F = EXP(P * ALOG(Y) - ALOGAM(P + 1.0) - Y)
      IF (F.EQ.0.0) RETURN
      IFAULT = 0
C
C        SERIES BEGINS
C
      C = 1.0
      GAMMDS = 1.0
      A = P
 1    A = A + 1.0
      C = C * Y / A
      GAMMDS = GAMMDS + C
      IF (C/GAMMDS .GT. E) GOTO 1
      GAMMDS = GAMMDS * F
      RETURN
      END
```

ALGORTIMO 16

Estructura.

Function Gammad(x, p, ifault)

x	Real	*Entrada* : El valor del cuantil.
p	Real	Entrada : El valor del parámetro.
ifault	Entero	Indicador de *Salida* :

Ifault = 1, si $p \leq 0.0$ o si $x < 0.0$.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos Auxiliares.

Function Alnorm (algoritmo 6).

Function Alogam (algoritmo 13).

Codificación.

```
      REAL FUNCTION GAMMAD(X, P, IFAULT)
C
C        ALGORITHM AS 239 APPL. STATIST. (1988) VOL.37 NO.3
C
C        COMPUTATION OF THE INCOMPLETE GAMMA INTEGRAL
C
      INTEGER IFAULT
      REAL PN1, PN2, PN3, PN4, PN5, PN6, X, TOL, OFLO, XBIG,
     *     ARG, C, RN, P, A, B, ONE, ZERO, ALOGAM,
     *     AN, TWO, ELIMIT, PLIMIT, ALNORM, THREE, NINE
      PARAMETER (ZERO = 0.0, ONE = 1.0, TWO = 2.0,
     *           OFLO = 1.0E30, THREE = 3.0, NINE = 9.0,
     *           TOL = 1.0E-7, PLIMIT = 1000.0, XBIG = 1.0E6,
     *           ELIMIT = -88.0E0)
      INTRINSIC ABS, LOG, EXP, SQRT, MIN
      EXTERNAL ALOGAM, ALNORM
C
      GAMMAD = ZERO
C
C        CHECKS THAT WE HAVE VALID VALUES FOR X AND P
C
      IF (P .LE. ZERO .OR. X .LT. ZERO) THEN
        IFAULT = 1
        RETURN
      ENDIF
      IFAULT = 0
      IF (X .EQ. ZERO) THEN
        GAMMAD = ZERO
        RETURN
      ENDIF
C
C        USE A NORMAL APPROXIMATION IF P .GT. PLIMIT
C
      IF (P .GT. PLIMIT) THEN
        PN1 = THREE * SQRT(P) * ((X / P) ** (ONE / THREE) + ONE /
     *        (NINE * P) - ONE)
        GAMMAD = ALNORM(PN1, .FALSE.)
        RETURN
      ENDIF
C
C     IF X IS EXTREMELY LARGE COMPARED TO P THEN SET GAMMAD TO ONE
C
      IF (X .GT. XBIG) THEN
        GAMMAD = ONE
        RETURN
      ENDIF
```

Ifault = 1, si p ≤ 0.0 o si x < 0.0.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos Auxiliares.

Function Alnorm (algoritmo 6).

Function Alogam (algoritmo 13).

Codificación.

```
      REAL FUNCTION GAMMAD(X, P, IFAULT)
C
C        ALGORITHM AS 239 APPL. STATIST. (1988) VOL.37 NO.3
C
C        COMPUTATION OF THE INCOMPLETE GAMMA INTEGRAL
C
      INTEGER IFAULT
      REAL PN1, PN2, PN3, PN4, PN5, PN6, X, TOL, OFLO, XBIG,
     *     ARG, C, RN, P, A, B, ONE, ZERO, ALOGAM,
     *     AN, TWO, ELIMIT, PLIMIT, ALNORM, THREE, NINE
      PARAMETER (ZERO = 0.0, ONE = 1.0, TWO = 2.0,
     *           OFLO = 1.0E30, THREE = 3.0, NINE = 9.0,
     *           TOL = 1.0E-7, PLIMIT = 1000.0, XBIG = 1.0E6,
     *           ELIMIT = -88.0E0)
      INTRINSIC ABS, LOG, EXP, SQRT, MIN
      EXTERNAL ALOGAM, ALNORM
C
      GAMMAD = ZERO
C
C        CHECKS THAT WE HAVE VALID VALUES FOR X AND P
C
      IF (P .LE. ZERO .OR. X .LT. ZERO) THEN
        IFAULT = 1
        RETURN
      ENDIF
      IFAULT = 0
      IF (X .EQ. ZERO) THEN
        GAMMAD = ZERO
        RETURN
      ENDIF
C
C        USE A NORMAL APPROXIMATION IF P .GT. PLIMIT
C
      IF (P .GT. PLIMIT) THEN
        PN1 = THREE * SQRT(P) * ((X / P) ** (ONE / THREE) + ONE /
     *        (NINE * P) - ONE)
        GAMMAD = ALNORM(PN1, .FALSE.)
        RETURN
      ENDIF
C
C     IF X IS EXTREMELY LARGE COMPARED TO P THEN SET GAMMAD TO ONE
C
      IF (X .GT. XBIG) THEN
        GAMMAD = ONE
        RETURN
      ENDIF
```

```
C
      IF (X .LE. ONE .OR. X .LT. P) THEN
C
C     USE PEARSON'S SERIES EXPANSION
C
        ARG = P * LOG(X) - X - ALOGAM(P + ONE, IFAULT)
        C = ONE
        GAMMAD = ONE
        A = P
 40     A = A + ONE
        C = C * X / A
        GAMMAD = GAMMAD + C
        IF (C .GT. TOL) GOTO 40
        ARG = ARG + LOG(GAMMAD)
        GAMMAD = ZERO
        IF (ARG .GE. ELIMIT) GAMMAD = EXP(ARG)
C
      ELSE
C
C     USE A CONTINUED FRACTION EXPANSION
C
        ARG = P * LOG(X) - X - ALOGAM(P, IFAULT)
        A = ONE - P
        B = A + X + ONE
        C = ZERO
        PN1 = ONE
        PN2 = X
        PN3 = X + ONE
        PN4 = X * B
        GAMMAD = PN3 / PN4
 60     A = A + ONE
        B = B + TWO
        C = C + ONE
        AN = A * C
        PN5 = B * PN3 - AN * PN1
        PN6 = B * PN4 - AN * PN2
        IF (ABS(PN6) .GT. ZERO) THEN
          RN = PN5 / PN6
          IF (ABS(GAMMAD - RN) .LE. MIN(TOL, TOL * RN)) GOTO 80
          GAMMAD = RN
        ENDIF
C
        PN1 = PN3
        PN2 = PN4
        PN3 = PN5
        PN4 = PN6
        IF (ABS(PN5) .GE. OFLO) THEN
C
C        RE-SCALE TERMS IN CONTINUED FRACTION IF TERM ARE LARGE
C
          PN1 = PN1 / OFLO
          PN2 = PN2 / OFLO
          PN3 = PN3 / OFLO
          PN4 = PN4 / OFLO
        ENDIF
```

```
      GOTO 60
 80   ARG = ARG + LOG(GAMMAD)
      GAMMAD = ONE
      IF (ARG .GE. ELIMIT) GAMMAD = ONE - EXP(ARG)
      ENDIF
C
      END
```

ALGORITMO 17

Estructuta.

Function Betain(x, p, q, beta, ifault)

x	Real	Entrada : Valor del cuantil.
p	Real	Entrada : Valor del parámetro P.
q	Real	Entrada : Valor del parámetro Q.
beta	Real	Entrada : Valor de B(p,q).
ifault	Entero	Indicador de salida.

Ifault = 2, si $x < 0$ o $x > 1$.

Ifault = 1, si $p \le 0$ o $q \le 0$.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos auxiliares :

Function Alogam (algoritmo 13).

Codificaión.

```
      FUNCTION BETAIN(X, P, Q, BETA, IFAULT)
C
C        ALGORITHM AS 63 APPL. STATIST. (1973) VOL.22 NO.3
C
C        COMPUTES INCOMPLETE BETA INTEGRAL
C
      LOGICAL INDEX
C
C        DEFINE ACCUARACY AND INITIALIZE
C
      DATA ACU /0.1E-7/
      BETAIN = X
C
C        TEST FOR ADMISSIBILITY OF ARGUMENTS
C
      IFAULT = 1
      IF (P .LE. 0.0 .OR. Q .LE. 0.0) RETURN
      IFAULT = 2
      IF (X .LT. 0.0 .OR. X .GT. 1.0) RETURN
      IFAULT = 0
      IF (X .EQ. 0.0 .OR. X .EQ. 1.0) RETURN
C
C        CHANGE TAIL IF NECESSARY AND DETERMINE S
C
```

```
      PSQ = P + Q
      CX = 1.0 - X
      IF (P .GE. PSQ*X) GOTO 1
      XX = CX
      CX = X
      PP = Q
      QQ = P
      INDEX = .TRUE.
      GOTO 2
 1    XX = X
      PP = P
      QQ = Q
      INDEX = .FALSE.
 2    TERM = 1.0
      AI = 1.0
      BETAIN = 1.0
      NS = QQ + CX * PSQ
C
C        USES SOPER'S REDUCTION FORMULAE
C
      RX = XX / CX
 3    TEMP = QQ - AI
      IF (NS .EQ. 0.0) RX = XX
 4    TERM = TERM * TEMP * RX / (PP + AI)
      BETAIN = BETAIN + TERM
      TEMP = ABS(TERM)
      IF (TEMP .LE. ACU .AND. TEMP .LE. ACU*BETAIN) GOTO 5
      AI = AI + 1.0
      NS = NS - 1
      IF (NS .GE. 0) GOTO 3
      TEMP = PSQ
      PSQ = PSQ + 1.0
      GOTO 4
C
C        CALCULATE RESULT
C
 5    BETAIN = BETAIN * EXP(PP * ALOG(XX) + (QQ - 1.0) * ALOG(CX))/
     *          (PP * BETA)
      IF (INDEX) BETAIN = 1.0 - BETAIN
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 18

Estructuta.

Function Betai(a, b, x, ifault)

a	Real	Entrada : Valor del parámetro P.
a	Real	Entrada : Valor del parámetro Q.
x	Real	Entrada : Valor del cuantil.
ifault	Entero	Indicador de salida.

Ifault = 2, si $x < 0$ o $x > 1$; también si $a \leq 0$ o $b \leq 0$.

Ifault = 1, si a o b son muy grandes.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos auxiliares :

Function Alogam (algoritmo 13).

Codificaión.

```
      FUNCTION BETAI(A, B, X, IFAULT)
C
C      RETURN THE INCOMPLETE BETA FUNCTION Ix(A,B)
C
      BETAI = X
C
C        TEST FOR ADMISSIBILITY OF ARGUMENTS
C
      IFAULT = 2
      IF (A .LE. 0.0 .OR. B .LE. 0.0) RETURN
      IF (X .LT. 0.0 .OR. X .GT. 1.0) RETURN
      IFAULT = 0
      IF (X .EQ. 0.0 .OR. X .EQ. 1.0) THEN
        BT = 0.0
      ELSE
        BT = EXP(ALOGAM(A + B) - ALOGAM(A) - ALOGAM(B) + A
     *          * ALOG(X) + B * ALOG(1.0 - X))
      ENDIF
C
C        USE CONTINUED FRACTION DIRECTLY
C
      IF (X .LT. (A - 1.0)/(A + B - 2.0)) THEN
        BETAI = BT * BETACF(A,B,X) / A
        RETURN
C
C     USE CONTINUED FRACTION AFTER MAKING THE SYMMETY TRANSFORTION
C
      ELSE
        BETAI = 1.0 - BT * BETACF(B, A, 1. - X) / B
        RETURN
      ENDIF
      END

      FUNCTION BETACF(A, B, X)
      PARAMETER (ITMAX = 100, EPS = 3.E-7)
      AM = 1.0
      BM = 1.0
      AZ = 1.0
      QAB = A + B
      QAP = A + 1.
      QAM = A - 1.
      BZ = 1. - QAB * X / QAP
      DO 11 M = 1, ITMAX
        EM = M
        TEM = EM + EM
        D = EM * (B - M) * X / ((QAM + TEM)*(A + TEM))
```

```
        AP = AZ + D * AM
        BP = BZ + D * BM
        D = -(A + EM)*(QAB + EM) * X / ((A + TEM)*(QAP + TEM))
        APP = AP + D * AZ
        BPP = BP + D * BZ
        AOLD = AZ
        AM = AP / BPP
        BM = BP / BPP
        AZ = APP / BPP
        BZ = 1.
        IF (ABS(AZ - AOLD) .LT. EPS * ABS(AZ)) GOTO 1
 11   CONTINUE
      IFAULT = 1
 1    BETACF = AZ
      RETURN
      END
```

ALGORITMO 19

Estructura.

Function Xinbta(p, q, beta, alpha, ifault)

p	Real	Entrada : Valor del parámetro P.
q	Real	Entrada : Valor del parámetro Q.
beta	Real	Entrada : Valor de B(p,q).
alpha	Real	Entrada : Probabilidad.
ifault	Entero	Indicador de salida.

Ifault = 3, si durante el *proceso* Xinbta es negativo o mayor que 1.

Ifault = 2, si alpha < 0 o alpha > 1.

Ifault = 1, si p ≤ 0 o q ≤ 0.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos auxiliares :

Function Betain (algoritmo 17).

Function Alogam (algoritmo 13).

Codificaión.

```
      FUNCTION XINBTA(P, Q, BETA, ALPHA, IFAULT)
C
C        ALGORITHM AS 64 APPL. STATIST. (1973) VOL.22 NO.3
C
C        COMPUTES INVERSE OF INCOMPLETE BETA FUNCTION RATIO
C
      LOGICAL INDEX
C
C        DEFINE ACCUARACY AND INITIALIZE
C
      DATA ACU /0.1E-6/
      XINBTA = ALPHA
```

```
C
C        TEST FOR ADMISSIBILITY OF ARGUMENTS
C
      IFAULT = 1
      IF (P .LE. 0.0 .OR. Q .LE. 0.0) RETURN
      IFAULT = 2
      IF (ALPHA .LT. 0.0 .OR. ALPHA .GT. 1.0) RETURN
      IFAULT = 0
      IF (ALPHA .EQ. 0.0 .OR. ALPHA .EQ. 1.0) RETURN
C
C        CHANGE TAIL IF NECESSARY AND DETERMINE S
C
      IF (ALPHA .LE. 0.5) GOTO 1
      A = 1.0 - ALPHA
      PP = Q
      QQ = P
      INDEX = .TRUE.
      GOTO 2
 1    A = ALPHA
      PP = P
      QQ = Q
      INDEX = .FALSE.
C
C        CALCULATE THE INITIAL APPROXIMATION
C
 2    R = SQRT(-ALOG(A * A))
      Y = R - (2.30753 + 0.27061 * R)/(1.0 + (0.99229 + 0.04481 * R)
     *    * R )
      R = 2.0 * QQ
      T = 1.0 / (9.0 * QQ)
      T = R * (1.0 - T + Y * SQRT(T)) ** 3
      IF (T .LE. 0.0) GOTO 3
      T = (4.0 * PP + R - 2.0) / T
      IF (T.LE.1.0) GOTO 4
      XINBTA = 1.0 - 2.0 / (T + 1.0)
      GOTO 5
 3    XINBTA = 1.0 - EXP(ALOG((1.0 - A) * QQ * BETA) / QQ)
      GOTO 5
 4    XINBTA = EXP(ALOG(A * PP * BETA) / PP)
C
C        SOLVE FOR X BY THE NEWTON-RAHPSON METHOD,
C        USING THE FUNCTION BETAIN
C
 5    R = 1.0 - PP
      T = 1.0 - QQ
 6    Y = BETAIN(XINBTA, PP, QQ, BETA, IFAULT)
      IF (IFAULT .EQ. 0.0) GOTO 7
      IFAULT = 3
      RETURN
 7    Y = (Y - A) * BETA * EXP(R * ALOG(XINBTA) + T * ALOG(1.0 -
     *    XINBTA))
      XINBTA = XINBTA - Y
      IF (ABS(Y) .GT. ACU) GOTO 6
      IF (INDEX) XINBTA = 1.0 - XINBTA
      RETURN
```

```
      END
```

ALGORITMO 20

Estructura.

Subroutine Mdbeti(p, a, b, x, ier)

p	Real	Entrada : Probabilidad.
a	Real	Entrada : Valor del parámetro P.
b	Real	Entrada : Valor del parámetro Q.
x	Real	Salida : Valor del cuantil.
ier	Entero	Indicador de salida.

Ier = 131, si p esta fuera del rango (0,1).

Ier = 130, indica que el valor de x no puede ser encontrado en 30 iteraciones.

Ier = 0, en otro caso.

Algoritmos auxiliares :

Function Betai (algoritmo 18).

Codificación.

```
      SUBROUTINE MDBETI(P, A, B, X, IER)
C
C         INVERSE INCOMPLETE BETA PROBABILITY
C
      DATA               EPS, SIG /0.0001, 1.E-5/
      DATA               ZERO, ITMAX /0.0, 30/
      IER = 0
      IC = 0
      AB = A / B
      XL = 0.0
      XR = 1.0
      FXL = -P
      FXR = 1.0 - P
      IF (FXL * FXR .GT. ZERO) GOTO 25
C
C         BISECTION METHOD
C
 5    X = (XL + XR) * 0.5
      P1 = BETAI(A, B, X, IFAULT)
      FCS = P1 - P
      IF (FCS*FXL .GT. ZERO) GOTO 10
      XP = X
      FXR = FCS
      GOTO 15
 10   XL = X
      FXL = FCS
 15   XRMXL = XR - XL
      IF (XRMXL .LE. SIG .AND. ABS(FCS) .LE. EPS) GOTO 900
```

```
      IC = IC + 1
      IF (IC .LE. ITMAX) GOTO 5
      IER = 130
      GOTO 900
 25   IER = 131
 900  RETURN
      END
```

ALGORITMO 21

Estructura.

Function Probst(t, idf).

t	Real	Entrada : Valor del cuantil.
idf	Entero	Entrada : Grados de libertad.

Codificación.

```
      FUNCTION PROBST(T, IDF)
C
C        ALGORITHM AS 3 APPL. STATIST. (1968) VOL.17 NO.2.
C
C        STUDENT T PROBABILITY (LOWER TAIL)
C
      DATA     G1 / 0.3183098868/
C
      F = IDF
      A = T / SQRT(F)
      B = F / (F + T ** 2)
      IM2 = IDF - 2
      IDE = IDF - 2 * (IDF/2)
      S = 1.0
      C = 1.0
      KS = 2 + IDE
      FK = KS
      IF (IM2 - 2) 6, 7, 7
 7    DO 8 K = KS,IM2,2
      C = C * B * (FK - 1.0) / FK
      S = S + C
 8    FK = FK + 2.0
 6    IF (IDE) 1, 1, 2
 1    PROBST = 0.5 + 0.5 * A * SQRT(R) * S
      GOTO 3
 2    IF (IDF - 1) 4, 4, 5
 4    S = 0.0
 5    PROBST = 0.5 + (A * B * S + ATAN(A)) * G1
 3    RETURN
      END
```

ALGORITMO 22

Estructura.

Subroutine Ttest(t, df, ans, kerr)

t Real Entrada : Valor del cuantil.

df Entero Entrada : Grados de libertad.

ans Real Salida : Valor de la probabilidad.

kerr Entero Salida : = 1, si df≤0; 0 en otro caso.

Codificación.

```
      SUBROUTINE TTEST
     * (T, DF, ANS, KERR)
C
      REAL  ANS, D1, D2, F1, F2, T, T1, T2
      INTEGER DF, I, KERR, N
C
      DATA D1 /0.63661977/
C
C          D1 = 2 / PI
C
      KERR = 0
C
      IF (DF .GT. 0) GOTO 1
C
C        ERROR RETURN IF DF NOT POSITIVE
C
      KERR = 1
      ANS = 0.
      RETURN
C
C        BEGIN COMPUTATION OF SERIES
C
 1    T = ABS(T)
      T1 = T / SQRT(FLOAT(DF))
      T2 = 1. / (1. + T1*T1)
      IF ((DF/2)*2 .EQ. DF) GOTO 5
C
C        DF IS AN ODD INTEGER
C
      ANS = 1. - D1 * ATAN(T1)
      IF (DF .EQ. 1) GOTO 4
      D2 = D1 * T1 * T2
      ANS = ANS - D2
      IF (DF .EQ. 3) GOTO 4
      F1 = 0.
 2    N = (DF - 2) / 2
      DO 3 I =1,N
      F2 = 2.0 * FLOAT(I) - F1
      D2 = D2 * T2 * F2 / (F2 + 1.)
 3    ANS = ANS - D2
C
C        COMMON RETURN AFTER COMPUTATION
C
 4    IF (ANS .LT. 0.) ANS = 0.
      RETURN
C
C        DF IS AN EVEN INTEGER
```

```
C
 5    D2 = T1 * SQRT(T2)
      ANS = 1. - D2
C
      IF (DF .EQ. 2) GOTO 4
C
      F1 = 1.
      GOTO 2
      END
```

ALGORITMO 23

Estructura.

Real function Tinv(p, v, ifault)

p	Real	Entrada : Valor de la probabilidad.
v	Real	Entrada : Grados de libertad.
ifault	Entero	Indicador.

Ifault = 2, si p≤0 o p≥1.

Ifault = 1, si v<0.00001.

Ifault = 0, en otro caso.

Algoritmos Auxiliares :

Function Alnorm (algoritmo 6)

Function Pppnd7 (algoritmo 10)

Function Alogam (algoritmo 13)

Function Betai (algoritmo 18).

Codificación.

```
      REAL FUNCTION TINV(P, V, IFAULT)
      REAL C1, C2, C3, C4, C5, C6, T, W1, W2, CGAM,
     *      PAUX, PAUX1, V, P
      INTEGER J, IFAULT
      LOGICAL INDEX
      PARAMETER (EPS = 0.5E-6, TOL = 0.1E+18, PI = 3.14159265358897)
      TINV = 0.0
      IF (P.LE.0.0 .OR. P.GE.1.0) THEN
        IFAULT = 2
        RETURN
      ENDIF
      IF (V.LT.0.00001) THEN
        IFAULT = 1
        RETURN
      ENDIF
      IFAULT = 0
      IF (P.EQ.0.0) RETURN
      IF (V.GE.10000.0) THEN
        TINV = PPND7(P,J)
        RETURN
```

```
      ENDIF
      IF (P.LT.0.5) THEN
        PAUX = 1.0 - P
        INDEX = .TRUE.
      ELSE
        PAUX = P
        INDEX = .FALSE.
      ENDIF
      CGAM = ALOGAM((V + 1.0/2.0, J) - ALOGAM(V/2.0, J)
      CGAM = EXP(CGAM) / SQRT(V * PI)
      T = PPND7(PAUX, J)
      IF (V .GE. 1.5) THEN
        T = T*T*(V - 1.5) / (V - 1.0)**2
        T = V * EXP(T) - V
        T = SQRT(T)
      ELSE
        T = T + (0.25*T* (T*T + 1.0) + T* (3.0 + T*T* (16.0
     *       + 5.0 * T*T)) / 96.0 * V) / V
      ENDIF
      J = 0
 1    C1 = T
      C2 = T
      IF (V .GE. 1.5) THEN
        C3 = T * (T + 2.0*V) + V
        C4 = T * (V*(7.0*V+1.0) + T*(6.0*V*(V+1.0) + T*(1.0-V)))
        C5 = T*T*(7.0+V*(-63.0+V*(12.0+46.0*V)) + T*(24.0*V*(1.0
     *         +V*(2.0+V)) + T*(-6.0 - 22.0 *V*(1.0+V)))) + V*V*
     *         (7.0*V+1.0)
      ELSE
        C3 = 0.0
        C4 = 0.0
        C5 = 0.0
      ENDIF
      IF (V .LE. 200.0 .AND. V .GE. 30.0) THEN
        C6 = T*(V*V*(7.0+V*(66.0+35.0*V)) + T*(V*V*(-150.0
     *         -150.0*V) + T*(185.0+V*(-280.0+V*(-497.0+V*(486.0+
     *         226.0*V))) + T*(V*(140.0+V*(380.0+V*(360.0+120.0*V)))
     *         + T*(-34.0+V*(176.0+V*(-324.0*206.0*V)))))))
      ELSE
        C6 = 0.0
      ENDIF
      PAUX1 = PROBST(T, V)
      W1 = CGAM * (1.0 + (T/V)*T)**(-0.5*(V + 1.0))
      W1 = 0.5 * (PAUX - PAUX1) / W1
      W2 = (V + 1.0) / (V + T*T)
      J = J+1
      T = T + W1*(1.0+ W1*W2*(C2*0.5 + W1*W2*(C3/6.0 + W1*W2*
     *     (C4/24.0 + W1*W2*(C5/120.0 + W1*W2*C6/720.0)))))
      IF (T .GE. TOL ) THEN
        IF (INDEX) THEN
          TINV = - T
        ELSE
          TINV = T
        ENDIF
```

```
    RETURN
  ENDIF
  IF (ABS(C1/T) - 1.0 .GT. EPS .AND. J .LE. 50) GOTO 1
  IF (INDEX) T = -T
  TINV = T
  RETURN
  END

  REAL FUNCTION PROBST(T, V)
  REAL T, V, P, TO, X, VO
  LOGICAL INDEX
  IF (T .EQ. 0.0) THEN
    PROBST = 0.5
    RETURN
  END
  IF (T .LT. 0.0) THEN
    TO = - T
    INDEX = .TRUE.
  ELSE
    TO = T
    INDEX = .FALSE.
  ENDIF
  X = V / (V + TO*TO)
  VO = V * 0.5
  P = BETAI(VO, 0.5, X)
  PROBST = 1.0 - 0.5 * P
  IF (INDEX) PROBST = 1.0 - PROBST
  RETURN
  END
```

ALGORITMO 24

Estructura.

Subroutine Pf(n1, n2, z, poff, ier)

n1	Entero	Entrada : Grados de libertad en el numerador.
n2	Entero	Entrada : Grados de libertad en el denominador.
z	Real	Entrada : Limite de integración.
poff	Real	Salida : Probabilidad calculada.
ier	entero	Indicador de Salida.

Ier = 3, si el valor encontrado poff es mayor que 1 o menor que 0.

Ier = 2, si n1 o n2 no son enteros positivos.

Ier = 1, si z es menor que *cero*.

Ier = 0, en otro caso.

Codificación.

```
      SUBROUTINE PF(N1, N2, Z, POFF, IER)
C
C        COMPUTE F PROBABILITY
```

```
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      IER = 0
      IF (Z .GT. 0.0D0) GOTO 5
      POFF = 0.0D0
      IER = 1
      RETURN
 5    IF (N1 .GT. 0 .AND. N2 .GT. 0) GOTO 10
      IER = 2
      POFF = 0
      RETURN
 10   CONTINUE
      AN1 = N1
      AN2 = N2
      A = AN1 * Z/(AN1*Z+AN2)
      A1 = 1.0D0 - A
      IF (A1 .LT. 0.1D-36) A1 = 0.1D-36
      D1 = AN1 * 0.5D0
      D2 = AN2 * 0.5D0
      D3 = D1 + D2 - 1.0D0
      R = 0.0D0
      S1 = 0.0D0
      S2 = 0.0D0
      DEL = 1.0D0
      XM = 1.0D0
      XK = 1.0D0
      C = 0.25D0
      PI = 3.141592653589793D0
C                            NOTE BEGINNING OF MAYOR LOUP
 15   CONTINUE
C                            TO SEE IF DEGREES OF FREDOM ARE ODD OR EVEN
      M = D2
      M = 2 * M
      IF (M .NE. N) GOTO 30
      N = D2 - 1
C
C         IF DEGREES OF FREDOM ARE EVEN     N = D.F/2-1
C
      IF (N .EQ. 0) GOTO 25
      DO 20 I = 1,N
        S1 = DEL + S1 * R
        D2 = D2 - 1.0D0
        D3 = D3 - 1.0D0
        TEM = A1 / D2
        R = D3 * TEM
        S2 = (R + TEM) * S2
 20   CONTINUE
 25   S1 = DEL + S1 * R
      DEL = 0.0D0
      T = - 1.0D0
      D3 = - 1.0D0
      S2 = A * S2
      C = C + 0.5D0
      GOTO 45
C
```

```
C       IF DEGREES OF FREDOM ARE ODD    N = (DF - 1) / 2
C
 30  N = D2
C
C       IF DEGREES OF FREDOM EQUAL 1. DO NOT EXIT LOOP
C
      IF (N .EQ. 0) GOTO 40
      DO 35 I=1,N
        S1 = DEL + S1 * R
        D2 = D2 - 1.0D0
        D3 = D3 - 1.0D0
        TEM = A1 / D2
        R = D3 * TEM
        S2 = (R + TEM) * S2
 35   CONTINUE
 40   S1 = XK * S1
      S2 = XK * S2
      ART = DSQRT(A1)
      XM = XM *ART
      T = (XM - ART) / A1
      D3 = 0.5D0
      XK = 2.0D0 / PI
      C = C * 2.0D0
 45   IF (C .GT. 0.875D0) GOTO 50
      D2 = D1
      D3 = D2 + D3
      S2 = S1
      S1 = 0.0D0
      A1 = A
      IF (A1 .LT. 0.1D-36) A1 = 0.1D-36
      N = N1
      GOTO 15
 50   IF (C .LT. 1.125D0) DEL = 4.D0/PI*DATAN(T)
      POFF = XM * (S2 - S1) - DEL
      IF (O.0D0 .LE. POFF .AND. 1.0D0 .GE. POFF) RETURN
      IF (POFF .LT. 0.0D0) POFF = 0.0D0
      IF (POFF .GT. 1.0D0) POFF = 1.0D0
      IER = 3
      RETURN
      END
```

DISTRIBUCION BINOMIAL

$$P(X \leq k) = \sum_{I=0}^{K} \binom{N}{I} P^{I} Q^{N-I}$$

Valores de P

		0.0001	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
		0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
N = 1							
	k = 0	0.99900	0.99000	0.95000	0.90000	0.85000	0.80000
		0.75000	0.70000	0.65000	0.60000	0.55000	0.50000
N = 2							
	k = 0	0.99800	0.98010	0.90250	0.81000	0.72250	0.64000
		0.56250	0.49000	0.42250	0.36000	0.30250	0.25000
	k = 1	1.00000	0.99990	0.99750	0.99000	0.97750	0.96000
		0.93750	0.91000	0.87750	0.84000	0.79750	0.75000
N = 3							
	k = 0	0.99700	0.97030	0.85738	0.72900	0.61413	0.51200
		0.42187	0.34300	0.27462	0.21600	0.16637	0.12500
	k = 1	1.00000	0.99970	0.99275	0.97200	0.93925	0.89600
		0.84375	0.78400	0.71825	0.64800	0.57475	0.50000
	k = 2	1.00000	1.00000	0.99988	0.99900	0.99663	0.99200
		0.98437	0.97300	0.95712	0.93600	0.90887	0.87500
N = 4							
	k = 0	0.99601	0.96060	0.81451	0.65610	0.52201	0.40960
		0.31641	0.24010	0.17851	0.12960	0.09151	0.06250
	k = 1	0.99999	0.99941	0.98598	0.94770	0.89048	0.81920
		0.73828	0.65170	0.56298	0.47520	0.39098	0.31250
	k = 2	1.00000	1.00000	0.99952	0.99630	0.98802	0.97280
		0.94922	0.91630	0.87352	0.82080	0.75852	0.68750
	k = 3	1.00000	1.00000	0.99999	0.99990	0.99949	0.99840
		0.99609	0.99190	0.98499	0.97440	0.95899	0.93750
N = 5							
	k = 0	0.99501	0.95099	0.77378	0.59049	0.44371	0.32768
		0.23730	0.16807	0.11603	0.07776	0.05033	0.03125
	k = 1	0.99999	0.99902	0.97741	0.91854	0.83521	0.73728
		0.63281	0.52822	0.42841	0.33696	0.25622	0.18750
	k = 2	1.00000	0.99999	0.99884	0.99144	0.97339	0.94208
		0.89648	0.83692	0.76483	0.68256	0.59313	0.50000
	k = 3	1.00000	1.00000	0.99997	0.99954	0.99777	0.99328
		0.98437	0.96922	0.94598	0.91296	0.86878	0.81250
	k = 4	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99968
		0.99902	0.99757	0.99475	0.98976	0.98155	0.96875
N = 6							
	k = 0	0.99402	0.94148	0.73509	0.53144	0.37715	0.26214
		0.17798	0.11765	0.07542	0.04666	0.02768	0.01563
	k = 1	0.99999	0.99854	0.96723	0.88574	0.77648	0.65536
		0.53394	0.42018	0.31908	0.23328	0.16357	0.10938

		Valores de P					
		0.0001	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
		0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	k = 2	1.00000	0.99998	0.99777	0.98415	0.95266	0.90112
		0.83057	0.74431	0.64708	0.54432	0.44152	0.34375
	k = 3	1.00000	1.00000	0.99991	0.99873	0.99412	0.98304
		0.96240	0.92953	0.88258	0.82080	0.74474	0.65625
	k = 4	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995	0.99960	0.99840
		0.99536	0.98907	0.97768	0.95904	0.93080	0.89063
	k = 5	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994
		0.99976	0.99927	0.99816	0.99590	0.99170	0.98438
N = 7	k = 0	0.99302	0.93207	0.69834	0.47830	0.32058	0.20972
		0.13348	0.08235	0.04902	0.02799	0.01522	0.00781
	k = 1	0.99998	0.99797	0.95562	0.85031	0.71658	0.57672
		0.44495	0.32942	0.23380	0.15863	0.10242	0.06250
	k = 2	1.00000	0.99997	0.99624	0.97431	0.92623	0.85197
		0.75641	0.64707	0.53228	0.41990	0.31644	0.22656
	k = 3	1.00000	1.00000	0.99981	0.99727	0.98790	0.96666
		0.92944	0.87396	0.80015	0.71021	0.60829	0.50000
	k = 4	1.00000	1.00000	0.99999	0.99982	0.99878	0.99533
		0.98712	0.97120	0.94439	0.90374	0.84707	0.77344
	k = 5	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99993	0.99963
		0.99866	0.99621	0.99099	0.98116	0.96429	0.93750
	k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
		0.99994	0.99978	0.99936	0.99836	0.99626	0.99219
N = 8	k = 0	0.99203	0.92275	0.66342	0.43047	0.27249	0.16777
		0.10011	0.05765	0.03186	0.01680	0.00837	0.00391
	k = 1	0.99997	0.99731	0.94276	0.81311	0.65718	0.50332
		0.36708	0.25530	0.16913	0.10638	0.06318	0.03516
	k = 2	1.00000	0.99995	0.99421	0.96191	0.89479	0.79692
		0.67854	0.55177	0.42781	0.31539	0.22013	0.14453
	k = 3	1.00000	1.00000	0.99963	0.99498	0.97865	0.94372
		0.88618	0.80590	0.70640	0.59409	0.47696	0.36328
	k = 4	1.00000	1.00000	0.99999	0.99957	0.99715	0.98959
		0.97270	0.94203	0.89391	0.82633	0.73962	0.63672
	k = 5	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99976	0.99877
		0.99577	0.98871	0.97468	0.95019	0.91154	0.85547
	k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992
		0.99962	0.99871	0.99643	0.99148	0.98188	0.96484
	k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		0.99998	0.99993	0.99977	0.99934	0.99832	0.99609
N = 9	k = 0	0.99104	0.91352	0.63025	0.38742	0.23162	0.13422
		0.07508	0.04035	0.02071	0.01008	0.00461	0.00195

Valores de P

	0.0001 0.25	0.01 0.30	0.05 0.35	0.10 0.40	0.15 0.45	0.20 0.50
k = 1	0.99997	0.99656	0.92879	0.77484	0.59948	0.43621
	0.30034	0.19600	0.12108	0.07054	0.03852	0.01953
k = 2	1.00000	0.99992	0.99164	0.94703	0.85915	0.73820
	0.60068	0.46283	0.33727	0.23179	0.14950	0.08984
k = 3	1.00000	1.00000	0.99936	0.99167	0.96607	0.91436
	0.83427	0.72966	0.60889	0.48261	0.36138	0.25391
k = 4	1.00000	1.00000	0.99997	0.99911	0.99437	0.98042
	0.95107	0.90119	0.82828	0.73343	0.62142	0.50000
k = 5	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994	0.99937	0.99693
	0.99001	0.97470	0.94641	0.90065	0.83418	0.74609
k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995	0.99969
	0.99866	0.99571	0.98882	0.97496	0.95023	0.91016
k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998
	0.99989	0.99957	0.99860	0.99620	0.99092	0.98047
k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1.00000	0.99998	0.99992	0.99974	0.99924	0.99805
N = 10						
k = 0	0.99005	0.90438	0.59874	0.34868	0.19687	0.10737
	0.05631	0.02825	0.01346	0.00605	0.00253	0.00098
k = 1	0.99996	0.99573	0.91386	0.73610	0.54430	0.37581
	0.24403	0.14931	0.08595	0.04636	0.02326	0.01074
k = 2	1.00000	0.99989	0.98850	0.92981	0.82020	0.67780
	0.52559	0.38278	0.26161	0.16729	0.09956	0.05469
k = 3	1.00000	1.00000	0.99897	0.98721	0.95003	0.87913
	0.77587	0.64961	0.51383	0.38228	0.26604	0.17188
k = 4	1.00000	1.00000	0.99994	0.99837	0.99013	0.96721
	0.92187	0.84973	0.75150	0.63310	0.50440	0.37695
k = 5	1.00000	1.00000	1.00000	0.99985	0.99862	0.99363
	0.98027	0.95265	0.90507	0.83376	0.73844	0.62305
k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99987	0.99914
	0.99649	0.98941	0.97398	0.94524	0.89800	0.82813
k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992
	0.99958	0.99841	0.99518	0.98770	0.97261	0.94531
k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	0.99997	0.99986	0.99946	0.99832	0.99550	0.98926
k = 9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1.00000	0.99999	0.99997	0.99989	0.99966	0.99902
N = 11						
k = 0	0.98906	0.89534	0.56880	0.31381	0.16734	0.08590
	0.04224	0.01977	0.00875	0.00363	0.00139	0.00049
k = 1	0.99995	0.99482	0.89811	0.69736	0.49219	0.32212
	0.19710	0.11299	0.06058	0.03023	0.01393	0.00586
k = 2	1.00000	0.99985	0.98477	0.91044	0.77881	0.61740
	0.45520	0.31274	0.20013	0.11892	0.06522	0.03271

	Valores de P					
	0.0001	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
k = 3	1.00000	1.00000	0.99845	0.98147	0.93056	0.83886
	0.71330	0.56956	0.42555	0.29628	0.19112	0.11328
k = 4	1.00000	1.00000	0.99989	0.99725	0.98411	0.94959
	0.88537	0.78970	0.66831	0.53277	0.39714	0.27441
k = 5	1.00000	1.00000	1.00000	0.99970	0.99734	0.98835
	0.96567	0.92177	0.85132	0.75350	0.63312	0.50000
k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99968	0.99804
	0.99244	0.97838	0.94986	0.90065	0.82620	0.72559
k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99977
	0.99881	0.99571	0.98776	0.97072	0.93904	0.88672
k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998
	0.99987	0.99942	0.99796	0.99407	0.98520	0.96729
k = 9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	0.99999	0.99995	0.99979	0.99926	0.99779	0.99414
k = 10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1.00000	1.00000	0.99999	0.99996	0.99985	0.99951
N = 12						
k = 0	0.98807	0.88639	0.54036	0.28243	0.14224	0.06872
	0.03168	0.01384	0.00569	0.00218	0.00077	0.00024
k = 1	0.99994	0.99383	0.88164	0.65900	0.44346	0.27488
	0.15838	0.08503	0.04244	0.01959	0.00829	0.00317
k = 2	1.00000	0.99979	0.98043	0.88913	0.73582	0.55835
	0.39067	0.25282	0.15129	0.08344	0.04214	0.01929
k = 3	1.00000	1.00000	0.99776	0.97436	0.90779	0.79457
	0.64878	0.49252	0.34665	0.22534	0.13447	0.07300
k = 4	1.00000	1.00000	0.99982	0.99567	0.97608	0.92744
	0.84236	0.72366	0.58334	0.43818	0.30443	0.19385
k = 5	1.00000	1.00000	0.99999	0.99946	0.99536	0.98060
	0.94560	0.88215	0.78726	0.66521	0.52693	0.38721
k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995	0.99933	0.99610
	0.98575	0.96140	0.91537	0.84179	0.73931	0.61279
k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99993	0.99942
	0.99722	0.99051	0.97449	0.94269	0.88826	0.80615
k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994
	0.99961	0.99831	0.99439	0.98473	0.96442	0.92700
k = 9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	0.99996	0.99979	0.99915	0.99719	0.99212	0.98071
k = 10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1.00000	0.99998	0.99992	0.99968	0.99892	0.99683
k = 11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99993	0.99976

		Valores de P					
		0.0001	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
		0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
N = 13	k = 0	0.98708	0.87752	0.51334	0.25419	0.12091	0.05498
		0.02376	0.00969	0.00370	0.00131	0.00042	0.00012
	k = 1	0.99992	0.99275	0.86458	0.62135	0.39828	0.23365
		0.12671	0.06367	0.02958	0.01263	0.00490	0.00171
	k = 2	1.00000	0.99974	0.97549	0.86612	0.69196	0.50165
		0.33260	0.20248	0.11319	0.05790	0.02691	0.01123
	k = 3	1.00000	0.99999	0.99690	0.96584	0.88200	0.74732
		0.58425	0.42061	0.27827	0.16858	0.09292	0.04614
	k = 4	1.00000	1.00000	0.99971	0.99354	0.96584	0.90087
		0.79396	0.65431	0.50050	0.35304	0.22795	0.13342
	k = 5	1.00000	1.00000	0.99998	0.99908	0.99247	0.96997
		0.91979	0.83460	0.71589	0.57440	0.42681	0.29053
	k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990	0.99873	0.99300
		0.97571	0.93762	0.87053	0.77116	0.64374	0.50000
	k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99984	0.99875
		0.99435	0.98178	0.95380	0.90233	0.82123	0.70947
	k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99983
		0.99901	0.99597	0.98742	0.96791	0.93015	0.86658
	k = 9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998
		0.99987	0.99935	0.99748	0.99221	0.97966	0.95386
	k = 10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		0.99999	0.99993	0.99965	0.99868	0.99586	0.98877
	k = 11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	0.99999	0.99997	0.99986	0.99948	0.99829
	k = 12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997	0.99988
N = 14	k = 0	0.98609	0.86875	0.48768	0.22877	0.10277	0.04398
		0.01782	0.00678	0.00240	0.00078	0.00023	0.00006
	k = 1	0.99991	0.99160	0.84702	0.58463	0.35667	0.19791
		0.10097	0.04748	0.02052	0.00810	0.00289	0.00092
	k = 2	1.00000	0.99967	0.96995	0.84164	0.64791	0.44805
		0.28113	0.16084	0.08393	0.03979	0.01701	0.00647
	k = 3	1.00000	0.99999	0.99583	0.95587	0.85349	0.69819
		0.52134	0.35517	0.22050	0.12431	0.06322	0.02869
	k = 4	1.00000	1.00000	0.99957	0.99077	0.95326	0.87016
		0.74153	0.58420	0.42272	0.27926	0.16719	0.08978
	k = 5	1.00000	1.00000	0.99997	0.99853	0.98847	0.95615
		0.88833	0.78052	0.64051	0.48585	0.33732	0.21197
	k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99982	0.99779	0.98839
		0.96173	0.90672	0.81641	0.69245	0.54612	0.39526

Valores de P

N	k	0.0001 / 0.25	0.01 / 0.30	0.05 / 0.35	0.10 / 0.40	0.15 / 0.45	0.20 / 0.50
	k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99967	0.99760
		0.98969	0.96853	0.92465	0.84986	0.74136	0.60474
	k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99962
		0.99784	0.99171	0.97566	0.94168	0.88114	0.78802
	k = 9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995
		0.99966	0.99833	0.99396	0.98249	0.95738	0.91022
	k = 10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		0.99996	0.99975	0.99889	0.99609	0.98857	0.97131
	k = 11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	0.99997	0.99986	0.99939	0.99785	0.99353
	k = 12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99975	0.99908
	k = 13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99994
N = 15	k = 0	0.98511	0.86006	0.46329	0.20589	0.08735	0.03518
		0.01336	0.00475	0.00156	0.00047	0.00013	0.00003
	k = 1	0.99990	0.99037	0.82905	0.54904	0.31859	0.16713
		0.08018	0.03527	0.01418	0.00517	0.00169	0.00049
	k = 2	1.00000	0.99958	0.96380	0.81594	0.60423	0.39802
		0.23609	0.12683	0.06173	0.02711	0.01065	0.00369
	k = 3	1.00000	0.99999	0.99453	0.94445	0.82266	0.64816
		0.46129	0.29687	0.17270	0.09050	0.04242	0.01758
	k = 4	1.00000	1.00000	0.99939	0.98728	0.93830	0.83577
		0.68649	0.51549	0.35194	0.21728	0.12040	0.05923
	k = 5	1.00000	1.00000	0.99995	0.99775	0.98319	0.93895
		0.85163	0.72162	0.56428	0.40322	0.26076	0.15088
	k = 6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99969	0.99639	0.98194
		0.94338	0.86886	0.75484	0.60981	0.45216	0.30362
	k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99939	0.99576
		0.98270	0.94999	0.88677	0.78690	0.65350	0.50000
	k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99992	0.99922
		0.99581	0.98476	0.95780	0.90495	0.81824	0.69638
	k = 9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99989
		0.99920	0.99635	0.98756	0.96616	0.92307	0.84912
	k = 10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
		0.99988	0.99933	0.99717	0.99065	0.97453	0.94076
	k = 11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		0.99999	0.99991	0.99952	0.99807	0.99367	0.98242
	k = 12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	0.99999	0.99994	0.99972	0.99889	0.99630
	k = 13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	0.99999	0.99997	0.99988	0.99951

Valores de P

N	k	0.0001 0.25	0.01 0.30	0.05 0.35	0.10 0.40	0.15 0.45	0.20 0.50
	k = 14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997
N = 20	k = 0	0.98019	0.81791	0.35849	0.12158	0.03876	0.01153
		0.00317	0.00080	0.00018	0.00004	0.00001	0.00000
	k = 1	0.99981	0.98314	0.73584	0.39175	0.17556	0.06918
		0.02431	0.00764	0.00213	0.00052	0.00011	0.00002
	k = 2	1.00000	0.99900	0.92452	0.67693	0.40490	0.20608
		0.09126	0.03548	0.01212	0.00361	0.00093	0.00020
	k = 3	1.00000	0.99996	0.98410	0.86705	0.64773	0.41145
		0.22516	0.10709	0.04438	0.01596	0.00493	0.00129
	k = 4	1.00000	1.00000	0.99743	0.95683	0.82985	0.62965
		0.41484	0.23751	0.11820	0.05095	0.01886	0.00591
	k = 5	1.00000	1.00000	0.99967	0.98875	0.93269	0.80421
		0.61717	0.41637	0.24540	0.12560	0.05533	0.02069
	k = 6	1.00000	1.00000	0.99997	0.99761	0.97807	0.91331
		0.78578	0.60801	0.41662	0.25001	0.12993	0.05766
	k = 7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99958	0.99408	0.96786
		0.89819	0.77227	0.60103	0.41589	0.25200	0.13159
	k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994	0.99867	0.99002
		0.95907	0.88667	0.76238	0.59560	0.41430	0.25172
	k = 9	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99975	0.99741
		0.98613	0.95204	0.87822	0.75534	0.59136	0.41190
	k = 10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99944
		0.99606	0.98285	0.94683	0.87248	0.75071	0.58810
	k = 11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990
		0.99906	0.99486	0.98042	0.94347	0.86923	0.74828
	k = 12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
		0.99982	0.99872	0.99398	0.97897	0.94196	0.86841
	k = 13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		0.99997	0.99974	0.99848	0.99353	0.97858	0.94234
	k = 14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	0.99996	0.99969	0.99839	0.99356	0.97930
	k = 15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	0.99999	0.99995	0.99968	0.99847	0.99409
	k = 16	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	0.99999	0.99995	0.99972	0.99871
	k = 17	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99996	0.99980
	k = 18	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99998
	k = 19	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
		1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

	Valores de P					
	0.0001	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
N = 25						
k = 0	0.97530	0.77782	0.27739	0.07179	0.01720	0.00378
	0.00075	0.00013	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000
k = 1	0.99971	0.97424	0.64238	0.27121	0.09307	0.02739
	0.00702	0.00157	0.00030	0.00005	0.00001	0.00000
k = 2	1.00000	0.99805	0.87290	0.53709	0.25374	0.09823
	0.03211	0.00896	0.00213	0.00043	0.00007	0.00001
k = 3	1.00000	0.99989	0.96591	0.76359	0.47112	0.23399
	0.09621	0.03324	0.00968	0.00237	0.00048	0.00008
k = 4	1.00000	1.00000	0.99284	0.90201	0.68211	0.42067
	0.21374	0.09047	0.03205	0.00947	0.00231	0.00046
k = 5	1.00000	1.00000	0.99879	0.96660	0.83848	0.61669
	0.37828	0.19349	0.08262	0.02936	0.00860	0.00204
k = 6	1.00000	1.00000	0.99983	0.99052	0.93047	0.78004
	0.56110	0.34065	0.17340	0.07357	0.02575	0.00732
k = 7	1.00000	1.00000	0.99998	0.99774	0.97453	0.89088
	0.72651	0.51185	0.30608	0.15355	0.06385	0.02164
k = 8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99954	0.99203	0.95323
	0.85056	0.67693	0.46682	0.27353	0.13398	0.05388
k = 9	1.00000	1.00000	1.00000	0.99992	0.99786	0.98267
	0.92867	0.81056	0.63031	0.42462	0.24237	0.11476
k = 10	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99951	0.99444
	0.97033	0.90220	0.77116	0.58577	0.38426	0.21218
k = 11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990	0.99846
	0.98926	0.95575	0.87458	0.73228	0.54256	0.34502
k = 12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99963
	0.99663	0.98253	0.93955	0.84623	0.69367	0.50000
k = 13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99992
	0.99908	0.99400	0.97453	0.92220	0.81731	0.65498
k = 14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
	0.99978	0.99822	0.99068	0.96561	0.90401	0.78782
k = 15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	0.99996	0.99954	0.99706	0.98683	0.95603	0.88523
k = 16	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	0.99999	0.99990	0.99920	0.99567	0.98264	0.94612
k = 17	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1.00000	0.99998	0.99981	0.99879	0.99416	0.97835
k = 18	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1.00000	0.99999	0.99996	0.99972	0.99835	0.99268
k = 19	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99961	0.99795

Valores de P

		0.0001 0.25	0.01 0.30	0.05 0.35	0.10 0.40	0.15 0.45	0.20 0.50
N = 25							
	k = 20	1.00000 1.00000	1.00000 1.00000	1.00000 0.99999	1.00000 0.99999	1.00000 0.99992	1.00000 0.99954
	k = 21	1.00000 1.00000	1.00000 1.00000	1.00000 0.99999	1.00000 1.00000	1.00000 0.99998	1.00000 0.99992
	k = 22	1.00000 1.00000	1.00000 1.00000	1.00000 0.99999	1.00000 1.00000	1.00000 0.99999	1.00000 0.99998
	k = 23	1.00000 1.00000	1.00000 1.00000	1.00000 0.99999	1.00000 1.00000	1.00000 0.99999	1.00000 0.99999
	k = 24	1.00000 1.00000	1.00000 1.00000	1.00000 0.99999	1.00000 1.00000	1.00000 0.99999	1.00000 0.99999

DISTRIBUCION ACUMULATIVA POISSON

$$P(X \le x) = \sum_{I=0}^{x} \mathrm{EXP}(-\lambda)\, \lambda^{I} / I!$$

TABLA 1

λ / x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324	0.9231	0.9139	0.9048
1	1.0000	0.9998	0.9996	0.9992	0.9988	0.9983	0.9977	0.9970	0.9962	0.9953
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998

TABLA 2

λ / x	0.15 0.60	0.20 0.65	0.25 0.70	0.30 0.75	0.35 0.80	0.40 0.85	0.45 0.90	0.50 0.95	0.55 1.0
0	0.8607 0.5488	0.8187 0.5220	0.7788 0.4966	0.7408 0.4724	0.7047 0.4493	0.6703 0.4274	0.6376 0.4066	0.6065 0.3867	0.5769 0.3679
1	0.9898 0.8781	0.9825 0.8614	0.9735 0.8442	0.9631 0.8266	0.9513 0.8088	0.9384 0.7907	0.9246 0.7725	0.9098 0.7541	0.8943 0.7358
2	0.9995 0.9769	0.9989 0.9717	0.9978 0.9659	0.9964 0.9595	0.9945 0.9526	0.9921 0.9451	0.9891 0.9371	0.9856 0.9287	0.9815 0.9197
3	1.0000 0.9966	0.9999 0.9956	0.9999 0.9942	0.9997 0.9927	0.9995 0.9909	0.9992 0.9889	0.9988 0.9865	0.9982 0.9839	0.9975 0.9810
4	1.0000 0.9996	1.0000 0.9994	1.0000 0.9992	1.0000 0.9989	1.0000 0.9986	0.9999 0.9982	0.9999 0.9977	0.9998 0.9971	0.9997 0.9963
5	1.0000 1.0000	1.0000 0.9999	1.0000 0.9999	1.0000 0.9999	1.0000 0.9998	1.0000 0.9997	1.0000 0.9997	1.0000 0.9995	1.0000 0.9994

TABLA 3

λ / x	1.1 2.1 3.1	1.2 2.2 3.2	1.3 2.3 3.3	1.4 2.4 3.4	1.5 2.5 3.5	1.6 2.6 3.6	1.7 2.7 3.7	1.8 2.8 3.8	1.9 2.9 3.9	2.0 3.0 4.0
0	0.3329 0.1225 0.0450	0.3012 0.1108 0.0408	0.2725 0.1003 0.0369	0.2466 0.0907 0.0334	0.2231 0.0821 0.0302	0.2019 0.0743 0.0273	0.1827 0.0672 0.0247	0.1653 0.0608 0.0224	0.1496 0.0550 0.0202	0.1353 0.0498 0.0183
1	0.6990 0.3796 0.1847	0.6626 0.3546 0.1712	0.6268 0.3309 0.1586	0.5918 0.3084 0.1468	0.5578 0.2873 0.1359	0.5249 0.2674 0.1257	0.4932 0.2487 0.1162	0.4628 0.2311 0.1074	0.4337 0.2146 0.0992	0.4060 0.1991 0.0916
2	0.9004 0.6496 0.4012	0.8795 0.6227 0.3799	0.8571 0.5960 0.3594	0.8335 0.5697 0.3397	0.8088 0.5438 0.3208	0.7834 0.5184 0.3027	0.7572 0.4936 0.2854	0.7306 0.4695 0.2689	0.7037 0.4460 0.2531	0.6767 0.4232 0.2381

λ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
x										
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4532	0.4335
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
	0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991

TABLA 4

λ	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0
x										
0	0.0150	0.0123	0.0101	0.0082	0.0067	0.0055	0.0045	0.0037	0.0030	0.0025
	0.0020	0.0017	0.0014	0.0011	0.0009	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003
1	0.0780	0.0663	0.0563	0.0477	0.0404	0.0342	0.0289	0.0244	0.0206	0.0174
	0.0146	0.0123	0.0103	0.0087	0.0073	0.0061	0.0051	0.0043	0.0036	0.0030
2	0.2102	0.1851	0.1626	0.1425	0.1247	0.1088	0.0948	0.0824	0.0715	0.0620
	0.0536	0.0463	0.0400	0.0344	0.0296	0.0255	0.0219	0.0188	0.0161	0.0138
3	0.3954	0.3594	0.3257	0.2942	0.2650	0.2381	0.2133	0.1906	0.1700	0.1512
	0.1342	0.1189	0.1052	0.0928	0.0818	0.0719	0.0632	0.0554	0.0485	0.0424
4	0.5898	0.5512	0.5132	0.4763	0.4405	0.4061	0.3733	0.3422	0.3127	0.2851
	0.2592	0.2351	0.2127	0.1920	0.1730	0.1555	0.1395	0.1249	0.1117	0.0996
5	0.7531	0.7199	0.6858	0.6510	0.6160	0.5809	0.5461	0.5119	0.4783	0.4457
	0.4141	0.3837	0.3547	0.3270	0.3007	0.2759	0.2526	0.2307	0.2103	0.1912

λ	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0
x										
6	0.8675	0.8436	0.8180	0.7908	0.7622	0.7324	0.7017	0.6703	0.6384	0.6063
	0.5742	0.5423	0.5108	0.4799	0.4497	0.4204	0.3920	0.3646	0.3384	0.3134
7	0.9361	0.9214	0.9049	0.8867	0.8666	0.8449	0.8217	0.7970	0.7710	0.7440
	0.7160	0.6873	0.6581	0.6285	0.5987	0.5689	0.5393	0.5100	0.4812	0.4530
8	0.9721	0.9642	0.9549	0.9442	0.9319	0.9181	0.9027	0.8857	0.8672	0.8472
	0.8259	0.8033	0.7796	0.7548	0.7291	0.7027	0.6757	0.6482	0.6204	0.5925
9	0.9889	0.9851	0.9805	0.9749	0.9682	0.9603	0.9512	0.9409	0.9292	0.9161
	0.9016	0.8858	0.8686	0.8502	0.8305	0.8097	0.7877	0.7649	0.7411	0.7166
10	0.9959	0.9943	0.9922	0.9896	0.9863	0.9823	0.9775	0.9718	0.9651	0.9574
	0.9486	0.9386	0.9274	0.9151	0.9015	0.8867	0.8707	0.8535	0.8352	0.8159
11	0.9986	0.9980	0.9971	0.9960	0.9945	0.9927	0.9904	0.9875	0.9840	0.9799
	0.9750	0.9693	0.9627	0.9552	0.9467	0.9371	0.9265	0.9148	0.9020	0.8881
12	0.9996	0.9993	0.9990	0.9986	0.9980	0.9972	0.9962	0.9949	0.9932	0.9912
	0.9887	0.9857	0.9821	0.9779	0.9730	0.9673	0.9609	0.9536	0.9453	0.9362
13	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9986	0.9980	0.9973	0.9964
	0.9952	0.9937	0.9920	0.9898	0.9872	0.9841	0.9805	0.9762	0.9714	0.9658
14	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9986
	0.9981	0.9974	0.9966	0.9956	0.9943	0.9927	0.9908	0.9886	0.9859	0.9827
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9996	0.9995
	0.9993	0.9990	0.9986	0.9982	0.9976	0.9969	0.9959	0.9948	0.9934	0.9918
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9990	0.9987	0.9983	0.9978	0.9971	0.9963
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9988	0.9984
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997

TABLA 5

λ	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13
	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18
	18.5	19	19.5	20	21	22	23	24	25	26
x										
0	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0018	0.0012	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002
	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

λ	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13
	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18
	18.5	19	19.5	20	21	22	23	24	25	26
3	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0071	0.0049	0.0034	0.0023	0.0016	0.0011
	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0211	0.0151	0.0107	0.0076	0.0053	0.0037
	0.0026	0.0018	0.0012	0.0009	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0504	0.0375	0.0277	0.0203	0.0148	0.0107
	0.0077	0.0055	0.0039	0.0028	0.0020	0.0014	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003
	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.1016	0.0786	0.0603	0.0458	0.0346	0.0259
	0.0193	0.0142	0.0105	0.0076	0.0055	0.0040	0.0029	0.0021	0.0015	0.0010
	0.0007	0.0005	0.0004	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1785	0.1432	0.1137	0.0895	0.0698	0.0540
	0.0415	0.0316	0.0239	0.0180	0.0135	0.0100	0.0074	0.0054	0.0040	0.0029
	0.0021	0.0015	0.0011	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2794	0.2320	0.1906	0.1550	0.1249	0.0998
	0.0790	0.0621	0.0484	0.0374	0.0288	0.0220	0.0167	0.0126	0.0095	0.0071
	0.0052	0.0039	0.0028	0.0021	0.0011	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000
9	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3971	0.3405	0.2888	0.2424	0.2014	0.1658
	0.1353	0.1094	0.0878	0.0699	0.0552	0.0433	0.0337	0.0261	0.0201	0.0154
	0.0117	0.0089	0.0067	0.0050	0.0028	0.0015	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001
10	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.5207	0.4599	0.4017	0.3472	0.2971	0.2517
	0.2112	0.1757	0.1449	0.1185	0.0961	0.0774	0.0619	0.0491	0.0387	0.0304
	0.0237	0.0183	0.0141	0.0108	0.0063	0.0035	0.0020	0.0011	0.0006	0.0003
11	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.6387	0.5793	0.5198	0.4616	0.4058	0.3532
	0.3045	0.2600	0.2201	0.1848	0.1538	0.1270	0.1041	0.0847	0.0684	0.0549
	0.0438	0.0347	0.0273	0.0214	0.0129	0.0076	0.0044	0.0025	0.0014	0.0008
12	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.7420	0.6887	0.6329	0.5760	0.5190	0.4631
	0.4093	0.3585	0.3111	0.2676	0.2283	0.1931	0.1621	0.1350	0.1116	0.0917
	0.0748	0.0606	0.0488	0.0390	0.0245	0.0151	0.0091	0.0054	0.0031	0.0018
13	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.8253	0.7813	0.7330	0.6815	0.6278	0.5730
	0.5182	0.4644	0.4125	0.3632	0.3171	0.2745	0.2357	0.2009	0.1699	0.1426
	0.1189	0.0984	0.0809	0.0661	0.0434	0.0278	0.0174	0.0107	0.0065	0.0038
14	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8879	0.8540	0.8153	0.7720	0.7250	0.6751
	0.6233	0.5704	0.5176	0.4657	0.4154	0.3675	0.3225	0.2808	0.2426	0.2081
	0.1771	0.1497	0.1257	0.1049	0.0716	0.0477	0.0311	0.0198	0.0124	0.0076
15	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9317	0.9074	0.8783	0.8444	0.8060	0.7636
	0.7178	0.6694	0.6192	0.5681	0.5170	0.4667	0.4180	0.3715	0.3275	0.2867
	0.2490	0.2148	0.1840	0.1565	0.1111	0.0769	0.0520	0.0344	0.0223	0.0142
16	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9604	0.9441	0.9236	0.8987	0.8693	0.8355
	0.7975	0.7559	0.7112	0.6641	0.6154	0.5660	0.5165	0.4677	0.4204	0.3751
	0.3321	0.2920	0.2550	0.2211	0.1629	0.1170	0.0821	0.0563	0.0377	0.0248
17	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9781	0.9678	0.9542	0.9370	0.9158	0.8905
	0.8609	0.8272	0.7897	0.7489	0.7052	0.6593	0.6120	0.5640	0.5160	0.4686
	0.4226	0.3784	0.3364	0.2970	0.2270	0.1690	0.1228	0.0871	0.0605	0.0411

λ	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13
	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18
	18.5	19	19.5	20	21	22	23	24	25	26
x										
18	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9885	0.9823	0.9738	0.9626	0.9481	0.9302
	0.9084	0.8826	0.8530	0.8195	0.7825	0.7424	0.6996	0.6550	0.6089	0.5622
	0.5156	0.4695	0.4246	0.3814	0.3017	0.2325	0.1748	0.1283	0.0920	0.0646
19	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9942	0.9907	0.9857	0.9787	0.9694	0.9573
	0.9421	0.9235	0.9012	0.8752	0.8455	0.8123	0.7757	0.7363	0.6945	0.6509
	0.6061	0.5606	0.5151	0.4703	0.3843	0.3060	0.2377	0.1803	0.1336	0.0968
20	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9972	0.9953	0.9925	0.9884	0.9827	0.9750
	0.9649	0.9521	0.9362	0.9170	0.8944	0.8682	0.8385	0.8055	0.7694	0.7307
	0.6898	0.6472	0.6034	0.5591	0.4710	0.3869	0.3101	0.2426	0.1855	0.1387
21	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9987	0.9978	0.9962	0.9939	0.9906	0.9859
	0.9796	0.9712	0.9604	0.9469	0.9304	0.9108	0.8878	0.8615	0.8319	0.7991
	0.7636	0.7255	0.6854	0.6437	0.5577	0.4716	0.3894	0.3139	0.2473	0.1905
22	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9990	0.9982	0.9970	0.9951	0.9924
	0.9885	0.9833	0.9763	0.9673	0.9558	0.9418	0.9248	0.9047	0.8815	0.8551
	0.8256	0.7931	0.7580	0.7206	0.6405	0.5564	0.4723	0.3917	0.3175	0.2517
23	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9985	0.9975	0.9960
	0.9938	0.9907	0.9863	0.9805	0.9730	0.9633	0.9513	0.9367	0.9193	0.8989
	0.8755	0.8490	0.8196	0.7875	0.7160	0.6374	0.5552	0.4729	0.3939	0.3209
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9980
	0.9968	0.9950	0.9924	0.9888	0.9840	0.9777	0.9696	0.9594	0.9468	0.9317
	0.9139	0.8933	0.8697	0.8432	0.7822	0.7117	0.6346	0.5540	0.4734	0.3959
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990
	0.9984	0.9974	0.9959	0.9938	0.9909	0.9869	0.9816	0.9748	0.9661	0.9554
	0.9424	0.9269	0.9087	0.8878	0.8377	0.7771	0.7077	0.6319	0.5529	0.4739
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995
	0.9992	0.9987	0.9979	0.9967	0.9950	0.9925	0.9892	0.9848	0.9791	0.9718
	0.9626	0.9514	0.9380	0.9221	0.8826	0.8324	0.7723	0.7038	0.6294	0.5519
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
	0.9996	0.9994	0.9989	0.9983	0.9973	0.9959	0.9939	0.9912	0.9875	0.9827
	0.9765	0.9687	0.9591	0.9475	0.9175	0.8775	0.8274	0.7678	0.7002	0.6270
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	0.9998	0.9997	0.9995	0.9991	0.9986	0.9978	0.9967	0.9950	0.9928	0.9897
	0.9857	0.9805	0.9739	0.9657	0.9436	0.9129	0.8726	0.8225	0.7634	0.6967
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9959	0.9941
	0.9915	0.9882	0.9838	0.9782	0.9626	0.9398	0.9085	0.8679	0.8179	0.7592
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9991	0.9986	0.9978	0.9967
	0.9951	0.9930	0.9902	0.9865	0.9758	0.9595	0.9360	0.9042	0.8633	0.8134
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9988	0.9982
	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9848	0.9735	0.9564	0.9323	0.9000	0.8589
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9990
	0.9985	0.9978	0.9967	0.9953	0.9907	0.9831	0.9711	0.9533	0.9286	0.8958

λ	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13
	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18
	18.5	19	19.5	20	21	22	23	24	25	26
x										
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995
	0.9992	0.9988	0.9982	0.9973	0.9945	0.9895	0.9813	0.9686	0.9502	0.9249
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
	0.9996	0.9994	0.9990	0.9985	0.9968	0.9936	0.9882	0.9794	0.9662	0.9471
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9982	0.9962	0.9928	0.9869	0.9776	0.9637
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9990	0.9978	0.9957	0.9918	0.9855	0.9756
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9975	0.9950	0.9908	0.9840
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897
39	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9996	0.9992	0.9983	0.9966	0.9935
40	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9960
41	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976
42	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9986
43	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992

PROBABILIDADES HIPERGEOMETRICAS

$$P[\ X = x\ ] = \frac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}}$$

A = 1 B = 3

x	0	1
n = 1	0.7500	0.2500
n = 2	0.5000	0.5000
n = 3	0.2500	0.7500

A = 2 B = 3

x	0	1	2
n = 1	0.6000	0.4000	
n = 2	0.3000	0.6000	0.1000
n = 3	0.1000	0.6000	0.3000
n = 4		0.4000	0.6000

A = 3 B = 3

x	0	1	2	3
n = 1	0.5000	0.5000		
n = 2	0.2000	0.6000	0.2000	
n = 3	0.0500	0.4500	0.4500	0.0500
n = 4		0.2000	0.6000	0.2000
n = 5			0.5000	0.5000

A = 1 B = 5

x	0	1
n = 1	0.8333	0.1667
n = 2	0.6667	0.3333
n = 3	0.5000	0.5000
n = 4	0.3333	0.6667
n = 5	0.1667	0.8333

A = 2 B = 5

x	0	1	2
n = 1	0.7143	0.2857	
n = 2	0.4762	0.4762	0.0476
n = 3	0.2857	0.5714	0.1429
n = 4	0.1429	0.5714	0.2857
n = 5	0.0476	0.4762	0.4762
n = 6		0.2857	0.7143

	A = 3 B = 5			
x	0	1	2	3
n = 1	0.6250	0.3750		
n = 2	0.3571	0.5357	0.1071	
n = 3	0.1786	0.5357	0.2679	0.0179
n = 4	0.0714	0.4286	0.4286	0.0714
n = 5	0.0179	0.2679	0.5357	0.1786
n = 6		0.1071	0.5357	0.3571
n = 7			0.3750	0.6250

	A = 4 B = 5				
x	0	1	2	3	4
n = 1	0.5556	0.4444			
n = 2	0.2778	0.5556	0.1667		
n = 3	0.1190	0.4762	0.3571	0.0476	
n = 4	0.0397	0.3175	0.4762	0.1587	0.0079
n = 5	0.0079	0.1587	0.4762	0.3175	0.0397
n = 6		0.0476	0.3571	0.4762	0.1190
n = 7			0.1667	0.5556	0.2778
n = 8				0.4444	0.5556

	A = 5 B = 5					
x	0	1	2	3	4	5
n = 1	0.5000	0.5000				
n = 2	0.2222	0.5556	0.2222			
n = 3	0.0833	0.4167	0.4167	0.0833		
n = 4	0.0238	0.2381	0.4762	0.2381	0.0238	
n = 5	0.0040	0.0992	0.3968	0.3968	0.0992	0.0040
n = 6		0.0238	0.2381	0.4762	0.2381	0.0238
n = 7			0.0833	0.4167	0.4167	0.0833
n = 8				0.2222	0.5556	0.2222
n = 9					0.5000	0.5000

	A = 1 B = 8	
x	0	1
n = 1	0.8889	0.1111
n = 2	0.7778	0.2222
n = 3	0.6667	0.3333
n = 4	0.5556	0.4444
n = 5	0.4444	0.5556
n = 6	0.3333	0.6667
n = 7	0.2222	0.7778
n = 8	0.1111	0.8889

	A = 2 B = 8		
x	0	1	2
n = 1	0.8000	0.2000	
n = 2	0.6222	0.3556	0.0222
n = 3	0.4667	0.4667	0.0667
n = 4	0.3333	0.5333	0.1333
n = 5	0.2222	0.5556	0.2222
n = 6	0.1333	0.5333	0.3333
n = 7	0.0667	0.4667	0.4667
n = 8	0.0222	0.3556	0.6222
n = 9		0.2000	0.8000

A = 3 B = 8				
x	0	1	2	3
n = 1	0.7273	0.2727		
n = 2	0.5091	0.4364	0.0545	
n = 3	0.3394	0.5091	0.1455	0.0061
n = 4	0.2121	0.5091	0.2545	0.0242
n = 5	0.1212	0.4545	0.3636	0.0606
n = 6	0.0606	0.3636	0.4545	0.1212
n = 7	0.0242	0.2545	0.5091	0.2121
n = 8	0.0061	0.1455	0.5091	0.3394
n = 9		0.0545	0.4364	0.5091
n = 10			0.2727	0.7273

A = 4 B = 8					
x	0	1	2	3	4
n = 1	0.6667	0.3333			
n = 2	0.4242	0.4848	0.0909		
n = 3	0.2545	0.5091	0.2182	0.0182	
n = 4	0.1414	0.4525	0.3394	0.0646	0.0020
n = 5	0.0707	0.3535	0.4242	0.1414	0.0101
n = 6	0.0303	0.2424	0.4545	0.2424	0.0303
n = 7	0.0101	0.1414	0.4242	0.3535	0.0707
n = 8	0.0020	0.0646	0.3394	0.4525	0.1414
n = 9		0.0182	0.2182	0.5091	0.2545
n = 10			0.0909	0.4848	0.4242
n = 11				0.3333	0.6667

A = 5 B = 8						
x	0	1	2	3	4	5
n = 1	0.6154	0.3846				
n = 2	0.3590	0.5128	0.1282			
n = 3	0.1958	0.4895	0.2797	0.0350		
n = 4	0.0979	0.3916	0.3916	0.1119	0.0070	
n = 5	0.0435	0.2720	0.4351	0.2176	0.0311	0.0008
n = 6	0.0163	0.1632	0.4079	0.3263	0.0816	0.0047
n = 7	0.0047	0.0816	0.3263	0.4079	0.1632	0.0163
n = 8	0.0008	0.0311	0.2176	0.4351	0.2720	0.0435
n = 9		0.0070	0.1119	0.3916	0.3916	0.0979
n = 10			0.0350	0.2797	0.4895	0.1958
n = 11				0.1282	0.5128	0.3590
n = 12					0.3846	0.6154

A = 6 B = 8							
x	0	1	2	3	4	5	6
n = 1	0.5714	0.4286					
n = 2	0.3077	0.5275	0.1648				
n = 3	0.1538	0.4615	0.3297	0.0549			
n = 4	0.0699	0.3357	0.4196	0.1598	0.0150		
n = 5	0.0280	0.2098	0.4196	0.2797	0.0599	0.0030	
n = 6	0.0093	0.1119	0.3497	0.3730	0.1399	0.0160	0.0003
n = 7	0.0023	0.0490	0.2448	0.4079	0.2448	0.0490	0.0023
n = 8	0.0003	0.0160	0.1399	0.3730	0.3497	0.1119	0.0093
n = 9		0.0030	0.0599	0.2797	0.4196	0.2098	0.0280
n = 10			0.0150	0.1598	0.4196	0.3357	0.0699
n = 11				0.0549	0.3297	0.4615	0.1538
n = 12					0.1648	0.5275	0.3077
n = 13						0.4286	0.5714

A = 7 B = 8

x	0	1	2	3	4	5	6	7
n = 1	0.5333	0.4667						
n = 2	0.2667	0.5333	0.2000					
n = 3	0.1231	0.4308	0.3692	0.0769				
n = 4	0.0513	0.2872	0.4308	0.2051	0.0256			
n = 5	0.0186	0.1632	0.3916	0.3263	0.0932	0.0070		
n = 6	0.0056	0.0783	0.2937	0.3916	0.1958	0.0336	0.0014	
n = 7	0.0012	0.0305	0.1828	0.3807	0.3046	0.0914	0.0087	0.0002
n = 8	0.0002	0.0087	0.0914	0.3046	0.3807	0.1828	0.0305	0.0012
n = 9		0.0014	0.0336	0.1958	0.3916	0.2937	0.0783	0.0056
n = 10			0.0070	0.0932	0.3263	0.3916	0.1632	0.0186
n = 11				0.0256	0.2051	0.4308	0.2872	0.0513
n = 12					0.0769	0.3692	0.4308	0.1231
n = 13						0.2000	0.5333	0.2667
n = 14							0.4667	0.5333

A = 8 B = 8

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n = 1	0.5000	0.5000							
n = 2	0.2333	0.5333	0.2333						
n = 3	0.1000	0.4000	0.4000	0.1000					
n = 4	0.0385	0.2462	0.4308	0.2462	0.0385				
n = 5	0.0128	0.1282	0.3590	0.3590	0.1282	0.0128			
n = 6	0.0035	0.0559	0.2448	0.3916	0.2448	0.0559	0.0035		
n = 7	0.0007	0.0196	0.1371	0.3427	0.3427	0.1371	0.0196	0.0007	
n = 8	0.0001	0.0050	0.0609	0.2437	0.3807	0.2437	0.0609	0.0050	0.0001
n = 9		0.0007	0.0196	0.1371	0.3427	0.3427	0.1371	0.0196	0.0007
n = 10			0.0035	0.0559	0.2448	0.3916	0.2448	0.0559	0.0035
n = 11				0.0128	0.1282	0.3590	0.3590	0.1282	0.0128
n = 12					0.0385	0.2462	0.4308	0.2462	0.0385
n = 13						0.1000	0.4000	0.4000	0.1000
n = 14							0.2333	0.5333	0.2333
n = 15								0.5000	0.5000

DISTRIBUCION ACUMULATIVA NORMAL ESTANDAR

$$P(X \leq x) = [2\pi]^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{EXP}\,(-z^2/2)\ dz.$$

$$= F(x)$$

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0.00	0.50000	0.01	0.50399	0.02	0.50798	0.03	0.51197
0.04	0.51595	0.05	0.51994	0.06	0.52392	0.07	0.52790
0.08	0.53188	0.09	0.53586	0.10	0.53983	0.11	0.54380
0.12	0.54776	0.13	0.55172	0.14	0.55567	0.15	0.55962
0.16	0.56356	0.17	0.56749	0.18	0.57142	0.19	0.57535
0.20	0.57926	0.21	0.58317	0.22	0.58706	0.23	0.59095
0.24	0.59483	0.25	0.59871	0.26	0.60257	0.27	0.60642
0.28	0.61026	0.29	0.61409	0.30	0.61791	0.31	0.62172
0.32	0.62552	0.33	0.62930	0.34	0.63307	0.35	0.63683
0.36	0.64058	0.37	0.64431	0.38	0.64803	0.39	0.65173
0.40	0.65542	0.41	0.65910	0.42	0.66276	0.43	0.66640
0.44	0.67003	0.45	0.67364	0.46	0.67724	0.47	0.68082
0.48	0.68439	0.49	0.68793	0.50	0.69146	0.51	0.69497
0.52	0.69847	0.53	0.70194	0.54	0.70540	0.55	0.70884
0.56	0.71226	0.57	0.71566	0.58	0.71904	0.59	0.72240
0.60	0.72575	0.61	0.72907	0.62	0.73237	0.63	0.73565
0.64	0.73891	0.65	0.74215	0.66	0.74537	0.67	0.74857
0.68	0.75175	0.69	0.75490	0.70	0.75804	0.71	0.76115
0.72	0.76424	0.73	0.76730	0.74	0.77035	0.75	0.77337
0.76	0.77637	0.77	0.77935	0.78	0.78230	0.79	0.78524
0.80	0.78814	0.81	0.79103	0.82	0.79389	0.83	0.79673
0.84	0.79955	0.85	0.80234	0.86	0.80511	0.87	0.80785
0.88	0.81057	0.89	0.81327	0.90	0.81594	0.91	0.81859
0.92	0.82121	0.93	0.82381	0.94	0.82639	0.95	0.82894
0.96	0.83147	0.97	0.83398	0.98	0.83646	0.99	0.83891
1.00	0.84134	1.01	0.84375	1.02	0.84614	1.03	0.84849
1.04	0.85083	1.05	0.85314	1.06	0.85543	1.07	0.85769
1.08	0.85993	1.09	0.86214	1.10	0.86433	1.11	0.86650
1.12	0.86864	1.13	0.87076	1.14	0.87286	1.15	0.87493
1.16	0.87698	1.17	0.87900	1.18	0.88100	1.19	0.88298
1.20	0.88493	1.21	0.88686	1.22	0.88877	1.23	0.89065
1.24	0.89251	1.25	0.89435	1.26	0.89617	1.27	0.89796
1.28	0.89973	1.29	0.90147	1.30	0.90320	1.31	0.90490
1.32	0.90658	1.33	0.90824	1.34	0.90988	1.35	0.91149
1.36	0.91308	1.37	0.91466	1.38	0.91621	1.39	0.91774

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
1.40	0.91924	1.41	0.92073	1.42	0.92220	1.43	0.92364
1.44	0.92507	1.45	0.92647	1.46	0.92785	1.47	0.92922
1.48	0.93056	1.49	0.93189	1.50	0.93319	1.51	0.93448
1.52	0.93574	1.53	0.93699	1.54	0.93822	1.55	0.93943
1.56	0.94062	1.57	0.94179	1.58	0.94295	1.59	0.94408
1.60	0.94520	1.61	0.94630	1.62	0.94738	1.63	0.94845
1.64	0.94950	1.65	0.95053	1.66	0.95154	1.67	0.95254
1.68	0.95352	1.69	0.95449	1.70	0.95543	1.71	0.95637
1.72	0.95728	1.73	0.95818	1.74	0.95907	1.75	0.95994
1.76	0.96080	1.77	0.96164	1.78	0.96246	1.79	0.96327
1.80	0.96407	1.81	0.96485	1.82	0.96562	1.83	0.96637
1.84	0.96712	1.85	0.96784	1.86	0.96856	1.87	0.96926
1.88	0.96995	1.89	0.97062	1.90	0.97128	1.91	0.97193
1.92	0.97257	1.93	0.97320	1.94	0.97381	1.95	0.97441
1.96	0.97500	1.97	0.97558	1.98	0.97615	1.99	0.97670
2.00	0.97725	2.01	0.97778	2.02	0.97831	2.03	0.97882
2.04	0.97932	2.05	0.97982	2.06	0.98030	2.07	0.98077
2.08	0.98124	2.09	0.98169	2.10	0.98214	2.11	0.98257
2.12	0.98300	2.13	0.98341	2.14	0.98382	2.15	0.98422
2.16	0.98461	2.17	0.98500	2.18	0.98537	2.19	0.98574
2.20	0.98610	2.21	0.98645	2.22	0.98679	2.23	0.98713
2.24	0.98745	2.25	0.98778	2.26	0.98809	2.27	0.98840
2.28	0.98870	2.29	0.98899	2.30	0.98928	2.31	0.98956
2.32	0.98983	2.33	0.99010	2.34	0.99036	2.35	0.99061
2.36	0.99086	2.37	0.99111	2.38	0.99134	2.39	0.99158
2.40	0.99180	2.41	0.99202	2.42	0.99224	2.43	0.99245
2.44	0.99266	2.45	0.99286	2.46	0.99305	2.47	0.99324
2.48	0.99343	2.49	0.99361	2.50	0.99379	2.51	0.99396
2.52	0.99413	2.53	0.99430	2.54	0.99446	2.55	0.99461
2.56	0.99477	2.57	0.99492	2.58	0.99506	2.59	0.99520
2.60	0.99534	2.61	0.99547	2.62	0.99560	2.63	0.99573
2.64	0.99585	2.65	0.99598	2.66	0.99609	2.67	0.99621
2.68	0.99632	2.69	0.99643	2.70	0.99653	2.71	0.99664
2.72	0.99674	2.73	0.99683	2.74	0.99693	2.75	0.99702
2.76	0.99711	2.77	0.99720	2.78	0.99728	2.79	0.99736
2.80	0.99744	2.81	0.99752	2.82	0.99760	2.83	0.99767
2.84	0.99774	2.85	0.99781	2.86	0.99788	2.87	0.99795
2.88	0.99801	2.89	0.99807	2.90	0.99813	2.91	0.99819
2.92	0.99825	2.93	0.99831	2.94	0.99836	2.95	0.99841
2.96	0.99846	2.97	0.99851	2.98	0.99856	2.99	0.99861
3.00	0.99865	3.01	0.99869	3.02	0.99874	3.03	0.99878
3.04	0.99882	3.05	0.99886	3.06	0.99889	3.07	0.99893
3.08	0.99897	3.09	0.99900	3.10	0.99903	3.11	0.99906
3.12	0.99910	3.13	0.99913	3.14	0.99916	3.15	0.99918
3.16	0.99921	3.17	0.99924	3.18	0.99926	3.19	0.99929
3.20	0.99931	3.21	0.99934	3.22	0.99936	3.23	0.99938
3.24	0.99940	3.25	0.99942	3.26	0.99944	3.27	0.99946
3.28	0.99948	3.29	0.99950	3.30	0.99952	3.31	0.99953
3.32	0.99955	3.33	0.99957	3.34	0.99958	3.35	0.99960
3.36	0.99961	3.37	0.99962	3.38	0.99964	3.39	0.99965

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
3.40	0.99966	3.41	0.99968	3.42	0.99969	3.43	0.99970
3.44	0.99971	3.45	0.99972	3.46	0.99973	3.47	0.99974
3.48	0.99975	3.49	0.99976	3.50	0.99977	3.51	0.99978
3.52	0.99978	3.53	0.99979	3.54	0.99980	3.55	0.99981
3.56	0.99981	3.57	0.99982	3.58	0.99983	3.59	0.99983
3.60	0.99984	3.61	0.99985	3.62	0.99985	3.63	0.99986
3.64	0.99986	3.65	0.99987	3.66	0.99987	3.67	0.99988
3.68	0.99988	3.69	0.99989	3.70	0.99989	3.71	0.99990
3.72	0.99990	3.73	0.99990	3.74	0.99991	3.75	0.99991
3.76	0.99992	3.77	0.99992	3.78	0.99992	3.79	0.99992
3.80	0.99993	3.81	0.99993	3.82	0.99993	3.83	0.99994
3.84	0.99994	3.85	0.99994	3.86	0.99994	3.87	0.99995
3.88	0.99995	3.89	0.99995	3.90	0.99995	3.91	0.99995
3.92	0.99996	3.93	0.99996	3.94	0.99996	3.95	0.99996
3.96	0.99996	3.97	0.99996	3.98	0.99997	3.99	0.99997
4.00	0.99997	4.01	0.99997	4.02	0.99997	4.03	0.99997
4.04	0.99997	4.05	0.99997	4.06	0.99998	4.07	0.99998
4.08	0.99998	4.09	0.99998	4.10	0.99998	4.11	0.99998
4.12	0.99998	4.13	0.99998	4.14	0.99998	4.15	0.99998
4.16	0.99998	4.17	0.99998	4.18	0.99999	4.19	0.99999
4.20	0.99999	4.21	0.99999	4.22	0.99999	4.23	0.99999
4.24	0.99999	4.25	0.99999	4.26	0.99999	4.27	0.99999
4.28	0.99999	4.29	0.99999	4.30	0.99999	4.31	0.99999
4.32	0.99999	4.33	0.99999	4.34	0.99999	4.35	0.99999
4.36	0.99999	4.37	0.99999	4.38	0.99999	4.39	0.99999
4.40	0.99999	4.41	0.99999	4.42	1.00000	4.43	1.00000

CUANTILES DE LA DISTRIBUCION JI CUADRADA

Las anotaciones de la tabla son valores de χ^2 donde :

$$P\left[X \le \chi^2\right] = \frac{1}{2^{v/2}\,\Gamma(v/2)} \int_0^{\chi^2} t^{v/2-1}\exp(-t/2)\,dt$$

Valores de P

GL:v							
	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158
	0.0642	0.1485	0.2750	0.4549	0.7083	1.0742	1.6424
	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794	10.8276	12.1155
2	0.0010	0.0020	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107
	0.4463	0.7133	1.0217	1.3863	1.8326	2.4079	3.2189
	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966	13.8153	15.2012
3	0.0153	0.0243	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844
	1.0052	1.4237	1.8692	2.3660	2.9462	3.6649	4.6416
	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381	16.2662	17.7297
4	0.0639	0.0908	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636
	1.6488	2.1947	2.7528	3.3567	4.0446	4.8784	5.9886
	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602	18.4667	19.9972
5	0.1581	0.2102	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103
	2.3425	2.9999	3.6555	4.3515	5.1319	6.0644	7.2893
	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.5150	22.1048
6	0.2994	0.3811	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041
	3.0701	3.8276	4.5702	5.3481	6.2108	7.2311	8.5581
	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.4576	24.1022
7	0.4849	0.5985	0.9893	1.2390	1.6899	2.1674	2.8331
	3.8223	4.6713	5.4932	6.3458	7.2832	8.3834	9.8033
	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.3217	26.0174
8	0.7104	0.8571	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895
	4.5936	5.5274	6.4226	7.3441	8.3505	9.5245	11.0301
	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9549	26.1244	27.8675
9	0.9717	1.1519	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682
	5.3801	6.3933	7.3570	8.3428	9.4136	10.6564	12.2421
	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	27.8770	29.6653

GL:v	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
10	1.2650	1.4787	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652
	6.1791	7.2672	8.2955	9.3418	10.4732	11.7807	13.4420
	15.9872	18.3070	20.4832	23.2092	25.1881	29.5880	31.4196
11	1.5868	1.8339	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778
	6.9887	8.1479	9.2373	10.3410	11.5298	12.8987	14.6314
	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568	31.2639	33.1360
12	1.9344	2.2142	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038
	7.8073	9.0343	10.1820	11.3403	12.5838	14.0111	15.8120
	18.5494	21.0261	23.3367	26.2169	28.2995	32.9092	34.8206
13	2.3051	2.6172	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415
	8.6339	9.9257	11.1291	12.3398	13.6356	15.1187	16.9848
	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8194	34.5281	36.4774
14	2.6967	3.0407	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895
	9.4673	10.8215	12.0785	13.3393	14.6853	16.2221	18.1508
	21.0642	23.6848	26.1190	29.1412	31.3193	36.1232	38.1086
15	3.1075	3.4827	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468
	10.3070	11.7212	13.0298	14.3389	15.7332	17.3217	19.3106
	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.6970	39.7180
16	3.5358	3.9416	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122
	11.1521	12.6244	13.9827	15.3385	16.7795	18.4179	20.4651
	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.2523	41.3074
17	3.9802	4.4161	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852
	12.0023	13.5307	14.9373	16.3382	17.8244	19.5110	21.6146
	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7184	40.7902	42.8787
18	4.4394	4.9048	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649
	12.8570	14.4399	15.8932	17.3379	18.8679	20.6014	22.7595
	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	42.3123	44.4329
19	4.9123	5.4068	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509
	13.7158	15.3517	16.8504	18.3377	19.9102	21.6891	23.9004
	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5822	43.8201	45.9726
20	5.3981	5.9210	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426
	14.5784	16.2659	17.8088	19.3374	20.9514	22.7745	25.0375
	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.3147	47.4982
21	5.8957	6.4467	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396
	15.4446	17.1823	18.7683	20.3372	21.9915	23.8578	26.1711
	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011	46.7970	49.0105
22	6.4045	6.9830	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415
	16.3140	18.1007	19.7288	21.3371	23.0307	24.9390	27.3015
	30.8133	33.9244	36.7807	40.2893	42.7956	48.2680	50.5105
23	6.9237	7.5292	9.2604	10.1957	11.6885	13.0905	14.8480
	17.1865	19.0211	20.6902	22.3369	24.0689	26.0184	28.4288
	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1812	49.7282	51.9996
24	7.4527	8.0849	9.8862	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
	18.0618	19.9432	21.6525	23.3367	25.1063	27.0960	29.5533
	33.1962	36.4150	38.3841	42.9798	45.5585	51.1783	53.4779

Valores de P

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
GL:v							
25	7.9910	8.6493	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
	18.9398	20.8670	22.6156	24.3366	26.1430	28.1719	30.6752
	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279	52.6195	54.9466
26	8.5379	9.2221	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919
	19.8202	21.7924	23.5794	25.3364	27.1789	29.2463	31.7946
	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2898	54.0517	56.4063
27	9.0932	9.8028	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139
	20.7030	22.7192	24.5440	26.3364	28.2141	30.3193	32.9117
	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449	55.4758	57.8568
28	9.6563	10.3909	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392
	21.5880	23.6474	25.5092	27.3362	29.2486	31.3909	34.0266
	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782	50.9933	56.8920	59.2993
29	10.2268	10.9861	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677
	22.4751	24.5770	26.4751	28.3361	30.2826	32.4612	35.1394
	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3355	58.3009	60.7342
30	10.8044	11.5879	13.7867	14.9534	16.7908	18.4927	20.5992
	23.3641	25.5077	27.4416	29.3360	31.3159	33.5302	36.2502
	40.2560	43.7730	46.9793	50.8922	53.6719	59.7030	62.1611
31	11.3887	12.1962	14.4578	15.6554	17.5387	19.2806	21.4335
	24.2550	26.4397	28.4087	30.3359	32.3487	34.5981	37.3592
	41.4218	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027	61.0982	63.5811
32	11.9794	12.8107	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706
	25.1478	27.3728	29.3763	31.3358	33.3809	35.6649	38.4663
	42.5848	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281	62.4872	64.9946
33	12.5763	13.4309	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102
	26.0422	28.3069	30.3444	32.3358	34.4126	36.7306	39.5718
	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484	63.8699	66.4019
34	13.1791	14.0567	16.5013	17.7891	19.8062	21.6643	23.9523
	26.9383	29.2420	31.3130	33.3357	35.4438	37.7954	40.6757
	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639	65.2469	67.8032
35	13.7874	14.6878	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7966
	27.8359	30.1782	32.2821	34.3357	36.4746	38.8592	41.7780
	46.0588	49.8019	53.2033	57.3420	60.2747	66.6185	69.1980
36	14.4012	15.3241	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433
	28.7350	31.1152	33.2516	35.3356	37.5049	39.9220	42.8788
	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812	67.9849	70.5873
37	15.0202	15.9653	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921
	29.6354	32.0531	34.2216	36.3354	38.5349	40.9840	43.9782
	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833	69.3465	71.9715
38	15.6441	16.6112	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3429
	30.5373	32.9919	35.1920	37.3355	39.5644	42.0451	45.0763
	49.5126	53.3835	56.8955	61.1620	64.1814	70.7027	73.3505
39	16.2729	17.2616	19.9959	21.4261	23.6543	25.6954	28.1958
	31.4405	33.9315	36.1628	38.3354	40.5935	43.1054	46.1731
	50.6598	54.5723	58.1201	62.4281	65.4755	72.0545	74.7248

Valores de P

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
GL:v							
40	16.9062	17.9164	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505
	32.3449	34.8719	37.1339	39.3353	41.6222	44.1649	47.2686
	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660	73.4018	76.0944
41	17.5440	18.5754	21.4208	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071
	33.2506	35.8131	38.1055	40.3353	42.6506	45.2236	48.3629
	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501	68.0527	74.7449	77.4586
42	18.1861	19.2385	22.1385	23.6501	25.9987	28.1441	30.7654
	34.1574	36.7550	39.0774	41.3352	43.6786	46.2817	49.4560
	54.0902	58.1240	61.7767	66.2062	69.3360	76.0834	78.8195
43	18.8323	19.9055	22.8595	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255
	35.0654	37.6976	40.0496	42.3351	44.7063	47.3390	50.5480
	55.2302	59.3035	62.9903	67.4594	70.6159	77.4185	80.1752
44	19.4825	20.5763	23.5837	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871
	35.9744	38.6408	41.0221	43.3351	45.7337	48.3957	51.6390
	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095	71.8925	78.7493	81.5269
45	20.1366	21.2507	24.3110	25.9013	28.3661	30.6122	33.3504
	36.8844	39.5847	41.9950	44.3352	46.7607	49.4517	52.7288
	57.5053	61.6562	65.4101	69.9568	73.1660	80.0764	82.8747
46	20.7945	21.9287	25.0413	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152
	37.7955	40.5292	42.9682	45.3350	47.7874	50.5071	53.8177
	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014	74.4365	81.3999	84.2188
47	21.4559	22.6101	25.7746	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814
	38.7075	41.4744	43.9416	46.3351	48.8139	51.5619	54.9057
	59.7743	64.0011	67.8207	72.4433	75.7041	82.7200	85.5593
48	22.1209	23.2949	26.5106	28.1770	30.7545	33.0980	35.9491
	39.6205	42.4201	44.9154	47.3349	49.8401	52.6162	55.9927
	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826	76.9688	84.0368	86.8962
49	22.7893	23.9828	27.2493	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182
	40.5343	43.3664	45.8894	48.3350	50.8660	53.6698	57.0787
	62.0376	66.3387	70.2224	74.9195	78.2307	85.3504	88.2297
50	23.4610	24.6739	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
	41.4491	44.3132	46.8637	49.3349	51.8916	54.7229	58.1638
	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	86.6608	89.5599
55	26.8658	28.1731	31.7348	33.5705	36.3981	38.9580	42.0596
	46.0356	49.0554	51.7390	54.3348	57.0160	59.9804	63.5773
	68.7962	73.3115	77.3805	82.2921	85.7489	93.1675	96.1625
60	30.3405	31.7383	35.5345	37.4848	40.4817	43.1880	46.4589
	50.6406	53.8092	56.6201	59.3347	62.1348	65.2265	68.9720
	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517	99.6071	102.6941
65	33.8766	35.3616	39.3831	41.4436	44.6030	47.4495	50.8829
	55.2619	58.5730	61.5059	64.3346	67.2488	70.4625	74.3506
	79.9731	84.8206	89.1772	94.4221	98.1052	105.9881	109.1632
70	37.4674	39.0364	43.2752	45.4417	48.7575	51.7393	55.3289
	59.8978	63.3460	66.3961	69.3345	72.3585	75.6893	79.7147
	85.5271	90.5313	95.0232	100.4251	104.2140	112.3171	115.5768

Valores de P

GL:v	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
75	41.1072	42.7573	47.2060	49.4750	52.9419	56.0541	59.7945
	64.5466	68.1270	71.2903	74.3342	77.4641	80.9081	85.0658
	91.0615	96.2167	100.8394	106.3929	110.2855	118.5988	121.9414
80	44.7910	46.5199	51.1719	53.5401	57.1531	60.3915	64.2777
	69.2069	72.9153	76.1879	79.3344	82.5663	86.1200	90.4054
	96.5783	101.8795	106.6286	112.3287	116.3210	124.8390	128.2609
85	48.5151	50.3203	55.1696	57.6339	61.3887	64.7494	68.7771
	73.8777	77.7102	81.0887	84.3340	87.6656	91.3248	95.7344
	102.0789	107.5218	112.3934	118.2358	122.3246	131.0407	134.5392
90	52.2758	54.1552	59.1964	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911
	78.5584	82.5110	85.9925	89.3342	92.7615	96.5236	101.0537
	107.5650	113.1454	118.1359	124.1163	128.2989	137.2080	140.7809
95	56.0702	58.0220	63.2497	65.8984	69.9249	73.5199	77.8185
	83.2478	87.3176	90.8992	94.3342	97.8547	101.7172	106.3642
	113.0378	118.7515	123.8579	129.9726	134.2465	143.3430	146.9889
100	59.8957	61.9179	67.3275	70.0648	74.2220	77.9294	82.3582
	87.9454	92.1290	95.8080	99.3340	102.9459	106.9058	111.6668
	118.4981	124.3422	129.5612	135.8067	140.1694	149.4487	153.1660
200	140.6604	143.8428	152.2409	156.4321	162.7280	168.2787	174.8353
	183.0030	189.0482	194.3197	199.3336	204.4331	209.9855	216.6090
	226.0212	233.9946	241.0578	249.4451	255.2638	267.5403	272.4221
300	225.8859	229.9630	240.6635	245.9725	253.9120	260.8780	269.0681
	279.2140	286.6870	293.1776	299.3337	305.5738	312.3473	320.3968
	331.7897	341.3952	349.8750	359.9063	366.8445	381.4259	387.2019
400	313.4266	318.2593	330.9020	337.1547	346.4814	354.6399	364.2057
	376.0213	384.6988	392.2138	399.3326	406.5395	414.3364	423.5901
	436.6487	447.6325	457.3064	468.7266	476.6073	493.1309	499.6647
500	402.4481	407.9469	422.3042	429.3875	439.9353	449.1470	459.9264
	473.2089	482.9445	491.3700	499.3307	507.3806	516.0889	526.4006
	540.9308	553.1277	563.8513	576.4930	585.2061	603.4451	610.6458
1000	859.3594	867.4821	888.5649	898.9106	914.2584	927.5919	943.1350
	962.1830	976.0754	988.0560	999.3390	1010.697	1022.958	1037.430
	1057.725	1074.683	1089.532	1106.966	1118.947	1143.916	1153.736

CUANTILES DE LA DISTRIBUCION GAMMA

Las anotaciones de la tabla son valores de x donde :

$$P[X \le x] = \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1}\, \mathrm{Exp}(-t/\beta)\, dt$$

Valores de P

	0.0001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5
	0.75	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	
$\alpha = 1$							
$\beta = 1$	0.001	0.005	0.010	0.051	0.105	0.288	0.693
	1.386	2.303	2.996	4.605	5.298	6.908	
$\beta = 2$	0.002	0.010	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386
	2.773	4.605	5.991	9.210	10.597	13.815	
$\beta = 3$	0.003	0.015	0.030	0.154	0.316	0.863	2.079
	4.159	6.908	8.987	13.815	15.895	20.723	
$\beta = 4$	0.004	0.020	0.040	0.205	0.421	1.151	2.773
	5.545	9.210	11.983	18.421	21.193	27.631	
$\beta = 5$	0.005	0.025	0.050	0.256	0.527	1.438	3.466
	6.931	11.513	14.979	23.026	26.491	34.538	
$\beta = 6$	0.006	0.030	0.060	0.308	0.632	1.726	4.159
	8.318	13.816	17.974	27.631	31.790	41.446	
$\beta = 7$	0.007	0.035	0.070	0.359	0.738	2.014	4.852
	9.704	16.118	20.970	32.236	37.088	48.354	
$\beta = 8$	0.008	0.040	0.080	0.410	0.843	2.301	5.545
	11.090	18.421	23.966	36.841	42.386	55.261	
$\beta = 9$	0.009	0.045	0.090	0.462	0.948	2.589	6.238
	12.477	20.723	26.962	41.446	47.685	62.169	
$\beta = 10$	0.010	0.050	0.101	0.513	1.054	2.877	6.931
	13.863	23.026	29.957	46.052	52.983	69.076	
$\beta = 25$	0.025	0.125	0.251	1.282	2.634	7.192	17.329
	34.657	57.565	74.893	115.129	132.457	172.691	
$\beta = 50$	0.050	0.251	0.503	2.565	5.268	14.384	34.657
	69.315	115.129	149.787	230.258	264.915	345.383	
$\beta = 100$	0.100	0.501	1.005	5.129	10.536	28.768	69.315
	138.629	230.258	299.573	460.516	529.830	690.765	
$\alpha = 2$							
$\beta = 1$	0.045	0.103	0.149	0.355	0.532	0.961	1.678
	2.693	3.890	4.744	6.638	7.430	9.233	
$\beta = 2$	0.091	0.207	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357
	5.385	7.779	9.488	13.277	14.860	18.467	
$\beta = 3$	0.136	0.310	0.446	1.066	1.595	2.884	5.035
	8.078	11.669	14.232	19.915	22.290	27.700	
$\beta = 4$	0.182	0.414	0.594	1.421	2.127	3.845	6.713
	10.771	15.559	18.975	26.553	29.720	[illegible]	

Valores de P

	0.0001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5
	0.75	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	
α = 2							
β = 5	0.227	0.517	0.743	1.777	2.659	4.806	8.392
	13.463	19.449	23.719	33.192	37.151	46.167	
β = 6	0.272	0.621	0.891	2.132	3.191	5.768	10.070
	16.156	23.338	28.463	39.830	44.581	55.400	
β = 7	0.318	0.724	1.040	2.488	3.723	6.729	11.748
	18.848	27.228	33.207	46.468	52.011	64.634	
β = 8	0.363	0.828	1.188	2.843	4.254	7.690	13.427
	21.541	31.118	37.951	53.107	59.441	73.867	
β = 9	0.409	0.931	1.337	3.198	4.786	8.652	15.105
	24.234	35.007	42.695	59.745	66.871	83.100	
β = 10	0.454	1.035	1.486	3.554	5.318	9.613	16.783
	26.926	38.897	47.439	66.383	74.301	92.334	
β = 25	1.135	2.587	3.714	8.884	13.295	24.032	41.959
	67.316	97.243	118.597	165.959	185.753	230.834	
β = 50	2.270	5.175	7.428	17.768	26.591	48.064	83.917
	134.632	194.486	237.193	331.917	371.506	461.668	
β = 100	4.540	10.349	14.855	35.536	53.181	96.128	167.835
	269.264	388.972	474.386	663.834	743.012	923.337	
α = 3							
β = 1	0.191	0.338	0.436	0.818	1.102	1.727	2.674
	3.920	5.322	6.296	8.406	9.274	11.229	
β = 2	0.381	0.676	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348
	7.841	10.645	12.592	16.812	18.548	22.458	
β = 3	0.572	1.014	1.308	2.453	3.306	5.182	8.022
	11.761	15.967	18.887	25.218	27.821	33.686	
β = 4	0.762	1.351	1.744	3.271	4.408	6.909	10.696
	15.682	21.289	25.183	33.624	37.095	44.915	
β = 5	0.953	1.689	2.180	4.088	5.510	8.636	13.370
	19.602	26.612	31.479	42.030	46.369	56.144	
β = 6	1.143	2.027	2.616	4.906	6.612	10.364	16.044
	23.522	31.934	37.775	50.436	55.643	67.373	
β = 7	1.334	2.365	3.052	5.724	7.714	12.091	18.718
	27.443	37.256	44.071	58.842	64.917	78.601	
β = 8	1.524	2.703	3.488	6.542	8.817	13.818	21.392
	31.363	42.579	50.366	67.247	74.190	89.830	
β = 9	1.715	3.041	3.924	7.359	9.919	15.546	24.067
	35.284	47.901	56.662	75.653	83.464	101.059	
β = 10	1.905	3.379	4.360	8.177	11.021	17.273	26.741
	39.204	53.223	62.958	84.059	92.738	112.288	
β = 25	4.763	8.447	10.901	20.442	27.552	43.182	66.852
	98.010	133.058	157.395	210.148	231.845	280.720	
β = 50	9.527	16.893	21.802	40.885	55.103	86.365	133.703
	196.020	266.116	314.790	420.297	463.689	561.439	
β = 100	19.053	33.786	43.605	81.769	110.207	172.730	267.406
	392.040	532.232	629.579	840.594	927.379	1122.878	
α = 4							
β = 1	0.429	0.672	0.823	1.366	1.745	2.535	3.672
	5.109	6.681	7.754	10.045	10.977	13.062	
β = 2	0.857	1.344	1.646	2.733	3.490	5.071	7.344
	10.219	13.362	15.507	20.090	21.955	26.124	
β = 3	1.286	2.017	2.470	4.099	5.234	7.606	11.016
	15.328	20.042	23.261	30.135	32.932	39.187	

Valores de P

	0.0001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5
	0.75	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	
$\alpha = 4$							
$\beta = 4$	1.714	2.689	3.293	5.465	6.979	10.141	14.688
	20.438	26.723	31.015	40.180	43.910	52.249	
$\beta = 5$	2.143	3.361	4.116	6.832	8.724	12.677	18.360
	25.547	33.404	38.768	50.226	54.887	65.311	
$\beta = 6$	2.571	4.033	4.939	8.198	10.469	15.212	22.032
	30.657	40.085	46.522	60.271	65.865	78.373	
$\beta = 7$	3.000	4.705	5.763	9.564	12.213	17.747	25.704
	35.766	46.765	54.276	70.316	76.842	91.435	
$\beta = 8$	3.428	5.378	6.586	10.931	13.958	20.283	29.376
	40.875	53.446	62.029	80.361	87.820	104.498	
$\beta = 9$	3.857	6.050	7.409	12.297	15.703	22.818	33.049
	45.985	60.127	69.783	90.406	98.797	117.560	
$\beta = 10$	4.286	6.722	8.232	13.663	17.448	25.353	36.721
	51.094	66.808	77.537	100.451	109.775	130.622	
$\beta = 25$	10.714	16.805	20.581	34.158	43.619	63.383	91.802
	127.736	167.020	193.841	251.128	274.437	326.555	
$\beta = 50$	21.428	33.610	41.162	68.316	87.238	126.766	183.603
	255.471	334.039	387.683	502.256	548.873	653.110	
$\beta = 100$	42.855	67.221	82.325	136.632	174.477	253.532	367.206
	510.943	668.078	775.366	1004.511	1097.747	1306.220	
$\alpha = 5$							
$\beta = 1$	0.739	1.078	1.279	1.970	2.433	3.369	4.671
	6.274	7.994	9.154	11.605	12.594	14.794	
$\beta = 2$	1.479	2.156	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342
	12.549	15.987	18.307	23.209	25.188	29.588	
$\beta = 3$	2.218	3.234	3.837	5.910	7.298	10.106	14.013
	18.823	23.981	27.461	34.814	37.782	44.382	
$\beta = 4$	2.957	4.312	5.116	7.881	9.730	13.474	18.684
	25.098	31.974	36.614	46.418	50.376	59.176	
$\beta = 5$	3.697	5.390	6.396	9.851	12.163	16.843	23.355
	31.372	39.968	45.768	58.023	62.970	73.970	
$\beta = 6$	4.436	6.468	7.675	11.821	14.596	20.212	28.025
	37.647	47.962	54.921	69.628	75.564	88.764	
$\beta = 7$	5.176	7.545	8.954	13.791	17.028	23.580	32.696
	43.921	55.955	64.075	81.232	88.158	103.558	
$\beta = 8$	5.915	8.623	10.233	15.761	19.461	26.949	37.367
	50.195	63.949	73.228	92.837	100.753	118.352	
$\beta = 9$	6.654	9.701	11.512	17.731	21.893	30.317	42.038
	56.470	71.942	82.382	104.441	113.347	133.146	
$\beta = 10$	7.394	10.779	12.791	19.701	24.326	33.686	46.709
	62.744	79.936	91.535	116.046	125.941	147.940	
$\beta = 25$	18.484	26.948	31.978	49.254	60.815	84.215	116.773
	156.861	199.840	228.838	290.115	314.852	369.851	
$\beta = 50$	36.969	53.896	63.955	98.507	121.630	168.430	233.545
	313.722	399.680	457.676	580.231	629.703	739.701	
$\beta = 100$	73.937	107.793	127.911	197.015	243.259	336.860	467.091
	627.443	799.359	915.352	1160.461	1259.406	1479.402	
$\alpha = 6$							
$\beta = 1$	1.107	1.537	1.785	2.613	3.152	4.219	5.670
	7.423	9.275	10.513	13.108	14.150	16.455	
$\beta = 2$	2.214	3.074	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340
	14.845	18.549	21.026	26.217	28.200	32.000	

Valores de P

	0.0001 / 0.75	0.005 / 0.9	0.01 / 0.95	0.05 / 0.99	0.1 / 0.995	0.25 / 0.999	0.5
$\alpha = 6$							
$\beta = 3$	3.321	4.611	5.356	7.839	9.456	12.658	17.010
	22.268	27.824	31.539	39.325	42.449	49.364	
$\beta = 4$	4.428	6.148	7.141	10.452	12.608	16.877	22.681
	29.691	37.099	42.052	52.434	56.599	65.818	
$\beta = 5$	5.536	7.685	8.926	13.065	15.759	21.096	28.351
	37.114	46.373	52.565	65.542	70.749	82.273	
$\beta = 6$	6.643	9.221	10.712	15.678	18.911	25.315	34.021
	44.536	55.648	63.078	78.651	84.898	98.728	
$\beta = 7$	7.750	10.758	12.497	18.291	22.063	29.534	39.691
	51.959	64.923	73.591	91.759	99.048	115.182	
$\beta = 8$	8.857	12.295	14.282	20.904	25.215	33.754	45.361
	59.382	74.197	84.104	104.868	113.198	131.637	
$\beta = 9$	9.964	13.832	16.068	23.517	28.367	37.973	51.031
	66.804	83.472	94.617	117.976	127.348	148.091	
$\beta = 10$	11.071	15.369	17.853	26.130	31.519	42.192	56.702
	74.227	92.747	105.130	131.085	141.497	164.546	
$\beta = 25$	27.678	38.423	44.632	65.325	78.797	105.480	141.754
	185.568	231.867	262.826	327.712	353.744	411.365	
$\beta = 50$	55.355	76.846	89.264	130.651	157.595	210.960	283.508
	371.135	463.734	525.652	655.424	707.487	822.731	
$\beta = 100$	110.710	153.691	178.528	261.301	315.190	421.921	567.016
	742.271	927.467	1051.303	1310.848	1414.974	1645.461	
$\alpha = 7$							
$\beta = 1$	1.520	2.037	2.330	3.285	3.895	5.083	6.670
	8.558	10.532	11.842	14.571	15.660	18.062	
$\beta = 2$	3.041	4.075	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339
	17.117	21.064	23.685	29.141	31.319	36.123	
$\beta = 3$	4.561	6.112	6.991	9.856	11.684	15.248	20.009
	25.675	31.596	35.527	43.712	46.979	54.185	
$\beta = 4$	6.081	8.149	9.321	13.141	15.579	20.331	26.679
	34.234	42.128	47.370	58.282	62.639	72.246	
$\beta = 5$	7.602	10.187	11.651	16.427	19.474	25.413	33.348
	42.792	52.660	59.212	72.853	78.298	90.308	
$\beta = 6$	9.122	12.224	13.981	19.712	23.369	30.496	40.018
	51.351	63.192	71.054	87.424	93.958	108.370	
$\beta = 7$	10.642	14.261	16.311	22.997	27.263	35.579	46.687
	59.909	73.725	82.897	101.994	109.618	126.431	
$\beta = 8$	12.163	16.299	18.642	26.283	31.158	40.661	53.357
	68.468	84.257	94.739	116.565	125.277	144.493	
$\beta = 9$	13.683	18.336	20.972	29.568	35.053	45.744	60.027
	77.026	94.789	106.582	131.135	140.937	162.554	
$\beta = 10$	15.203	20.373	23.302	32.853	38.948	50.827	66.696
	85.585	105.321	118.424	145.706	156.597	180.616	
$\beta = 25$	38.008	50.933	58.255	82.133	97.369	127.066	166.741
	213.962	263.302	296.060	364.265	391.492	451.540	
$\beta = 50$	76.017	101.867	116.511	164.266	194.738	254.133	333.482
	427.923	526.604	592.120	728.530	782.984	903.080	
$\beta = 100$	152.034	203.734	233.021	328.532	389.477	508.266	666.963
	855.847	1053.207	1184.239	1457.061	1565.967	1806.160	
$\alpha = 8$							
$\beta = 1$	1.971	2.571	2.906	3.981	4.656	5.956	7.669
	9.684	11.771	13.148	16.000	17.134	19.626	

Valores de P

	0.0001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5
	0.75	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	
α = 8							
β = 2	3.942	5.142	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338
	19.369	23.542	26.296	32.000	34.267	39.252	
β = 3	5.912	7.713	8.718	11.942	13.968	17.868	23.008
	29.053	35.313	39.444	48.000	51.401	58.878	
β = 4	7.883	10.284	11.624	15.923	18.624	23.824	30.677
	38.738	47.084	52.592	64.000	68.534	78.505	
β = 5	9.854	12.856	14.531	19.904	23.281	29.781	38.346
	48.422	58.855	65.741	80.000	85.668	98.131	
β = 6	11.825	15.427	17.437	23.885	27.937	35.737	46.015
	58.107	70.625	78.889	96.000	102.802	117.757	
β = 7	13.796	17.998	20.343	27.866	32.593	41.693	53.685
	67.791	82.396	92.037	112.000	119.935	137.383	
β = 8	15.767	20.569	23.249	31.847	37.249	47.649	61.354
	77.475	94.167	105.185	128.000	137.069	157.009	
β = 9	17.737	23.140	26.155	35.827	41.905	53.605	69.023
	87.160	105.938	118.333	144.000	154.202	176.635	
β = 10	19.708	25.711	29.061	39.808	46.561	59.561	76.692
	96.844	117.709	131.481	159.999	171.336	196.261	
β = 25	49.270	64.278	72.653	99.521	116.403	148.903	191.731
	242.111	294.273	328.703	399.999	428.340	490.653	
β = 50	98.541	128.555	145.305	199.041	232.806	297.806	383.462
	484.222	588.546	657.405	799.997	856.680	981.306	
β = 100	197.081	257.110	290.611	398.082	465.612	595.611	766.925
	968.443	1177.091	1314.811	1599.995	1713.359	1962.613	
α = 9							
β = 1	2.452	3.132	3.507	4.695	5.432	6.838	8.669
	10.802	12.995	14.435	17.403	18.578	21.156	
β = 2	4.905	6.265	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338
	21.605	25.989	28.869	34.805	37.156	42.312	
β = 3	7.357	9.397	10.522	14.086	16.297	20.513	26.007
	32.407	38.984	43.304	52.208	55.735	63.468	
β = 4	9.810	12.530	14.030	18.781	21.730	27.351	34.676
	43.210	51.979	57.739	69.611	74.313	84.625	
β = 5	12.262	15.662	17.537	23.476	27.162	34.188	43.345
	54.012	64.974	72.173	87.013	92.891	105.781	
β = 6	14.715	18.794	21.045	28.171	32.595	41.026	52.014
	64.815	77.968	86.608	104.416	111.469	126.937	
β = 7	17.167	21.927	24.552	32.867	38.027	47.864	60.683
	75.617	90.963	101.043	121.819	130.047	148.093	
β = 8	19.619	25.059	28.060	37.562	43.460	54.701	69.352
	86.420	103.958	115.477	139.221	148.626	169.249	
β = 9	22.072	28.192	31.567	42.257	48.892	61.539	78.021
	97.222	116.952	129.912	156.624	167.204	190.405	
β = 10	24.524	31.324	35.075	46.952	54.325	68.376	86.689
	108.025	129.947	144.346	174.026	185.782	211.561	
β = 25	61.311	78.310	87.686	117.381	135.812	170.941	216.724
	270.061	324.868	360.866	435.066	464.455	528.904	
β = 50	122.621	156.620	175.373	234.761	271.623	341.882	433.447
	540.123	649.735	721.732	870.132	928.910	1057.807	
β = 100	245.242	313.240	350.746	469.523	543.247	683.764	866.895
	1080.245	1299.471	1443.465	1740.265	1857.819	2115.614	

Valores de P

	0.0001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5
	0.75	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	
α = 10							
β = 1	2.961	3.717	4.130	5.425	6.221	7.726	9.669
	11.914	14.206	15.705	18.783	19.998	22.657	
β = 2	5.921	7.434	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337
	23.828	28.412	31.410	37.566	39.997	45.315	
β = 3	8.882	11.151	12.391	16.276	18.664	23.178	29.006
	35.742	42.618	47.116	56.349	59.995	67.972	
β = 4	11.842	14.868	16.521	21.702	24.885	30.904	38.675
	47.655	56.824	62.821	75.132	79.994	90.629	
β = 5	14.803	18.585	20.651	27.127	31.107	38.629	48.344
	59.569	71.030	78.526	93.916	99.992	113.287	
β = 6	17.763	22.302	24.781	32.552	37.328	46.355	58.012
	71.483	85.236	94.231	112.699	119.990	135.944	
β = 7	20.724	26.018	28.911	37.978	43.549	54.081	67.681
	83.397	99.442	109.937	131.482	139.989	158.601	
β = 8	23.684	29.735	33.042	43.403	49.770	61.807	77.350
	95.311	113.648	125.642	150.265	159.987	181.259	
β = 9	26.645	33.452	37.172	48.829	55.992	69.533	87.018
	107.225	127.854	141.347	169.048	179.986	203.916	
β = 10	29.605	37.169	41.302	54.254	62.213	77.259	96.687
	119.138	142.060	157.052	187.831	199.984	226.573	
β = 25	74.013	92.923	103.255	135.635	155.533	193.147	241.718
	297.846	355.150	392.630	469.578	499.960	566.434	
β = 50	148.026	185.846	206.510	271.270	311.065	386.294	483.436
	595.692	710.299	785.261	939.155	999.920	1132.867	
β = 100	296.052	371.692	413.020	542.541	622.130	772.589	966.871
	1191.384	1420.599	1570.522	1878.310	1999.841	2265.734	
α = 25							
β = 1	12.337	13.995	14.853	17.382	18.844	21.471	24.667
	28.167	31.584	33.752	38.077	39.745	43.330	
β = 2	24.674	27.991	29.707	34.764	37.689	42.942	49.335
	56.334	63.167	67.505	76.154	79.490	86.661	
β = 3	37.011	41.986	44.560	52.146	56.533	64.413	74.002
	84.500	94.751	101.257	114.231	119.235	129.991	
β = 4	49.348	55.981	59.413	69.528	75.377	85.884	98.670
	112.667	126.334	135.010	152.308	158.980	173.322	
β = 5	61.685	69.977	74.267	86.911	94.222	107.355	123.337
	140.834	157.918	168.762	190.385	198.725	216.652	
β = 6	74.022	83.972	89.120	104.293	113.066	128.826	148.005
	169.001	189.501	202.515	228.462	238.470	259.982	
β = 7	86.359	97.968	103.973	121.675	131.910	150.297	172.672
	197.168	221.085	236.267	266.538	278.215	303.313	
β = 8	98.696	111.963	118.827	139.057	150.755	171.768	197.340
	225.334	252.668	270.019	304.615	317.960	346.643	
β = 9	111.033	125.958	133.680	156.439	169.599	193.239	222.007
	253.501	284.252	303.772	342.692	357.705	389.974	
β = 10	123.370	139.954	148.533	173.821	188.443	214.710	246.675
	281.668	315.836	337.524	380.769	397.450	433.304	
β = 25	308.424	349.884	371.333	434.553	471.108	536.776	616.687
	704.170	789.589	843.810	951.923	993.625	1083.260	
β = 50	616.848	699.769	742.667	869.106	942.216	1073.552	1233.373
	1408.340	1579.178	1687.621	1903.846	1987.249	2166.520	

Valores de P

	0.0001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5
	0.75	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	
α = 25							
β = 100	1233.695	1399.537	1485.333	1738.212	1884.432	2147.103	2466.747
	2816.680	3158.356	3375.242	3807.693	3974.499	4333.040	
α = 50							
β = 1	30.959	33.664	35.032	38.965	41.179	45.067	49.667
	54.571	59.249	62.171	67.903	70.085	74.724	
β = 2	61.918	67.328	70.065	77.929	82.358	90.133	99.334
	109.141	118.498	124.342	135.807	140.169	149.449	
β = 3	92.877	100.991	105.097	116.894	123.537	135.200	149.001
	163.712	177.747	186.513	203.710	210.254	224.173	
β = 4	123.836	134.655	140.130	155.859	164.716	180.266	198.668
	218.282	236.996	248.684	271.613	280.339	298.897	
β = 5	154.795	168.319	175.162	194.824	205.895	225.333	248.335
	272.853	296.245	310.855	339.517	350.423	373.622	
β = 6	185.754	201.983	210.195	233.788	247.075	270.400	298.002
	327.424	355.494	373.027	407.420	420.508	448.346	
β = 7	216.713	235.646	245.227	272.753	288.254	315.466	347.669
	381.994	414.743	435.198	475.323	490.593	523.070	
β = 8	247.672	269.310	280.259	311.718	329.433	360.533	397.336
	436.565	473.992	497.369	543.227	560.678	597.795	
β = 9	278.631	302.974	315.292	350.682	370.612	405.599	447.003
	491.135	533.241	559.540	611.130	630.762	672.519	
β = 10	309.590	336.638	350.324	389.647	411.791	450.666	496.670
	545.706	592.490	621.711	679.033	700.847	747.244	
β = 25	773.974	841.594	875.810	974.118	1029.477	1126.665	1241.675
	1364.265	1481.226	1554.277	1697.584	1752.117	1868.109	
β = 50	1547.948	1683.188	1751.621	1948.236	2058.954	2253.329	2483.351
	2728.531	2962.452	3108.555	3395.167	3504.235	3736.218	
β = 100	3095.896	3366.377	3503.242	3896.472	4117.909	4506.659	4966.701
	5457.061	5924.903	6217.109	6790.334	7008.469	7472.435	
α = 100							
β = 1	71.921	76.120	78.216	84.139	87.418	93.086	99.667
	106.551	113.011	116.997	124.723	127.632	133.770	
β = 2	143.843	152.241	156.432	168.279	174.835	186.172	199.334
	213.102	226.021	233.995	249.445	255.264	267.540	
β = 3	215.764	228.361	234.648	252.418	262.253	279.258	299.000
	319.653	339.032	350.992	374.168	382.896	401.310	
β = 4	287.686	304.482	312.864	336.557	349.671	372.344	398.667
	426.204	452.042	467.989	498.890	510.528	535.081	
β = 5	359.607	380.602	391.080	420.697	437.088	465.430	498.334
	532.755	565.053	584.986	623.613	638.159	668.851	
β = 6	431.529	456.723	469.296	504.836	524.506	558.516	598.001
	639.306	678.063	701.984	748.335	765.791	802.621	
β = 7	503.450	532.843	547.512	588.975	611.924	651.602	697.668
	745.857	791.074	818.981	873.058	893.423	936.391	
β = 8	575.371	608.964	625.728	673.115	699.341	744.688	797.334
	852.408	904.085	935.978	997.780	1021.055	1070.161	
β = 9	647.293	685.084	703.945	757.254	786.759	837.774	897.001
	958.959	1017.095	1052.975	1122.503	1148.687	1203.931	
β = 10	719.214	761.205	782.161	841.393	874.177	930.860	996.668
	1065.510	1130.106	1169.973	1247.225	1276.319	1337.701	

Valores de P

$\alpha = 100$	0.0001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999
$\beta = 25$	1798.035	1903.011	1955.401	2103.484	2185.441	2327.150	2491.670	2663.775	2825.265	2924.932	3118.064	3190.797	3344.254
$\beta = 50$	3596.071	3806.023	3910.803	4206.967	4370.883	4654.300	4983.340	5327.551	5650.529	5849.864	6236.127	6381.595	6688.507
$\beta = 100$	7192.142	7612.045	7821.605	8413.935	8741.766	9308.601	9966.680	10655.10	11301.06	11699.73	12472.25	12763.19	13377.01

CUANTILES DE LA DISTRIBUCION BETA

Las anotaciones de la tabla son valores de x donde :

$$P\left[X \le x\right] = \frac{1}{B(P,Q)} \int_0^x t^{P-1} (1-t)^{Q-1}\, dt$$

Valores de la Probabilidad

	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
P = 1/2									
Q = 1/2	0.0000	0.0001	0.0002	0.0062	0.0245	0.0955	0.2061	0.3455	0.5000
P = 1									
Q = 1	0.0010	0.0050	0.0100	0.0500	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Q = 2	0.0005	0.0025	0.0050	0.0253	0.0513	0.1056	0.1633	0.2254	0.2929
Q = 3	0.0003	0.0017	0.0033	0.0170	0.0345	0.0717	0.1121	0.1566	0.2063
Q = 4	0.0002	0.0013	0.0025	0.0127	0.0260	0.0543	0.0853	0.1199	0.1591
Q = 5	0.0002	0.0010	0.0020	0.0102	0.0209	0.0436	0.0688	0.0971	0.1294
Q = 6	0.0002	0.0008	0.0017	0.0085	0.0174	0.0365	0.0577	0.0816	0.1091
Q = 7	0.0001	0.0007	0.0014	0.0073	0.0149	0.0314	0.0497	0.0704	0.0943
Q = 8	0.0001	0.0006	0.0013	0.0064	0.0131	0.0275	0.0436	0.0619	0.0830
Q = 9	0.0001	0.0006	0.0011	0.0057	0.0116	0.0245	0.0389	0.0552	0.0741
Q = 10	0.0001	0.0005	0.0010	0.0051	0.0105	0.0221	0.0350	0.0498	0.0670
Q = 20	0.0000	0.0003	0.0005	0.0026	0.0053	0.0111	0.0177	0.0252	0.0341
Q = 50	0.0000	0.0001	0.0002	0.0010	0.0021	0.0045	0.0071	0.0102	0.0138
Q = 100	0.0000	0.0001	0.0001	0.0005	0.0011	0.0022	0.0036	0.0051	0.0069
P = 2									
Q = 1	0.0316	0.0707	0.1000	0.2236	0.3162	0.4472	0.5477	0.6325	0.7071
Q = 2	0.0184	0.0414	0.0589	0.1354	0.1958	0.2871	0.3633	0.4329	0.5000
Q = 3	0.0130	0.0294	0.0420	0.0976	0.1426	0.2123	0.2724	0.3292	0.3857
Q = 4	0.0101	0.0229	0.0327	0.0764	0.1122	0.1686	0.2180	0.2656	0.3138
Q = 5	0.0083	0.0187	0.0268	0.0628	0.0926	0.1399	0.1818	0.2226	0.2644
Q = 6	0.0070	0.0158	0.0227	0.0534	0.0788	0.1195	0.1559	0.1916	0.2285
Q = 7	0.0060	0.0137	0.0197	0.0464	0.0686	0.1044	0.1365	0.1682	0.2011
Q = 8	0.0053	0.0121	0.0174	0.0410	0.0608	0.0926	0.1214	0.1498	0.1796
Q = 9	0.0048	0.0109	0.0155	0.0368	0.0545	0.0833	0.1093	0.1351	0.1623
Q = 10	0.0043	0.0098	0.0141	0.0333	0.0495	0.0756	0.0994	0.1230	0.1480
Q = 20	0.0022	0.0050	0.0072	0.0172	0.0256	0.0394	0.0521	0.0650	0.0786
Q = 50	0.0009	0.0020	0.0029	0.0070	0.0105	0.0162	0.0215	0.0269	0.0327
Q = 100	0.0005	0.0010	0.0015	0.0035	0.0053	0.0082	0.0109	0.0136	0.0166
P = 3									
Q = 1	0.1000	0.1710	0.2154	0.3684	0.4642	0.5848	0.6694	0.7368	0.7937
Q = 2	0.0640	0.1109	0.1409	0.2486	0.3205	0.4175	0.4916	0.5555	0.6143
Q = 3	0.0476	0.0828	0.1056	0.1893	0.2466	0.3266	0.3898	0.4463	0.5000
Q = 4	0.0379	0.0663	0.0847	0.1532	0.2009	0.2686	0.3233	0.3731	0.4214

	Valores de la Probabilidad								
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
P = 3									
Q = 5	0.0316	0.0553	0.0708	0.1288	0.1696	0.2283	0.2763	0.3206	0.3641
Q = 6	0.0270	0.0475	0.0608	0.1111	0.1469	0.1986	0.2413	0.2811	0.3205
Q = 7	0.0237	0.0416	0.0533	0.0977	0.1295	0.1757	0.2142	0.2502	0.2862
Q = 8	0.0210	0.0370	0.0475	0.0873	0.1158	0.1576	0.1926	0.2255	0.2586
Q = 9	0.0189	0.0333	0.0428	0.0788	0.1048	0.1429	0.1750	0.2052	0.2358
Q = 10	0.0172	0.0303	0.0390	0.0719	0.0957	0.1307	0.1603	0.1883	0.2167
Q = 20	0.0090	0.0160	0.0206	0.0382	0.0512	0.0706	0.0872	0.1032	0.1197
Q = 50	0.0037	0.0066	0.0085	0.0159	0.0214	0.0297	0.0368	0.0438	0.0511
Q = 100	0.0019	0.0033	0.0043	0.0081	0.0109	0.0151	0.0188	0.0224	0.0261
P = 4									
Q = 1	0.1778	0.2659	0.3162	0.4729	0.5623	0.6687	0.7401	0.7953	0.8409
Q = 2	0.1220	0.1851	0.2221	0.3426	0.4161	0.5098	0.5780	0.6350	0.6862
Q = 3	0.0940	0.1436	0.1731	0.2713	0.3332	0.4146	0.4761	0.5292	0.5786
Q = 4	0.0767	0.1177	0.1423	0.2253	0.2786	0.3501	0.4052	0.4539	0.5000
Q = 5	0.0648	0.0999	0.1210	0.1929	0.2397	0.3032	0.3530	0.3975	0.4402
Q = 6	0.0562	0.0868	0.1053	0.1688	0.2104	0.2675	0.3127	0.3535	0.3931
Q = 7	0.0496	0.0768	0.0932	0.1500	0.1876	0.2394	0.2808	0.3184	0.3551
Q = 8	0.0444	0.0688	0.0837	0.1351	0.1692	0.2167	0.2548	0.2896	0.3238
Q = 9	0.0402	0.0624	0.0759	0.1229	0.1542	0.1979	0.2332	0.2656	0.2976
Q = 10	0.0368	0.0571	0.0695	0.1127	0.1416	0.1822	0.2150	0.2453	0.2753
Q = 20	0.0198	0.0308	0.0376	0.0617	0.0781	0.1015	0.1209	0.1390	0.1573
Q = 50	0.0083	0.0130	0.0159	0.0262	0.0333	0.0436	0.0523	0.0605	0.0688
Q = 100	0.0042	0.0066	0.0081	0.0134	0.0170	0.0224	0.0269	0.0311	0.0355
P = 5									
Q = 1	0.2512	0.3466	0.3981	0.5499	0.6310	0.7248	0.7860	0.8326	0.8706
Q = 2	0.1814	0.2540	0.2943	0.4182	0.4897	0.5776	0.6396	0.6906	0.7356
Q = 3	0.1438	0.2030	0.2363	0.3413	0.4038	0.4832	0.5414	0.5908	0.6359
Q = 4	0.1196	0.1697	0.1982	0.2892	0.3446	0.4163	0.4701	0.5165	0.5598
Q = 5	0.1025	0.1461	0.1710	0.2514	0.3010	0.3661	0.4156	0.4590	0.5000
Q = 6	0.0898	0.1283	0.1504	0.2224	0.2673	0.3268	0.3726	0.4131	0.4517
Q = 7	0.0799	0.1145	0.1344	0.1996	0.2405	0.2953	0.3377	0.3755	0.4119
Q = 8	0.0721	0.1034	0.1215	0.1810	0.2187	0.2693	0.3088	0.3443	0.3785
Q = 9	0.0656	0.0942	0.1108	0.1657	0.2005	0.2476	0.2845	0.3178	0.3502
Q = 10	0.0602	0.0866	0.1019	0.1527	0.1851	0.2291	0.2638	0.2952	0.3258
Q = 20	0.0331	0.0479	0.0566	0.0859	0.1050	0.1314	0.1527	0.1724	0.1919
Q = 50	0.0141	0.0205	0.0243	0.0372	0.0457	0.0577	0.0675	0.0767	0.0860
Q = 100	0.0072	0.0105	0.0125	0.0191	0.0236	0.0298	0.0350	0.0399	0.0448
P = 6									
Q = 1	0.3162	0.4135	0.4642	0.6070	0.6813	0.7647	0.8182	0.8584	0.8909
Q = 2	0.2375	0.3151	0.3566	0.4793	0.5474	0.6291	0.6857	0.7315	0.7715
Q = 3	0.1927	0.2578	0.2932	0.4003	0.4618	0.5379	0.5925	0.6382	0.6795
Q = 4	0.1629	0.2191	0.2500	0.3449	0.4006	0.4709	0.5224	0.5664	0.6069
Q = 5	0.1413	0.1909	0.2183	0.3035	0.3542	0.4191	0.4675	0.5093	0.5483
Q = 6	0.1249	0.1693	0.1940	0.2712	0.3177	0.3779	0.4232	0.4627	0.5000
Q = 7	0.1120	0.1522	0.1746	0.2453	0.2882	0.3441	0.3866	0.4240	0.4598
Q = 8	0.1016	0.1383	0.1588	0.2240	0.2637	0.3160	0.3559	0.3913	0.4251
Q = 9	0.0929	0.1267	0.1457	0.2061	0.2432	0.2921	0.3298	0.3633	0.3954
Q = 10	0.0857	0.1170	0.1346	0.1909	0.2256	0.2716	0.3072	0.3390	0.3697
Q = 20	0.0482	0.0663	0.0765	0.1101	0.1312	0.1599	0.1827	0.2034	0.2238
Q = 50	0.0209	0.0289	0.0335	0.0486	0.0583	0.0717	0.0825	0.0925	0.1025
Q = 100	0.0107	0.0149	0.0173	0.0252	0.0303	0.0374	0.0431	0.0485	0.0538

Valores de la Probabilidad

	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
P = 7									
Q = 1	0.3728	0.4691	0.5179	0.6518	0.7197	0.7946	0.8420	0.8773	0.9057
Q = 2	0.2887	0.3685	0.4101	0.5293	0.5938	0.6696	0.7214	0.7629	0.7989
Q = 3	0.2388	0.3074	0.3437	0.4504	0.5099	0.5823	0.6335	0.6758	0.7138
Q = 4	0.2046	0.2649	0.2971	0.3934	0.4483	0.5163	0.5655	0.6070	0.6449
Q = 5	0.1794	0.2332	0.2622	0.3498	0.4005	0.4643	0.5111	0.5511	0.5881
Q = 6	0.1599	0.2085	0.2349	0.3152	0.3623	0.4221	0.4664	0.5047	0.5405
Q = 7	0.1443	0.1887	0.2129	0.2870	0.3309	0.3870	0.4290	0.4656	0.5000
Q = 8	0.1316	0.1724	0.1947	0.2636	0.3046	0.3574	0.3972	0.4321	0.4651
Q = 9	0.1209	0.1587	0.1795	0.2437	0.2822	0.3321	0.3699	0.4032	0.4348
Q = 10	0.1119	0.1471	0.1665	0.2267	0.2629	0.3101	0.3461	0.3779	0.4082
Q = 20	0.0642	0.0852	0.0968	0.1338	0.1566	0.1870	0.2108	0.2323	0.2532
Q = 50	0.0283	0.0377	0.0431	0.0602	0.0709	0.0855	0.0972	0.1078	0.1184
Q = 100	0.0147	0.0196	0.0224	0.0314	0.0371	0.0449	0.0512	0.0570	0.0627
P = 8									
Q = 1	0.4217	0.5157	0.5623	0.6877	0.7499	0.8178	0.8603	0.8918	0.9170
Q = 2	0.3349	0.4150	0.4560	0.5709	0.6316	0.7022	0.7499	0.7877	0.8204
Q = 3	0.2815	0.3518	0.3883	0.4931	0.5504	0.6191	0.6670	0.7064	0.7414
Q = 4	0.2441	0.3067	0.3396	0.4356	0.4892	0.5548	0.6016	0.6407	0.6762
Q = 5	0.2159	0.2725	0.3024	0.3909	0.4410	0.5032	0.5482	0.5864	0.6215
Q = 6	0.1938	0.2454	0.2729	0.3548	0.4018	0.4606	0.5037	0.5407	0.5749
Q = 7	0.1759	0.2234	0.2488	0.3250	0.3691	0.4249	0.4661	0.5016	0.5349
Q = 8	0.1612	0.2051	0.2287	0.3000	0.3415	0.3944	0.4337	0.4679	0.5000
Q = 9	0.1487	0.1897	0.2117	0.2786	0.3178	0.3680	0.4056	0.4384	0.4694
Q = 10	0.1381	0.1764	0.1971	0.2601	0.2973	0.3450	0.3809	0.4124	0.4423
Q = 20	0.0809	0.1042	0.1170	0.1568	0.1809	0.2127	0.2372	0.2592	0.2806
Q = 50	0.0362	0.0470	0.0529	0.0718	0.0835	0.0991	0.1115	0.1227	0.1338
Q = 100	0.0189	0.0245	0.0277	0.0377	0.0440	0.0525	0.0592	0.0653	0.0715
P = 9									
Q = 1	0.4642	0.5550	0.5995	0.7169	0.7743	0.8363	0.8748	0.9032	0.9259
Q = 2	0.3763	0.4557	0.4956	0.6058	0.6632	0.7290	0.7731	0.8079	0.8377
Q = 3	0.3207	0.3915	0.4277	0.5299	0.5848	0.6499	0.6950	0.7317	0.7642
Q = 4	0.2808	0.3448	0.3778	0.4727	0.5247	0.5876	0.6321	0.6691	0.7024
Q = 5	0.2503	0.3087	0.3391	0.4274	0.4766	0.5369	0.5801	0.6165	0.6498
Q = 6	0.2262	0.2799	0.3080	0.3904	0.4369	0.4945	0.5363	0.5718	0.6046
Q = 7	0.2064	0.2561	0.2823	0.3596	0.4035	0.4585	0.4987	0.5331	0.5652
Q = 8	0.1899	0.2362	0.2607	0.3334	0.3750	0.4274	0.4661	0.4994	0.5306
Q = 9	0.1760	0.2193	0.2422	0.3108	0.3504	0.4004	0.4376	0.4698	0.5000
Q = 10	0.1639	0.2047	0.2263	0.2912	0.3288	0.3767	0.4124	0.4434	0.4727
Q = 20	0.0978	0.1232	0.1370	0.1791	0.2042	0.2370	0.2621	0.2844	0.3059
Q = 50	0.0445	0.0564	0.0630	0.0834	0.0959	0.1124	0.1254	0.1371	0.1486
Q = 100	0.0233	0.0297	0.0332	0.0442	0.0509	0.0600	0.0671	0.0736	0.0800
P = 10									
Q = 1	0.5012	0.5887	0.6310	0.7411	0.7943	0.8513	0.8866	0.9124	0.9330
Q = 2	0.4134	0.4914	0.5302	0.6356	0.6898	0.7514	0.7923	0.8245	0.8520
Q = 3	0.3564	0.4271	0.4627	0.5619	0.6145	0.6762	0.7186	0.7530	0.7833
Q = 4	0.3149	0.3794	0.4122	0.5054	0.5557	0.6161	0.6584	0.6933	0.7247
Q = 5	0.2827	0.3421	0.3726	0.4600	0.5080	0.5664	0.6079	0.6426	0.6742
Q = 6	0.2568	0.3118	0.3403	0.4226	0.4683	0.5244	0.5648	0.5990	0.6303
Q = 7	0.2355	0.2868	0.3134	0.3910	0.4346	0.4884	0.5276	0.5609	0.5918
Q = 8	0.2176	0.2656	0.2906	0.3640	0.4055	0.4572	0.4951	0.5275	0.5577
Q = 9	0.2023	0.2474	0.2710	0.3406	0.3802	0.4298	0.4664	0.4978	0.5273
Q = 10	0.1890	0.2316	0.2540	0.3201	0.3579	0.4056	0.4408	0.4713	0.5000
Q = 20	0.1148	0.1420	0.1565	0.2005	0.2264	0.2599	0.2854	0.3079	0.3296

Valores de la Probabilidad

	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
P = 10									
Q = 50	0.0530	0.0660	0.0731	0.0949	0.1081	0.1255	0.1389	0.1511	0.1630
Q = 100	0.0279	0.0350	0.0388	0.0506	0.0578	0.0674	0.0749	0.0817	0.0884
P = 20									
Q = 1	0.7079	0.7673	0.7943	0.8609	0.8913	0.9227	0.9416	0.9552	0.9659
Q = 2	0.6370	0.6957	0.7232	0.7933	0.8271	0.8640	0.8878	0.9060	0.9214
Q = 3	0.5849	0.6423	0.6695	0.7405	0.7758	0.8154	0.8416	0.8624	0.8803
Q = 4	0.5431	0.5988	0.6255	0.6964	0.7322	0.7732	0.8008	0.8231	0.8427
Q = 5	0.5080	0.5621	0.5882	0.6582	0.6941	0.7358	0.7643	0.7875	0.8081
Q = 6	0.4778	0.5302	0.5557	0.6246	0.6603	0.7022	0.7311	0.7549	0.7762
Q = 7	0.4515	0.5023	0.5271	0.5946	0.6300	0.6718	0.7009	0.7250	0.7468
Q = 8	0.4282	0.4774	0.5016	0.5677	0.6026	0.6441	0.6732	0.6974	0.7194
Q = 9	0.4074	0.4551	0.4786	0.5433	0.5776	0.6187	0.6477	0.6719	0.6941
Q = 10	0.3887	0.4349	0.4578	0.5210	0.5548	0.5953	0.6241	0.6483	0.6704
Q = 20	0.2683	0.3034	0.3211	0.3714	0.3991	0.4333	0.4584	0.4799	0.5000
Q = 50	0.1407	0.1607	0.1711	0.2011	0.2181	0.2397	0.2559	0.2701	0.2837
Q = 100	0.0787	0.0904	0.0964	0.1143	0.1245	0.1376	0.1475	0.1563	0.1648
P = 50									
Q = 1	0.8710	0.8995	0.9120	0.9418	0.9550	0.9683	0.9762	0.9818	0.9862
Q = 2	0.8329	0.8632	0.8768	0.9103	0.9259	0.9424	0.9528	0.9607	0.9673
Q = 3	0.8023	0.8337	0.8480	0.8838	0.9009	0.9195	0.9315	0.9409	0.9489
Q = 4	0.7758	0.8079	0.8227	0.8602	0.8783	0.8984	0.9116	0.9221	0.9312
Q = 5	0.7521	0.7847	0.7998	0.8385	0.8574	0.8787	0.8928	0.9041	0.9140
Q = 6	0.7305	0.7634	0.7787	0.8183	0.8379	0.8601	0.8750	0.8869	0.8975
Q = 7	0.7106	0.7437	0.7592	0.7994	0.8195	0.8424	0.8579	0.8705	0.8816
Q = 8	0.6922	0.7253	0.7409	0.7817	0.8021	0.8256	0.8416	0.8546	0.8662
Q = 9	0.6749	0.7081	0.7238	0.7649	0.7856	0.8096	0.8260	0.8394	0.8514
Q = 10	0.6587	0.6918	0.7075	0.7489	0.7699	0.7942	0.8110	0.8247	0.8370
Q = 20	0.5353	0.5666	0.5818	0.6226	0.6440	0.6695	0.6874	0.7025	0.7163
Q = 50	0.3487	0.3730	0.3850	0.4181	0.4360	0.4579	0.4737	0.4873	0.5000
Q = 100	0.2223	0.2393	0.2477	0.2715	0.2846	0.3007	0.3126	0.3229	0.3326
P = 100									
Q = 1	0.9333	0.9484	0.9550	0.9705	0.9772	0.9840	0.9880	0.9909	0.9931
Q = 2	0.9122	0.9287	0.9361	0.9539	0.9620	0.9706	0.9760	0.9801	0.9834
Q = 3	0.8948	0.9123	0.9201	0.9396	0.9487	0.9585	0.9648	0.9697	0.9739
Q = 4	0.8792	0.8975	0.9058	0.9264	0.9363	0.9471	0.9542	0.9597	0.9645
Q = 5	0.8649	0.8838	0.8924	0.9141	0.9246	0.9362	0.9439	0.9499	0.9552
Q = 6	0.8516	0.8710	0.8799	0.9025	0.9135	0.9257	0.9339	0.9404	0.9462
Q = 7	0.8391	0.8589	0.8680	0.8913	0.9028	0.9156	0.9242	0.9312	0.9373
Q = 8	0.8271	0.8473	0.8567	0.8806	0.8924	0.9058	0.9148	0.9221	0.9285
Q = 9	0.8158	0.8363	0.8458	0.8703	0.8825	0.8963	0.9056	0.9132	0.9200
Q = 10	0.8049	0.8257	0.8353	0.8603	0.8728	0.8870	0.8967	0.9045	0.9116
Q = 20	0.7143	0.7364	0.7469	0.7746	0.7888	0.8053	0.8169	0.8265	0.8352
Q = 50	0.5431	0.5643	0.5745	0.6023	0.6169	0.6345	0.6470	0.6576	0.6674
Q = 100	0.3919	0.4096	0.4182	0.4420	0.4547	0.4702	0.4814	0.4910	0.5000

CUANTILES DE LA DISTRIBUCION t

Las anotaciones de la tabla son valores de t_p donde :

$$P\left[t \le t_p\right] = \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{(v\pi)^{1/2}\,\Gamma(v/2)} \int_{-\infty}^{t_p} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dx .$$

Valores de P

GL: v	0.60 / 0.95	0.70 / 0.975	0.75 / 0.99	0.80 / 0.995	0.85 / 0.999	0.90 / 0.9995
1	0.3249	0.7266	1.0005	1.3763	1.9626	3.0776
	6.3134	12.7058	31.8193	63.6539	318.2851	636.5342
2	0.2887	0.6172	0.8165	1.0606	1.3862	1.8855
	2.9199	4.3025	6.9642	9.9245	22.3258	31.5959
3	0.2767	0.5844	0.7649	0.9784	1.2497	1.6377
	2.3532	3.1823	4.5405	5.8407	10.2148	12.9239
4	0.2707	0.5687	0.7407	0.9409	1.1895	1.5332
	2.1318	2.7763	3.7468	4.6043	7.1732	8.6101
5	0.2672	0.5594	0.7267	0.9195	1.1557	1.4758
	2.0150	2.5705	3.3650	4.0323	5.8935	6.8690
6	0.2648	0.5534	0.7175	0.9057	1.1341	1.4397
	1.9431	2.4468	3.1427	3.7075	5.2077	5.9589
7	0.2632	0.5491	0.7111	0.8960	1.1191	1.4149
	1.8945	2.3646	2.9980	3.4996	4.7854	5.4079
8	0.2619	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968
	1.8595	2.3059	2.8966	3.3555	4.5009	5.0413
9	0.2610	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830
	1.8330	2.2621	2.8215	3.2499	4.2969	4.7811
10	0.2602	0.5415	0.6998	0.8790	1.0930	1.3721
	1.8124	2.2282	2.7639	3.1694	4.1438	4.5870
11	0.2596	0.5400	0.6974	0.8755	1.0876	1.3634
	1.7958	2.2010	2.7181	3.1059	4.0249	4.4370
12	0.2590	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562
	1.7822	2.1789	2.6811	3.0547	3.9298	4.3178
13	0.2586	0.5375	0.6938	0.8701	1.0794	1.3501
	1.7709	2.1604	2.6504	3.0124	3.8521	4.2209
14	0.2582	0.5366	0.6924	0.8680	1.0762	1.3450
	1.7613	2.1448	2.6246	2.9769	3.7875	4.1405
15	0.2579	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3405
	1.7530	2.1315	2.6026	2.9469	3.7329	4.0728

Valores de P

GL: v	0.60 / 0.95	0.70 / 0.975	0.75 / 0.99	0.80 / 0.995	0.85 / 0.999	0.90 / 0.9995
16	0.2576	0.5350	0.6901	0.8646	1.0711	1.3367
	1.7458	2.1199	2.5835	2.9209	3.6863	4.0151
17	0.2574	0.5344	0.6892	0.8633	1.0690	1.3333
	1.7396	2.1099	2.5670	2.8983	3.6459	3.9653
18	0.2571	0.5338	0.6883	0.8620	1.0671	1.3303
	1.7340	2.1010	2.5525	2.8785	3.6106	3.9217
19	0.2569	0.5333	0.6876	0.8609	1.0655	1.3277
	1.7291	2.0931	2.5396	2.8610	3.5795	3.8835
20	0.2568	0.5329	0.6869	0.8599	1.0640	1.3253
	1.7247	2.0860	2.5281	2.8454	3.5519	3.8496
21	0.2566	0.5325	0.6863	0.8590	1.0626	1.3231
	1.7207	2.0796	2.5177	2.8315	3.5273	3.8193
22	0.2564	0.5321	0.6858	0.8582	1.0614	1.3212
	1.7171	2.0739	2.5084	2.8189	3.5051	3.7923
23	0.2563	0.5318	0.6853	0.8575	1.0603	1.3194
	1.7138	2.0687	2.5000	2.8074	3.4851	3.7677
24	0.2562	0.5315	0.6848	0.8568	1.0593	1.3178
	1.7109	2.0639	2.4923	2.7970	3.4669	3.7455
25	0.2561	0.5312	0.6844	0.8562	1.0583	1.3163
	1.7081	2.0596	2.4852	2.7875	3.4503	3.7252
26	0.2560	0.5309	0.6840	0.8556	1.0575	1.3149
	1.7056	2.0556	2.4787	2.7788	3.4351	3.7067
27	0.2559	0.5307	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137
	1.7033	2.0519	2.4727	2.7708	3.4211	3.6896
28	0.2558	0.5304	0.6833	0.8546	1.0560	1.3125
	1.7011	2.0484	2.4672	2.7633	3.4082	3.6740
29	0.2557	0.5302	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114
	1.6991	2.0452	2.4621	2.7564	3.3964	3.6595
30	0.2556	0.5300	0.6827	0.8537	1.0546	1.3104
	1.6972	2.0423	2.4573	2.7501	3.3853	3.6460
31	0.2555	0.5299	0.6825	0.8533	1.0540	1.3094
	1.6955	2.0395	2.4529	2.7442	3.3750	3.6335
32	0.2555	0.5297	0.6822	0.8530	1.0535	1.3086
	1.6939	2.0369	2.4487	2.7386	3.3654	3.6218
33	0.2554	0.5295	0.6820	0.8526	1.0530	1.3077
	1.6924	2.0345	2.4449	2.7334	3.3564	3.6110
34	0.2553	0.5294	0.6818	0.8523	1.0525	1.3069
	1.6909	2.0323	2.4412	2.7285	3.3480	3.6008
35	0.2553	0.5292	0.6815	0.8520	1.0520	1.3062
	1.6896	2.0301	2.4378	2.7239	3.3401	3.5912
36	0.2552	0.5291	0.6813	0.8517	1.0516	1.3055
	1.6883	2.0281	2.4345	2.7196	3.3327	3.5822
37	0.2552	0.5290	0.6812	0.8514	1.0511	1.3048
	1.6871	2.0262	2.4315	2.7155	3.3257	3.5737
38	0.2551	0.5289	0.6810	0.8512	1.0508	1.3042
	1.6859	2.0244	2.4286	2.7116	3.3191	3.5658
39	0.2551	0.5287	0.6808	0.8509	1.0504	1.3036
	1.6849	2.0227	2.4259	2.7080	3.3129	3.5582
40	0.2550	0.5286	0.6807	0.8507	1.0500	1.3031
	1.6838	2.0211	2.4233	2.7045	3.3070	3.5510

Valores de P

GL:v	0.60	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
41	0.2550	0.5285	0.6805	0.8505	1.0497	1.3025
	1.6829	2.0196	2.4208	2.7012	3.3014	3.5442
42	0.2550	0.5284	0.6804	0.8502	1.0494	1.3020
	1.6819	2.0181	2.4185	2.6981	3.2961	3.5378
43	0.2549	0.5283	0.6802	0.8500	1.0491	1.3015
	1.6811	2.0167	2.4163	2.6952	3.2910	3.5316
44	0.2549	0.5282	0.6801	0.8499	1.0488	1.3011
	1.6802	2.0154	2.4142	2.6923	3.2862	3.5258
45	0.2549	0.5282	0.6800	0.8497	1.0485	1.3006
	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896	3.2816	3.5204
46	0.2548	0.5281	0.6799	0.8495	1.0482	1.3002
	1.6787	2.0129	2.4102	2.6871	3.2772	3.5151
47	0.2548	0.5280	0.6797	0.8493	1.0480	1.2998
	1.6779	2.0117	2.4084	2.6846	3.2730	3.5100
48	0.2548	0.5279	0.6796	0.8492	1.0477	1.2994
	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822	3.2690	3.5052
49	0.2547	0.5278	0.6795	0.8490	1.0475	1.2991
	1.6765	2.0096	2.4049	2.6800	3.2652	3.5005
50	0.2547	0.5278	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987
	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.2615	3.4961
55	0.2546	0.5275	0.6790	0.8482	1.0463	1.2971
	1.6730	2.0041	2.3961	2.6683	3.2452	3.4765
60	0.2545	0.5272	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958
	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2318	3.4602
65	0.2544	0.5270	0.6783	0.8472	1.0448	1.2947
	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536	3.2205	3.4466
70	0.2543	0.5268	0.6780	0.8468	1.0442	1.2938
	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	3.2108	3.4350
75	0.2543	0.5266	0.6778	0.8464	1.0436	1.2929
	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430	3.2025	3.4250
80	0.2542	0.5265	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922
	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.1953	3.4163
85	0.2541	0.5264	0.6774	0.8459	1.0428	1.2916
	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349	3.1889	3.4087
90	0.2541	0.5263	0.6772	0.8456	1.0424	1.2910
	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	3.1833	3.4019
95	0.2541	0.5262	0.6771	0.8454	1.0421	1.2905
	1.6611	1.9853	2.3662	2.6286	3.1783	3.3959
100	0.2540	0.5261	0.6769	0.8452	1.0418	1.2901
	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.1737	3.3905
200	0.2537	0.5252	0.6757	0.8434	1.0391	1.2858
	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	3.1315	3.3398
300	0.2536	0.5249	0.6753	0.8428	1.0382	1.2844
	1.6499	1.9679	2.3388	2.5923	3.1176	3.3232
400	0.2535	0.5248	0.6751	0.8425	1.0378	1.2837
	1.6487	1.9659	2.3357	2.5882	3.1107	3.3150
500	0.2534	0.5247	0.6750	0.8423	1.0375	1.2832
	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857	3.1066	3.3100
600	0.2534	0.5247	0.6749	0.8422	1.0373	1.2829
	1.6474	1.9639	2.3326	2.5840	3.1038	3.3068

Valores de P

GL:v	0.60	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
700	0.2535	0.5247	0.6749	0.8423	1.0371	1.2827
	1.6470	1.9633	2.3317	2.5828	3.1019	3.3044
800	0.2535	0.5245	0.6747	0.8419	1.0372	1.2827
	1.6468	1.9630	2.3310	2.5820	3.1005	3.3027
900	0.2534	0.5246	0.6748	0.8420	1.0370	1.2825
	1.6465	1.9626	2.3305	2.5813	3.0993	3.3013
1000	0.2534	0.5245	0.6747	0.8420	1.0370	1.2824
	1.6464	1.9624	2.3301	2.5808	3.0984	3.3002

CUANTILES DE LA DISTRIBUCION F

$$P\left[X \le X_0\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\alpha^{\alpha/2}\,\beta^{\beta/2}}{\Gamma(\alpha/2)\,\Gamma(\beta/2)}\int_0^{X_0}\frac{y^{(\alpha/2)-1}}{(\beta+\alpha y)^{(\alpha+\beta)/2}}\,dy$$

Probabilidades

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 1						
β = 1	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0015	0.0062
	0.0251	0.1716	1.0000	5.8284	39.8634	161.4472
	647.8215	4053.4300	16256.0	419429.0	2097151.0	
β = 2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0050
	0.0202	0.1333	0.6667	2.5714	8.5263	18.5128
	38.5063	98.5027	198.5021	998.4901	1998.3830	
β = 3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0046
	0.0187	0.1220	0.5851	2.0239	5.5383	10.1279
	17.4434	34.1163	55.5520	167.0233	266.5193	
β = 4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0045
	0.0179	0.1165	0.5486	1.8074	4.5448	7.7086
	12.2179	21.1977	31.3328	74.1355	106.2100	
β = 5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0043
	0.0175	0.1134	0.5281	1.6925	4.0604	6.6079
	10.0070	16.2582	22.7848	47.1798	63.6066	
β = 6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0043
	0.0172	0.1113	0.5149	1.6214	3.7759	5.9874
	8.8131	13.7450	18.6350	35.5069	46.0787	
β = 7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0042
	0.0170	0.1099	0.5057	1.5732	3.5894	5.5914
	8.0727	12.2464	16.2355	29.2447	36.9857	
β = 8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0042
	0.0168	0.1088	0.4990	1.5384	3.4579	5.3177
	7.5709	11.2586	14.6882	25.4144	31.5537	
β = 9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0042
	0.0167	0.1080	0.4938	1.5121	3.3603	5.1173
	7.2093	10.5614	13.6136	22.8568	27.9897	
β = 10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0041
	0.0166	0.1073	0.4897	1.4915	3.2850	4.9646
	6.9367	10.0443	12.8265	21.0393	25.4910	
β = 20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0040
	0.0162	0.1044	0.4719	1.4037	2.9747	4.3512
	5.8715	8.0960	9.9439	14.8186	17.1890	

	Probabilidades					
	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
$\alpha =$ 1						
$\beta =$ 50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0040
	0.0160	0.1027	0.4616	1.3546	2.8087	4.0343
	5.3403	7.1706	8.6258	12.2220	13.8614	
$\beta =$ 100	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0040
	0.0159	0.1021	0.4583	1.3388	2.7563	3.9361
	5.1786	6.8953	8.2406	11.4953	12.9477	
$\alpha =$ 2						
$\beta =$ 1	0.0005	0.0010	0.0050	0.0102	0.0260	0.0540
	0.1173	0.3889	1.5000	7.5000	49.5001	199.5050
	799.6347	5004.6400	20067.930	524287.30	4194304.0	
$\beta =$ 2	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0256	0.0526
	0.1111	0.3333	1.0000	3.0000	9.0000	19.0000
	39.0002	99.0013	199.0050	999.0726	1999.1450	
$\beta =$ 3	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0255	0.0522
	0.1091	0.3171	0.8811	2.2798	5.4624	9.5521
	16.0441	30.8166	49.7994	148.4966	236.5873	
$\beta =$ 4	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0255	0.0520
	0.1082	0.3094	0.8284	2.0000	4.3246	6.9443
	10.6491	18.0000	26.2843	61.2441	87.4356	
$\beta =$ 5	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0254	0.0518
	0.1076	0.3049	0.7988	1.8528	3.7797	5.7861
	8.4336	13.2740	18.3139	37.1216	49.7786	
$\beta =$ 6	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0254	0.0517
	0.1072	0.3019	0.7798	1.7622	3.4633	5.1432
	7.2599	10.9248	14.5441	26.9996	34.7956	
$\beta =$ 7	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0254	0.0517
	0.1070	0.2998	0.7665	1.7010	3.2574	4.7374
	6.5415	9.5466	12.4040	21.6887	27.2043	
$\beta =$ 8	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0254	0.0516
	0.1068	0.2983	0.7568	1.6569	3.1131	4.4590
	6.0595	8.6491	11.0424	18.4934	22.7485	
$\beta =$ 9	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0254	0.0516
	0.1066	0.2971	0.7494	1.6236	3.0065	4.2565
	5.7147	8.0215	10.1067	16.3869	19.8646	
$\beta =$ 10	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0254	0.0516
	0.1065	0.2961	0.7435	1.5975	2.9245	4.1028
	5.4564	7.5594	9.4270	14.9052	17.8645	
$\beta =$ 20	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0253	0.0514
	0.1059	0.2919	0.7177	1.4870	2.5893	3.4928
	4.4613	5.8489	6.9865	9.9525	11.3843	
$\beta =$ 50	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0253	0.0513
	0.1056	0.2893	0.7028	1.4254	2.4119	3.1826
	3.9749	5.0566	5.9016	7.9564	8.8827	

		Probabilidades					
		0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
		0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
		0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 2							
	β = 100	0.0005	0.0010	0.0050	0.0101	0.0253	0.0513
		0.1055	0.2885	0.6980	1.4057	2.3564	3.0873
		3.8284	4.8239	5.5892	7.4076	8.2089	
α = 3							
	β = 1	0.0038	0.0060	0.0190	0.0293	0.0573	0.0987
		0.1806	0.4941	1.7092	8.1998	53.5933	215.7120
		864.2935	5418.6650	21844.990	699050.70	2156100	
	β = 2	0.0042	0.0067	0.0201	0.0325	0.0623	0.1047
		0.1831	0.4386	1.1349	3.1534	9.1618	19.1644
		39.1659	99.1680	199.1716	999.2865	1999.4790	
	β = 3	0.0045	0.0071	0.0211	0.0339	0.0648	0.1078
		0.1855	0.4245	1.0000	2.3556	5.3908	9.2766
		15.4392	29.4568	47.4676	141.1060	224.6782	
	β = 4	0.0046	0.0073	0.0216	0.0348	0.0662	0.1097
		0.1872	0.4184	0.9405	2.0467	4.1909	6.5914
		9.9792	16.6944	24.2592	56.1761	80.0861	
	β = 5	0.0047	0.0074	0.0220	0.0354	0.0672	0.1109
		0.1884	0.4150	0.9071	1.8843	3.6195	5.4094
		7.7636	12.0600	16.5298	33.2018	44.4195	
	β = 6	0.0047	0.0075	0.0223	0.0358	0.0679	0.1118
		0.1892	0.4129	0.8858	1.7844	3.2888	4.7571
		6.5988	9.7795	12.9166	23.7029	30.4517	
	β = 7	0.0048	0.0076	0.0225	0.0361	0.0684	0.1125
		0.1899	0.4115	0.8709	1.7169	3.0741	4.3468
		5.8898	8.4513	10.8824	18.7720	23.4560	
	β = 8	0.0048	0.0077	0.0227	0.0364	0.0688	0.1131
		0.1904	0.4104	0.8600	1.6683	2.9238	4.0662
		5.4160	7.5910	9.5965	15.8293	19.3856	
	β = 9	0.0048	0.0077	0.0228	0.0366	0.0691	0.1135
		0.1908	0.4097	0.8517	1.6315	2.8129	3.8625
		5.0781	6.9919	8.7171	13.9016	16.7693	
	β = 10	0.0049	0.0077	0.0229	0.0367	0.0694	0.1138
		0.1912	0.4091	0.8451	1.6029	2.7277	3.7083
		4.8256	6.5523	8.0808	12.5526	14.9649	
	β = 20	0.0050	0.0079	0.0234	0.0375	0.0706	0.1155
		0.1929	0.4065	0.8162	1.4808	2.3801	3.0984
		3.8587	4.9382	5.8177	8.0983	9.1953	
	β = 50	0.0050	0.0080	0.0237	0.0379	0.0714	0.1165
		0.1940	0.4051	0.7995	1.4128	2.1967	2.7900
		3.3902	4.1993	4.8259	6.3363	7.0132	
	β = 100	0.0051	0.0081	0.0238	0.0381	0.0717	0.1169
		0.1944	0.4046	0.7941	1.3909	2.1394	2.6955
		3.2496	3.9837	4.5424	5.8568	6.4317	

	Probabilidades					
	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 4						
β = 1	0.0094	0.0135	0.0319	0.0472	0.0818	0.1297
	0.2200	0.5533	1.8227	8.5810	55.8341	224.5974
	899.8156	5637.2560	22794.880	699050.70	2255700	
β = 2	0.0114	0.0163	0.0380	0.0556	0.0939	0.1440
	0.2312	0.5000	1.2071	3.2321	9.2434	19.2469
	39.2485	99.2504	199.2572	999.3342	1999.6460	
β = 3	0.0125	0.0178	0.0412	0.0599	0.1002	0.1517
	0.2386	0.4886	1.0632	2.3901	5.3426	9.1172
	15.1010	28.7100	46.1949	137.0966	218.2280	
β = 4	0.0131	0.0187	0.0432	0.0626	0.1041	0.1565
	0.2435	0.4845	1.0000	2.0642	4.1073	6.3882
	9.6045	15.9771	23.1545	53.4347	76.1182	
β = 5	0.0136	0.0193	0.0445	0.0644	0.1068	0.1598
	0.2469	0.4826	0.9646	1.8927	3.5202	5.1922
	7.3879	11.3919	15.5561	31.0844	41.5316	
β = 6	0.0139	0.0198	0.0455	0.0658	0.1087	0.1623
	0.2494	0.4816	0.9419	1.7872	3.1808	4.5337
	6.2272	9.1483	12.0275	21.9232	28.1136	
β = 7	0.0142	0.0201	0.0462	0.0668	0.1102	0.1641
	0.2513	0.4810	0.9262	1.7157	2.9605	4.1203
	5.5226	7.8467	10.0505	17.1977	21.4398	
β = 8	0.0143	0.0204	0.0468	0.0676	0.1114	0.1655
	0.2528	0.4807	0.9146	1.6642	2.8064	3.8379
	5.0526	7.0061	8.8051	14.3914	17.5774	
β = 9	0.0145	0.0206	0.0473	0.0682	0.1123	0.1667
	0.2541	0.4805	0.9058	1.6253	2.6927	3.6331
	4.7181	6.4221	7.9559	12.5602	15.1053	
β = 10	0.0146	0.0208	0.0477	0.0687	0.1131	0.1677
	0.2551	0.4803	0.8988	1.5949	2.6053	3.4780
	4.4683	5.9943	7.3428	11.2826	13.4063	
β = 20	0.0153	0.0217	0.0496	0.0713	0.1168	0.1723
	0.2601	0.4801	0.8683	1.4652	2.2489	2.8661
	3.5147	4.4307	5.1743	7.0960	8.0182	
β = 50	0.0157	0.0223	0.0508	0.0730	0.1193	0.1755
	0.2635	0.4803	0.8507	1.3927	2.0608	2.5572
	3.0544	3.7195	4.2316	5.4592	6.0071	
β = 100	0.0158	0.0225	0.0513	0.0737	0.1202	0.1766
	0.2647	0.4805	0.8449	1.3693	2.0019	2.4626
	2.9166	3.5127	3.9634	5.0166	5.4750	
α = 5						
β = 1	0.0157	0.0212	0.0499	0.0615	0.0999	0.1513
	0.2463	0.5909	1.8937	8.8198	57.2405	230.1550
	922.0308	5793.0400	23301.490	1048576.0	2309100	

Probabilidades

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 5						
β = 2	0.0201	0.0269	0.0546	0.0753	0.1186	0.1728
	0.2646	0.5397	1.2519	3.2799	9.2927	19.2966
	39.2985	99.3006	199.3097	999.4343	2000.6990	
β = 3	0.0225	0.0301	0.0605	0.0829	0.1288	0.1849
	0.2763	0.5307	1.1024	2.4095	5.3092	9.0134
	14.8848	28.2373	45.3919	134.5780	214.1840	
β = 4	0.0241	0.0322	0.0643	0.0878	0.1354	0.1926
	0.2841	0.5284	1.0367	2.0723	4.0506	6.2561
	9.3645	15.5219	22.4565	51.7105	73.6252	
β = 5	0.0252	0.0336	0.0669	0.0912	0.1399	0.1980
	0.2896	0.5278	1.0000	1.8947	3.4530	5.0503
	7.1464	10.9670	14.9396	29.7518	39.7168	
β = 6	0.0260	0.0347	0.0689	0.0937	0.1433	0.2020
	0.2937	0.5279	0.9765	1.7852	3.1075	4.3874
	5.9876	8.7459	11.4637	20.8023	26.6437	
β = 7	0.0266	0.0355	0.0704	0.0956	0.1459	0.2051
	0.2969	0.5281	0.9603	1.7111	2.8833	3.9715
	5.2852	7.4604	9.5221	16.2056	20.1716	
β = 8	0.0271	0.0362	0.0716	0.0972	0.1480	0.2075
	0.2995	0.5285	0.9483	1.6575	2.7265	3.6875
	4.8173	6.6318	8.3018	13.4845	16.4396	
β = 9	0.0275	0.0367	0.0726	0.0984	0.1497	0.2095
	0.3015	0.5288	0.9392	1.6170	2.6106	3.4817
	4.4844	6.0569	7.4712	11.7135	14.0577	
β = 10	0.0279	0.0372	0.0734	0.0995	0.1511	0.2112
	0.3033	0.5291	0.9319	1.5853	2.5216	3.3258
	4.2361	5.6363	6.8724	10.4806	12.4246	
β = 20	0.0296	0.0394	0.0775	0.1047	0.1580	0.2194
	0.3119	0.5314	0.9004	1.4500	2.1582	2.7109
	3.2891	4.1027	4.7616	6.4605	7.2746	
β = 50	0.0308	0.0409	0.0803	0.1083	0.1628	0.2250
	0.3178	0.5333	0.8822	1.3739	1.9660	2.4004
	2.8327	3.4077	3.8486	4.9013	5.3697	
β = 100	0.0312	0.0415	0.0813	0.1095	0.1645	0.2270
	0.3199	0.5341	0.8762	1.3493	1.9057	2.3053
	2.6961	3.2059	3.5895	4.4815	4.8683	
α = 6						
β = 1	0.0217	0.0282	0.0597	0.0728	0.1135	0.1670
	0.2648	0.6167	1.9422	8.9833	58.2075	234.0211
	937.7371	5874.2140	23831.130	2097151.0	2339300	
β = 2	0.0287	0.0370	0.0688	0.0915	0.1377	0.1944
	0.2887	0.5675	1.2824	3.3121	9.3255	19.3297
	39.3321	99.3365	199.3384	999.5010	1999.8120	

Probabilidades

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 6						
β = 3	0.0328	0.0422	0.0774	0.1023	0.1515	0.2102
	0.3041	0.5604	1.1289	2.4218	5.2847	8.9407
	14.7347	27.9108	44.8389	132.8472	211.3978	
β = 4	0.0356	0.0456	0.0831	0.1093	0.1606	0.2206
	0.3144	0.5595	1.0617	2.0766	4.0098	6.1631
	9.1973	15.2069	21.9747	50.5240	71.9105	
β = 5	0.0375	0.0481	0.0872	0.1143	0.1670	0.2279
	0.3218	0.5602	1.0240	1.8945	3.4045	4.9503
	6.9777	10.6723	14.5133	28.8339	38.4677	
β = 6	0.0390	0.0499	0.0903	0.1181	0.1718	0.2334
	0.3274	0.5611	1.0000	1.7821	3.0546	4.2839
	5.8198	8.4661	11.0730	20.0294	25.6312	
β = 7	0.0402	0.0514	0.0927	0.1211	0.1756	0.2377
	0.3317	0.5621	0.9833	1.7059	2.8274	3.8660
	5.1186	7.1914	9.1553	15.5206	19.2974	
β = 8	0.0411	0.0525	0.0946	0.1234	0.1786	0.2411
	0.3352	0.5631	0.9711	1.6508	2.6683	3.5806
	4.6517	6.3707	7.9520	12.8579	15.6546	
β = 9	0.0419	0.0535	0.0962	0.1254	0.1810	0.2440
	0.3381	0.5639	0.9617	1.6091	2.5509	3.3738
	4.3197	5.8018	7.1339	11.1280	13.3345	
β = 10	0.0425	0.0543	0.0976	0.1270	0.1831	0.2463
	0.3405	0.5647	0.9544	1.5765	2.4606	3.2172
	4.0721	5.3858	6.5446	9.9255	11.7464	
β = 20	0.0458	0.0584	0.1043	0.1352	0.1935	0.2581
	0.3526	0.5692	0.9221	1.4366	2.0913	2.5990
	3.1283	3.8714	4.4721	6.0186	6.7588	
β = 50	0.0481	0.0613	0.1091	0.1410	0.2008	0.2664
	0.3611	0.5728	0.9035	1.3577	1.8954	2.2864
	2.6736	3.1864	3.5785	4.5117	4.9258	
β = 100	0.0490	0.0624	0.1108	0.1431	0.2034	0.2694
	0.3641	0.5743	0.8974	1.3321	1.8339	2.1906
	2.5374	2.9877	3.3252	4.1071	4.4451	
α = 7						
β = 1	0.0270	0.0342	0.0616	0.0817	0.1239	0.1788
	0.2786	0.6356	1.9774	9.1021	58.9086	236.7968
	948.7949	5957.6790	24105.050	1048576.0	2378100	
β = 2	0.0368	0.0461	0.0806	0.1047	0.1529	0.2111
	0.3070	0.5879	1.3046	3.3352	9.3491	19.3535
	39.3554	99.3580	199.3575	999.5486	2000.8140	
β = 3	0.0426	0.0533	0.0919	0.1183	0.1698	0.2301
	0.3253	0.5824	1.1482	2.4302	5.2662	8.8867
	14.6244	27.6717	44.4341	131.5813	209.3566	

Probabilidades

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
$\alpha =$ 7						
$\beta =$ 4	0.0466	0.0581	0.0995	0.1274	0.1811	0.2427
	0.3378	0.5828	1.0797	2.0790	3.9790	6.0942
	9.0742	14.9758	21.6218	49.6571	70.6585	
$\beta =$ 5	0.0496	0.0617	0.1050	0.1340	0.1892	0.2518
	0.3468	0.5844	1.0414	1.8935	3.3679	4.8759
	6.8531	10.4555	14.2004	28.1622	37.5545	
$\beta =$ 6	0.0518	0.0644	0.1092	0.1391	0.1954	0.2587
	0.3537	0.5862	1.0169	1.7789	3.0145	4.2067
	5.6955	8.2600	10.7859	19.4631	24.8902	
$\beta =$ 7	0.0536	0.0666	0.1125	0.1430	0.2002	0.2641
	0.3591	0.5878	1.0000	1.7011	2.7849	3.7870
	4.9949	6.9928	8.8854	15.0183	18.6570	
$\beta =$ 8	0.0550	0.0683	0.1152	0.1462	0.2041	0.2684
	0.3634	0.5893	0.9876	1.6448	2.6241	3.5005
	4.5286	6.1776	7.6941	12.3979	15.0791	
$\beta =$ 9	0.0562	0.0698	0.1175	0.1488	0.2073	0.2720
	0.3670	0.5906	0.9781	1.6022	2.5053	3.2927
	4.1970	5.6129	6.8849	10.6978	12.8038	
$\beta =$ 10	0.0573	0.0710	0.1193	0.1511	0.2100	0.2750
	0.3700	0.5918	0.9705	1.5688	2.4140	3.1355
	3.9498	5.2001	6.3025	9.5173	11.2484	
$\beta =$ 20	0.0625	0.0773	0.1290	0.1625	0.2239	0.2903
	0.3854	0.5984	0.9378	1.4252	2.0397	2.5140
	3.0074	3.6987	4.2569	5.6919	6.3783	
$\beta =$ 50	0.0663	0.0820	0.1360	0.1707	0.2338	0.3013
	0.3964	0.6036	0.9189	1.3437	1.8405	2.1992
	2.5530	3.0202	3.3765	4.2223	4.5971	
$\beta =$ 100	0.0678	0.0837	0.1386	0.1738	0.2375	0.3054
	0.4005	0.6057	0.9127	1.3172	1.7778	2.1025
	2.4168	2.8233	3.1271	3.8286	4.1311	
α 8						
$\beta =$ 1	0.0317	0.0393	0.0681	0.0888	0.1321	0.1881
	0.2892	0.6500	2.0041	9.1924	59.4397	238.8939
	957.4788	6026.1760	24385.380	599186	2396700	
= 2	0.0440	0.0541	0.0906	0.1156	0.1650	0.2243
	0.3212	0.6036	1.3213	3.3526	9.3668	19.3712
	39.3735	99.3772	199.3837	999.8228	2000.8490	
= 3	0.0516	0.0632	0.1042	0.1317	0.1846	0.2459
	0.3420	0.5994	1.1627	2.4364	5.2517	8.8453
	14.5399	27.4894	44.1260	130.6152	207.8135	
= 4	0.0569	0.0695	0.1136	0.1427	0.1979	0.2606
	0.3563	0.6009	1.0933	2.0805	3.9549	6.0410
	8.9796	14.7989	21.3520	48.9956	69.7023	

	Probabilidades					
	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 8						
β = 5	0.0608	0.0742	0.1205	0.1508	0.2076	0.2712
	0.3668	0.6033	1.0545	1.8923	3.3393	4.8183
	6.7572	10.2893	13.9610	27.6490	36.8571	
β = 6	0.0639	0.0778	0.1258	0.1570	0.2150	0.2793
	0.3748	0.6058	1.0298	1.7760	2.9830	4.1468
	5.5996	8.1017	10.5658	19.0300	24.3238	
β = 7	0.0663	0.0807	0.1300	0.1619	0.2208	0.2857
	0.3811	0.6080	1.0126	1.6969	2.7516	3.7257
	4.8993	6.8401	8.6781	14.6338	18.1671	
β = 8	0.0683	0.0830	0.1334	0.1659	0.2256	0.2909
	0.3862	0.6099	1.0000	1.6396	2.5894	3.4381
	4.4333	6.0289	7.4959	12.0454	14.6384	
β = 9	0.0700	0.0850	0.1363	0.1692	0.2295	0.2951
	0.3904	0.6116	0.9904	1.5961	2.4694	3.2296
	4.1020	5.4671	6.6933	10.3679	12.3972	
β = 10	0.0714	0.0867	0.1387	0.1720	0.2328	0.2988
	0.3940	0.6131	0.9828	1.5621	2.3772	3.0717
	3.8549	5.0567	6.1159	9.2041	10.8666	
β = 20	0.0788	0.0954	0.1513	0.1866	0.2500	0.3174
	0.4124	0.6216	0.9496	1.4153	1.9985	2.4471
	2.9128	3.5644	4.0900	5.4400	6.0852	
β = 50	0.0844	0.1020	0.1607	0.1974	0.2627	0.3311
	0.4259	0.6284	0.9305	1.3317	1.7963	2.1299
	2.4579	2.8900	3.2189	3.9980	4.3427	
β = 100	0.0865	0.1045	0.1643	0.2015	0.2674	0.3362
	0.4309	0.6310	0.9242	1.3044	1.7324	2.0323
	2.3215	2.6943	2.9722	3.6122	3.8877	
α 9						
β = 1	0.0357	0.0438	0.0795	0.0947	0.1387	0.1954
	0.2976	0.6614	2.0250	9.2631	59.8589	240.5536
	963.6540	6061.0220	24385.400	602540	2410100	
= 2	0.0503	0.0610	0.0989	0.1247	0.1750	0.2349
	0.3326	0.6159	1.3344	3.3661	9.3806	19.3850
	39.3870	99.3908	199.4114	999.8504	2000.8770	
= 3	0.0596	0.0719	0.1147	0.1430	0.1969	0.2589
	0.3555	0.6129	1.1741	2.4410	5.2400	8.8123
	14.4731	27.3453	43.8824	129.8545	206.5952	
= 4	0.0662	0.0796	0.1257	0.1557	0.2120	0.2752
	0.3714	0.6153	1.1040	2.0814	3.9357	5.9988
	8.9047	14.6592	21.1392	48.4739	68.9494	
= 5	0.0711	0.0854	0.1338	0.1651	0.2230	0.2872
	0.3831	0.6184	1.0648	1.8911	3.3163	4.7725
	6.6811	10.1578	13.7716	27.2440	36.3070	

Probabilidades

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 9						
β = 6	0.0750	0.0899	0.1402	0.1724	0.2315	0.2964
	0.3920	0.6214	1.0398	1.7733	2.9577	4.0990
	5.5234	7.9761	10.3915	18.6879	23.8765	
β = 7	0.0781	0.0935	0.1452	0.1782	0.2383	0.3037
	0.3992	0.6241	1.0224	1.6931	2.7247	3.6767
	4.8232	6.7188	8.5138	14.3297	17.7799	
β = 8	0.0807	0.0965	0.1494	0.1829	0.2438	0.3096
	0.4050	0.6265	1.0097	1.6350	2.5612	3.3881
	4.3572	5.9106	7.3386	11.7664	14.2899	
β = 9	0.0828	0.0989	0.1529	0.1869	0.2484	0.3146
	0.4098	0.6286	1.0000	1.5909	2.4403	3.1789
	4.0260	5.3511	6.5411	10.1065	12.0754	
β = 10	0.0846	0.1011	0.1558	0.1902	0.2523	0.3187
	0.4139	0.6304	0.9923	1.5563	2.3473	3.0204
	3.7790	4.9424	5.9676	8.9557	10.5642	
β = 20	0.0944	0.1124	0.1715	0.2080	0.2727	0.3405
	0.4351	0.6406	0.9588	1.4069	1.9649	2.3928
	2.8365	3.4567	3.9564	5.2392	5.8520	
β = 50	0.1020	0.1211	0.1834	0.2214	0.2880	0.3568
	0.4509	0.6488	0.9395	1.3213	1.7598	2.0734
	2.3808	2.7850	3.0921	3.8184	4.1394	
β = 100	0.1048	0.1244	0.1879	0.2265	0.2938	0.3629
	0.4568	0.6520	0.9332	1.2933	1.6949	1.9748
	2.2439	2.5898	2.8472	3.4386	3.6927	
α 10						
β = 1	0.0392	0.0475	0.0780	0.0996	0.1442	0.2014
	0.3044	0.6705	2.0419	9.3202	60.1977	241.9536
	969.9056	6096.2740	24965.990	606639	2412900	
β = 2	0.0560	0.0671	0.1061	0.1323	0.1833	0.2437
	0.3419	0.6260	1.3450	3.3770	9.3916	19.3961
	39.3988	99.4035	199.4147	1000.3500	2002.8110	
β = 3	0.0668	0.0797	0.1238	0.1526	0.2072	0.2697
	0.3666	0.6239	1.1833	2.4447	5.2304	8.7855
	14.4189	27.2289	43.6864	129.2498	205.6126	
β = 4	0.0746	0.0886	0.1362	0.1668	0.2238	0.2875
	0.3838	0.6270	1.1126	2.0820	3.9199	5.9644
	8.8439	14.5460	20.9668	48.0521	68.3411	
β = 5	0.0805	0.0954	0.1455	0.1774	0.2361	0.3007
	0.3966	0.6308	1.0730	1.8899	3.2974	4.7351
	6.6192	10.0510	13.6182	26.9160	35.8617	
β = 6	0.0851	0.1007	0.1528	0.1857	0.2456	0.3108
	0.4064	0.6343	1.0478	1.7708	2.9369	4.0600
	5.4613	7.8741	10.2501	18.4106	23.5142	

	Probabilidades					
	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 10						
β = 7	0.0889	0.1051	0.1587	0.1923	0.2532	0.3189
	0.4143	0.6375	1.0304	1.6898	2.7025	3.6365
	4.7611	6.6201	8.3803	14.0830	17.4660	
β = 8	0.0920	0.1086	0.1635	0.1978	0.2594	0.3256
	0.4207	0.6402	1.0175	1.6310	2.5380	3.3472
	4.2951	5.8143	7.2106	11.5399	14.0071	
β = 9	0.0947	0.1117	0.1676	0.2023	0.2646	0.3311
	0.4260	0.6426	1.0077	1.5863	2.4163	3.1373
	3.9639	5.2565	6.4172	9.8942	11.8141	
β = 10	0.0969	0.1142	0.1710	0.2062	0.2690	0.3358
	0.4306	0.6446	1.0000	1.5513	2.3226	2.9782
	3.7168	4.8492	5.8467	8.7538	10.3185	
β = 20	0.1091	0.1281	0.1896	0.2270	0.2925	0.3605
	0.4544	0.6564	0.9663	1.3995	1.9367	2.3479
	2.7737	3.3682	3.8470	5.0752	5.6617	
β = 50	0.1187	0.1390	0.2040	0.2430	0.3104	0.3792
	0.4723	0.6659	0.9468	1.3122	1.7292	2.0261
	2.3168	2.6981	2.9875	3.6710	3.9727	
β = 100	0.1224	0.1433	0.2095	0.2491	0.3173	0.3863
	0.4792	0.6697	0.9405	1.2835	1.6632	1.9267
	2.1793	2.5033	2.7440	3.2958	3.5326	
α 20						
β = 1	0.0582	0.0675	0.1006	0.1235	0.1703	0.2298
	0.3362	0.7124	2.1191	9.5815	61.7473	248.1925
	994.8042	6241.4750	26214.340	620650	2497000	
= 2	0.0878	0.1005	0.1431	0.1710	0.2242	0.2863
	0.3862	0.6725	1.3933	3.4263	9.4414	19.4462
	39.4480	99.4609	199.4767	1001.4050	2000.9990	
= 3	0.1087	0.1235	0.1719	0.2025	0.2592	0.3227
	0.4202	0.6753	1.2252	2.4602	5.1845	8.6602
	14.1675	26.6902	42.7775	126.4285	201.0864	
= 4	0.1247	0.1409	0.1933	0.2257	0.2845	0.3489
	0.4447	0.6825	1.1517	2.0828	3.8443	5.8025
	8.5600	14.0197	20.1674	46.0999	65.5270	
= 5	0.1375	0.1548	0.2100	0.2437	0.3040	0.3689
	0.4633	0.6897	1.1106	1.8820	3.2067	4.5581
	6.3286	9.5527	12.9036	25.3941	33.7969	
= 6	0.1480	0.1662	0.2236	0.2583	0.3197	0.3848
	0.4782	0.6961	1.0845	1.7569	2.8363	3.8742
	5.1684	7.3958	9.5888	17.1198	21.8295	
= 7	0.1568	0.1757	0.2349	0.2704	0.3325	0.3978
	0.4903	0.7017	1.0664	1.6712	2.5947	3.4445
	4.4667	6.1554	7.7540	12.9315	16.0025	

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 20						
β = 8	0.1643	0.1838	0.2445	0.2806	0.3433	0.4087
	0.5004	0.7065	1.0531	1.6088	2.4246	3.1503
	3.9995	5.3591	6.6082	10.4796	12.6854	
β = 9	0.1709	0.1909	0.2528	0.2893	0.3525	0.4179
	0.5089	0.7108	1.0429	1.5611	2.2983	2.9365
	3.6669	4.8080	5.8319	8.8975	10.5898	
β = 10	0.1766	0.1970	0.2599	0.2969	0.3605	0.4259
	0.5163	0.7145	1.0349	1.5235	2.2007	2.7740
	3.4185	4.4054	5.2740	7.8037	9.1647	
β = 20	0.2104	0.2331	0.3014	0.3404	0.4058	0.4708
	0.5575	0.7364	1.0000	1.3580	1.7938	2.1242
	2.4645	2.9377	3.3178	4.2899	4.7533	
β = 50	0.2410	0.2656	0.3380	0.3784	0.4446	0.5087
	0.5919	0.7554	0.9799	1.2592	1.5681	1.7841
	1.9933	2.2652	2.4702	2.9506	3.1614	
β = 100	0.2543	0.2796	0.3536	0.3944	0.4608	0.5245
	0.6060	0.7634	0.9734	1.2256	1.4943	1.6764
	1.8486	2.0666	2.2270	2.5909	2.7456	
α = 50						
β = 1	0.0721	0.0818	0.1159	0.1395	0.1873	0.2479
	0.3560	0.7382	2.1663	9.7415	62.6939	251.7995
	1012.1190	6393.7350	891976.110	622450	2526400	
β = 2	0.1126	0.1257	0.1694	0.1978	0.2516	0.3142
	0.4146	0.7015	1.4228	3.4561	9.4714	19.4764
	39.4812	99.5021	199.5368	1002.4220	2008.7260	
β = 3	0.1426	0.1578	0.2072	0.2381	0.2950	0.3584
	0.4552	0.7078	1.2507	2.4688	5.1547	8.5811
	14.0101	26.3543	42.2145	124.6715	198.2335	
β = 4	0.1665	0.1832	0.2363	0.2689	0.3274	0.3911
	0.4852	0.7181	1.1756	2.0819	3.7952	5.6995
	8.3808	13.6895	19.6679	44.8847	63.7719	
β = 5	0.1862	0.2040	0.2598	0.2935	0.3530	0.4166
	0.5086	0.7279	1.1336	1.8751	3.1471	4.4444
	6.1437	9.2378	12.4535	24.4403	32.5034	
β = 6	0.2030	0.2216	0.2794	0.3138	0.3740	0.4374
	0.5276	0.7366	1.1068	1.7457	2.7697	3.7537
	4.9804	7.0915	9.1697	16.3064	20.7696	
β = 7	0.2175	0.2368	0.2962	0.3311	0.3917	0.4547
	0.5433	0.7442	1.0883	1.6567	2.5226	3.3189
	4.2763	5.8577	7.3545	12.2019	15.0770	
β = 8	0.2303	0.2501	0.3107	0.3460	0.4068	0.4695
	0.5567	0.7509	1.0747	1.5914	2.3481	3.0204
	3.8067	5.0654	6.2216	9.8043	11.8456	

	Probabilidades					
	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 50						
β = 9	0.2416	0.2619	0.3234	0.3591	0.4200	0.4823
	0.5682	0.7568	1.0644	1.5414	2.2180	2.8029
	3.4719	4.5167	5.4539	8.2596	9.8083	
β = 10	0.2517	0.2724	0.3347	0.3706	0.4316	0.4935
	0.5783	0.7621	1.0562	1.5017	2.1171	2.6371
	3.2214	4.1155	4.9022	7.1926	8.4248	
β = 20	0.3163	0.3389	0.4048	0.4415	0.5017	0.5605
	0.6377	0.7942	1.0205	1.3237	1.6896	1.9656
	2.2493	2.6430	2.9586	3.7650	4.1489	
β = 50	0.3858	0.4096	0.4769	0.5131	0.5708	0.6252
	0.6940	0.8254	1.0000	1.2115	1.4409	1.5995
	1.7520	1.9490	2.0967	2.4413	2.5919	
β = 100	0.4211	0.4453	0.5125	0.5480	0.6039	0.6558
	0.7202	0.8401	0.9933	1.1709	1.3548	1.4772
	1.5917	1.7353	1.8400	2.0756	2.1750	
α = 100						
β = 1	0.0772	0.0870	0.1214	0.1450	0.1931	0.2541
	0.3628	0.7469	2.1822	9.7956	63.0054	253.5142
	1023.9900	6553.5970	43690.670	650750	2386000	
β = 2	0.1218	0.1350	0.1789	0.2073	0.2612	0.3239
	0.4244	0.7114	1.4327	3.4661	9.4818	19.4862
	39.4952	99.5410	199.7849	1004.3630	2016.4720	
β = 3	0.1555	0.1707	0.2201	0.2510	0.3077	0.3710
	0.4674	0.7189	1.2593	2.4715	5.1443	8.5540
	13.9565	26.2422	42.0162	124.1304	197.3676	
β = 4	0.1826	0.1993	0.2523	0.2847	0.3429	0.4061
	0.4995	0.7303	1.1836	2.0813	3.7782	5.6641
	8.3196	13.5772	19.4967	44.4666	63.1729	
β = 5	0.2054	0.2231	0.2786	0.3119	0.3709	0.4338
	0.5247	0.7411	1.1413	1.8724	3.1263	4.4051
	6.0801	9.1301	12.2997	24.1152	32.0629	
β = 6	0.2250	0.2435	0.3007	0.3347	0.3941	0.4565
	0.5453	0.7507	1.1143	1.7414	2.7463	3.7118
	4.9155	6.9867	9.0258	16.0280	20.4067	
β = 7	0.2421	0.2612	0.3198	0.3542	0.4138	0.4756
	0.5625	0.7592	1.0957	1.6511	2.4971	3.2749
	4.2101	5.7547	7.2166	11.9510	14.7595	
β = 8	0.2572	0.2768	0.3365	0.3712	0.4308	0.4920
	0.5772	0.7666	1.0820	1.5848	2.3208	2.9747
	3.7393	4.9633	6.0875	9.5712	11.5561	
β = 9	0.2708	0.2908	0.3512	0.3861	0.4457	0.5064
	0.5900	0.7732	1.0715	1.5338	2.1892	2.7556
	3.4034	4.4160	5.3223	8.0387	9.5380	

Probabilidades

	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
α = 100						
β = 10	0.2831	0.3034	0.3644	0.3995	0.4589	0.5190
	0.6012	0.7791	1.0633	1.4933	2.0869	2.5884
	3.1517	4.0137	4.7721	6.9801	8.1679	
β = 20	0.3642	0.3860	0.4490	0.4839	0.5410	0.5965
	0.6692	0.8159	1.0274	1.3099	1.6501	1.9066
	2.1699	2.5353	2.8282	3.5762	3.9322	
β = 50	0.4598	0.4818	0.5435	0.5763	0.6283	0.6769
	0.7381	0.8540	1.0067	1.1904	1.3885	1.5249
	1.6559	1.8248	1.9512	2.2458	2.3744	
β = 100	0.5139	0.5355	0.5949	0.6259	0.6742	0.7185
	0.7731	0.8735	1.0000	1.1449	1.2934	1.3917
	1.4833	1.5977	1.6809	1.8674	1.9459	

REFERENCIAS

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1965). *HandBook of Mathematical Functions*. Dover : New York.

Adams, A. G. (1969). Algorithm 39, Areas under the Normal Curve. *Journal Computer* **12**, 197-198.

Aroian, L. A. (1941). Continued Fractions for the Incomplete Beta Functions. *AMS* **12**, 218-223.

Aroian, L. A. (1959). Corrections to 'Continued Fractions for the incomplete beta function'. *AMS* **30**, 1265.

Beasley, J. D. and Springer, S. G. (1977). Algorithm AS111, The Percentage Points of the Normal Distributions. *Appl. Stat.* **26**, 118-121.

Best, D. J. and Roberts, D. E. (1975). Algorithm AS91, The percentage Points of the χ^2 Distributions. *Appl. Stat.* **24**, 385-388.

Bhattacharjee, G. P. (1970). Algorithm AS32, The Incomplete Gamma Integral. *Appl. Stat.* **19**, 285-287.

Bortkiewicz, L. Von. (1898). *Das Gesetz der Kleinen Zahlen*. Teubner : Leipzig.

Burden, R. L.; Faires, J. D. and Reynolds, A. C. (1981). *Numerical Analysis*. Second Edition. Weber and Schmidt. Boston : Massachusetts.

Ciurana, E. M. (1988). Ventanas. *PC/TIPS* 25-30

Cooper, B. E. (1968a). Algorithm AS2, The Normal Integral. *Appl. Stat.* **17**, 186-188.

Cooper, B. E. (1968b). Algorithm AS3, The Integral of Student's t-Distribution. *Appl. Stat.* **17**, 189-190.

Cooper, B. E. (1968c). Algorithm AS4, An Auxiliary Function for Distribution Integrals. *Appl. Stat.* **17**, 190-192.

Cooper, B. E. (1968d). Algorithm AS5, The Integral of the Non-Central t-Distributions. *Appl. Stat.* **17**, 193-194.

Cran, G. W., Martin, K. J. and Thomas, G. E. (1977). Remark on Algorithm AS63, The Incomplete Beta Integral, and AS64, Inverse of the Incomplete Beta Function Ratio. *Appl. Stat.* **26**, 111-114.

Cunningham, S. W. (1969). Algorithm AS24, From Normal Integral to Deviate. *Appl. Stat.* **18**, 290-293.

Davis, W. E. and Khalil, H. M. (1972). Algorithm and series Expansion for the F-Distribution. *Signum Newsletter* 7, 21-23.

Dorrer, E. (1968). Algorithm 332, F-Distribution. *CACM* **11**, 116-117.

Freeman, P. R. (1973). Algorithm AS59, Hypergeometric probabilities. *Appl. Stat.* **22**, 130-133.

Gautschi, W. (1964). Algorithm 221, Gamma Function. *CACM* **7**, 143.

Gaver, P. D. and Kafadar, K. (1984). A retrievable recipe for inverse t. *The American Statistician* **38**, 308-311.

Hastings, C. Jr. (1955). *Approximations for digital Computers*. Princeton University Press. Princeton : N. J..

Herndon, J. R. (1961). Algorithm 54, Gamma Function for range 1 to 2. *CACM* **4**, 180.

Hill, G. W. and Davis, A. W. (1968). Generalized Asymptotic Expansions of Cornish-Fisher Type. *ASM* **39**, 1264-1273.

Hill, I. D. (1973). Algorithm AS64, The Normal Integral. *Appl. Stat.* **22**, 424-427.

Hill, I. D. and Pike. M. C. (1966a). Algorithm 299, Chi-Squared Integral. *CACM* **10**, 243-244.

Hill, I. D. and Pike, M. C. (1966b). Algorithm 291, Logarithm of Gamma Function. *CACM* **9**, 684.

Holsten, W. (1962). Algorithm 80, Reciprocal Gamma Function of Real Argument. *CACM* **5**, 166.

IMSL Library 1 Reference Manual (1977). *International Mathematical and Statistical Libraries*. Houston : Texas.

Johnson, N. L. and Kotz, S. (1970). *Continuos Univariate Distributions, vols. 1 and 2*. Houghton Mifflin, Boston.

Kendall, M. G. and Stuart, A. (1977). *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1, Cuarta Edición. London : Charles Griffin and Co. Ltd.

Kennedy, W. J. and Gentle, J. E. (1980). *Statistical Computing*. Marcel Dekker, New York.

Lancaster, H. O. (1966). Forerunners of the Pearson χ^2. *Australian Journal of Statistics* **8**, 117-126.

Lau, C. (1980). Algorithm AS147, A simple series for the Incomplete Gamma Integral. *Appl. Stat.* **29**, 113-114.

Lackritz, J. R. (1984). Exact p Values for F and t Test. *The American Statistician* **38**, 312-314.

Leithold, L. (1982). *El Cálculo con Geométria Análitica. Cuarta Edición*. Harla : México, D. F.

Levine, D. A. (1968). Algorithm 344, Student's t-Distributions. *CACM* **12**, 37-38.

Lipp, M. F. (1961). Algorithm 34, Gamma Function. *CACM* **4**, 106.

Lund, R. E. (1980). Algorithm AS152, Cumulative Hypergeometrics Probabilities. *Appl. Stat.* **29**, 221-223.

Majumder, K. L. and Bhattacharjee (1973a). Algorithm AS63, The Incomplete Beta Integral. *Appl. Stat.* **22**, 409-411.

Majumder, K. L. and Bhattacharjee (1973b). Algorithm AS64, Inverse of the Incomplete Beta Function Ratio. *Appl. Stat.* 22, 411-414.

Moivre, A. de (1733). Approximatio ad summan Ferminorum Binomii $(a+b)^n$ in seriem expansi. *Supplementum II to Miscellanae Analytica* 1-7.

Molenaar, W. (1970). *Approximations to the Poisson, Binomial and Hypergeometric Distributions Functions.* Amsterdam.

Odeh, R. E. and Evans, J. O. (1974). Algorithm AS70, Percentage Points of the Normal Distributions. *Appl. Stat.* 23, 96-97.

Owen, D. B. (1965). A special case of a bivariate Non-Central t-Distribution. *Biometrika* 52, 437-446.

Pearson, K. (1900). On a criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Philosophical Magazine*, 5th Series, 50, 157-175.

Press, W. H.; Flannery, B. P.; Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T. (1989). *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing.*

Rice, L. R. and Gaines Das, R. E. (1985). A remark on algorithm AS32 and AS147, the Incomplete Gamma Integral. *Appl. Stat.* 34, 326.

Sachs, L. (1984). *Applied Statistics, A HandBook of Techniques*, Second Edition.

Shea, B. L. (1988). Algorithm AS239, Chi-Squared and Incomplete Gamma Integral. *Appl. Stat.* 37, 466-473.

Soper, H. E. (1921). The Numerical Evaluation of the Incomplete B-Function for Ranges of x between 0 and 1. *In tracts for Computers.* Edited by K. Pearson, Cambridge University Press, London.

Sheppard, W. F. (1939). *The Probability Integral*, British Ass. Math. Tables, Vol 7. Cambridge : University Press.

Todhunter, M. A. (1965). *A History of the Mathematical Theory of Probability.* Chelsea Publishing Company Bronx : New York.

Wichura (1988). Algorithm AS241, The Percentage Points of the Normal Distributions. *Appl. Stat.* 37, 477-484.

Wilson, E. B. and Hilferty, M. M. (1931). *E. B. Proc. Nat. Acad. Sci.* 17, 684.