33

2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre Variedades Abiertas de Curvatura Positiva

Tesis

que para obtener el título de

matemático

presenta

Gil Salgado González

1991

INTRODUCCION

Un problema central en geometría riemanniana es el estudio de variedades completas M cuya curvatura seccional K tiene un signo fijo. Si M es una variedad completa de dimension $n \geq 2$ con curvatura seccional $K_\sigma > 0$ para todos los planos tangentes σ, entonces los resultados más significantes fueron obtenidos cuando $K_\sigma \geq \delta > 0$, ya que por un teorema clásico de Myers M necesariamente es compacta.

Cuando $K_\sigma \geq 0$ y $dim(M) = 2$ Cohn-Vossen obtuvo el siguiente resultado:

Teorema : En dimensión 2 una variedad completa no compacta de curvatura no negativa es difeomorfa a R^2 o es plana.

La demostración de este resultado se baso en argumentos que involucraban el teorema de Gauss-Bonnet para poligonos geodésicos. Tales argumentos no son fácilmente generalizables para dimensiones altas. No obstante, existe una noción importante de la teoría de Cohn-Vossen la cual admite una generalización: la noción de lo que nosotros llamaremos un *punto simple* en una variedad riemanniana.

Un punto $p \in M$ es simple si no existen lazos geodésicos basados en el. Cohn-Vossen demostro que el conjunto de puntos simples es siempre no vacío si $K_\sigma > 0$ y $dim(M) = 2$, nosotros demostraremos que los puntos simples existen en todas las dimensiones si $K_\sigma > 0$. Demostraremos también que la existencia de uno de estos puntos tiene fuertes implicaciones topológicas, ya que concluiremos que M es contraíble y difeomorfa a R^n para casi todas las dimensiones.

En el Capítulo 1 estudiamos propiedades globales de variedades riemannianas. Demostramos el teorema de Hopf-Rinow y vemos como consecuencia el teorema de Hadamard.

En el Capítulo 2 enunciamos el teorema del Indice de Morse para estudiar el comportamiento de las geodésicas en una variedad.

En el Capítulo 3 introducimos conceptos relativamente nuevos con el propósito de determinar la estructura topológica de una variedad riemanniana completa de curvatura positiva y demostramos que la existencia de un punto simple implica que la variedad debe ser contraible.

Indice

constante. Supondremos de aquí en adelante que nuestras geodésicas están parametrizadas por longitud de arco.

DEFINICION :Sea $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ una geodésica, un punto $\gamma(t_o)$ donde $t_o \in [0, a]$ es *conjugado* de $\gamma(0)$ a lo largo de γ, si existe un campo de Jacobi J a lo largo de γ, no identicamente nulo, con $J(0) = J(t_o) = 0$.

DEFINICION :El número de tales campos linealmente independientes es la *multiplicidad* del punto conjugado $\gamma(t_o)$.

Observemos que si $\gamma(t_o)$ es conjugado a $\gamma(0)$, entonces $\gamma(0)$ es conjugado a $\gamma(t_o)$. Observemos también que si $dim(M) = n$, existen exactamente n campos de Jacobi linealmente independientes a lo largo de una geodésica $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$, que se anulan en $\gamma(0)$, esto se sigue de que los campos de Jacobi $J_1, ..., J_k$ son linealmente independientes si y sólo si $J_1'(0), ..., J_k'(0)$ son linealmente independientes, visto esto el campo $J(t) := t\gamma'(t)$ nunca se anula para $t \neq 0$. Por ello la multiplicidad de un punto conjugado nunca excede $n - 1$.

Notemos que dada una geoésica $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ podemos asociarle a $p = \gamma(0)$ el primer punto conjugado a p a lo largo de γ, a este punto se le llama el *punto de corte.*

DEFINICION :El conjunto de (los primeros) puntos conjugados a un punto p en M para todas las geodésicas que pasan por p se llama *el lugar de puntos conjugados a* p y lo denotaremos por $C(p)$.

Estudiaremos un poco las propiedades globales de las variedades riemannianas y veremos como aplicación de este estudio los teoremas de **Hopf-Rinow** y de **Hadamard**. De ahora en adelante se supone que todas las variedades son **conexas**.

DEFINICION :Una variedad riemanniana N es *extendible* si existe una variedad riemanniana M tal que N es isométrica a un subconjunto propio abierto de M, en caso contrario se dice que N es *no extendible.*

DEFINICION :Una variedad riemanniana M es *geodésicamente completa* si $\forall p \in M$, la aplicación exponencial $exp_p : T_pM \longrightarrow M$ está definida $\forall v \in T_pM$, i.e., si las geodésicas $\gamma(t)$ que parten de p, están definidas para todos los valores de los parámetros $t \in R$.

PROPOSICION : *Si M es completa, entonces es no extendible.*
Demostración :
Supongamos que $M \subset N$ es isométrica a un subconjunto propio abierto de una variedad N. Por la conexidad de N la frontera ∂M de M en N es no vacía, sean $p \in \partial M$ y $U \subset M$ una vecindad normal de p en N, sea $q \in U \bigcap M$ y $\gamma(t)$ una geodésica en N con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$, entonces $\alpha(t) := \gamma(1-t)$ si $|t| < \delta$ es una geodésica en M con $\alpha(0) = q$, pero esta geodésica no está definida para $t = 1$, lo que contradice el hecho de que M es completa. ■

Se puede mostrar que el inverso no es cierto, y consecuentemente la clase de las variedades riemannianas no extendibles es mayor que la clase de las variedades riemannianas completas.

Ahora induciremos una distancia en una variedad riemanniana M como sigue: dados dos puntos $p, q \in M$ consideremos las curvas diferenciables por partes que unen p y q y denotemos este conjunto por $\Omega_{p,q}$, como M es conexa, al menos existe una curva.

DEFINICION :Definimos $d(p,q) := inf\{L(\gamma) | \gamma \in \Omega_{p,q}\}$. donde $L(\gamma)$ es la longitud de γ.

PROPOSICION : *Con la distancia d, M es un espacio métrico, esto es*
(1) $d(p.r) \leq d(p,q) + d(q,r)$
(2) $d(p,q) = d(q,p)$
(3) $d(p,q) \geq 0$ *y* $d(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$
Demostración :
(1), (2) y (3a) son inmediatas de la definición de ínfimo, por lo que falta

Sea $A = \{s \in [0, r] | d(\gamma(s), q) = r - s\}$, A es no vacío pues al menos $0 \in A$, es claro que A está acotado por r. Queremos demostrar que $supA = r$ y como A es cerrado, entonces r deberá estar en A, i.e., $\gamma(r) = q$, pero para esto basta con demostrar que si $s_0 < r$ cumple (1) entonces $s_0 + a$ con $a > 0$ también cumple (1), para demostrar esto, sea $B_a(\gamma(s_0))$ una bola normal en $\gamma(s_0)$ y sea $T = \partial B_a(\gamma(s_0))$ su frontera, y $y_0 = min\{d(x, q) | x \in T\}$. Basta demostrar entonces que $y_0 = \gamma(s_0 + a)$. Supongamos que efectivamente pasa lo anterior, como

$$\begin{aligned} d(\gamma(s_0)), q) &= a + min \quad d(x, q) \\ &= a + d(y_0, q) \\ &= d(\gamma(s_0); q) \\ &= r - s_0 \end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} r - s_0 &= a + d(y_0, q) \\ &= a + d(\gamma(s_o + a), q) \end{aligned}$$

y por lo tanto $d(\gamma(s_o + a), q) = r - (s_o + a)$, i.e., se satisface (1) para $s_o + a$. Para demostrar que $\gamma(s_o + a) = y_o$ observemos que

$$d(p, y_o) \geq d(p, q) - d(q, y_o) = r - (r - s_o - a) = s_o + a$$

Si tomamos una curva "quebrada" que una a p y y_o, tal que va de p a $\gamma(s_o)$ por γ y de $\gamma(s_o)$ a y_o por un rayo geodésico, entonces, esta curva tiene longitud $s_o + a$, luego $d(p, y_o) = s_o + a$ y como minimiza resulta geodésica, de donde se concluye la demostración.

Demostraremos ahora las equivalencias:

$a) \Longrightarrow b)$
Sea A un cerrado y acotado, $A \subset M$. Como A es acotado, $A \subset B$, donde B es una bola métrica con centro en p. Por (f) existe una bola $B_r(0) \subset T_pM$ tal que $B \subset exp_pB_r(0)$, como la imagen continua de un compacto es compacto, y como A es un cerrado en un compacto, tenemos que A es compacto.

b) $\Longrightarrow$ *c*)
Basta con observar que el conjunto $\{p_n\}$ formado por una sucesión de Cauchy es acotado, de hecho está contenida en un compacto, y por lo tanto contiene una subsucesión convergente, de donde la sucesión original converge.

c) $\Longrightarrow$ *d*)
Supongamos que M no es geodésicamente completa, entonces alguna geodésica normal γ de M está definida para $s < s_o$ y no está definida para s_o. Sea $\{s_n\}$ una sucesión tal que $s_n \longrightarrow s_o$, entonces dada $\epsilon > 0$ existe N_o tal que $n, m > N_o \Longrightarrow |s_n - s_m| < \epsilon$, de donde se sigue que :

$$d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m| < \epsilon$$

i.e., $\{\gamma(s_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en M. Como M es completa en la métrica d, $\{\gamma(s_n)\} \longrightarrow p_o$ en M. Sea (W, δ) una vecindad totalmente normal de p. Sea N_1 tal que si $n, m > N_1$ entonces $|s_m - s_n| < \frac{\epsilon}{2}$ y tal que $\gamma(s_n), \gamma(s_m) \in W$, luego, existe una geodésica g de longitud menor que δ que une a $\gamma(s_n)$ y $\gamma(s_m)$. Es claro que g coincide con γ donde γ esté definida, pero g está definida a partir de $\gamma(s_n)$ en un intervalo de longitud δ, de donde g extiende a γ más allá de s_o.

d $\Longrightarrow$ *a*)
Se sigue de la definición.

b $\Longleftrightarrow$ *e*)
$\Longrightarrow$)
Definimos $K_n = \{x \in M | d(x,p) \leq n\}$, claramente $K_n \subset K_{n+1}$ y entonces $\bigcup K_n = M$.
$\Longleftarrow$)
Por ser A acotado existe n tal que $A \subset K_n$, pero A es un cerrado en un compacto, lo que implica que A es compacto. ■

Como consecuencia de este Teorema tenemos:

Corolario :*Si M es compacta, entonces M es completa.*

Corolario : *Una subvariedad cerrada de una variedad completa, es completa con la métrica inducida, en particular las subvariedades cerradas de un espacio euclidiano son completas.*

La idea es usar estos resultados para probar propiedades "globales" de las variedades, como por ejemplo:

TEOREMA :(Hadamard) *Sea M una variedad riemanniana completa, simplemente conexa con curvatura seccional $K(p,\sigma) \leq 0$ $\forall p \in M$ y $\forall \sigma \subset T_pM$ donde σ es un subespacio de dimensión 2, entonces M es difeomorfa a R^n.*

Necesitamos para la demostración la ayuda de algunos resultados preliminares que ahora demostramos.

Lema 1 : *Sea M una variedad riemanniana completa con $K(p,\sigma) \leq 0$ $\forall p \in M$ y $\forall \sigma \subset T_pM$, entonces $\forall p \in M$ $C(p) = \emptyset$, en particular la aplicación exponencial $exp_p : T_pM \longrightarrow M$ es un difeomorfismo local.*
Demostración :
Sea J un campo de Jacobi no identicamente nulo a lo largo de una geodésica $\gamma : [0,\infty) \longrightarrow M$ donde $\gamma(0) = p$ y $J(0) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} <J,J>' &= 2<J,J'> \\ <J,J>'' &= 2<J',J'> +2<J'',J> \\ &= 2|J'|^2 - 2<R(\gamma',J)\gamma',J> \end{aligned}$$

y recordemos que $K(\gamma',J) = \frac{<R(\gamma',J)\gamma',J>}{|\gamma' \times J|^2}$ lo cual junto con $K(p,\sigma) \leq 0$ implica que

$$<J,J>'' \geq 0$$

de donde se sigue que $<J,J>'(t_2) \geq <J,J>'(t_1)$ si $t_2 > t_1$ como $J'(0) \neq 0$ y $<J,J>'(0) = 0$ se sigue que también para t suficientemente pequeña se tiene que:

$$<J,J>(t) > <J,J>(0)$$

de donde $\forall t > 0 < J, J > (t) > 0$ y $\gamma(t)$ no es conjugado de $\gamma(0)$ a lo largo de γ. La segunda observación es consecuencia de este resultado ya que los puntos críticos de la exponencial resultan ser precisamente los puntos conjugados a $\gamma(0)$. ■

Lema 2 : *Sea M una variedad riemanniana y $f : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo local sobre una variedad N, que posee la siguiente propiedad: $\forall p \in M$ y $\forall v \in T_pM$ $|df_p(v)| \geq |v|$. Entonces f es una función cubriente.*

Demostración :

Por las propiedades de espacios cubrientes, basta demostrar que f posee la propiedad de levantar arcos de N, i.e., dada una curva diferenciable $c : [0,1] \longrightarrow N$ y un punto $q \in M$ con $f(q) = c(0)$ existe $g : [0,1] \longrightarrow M$ con $g(0) = q$ y $fg = c$.

Para probar lo anterior, observemos que, como f es un difeomorfismo local en q, existe $\delta > 0$ tal que es posible definir $g : [0,\delta] \longrightarrow M$ con $g(0) = q$ y $fg = c$, esto es, es posible levantar c en un intervalo pequeño a partir de q. Como f es un difeomorfismo local en todo M, el conjunto de valores $A \subset [0,1]$ para los cuales c puede levantarse en A a partir de q, debe ser un intervalo de la forma $A = [0, t_o)$.

Si mostramos que $t_o \in A$, tendremos que A es un abierto y cerrado en el $[0,1]$, de donde $A = [0,1]$ y c puede ser levantada. Para demostrar que $t_o \in A$, sea $\{t_n\}$ una sucesión creciente en A tal que $t_n \longrightarrow t_o$, entonces $\{g(t_n)\}$ está contenida en un compacto $K \subset M$, ya que si esto no se diera, como M es completa, la distancia de $g(t_n)$ a $g(0)$ sería arbitrariamente grande ya que:

$$\begin{aligned} L_{0,t_n}(\gamma) &= \int_0^{t_n} |\frac{dc}{dt}|\, dt \\ &= \int_0^{t_n} |df_{g(t)}(\frac{dg}{dt})|\, dt \\ &\geq \int_0^{t_n} |\frac{dg}{dt}|\, dt \\ &\geq d(g(t_n), g(0)) \end{aligned}$$

lo cual nos diría que la longitud de c de 0 a t_o es arbitrariamente grande, lo cual es un absurdo, lo que demuestra la afirmación hecha.

Como $\{g(t_n)\} \subset K$, entonces existe un punto de acumulación $r \in M$ de $\{g(t_n)\}$. Sea V una vecindad de r tal que $f|V$ es un difeomorfismo, entonces $c(t_o) \in V$ y por continuidad existe un intervalo $I \subset [0,1]$ tal que $c(I) \subset f(v)$. escojamos n tal que $g(t_n) \in V$ y consideremos el levantamiento h de c en I que pasa por r, los levantamientos g y h coinciden en $[0, t_n) \cap I$. pues $f|V$ es biyección, por lo que h es una extensión de g en I, de donde se sigue que g está definida en t_o y por lo tanto $t_o \in A$. ∎

Demostración :(Teorema de Hadamard)
Como M es completa, $exp_p : T_pM \longrightarrow M$ está bien definida $\forall p \in M$ y es suprayectiva, por el lema 1, exp_p es un difeomorfismo local, lo que nos permite introducir una métrica riemanniana en T_pM de tal forma que exp_p sea una isometría local. Esta métrica resulta completa, pues las geodésicas de T_pM que pasan por el origen son rectas. Por el lema 2, exp_p es un mapeo cubriente, y como M es simplemente conexa, entonces exp_p es un difeomorfismo. ∎

Llamamos a un punto $p \in M$ un *polo* si $C(p) = \emptyset$, entonces todo punto de una variedad completa M de curvatura no positiva es un polo de M.
Sin embargo, existen variedades no compactas de curvatura positiva que tienen polos, como por ejemplo el paraboloide de revolución

$$z = x^2 + y^2.$$

En realidad se puede demostrar algo más general :

TEOREMA : *Si una variedad riemanniana M completa y simplemente conexa tiene un polo, entonces M es difeomorfa a R^n.*

Para una demostración de este Teorema ver [6].

Capítulo 2

Teorema del Indice de Morse

Sea $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ una geodésica. Denotaremos por $\mathbf{V}$ el espacio vectorial de campos vectoriales V diferenciables por partes a lo largo de γ que se anulan en los extremos de γ, i.e., $V(0) = V(a) = 0$.

DEFINICION :La forma índice de γ es una forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica I_a definida por:

$$I_a(V, W) = \int_0^a \{< V', W' > - < R(\gamma', V)\gamma', W >\}dt$$

donde $V, W \in \mathbf{V}$.

De manera general llamamos *índice* de una forma bilineal simétrica B en un espacio vectorial $\mathbf{E}$, a la máxima dimensión de un subespacio de $\mathbf{E}$ en la cual B esté definida en forma negativa. La *nulidad* de B es la dimensión del subespacio de $\mathbf{E}$ formado por los elementos $v \in \mathbf{E}$ tales que $B(v,w) = 0$ $\forall w \in \mathbf{E}$. Tal subespacio es el *espacio nulo* de B.

DEFINICION :Decimos que B es *degenerada* si su nulidad es estrictamente positiva.

TEOREMA (Indice de Morse) : *El índice de la forma I_a es finito e igual al número de puntos $\gamma(t)$ con $0 < t < a$, conjugados a $\gamma(0)$, cada uno contado con su multiplicidad.*

Recordemos que la multiplicidad de un punto conjugado era el número de campos de Jacobi linealmente independientes que se anulaban en el.

Antes de demostrarlo, demostraremos unos lemas.

PROPOSICION : *Un elemento $V \in \mathbf{V}$ pertenece al espacio nulo de I_a si y solamente si V es un campo de Jacobi a lo largo de γ.*

Demostración :

Observemos primero que como V es diferenciable por partes, para un número finito de puntos t_j se tiene que:

$$\frac{DV}{dt}(t_j^-) \neq \frac{DV}{dt}(t_j^+) \qquad j = 1, ..., k-1$$

donde $\frac{DV}{dt}(t_j^-) = lim_{t<t_j} \frac{DV}{dt}(t)$ y $\frac{DV}{dt}(t_j^+) = lim_{t>t_j} \frac{DV}{dt}(t)$
entonces

$$\begin{aligned} I_a(V,W) = &- \int_0^a < V'' + R(\gamma',V)\gamma', W > \quad dt \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} < \frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-), W(t_j) > \end{aligned}$$

Si V es un campo de Jacobi, entonces está en el espacio nulo de I_a. Inversamente supongamos que $I_a(V,W) = 0$ $\forall W \in \mathbf{V}$. Sea $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_k = a$ una partición de $[0,a]$ tal que $V|[t_{j-1}, t_j]$ es diferenciable. Sea

$f : [0,a] \longrightarrow R$ una función diferenciable, $f(t) > 0$ si $t \neq t_j$ y $f(t_j) = 0$ para $j = 0, ..., k$.
Definamos $W(t) = f(t)(V'' + R(\gamma', V)\gamma')$ entonces:

$$0 = I_a(V, W) = \int_0^a f(t)\|V'' + R(\gamma', V)\gamma'\|^2 \quad dt$$

se sigue entonces que V es campo de Jacobi en $[t_{j-1}, t_j]$, ahora definamos:

$$T(t_j) = \frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-) \quad j = 1, ..., k-1$$

lo cual implica que:

$$0 = I_a(V, T) = \sum_{j=1}^{k-1} \|\frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-)\|^2$$

por lo que V es de clase C^1 en cada t_j, por la unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria $V \in C^\infty$, y por lo tanto V es un campo de Jacobi. ■

Corolario :*I_a es degenerada si y solamente si los puntos $\gamma(0)$ y $\gamma(a)$ son conjugados a lo largo de γ. En este caso la nulidad de I_a es igual a la multiplicidad de $\gamma(a)$ como punto conjugado.*

Como cada punto de M está contenido en una vecindad totalmente normal de radio δ (i.e. tal que dados cualquiera dos puntos en ella existe una única geodésica minizante entre ellos de longitud menor que δ) y $\gamma([0,a])$ es compacto, podemos escoger una partición $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_k = a$ de $[0,a]$ tal que $\gamma|[t_{j-1}, t_j]$ esté contenida en una vecindad totalmente normal. Así, cada $\gamma|[t_{j-1}, t_j]$ es una geodésica minimizante.
En lo que sigue, se supone que estamos trabajando con una de estas particiones.

Sea $\mathbf{V}^-$ el subespacio vectorial de $\mathbf{V}$ formado por los campos V tales que $V|[t_{i-1}, t_i]$ $i = 1, ..., k$ es un campo de Jacobi. $\mathbf{V}^-$ tiene dimensión finita. Sea $\mathbf{V}^+$ el subespacio vectorial de $\mathbf{V}$ constituido por los campos W tales que $W(t_i) = 0$ para $i = 1, ..., k$.

PROPOSICION :$\mathbf{V} = \mathbf{V}^+ \oplus \mathbf{V}^-$, *y los subespacios* $\mathbf{V}^+$ *y* $\mathbf{V}^-$ *son ortogonales con relación a* I_a, *visto esto* I_a *restringida a* $\mathbf{V}^+$ *es positiva definida.*

Demostración :

Primero veremos que realmente es suma directa.

Sea $V \in \mathbf{V}$ y $W \in \mathbf{V}^-$ tales que $W(t_j) = V(t_j)$. Como $\gamma|[t_{j-1}, t_j]$ no posee puntos conjugados, W existe, por lo que $V - W \in \mathbf{V}^+$, de donde se sigue, que su suma es $\mathbf{V}$, supongamos que existe $V \in \mathbf{V}^+ \cap \mathbf{V}^-$ entonces por estar en $\mathbf{V}^+$, $V(t_{j-1}) = V(t_j) = 0$ y por estar en $\mathbf{V}^-$ concluimos que los puntos correspondientes sobre la geodésica son conjugados. lo cual es una contradicción a menos que $\mathbf{V} \equiv 0$. De donde se sigue que efectivamente son suma directa.

Sean $V \in \mathbf{V}^-$ y $W \in \mathbf{V}^+$ entonces :

$$\begin{aligned} I_a(V,W) = & -\int_0^a < V'' + R(\gamma', V)\gamma', W > \quad dt \\ & + \sum_{j=1}^{k-1} < \frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-), W(t_j) >= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto V y W son ortogonales con respecto a I_a ∎

Corolario :*El índice de* I_a *es igual al índice de* I_a *restringido a* $\mathbf{V}^-$, *en particular, el índice de* I_a *es finito, lo mismo pasa con la nulidad de* I_a.

Demostración :(Teorema del Indice de Morse)

Si $t \in [o, a]$, $\gamma_t := \gamma|[0, t]$, y su forma índice correspondiente se denotará por I_t, $i(t) =$ índice de I_t.

Se afirma que tenemos entonces una función $i : [0, a] \longrightarrow N$. Sean t_j como antes, concluimos que $i(t) = 0$ en una vecindad del cero, y que i(t) es no decreciente, i.e., si $s > t$ entonces $i(s) \geq i(t)$. En efecto, por la definición de $i(t)$ existe un subespacio $U \subset \mathbf{V}_t$ tal que I_t es definida negativa en U y $dim(U) = i(t)$. Todo elemento $X \in U$ se extiende a un elemento $Y \in \mathbf{V}_s$ definiendo $Y \equiv 0$ en $[t, s]$, es claro que $I_t(X, X) = I_s(Y, Y)$ por lo que $i(s) \geq i(t)$.

Para obtener otras propiedades de $i(t)$, observemos que el índice de I_t es el índice de la restricción de I_t al subespacio $\mathbf{V}_t^-$, denotaremos igual a la restricción.

Supongamos que $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Cada elemento de $\mathbf{V}_t^-$ está determinado por su valor en $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{j-1})$, tenemos entonces que $\mathbf{V}_t^-$ es isomorfo a la suma directa:

$$\mathbf{V}_t^- = T_{\gamma(t_1)} \oplus \cdots \oplus T_{\gamma(t_{j-1})} = S_j$$

de donde, al hacer variar t en los espacios $\mathbf{V}_t^-$ son isomorfos entre sí e isomorfos a S_j. Podemos entonces, considerar las formas cuadráticas I_t como una familia de formas en un espacio fijo S_j.
Visto esto, como los elementos de $\mathbf{V}_t^-$ son campos de Jacobi restringidos a cada intervalo $[t_{j-1}, t_j]$, I_t varía continuamente con la t.

Lema: *Si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeña $i(t-\epsilon) = i(t)$.*
Demostración :
Como i es no decreciente $i(t-\epsilon) \leq i(t)$.
Si I_t es definida negativa es un subespacio $S \subset S_j$ y $dim(S) = i(t)$, entonces por continuidad existe $\epsilon > 0$ tal que $I_{t-\epsilon}$ también es definida negativa en S, lo que implica $i(t-\epsilon) \geq i(t)$, y por lo tanto son iguales ∎

Lema: *En cada punto conjugado a $\gamma(0)$, i deja de ser continua y da un salto igual a la multiplicidad del punto conjugado.*
Demostración :
Sea d la nulidad de I_t. Demostraremos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño $i(t+\epsilon) = i(t) + d$.
Sabemos que $dim(S_j) = n(j-1)$, por lo que I_t es positiva en un subespacio de $dim(\mathbf{V}_t^+) = n(j-1) - i(t) - d$, por la continuidad, $I_{t+\epsilon}$ es definida positiva en este subespacio para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, i.e.,

$$i(t+\epsilon) \leq n(j-1) - \{n(j-1) - i(t) - d\} = i(t) + d$$

Para la otra desigualdad, sea $v \in T_{\gamma(t_{j-1})}$ y sea $J_{t,v}$ el campo de Jacobi "quebrado" (i.e. es campo de Jacobi en cada intervalo $[t_{j-1}, t_j]$) a lo largo de γ_t dado por $J_{t,v}(t_{j-1}) = v$ y $J_{t,v}(t) = 0$.

Sea $V_{t,v}$ el campo vectorial a lo largo de $\gamma_{t+\epsilon}$ dado por $V_{t,v} = J_{t,v}$ en $[0,t]$ y $V \equiv 0$ en $[t, t+\epsilon]$. Por el lema del índice:

$$I_{t+\epsilon}(V_{t,v}, V_{t,v}) > I_{t+\epsilon}(J_{t+\epsilon,v}, J_{t+\epsilon,v})$$

de donde $\forall V \in S_j$ $I_t(V,V) > I_{t+\epsilon}(V,V)$. Por lo que si I_t es definida negativa en un subespacio $S \subset S_j$, $I_{t+\epsilon}$ será definida negativa en la suma directa de S con el espacio nulo de I_t, luego $i(t+\epsilon) \geq i(t) + d$. ■

Corolario :*Si γ es geodésica minimizante, i.e. minimiza la longitud entre sus extremos, γ no posee puntos conjugados.*

Corolario :*El conjunto de puntos conjugados a lo largo de una geodésica es un conjunto discreto.*

Capítulo 3

La Estructura de Variedades con Curvatura Positiva

Denotaremos por $d(p,q)$ la distancia métrica entre los puntos $p,q \in M$. Suponemos de aquí en adelante que las variedades son **completas y abiertas**. Suponemos también que todas nuestras geodésicas γ estan parametrizadas por longitud de arco, i.e. $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ para toda t.

DEFINICION :Una geodésica $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ es un *segmento* si $L(\gamma) = d(p,q)$ donde $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$ y $L(\gamma)$ es la longitud de γ.

DEFINICION :Una geodésica $\gamma : [a,\infty) \longrightarrow M$ es un *rayo* empezando en $p = \gamma(a)$ si $\gamma|[a,b]$ es un segmento $\forall b$ con $b > a$.

PROPOSICION : *Existe al menos un rayo de p a ∞.*
Demostración :
Escojamos una sucesión divergente de puntos $q_n \in M$, para cada q_n sea $\gamma_n : [0,a_n] \longrightarrow M$ el segmento tal que $\gamma_n(0) = p$ y $\gamma_n(a_n) = q_n$, es claro que los vectores dirección $\dot{\gamma}_n(0)$ tienen un punto límite v en T_pM y la

geodésica $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$, $\gamma(t) := exp(tv)$ es un rayo, ya que para toda t fija, $\gamma_n|[0,t]$ converge a $\gamma|[o,t]$, la cual es una geodésica minimizante entre $\gamma(0)$ y $\gamma(t)$. ■

DEFINICION :Una geodésica $\gamma : R \longrightarrow M$ es una *recta* si $\gamma|[a, \infty)$ es un rayo $\forall a \in R$.

En general las rectas no necesariamente existen en una variedad, como ejemplo para lo anterior nos sirve el paraboloide de revolución $z = x^2+y^2$, ya que si $p \neq (0,0,0)$ es claro que cualquier geodésica tiene puntos conjugados a p y por lo tanto no puede minimizar distancia, en el caso de que M sea simplemente conexa y la curvatura seccional $K \leq 0$, entonces todas las geodésicas normales $\gamma : R \longrightarrow M$ son rectas, lo cual se sigue del Teorema de Hadamard, ya que si $K \leq 0$, entonces en γ no hay puntos conjugados y por lo tanto minimiza la longitud entre dos puntos cualquiera en ella.

Lema 1 *Sea $\gamma : R \longrightarrow M$ una geodésica parametrizada por longitud de arco, y $r \geq 0$ a lo largo de γ, donde $r(t)$ es la curvatura de Ricci (Para esta definición ver* [2]*) de M en dirección a $\dot\gamma(t)$. Si $r(t_0) > 0$, entonces la restricción γ_τ de γ a $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ tiene al menos índice 1, para todas las $\tau > 0$ suficientemente grandes.*
Más aún, si la curvatura seccional a lo largo de γ es no negativa, $K_\sigma \geq 0$ con respecto al plano $\sigma \subset T_{\gamma(t)}M$, $\dot\gamma(t) \in \sigma$ y $K_\sigma > 0$ en t_0 entonces el índice de γ es al menos $n-1$. .
Demostración :
Consideremos la ecuación lineal $\varphi'' + a\varphi = 0$ en la recta real, donde la función $a : R \longrightarrow R$ es diferenciable y $a \geq 0$. Sea φ su solución global con las condiciones iniciales estándar $\varphi(0) = 1$ y $\varphi'(0) = 0$, si $a(0) > 0$ entonces la solución φ, tiene ceros en $-a_1 < 0 < a_2$, i.e., $\varphi(-a_1) = \varphi(a_2) = 0$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t_0 = 0$. Para $a := r(t)$ sabemos que la solución φ tiene dos ceros $-a_1 < 0 < a_2$, escojamos campos vectoriales ortonormales y paralelos $X_1, ..., X_{n-1}$ a lo largo de γ con $< X_i, \dot\gamma >= 0$.
Mostraremos que $I(\varphi X_i, \varphi X_i) \leq 0$ para al menos una $1 \leq i \leq n-1$, donde I denota la forma índice de γ restringida a $[-a_1, a_2]$, de donde si $\tau > max(a_1, a_2)$ se sigue la primera afirmación.

Recordemos que $I_a(X,Y) = \int_0^a \{< X', Y' > - < R(\gamma', X)\gamma', Y >\}dt$ de donde obtenemos

$$\begin{aligned} I(\varphi X_i, \varphi X_i) &= \int_{-a_1}^{a_2} \{< \varphi' X_i, \varphi' X_i > - < R(\gamma', \varphi X_i)\gamma', \varphi X_i >\}dt \\ &= \int_{-a_1}^{a_2} (\varphi'^2 - K_i \varphi^2)dt \end{aligned}$$

donde $K_i(t) := K_\sigma$ y σ es el plano generado por $X_i(t)$ y γ'. Si sumamos sobre los índices i, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} I(\varphi X_i, \varphi X_i) &= \int_{-a_1}^{a_2} ((n-1)\varphi'^2 - (K_1 + \cdots + K_{n-1})\varphi^2)dt \\ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} I(\varphi X_i, \varphi X_i) &= \int_{-a_1}^{a_2} (\varphi'^2 - r\varphi^2)dt \\ &= \int_{-a_1}^{a_2} [((\varphi\varphi')' - \varphi(\varphi'' + r\varphi)]dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde es claro que al menos un sumando o es cero o es menor que cero. Para probar la segunda afirmación, escojamos una función $m : R \longrightarrow R$ diferenciable, $m \geq 0$ y $m(0) > 0$ tal que $K_\sigma \geq m(t)$ para todo $\sigma \ni \gamma'(t)$ con $t \in R$ y $k_\sigma > m(0)$, $\gamma'(0) \in \sigma$, entonces la solución de $\varphi'' + m\varphi = 0$ tiene como ceros a $-a_1 < 0 < a_2$, restrinjamos γ nuevamente a $[-a_1, a_2]$. Sea X un campo vectorial paralelo a lo largo de γ con $< X, \gamma' >= 0$. Si $\|X\| = 1$ y $K(t) := K_\sigma$ donde σ es el plano generado por $X(t)$ y $\gamma'(t)$, entonces

$$I(\varphi X, \varphi X) = \int_{-a_1}^{a_2} (\varphi'^2 - K\varphi^2)dt < \int_{-a_1}^{a_2} (\varphi'^2 - m\varphi^2)dt = 0$$

de donde obtenemos que $Ind(\gamma_\tau) \geq n-1$ siempre que $\tau \geq \max(a_1, a_2)$. ■

Notemos que este lema no nos proporciona información sobre cuáles puntos pueden ser conjugados, sino que sólo nos garantiza la existencia de dichos puntos. Tenemos además unas consecuencias de este lema:

Corolario : *Si la curvatura de Ricci (o la curvatura seccional) es positiva en cualquier punto entonces en M no existen rectas.*

Corolario : *Si la curvatura de Ricci o la curvatura seccional es no negativa, entonces r (r es la curvatura de Ricci) o K deben ser idénticamente nulas a lo largo de cualquier recta γ en M.*

Demostración :

Por el corolario anterior, si existe una recta γ en M, entonces la curvatura de Ricci (seccional) debe ser menor o igual a cero a lo largo de γ, de donde se sigue que debe ser nula. ■

Si en el primer lema sustituimos $K_{t_0} \geq 0$ por $K_{t_0} > 0$ el resultado no es cierto, ya que tanto en el plano como en el cilindro se da la nueva condición y claramente existen rectas que pasan por cualquier punto.

Ahora reformularemos de una forma ligeramente más general el lema 1, suponiendo que $K > 0$ en cualquier punto de M. En lo siguiente Ω_{pq} denotará el espacio de todas las trayectorias diferenciables por partes $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$ de p a q.

Lema 2 *Sea $C \subset M$ compacto, entonces existe un conjunto compacto $D \supset C$ tal que cualquier geodésica en Ω_{pq} la cual corta C tiene índice al menos $n-1$ para todos $p, q \in M - D$.*

Demostración :

Se procederá como en la segunda parte de la demostración del lema 1, pero escogiendo una función m que acote la vurvatura para todas las geodésicas normales $\gamma : R \longrightarrow M$ con $\gamma(0) \in C$, (lo cual es posible debido a la compacidad de C). De donde basta tomar como $D = \{p \in M | d(p, C) \leq \tau\}$ donde τ se obtuvo según el lema 1. ■

Daremos ahora algunas definiciones básicas:

DEFINICION :Una geodésica parametrizada por longitud de arco $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ es llamada *cóncava* con respecto a $q \in M$, si la función continua $s \longmapsto d(\gamma(s), q)$ no alcanza un mínimo relativo en un punto interior de $[a, b]$.

Es claro que si γ es cóncava con respecto a q, entonces también lo es cualquier restricción de γ.

Lema 3 *Sea $C \subset M$ compacto, entonces existe un compacto $D \supset C$ tal que toda geodésica $\gamma : [a, b] \longrightarrow C \subset M$ es cóncava con respecto a todos los puntos $q \in M - D$.*
Demostración :
Sea m la función que acota la curvatura como en el lema 2 y escojamos D para C como antes. Sea φ la solución de $\varphi'' + m\varphi = 0$ con $\varphi(0) = 1$ y $\varphi'(0) = 0$. Supongamos que $\gamma_0 : [a, b] \longrightarrow C$ es una geodésica regular en M, $q \in M - D$ y que $s \longmapsto d(\gamma_0(s), q)$ alcanza un mínimo relativo en $s_0 \in (a, b)$. Sea $\gamma : [o, d] \longrightarrow M$ con $d > \tau$, $\gamma(0) = \gamma_0(s_0)$, $\gamma(d) = q$, si calculamos la forma índice sobre γ con X un campo paralelo a lo largo de γ con $X(0) = \gamma_0'(s_0)$ obtenemos:

$$I(\varphi X, \varphi X) < \int_0^d (\varphi'^2 - m\varphi^2)dt = 0$$

de donde γ no puede minimizar la distancia de q a γ_0 localmente. ■

Como consecuencia de este lema obtenemos:

Corolario *Todas las geodésicas periódicas en M son constantes.*

Observemos nuevamente que si sustituimos $K \geq 0$ por $K > 0$ no se puede concluir el resultado predicho, ya que mientras en el cilindro existen geódesicas periódicas que no son constantes y su curvatura es $K \equiv 0$, en el plano, a pesar de darse lo mismo, las únicas geodésicas periódicas son constantes.

DEFINICION :Un conjunto no vacío $A \subset M$ es *totalmente convexo* si A contiene la imagen de toda geodésica $\gamma \in \Omega_{pq}$ para todos $p, q \in A$.

Notemos que si la variedad M es un R^n el que un conjunto sea totalmente convexo equivale a la definición de convexidad usual. Si la variedad fuera el paraboloide de revolución, los únicos conjuntos totalmente convexos son

$$\{(x, y, z) \in R^3 | \ z = x^2 + y^2 \text{ y } z \leq a \text{ p.a. } a \in R\}$$

Cualquier intersección no vacía de conjuntos totalmente convexos es totalmente convexa. Algunos conjuntos totalmente convexos son de gran importacia.

DEFINICION :Decimos que $p \in M$ es un punto *simple* si $\{p\}$ es totalmente convexo.

Notemos que esto significa que las únicas geodésicas que empiezan y terminan en p son las geodésicas constantes, i.e., no hay lazos geodésicos basados en p.

La existencia de uno de estos puntos tiene fuertes consecuencias topológicas, ya que el espacio de lazos geodésicos $\Omega_{p,p}$ resulta contraible y por teoría de Morse, también M.

Lema 4 : *Si existe un punto $p \in M$ tal que p es simple, entonces M es contraíble.*

Demostración :Supongamos que $p \in M$ en un punto simple, denotemos por $\Omega_{p,p}$ el conjunto de curvas diferenciables por partes que empiezan y terminan en p, y por Ω_M el conjunto de curvas continuas que empiezan y terminan en p. Notemos que como $E|\Omega_{p,p}$ no tiene puntos críticos (ya que no hay lazos geodésicos basados en p) cualquier $\gamma \in \Omega_{p,p}$ se puede contraer a un punto (Ver sección 2.4 de [**6**]), de donde se sigue que $\Omega_{p,p}$ es del mismo tipo de homotopía que p. Observemos también que $\pi_k(\Omega_M) = \pi_{k+1}(M)$ de donde para demostrar que M es contraíble, basta con ver que $\Omega_{p,p}$ y Ω_M tienen el mismo tipo de homotopía. Supongamos que no, i.e., existe $k > 1$ tal que $\pi_k(\Omega_M)$ es no trivial, entonces por [**10**] existe al menos una geodésica basada en p, lo cual es una contradicción ya que p era un punto simple, de donde se sigue que M es contraíble. ■

De hecho se puede demostrar un resultado más fuerte que este: Si $C \subset M$

es un conjunto compacto totalmente convexo, entonces la inclusión de C en M es una equivalencia homotópica.

Sea $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ un rayo, con $p = \gamma(0)$. Consideremos las bolas métricas

$$B_t(\gamma(t)) = \{q \in M | d(\gamma(t), q) < t\}$$

i.e., las bolas con centro en $\gamma(t)$ y radio t. Se sigue de la desigualdad del triángulo que $B_{t_1}(\gamma(t_1)) \subset B_{t_2}(\gamma(t_2))$ si $0 < t_1 \leq t_2$. Definimos

$$B_\gamma = \bigcup_{t>0} B_t(\gamma(t))$$

a B_γ se le llama el *semi-espacio abierto* para γ.

Lema 5 (Construcción Básica) *El complemento cerrado $M - B_\gamma$ de cualquier semi-espacio B_γ es totalmente convexo.*
Demostración :
$M - B_\gamma$ es no vacío ya que al menos $\gamma(0) \notin B_\gamma$. Supongamos que existe una geodésica $\gamma_0 : [a, b] \longrightarrow M$ tal que

$$\gamma_0(a), \gamma_0(b) \in M - B_\gamma \quad \gamma_0(s_0) \in B_\gamma$$

para algún $s_0 \in (a, b)$, entonces existe un $t_1 > 0$ tal que $\gamma_0(s_0) \in B_{t_1}(\gamma(t_1))$ y un $t_2 \geq t_1$ de acuerdo con el lema 3 tal que γ_0 es cóncava con respecto a $\gamma(t_2)$, pero $\gamma_0(s_0) \in B_{t_2}(\gamma(t_2))$ y por lo tanto la función $s \longmapsto d(\gamma_0(s), \gamma(t_2))$ alcanza un mínimo absoluto en algún punto interior de [a,b], lo cual contradice lo supuesto. ■

Describiremos ahora una construcción básica para conjuntos compactos totalmente convexos con respecto a un punto $p \in M$. Sea $B = \bigcup_\gamma B_\gamma$ la unión de todos los semi-espacios para rayos γ emanados de p. $M - B = \bigcap_\gamma (M - B_\gamma)$ es un conjunto cerrado y convexo que contiene a p en su frontera, pero $M - B$ debe ser acotado y por lo tanto compacto ya que de lo contrario podríamos encontrar un rayo de p a ∞ contenido en $M - B$, lo cual es imposible ya que todos los rayos de p a ∞ están en B.

Lema 6 : *Cualquier conjunto compacto C, está contenido en un conjunto compacto totalmente convexo D. Más aún, existe una filtración C_i de M, $C_i \subset int(C_{i+1})$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = M$, de conjuntos compactos totalmente convexos.*

Demostración :

Para todo punto $q \in M - C$ existe un segmento $\gamma : [0, b] \longrightarrow M$ del conjunto cerrado C a q, i.e.,

$$\gamma(0) \in C, \quad \gamma(b) = q, \quad \rho(C, q) = inf\{d(p, q) | p \in C\} = L(\gamma) = b$$

Llamamos a una geodésica $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ un *rayo* de C a ∞, si la restricción de γ a $[0, t]$ es un segmento de C a $\gamma(t)$ para toda $t > 0$. Como vimos anteriormente, al menos uno de estos rayos existe, hagamos construcciones análogas para el semiespacio asociado al rayo γ, de donde es claro que $C \subset M - B_\gamma$.

Formemos nuevamente $B := \bigcup_\gamma B_\gamma$ la unión de los semiespacios abiertos con respecto a todos los rayos de C a ∞, es claro que $M - B = \bigcap_\gamma (M - B_\gamma)$ es cerrado y totalmente convexo, de donde sólo nos falta ver que es compacto, para esto veremos que es acotado. Supongamos que no lo es, entonces existe una sucesión $b_n \in M - B$, $b_n \longrightarrow \infty$, nuevamente podemos encontrar segmentos de C a q_n y por lo tanto los vectores tangentes en cero tendrán un punto de acumulación lo cual nos lleva a la existencia de un rayo de C a ∞ en $M - B$, lo cual es una contradicción, de donde se sigue que $M - B$ es compacto.

Para la segunda parte basta con observar lo siguiente: como la variedad es completa existe una sucesión de compactos K_n tal que $\bigcup K_n = M$ y $K_n \subset K_{n+1}$, entonces, sea $C_1 = D$, donde D es cualquier compacto totalmente convexo, existe n_1 tal que $D \subset intK_{n_1}$, por lo que podemos aplicar la construcción anterior a K_{n_1} y obtenemos C_2, para C_2 existe un n_2 tal que $C_2 \subset intK_{n_2}$, si aplicamos nuevamente la construcción a K_{n_2} obtenemos C_3, es claro que podemos repetir el proceso inductivamente y obtener la filtración deseada. ■

No todos los conjuntos totalmente convexos en una variedad se obtienen de la construcción del Lema 6.

TEOREMA :*El conjunto S de puntos simples en M intersecta todo com-*

pacto totalmente convexo C. De esto $S \neq \emptyset$.

Demostración :

Escojamos un compacto $D \supset C$ como en el Lema 3. Como C es compacto, podemos definir una función $h : M - D \longrightarrow C$ de la siguiente manera:

$$d(q, h(q)) = sup\{d(q,p)|p \in C\}$$

es claro que $h(q)$ es único, ya que de lo contrario habría dos puntos en C los cuales son los más alejados de q, pero esto nos llevaría a que cualquier geodésica, que está contenida en C por convexidad, que los une deja de ser cóncava con respecto a q. ■

Como fuerte corolario de lo anterior y del lema 4 tenemos:

TEOREMA : *M es contraible.*

Demostración :

Es consecuencia inmediata del Lema 4. ■

Notemos que como consecuencia de esto tenemos que el número de geodésicas entre p y q debe ser finito, ya que Serre en **[10]** demostro que existen un número infinito de geodésicas entre p y q si y sólo si algun grupo de homotopía $\pi_k(M)$ con $k \geq 1$ es no trivial.

Regresaremos ahora al estudio de las geodésicas.

Lema 7 : *Dado cualquier conjunto compacto $C \subset M$, existe una cota λ tal que la longitud de cualquier geodésica en C es menor que λ.*

Demostración :

Supondremos lo contrario y llegaremos a una contradicción.

Supongamos que existe una sucesión $\{\gamma_n : [-n, n] \longrightarrow C\}$ de segmentos geodésicos de longitud $2n$. Podemos suponer ademas que $\dot{\gamma}_n(0)$ converge a un v. Hagamos $\gamma(t) := exp(tv)$. Sea A la cerradura compacta de $\gamma(R)$ en C y escojamos q fuera de C tal que todo segmento geodésico en C sea cóncavo con respecto a q.

Sea $p \in A$ tal que $d(p, q) = d(p, A)$, existe una sucesión t_n tal que $t_n \longrightarrow p$ y $\dot{\gamma}(t_n) \longrightarrow w$, para la geodésica $g(t) := exp_p(tw)$ tenemos que $d(q, g(t)) >$

En general M es llamada *simplemente conexa al infinito* si para cualquier conjunto compacto C existe un conjunto compacto $D \supset C$ en M tal que $M - D$ es simplemente conexo. Para probar el Teorema ($n \geq 5$), nosotros mostraremos que M es simplemente conexa al infinito. lo cual junto con el lema 5 se seguirá de:

Lema 8 : *El complemento $M - C$ de cualquier conjunto compacto totalmente convexo C de M es k − conexo para $0 \leq k \leq n-2$.*

Demostración :

Sea $f : S^k \longrightarrow M - C$ una función continua representado una clase de homotopía de $\pi_k(M - C)$.

Determinemos $\epsilon > 0$ tal que todas las bolas métricas abiertas de radio ϵ centradas sobre los puntos de la vecindad

$$V = \{q \mid d(C,q) < \epsilon\}$$

de C son estrictamente convexos y $f(S^k) \cap V = \emptyset$. Dado $q \in V$ podemos encontrar un único punto $h(q)$ en C, determinado por $d(C,q) = d(h(q),q)$ por razones de convexidad. Claramente $h : V \longrightarrow C$ es una retracción continua. Ahora podemos definir un campo vectorial continuo Y en $V - C$:

$$Y(q) := (d(C,q) - \epsilon)(exp|U_q)^{-1} \circ h(q) \neq 0$$

donde U_q es la bola abierta de radio ϵ centrada en el origen del espacio tangente T_qM. Por argumentos estándar, podemos encontrar una subvariedad $W \subset V$ suave de $dim(W) = n$, con $C \subset intW$, y fijando algún punto $p \in C$, podemos extender $Y|\partial W$ continuamente a un campo vectorial Z en W con $Z|\partial W = Y|\partial W$, $Z(q) \neq 0$ de la siguiente manera: Notemos primero que por ser la variedad contraíble existe una sección no trivial, digamos $E_1 : M \longrightarrow T_pM$ tal que $E_1(x) = (x, e_1)$ donde e_1 es el primer básico en R^n, sea $\varphi : W \longrightarrow R$ tal que $\varphi|C \equiv 0$ y $\varphi|\partial W \equiv 1$, definamos entonces

$$Z(x) = (1 - \varphi(x))E_1(x) + \varphi(x)Y(x)$$

por lo que es claro que Z definido de esta manera satisface la condición descrita. Definamos un campo vectorial X en M tal que: $X|W := Z$, $X|V - W := Y|V - W$ y $X|M - V := 0$, entonces existe una continuación $F : D^{k+1} \longrightarrow M$ de f tal que $F|S^k = f$, $p \notin F(D^{k+1})$, para M contraible y $k+1 < n$. Consideremos $F_t : D^{k+1} \longrightarrow M$, $F_t(a) := exp(tX' \circ F(a))$ y $F_t|S^k = f$ si $t \geq 0$. Por los lemas 6 y 7 $F_t(D^{k+1}) \subset M - C$ para t suficientemente grandes, notemos que $\|X\|$ está acotado lejos de cero en $F(D^{k+1}) \cap W$ y $exp(tX_q) \notin C$ $\forall q \in M - W$, $t \geq 0$ ya que C es totalmente convexo, lo que termina la demostración. ■

De estos resultados obtenemos que M es contraíble y ademas simplemente conexa al infinito. A continuación enunciamos un Teorema de Stallings el cual nos permite obtener el resultado enunciado.

Teorema : *Toda variedad diferenciable, contraíble y simplemente conexa al infinito es difeomorfa a R^n si $n \geq 5$.*

Para una demostración de este Teorema ver **[12]**.

[8] Kobayashi, S. and Nomizu, K.
Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2. New York. Interscience 1963-1969.

[9] Preissman, A.
Quelques propiétés globales des espaces de Riemann.
Comment. Math. Helv. **15** 195-216 (1943)

[10] Serre, J. P.
Homologie singulière des espaces fibrés.
Ann. of Math. **54** 425-505 (1951).

[11] Spanier, E.
Algebraic Topology, New York-London.
McGraw Hill 1966.

[12] Stallings, J.
The piecewise-linear structure of euclidean space.
Proc. Cambridge Phil. Soc. **58** 481-488 (1962).