39

2 ej

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

EL CALCULO EN LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DE SEGUNDO ORDEN

TESIS

Que para obtener el título de:

MATEMATICO

Presenta

HUGO VILLASEÑOR HERNANDEZ

FALLA DE ORIGEN

México, D. F. Octubre, 1991.

PREFACIO

Los procesos estocásticos son una parte importante de las Matemáticas porque describen fenómenos aleatorios en el tiempo. pero también por ser funciones con diversas propiedades. En los cursos básicos de procesos estocásticos no se menciona la continuidad, diferenciabilidad o integrabilidad de ellos pues se da preferencia al estudio de la parte probabilística del fenómeno modelado

En este trabajo estudiamos un caso especial de procesos estocásticos, los de segundo orden. El objetivo es desarrollar el cálculo diferencial e integral de manera detallada, se prueban bastantes resultados minuciosa y formalmente, la demostración en la mayoría de los casos es propia.

En el capítulo uno se definen los procesos estocásticos de segundo orden, se calculan las funciones de covarianza y valor medio en algunos casos y analizamos estacionaridad en L_2.

El cálculo diferencial se inicia con la definición de norma dos-infinito, destacando la demostración de que el espacio de procesos L_2 acotados es de Banach. Más adelante se hace un análisis minuicioso de la relación que guarda la continuidad de la función de covarianza con la del proceso, lo mismo para la diferenciabilidad. Se prueban algunas relaciones entre la

CONTENIDO

CAPITULO UNO

PROCESOS ESTOCASTICOS DE SEGUNDO ORDEN

Damos primero algunas definiciones importantes en la teoría de la probabilidad y de los procesos estocásticos.

DEFINICION 1.1 Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F}$ una σ-algebra de subconjuntos de Ω, entonces una variable aleatoria real X es una función $X:(\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B})$; es decir, una función medible donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$.

DEFINICION 1.2 Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias con espacio parametral o conjuntos de índices T, esto es, $\{X(\omega,t): t\in T\}$.

El espacio parametral T puede ser cualquier conjunto ordenado, en particular nos interesa el caso en que $T=\mathbb{R}$ o $T=[a,b]$. Si T es a lo más numerable se dice que el proceso estocástico tiene parámetro discreto y si T es no numerable, se dice que el proceso tiene parámetro continuo.

DEFINICION 1.3 Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad y $\{X(\omega,t): t\in T\}$, un proceso estocástico, el proceso es de segundo orden si: para cada $t\in T$, $E[X^2(t)]=\int_\Omega X^2(t)\,dP$ es finita.

Es decir, un proceso estocástico es de segundo orden si cada una de las variables aleatorias que lo constituyen tienen segundo momento finito. Observemos que un proceso estocástico se puede ver como una función que a cada elemento de T le asigna una variable aleatoria (función medible) esto es una función $Y: T \to \{X:(\Omega,\mathcal{F}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})\}$. De esta manera podemos redefinir a los procesos de segundo orden o procesos estocásticos L_2.

DEFINICION 1.4 Un proceso estocástico de segundo orden es una función $X: T \to L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ en donde $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ es el espacio de las variables aleatorias con segundo momento finito: $L_2(\Omega,\mathcal{F},P) = \{f:(\Omega,\mathcal{F},P) \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega f^2\,dP < \infty\}$

Es claro que dada una variable aleatoria $f \in L_2$ tenemos una norma definida por $\|f\|_2^2 = \int_\Omega f^2\,dP = E(f^2)$. Ahora veremos algunos ejemplos de procesos estocásticos.

EJEMPLO 1.1 Sean $A, B \in L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ por lo que $\int_\Omega A^2\,dP$ y $\int_\Omega B^2\,dP$ son finitos. Definimos el proceso estocástico

$$X(t) = At + B \qquad \text{para cada } t \in T$$

entonces $X(t)$ es de segundo orden o equivalentemente

$$\int_\Omega X^2(t)\,dP < \infty \qquad \text{para cada } t \in T$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega X^2(t)\,dP &= \int_\Omega (At+B)^2\,dP \\ &= \int_\Omega (A^2t^2 + 2ABt + B^2)\,dP \\ &= t^2\int_\Omega A^2\,dP + 2t\int_\Omega AB\,dP + \int_\Omega B^2\,dP\end{aligned}$$

Puesto que $A, B \in L_2$ se tiene que

$$\int_\Omega A^2\,dP,\ \int_\Omega B^2\,dP < \infty \quad \text{y} \quad 2t\int_\Omega AB\,dP \le 2t\left[\left(\int_\Omega A^2\,dP\right)\left(\int_\Omega B^2\,dP\right)\right]^{1/2}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, de donde todos los sumandos

$$= \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{n} f_j^2(t)\,\varphi_j^2(\omega) + 2 \sum_{i\neq j=1}^{n} f_i(t) f_j(t)\,\varphi_i(\omega)\,\varphi_j(\omega) \right] dP$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f_j^2(t) \int_{\Omega} \varphi_j^2(\omega)\, dP + 2 \sum_{i\neq j=1}^{n} f_i(t) f_j(t) \int_{\Omega} \varphi_i(\omega)\,\varphi_j(\omega)\, dP$$

Que resulta ser finito por las consideraciones hechas arriba y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Un proceso estocástico importante es el siguiente:

EJEMPLO 1.4 Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, para cada $t \in T$ hacemos $X(t) = \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos \lambda_k t + B_k \operatorname{sen} \lambda_k t)$ un proceso estocástico. Existen segundos momentos para cada variable de X debido a que $A_k, B_k \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y a la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Así X es L_2.

DEFINICION 1.5 Sea $\{X(t) : t \in T\}$ un proceso L_2. La función de covarianza del proceso se define como:

$$K_X(s,t) = \operatorname{cov}[X(s), X(t)]$$
$$= E\{[X(s) - m_X(s)][X(t) - m_X(t)]\}$$

donde $m_X(s) = E[X(s)]$ y $m_X(t) = E[X(t)]$. m_X es la función valor medio, función de media del proceso.

Es claro que $X(s) - m_X(s) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y lo mismo sucede con $X(t) - m_X(t)$ lo cual quiere decir que $K_X(s,t)$ es un producto interior en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entre $X(s) - m_X(s)$ y $X(t) - m_X(t)$. $K_X(s,t)$ se puede reescribir como

$$K_X(s,t) = E[X(s)\,X(t)] - m_X(s)\, m_X(t) .$$

Frecuentemente usaremos la siguiente notación: $\|X(t)\|_2^2 = \int_{\Omega} X^2(t)\, dP = E[X^2(t)]$

Notemos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|K_X(s,t)|^2 = \left\{ E\{[X(s) - m_X(s)][X(t) - m_X(t)]\} \right\}^2$$

$$\leq \left\{ E[X(s) - m_X(s)]^2 \right\} \left\{ E[X(t) - m_X(t)]^2 \right\}$$

$$= \| X(s) - m_X(s) \|_2^2 \ \| X(t) - m_X(t) \|_2^2$$

$$= K_X(s,s)\, K_X(t,t)$$

$$= Var(X(s))\, Var(X(t))$$

DEFINICION 1.6 Si $X(t)$ con $t \in T$ es un proceso L_2 decimos que es estacionario si para cada $\tau \in T$ el proceso $Y(t) = X(t+\tau)$ tiene las mismas funciones de media y covarianza que el proceso original.

Una caracterización de los procesos de segundo orden estacionarios que nos será de mucha utilidad, se enuncia en la siguiente proposición.

PROPOSICION 1.7 Un proceso $X : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es estacionario si y sólo si $m_X(t)$ es constante y $K_X(s,t)$ depende sólo de $(t-s)$.

PRUEBA:

$\Rightarrow]$ Supongamos que X es estacionario, esto significa que dado $\tau \in T$, el proceso $Y(t) = X(t+\tau)$ tiene las mismas funciones de media y covarianza que $X(t)$. De este modo

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[Y(t)] \\ &= E[X(t+\tau)] \\ &= E[X(t)] \\ &= m_X(t) \end{aligned}$$

Como t es cualquiera y $E[X(t+\tau)] = E[X(t)]$, entonces $m_X(t)$ es constante. Luego

$$\begin{aligned} K_Y(s,t) &= cov[Y(s), Y(t)] \\ &= cov[X(s+\tau), X(t+\tau)] \\ &= cov[X(s), X(t)] \end{aligned}$$

$$= K_{\mathbb{X}}(s,t)$$

De la igualdad

$$\mathrm{cov}[\mathbb{X}(s+\tau), \mathbb{X}(t+\tau)] = \mathrm{cov}[\mathbb{X}(s), \mathbb{X}(t)]$$

obtenemos que

$$E[\mathbb{X}(s+\tau), \mathbb{X}(t+\tau)] = E[\mathbb{X}(s)\mathbb{X}(t)] .$$

Si fijamos s y t y hacemos variar sólo hay dependencia del número $t+\tau-(s+\tau) = t-s$.

La otra implicación es similar en la argumentación.

Hay más equivalencia de estacionaridad para los procesos L_2 :

PROPOSICION 1.8 $\mathbb{X} : T \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso estocástico L_2 estacionario si y sólo si $E[\mathbb{X}(s)]$ y $E[\mathbb{X}(s)\mathbb{X}(s+t)]$ son ambos independientes de s.

PRUEBA:

$\Rightarrow]$ Por la proposición anterior $m_{\mathbb{X}}$ es constante, lo que implica que $E[\mathbb{X}(s)]$ es independiente de s. Luego $K_{\mathbb{X}}(s, s+t) = \mathrm{cov}[\mathbb{X}(s), \mathbb{X}(s+t)]$ depende únicamente de t.

$\Leftarrow]$ Si $E[\mathbb{X}(s)]$ no depende de s entonces $m_{\mathbb{X}}$ es constante y si $E[\mathbb{X}(s)\mathbb{X}(s+t)]$ no depende de s y sólo depende de $t = s+t-s$ entonces

$$K_{\mathbb{X}}(s, s+t) = E[\mathbb{X}(s)\mathbb{X}(s+t)] - m_{\mathbb{X}}^2 \qquad \text{depende sólo de } t.$$

Observemos que la función de covarianza $K_{\mathbb{X}}(s,t)$ satisface:

i) $K_{\mathbb{X}}(s,t) = K_{\mathbb{X}}(t,s)$

ii) En el caso estacionario $K_{\mathbb{X}}(t) = K_{\mathbb{X}}(-t)$

iii) $|K_{\mathbb{X}}(t)| \leq K_{\mathbb{X}}(0) = E[|\mathbb{X}(s) - m_{\mathbb{X}}|^2]$

Esta última es por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

En seguida daremos ejemplos de procesos L_2 y veremos cuáles resultan ser donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ y $P_{ij}(t)$ es la probabilidad de que en t unidades de tiempo se pase de i a j elementos en la población y para este caso la distribución estacionaria (distribución límite) es:

$$\pi(0) = \lim_{t \to \infty} P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\pi(1) = \lim_{t \to \infty} P_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Es conocido el hecho de que a partir de la distribución estacionaria se puede construir un proceso que es cadena Markov, tal proceso es:

$$P[X(t)=0] = \pi(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad ; \quad P[X(t)=1] = \pi(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Es cadena Markov ya que:

$$P[X(t)=x \mid X(s)=y] = P_{yx}(t-s) \qquad \text{donde } s \leq t$$

y $P_{yx}(t)$ con $t \geq 0$ está dado como antes.

En seguida encontraremos $m_X(t)$ y $K_X(s,t)$:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[X(t)] \\ &= 0\,P[X(t)=0] + 1\,P[X(t)=1] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \qquad \text{que no depende de } t. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $s \leq t$ entonces

$$\begin{aligned} E[X(s)X(t)] &= P[X(s)=1\,,\,X(t)=1] \\ &= P[X(s)=1]\,P[X(t)=1 \mid X(s)=1] \\ &= P[X(s)=1]\;P_{11}(t-s) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,e^{-(\lambda+\mu)(t-s)}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\, e^{-(\lambda+\mu)(t-s)}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} K_X(s,t) &= \operatorname{cov}[X(s), X(t)] \\ &= E[X(s)X(t)] - E[X(s)]\,E[X(t)] \\ &= \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\, e^{-(\lambda+\mu)(t-s)} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ &= \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\, e^{-(\lambda+\mu)(t-s)} \qquad \text{si} \quad s \le t \end{aligned}$$

Y en el caso en que $t \le s$ se tendrá:

$$K_X(s,t) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\, e^{-(\lambda+\mu)(s-t)}$$

quedando:

$$K_X(s,t) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\, e^{-(\lambda+\mu)|t-s|}$$

para cualquier $s,t \in \mathbb{R}$

De aquí que $X(t)$ es estacionario con

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \qquad y \qquad K_X(t) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\, e^{-(\lambda+\mu)|t|} \qquad t \in \mathbb{R}$$

El siguiente ejemplo es importante en el estudio de los procesos estocásticos.

EJEMPLO 1.7 Consideremos el proceso Poisson $X(t)$, $t \in T$ con parámetro $\lambda > 0$. Recordemos que $X(t)$ cumple

i) $X(0) = 0$.

ii) $X(t) - X(s)$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda(t-s)$ con $s \le t$.

iii) Si $t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n \in \mathbb{R}$ entonces las variables aleatorias $X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \dots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$ son independientes.

Si un proceso cumple iii), se dice que tiene incrementos independientes.

En seguida encontraremos $m_X(t)$ y $K_X(s,t)$ para el proceso Poisson.

De lo anterior se concluye que el proceso Poisson no es estacionario aunque claramente es un proceso L_2.

EJEMPLO 1.8 Consideremos nuevamente un proceso Poisson $X(t)$ con parámetro λ y definamos $Y(t) = X(t+1) - X(t)$ con $t \in T$.

Procederemos a hallar las funciones $m_Y(t)$ y $K_Y(s,t)$.

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[Y(t)] \\ &= E[X(t+1) - X(t)] \\ &= E[X(t+1)] - E[X(t)] \\ &= \lambda(t+1) - \lambda t \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Para el cálculo de $K_Y(s,t)$, tomemos en cuenta varios casos:
Primero, si $|t-s| \geq 1$, esto es, los tiempos distan más de 1, podemos aplicar iii) a $s \leq s+1 \leq t \leq t+1$ o en el otro caso a $t \leq t+1 \leq s \leq s+1$ y obtener que

$$Y(s) = X(s+1) - X(s) \quad \text{y} \quad Y(t) = X(t+1) - X(t)$$

son independientes, y de aquí que

$$K_Y(s,t) = \operatorname{cov}[Y(s), Y(t)] = 0.$$

Por tanto consideremos el caso en que $|t-s| < 1$, por ejemplo $s \leq t \leq s+1 \leq t+1$ y en tal caso

$$\begin{aligned} K_Y(s,t) &= \operatorname{cov}[Y(s), Y(t)] \\ &= \operatorname{cov}[X(s+1) - X(s), X(t+1) - X(t)] \\ &= \operatorname{cov}[X(s+1) - X(t) + X(t) - X(s), X(t+1) - X(s+1) + X(s+1) - X(t)] \\ &= \operatorname{cov}[X(s+1) - X(t), X(t+1) - X(s+1)] + \operatorname{cov}[X(s+1) - X(t), X(s+1) - X(t)] \\ &\quad + \operatorname{cov}[X(t) - X(s), X(t+1) - X(s+1)] + \operatorname{cov}[X(t) - X(s), X(s+1) - X(t)] \end{aligned}$$

De la propiedad iii) de proceso de Poisson obtenemos

$\operatorname{cov}[X(s+1) - X(t), X(t+1) - X(s+1)] = 0 \qquad (t = t_0 \leq t_1 = s+1 \leq t_2 = t+1)$

$\operatorname{cov}[X(t) - X(s), X(t+1) - X(s+1)] = 0 \qquad (s = t_0 \leq t_1 = t \leq t_2 = s+1 \leq t_3 = t+1)$

$$\text{cov}[X(t)-X(s),\ X(s+1)-X(t)]=0 \qquad (s=t_0\le t_1=t\le t_2=s+1)$$

Por lo que $K_Y(s,t)$ se reduce a

$$\begin{aligned} K_Y(s,t) &= \text{cov}[X(s+1)-X(t),\ X(s+1)-X(t)] \\ &= \text{var}[X(s+1)-X(t)] = \lambda(s+1-t) \end{aligned}$$

ya que $X(s+1)-X(t) \sim \text{Poi}\ (\lambda(s+1-t))$

En el otro caso $t\le s\le t+1 < s+1$, resultará que

$$K_Y(s,t)=\lambda(t+1-s)$$

por lo que

$$K_Y(s,t)=\begin{cases}\lambda(1-|t-s|) & \text{si} \quad |t-s|<1 \\ 0 & \text{si} \quad |t-s|\geq 1\end{cases}$$

De donde $Y(t)$ es un proceso L_2 estacionario.

Podemos construir procesos L_2 estacionarios a partir de otros como se ve a continuación.

PROPOSICION 1.9 Si $X: T \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso estocástico estacionario de segundo orden entonces el proceso $Y: T \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definido por $Y(t)=X(t+1)-X(t)$, también lo es.

PRUEBA: Calculemos m_Y y K_Y

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[Y(t)] \\ &= E[X(t+1)-X(t)] \\ &= E[X(t+1)]-E[X(t)] \\ &= m_X(t+1)-m_X(t)=0 \end{aligned}$$

debido a que m_X es constante. Así m_Y es constante. Luego

$$\begin{aligned} K_Y(s,t) &= \text{cov}[Y(s),Y(t)] \\ &= \text{cov}[X(s+1)-X(s),\ X(t+1)-X(t)] \end{aligned}$$

$= \operatorname{cov}[X(s+1), X(t+1)] + \operatorname{cov}[X(s), X(t)] - \operatorname{cov}[X(s), X(t+1)] - \operatorname{cov}[X(s+1), X(t)]$

$= K_X(t-s) + K_X(t-s) - K_X(t+1-s) - K_X(t-s-1)$

Por lo que

$$K_Y(t) = K_Y(0,t) = 2K_X(t) - K_X(t+1) - K_X(t-1).$$

Resultando ser Y estacionario de segundo orden.

DEFINICION 1.10 Un proceso estocástico $X(t)$ con $t \in T$ se llama proceso Gaussiano si cada combinación lineal finita de variables aleatorias del proceso se distribuye normal; esto es, para toda $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i) \sim \text{Normal}.$$

Observaciones

i) Si $\{X(t) : t \in T\}$ es Gaussiano entonces cada variable aleatoria se distribuye normal (Tomando $n=1$ y $a_1 = 1$)

ii) Todo proceso Gaussiano es L_2 (Todas las variables normales tienen varianza en $\mathbb{R}$).

PROPOSICION 1.11 Si $\{X(t) : t \in T\}$ tiene función de covarianza K_X y si f es una función de T en $\mathbb{R}$ entonces, el nuevo proceso $\{Y(t) = X(t) + f(t),\ t \in T\}$ tiene la misma función de covarianza K_X.

PRUEBA: Notemos primero que para cada $t \in T$, $E[Y(t)] = E[X(t)] + f(t)$ lo que nos lleva a

$$m_Y(t) = m_X(t) + f(t)$$

es decir, la función media no es la misma. Por otra parte

$$K_X(s,t) = \operatorname{cov}[X(s), X(t)]$$
$$= E[X(s)X(t)] - E[X(s)]\,E[X(t)]$$

Mientras que

esta manera, si $\{X(t) : t \in T\}$ es Gaussiano, entonces la densidad conjunto de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $n \in \mathbb{N}$ es

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\mu})^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\bar{x} - \bar{\mu})\right]$$

donde Σ es la matriz de covarianza:

$$\Sigma = (\operatorname{cov}[x_i, x_j]) , \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\mu_k = E[X_k] .$$

El siguiente es un ejemplo de proceso Gaussiano muy importante:

EJEMPLO 1.9 Movimiento Browniano o Proceso de Wiener.
Este proceso describe un fenómeno físico bastante común como lo es la posición de una partícula suspendida en un medio líquido con movimientos irregulares debidos a "bombardeos" de pequeñas partículas del propio líquido. De esta forma tenemos el movimiento Browniano como un proceso $\{B(t) : t \in T\}$ donde para cada $t_0 \in T$, $B(t_0)$ es la posición de la partícula en un sistema cartesiano que cumple:
i) $B(0) = 0$
ii) $B(t) - B(s) \sim N[0, \sigma^2(t-s)]$ con $s \leq t$ y $\sigma^2 > 0$
iii) $\{B(t) : t \in T\}$ tiene incrementos independientes, es decir, sean $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \in T$ entonces:

$$B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

son independientes.

Así, cada proceso que cumpla i), ii) y iii) se le conoce como movimiento Browniano con parámetro $\sigma^2 > 0$. Este proceso es Gaussiano (y por lo tanto L_2) debido a que

$$B(t) = B(t) - B(0) \sim N(0, \sigma^2 t)$$

i) y ii) justifican lo anterior.
Las funciones de media y covarianza son

$$m_B(t) = E[B(t)] = 0$$

$$K_B(s,t) = \text{cov}\,(B(s), B(t))$$

$$= \begin{cases} \sigma^2 \min\{|s|, |t|\} & \text{si } st \geq 0 \\ 0 & \text{si } st \leq 0 \end{cases}$$

El procedimiento de obtención de la función de covarianza $K_B(s,t)$ es idéntico al del ejemplo 1.7 (Proceso Poisson).
Considerando que para este caso $T = \mathbb{R}^+$ (el tiempo), resultará que

$$K_B(s,t) = \sigma^2 \min\{s, t\} \quad \text{con } s,t \geq 0$$

DEFINICION 1.14 Sean $X, Y : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dos procesos estocásticos de segundo orden, definimos la función de covarianza cruzada de X y Y como

$$K_{XY}(s,t) = \text{cov}[X(s), Y(t)]$$

Claramente

$$K_{XY}(s,t) = K_{YX}(t,s)$$

y

$$K_{XX}(s,t) = K_X(s,t)$$

Calculemos como ejemplo $K_{XY}(s,t)$ donde X es el proceso L_2 estacionario y $Y(t) = X(t+1)$, de este modo

$$\begin{aligned} K_{XY}(s,t) &= \text{cov}[X(s), Y(t)] \\ &= \text{cov}[X(s), X(t+1)] \end{aligned}$$

$$= K_X(s,t+1)$$
$$= K_X(t+1-s).$$

Veremos algunas propiedades interesantes del proceso Gaussiano más estudiado: el movimiento Browniano $B : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el cual definimos previamente.

PROPOSICION 1.15 Sea $B : \mathbb{R} \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el movimiento Browniano y sea $n \in \mathbb{N}$ entonces $\sum_{k=1}^{n} B(k)$ es una variable aleatoria Normal con media cero y varianza $\dfrac{n(n+1)(2n+1)\sigma^2}{6}$

PRUEBA:

La suma $\sum_{k=1}^{n} B(k)$ la debemos escribir como una combinación lineal de variables aleatorias normales e independientes. Es claro que

$$\sum_{k=1}^{n} B(k) = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)[B(j+1) - B(j)]$$

como $B(j+1) - B(j)$ se distribuye Normal con media cero y varianza σ^2 y por la propiedad de incrementos independientes la suma de la derecha corresponde a una variable aleatoria normal. Calculemos la media

$$E\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)[B(j+1) - B(j)] \right\} = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\, E[B(j+1) - B(j)] = 0$$

la varianza

$$\operatorname{Var}\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)[B(j+1) - B(j)] \right\} = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^2 \operatorname{Var}[B(j+1) - B(j)]$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^2$$

$$= \sigma^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Un problema importante es el cálculo de las funciones de media y covarianza del cuadrado del movimiento Browniano, pero lo haremos más general y encontraremos las funciones m y K para el cuadrado del proceso Gaussiano con media cero.

PROPOSICION 1.16 Si $X : \mathbb{R} \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso Gaussiano con $m_X = 0$ y $K_X(s,t)$ cualquiera entonces el proceso estocástico $Y : \mathbb{R} \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $Y(t) = X^2(t)$ tiene funciones de media y covarianza dadas por $m_Y(t) = Var[X(t)]$ y $K_Y(s,t) = 2K_X^2(s,t)$.

PRUEBA:

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[Y(t)] \\ &= E[X^2(t)] \\ &= Var[X(t)] \end{aligned}$$

pues $E[X(t)] = 0$.

$$\begin{aligned} K_Y(s,t) &= cov[Y(s), Y(t)] \\ &= cov[X^2(s), X^2(t)] \\ &= E[X^2(s)X^2(t)] - E[X^2(s)]\,E[X^2(t)] \end{aligned}$$

La dificultad está en calcular el valor de $E[X^2(s)X^2(t)]$. Como el proceso es Gaussiano sabemos que las variables aleatorias $X(s)$ y $X(t)$ tienen densidad conjunta normal bivariada con vector de medias nulo y deseamos calcular el segundo momento de la variable aleatoria

$$Z = X(s)X(t)$$

Si hallamos $M_Z(t)$ la función generadora de momentos de Z y en seguida obtenemos $M_Z''(0)$ resolvemos el problema debido a que

$$M_Z''(0) = E[Z^2] = E[X^2(s)X^2(t)]$$

De este modo

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[\exp(tz)] \\ &= E[\exp(tX(s)X(t)] \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(txy)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho)^2}\left[\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\frac{xy}{\sigma_X\sigma_Y}\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2t(1-\rho^2)xy\right]\right\} dx\, dy$$

donde

$$\sigma_X^2 = Var[X(s)] \qquad \sigma_Y^2 = Var[X(t)]$$

y

$$\rho = \frac{cov[X(s), X(t)]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{K_X(s,t)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

completando cuadrados y separando exponenciales

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X\sigma_Y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x}{\sigma_X} - \sigma_X\left(\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} + t(1-\rho^2)\right)y\right]^2\right\}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)^2}\left[\frac{1}{\sigma_Y^2} - \left(\frac{\rho}{\sigma_Y} + t\sigma_X(1-\rho^2)\right)^2\right]\right\} dx\, dy$$

Pero sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x}{\sigma_X} - \left(\frac{\rho}{\sigma_X} + t\sigma_X(1-\rho^2)\right)y\right]^2\right\} dx = \sigma_X$$

por propiedades de la distribución normal. Así solo nos queda:

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{\frac{-y^2}{2}}{\frac{1-\rho^2}{\frac{1}{\sigma_X^2} - \left(\frac{\rho}{\sigma_Y} + t\sigma_X(1-\rho^2)\right)^2}}\right\} dy$$

podemos completar una normal multiplicando y dividiendo por

$$\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\frac{1}{\sigma_Y^2}-\left(\frac{\rho}{\sigma_Y}+t\sigma_X(1-\rho^2)\right)^2}}$$

resultándonos

$$M_Z(t) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-[\rho+t\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)]^2}}$$

La segunda derivada

$$M_Z''(t) = (1-\rho^2)^{3/2}\,\sigma_X\sigma_Y\left\{[\rho+t\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)]\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left[1-(\rho+t\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2))^2\right]^{-5/2}(-2)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot[\rho+t\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)]\,\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)+\left[1-(\rho+t\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2))^2\right]^{-3/2}\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)\right\}$$

y

$$\begin{aligned}M_Z''(0) &= 3\sigma_X^2\sigma_Y^2\rho^2+\sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2)\\ &= \sigma_X^2\sigma_Y^2\,(2\rho^2+1)\\ &= \sigma_X^2\sigma_Y^2\left[\frac{2\,\mathrm{cov}^2(X(s),X(t))}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}+1\right]\\ &= 2\,\mathrm{cov}^2(X(s),X(t))+\sigma_X^2\sigma_Y^2\end{aligned}$$

De este modo:

$$\begin{aligned}K_Y(s,t) &= \mathrm{cov}[X^2(s),X^2(t)]\\ &= E[X^2(s)X^2(t)]-E[X^2(s)]\,E[X^2(t)]\\ &= 2\,\mathrm{cov}^2[X(s),X(t)]+\mathrm{Var}[X(s)]\,\mathrm{Var}[X(t)]-\\ &\quad-\mathrm{var}[X(s)]\,\mathrm{var}[X(t)]\end{aligned}$$

$$= 2\,\mathrm{cov}^2\left[\mathbb{X}(s), \mathbb{X}(t)\right]$$

$$= 2\,K_{\mathbb{X}}^2(s,t).$$

Entonces todo cuadrado de un proceso Gaussiano de media cero cumple con esta propiedad.

CAPITULO DOS

CALCULO DIFERENCIAL EN LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DE SEGUNDO ORDEN

En este capítulo se estudian los procesos L_2 en cuanto a sus propiedades desde el punto de vista del cálculo diferencial. A grandes rasgos podríamos decir que analizaremos continuidad y diferenciabilidad de procesos de segundo orden junto con algunos teoremas clásicos del cálculo diferencial.

DEFINICION 2.1 Sea $X : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un proceso estocástico de segundo orden y definimos la norma dos, infinito de X como

$$\|X\|_{2\infty} = \sup_{t\in T} \left\{ \|X(t)\|_2 = \sqrt{E[X^2(t)]} = \left[\int_\Omega X^2(t)\,dP \right]^{1/2} \right\} \quad ,$$

entonces X es acotado si $\|X\|_{2,\infty} < \infty$.

Veremos algunos ejemplos de procesos acotados y otros ejemplos en donde el proceso no resulte ser acotado, en cuyo caso se procederá a hallar las condiciones que le falten para serlo.

Antes especifiquemos que se puede definir de igual manera un proceso estocástico acotado en $T_0 \subseteq T$ si $\sup_{t\in T_0} \{ \|X(t)\|_2 \} < \infty$

Es claro que si X es acotado entonces es acotado en $T_0 \subseteq T$ para cualquier $T_0 \subseteq T$, puesto que

$$\sup_{t\in T_0} \left\{ \|X(t)\|_2 \right\} \leq \sup_{t\in T} \left\{ \|X(t)\|_2 \right\}$$

No es necesario probar que $\|\mathbb{X}\|_{2,\infty}$ es en efecto norma:

a) $\|\mathbb{X}\|_{2,\infty} \geq 0$

b) $\|\mathbb{X}\|_{2,\infty} = 0 \iff \mathbb{X} = 0$

c) $\|\mathbb{X}+Y\|_{2,\infty} \leq \|\mathbb{X}\|_{2,\infty} + \|Y\|_{2,\infty}$

d) $\|\alpha \mathbb{X}\|_{2,\infty} = |\alpha| \, \|\mathbb{X}\|_{2,\infty}$ si $\alpha \in \mathbb{R}$

son propiedades que claramente se cumplen.

Veamos los ejemplos del capítulo anterior y analicemos si son o no acotados.

EJEMPLO 2.1 Se tienen $A, B \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y T un conjunto, entonces $\mathbb{X} : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definido como $\mathbb{X}(t) = At + B$ es L_2 pues

$$\begin{aligned} \|\mathbb{X}(t)\|_2^2 &= E[\mathbb{X}^2(t)] \\ &= \int_\Omega \mathbb{X}^2(t)\, dP \\ &= t^2 E(A^2) + 2t\, E(A,B) + E(B^2) \end{aligned}$$

Observamos que $\sup_{t\in T} \{ \|\mathbb{X}(t)\|_2^2 \}$ existe sólo cuando existen:

$\sup_{t\in T} \{t^2\}$ y $\sup_{t\in T}\{t\}$, lo que implica que T debe ser un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, es decir $T = [a,b]$. De esta manera podemos concluir que en este ejemplo $\|\mathbb{X}\|_{2,\infty} < \infty$ siempre y cuando $T = [a,b]$; $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo que este proceso es acotado cuando $\mathbb{X} : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

EJEMPLO 2.2 Se tienen $A_0, A_1, \ldots, A_n \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\mathbb{X} : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se define como $\mathbb{X}(t) = A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n$, $\mathbb{X}(t)$ es un proceso L_2 y

$$\|\mathbb{X}(t)\|_2^2 = E[\mathbb{X}^2(t)]$$

$$= \int_\Omega [X^2(t)]\, dP$$

donde:
$$\|X(t)\|_2^2 = \sum_{i=0}^{n} t^{2i} \int_\Omega A_i^2\, dP + 2 \sum_{i\neq j=0}^{n} t^{i+j} \int_\Omega A_i A_j\, dP$$

por lo que
$$\sup_{t\in T} \{ \|X(t)\|_2^2 \} = \sup_{t\in T} \left\{ \sum_{i=0}^{n} t^{2i} E(A_i^2) + 2\sum_{i\neq j=0}^{n} t^{i+j} E(A_i A_j) \right\}$$

lo cual implica que la existencia de este supremo está condicionado a la existencia de los siguientes
$$\sup_{t\in T} \{t^i\} \quad \text{para toda } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Y de nuevo obtenemos que $T = [a,b]$ $a,b \in \mathbb{R}$. Así el proceso es L_2 acotado cuando $X : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Denotemos por $\mathcal{B}(T, L_2)$ al conjunto de todos los procesos de T en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que resultan ser acotados, esto es
$$\mathcal{B}(T, L_2) = \{ X : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid \|X\|_{2,\infty} < \infty \}$$

PROPOSICION 2.2 $\mathcal{B}(T, L_2)$ es un espacio vectorial normado con $\|X\|_{2,\infty} = \sup_{t\in T} \{ \|X(t)\|_2 \}$.

Consideramos que no es necesaria la prueba en este caso.

DEFINICION 2.3 Una sucesión $(\alpha_n)_n$ en un espacio vectorial normado decimos que es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$ antonces $\|\alpha_n - \alpha_m\| < \varepsilon$.

DEFINICION 2.4 Un espacio vectorial normado F es de Banach si toda sucesión de Cauchy de elementos de F converge (con la norma en cuestión).

PROPOSICION 2.5 $\mathcal{B}(T, L_2)$ es un espacio de Banach con la norma $\| \quad \|_{2,\infty}$.

PRUEBA:

La demostración de este resultado se basa primordialmente en el hecho de que $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de Banach:

Sea X_n una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(T, L_2)$ es decir, una sucesión de Cauchy de procesos L_2 acotados, de aquí que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|X_m - X_n\|_{2,\infty} < \varepsilon \qquad \text{cuando } m \geq n_0 \text{ y } n \geq n_0$$

pero como $\|X_m - X_n\|_{2,\infty} = \sup_{t \in T} \{ \|X_m(t) - X_n(t)\|_2 \}$, se obtiene que

para todo $t \in T$, $\|X_m(t) - X_n(t)\|_2 < \infty$ cuando $m \geq n_0$ y $n \geq n_0$

De esta manera tenemos una sucesión de Cauchy en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Y como dijimos anteriormente, es conocido el hecho de que $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es completo, por lo que la sucesión $(X_n(t))_n$ $t \in T$ coverge en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $X(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Tenemos

$$\|X_n(t) - X(t)\|_2 < \varepsilon \qquad \text{para todo } t \in T \text{ y } n \geq n_0$$

pero

$$\|X_n(t) - X(t)\|_2 \geq \|X(t)\|_2 - \|X_n(t)\|_2$$

por otro lado

$$\|X_n(t)\|_2 \leq \sup_{t \in T} \{ \|X_n(t)\|_2 \} = \|X_n\|_{2,\infty}$$

de donde

$$-\|X_n(t)\|_2 \geq -\|X_n\|_{2,\infty}$$

Así:

$$\|X(t)\|_2 - \|X_n(t)\|_2 \geq \|X(t)\|_2 - \|X_n\|_{2,\infty}$$

y por transitividad

$$\|X(t)\|_2 - \|X_n\|_{2,\infty} < \varepsilon$$

llegando a

$$\|X(t)\|_2 \leq \|X_n\|_{2,\infty} + \varepsilon \qquad \text{para todo } t \in T$$

Lo que implica que X es acotado, esto es, $X \in \mathcal{B}(T, L_2)$.

Hemos trabajado convergencia con $\|\ \|_{2,\infty}$ por lo que estamos en condiciones de dar la siguiente definición:

DEFINICION 2.6 Sea X_n una sucesión en $\mathcal{B}(T, L_2)$ entonces X_n converge uniformemente a $X \in \mathcal{B}(T, L_2)$ si y sólo si $\|X_n - X\|_{2,\infty}$ converge a cero cuando $n \longrightarrow \infty$, esto es:

$$X_n \xrightarrow{u} X \iff \|X_n - X\|_{2,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

EJEMPLO 2.3 Daremos un ejemplo de una sucesión de procesos de segundo orden que converjan en $\mathcal{B}(T, L_2)$ a otro proceso. Consideramos una sucesión de movimientos Brownianos $B_n: [0,1] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $B_n(t) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2 t}{n}\right)$ cada B_n pertenece a $\mathcal{B}([0,1], L_2)$ debido a que

$$\|B_n(t)\|_2 = \sqrt{t/n}\ \sigma \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned} \|B_n\|_{2,\infty} &= \sup_{t\in[0,1]} \|B_n(t)\|_2 \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \sqrt{\frac{t}{n}}\ \sigma \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \infty . \end{aligned}$$

Entonces B_n converge uniformemente al proceso nulo $X(t) = 0$ para cada $t \in [0,1]$ puesto que

$$\begin{aligned} \|B_n - X\|_{2,\infty} &= \|B_n\|_{2,\infty} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

El siguiente resultado es importante pues indica que en $\mathcal{B}(T, L_2)$

el límite uniforme es único:

PROPOSICION 2.7 Si $X_n \xrightarrow{u} X$ y si $X_n \xrightarrow{u} Y$ entonces $X = Y$

PRUEBA: $X_n \xrightarrow{u} X \Rightarrow$ Dado $\varepsilon/2 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\|X_n - X\|_{2,\infty} < \varepsilon/2$

$X_n \xrightarrow{u} Y \Rightarrow$ Dado $\varepsilon/2 > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m_0$ entonces

$$\|X_n - Y\|_{2,\infty} < \varepsilon/2$$

Hacemos $N = \max\{n_0, m_0\}$ y obtenemos que si $n \geq N$ entonces

$$\|X_n - X\|_{2,\infty} < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad \|X_n - Y\|_{2,\infty} < \varepsilon/2$$

consecuentemente

$$\begin{aligned}\|Y - X\|_{2,\infty} &= \|Y - X_n + X_n - X\|_{2,\infty} \\ &\leq \|Y - X_n\|_{2,\infty} + \|X_n - X\|_{2,\infty} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

Así que si $n \geq N$ entonces $\|Y - X\|_{2,\infty} < \varepsilon$, donde $\|Y - X\|_{2,\infty}$ no depende de n, por lo tanto $\|Y - X\|_{2,\infty} = 0$, entonces $Y - X = 0$ o sea $Y = X$.

El siguiente resultado indica que el límite uniforme de una combinación lineal, es una combinación lineal de los límites uniformes:

PROPOSICION 2.8 En $\mathcal{B}(T, L_2)$ si $X_n \xrightarrow{u} X$ y $Y_n \xrightarrow{u} Y$ entonces $aX_n + bY_n \xrightarrow{u} aX + bY$ donde a y b son constantes.

PRUEBA: Supongamos que $a, b \neq 0$ y consideremos $\varepsilon > 0$, como $X_n \xrightarrow{u} X$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\|X_n - X\|_{2,\infty} < \frac{\varepsilon}{2|a|}$$

y como $Y_n \xrightarrow{u} Y$ entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m_0$ entonces

$$\|Y_n - Y\|_{2,\infty} < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

Haciendo $N = \max\{n_0, m_0\}$ sucede que si $n \geq N$ entonces

$$\|(aX_n + bY_n) - (aX + bY)\|_{2,\infty} = \|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)\|_{2,\infty}$$

$$\leq \|a(X_n - X)\|_{2,\infty} + \|b(Y_n - Y)\|_{2,\infty}$$
$$= |a|\,\|X_n - X\|_{2,\infty} + |b|\,\|Y_n - Y\|_{2,\infty}$$
$$< |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba la proposición.

Hemos introducido el concepto de proceso acotado, pero también es posible, dado un conjunto de procesos acotados, preguntarnos si el conjunto es acotado o no, lo que no lleva a la siguiente definición:

DEFINICION 2.9 Sea $\{X_k\}$ un conjunto de elementos de $\mathcal{B}(T, L_2)$ decimos que $\{X_k\}$ es acotado si $\sup_k \{\|X_k\|_{2,\infty}\} < \infty$.

De aquí el siguiente resultado interesante

PROPOSICIÓN 2.10 Si $X_n \xrightarrow{u} X$ entonces $\{X_n\}_n$ $n \in \mathbb{N}$ es acotado.

PRUEBA: Como $X_n \xrightarrow{u} X$ entonces $\|X_n - X\|_{2,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

pero $\quad 0 \leq \left| \|X_n\|_{2,\infty} - \|X\|_{2,\infty} \right| \leq \|X_n - X\|_{2,\infty}$

por lo que
$$\left[\|X_n\|_{2,\infty} - \|X\|_{2,\infty} \right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
o equivalentemente
$$\|X_n\|_{2,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|X\|_{2,\infty}$$

Por otra parte si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{\|X_n\|_{2,\infty}\} = \infty$ entonces habría dos posibilidades:

i) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|X_n\|_{2,\infty} = \infty$, lo cual no puede suceder puesto que estamos trabajando con sucesiones de procesos acotados.

ii) Existen una infinidad de índices $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|X_n\|_{2,\infty} > \|X\|_{2,\infty}$$

lo que contradice el hecho de que $\|X_n\|_{2,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|X\|_{2,\infty}$

De esta manera $\sup\{\|X_n\|_{2,\infty}\} < \infty$ Así que $\{X_n\}$ es acotado.

Enunciamos en seguida otro tipo de convergencia de procesos acotados.

DEFINICION 2.11 Sea $(X_n)_n$ una sucesión de procesos L_2, decimos que X_n converge simplemente a X si para cada $t\in T$ la sucesión $(X_n(t))_n$ converge a $X(t)$ en L_2.

En notación es así:

$X_n \xrightarrow{s} X$ si cada $t\in T$ cumple $\|X_n(t)-X(t)\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

de la desigualdad

$$\|X_n(t)-X(t)\|_2 \leq \|X_n - X\|_{2,\infty} \qquad \forall\, t\in T$$

se deduce que convergencia uniforme implica convergencia simple. Pero convergencia simple no implica convergencia uniforme como vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.4 Tomemos A en $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ una variable aleatoria con $\|A_2\|_2 > 0$ y sea $X_n:[0,1]\longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ una sucesión de procesos de segundo orden definida por $X_n(t)=At^n$

Así $\|X_n(t)\|_2 = \|At^n\|_2 = t^n\|A\|_2 < \infty$

Por lo que en efecto la sucesión es de procesos L_2 además

$$\|X_n\|_{2,\infty} = \sup_{t\in[0,1]}\{t^n\|A\|_2\}$$

$$= \|A\|_2 < \infty$$

Obtenemos de esto que $X_n \in \mathcal{B}([0,1], L_2)$.

Probemos ahora que $X_n \xrightarrow{s} X$ donde X es el proceso estocástico de segundo orden definido por

$$X(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\in[0,1) \\ A & \text{si } t=1 \end{cases}$$

Si tomamos $t \in [0,1)$ y evaluamos

$$\|X_n(t) - X(t)\|_2 = \|X_n(t)\|_2$$
$$= \|A\|_2 t^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ahora si $t=1$

$$\|X_n(1) - X(1)\|_2 = \|A - A\|_2 = 0$$

Por lo que

$$X_n \xrightarrow{s} X$$

La convergencia no es uniforme puesto que

$$\|X_n - X\|_{2,\infty} = \sup_{t\in[0,1]} \|X_n(t) - X(t)\|_2$$

$$= \sup_{t\in[0,1]} \|A\|_2 t^n$$

$$= \|A\|_2 > 0$$

Por lo que la implicación en sentido inverso no es cierta.

Otra de las propiedades a estudiar en todo tipo de funciones es la continuidad, la estudiaremos en los procesos L_2

DEFINICION 2.12 Sea $X: T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un proceso L_2, decimos que X es continuo en $t \in T$ si
Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces $\|X(t+h) - X(t)\|_2 < \varepsilon$
En otras palabras si:

$$\|X(t+h) - X(t)\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

DEFINICION 2.13 Un proceso L_2, $X: T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ decimos que es continuo en T si es continuo en todo punto de T y es continuo en $T_0 \subseteq T$ si es continuo en todo punto de T_0.

Denotaremos como $\mathcal{C}(T, L_2)$ al conjunto de los procesos $X: T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que son continuos en T.

PROPOSICION 2.14 Si $X, Y \in \mathcal{C}(T, L_2)$ entonces $aX+bY \in \mathcal{C}(T, L_2)$.

PRUEBA: Sea $\varepsilon > 0$ y sea $t \in T$ como $X \in \mathcal{C}(T, L_2)$, dado $\frac{\varepsilon}{2|a|} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|h| < \delta_1$ entonces

$$\| X(t+h) - X(t) \|_2 < \frac{\varepsilon}{2|a|}$$

Y como $Y \in \mathcal{C}(T, L_2)$ dado $\frac{\varepsilon}{2|b|} > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|h| < \delta_2$ entonces

$$\| Y(t+h) - Y(t) \|_2 < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

hacemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y así:

$$\| aX(t+h) + bY(t+h) - aX(t) - bY(t) \|_2 = \| a[X(t+h) - X(t)] + b[Y(t+h) - Y(t)] \|_2$$

$$\leq \| a[X(t+h) - X(t)] \|_2 + \| b[Y(t+h) - Y(t)] \|_2$$

$$= |a| \, \| X(t+h) - X(t) \|_2 + |b| \, \| Y(t+h) - Y(t) \|_2$$

$$< |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo que $aX + bY$ es continuo en $t \in T$ y de aquí que $aX + bY \in \mathcal{C}(T, L_2)$. En el caso en que $a=0$ ó $b=0$ es inmediato el resultado.

La siguiente proposición indica que el subespacio de los procesos continuos y acotados es cerrado bajo límite uniforme.

PROPOSICION 2.15 Si $X_n \in \mathcal{B}(T, L_2)$ es una sucesión de procesos en $\mathcal{C}(T, L_2)$ tales que $X_n \xrightarrow{u} X$ entonces $X \in \mathcal{C}(T, L_2)$.

Por tanto

$$|E(\varphi_n\psi_n)-E(\varphi\psi)| = |E[(\varphi_n-\varphi)(\psi_n-\psi)] + E[(\varphi_n-\varphi)\psi] + E[\varphi(\psi_n-\psi)]|$$

$$\leq |E[(\varphi_n-\varphi)(\psi_n-\psi)]| + |E[(\varphi_n-\varphi)\psi]| + |E[\varphi(\psi_n-\psi)]|$$

luego por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|E(\varphi_n\psi_n)-E(\varphi\psi)| \leq [E(\varphi_n-\varphi)^2]^{1/2}[E(\psi_n-\psi)^2]^{1/2} + [E(\varphi_n-\varphi)^2]^{1/2}[E(\psi)^2)]^{1/2} + [E(\varphi^2)]^{1/2}[E(\psi_n-\psi)^2]^{1/2}$$

Pero por hipótesis $[E(\varphi_n-\varphi)^2]^{1/2}$, $[E(\psi_n-\psi)^2]^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, de donde cada término tiende a cero. Así:

$$|E(\varphi_n\psi_n)-E(\varphi\psi)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

O equivalentemente

$$E(\varphi_n\psi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(\varphi\psi)$$

El resultado que probaremos es la equivalencia entre la continuidad del proceso y la continuidad de la función de covarianza, se expone en dos partes.

PROPOSICION 2.17 (PRIMERA PARTE) Sea $X: T \longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ un proceso estocástico de segundo orden con funciones valor medio m_X continua y de covarianza K_X; X es continuo en $t\in T$ si y sólo si K_X es continua en (t,t).

PRUEBA:

$\Rightarrow]$ Supongamos $X \in \mathcal{C}(T, L_2)$ consideremos el proceso $Y = X - m_X$ o sea $Y(t) = X(t) - m_X(t)$ que es continuo ya que:

$$= K_X(t+h, t+h) - 2K_X(t, t+h) + K_X(t,t)$$

Si hacemos tender h a cero tenemos:

$$\|X(t+h) - X(t)\|_2^2 = K_X(t+h, t+h) - 2K_X(t, t+h) + K_X(t,t) \xrightarrow[h\to 0]{}$$

$$K_X(t,t) - 2K_X(t,t) + K_X(t,t) = 0 .$$

En realidad la segunda parte se puede ver como corolario de la primera, de cualquier manera la enunciamos

PROPOSICION 2.17 (SEGUNDA PARTE) Bajo las mismas hipótesis de la primera parte, si K_X es continua en (t,t) para cada $t \in T$ entonces lo es en (s,t) para todo (s,t).

PRUEBA: Para probarlo supondremos de nuevo que $m_X \equiv 0$

Por la proposición anterior la continuidad de X en t, o sea $X(t+h) \xrightarrow[h\to 0]{L_2} X(t)$, lo mismo ocurre para $s \in T$, $X(s+h) \xrightarrow[h\to 0]{L_2} X(s)$

Luego

$$K_X[s+h, t+h] = \operatorname{cov}(X(s+h), X(t+h))$$
$$= E[X(s+h)X(t+h)] \xrightarrow[h\to 0]{} E[X(s)X(t)] = \operatorname{cov}(X(s), X(t))$$
$$= K_X(s,t).$$

Como vimos en el capítulo anterior hay procesos L_2 que son estacionarios, su función de covarianza sólo depende de una variable esto es, si X es L_2 estacionario entonces tiene función de covarianza $K_X(t)$. Trataremos ahora dos resultados sobre continuidad para procesos estacionarios.

PROPOSICION 2.18 Si $X: T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es estacionario con función de covarianza $K_X(t)$ y si X es continuo en $s \in T$ entonces K_X es continua en cero.

Debemos probar que $K_X(t+h) \xrightarrow[h\to 0]{} K_X(t)$. Tenemos la continuidad del proceso X por lo que

$$\|X(s+t+h) - X(s+t)\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \qquad y \qquad \|X(s) - X(s)\|_2 = 0$$

De aquí que

$$E[X(s+t+h)X(s)] \xrightarrow[h\to 0]{} E[X(s+t)X(s)] \qquad y$$

$$E[X(s+t+h)] \xrightarrow[h\to 0]{} E[X(s+t)]$$

Así:

$$\begin{aligned} K_X(t+h) &= \operatorname{cov}[X(s+t+h), X(s)] \\ &= E[X(s+t+h)X(s)] - E[X(s+t+h)]E[X(s)] \xrightarrow[h\to 0]{} E[X(s+t)X(s)] - \\ &\qquad - E[X(s+t)]E[X(s)] \end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0} K_X(t+h) = \operatorname{cov}[X(s+t), X(s)] = K_X(t)$$

Por tanto K_X es continua en todo $t \in T$.

EJEMPLO 2.5 El movimiento Browniano $B: \mathbb{R}^+ \longrightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es un proceso L_2 continuo ya que

$$\begin{aligned} \|B(t+h) - B(t)\|_2^2 &= E[B^2(t+h) - 2B(t)B(t+h) + B^2(t)] \\ &= \sigma^2(t+h) - 2K_B(t, t+h) + \sigma^2 t \\ &= \sigma^2(2t+h) - 2\sigma^2 \min\{t, t+h\} \\ &= \sigma^2[2t+h - 2\min\{t, t+h\}] \end{aligned}$$

luego:

$$\|B(t+h) - B(t)\|_2^2 = \begin{cases} -h\sigma^2 & \text{si } h > 0 \\ h\sigma^2 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Por lo que $\qquad \|B(t+h) - B(t)\|_2^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Y así hemos probado la continuidad del movimiento Browniano.

DEFINICION 2.20 Una familia de procesos L_2 $H = \{X_j : j \in J\}$

decimos que es equicontinua en el punto $t \in T$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces $\|X_j(t+h) - X_j(t)\|_2 < \varepsilon$ para cada $j \in J$. Notemos que es la misma $\delta > 0$ para todos los procesos de la familia.

DEFINICION 2.21 Con la información de la definición anterior decimos que H es equicontinuo si lo es para todo $t \in T$.

Algunas consecuencias de estas últimas definiciones son las siguientes.

PROPOSICION 2.22 Si $H = \{X_1, \ldots, X_N\}$ $N \in \mathbb{N}$ es una colección finita de procesos tales que $X_i \in \mathcal{C}(T, L_2)$ $\forall i = 1, \ldots, N$ entonces H es equicontinuo

PRUEBA: Para verificar la conclusión se hará lo siguiente:
Sea $\varepsilon > 0$ como X_1 es continuo en $t \in T$ entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $|h| < \delta_1$ implica $\|X_1(t+h) - X_1(t)\|_2 < \varepsilon$ y como X_2 es continuo en $t \in T$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|h| < \delta_2$ entonces $\|X_2(t+h) - X_2(t)\|_2 < \varepsilon$. Así sucesivamente hasta X_N que es continuo en $t \in T$, entonces existe $\delta_N > 0$ tal que si $|h| < \delta_N$ entonces $\|X\ (t+h) - X\ (t)\|_2 < \varepsilon$. Hagamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\} > 0$ y tendremos que si $|h| < \delta$ entonces

$$\|X_i(t+h) - X_i(t)\|_2 < \varepsilon \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

De donde H es equicontinuo.

PROPOSICION 2.23 Si $\{X_n\}_n$ es una sucesión de procesos en $\mathcal{B}(T, L_2)$ tal que $X_n \xrightarrow{S} X$ y si la sucesión es equicontinua entonces X es continuo.

PRUEBA: Sean $\varepsilon > 0$ y $t \in T$ como $X_n \xrightarrow{S} X$ se tiene que dado $\varepsilon/3 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\|X_n(t) - X(t)\|_2 < \varepsilon/3$$

$\Leftarrow$] Tomemos $t \in T$ y sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, hagamos
$$A = \{ X(s) \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P) : \|X(s) - X(t)\|_2 < \varepsilon \}$$
Se sabe que A es abierto en $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y supongamos que $X^{-1}(A)$ es abierto en T, es claro que $X(t) \in A$ es abierto en T entonces como $X^{-1}(A)$ es abierto en T entonces $\exists \delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces $\{ (t+h) \in T : |h| < \delta \} \subset X^{-1}(A)$

Ahora si $|h| < \delta$ entonces $t+h \in X^{-1}(A)$

$\Rightarrow X(t+h) \in A$

$\Rightarrow \|X(t+h) - X(t)\|_2 < \varepsilon$

$\Rightarrow X$ es continuo en t para cada $t \in T$

$\Rightarrow X \in \mathcal{C}(T, L_2)$.

PROPOSICION 2.25 $X \in \mathcal{C}(T, L_2)$ si y sólo si $X^{-1}(B)$ es cerrado si B es cerrado.

De acuerdo con la proposición 2.24 haremos la siguiente observación: Si B es cerrado en $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ entonces $X^{-1}(B) \subset T$ y vale la siguiente igualdad $T - X^{-1}(B) = X^{-1}[L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P) - B]$

La demostración se basa en la igualdad anterior y en la proposición 2.24.

PRUEBA:

$\Rightarrow$] Sea B cerrado en $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P) \Rightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P) - B$ es abierto $\Rightarrow X^{-1}[L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P) - B]$ es abierto en T

$\Rightarrow T - X^{-1}(B)$ es abierto en T

$\Rightarrow X^{-1}(B)$ es cerrado en T.

$\Leftarrow$] Sea B cerrado y X un proceso L_2 tal que $X^{-1}(B)$ es cerrado en $T \Rightarrow T - X^{-1}(B)$ e abierto en $T \Rightarrow$ $X^{-1}[L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P) - B]$ es abierto en T y como $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P) - B$ es abierto, X es continuo $\Rightarrow X \in \mathcal{C}(T, L_2)$.

Es importante hacer la caracterización de los procesos estocásticos de segundo orden con criterios poco comunes para este tipo de funciones que describen fenómenos aleatorios a través del tiempo.

Ahora trataremos el concepto de derivada y algunos resultados del cálculo diferencial.

DEFINICION 2.27 Sea $X: T \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un proceso estocástico de segundo orden, se dice que X es diferenciable en $t_0 \in T$ si existe $X'(t_0) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que satisface que $|h| < \delta$ implica

$$\left\| \frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} - X'(t_0) \right\|_2 < \varepsilon$$

En otras palabras $X'(t_0)$ es la derivada de X en t_0 si

$$\left\| \frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} - X'(t_0) \right\|_2 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Existe otro proceso estocástico que se construye a partir de las derivadas en cada punto.

DEFINICION 2.28 Bajo las condiciones de la definición 2.27 diremos que X es diferenciable en T si lo es para cada punto de T y el proceso estocástico derivada de X será

$$X' = \{ X'(t_0) \mid t_0 \in T \}$$

Notemos que X' es automáticamente un proceso L_2.
Continuando con la notación usada hasta ahora, denotaremos $D(T, L_2)$ al conjunto de los procesos estocásticos de segundo orden diferenciables. Observemos que si $X \in D(T, L_2)$ y $t_0 \in T$ tenemos:

$$\left| \left\| \frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} \right\|_2 - \left\| X'(t_0) \right\|_2 \right| \leq \left\| \frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} - X'(t_0) \right\|_2$$

PROPOSICION 2.30 Si $X, Y \in \mathcal{D}(T, L_2)$ entonces $(aX + bY) \in \mathcal{D}(T, L_2)$

PRUEBA: Si a ó b son cero, es inmediato.

Supongamos que $a \neq 0 \neq b$, consideremos cualquier $t \in T$ y $\varepsilon > 0$ como $X \in \mathcal{D}(T, L_2)$, existen $\delta_1 > 0$ y $X'(t)$ que cuando $|h| < \delta_1$,

$$\left\| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2|a|}$$

Análogamente como $Y \in \mathcal{D}(T, L_2)$ existen $\delta_2 > 0$ y $Y'(t)$ tal que si $|h| < \delta_2$ entonces

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - Y'(t) \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

Haciendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se cumplen ambas afirmaciones cuando $|h| < \delta$ y en consecuencia:

$$\left\| \frac{aX(t+h) + bY(t+h) - aX(t) - bY(t)}{h} - [aX'(t) + bY'(t)] \right\|_2$$

$$\leq |a| \left\| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right\|_2 + |b| \left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - Y'(t) \right\|_2$$

$$< |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

Así hemos probado que $(aX + bY)' = aX' + bY'$.

Hemos visto procesos acotados, continuos y ahora vemos diferenciables, probaremos en seguida que diferenciabilidad implica continuidad. Después veremos si la implicación inversa es cierta o no.

PROPOSICION 2.31 Si $X \in \mathcal{D}(T, L_2)$ entonces $X \in \mathcal{C}(T, L_2)$

PRUEBA: Tomemos $t \in T$ cualquiera, debemos mostrar que

$$= \frac{\sigma^2}{h^2}\left[t+h + 2\min\{t, t+h\} + t \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{h^2}\left[2t+h - 2\min\{t, t+h\} \right]$$

$$= \begin{cases} \sigma^2/h & \text{si} \quad h>0 \\ -\sigma^2/h & \text{si} \quad h<0 \end{cases}$$

Por lo que $\quad \left\| \frac{B(t+h)-B(t)}{h} \right\|_2^2 = \frac{\sigma^2}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} \infty$

De lo anterior concluimos que $\quad B \notin D(\mathbb{R}^1, L_2)$.

El proceso estocástico L_2 del ejemplo 1.5 sí es diferenciable en todo punto

EJEMPLO 2.7 Recordemos que $X(t) = A_1 \cos \lambda t + A_2 \operatorname{sen} \lambda t \quad t \in T$ donde $A_1, A_2 \sim N(0, \sigma^2)$ son independientes, es un proceso estacionario de segundo orden con $m_X \equiv 0$ y $K_X(t) = \sigma^2 \cos \lambda t$.
Proponemos $X'(t) = -\lambda A_1 \operatorname{sen} \lambda t + \lambda A_2 \cos \lambda t$
De este modo:

$$\left\| \frac{X(t+h)-X(t)}{h} - X'(t) \right\|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{h^2} E\left\{ A_1[\cos\lambda(t+h) - \cos\lambda t + \lambda h \operatorname{sen}\lambda t] + A_2[\operatorname{sen}\lambda(t+h) - \operatorname{sen}\lambda t - \lambda h \cos\lambda t] \right\}^2$$

$$= \frac{1}{h^2}\left\{ [\cos\lambda(t+h) - \cos\lambda t + \lambda h \operatorname{sen}\lambda t]^2 \sigma^2 + [\operatorname{sen}\lambda(t+h) - \operatorname{sen}\lambda t - \lambda h \cos\lambda t]^2 \sigma^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} = \frac{\sigma^2}{h^2} \Big\{ & \cos^2\lambda(t+h) + \cos^2\lambda t + \lambda^2 h^2 \operatorname{sen}^2\lambda t - 2\cos t \cos\lambda(t+h) - 2\lambda h \operatorname{sen}\lambda t \cos\lambda t \\ & + 2\lambda h \operatorname{sen}\lambda t \cos\lambda(t+h) + \operatorname{sen}^2\lambda(t+h) + \operatorname{sen}^2\lambda t + \lambda^2 h^2 \cos^2\lambda t \\ & - 2\operatorname{sen}\lambda t \operatorname{sen}\lambda(t+h) + 2\lambda h \operatorname{sen}\lambda t \cos\lambda t - 2\lambda h \cos\lambda t \operatorname{sen}\lambda(t+h) \Big\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2}{h^2}\left[\lambda^2 h^2 + 2(1 - \cos\lambda h - \lambda h \operatorname{sen}\lambda h) \right]$$

$$|\operatorname{cov}(\eta_n, \gamma_n) - \operatorname{cov}(\eta, \gamma)| \leq \|\eta_n - \eta\|_2 \, \|\gamma_n - \gamma\|_2 + \|\eta_n - \eta\|_2 \, \|\gamma\|_2 + \|\eta\|_2 \, \|\gamma_n - \gamma\|_2$$

De las hipótesis

$$\|\eta_n - \eta\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{y} \qquad \|\gamma_n - \gamma\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Concluimos que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\operatorname{cov}(\eta_n - \gamma_n) - \operatorname{cov}(\eta, \gamma)| \leq 0$$

O equivalentemente

$$\operatorname{Cov}(\eta_n, \gamma_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{cov}(\eta, \gamma)$$

La importancia de este resultado radica en que el límite en L_2 y la función bilineal cov se pueden intercambiar.

La diferenciabilidad de los procesos estocásticos de segundo orden tiene que ver con la de su función de covarianza. Trataremos algunos resultados donde relacionamos a la función de covarianza de un proceso X con la de X', distinguiremos el caso estacionario y trabajaremos con la función de covarianza cruzada de dos procesos.

PROPOSICION 2.33 Sea $X: T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un proceso estocástico con función de covarianza K_X, además $X \in D(T, L_2)$ entonces X' es también estacionario de segundo orden cumpliéndose $K_{X'} = -K''_X$

PRUEBA:

Como $\|X(s+t) - X(s+h)\|_2$ y $\left\|\dfrac{X(s+h) - X(s)}{h} - X'(s)\right\|_2$

tienden a cero cuando h tienden a cero, entonces por la proposición anterior:

$$\operatorname{cov}\left[X(s+t), \frac{X(s+h) - X(s)}{h}\right] \xrightarrow[h\to 0]{} \operatorname{cov}[X(s+t), X'(s)]$$

PROPOSICION 2.34 Si $X \in D(T, L_2)$ entonces $K_{X'}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} K_X(s,t)$

PRUEBA:

$$\frac{\partial}{\partial t} K_X(s,t) = \lim_{h \to 0} \frac{K_X(s,t+h) - K_X(s,t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{cov}[X(s), X(t+h)] - \mathrm{cov}[X(s), X(t)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \mathrm{cov}\left[X(s), \frac{X(t+h) - X(t)}{h}\right]$$

$$= \mathrm{cov}[X(s), X'(t)]$$

Luego :

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} K_X(s,t) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} K_X(s+h,t) - \frac{\partial}{\partial t} K_X(s,t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{cov}[X(s+h), X'(t)] - \mathrm{cov}[X(s), X'(t)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \mathrm{cov}\left[\frac{X(s+h) - X(s)}{h}, X'(t)\right]$$

$$= \mathrm{cov}[X'(s), X'(t)] = K_{X'}(s,t).$$

De acuerdo con estas dos últimas proposiciones podemos establecer como consecuencia, que un proceso L_2 es diferenciable sí y sólo sí su función de covarianza lo es en cada entrada.

Si tenemos dos procesos L_2 X y Y diferenciables n y m veces respectivamente, existe una relación entre las derivadas de K_{XY} y $K_{X^{(n)}Y^{(m)}}$ como veremos inmediatamente.

PROPOSICION 2.35 Sean $X, Y : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ diferenciables n y m veces respectivamente entonces la función de covarianza cruzada de los procesos estocásticos $X^{(n)}$ y $Y^{(m)}$ es

$$K_{X^{(n)}Y^{(m)}}(s,t) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} K_{XY}(s,t).$$

tenemos un par de ejemplos sencillos sobre este resultado.

EJEMPLO 2.8 Calculemos la función de covarianza cruzada entre un proceso L_2 estacionario X y X'', después lo haremos entre X' y X''

Sabemos que $K_X(0,t) = K_X(t)$. Calculemos primero $K_{XX''}(s,t)$:

$$K_{XX''}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_{XX}(s,t)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_X(t-s)$$

y si $u = t-s$ entonces $K_{XX''}(s,t) = K''_X(u)$.

Ahora calculemos $K_{X'X''}(s,t)$:

$$K_{X'X''}(s,t) = \frac{\partial^3}{\partial s \partial t^2} K_{XX}(s,t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} K''_X(u) \qquad \text{donde} \quad u = t-s$$

$$= -K'''_X(u)$$

Como vemos podemos expresar cualquier función de covarianza cruzada entre las derivadas de distintos órdenes de un proceso y la función de covarianza original.

En seguida probaremos un resultado que podríamos llamar "regla de la cadena" aunque solo se refiere a la composición de un proceso L_2 con una función real.

PROPOSICION 2.36 Si $X \in D(T, L_2)$ y $g \in D(T,T)$ entonces el proceso estocástico $X(g) \in D(T, L_2)$ y además

$$[X(g)]' = g' \cdot X'(g).$$

PRUEBA: Tomemos $t \in T$ y veamos que

Al tomar límite cuando h tiende a cero tenemos que

$$\left|\frac{g(t+h)-g(t)}{h} - g'(t)\right| \longrightarrow 0 \quad \left\|\frac{X[g(t)+\ell]-X[g(t)]}{\ell} - X'[g(t)]\right\|_2 \longrightarrow 0$$

Con lo que hemos demostrado que

$$\left\|\frac{X[g(t+h)]-X[g(t)]}{h} - g'(t)\,X'[g(t)]\right\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Así concluimos que el proceso $X(g)$ es diferenciable y el proceso derivado es $[X(g)]' = g' \cdot X'(g)$.

Este resultado lo utilizaremos en la prueba del teorema del valor medio.

Podemos definir diferenciabilidad por la derecha o por la izquierda para procesos L_2 de igual manera que para funciones reales esto es, tomando límite cuando $h \longrightarrow 0^+$ ó $h \longrightarrow 0^-$ respectivamente

LEMA 2.37 Sean $X:[a,b] \longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ y $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tal que $\|X'(t)\|_2 \leq g'(t)$ $\forall\, t \in (a,b)$. Entonces

$$\|X(b) - X(a)\|_2 \leq g(b) - g(a).$$

Este Lema es previo a la demostración del teorema del valor medio, la demostración es por casos: primero suponiendo el lema con diferenciabilidad por la derecha y luego por la izquierda. Por lo que enunciamos el siguiente

LEMA 2.38 Sean $X:[a,b] \longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ y $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables por la derecha tal que $\|X'_r(t)\|_2 \leq g'_r(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces $\|X(b) - X(a)\|_2 \leq g(b) - g(a)$, donde $X'_r(t)$ y $g'_r(t)$ son las derivadas por la derecha.

PRUEBA: Tomemos $\varepsilon > 0$ y mostremos que:

$$\|X(t)-X(a)\|_2 \leq g(t)-g(a)+\varepsilon(t-a)+\varepsilon \quad \text{para toda } t\in[a,b]$$

Hagamos U el conjunto de los puntos para los que la desigualdad de arriba no se cumple. Esto es

$$U=\{t\in[a,b] : \|X(t)-X(a)\|_2-[g(t)-g(a)+\varepsilon(t-a)+\varepsilon]>0\}$$

que U es abierto ya que es la imagen inversa del $(0,\infty)$ bajo una función continua.

Supongamos que $U\neq\phi$ para llegar a una contradicción.

Como $U\subseteq[a,b]$ debe tener un ínfimo c, hacemos tres observaciones respecto a c:

1) $c>a$. Ya que si $c=a$ no se cumpliría con la propiedad de ser ínfimo pues hay con continuidad de ambos lados y para puntos muy cercanos a a la desigualdad si se cumple.

2) $c<b$. Pues si $c=b$ el conjunto U se reduciría a un sólo punto y no sería abierto.

3) $c\notin U$. Debido a que U es abierto, si $c\in U$ tendríamos una vecindad con centro en c totalmente contenida en U por lo que existiría un $t_0\in U$ tal que $a<t_0<c$ y entonces c no sería el ínfimo.

De esta manera tenemos $a<c<b$ y entonces $\|X'_r(c)\|_2\leq g'_r(c)$

Por otro lado de la definición de $X'_r(c)$ y $g'_r(c)$ $\exists\,\delta>0$ tal que si $c\leq t\leq c+\delta$ entonces

$$\|X'_r(c)\|_2 \geqslant \left\|\frac{X(t)-X(c)}{t-c}\right\|_2-\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y}$$

$$g'_r(c)\leqslant \frac{g(t)-g(c)}{t-c}+\frac{\varepsilon}{2}$$

Para verificar la primera desigualdad tenemos:

$$\left\|\frac{X(c+h)-X(c)}{h}-X'_r(c)\right\|_2 \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$$

luego

$$\left\|\frac{X(c+h)-X(c)}{h}\right\|_2 \xrightarrow[h\to 0^+]{} \|X'_r(c)\|_2$$

De esta manera para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que si

$$= g(t) - g(a) + \varepsilon (t-a) + \varepsilon$$

Obtenemos:

$$\|\mathbb{X}(t) - \mathbb{X}(a)\|_2 \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon$$

que se cumple para cada t con $a \leq t \leq c+\delta$

Entonces para todo $t \leq c+\delta$ se cumple nuestra desigualdad de interés por lo que

$$c = \inf(U) \geq c+\delta \ ¡_o^o!$$

Por lo que $U = \Phi$, luego es valida para cada $t \in [a,b]$ la desigualdad

$$\|\mathbb{X}(t) - \mathbb{X}(a)\|_2 \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon$$

En particular si $t=b$ tenemos:

$$\|\mathbb{X}(b) - \mathbb{X}(a)\|_2 \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon$$

y si $\varepsilon \to 0$:

$$\|\mathbb{X}(b) - \mathbb{X}(a)\|_2 \leq g(b) - g(a).$$

Se obtiene con el mismo procedimiento la demostración de un resultado análogo con derivadas por la izquierda, y si valen lemas que lo prueben con derivadas por la izquierda y la derecha entonces vale:

si $\|\mathbb{X}'(t)\|_2 \leq g(t)$ entonces $\|\mathbb{X}(b) - \mathbb{X}(a)\|_2 \leq g(b) - g(a)$.

En seguida veremos otra proposición importante.

PROPOSICION 2.39 Si $\mathbb{X} : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es diferenciable en (a,b) y además $\|\mathbb{X}'(t)\|_2 \leq K$ para todo $t \in [a,b]$ donde $K>0$, entonces $\|\mathbb{X}(b) - \mathbb{X}(a)\|_2 \leq K(b-a)$. Más aún

$$\|\mathbb{X}(t_2) - \mathbb{X}(t_1)\|_2 \leq K(t_2 - t_1) \qquad t_1 < t_2 \in [a,b]$$

PRUEBA:

Para probar esta proposición utilizaremos los lemas 2.37 y 2.38 " Si $\|\mathbb{X}'(t)\|_2 \leq g'(t)$ entonces $\|\mathbb{X}(b) - \mathbb{X}(a)\|_2 \leq g(b) - g(a)$ "

Consideremos la función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) = Kt$ con $K>0$

entonces $g'(t) = K$ y por hipótesis $\|X'(t)\|_2 \leq K = g'(t)$
en consecuencia

$$\|X(b) - X(a)\|_2 \leq g(b) - g(a) = K(b-a).$$

Que es la conclusión de la proposición. Además tomemos $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, de esta manera la proposición se vale para este nuevo conjunto, así:

$$\|X(t_2) - X(t_1)\|_2 \leq K(t_2 - t_1)$$

Como mencionamos antes, estos resultados preparan el teorema del valor medio para procesos L_2, que es de gran utilidad en la demostración del teorema de Taylor entre otros.

PROPOSICION 2.40 (TEOREMA DEL VALOR MEDIO) Sea $X : [a,b] \to L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un proceso estocástico tal que $X \in D([a,b], L_2)$ entonces:

$$\|X(b) - X(a)\|_2 \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|X'(t)\|_2$$

O equivalentemente:

$$\|X(b) - X(a)\|_2 \leq (b-a) \sup_{t \in [0,1]} \|X'[(1-t)a + tb]\|_2$$

PRUEBA:

Definamos un nuevo proceso L_2 de la siguiente manera:

$$Y(t) = X[(1-t)a + tb]$$

que también es diferenciable en $t \in [0,1]$, cumpliendo

$$Y'(t) = (b-a) X'[(1-t)a + tb]$$

Debido a

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - Y'(t) \right\|_2 = \left\| \frac{X[(1-t)a + tb + h(b-a)] - X[(1-t)a + tb]}{h(b-a)}(b-a) \right.$$

$$\left. - (b-a) X'[(1-t)a + tb] \right\|_2 =$$

$$= (b-a) \left\| \frac{X[(1-t)a + tb + h_1] - X[(1-t)a + tb}{h_1} - X'[(1-t)a + tb] \right\|_2 \longrightarrow 0$$

Entonces $Y'(t) = (b-a) X'[(1-t)a + tb]$ y

$$\|Y'(t)\|_2 = (b-a)\ \|X'[(1-t)a + tb]\|_2 \quad \text{para todo } t\in[0,1]$$

Luego

$$\|Y'(t)\|_2 \leq (b-a) \sup_{t\in[0,1]} \|X'[(1-t)a+b]\|_2 \quad \text{para cada } t\in[0,1]$$

Aplicando la proposición 2.39 tenemos

$$\|Y(1)-Y(0)\|_2 \leq (b-a) \sup_{t\in[0,1]} \|X'[(1-t)a+tb]\|_2\ (1-0)$$

Pero $Y(1) = X(b)$ y $Y(0) = X(a)$, así:

$$\|X(b)-X(a)\|_2 \leq (b-a) \sup_{t\in[0,1]} \|X'[(1-t)a+tb]\|_2$$

O equivalentemente

$$\|X(b)-X(a)\|_2 \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|X'(t)\|_2$$

Observemos que si el proceso L_2, $X' = \{X'(t) : t\in[a,b]\} \in \mathcal{B}([a,b], L_2)$ es decir, si X' fuera un proceso L_2 acotado entonces:

$$\sup_{t\in[a,b]} \|X'(t)\|_2 = \|X'\|_{2,\infty}\ ; \qquad \text{por lo que tendríamos:}$$

$$\|X(b)-X(a)\|_2 \leq (b-a)\|X'\|_{2,\infty}$$

Cuando tenemos un proceso estocástico de segundo orden que admite n derivadas $(n\in\mathbb{N})$ podemos hacer un desarrollo de Taylor del proceso alrededor de un punto dado $t\in T$. Veamos.

PROPOSICION 2.41 (TEOREMA DE TAYLOR) Sea $X: T\to L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ un proceso de segundo orden $(n-1)$ veces diferenciable en T y n veces en $t\in T$. Entonces:

$$\left\| \frac{X(t+h)-X(t)-hX'(t)-\frac{h^2}{2!}X''(t)-\cdots-\frac{h^n}{n!}X^{(n)}(t)}{h^n} \right\|_2 =$$

$$= \left\| \frac{X(t+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}X^{(k)}(t)}{h^n} \right\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

PRUEBA: Haremos la prueba por inducción sobre n:

$n=0$ es la continuidad de X.

Para $n=1$ tenemos:

$$\left\| \frac{X(t+h)-X(t)-hX'(t)}{h} \right\|_2 = \left\| \frac{X(t+h)-X(t)}{h} - X'(t) \right\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

por la definición de diferenciabilidad puntual.

Supongamos ahora que el resultado es válido para $n-1$ es decir

$$\left\| \frac{X(t+h)-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} X^{(k)}(t)}{h^{n-1}} \right\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Definamos en una vecindad del cero el siguiente proceso de segundo orden:

$$Z(h) = X(t+h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} X^{(k)}(t)$$

Este proceso estocástico cumple con:

i) $Z(0) = X(t)$

ii) Es diferenciable y $Z'(h) = X'(t+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} X^{(k+1)}(t)$

iii) $Z'(0)=0$

Si hacemos el cambio $Y = X'$ tenemos ahora

$$Z'(h) = Y(t+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} Y^{(k)}(t)$$

Por hipótesis de inducción

$$\left\| \frac{Z'(h)}{h^{n-1}} \right\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Y en consecuencia

$$\frac{Z'(h)}{h^{n-1}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad \text{en } L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Sea $W(h) = \dfrac{Z'(h)}{h^{n-1}}$ $\quad \left(W(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \text{ y } \|W(h)\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \right)$

Entonces $Z'(h) = h^{n-1} W(h)$.

Por otra parte:

$$\left\| X(t+h) - X(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} X^{(k)}(t) \right\|_2 = \| Z(h) - Z(0) \|_2$$

Si aplicamos el teorema del valor medio:

$$\| Z(h) - Z(0) \|_2 \leq |h| \sup_{\ell \in (0,h)} \| Z'(\ell) \|_2 = |h| \sup_{\ell \in (0,h)} \| \ell^{n-1} W(\ell) \|_2$$

$$= |h| |\ell|^{n-1} \sup_{\ell \in (0,h)} \| W(\ell) \|_2$$

$$\leq |h|^n \sup_{\ell \in (0,h)} \| W(\ell) \|_2$$

De esta manera:

$$0 \leq \left\| \frac{X(t+h) - X(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} X^{(k)}(t)}{h^n} \right\|_2 \leq \sup_{\ell \in (0,h)} \| W(\ell) \|_2$$

Aplicando límite cuando $h \to 0$:

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \left\| \frac{X(t+h) - X(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} X^{(k)}(t)}{h^n} \right\|_2 \leq 0$$

Y con esto obtenemos el resultado.

Para ilustrar este importe resultado trabajeremos con el proceso estocástico del ejemplo 1.3

EJEMPLO 2.9 Sea $X : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definido por

$X(t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\omega) f_j(t)$ las $\varphi_j \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ además cada

f_j es $\mathcal{C}^{\infty}(T)$; es decir tiene todas las derivadas continuas.

Tomemos $t \in T$ y

$$X'(t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j f_j'(t)$$

debido a

$$\left\| \frac{X(t+h) - X(h)}{h} - X'(t) \right\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \left[\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} - f_j'(t) \right] \right\|_2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_2 \left| \frac{f_j(t+h)-f_j(t)}{h} - f_j'(t)\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 .$$

En general

$$X^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \, f_j^{(n)}(t)$$

Notemos que debido a la existencia de $f_j^{(n)}(t)$ para cada n, aseguramos la de $X^{(n)}(t)$

Ahora veamos que

$$\left\| \frac{X(t+h)-X(t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} X^{(k)}(t)}{h^n} \right\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} X^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j f_j^{(k)}(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \frac{h^k}{k!} f_j^{(k)}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f_j^{(k)}(t)$$

y $X(t+h)-X(t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \left[f_j(t+h) - f_j(t)\right]$. Entonces

$$\left\| \frac{X(t+h)-X(t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} X^{(k)}(t)}{h^n} \right\|_2 = \left\| \frac{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \left[f_j(t+h)-f_j(t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f_j^{(k)}(t)\right]}{h^n} \right\|_2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_2 \left| \frac{f_j(t+h)-f_j(t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f_j^{(k)}(t)}{h^n}\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Pues el teorema de Taylor para funciones reales garantiza que

$$\left| \frac{f_j(t+h)-f_j(t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f_j^{(k)}(t)}{h^n}\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

De este modo hemos mostrado que para el proceso X del ejemplo vale el teorema.

CAPITULO TRES

CALCULO INTEGRAL EN LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DE SEGUNDO ORDEN

Trataremos en este capítulo el cálculo integral de los procesos de segundo orden, en particular en el sentido Riemann y Stieltjes.

Primero recordamos la definición de partición en un intervalo.

DEFINICION 3.1 Una partición del intervalo $[a,b]$ es una colección de puntos $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\} \subset [a,b]$ tal que $n \in \mathbb{N}$ y $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. Al conjunto de particiones de $[a,b]$ lo denotaremos $\mathcal{P}[a,b]$.

En seguida definiremos las sumas de Riemann.

DEFINICION 3.2 Sean $X: T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un proceso estocástico de segundo orden, $[a,b] \subset T$ y $\{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces la sucesión de sumas de Riemann de X sobre el intervalo $[a,b]$ con la particion $\{t_0, \ldots, t_n\}$, son los elementos de $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$S_n = \sum_{k \geq 1}^{n} (t_k - t_{k-1}) X(t_k) .$$

Observemos que si X es cualquier proceso L_2 sucede que cualquier suma de Riemann S_n es una variable aleatoria con segundo momento ya que es combinación lineal de variables aleatorias con segundo momento y como $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es espacio vectorial, se obtiene el resultado.

Estamos ahora en condiciones de definir integrabilidad en el sentido de Riemann para procesos L_2.

DEFINICION 3.3 Un proceso estocástico de segundo orden $X: T \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es Riemann-integrable en $[a,b] \subset T$ si para todas las particiones $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, la sucesión de sumas de Riemann S_n converge en L_2, esto es, si existe $S_\infty \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $\|S_n - S_\infty\| \longrightarrow 0$; a S_∞ le llamaremos la integral de Riemann de X en $[a,b]$ y escribiremos

$$S_\infty = \int_a^b X(t)\,dt$$

A la colección de procesos $X: T \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Riemann-integrables en $T_0 \subset T$ lo denotaremos por $\mathcal{R}(T_0, L_2)$.

La siguiente proposición establece la unicidad de la integral.

PROPOSICION 3.4 Sean $X: T \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un proceso L_2 tal que $X \in \mathcal{R}([a,b], L_2)$, $\{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) X(t_k)$ la sucesión de sumas de Riemann correspondiente. Supongamos que

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} S_\infty = \int_a^b X(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad S_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} W_\infty$$

$S_\infty, W_\infty \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entonces $S_\infty = W_\infty = \int_a^b X(t)\,dt$.

PRUEBA:

Damos $\varepsilon > 0$ y como $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} S_\infty$ entonces $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $\|S_n - S_\infty\|_2 < \varepsilon/2$ y además como $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} W_\infty$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces $\|S_n - W_\infty\|_2 < \varepsilon/2$

Haciendo $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ tenemos que si $n \geq N$

ambas situaciones se dan por lo que:

$$\begin{aligned}\|S_\infty - W_\infty\|_2 &= \|S_\infty - S_n + S_n - W_\infty\|_2\\ &\leq \|S_n - S_\infty\|_2 + \|S_n - W_\infty\|_2\\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

lo que indica que $\|S_\infty - W_\infty\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Pero esta es una sucesión constante por lo que $\|S_\infty - W_\infty\|_2 = 0$

así que $S_\infty - W_\infty = 0$ por lo tanto

$$S_\infty = W_\infty = \int_a^b X(t)\,dt\,.$$

PROPOSICION 3.5 Sean $X, Y : T \longrightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ dos procesos L_2 tales que $X, Y \in \mathcal{R}([a,b], L_2)$ sean α y β reales entonces $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{R}([a,b], L_2)$ y además

$$\int_a^b [\alpha X + \beta Y]\,dt = \alpha\int_a^b X(t)\,dt + \beta\int_a^b Y(t)\,dt$$

Esta proposición establece la linealidad de la integral de Riemann para procesos L_2.

PRUEBA:

Consideremos $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ y las sucesiones de sumas de Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})X(t_k) \qquad y \qquad W_n = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})Y(t_k)$$

por hipótesis $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \int_a^b X(t)\,dt$ y $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \int_a^b Y(t)\,dt$

Ahora, por las propiedades de la convergencia en $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tenemos que $\alpha S_n + \beta W_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \alpha\int_a^b X(t)\,dt + \beta\int_a^b Y(t)\,dt$

Donde la sucesión de sumas de Riemann de $\alpha X + \beta Y$ está dado por

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})(\alpha X + \beta Y)(t_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\{(\alpha X)(t_k) + (\beta Y)(t_k)\}$$

$$= E[S_n]$$

Por otro lado:

$$|E(S_n) - E(S_\infty)| = |E(S_n - S_\infty)|$$

$$= \left| \int_\Omega (S_n - S_\infty)\, dP \right|$$

$$\leq \int |S_n - S_\infty|\, dP = E|S_n - S_\infty|$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$E|S_n - S_\infty| \leq \{ E|S_n - S_\infty|^2 \}^{1/2}$$

$$= \|S_n - S_\infty\|_2$$

De donde $|E(S_n) - E(S_\infty)| \leq \|S_n - S_\infty\|_2$, así que

$$|E(S_n) - E(S_\infty)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Luego:

$$\sum_{k=1}^{n} m_X(t_k)(t_k - t_{k-1}) = E(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(S_\infty)$$

y $E(S_\infty) = E\left[\int_0^b X(t)\,dt\right]$

concluyendo:

$$\int_0^b m_X(t)\,dt = E\left[\int_0^b X(t)\,dt\right].$$

En el capítulo anterior probamos que todo proceso estocástico L_2 diferenciable también es continuo. Veremos que la continuidad implica integrabilidad para procesos L_2.

PROPOSICION 3.7 Sea $X: [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un proceso estocástico de segundo orden continuo y con función $m_X \equiv 0$ entonces X es integrable.

PRUEBA:

La hipótesis que establece la anulación de la función media es sólo por comodidad; sabemos que de tener un proceso con $m_X \neq 0$ se hace una traslación.

Como el proceso es continuo, entonces K_X la función de covarianza también lo es.

Tomemos ahora $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ y consideremos la sucesión de sumas de Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

Si $\|S_n\|_2^2$ tiene límite cuando n tiende a ∞; entonces X es integrable.

$$\|S_n\|_2^2 = E[S_n^2]$$

$$= E\Big[\sum_{k=1}^{n} X(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{j=1}^{n} X(s_j)(s_j - s_{j-1})\Big]$$

$$= E\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X(t_k)X(s_j)(t_k - t_{k-1})(s_j - s_{j-1})\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_X(s_j, t_k)(t_k - t_{k-1})(s_j - s_{j-1}) \longrightarrow \int_a^b \int_a^b K_X(s,t)\,ds\,dt$$

Por lo que X es integrable.

De lo anterior obtemos que el movimiento Browniano de $B: \mathbb{R}^+ \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es integrable, pues sabemos que es continuo.

Ahora integremos a la función de covarianza cruzada de los procesos L_2 integrables.

PROPOSICION 3.8 Si $X, Y: [a,b] \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ son dos procesos estocásticos de segundo orden y además $X, Y \in \mathcal{R}([a,b], L_2)$ antonces $K_{XY}(s,t)$ la función de covarianza cruzada es doblemente integrable según Riemann; cumpliéndose

$$\int_a^b \int_a^b K_{XY}(s,t)\,ds\,dt = \operatorname{cov}\Big[\int_a^b X(s)\,ds\,,\ \int_a^b Y(t)\,dt\Big].$$

PRUEBA: Tomemos dos particiones de $[a,b]$; $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ y $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$

Consideremos las dobles sumas de Riemann:

$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} K_{XY}(s_i, t_j)(s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}\left[X(s_i), Y(t_j)\right](s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}\left[X(s_i)(s_i - s_{i-1}), Y(t_j)(t_j - t_{j-1})\right]$$

$$= \operatorname{cov}\left[\sum_{i=1}^{m} X(s_i)(s_i - s_{i-1}), \sum_{j=1}^{n} Y(t_j)(t_j - t_{j-1})\right]$$

$$= \operatorname{cov}[W_m, S_n]$$

donde

$$W_m \xrightarrow[m\to\infty]{L_2} \int_a^b X(s)\,ds \qquad y \qquad S_n \longrightarrow S_\infty = \int_a^b Y(t)\,dt$$

Hemos establecido que $S_{m,n} = \operatorname{cov}[W_m, S_n]$ y como

$$\int_a^b \int_a^b K_{XY}(s,t)\,ds\,dt = \lim_{n,m\to\infty} S_{n,m}$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \operatorname{cov}[W_m, S_n]$$

Usando el hecho de que la covarianza es continua en cada entrada tenemos:

$$\int_a^b \int_a^b K_{XY}(s,t)\,ds\,dt = \operatorname{cov}\left[\lim_{m\to\infty} W_m, \lim_{n\to\infty} S_n\right]$$

$$= \operatorname{cov}\left[\int_a^b X(s)\,ds, \int_a^b Y(t)\,dt\right].$$

La diferenciación de procesos L_2 y la integración de los mismos se relacionan como operaciones inversas en cierto modo; al igual que en las funciones reales hay un par de resultados en donde se establece el vínculo entre la integración y la diferenciación.

DEFINICION 3.9 Para un proceso estocástico de segundo orden integrable se define otro proceso estocástico llamado el proceso integral, de la siguiente manera:
Si X es integral en $[a,b]$ entonces $Y(t) = \int_a^t X(s)ds$ es el proceso integral de X, $t \in [a,b]$.

PROPOSICION 3.10 Sea $X : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $X \in \mathcal{C}([a,b], L_2)$, definimos el proceso de segundo orden Y por

$Y(t) = \int_a^t X(s)ds \quad t \in [a,b]$ el proceso integral de X

entonces $\qquad Y'(t) = X(t)$.

PRUEBA: En este resultado estamos estableciendo que al derivar la integral de un proceso, recuperamos éste.

Veamos que

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - X(t) \right\|_2^2 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Entonces:

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - X(t) \right\|_2^2 = \left\| \frac{\int_a^{t+h} X(s)ds - \int_a^t X(s)ds}{h} - X(t) \right\|_2^2$$

$$= \left\| \frac{\int_t^{t+h} X(s)ds}{h} - X(t) \right\|_2^2$$

$$= \frac{1}{h^2}\left\{ E\left[\int_t^{t+h} X(s)\,ds \int_t^{t+h} X(u)du \right] - 2h\,E\left[X(t) \int_t^{t+h} X(s)ds \right] + h^2 E\left[X^2(t)\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{h^2} E\left[\int_t^{t+h} \int_t^{t+h} X(s)\,X(u)\,ds\,du \right] - \frac{2}{h} E\left[\int_t^{t+h} X(t)\,X(s)ds \right] + E\left[X^2(t) \right]$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $m_X = 0$, entonces

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - X(t) \right\|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} E[\mathbb{X}(s), \mathbb{X}(u)]\, ds\, du - \frac{2}{h} \int_t^{t+h} E[\mathbb{X}(s)\mathbb{X}(t)]\, ds + var[\mathbb{X}(t)]$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} K_{\mathbb{X}}(s,u)\, ds\, du - \frac{2}{h} \int_t^{t+h} K_{\mathbb{X}}(s,t)\, ds + var[\mathbb{X}(t)]$$

Por el teorema del valor medio para integrales aseguramos la existencia de $t \leq \rho_1 \leq t+h$ tal que

$$\int_t^{t+h} K_{\mathbb{X}}(s,u)\, ds = h\, K_{\mathbb{X}}(\rho_1, u)$$

entonces:

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - \mathbb{X}(t) \right\|_2^2 = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} K_{\mathbb{X}}(\rho_1, u)\, du - 2K_{\mathbb{X}}(\rho_1, t) + var[\mathbb{X}(t)]$$

Además existe $t \leq \rho_2 \leq t+h$ tal que $\int_t^{t+h} K_{\mathbb{X}}(\rho_1, u)\, du = K_{\mathbb{X}}(\rho_1, \rho_2)$

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - \mathbb{X}(t) \right\|_2^2 = K_{\mathbb{X}}(\rho_1, \rho_2) - 2K_{\mathbb{X}}(\rho_1, t) + var[\mathbb{X}(t)]$$

Tomando límite cuando $h \to 0$ y por la continuidad de $K_{\mathbb{X}}$ tenemos:

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - \mathbb{X}(t) \right\|_2^2 \longrightarrow K_{\mathbb{X}}(t,t) - 2K_{\mathbb{X}}(t,t) + var[\mathbb{X}(t)] = 0 .$$

El próximo resultado nos dice qué pasa cuando primero derivamos un proceso L_2 y luego lo integramos.

PROPOSICION 3.11 Si $\mathbb{X} : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso de segundo orden en $D([a,b], L_2)$ entonces

$$\int_a^t \mathbb{X}'(s)\, ds = \mathbb{X}(t) - \mathbb{X}(a)$$

PRUEBA: Veremos que la sucesión de sumas de Riemann que converge a $\int_a^t X'(t)ds$ también converge a $X(t)-X(a)$. Tomemos $\{s_0, s_1, \ldots, s_n\} \in \mathcal{P}[a,t]$ y verifiquemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} X'(s_k)(s_k - s_{k-1}) - [X(t) - X(a)] \right\|_2^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} X'(s_k)(s_k - s_{k-1}) - [X(t) - X(a)] \right\|_2^2 =$$

$$= E\left\{ \left[\sum_{k=1}^{n} X'(s_k)(s_k - s_{k-1})\right]\left[\sum_{j=1}^{n} X'(s_j)(s_j - s_{j-1})\right] - 2[X(t)-X(a)] \sum_{k=1}^{n} X'(s_k)(s_k - s_{k-1})\right.$$

$$\left. + [X(t)-X(a)]^2 \right\}$$

$$= E\left\{ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X'(s_k)X'(s_j)(s_k - s_{k-1})(s_j - s_{j-1})\right\} - 2E\left\{ \sum_{k=1}^{n} X'(s_k)(s_k - s_{k-1}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot [X(t) - X(a)]\right\} + E\left\{[X(t)-X(a)]^2\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (s_k - s_{k-1})(s_j - s_{j-1}) E[X'(s_k)X'(s_j)] - 2\sum_{k=1}^{n}(s_k - s_{k-1}) E[X'(s_k)X(t)] +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}(s_k - s_{k-1}) E[X'(s_k)X(a)] + E[X^2(t)] - 2E[X(a)X(t)] + E[X^2(a)]$$

De nuevo supongamos que $m_X = 0$ sin perder generalidad; pues de no ser así con una traslación llegamos a una situación equivalente, de este modo:

$$\| X'(s_k)(s_k - s_{k-1}) - [X(t)-X(a)] \| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (s_k - s_{k-1})(s_j - s_{j-1}) K_{X'}(s_k, s_j) - 2\sum_{k=1}^{n}(s_k - s_{k-1}) K_{X'X}(s_k, t) +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}(s_k - s_{k-1}) K_{X'X}(s_k, a) + K_X(t,t) - 2K_X(a,t) + K_X(a,a).$$

Al tomar límite cuando $n \to \infty$:

Calculemos ahora las funciones de media y covarianza del proceso integral.

PROPOSICION 3.12 Si $X : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso estocástico de segundo orden entonces el proceso $Y(t) = \int_a^t X(u)du$ $t \in [a,b]$ tiene funciones $m_Y(t) = \int_a^t m_X(u)du$ y $K_Y(s,t) = \int_a^t \int_a^s K_X(u,v)\,du\,dv$

PRUEBA: Haciendo cálculos llegamos facilmente a las dos igualdades de arribo, primero calcularemos la función de media:

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) &= E[Y(t)] \\
&= E\left[\int_a^t X(u)du\right] \\
&= \int_a^t E[X(u)]\,du \\
&= \int_a^t m_X(u)du
\end{aligned}
$$

Luego la función de covarianza:

$$
\begin{aligned}
K_Y(s,t) &= cov[Y(s), Y(t)] \\
&= cov\left[\int_a^s X(u)du, \int_a^t X(v)dv\right] \\
&= \int_a^t \int_a^s cov[X(u), X(v)]\,du\,dv \\
&= \int_a^t \int_a^s K_X(u,v)\,du\,dv
\end{aligned}
$$

Entonces si X es integrable también serán integrables m_X y K_X, ahora probaremos el resultado recíproco.

PROPOSICION 3.13 Si $X : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso estocástico de segundo orden y si además $\int_a^b m_X(u)du$, $\int_a^b \int_a^b K_X(u,v)$ existen, entonces $X \in \mathcal{R}([a,b], L_2)$.

PRUEBA: Sea $\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}\in \mathcal{P}[a,b]$, consideremos la sucesión de sumas de Riemann correspondiente

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} X(t_k)(t_k-t_{k-1})$$

debemos probar su convergencia en $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ el cual es un espacio de Banach (normado y completo), por lo que toda sucesión de Cauchy converge y toda sucesión convergente es de Cauchy. Basta para esta prueba ver que la sucesión de sumas de Riemann es de Cauchy y así existirá un elemento S_∞ como límite.

Entonces si $m>n$

$$\|S_m-S_n\|_2^2=E\left([S_m-S_n]^2\right)$$

$$=E^2(S_m-S_n)+var(S_m-S_n)$$

Necesitamos probar que $\|S_m-S_n\|_2^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

Sabemos que $\int_a^b m_X(t)dt$ existe y es igual a

$$\int_a^b E[X(t)]\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} E[X(t_k)](t_k-t_{k-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^{n} X(t_k)(t_k-t_{k-1})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} E(S_n).$$

Por la completez de $\mathbb{R}$ la sucesión $E(S_n)$ es de Cauchy. De este modo

$$\left|E(S_m-S_n)\right| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

y también

$$\left|E(S_m-S_n)\right|^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

El otro término es $var(S_m-S_n)$ pero

$$var(S_m-S_n) = var(S_m)+var(S_n)-2\,cov(S_m,S_n)$$

Veamos cada término:

$$var(S_m)=var\left[\sum_{k=1}^{m} X(t_k)(t_k-t_{k-1})\right]$$

aleatoria $\int_0^1 B^2(t)\,dt$

La media es:

$$E\left[\int_0^1 B^2(t)dt\right] = \int_0^1 E[B^2(t)]\,dt$$

$$= \int_0^1 \sigma^2 t\,dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}$$

La varianza es:

$$var\left[\int_0^1 B^2(t)dt\right] = E\left[\int_0^1 B^2(t)dt \int_0^1 B^2(s)ds\right] - \frac{\sigma^4}{4}$$

$$= E\left[\int_0^1\int_0^1 B^2(s)\,B^2(t)\,ds\,dt\right] - \frac{\sigma^4}{4}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 E\left[B^2(s)\,B^2(t)\right]ds\,dt - \frac{\sigma^4}{4}$$

Por otra parte

$$K_{B^2}(s,t) = cov\left[B^2(s),\, B^2(t)\right]$$

$$= E\left[B^2(s)\,B^2(t)\right] - \sigma^4 st$$

De donde

$$E\left[B^2(s)\,B^2(t)\right] = K_{B^2}(s,t) + \sigma^4 st$$

$$= 2\left[\sigma^2 \min\{s,t\}\right]^2 + \sigma^4 st$$

$$= 2\sigma^4 \min\{s^2,t^2\} + \sigma^4 st$$

Para resolver

$$\int_0^1\int_0^1 E\left[B^2(s)\,B^2(t)\right]ds\,dt = 2\sigma^4\int_0^1\int_0^1 \min\{s^2,t^2\}\,ds\,dt + \frac{\sigma^4}{4}$$

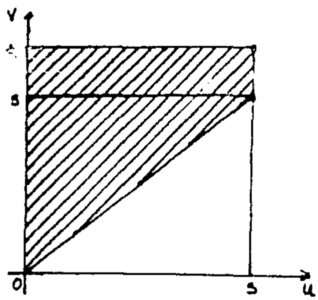
Consideremos la figura que aparece en la siguiente página.

$$= E\left[\int_0^s B(u)du \int_0^t B(v)dv\right]$$

$$= \int_0^s \int_0^t E[B(u)\,B(v)]\,dv\,du$$

$$= \sigma^2 \int_0^s \int_0^t \min\{u,v\}\,dv\,du$$

Supongamos que $s \leq t$, el otro caso es totalmente simétrico. Consideremos la figura



Observemos que en la región sombreada $\min\{u,v\} = u$ mientras que en la parte sin sombra $\min\{u,v\} = v$

Por lo que

$$K_X(s,t) = \sigma^2 \int_0^s \int_0^t \min\{u,v\}\,dv\,du$$

$$= \sigma^2 \int_0^s \int_u^t u\,dv\,du + \sigma^2 \int_0^s \int_0^u v\,dv\,du$$

$$= \sigma^2 \int_0^s (tu - u^2)du + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^s u^2\,du$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{ts^2}{2} - \frac{s^3}{3} + \frac{s^3}{6}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2 s^2}{6}\,[3t - s]$$

tomando en cuenta la posibilidad $(s > t)$ obtenemos

$$K_X(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 s^2}{6}(3t - s) & \text{si } s \leq t \\[2ex] \dfrac{\sigma^2 t^2}{6}(3s - t) & \text{si } s > t \end{cases}$$

El proceso $X(t)=\int_0^t B(s)ds$ es Gaussiano con funciones m_X y K_X dadas en el ejemplo anterior, para fundamentar esta afirmación utilizaremos el siguiente lema.

LEMA 3.14 Si φ_n es una sucesión de variables aleatorias con densidad normal y $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \varphi$ entonces φ tiene densidad normal.

PRUEBA: Para verificar que φ es Gaussiana mostraremos que su función característica es

$$\Phi_\varphi(u) = e^{iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2}$$

donde

$$\mu = E[\varphi] \quad \text{y} \quad \sigma^2 = var[\varphi].$$

Como cada φ_n es Gaussiana sabemos que

$$\Phi_{\varphi_n}(u) = e^{iu\mu_n - \frac{1}{2}u^2\sigma_n^2}$$

con $\mu_n = E[\varphi_n]$ y $\sigma_n^2 = var[\varphi_n]$

Verificaremos que

i) $E[\varphi_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[\varphi]$

ii) $Var[\varphi_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} Var[\varphi]$

iii) $\Phi_{\varphi_n}(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_\varphi(u)$

De esta manera obtenemos que φ es Gaussiana.

i) Sabemos la desigualdad

$$0 \le |E(\varphi_n-\varphi)| \le \|\varphi_n-\varphi\|_2$$

Entonces como

$$\|\varphi_n-\varphi\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{también} \quad |E(\varphi_n-\varphi)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

y $\qquad E(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Por lo que

$$E(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(\varphi)$$

ii) $\operatorname{Var}(\varphi_n) = \operatorname{cov}[\varphi_n, \varphi_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{cov}(\varphi, \varphi) = \operatorname{var}(\varphi)$

iii) Veremos que $\left|\Phi_{\varphi_n}(u) - \Phi_{\varphi}(u)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\left|\Phi_{\varphi_n}(u) - \Phi_{\varphi}(u)\right| = \left|E(e^{iu\varphi_n}) - E(e^{iu\varphi})\right|$$

$$= \left|E[e^{iu\varphi_n} - e^{iu\varphi}]\right|$$

$$\leq E\left|e^{iu\varphi_n} - e^{iu\varphi}\right| =$$

$$= E\left\{\left|[\cos(u\varphi_n) - \cos(u\varphi)] + i[\operatorname{sen}(u\varphi_n) - \operatorname{sen}(u\varphi)]\right|\right\}$$

$$= E\left\{\left|2[1 - \cos u i \quad - \varphi)]\right|^{1/2}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\; E\left[\left|1 - \cos u(\varphi_n - \varphi)\right|^{1/2}\right]$$

Es conocida la desigualdad: $\quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

Así

$$1 - \cos u(\varphi_n - \varphi) \leq \frac{u^2(\varphi_n - \varphi)^2}{2}$$

Luego

$$\left|1 - \cos u(\varphi_n - \varphi)\right|^{1/2} \leq \frac{|u|\,|\varphi_n - \varphi|}{\sqrt{2}}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\; E\left[\left|1 - \cos u(\varphi_n - \varphi)\right|^{1/2}\right] &\leq E\left[|u|\,|\varphi_n - \varphi|\right] \\ &= |u|\, E\left[|\varphi_n - \varphi|\right] \\ &\leq |u|\, \|\varphi_n - \varphi\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Por lo que $\varphi \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Ahora veamos qué sucede con la distribución de la integral de un proceso estocástico Gaussiano.

PROPOSICION 3.15 Si $X:[a,b]\longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ es un proceso estocástico Gaussiano entonces la variable aleatoria $\int_a^b X(t)dt$ tiene distribución normal.

PRUEBA: Consideramos $\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ una aplicación de $[a,b]$, cada una de las variables aleatorias $X(t_k)$ con $k=1,\ldots,n$ es normal. Lo mismo $(t_k-t_{k-1})X(t_k)$ y la suma

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})X(t_k)=S_n$$

tiene distribución normal y como

$$S_n\xrightarrow[n\to\infty]{L_2}\int_a^b X(t)\,dt$$

al aplicar al tema 3.14 obtenemos que $\int_a^b X(t)$ es Gaussiano.

Trabajaremos ahora con la integral de Stieltjes de una función no aleatoria con respecto a un proceso estocástico L_2.

DEFINICION 3.16 Sean $f:T\longrightarrow\mathbb{R}$ una función cualquiera y $X:T\longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ un proceso estocástico de segundo orden, consideremos $\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ una partición del intervalo $[a,b]\subseteq T$; entonces la sucesión de sumas de Stieltjes de f con respecto a X es

$$S_n(f,X)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\left[X(t_k)-X(t_{k-1})\right]$$

Estamos en condiciones de definir el otro tipo de integrabilidad en donde intervienen los procesos de segundo orden, la integración de Stieltjes de una función no aleatoria con respecto a un proceso L_2, diremos en tal caso que dicha función es Stieltjes-integrable con respecto al proceso L_2.

DEFINICION 3.17 Si f y X son como en la definición 3.16 se dice que f es integrable con respecto a X si la sucesión de sumas de Stieltjes de f con respecto a X en $[a,b]$, $S_n(f,X)$ converje en L_2 a S_∞, esto es si:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left[X(t_k) - X(t_{k-1})\right] - S_\infty \right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

En el caso de arriba escribimos: $S_\infty = \int_a^b f(t)\,dX$ que es un elemento de $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Otra caracterización importante de los procesos estocásticos de segundo orden que se relaciona con la integración de Stieltjes es su variación en un intervalo.

DEFINICION 3.18 Un proceso estocástico $X: T \longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ es de variación acotada en $[a,b] \subseteq T$ si para cada partición $\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \| X(t_k) - X(t_{k-1}) \|_{2,\infty} < \infty$$

y la variación total de X en $[a,b]$ es

$$V_a^b(X) = \sup_{\pi\in P([a,b])} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \| X(t_k) - X(t_{k-1}) \|_2 \right\}$$

De inmediato daremos una condición suficiente para que un proceso L_2 diferenciable sea de variación acotada.

PROPOSICION 3.19 Sea $X:[a,b]\longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ un proceso estocástico diferenciable tal que $X'\in\mathcal{B}([a,b],L_2)$ entonces X es de variación acotada en $[a,b]$.

PRUEBA: Consideremos cualquier partición $\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$ de $[a,b]$, como X es diferenciable se cumple el teorema del valor medio, por lo que

$$0\le \|X(t_k)-X(t_{k-1})\|_2 \le (t_k-t_{k-1})\|X'\|_{2,\infty}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\|X(t_k)-X(t_{k-1})\|_2 \le \sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\|X'\|_{2,\infty}$$

$$=(b-a)\|X'\|_{2,\infty}<\infty$$

De donde X es de variación acotada en $[a,b]$.

Otra relación importante entre ser de variación acotada y estar en $\mathcal{B}(T,L_2)$ es:

PROPOSICION 3.20 Si X es de variación acotada en $[a,b]$ y $M=V_a^b(X)$ entonces $X\in\mathcal{B}([a,b],L_2)$.

PRUEBA: Debemos probar que $\|X\|_{2,\infty}=\sup\limits_{t\in[a,b]}\{\|X(t)\|_2\}<\infty$

Como X es de variación acotada sabemos que para la partición $\{a,t,b\}$ se tiene

$$0\le \|X(t)-X(a)\|_2+\|X(b)-X(t)\|_2\le M$$

De donde

$$\|X(t)-X(a)\|_2\le M$$

Luego

$$\big|\,\|X(t)\|_2-\|X(a)\|_2\,\big|\le M$$

y

$$\left| E[S_n(f,X)] - E(S_\infty) \right| = \left| E[S_n(f,X) - S_\infty] \right|$$

$$\leq E\left| S_n(f,X) - S_\infty \right|$$

$$\leq \| S_n(f,X) - S_\infty \|_2$$

Como $\| S_n(f,X) - S_\infty \|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ entonces

$$\left| E[S_n(f,X)] - E[S_\infty] \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[m_X(t_k) - m_X(t_{k-1})] - E\left[\int_a^b f(t)\,dX\right] \right|$$

que converge a cero cuando n tiende a infinito.

Por lo que

$$\int_a^b f(t)\,dm_X(t) \quad \text{existe y es igual a} \quad E\left[\int_a^b f(t)\,dX\right].$$

Utilizando una función continua y estrictamente creciente como "puente" se puede obtener una redefinición de la integral de Stieltjes; la siguiente proposición lo establece.

PROPOSICION 3.22 Si f es Stieltjes-integrable con respecto al proceso estocástico $X : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, g función real, continua estrictamente creciente tal que $g(c)=a$ y $g(d)=b$; hacemos $h = f\circ g$ y $Y = X\circ g$: $[c,d] \longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ entonces h es Stieltjes-integrable con respecto al proceso estocástico Y y

$$\int_a^b f(t)\,dX = \int_c^d h(t)\,dY$$

PRUEBA: Veremos que las sucesiones de sumas de Stieltjes son equivalentes en ambos casos y por lo tanto tendrán el mismo límite. Sea $\{c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d\}$ partición de $[c\ d]$, la sucesión de sumas de Stieltjes de h con respecto a Y es

$$S_n(h,Y) = \sum_{k=1}^{n} h(t_k)\left[Y(t_k) - Y(t_{k-1})\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (f\circ g)(t_k)\left[(\mathbb{X}\circ g)(t_k) - (\mathbb{X}\circ g)(t_{k-1})\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(g(t_k))\left[\mathbb{X}(g(t_k)) - \mathbb{X}(g(t_{k-1}))\right]$$

Por g continua y estrictamente creciente, de la partición original obtenemos una para $[a,b]$ de la siguiente manera:

$$\{a = g(t_0) = s_0 < g(t_1) = s_1 < \cdots < g(t_n) = s_n = b\}$$

es decir $t_k = g^{-1}(s_k)$, entonces

$$S_n(h,Y) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k)\left[\mathbb{X}(s_k) - \mathbb{X}(s_{k-1})\right]$$

$$= S_n(f,\mathbb{X})$$

De donde al tomar límite en L_2 obtenemos la igualdad

$$\int_a^b f(t)\,d\mathbb{X} = \int_c^d h(t)\,dY \,.$$

Para el cálculo de integrales de Stieltjes es muy frecuente el uso de una fórmula conocida como "la fórmula de integración por partes". En el caso de una función con respecto a un proceso estocástico de segundo orden este resultado también tiene mucha importancia.

Veremos la proposición que establece la fórmula y después un ejemplo.

por lo que probaremos

$$\sum_{k=0}^{n} X(t_k)\left[f(t_k)-f(t_{k+1})\right]+f(b)X(b)-f(a)X(a)+\sum_{k=1}^{n} f'(t_k)X(t_k)(t_k-t_{k-1})$$

converge en L_2 a $f(b)X(b)-f(a)X(a)$ cuando n tiende a infinito. O equivalentemente

$$\sum_{k=0}^{n} X(t_k)\left[f(t_k)-f(t_{k+1})\right]+\sum_{k=0}^{n} f'(t_k)X(t_k)(t_k-t_{k-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} 0$$

Convenimos también que $t_{-1}=t_0=a$ Pero

$$\sum_{k=0}^{n} X(t_k)\left[f(t_k)-f(t_{k+1})\right]+\sum_{k=0}^{n} f'(t_k)X(t_k)(t_k-t_{k-1}) =$$

$$=\sum_{k=0}^{n} X(t_k)\left\{f'(t_k)(t_k-t_{k-1})-\left[f(t_{k+1})-f(t_k)\right]\right\}$$

donde $t_k \leq \xi_k \leq t_{k+1}$ existe por el teorema de valor medio para funciones reales.

Probaremos que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} X(t_k)\left[f'(t_k)(t_k-t_{k-1})-f'(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)\right]\right\|_2^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad :$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} X(t_k)\left[f'(t_k)(t_k-t_{k-1})-f'(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)\right]\right\|_2^2 =$$

$$= E\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} X(t_k)X(s_j)\left[f'(t_k)(t_k-t_{k-1})-f'(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)\right]\left[f'(s_j)(s_j-s_{j-1})-f'(\theta_j)(s_{j+1}-s_j)\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} K_X(s_j,t_k)\left[f'(t_k)(t_k-t_{k-1})-f'(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)\right]\left[f'(s_j)(s_j-s_{j-1})-f'(\theta_j)(s_{j+1}-s_j)\right]$$

Donde $s_j \leq \theta_j \leq s_{j+1}$ y $m_X \equiv 0$, entonces tenemos

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f'(s_j)f'(t_k)K_X(s_j,t_k)(s_j-s_{j-1})(t_k-t_{k-1})+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f'(\theta_j)f'(\xi_k)(s_{j+1}-s_j)(t_{k+1}-t_k)K_X(s_j,t_k)-$$

$$- \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f'(s_j) f'(\varphi_k) K_X(s_j, t_k)(s_j - s_{j-1})(t_{k+1} - t_k) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f'(\theta_j) f'(t_k) K_X(s_j, t_k)(s_{j+1} - s_j)(t_k - t_{k-1})$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, e intercambrando sumas:

$$\int_a^b \int_a^b f'(s) f'(t) K_X(s,t) \, ds \, dt + \int_a^b \int_a^b f'(s) f'(t) K_X(s,t) \, ds \, dt$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} f'(\varphi_k)(t_{k+1} - t_k) \int_a^b f'(s) K_X(s,t) \, ds$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} f'(\theta_j)(s_{j+1} - s_j) \int_a^b f'(t) K_X(s_j, t) \, dt$$

$$= \int_a^b \int_a^b f'(s) f'(t) K_X(s,t) \, ds \, dt + \int_a^b \int_a^b f'(s) f'(t) K_X(s,t) \, ds \, dt -$$

$$- \int_a^b f'(s) \sum_{k=0}^{\infty} f'(\varphi_k) K_X(s, t_k)(t_{k+1} - t_k) \, ds - \int_a^b f'(t) \sum_{j=0}^{\infty} f'(\theta_j) K_X(s_j, t)(s_{j+1} - s_j) \, dt$$

$$= 2 \int_a^b \int_a^b f'(s) f'(t) K_X(s,t) \, ds \, dt - 2 \int_a^b \int_a^b f'(s) f'(t) K_X(s,t) \, ds \, dt = 0$$

De donde hemos probado que

$$\int_a^b f(t) \, dX + \int_a^b f'(t) X(t) \, dt = f(b) X(b) - f(a) X(a) .$$

Daremos algunos ejemplos del resultado anterior y apreciaremos su importancia.

EJEMPLO 3.3 Consideremos el movimiento Browniano $\{ B(t) : t \geq 0 \}$

i) Calcular $\int_a^b c \, dB$ donde $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^+$ y $c \in \mathbb{R}$

Por la fórmula tenemos que

$$\int_a^b c\, dB = c\,B(b) - c\,B(a) - \int_a^b (c)'\,B(t)\,dt$$

Así

$$\int_a^b c\, dB = c\left[B(b) - B(a)\right]$$

ii) Definimos el proceso estocástico

$$X(t) = \int_0^t u\, dB$$

cuya función de covarianza calculamos en seguida.

$$K_X(s,t) = \operatorname{cov}\left[X(s), X(t)\right]$$

Pero primero encontraremos expresiones para $X(t)$ y $X(s)$

$$X(t) = \int_0^t u\, dB = t\,B(t) - \int_0^t B(u)\,du$$

y

$$X(t) = \int_0^s v\, dB = s\,B(s) - \int_0^s B(v)\,dv$$

Es claro que $m_X \equiv 0$ por lo que

$$K_X(s,t) = \operatorname{cov}\left[X(s), X(t)\right] = E\left[X(s)X(t)\right]$$

$$= E\left[\left(t\,B(t) - \int_0^t B(u)\,du\right)\left(s\,B(s) - \int_0^s B(v)\,dv\right)\right]$$

$$= st\,K_B(s,t) + \int_0^t\int_0^s K_B(v,u)\,dv\,du - s\int_0^t K_B(s,u)\,du - t\int_0^s K_B(v,t)\,dv$$

$$= \sigma^2 st \min\{s,t\} + \sigma^2\int_0^t\int_0^s \min\{u,v\}\,dv\,du - s\sigma^2\int_0^t \min\{s,u\}\,du$$

$$- t\sigma^2\int_0^s \min\{v,t\}\,dv$$

Suponiendo que $s \leq t$ y desarrollando obtenemos

$$K_X(s,t) = \frac{\sigma^2 s^3}{3}$$

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - f'(t)\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

y

$$\left\|f(t+h)\left[\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right] - f(t)\,X'(t)\right\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

queda probada la fórmula $Y'(t) = [f(t)X(t)]'$

$$= f(t)X'(t) + f'(t)X(t).$$

Por la proposición 3.23 debemos probar que

$$\int_a^b f(t)X'(t)\,dt = f(b)X(b) - f(a)X(a) - \int_a^b f'(t)X(t)\,dt.$$

Puesto que

$$\int_a^b f(t)\,dX = f(b)X(b) - f(a)X(a) - \int_a^b f'(t)X(t)\,dt$$

basta con establecer

$$\int_a^b [f(t)X'(t) + f'(t)X(t)]\,dt = f(b)X(b) - f(a)X(a)$$

Pero

$$f(t)X'(t) + f'(t)X(t) = [f(t)X(t)]',$$

entonces

$$\int_a^b [f(t)X'(t) + f'(t)X(t)]\,dt = \int_a^b [f(t)X(t)]'\,dt$$

Y por el teorema fundamental del cálculo obtenemos

$$\int_a^b [f(t)X(t)]'\,dt = f(b)X(b) - f(a)X(a)$$

De esta manera X' existe, se cumple

$$\int_a^b f(t)\,dX = \int_a^b f(t)X'(t)\,dt.$$

Una aplicación de la proposición que recién probamos y de los procesos estocástico de segundo orden de variación acotada, así como de la doble integración de Riemann-Stieltjes de funciones reales con respecto a una función de dos variables continua es la que escribimos abajo.

PROPOSICION 3.25 Si $X : [a,b] \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso estocástico de segundo orden de variación acotada, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $K_X(s,u)$ son continuas y existen

$$\int_a^b f(s)\,dX \quad y \quad \int_a^b \int_a^b f(s) f(r)\, d K_X(s,r) \;;$$

Entonces el proceso $L_2 \int_a^t f(s)\,dX$ es de variación acotada.

PRUEBA: Debemos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \| Y(t_k) - Y(t_{k-1}) \|_2 < \infty$$

para cualquier partición de $[a,b]$.

Notemos que

$$\|Y(t_k) - Y(t_{k-1})\|_2^2 = \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s)\,dX \right\|_2^2$$

$$= E\left\{ \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s)\,dX \right]^2 \right\}$$

Si tomamos $\{s_i\}_{i=0}^{m}$ y $\{r_j\}_{j=0}^{m}$ dos particiones de $[t_{k-1}, t_k]$ antonces

$$S_m = S_m(f, X) = \sum_{i=1}^{m} f(s_i)\left[X(s_i) - X(s_{i-1}) \right] \xrightarrow[m\to\infty]{L_2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s)\,dX$$

$$S_m' = S_m'(f, X) = \sum_{j=1}^{m} f(r_j)\left[X(r_j) - X(r_{j-1}) \right] \xrightarrow[m\to\infty]{L_2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r)\,dX$$

Y

$$S_m S_m' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f(s_j)\left[X(s_i) - X(s_{i-1}) \right]\left[X(r_j) - X(r_{j-1}) \right]$$

entonces

$$E[S_m S_m'] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f(s_i) f(r_j) \; E\left\{[X(s_i) - X(s_{i-1})][X(r_j) - X(r_{j-1})]\right\}$$

luego

$$E\left\{\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s)\, dX\right]^2\right\} \quad \text{es el límite de } E[S_m S_m']$$

Pero también lo es

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s) f(r) \; d K_X (s,r) =$$

$$= c_k^2 \left[K_X (t_k - t_k) - 2 K_X (t_{k-1}, t_k) + K_X (t_{k-1}, t_k)\right]$$

$$= c_k^2 \; E\left\{ [X(t_k) - X(t_{k-1})]^2 \right\}$$

$$= c_k^2 \; \| X(t_k) - X(t_{k-1}) \|_2^2$$

donde $c_k \in \left[\inf_{t \in [t_{k-1}, t_k]} |f(t)| \; , \; \sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} |f(t)| \right]$

De este modo

$$\| Y(t_k) - Y(t_{k-1}) \|_2 = c_k \| X(t_k) - X(t_{k-1}) \|_2$$

$$\leq c \; \| X(t_k) - X(t_{k-1}) \|_2$$

por la definición de continuidad de f en $[a,b]$

$$\sum_{k=1}^{n} \| Y(t_k) - Y(t_{k-1}) \|_2 \;\leq\; c \sum_{k=1}^{n} \| X(t_k) - X(t_{k-1}) \|_2 < \infty$$

Por tanto Y resulta de variación acotada, de nuevo trabajamos con la suposición $m_X \equiv 0$.

Por último veremos cómo se puede definir una integral de línea de una función con respecto a un proceso estocástico de segundo orden.

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ se puede definir un curva como una función $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$, esto es, $\gamma(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ y si F es una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, la integral de línea de F a lo largo de γ se define como

$$\int_\gamma F = \int_a^b F[\gamma(t)]\cdot\gamma'(t)dt$$

donde

$$\gamma'(t)=(x_1'(t),x_2'(t),\ldots,x_n'(t))$$

y "$\cdot$" significa el producto interior en $\mathbb{R}^n$.
Es importante hacer notar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert (Completo con producto interior).

Se sabe que algunas propiedades de los procesos estocásticos han sido estudiadas por considerarlos curvas en un espacio de Hilbert.

Si para cada $t\in[a,b]$ tenemos un elemento del espacio de Hilbert $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ cuyo producto interior está dado por

$$<A,B> = E[AB] = \int_\Omega (AB)dP$$

entonces obtenemos de este modo una curva.

Podemos ahora dar una definición de integral de línea para procesos estocásticos de segundo orden.

DEFINICION 3.26 Sean $X:[a,b]\longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ un proceso estocástico diferenciable y $F:L_2(\Omega,\mathcal{F},P)\longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$

entonces se define la integral de línea de F a lo largo de $\mathbb{X}$ o con respecto a la curva $\mathbb{X}$ como

$$\int_{\mathbb{X}} F = \int_a^b \langle F[\mathbb{X}(t)], \mathbb{X}'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b E\{F[\mathbb{X}(t)]\mathbb{X}'(t)\} \, dt .$$

Observamos que la esperanza $E[F(\mathbb{X}(t))\mathbb{X}'(t)]$ siempre existe pues por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left| E[F(\mathbb{X}(t))\mathbb{X}'(t)] \right| \leq \| F(\mathbb{X}(t)) \|_2 \, \| \mathbb{X}'(t) \|_2 < \infty$$

Por l otro lado la iteración entre esperanza e integral no siempre es posible debido a que no tenemos garantías de que

$$\int_a^b F(\mathbb{X}(t)) \cdot \mathbb{X}'(t) dt$$

exista, más aún $F(\mathbb{X}(t))\mathbb{X}'(t)$ puede no estar en $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

En el caso en que vaga la iteración o equivalentemente que

$$\int_a^b F(\mathbb{X}(t))\mathbb{X}'(t) dt$$

exista se puede redefinir la integral de línea de F a lo largo de $\mathbb{X}$ como

$$E\left[\int_a^b F(\mathbb{X}(t))\mathbb{X}'(t) dt \right] .$$

EJEMPLO 3.4 Consideremos el siguiente proceso estocástico en donde $A_i \sim N(0, \sigma^2)$ son independientes para $i = 1, 2$ y $\mathbb{X}(t) = A_1 \cos \lambda t + A_2 \operatorname{sen} \lambda t$ con $\lambda > 0$. Calculemos la integral de línea de F a lo largo de $\mathbb{X}$ en $[a, b]$ si $F(\mathbb{X}(t)) = t\mathbb{X}(t)$

Es facil verificar que $X'(t) = \lambda(A_2 \cos \lambda t + A_1 \operatorname{sen} \lambda t]$

Luego

$$\int_X F = \lambda \int_a^b E \{ A_1 t \cos \lambda t + A_2 t \operatorname{sen} \lambda t][A_2 \cos \lambda t - A_1 \operatorname{sen} \lambda t]\} dt$$

$$= \lambda \int_a^b E[A_1 A_2 t \cos^2 \lambda t + A_2^2 t \operatorname{sen} \lambda t \cos \lambda t - A_1^2 t \operatorname{sen} \lambda t \cos \lambda t - A_1 A_2 \operatorname{sen}^2 \lambda t] dt$$

$$= \lambda \sigma_1^2 \int_a^b t \operatorname{sen} \lambda t \cos \lambda t \, dt - \lambda \sigma_2^2 \int_a^b t \operatorname{sen} \lambda t \cos \lambda t \, dt$$

$$= \frac{\lambda}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \left(\int_a^b t \operatorname{sen} 2\lambda t \, dt \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \left[\frac{a \cos(2a\lambda) - b \cos(2\lambda b)}{2\lambda} + \frac{\operatorname{sen}(2\lambda b) - \operatorname{sen}(2\lambda a)}{4\lambda^2} \right]$$

$$= (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \left[\frac{a \cos(2\lambda a) - b \cos(2\lambda b)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2\lambda b) - \operatorname{sen}(2\lambda a)}{8\lambda} \right]$$

En este ejemplo es posible iterar, hubiésemos podido encontrar este valor como

$$E \left\{ \int_a^b F(X(t)) X'(t) dt \right\} .$$

BIBLIOGRAFIA

- APOSTOL, T. 1972. <u>Análisis Matemático</u>. Reverté.

- ASH, R., M. GARDNER. 1975. <u>Topics in Stochastic Processes</u>. Academic Press.

- ASSEFI, T. 1979. <u>Stochastic Processes and Estimation Theory with Applications</u>. Wiley.

- BROMBERG, S., J.J. RIVAUD. 1975. <u>Análisis Diferencial</u>. Fondo de Cultura Económica.

- CARTAN, H. 1971. <u>Differential Calculus</u>. Hermann

- CRAMER, H. 1964. Stochastic Processes as curves in Hilbert Space. <u>Theory of Probability and its Applications</u>. Society for Industrial and Applied Mathematics.

- DIEUDONNE, J. 1969. <u>Foundations of Modern Analysis</u>. Academic Press

- HOEL, P., S. PORT, CH. STONE. 1972. <u>Introduction to Stochastic Processes</u>. Houghton Mifflin.

- JAZWINSKI, A. 1970. <u>Stochastic Processes and Filtering Theory</u>. Academic Press.

- SRINIVASAN, S.K., K.M. MEHATA. 1974. <u>Stochastic Processes</u>. Mc Graw Hill.

- WIDDER, D. 1961. <u>Advanced Calculus</u>. Prentice Hall.