

36
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

APLICACION DE LA TEORIA DE CONTROL OPTIMO
PARA MAXIMIZAR LA POTENCIA
DE UN REACTOR NUCLEAR.

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
FISICO
presenta

JOAQUIN RODOLFO HERNANDEZ PEREZ

MEXICO; D. F.

1991

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE.

RESUMEN	1.
--------------------------	----

CAPITULO I. REACTORES NUCLEARES.

1. Introducción	3.
2. Conceptos básicos	4.
3. La ecuación de transporte	7.
4. Ecuaciones de difusión para dos grupos de neutrones	15.
5. Envenenamiento por Xenón	25.

CAPITULO II. DE LA TEORIA DE CONTROL OPTIMO.

1. Introducción	28.
2. El problema de Control Optimo con relaciones restrictivas en las que aparece explícitamente la variable de control	30.
3. Condiciones necesarias para una solución óptima con restricción de desigualdad que no depende explícitamente de la variable de control.	40.
4. El problema general con extremos libres	49.
5. Principio del Máximo de Potryangin	55.
6. Condiciones necesarias para una solución óptima con restricción que no depende explícitamente de la variable de control, con condiciones iniciales y finales no completamente determinadas.	56.
7. Ejemplo de como un problema de Cálculo de Variaciones puede ser resuelto a través de la Teoría de Control Optimo.	60.
8. Comentarios	64.

CAPITULO III. OPTIMIZACION DE LA POTENCIA DE UN REACTOR NUCLEAR.

1. Introducción	65.
2. Un problema de Control Optimo	66.
3. Aplicación de la Teoría de Control Optimo	69.
4. Solución del sistema sobre la restricción	71.
5. Solución del sistema fuera de la restricción	73.
6. Las condiciones de transversalidad, de frontera y continuidad	77.
7. La solución óptima	87.
8. Comentarios.	91.

CAPITULO IV. RESULTADOS

1. Introducción	92.
2. Evaluación numérica usando parámetros típicos de un LWR	93.
3. Discusión de los resultados	110.

V. CONCLUSIONES	112.
----------------------------------	-------------

Apéndice A.

Consideraciones de la existencia de solución a la ec. criticidad	114.
--	------

Apéndice B.

Programa que calcula la distribución óptima de control para maximizar la potencia de un reactor nuclear	121.
Referencias	127.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es usar la Teoría de Control Óptimo para maximizar la potencia total de un reactor nuclear en presencia de una restricción en el valor máximo del flujo térmico de neutrones. El modelo que usaremos para éste fin es un reactor unidimensional finito (en forma de "slab"), en el cual el comportamiento de los neutrones es descrito por la aproximación de difusión con dos grupos energéticos, que serán llamados grupos rápido y térmico.

Así, se buscará aquella distribución de material absorbente dentro del reactor (que podríamos llamar barras de control) que maximizan la potencia, con la restricción adicional de que la cantidad de material absorbente que puede introducirse o sustraerse del sistema está acotada.

En el pasado, la Teoría de Control Óptimo ha sido usada con éxito en la solución de algunos problemas de optimalidad en modelos simplificados de reactores nucleares: Suda *et. al.*⁽¹⁷⁾ resolvió el problema de maximizar la potencia de un reactor nuclear, modelado por la ecuación de difusión para un grupo de energías. Ellos encuentran que la solución es del tipo "bang-pang"; también generalizaron la solución, para un modelo de dos grupos de energías, suponiendo que la solución es de la misma forma, además de suponer que el flujo térmico de neutrones varía suavemente con la posición, de manera que desprecian la cuarta derivada de esta variable respecto a la posición. Koga *et. al.*⁽¹⁸⁾ resuelven una variante de este problema, usando otro índice de calidad y sin considerar la restricción en el flujo térmico de neutrones. Vitela y Akcasu⁽¹⁹⁾ encuentran la solución óptima para un modelo consistente en la ecuación de difusión para un grupo energético de neutrones, incluyendo una distribución uniforme de fuentes externas. Este trabajo fue complementado por Vitela⁽²⁰⁾ usando como variable de control la concentración de fuentes externas.

Este trabajo está organizado como sigue

- * En el capítulo I se presenta una derivación de la aproximación de difusión con 2 grupos de neutrones que constituirá el modelo matemático de nuestro sistema.
- * En el capítulo II presentamos una revisión de la Teoría de Control Óptimo necesaria para la solución de nuestro problema.
- * El cap. III consiste de la aplicación de la teoría presentada en el cap. II al modelo de reactor nuclear discutido en el cap. I.
- * La ilustración numérica de los resultados del cap. III se hace en el cap. IV usando parámetros típicos de un reactor nuclear del tipo de agua ligera.
- * Las conclusiones son presentadas en el cap. V

CAPITULO I

REACTORES NUCLEARES.

I.1. INTRODUCCION.⁽¹⁾

Un reactor nuclear es un arreglo de materiales ffsiles, fisionables, fértiles, absorbentes, etc. de tal manera que se lleve a cabo en forma controlada una reacción en cadena con neutrones.

El diseño y operación de un reactor nuclear depende de las diversas formas en las que los neutrones interaccionan con los núcleos atómicos en él.

En el estudio de los reactores nucleares es fundamental tener un modelo matemático que describa el comportamiento espacio-temporal de la población de neutrones. El modelo más general usado para éste fin es la ecuación de transporte de neutrones, sin embargo ésta describe el comportamiento de la densidad de neutrones con mucho mayor detalle que el necesario para la mayoría de las aplicaciones prácticas. Mas aún, la solución de esta ecuación es, excepto en los casos más sencillos, extremadamente complicada o imposible.

Es entonces imperativo hacer aproximaciones a la ecuación de transporte, tales como la aproximación de difusión y de multigrupos con el objeto de obtener ecuaciones que describan el comportamiento de la población de neutrones y que sean suficientemente sencillas para que sea posible obtener soluciones útiles con un esfuerzo razonable.

En este capítulo se describen los conceptos básicos involucrados en la interacción de los neutrones con la materia y se deriva la ecuación de transporte. En forma heurística se presenta la aproximación de difusión y la derivación de las ecuaciones de difusión de dos grupos que formarán la base de este trabajo.

1.2. CONCEPTOS BASICOS.

Los neutrones interaccionan con la materia de diversas maneras: dispersión elástica, dispersión inelástica, reacciones de absorción, etc.

Sea un haz monoenergético de neutrones de intensidad I que choca frontalmente con un blanco de área A , espesor ΔX , y densidad atómica N . Si se coloca un detector detrás del blanco en la dirección del haz, se encuentra experimentalmente que la razón de interacción es directamente proporcional al área A , al espesor ΔX del blanco — si este es lo suficientemente delgado —, a la densidad atómica N y a la intensidad del haz :

$$\text{Razón de interacción} \propto I N A \Delta X.$$

$$\text{de donde la constante de proporcionalidad es} \quad (1.1)$$

$$\sigma \equiv \text{Razón de interacción} / I N A \Delta X.$$

Por lo que la sección transversal microscópica es la razón de interacción por átomo en el blanco por unidad de intensidad en el haz incidente.

Si se consideran solamente interacciones debidas solamente a dispersión elástica, por ejemplo, se puede definir la sección microscópica de dispersión elástica como:

$$\sigma_S \equiv \text{Razón de interacción debida a dispersión elástica} / I N A \Delta X \quad (1.2)$$

De esta manera, para cada tipo de interacción se define su correspondiente sección transversal microscópica. La sección transversal microscópica total es la suma de las secciones transversales microscópicas de todas las posibles interacciones:

$$\sigma_T \equiv \sigma_S + \sigma_A + \dots \quad (1.3)$$

La sección transversal macroscópica total se define como

$$\Sigma_T \equiv \sigma_T N. \quad (1.4)$$

En forma similar se definen las secciones transversales macroscópicas correspondientes a cada una de las interacciones. La sección macroscópica total es la probabilidad por unidad de longitud de que un neutrón del haz interactúe en el blanco.

Además la razón de interacción, es decir, el número de interacciones por unidad de volumen por unidad de tiempo es $I\Sigma_T$.

Para caracterizar la probabilidad de que una interacción de dispersión cambie la energía del neutrón se define la sección macroscópica de dispersión diferencial como la probabilidad de que un neutrón que incide sobre un núcleo, con energía E y dirección $\hat{\Omega}$, sea dispersado con energía final E' y dirección final $\hat{\Omega}'$:

$$\Sigma_S(E \rightarrow E', \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}'). \quad (1.5)$$

El proceso más importante en un reactor nuclear de fisión es la fisión nuclear, donde un núcleo pesado se parte en dos fragmentos con emisión de energía, la cual es repartida entre sus productos: Los dos fragmentos principales, neutrones, rayos gamma, betas y neutrinos.

En ciertos núcleos, como el ^{235}U , ^{233}U , ^{239}Pu y ^{241}Pu , el proceso de fisión puede ser inducido por la absorción de neutrones de energía entre 0 a 1 eV aproximadamente, conocidos como neutrones térmicos. A este tipo de núcleos se les llama núcleos físi­les.

Con la mayoría de los núcleos pesados es necesario que el neutrón incidente tenga una energía mucho mayor a la de los neutrones térmicos para producir fisión nuclear. A este tipo de neutrones se les conoce como neutrones rápidos. Ejemplo de estos núcleos, conocidos como núcleos fisionables son el ^{232}Th , ^{238}U y ^{240}Pu .

A los núclidos, como el ^{233}Th y ^{238}U , que pueden convertirse en especies físi­les se les denomina núclidos fértiles.

El número de neutrones producidos por fisión varía de fisión a fisión. Se define como $\nu(E)$ como el número promedio de neutrones emitidos por

una reacción de fisión provocada por un neutrón incidente de energía E . Asimismo, se define $\chi(E)$, como el espectro de energías de los neutrones producidos por fisión de tal manera que $\chi(E)dE$ es la fracción promedio de neutrones producidos en la fisión que tienen energías entre E y $E + dE$.

En los reactores de fisión, el combustible es una combinación de materiales fisiles y fisionables.

Los reactores se clasifican dependiendo de la energía de los neutrones que producen la mayoría de las fisiones. Hay tres categorías : reactores térmicos, intermedios y rápidos.⁽²⁾

Los reactores térmicos producen la mayoría de la energía debido a la fisión de los núcleos combustibles por neutrones cuya energía es muy cercana a la energía térmica promedio de los átomos del medio. Este tipo de reactor tiene la ventaja de la flexibilidad de su tamaño, que puede lograrse variando las propiedades y naturaleza de su combustible y moderador. La principal desventaja es la pérdida de neutrones térmicos debida a captura parasitaria por los materiales que lo forman.

Dado que en un reactor rápido, las fisiones son producidas por neutrones que han sido frenados muy poco de la velocidad que tenían al ser producidos por fisión, se evita el uso de moderador o de materiales de bajo número másico. Debido a que las secciones transversales de absorción de los neutrones rápidos son pequeñas, la captura parasitaria no constituye un problema. Por lo tanto la variedad de materiales es mayor que para los reactores térmicos. Si en el núcleo del reactor rápido, o en lo que se llama la capa fértil en torno del mismo existe una especie fértil, ésta se convertirá en fisil por captura neutrónica. En estas condiciones es posible que se produzca más material fisil por captura neutrónica, del que se consume por fisión.

El reactor rápido tiene la desventaja de que requiere una gran cantidad de material de fisión para obtener el tamaño crítico. Por otro lado, este puede ser muy pequeño, de modo que el enfriamiento se dificulta cuando la

potencia es muy alta.

En el reactor intermedio, la mayoría de las fisiones se deben a neutrones dentro de una amplia escala de energías entre las rápidas y las térmicas. Se requiere un medio moderador, pero no al grado que en un reactor térmico. La captura parasitaria de los neutrones se reduce en comparación con el reactor térmico y la cantidad necesaria de combustible es menor que en un reactor rápido, aunque el tamaño es mayor. El reactor intermedio ofrece la posibilidad de producir material físil, pero no tan eficientemente como uno rápido.

I.3. LA ECUACION DE TRANSPORTE.⁽³⁾

I.3.1 DENSIDAD DE NEUTRONES.

Sea $N(\mathbf{r}, t) \equiv \#$ esperado de neutrones en d^3r alrededor de \mathbf{r} al tiempo t . La frecuencia de interacción es $\nu\Sigma$, donde Σ , por ejemplo, puede ser Σ_A , por lo que $\nu\Sigma_A$ sería la frecuencia de interacción debida a absorción, etc. Entonces

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, t) d^3r &\equiv \nu \Sigma N(\mathbf{r}, t) d^3r \\ &\equiv \# \text{ esperado de interacciones} \\ &\quad \text{en } d^3r \text{ alrededor} \\ &\quad \text{de } \mathbf{r} \text{ al tiempo } t \\ &\quad \text{por unidad de tiempo} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Asimismo, se puede generalizar las definiciones anteriores para considerar la energía de los neutrones:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}, E, t) d^3r dE &\equiv \# \text{ esperado de neutrones} \\ &\quad \text{dentro de } d^3r \text{ en } \mathbf{r} \text{ con} \\ &\quad \text{energías entre } E \text{ y } E + dE \\ &\quad \text{al tiempo } t. \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$F(\mathbf{r}, E, t) d^3r dE \equiv v(E) \Sigma(E) N(\mathbf{r}, E, t) d^3r dE$$

\equiv # esperado de interacciones
 dentro de d^3r en r producidos
 por neutrones con energías
 entre E y $E + dE$ al tiempo t
 por unidad de tiempo.

(1.8)

Definamos ahora el flujo de neutrones como

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) \equiv v(E) N(\mathbf{r}, E, t).$$
(1.9)

Por lo que:

$$F(E, \mathbf{r}, t) = \Sigma(E) \phi(\mathbf{r}, E, t).$$
(1.10)

1.3.2 DENSIDADES Y CORRIENTES ANGULARES.

La población de neutrones en un reactor esta especificada por la función de densidad $n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ de modo que :

$$n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r dE d\Omega \equiv$$

esperado de neutrones en d^3r
 en \mathbf{r} , entre E y $E + dE$,
 en $d\Omega$ alrededor de
 $\hat{\Omega}$ al tiempo t .

(1.11)

Definamos el flujo angular de neutrones como

$$\varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \equiv v n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t).$$
(1.12)

y la corriente angular neutrónica:

$$\mathbf{j} \equiv v \hat{\Omega} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \hat{\Omega} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t).$$
(1.13)

De donde se sigue que la magnitud de la corriente angular neutrónica es el flujo angular de neutrones.

Si $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_S dA$ donde $\hat{\mathbf{e}}_S$ es el vector normal a la superficie A de área dA :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} dE d\hat{\Omega} d^3r &\equiv \# \text{esperado de neutrones} \\ &\text{atravesando el área } dA, \text{ en } r, \\ &\text{con energías entre } E \text{ y } E + dE \\ &\text{con dirección en } d\hat{\Omega} \text{ alrededor de } \hat{\Omega} \\ &\text{al tiempo } t, \text{ por unidad de tiempo.} \end{aligned} \quad (1.14)$$

La razón de interacción angular es :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) &= \nu \Sigma(E) n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \\ &= \Sigma(E) \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Integrando, sobre el ángulo sólido y sobre la energía la densidad angular neutrónica:

$$N(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t), \quad (1.16)$$

$$N(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dE N(\mathbf{r}, E, t) = \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\hat{\Omega} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (1.17)$$

Lo mismo para el flujo de neutrones:

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t), \quad (1.18)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (1.19)$$

Finalmente, se obtiene la densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ a partir de la densidad de corriente angular como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t), \quad (1.20)$$

también

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, E, t). \quad (1.21)$$

Nótese que

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \text{razón neta con la cual} \\ \text{los neutrones pasan a través de la} \quad (1.23) \\ \text{superficie } dA.$$

1.3.3 LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE.

Para encontrar el comportamiento de la densidad angular de neutrones, necesitamos tomar en cuenta todos los mecanismos a través de los cuales cambia el # de neutrones con energías entre E y $E + dE$ y dirección en $d\Omega$ alrededor de $\hat{\Omega}$, en un volumen arbitrario V :

$$\left[\int_V n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\Omega.$$

La razón de cambio está dada por el siguiente balance de neutrones :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\Omega = \text{ganancia} - \text{pérdida} , \quad (1.23)$$

si V no depende del tiempo :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\Omega = \int_V \frac{\partial n}{\partial t}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r dE d\Omega. \quad (1.24)$$

Consideremos los mecanismos de ganancia y pérdida de neutrones :

Mecanismos de ganancia.

- (1) Cualquier fuente de neutrones.
- (2) Neutrones entrando a V a través de la superficie S de V .
- (3) Neutrones dispersados de otro grupo de energías y direcciones al intervalo de dE en E y $d\Omega$ alrededor de $\hat{\Omega}$.

Mecanismos de pérdida.

- (4) Neutrones saliendo a través de la superficie S .
- (5) Neutrones en V sufriendo colisiones.

Ahora, se obtienen expresiones para estos mecanismos :

* Término correspondiente a la fuente de neutrones. Se define :

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = & \text{razón de producción de} \\ & \text{neutrones en } d^3r \text{ en } \mathbf{r}, \\ & \text{con energías entre } E \text{ y } E + dE \\ & \text{y dirección } d\Omega \text{ alrededor de } \hat{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

entonces :

$$(1) = \left[\int_V S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\Omega. \quad (1.26)$$

* Pérdida a través de colisiones.

$$\text{La razón de colisiones alrededor del punto } \mathbf{r} = \Sigma_T(\mathbf{r}, E) v n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (1.27)$$

Por lo que la razón de colisiones en el volumen V es :

$$(5) = \left[\int_V v \Sigma_T(\mathbf{r}, E) n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\Omega. \quad (1.28)$$

* Ganancia debida a neutrones dispersados sobre el intervalo de energías E y $E + dE$, $d\Omega$ alrededor de $\hat{\Omega}$ desde una energía E' y dirección $\hat{\Omega}'$:

$$\left[\int_V v' \Sigma_S(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) n(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) d^3r \right] dE d\Omega. \quad (1.29)$$

Considerando todas las contribuciones de cualquier energía y dirección :

$$(3) = \int_V d^3r \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' v' \Sigma_S(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) n(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) dE d\Omega. \quad (1.30)$$

* Escape neto del volumen V . La razón de neutrones con energía E y dirección $\hat{\Omega}$ que atraviesan ds , donde ds es un elemento de la superficie del volumen V :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \cdot ds = v \hat{\Omega} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \cdot ds. \quad (1.31)$$

Entonces la razón de neutrones de energía E y dirección $\hat{\Omega}$ que atraviesan la superficie S de V al tiempo t es :

$$(4) - (2) = \left[\int_S ds \cdot v \hat{\Omega} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \right] dE d\Omega. \quad (1.32)$$

Utilizando el teorema de Gauss : ..

$$(4) - (2) = \left[\int_V \nabla \cdot v \hat{\Omega} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\hat{\Omega}, \quad (1.33)$$

pero

$$\nabla \cdot v \hat{\Omega} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = v \hat{\Omega} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (1.34)$$

Entonces :

$$(4) - (2) = \left[\int_V v \hat{\Omega} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\hat{\Omega}. \quad (1.35)$$

Combinando los términos :

Razón de cambio del

$$\# \text{ esperado de neutrones} = (1) + (2) + (3) - (4) - (5). \quad (1.36)$$

Por lo que :

$$\int_V d^3r \left[\frac{\partial n}{\partial t}(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) + v \Sigma_T(\mathbf{r}, E) n(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) - S(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) - \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \Sigma_S(E' \rightarrow E, \hat{\mathbf{n}}' \rightarrow \hat{\mathbf{n}}) v' n(\mathbf{r}, E', \hat{\mathbf{n}}', t) + v \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) \right] dE d\hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (1.37)$$

Dado que el volumen de integración es arbitrario, el integrando debe anularse. De esta manera se obtiene la ecuación de transporte de neutrones :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) + v \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) + v \Sigma_T(\mathbf{r}, E) n(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) = S(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) + \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \Sigma_S(E' \rightarrow E, \hat{\mathbf{n}}' \rightarrow \hat{\mathbf{n}}) v' n(\mathbf{r}, E', \hat{\mathbf{n}}', t); \quad (1.38)$$

ó en términos del flujo angular de neutrones :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) = S(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t) + \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \Sigma_S(E' \rightarrow E, \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}) \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\mathbf{n}}', t), \quad (1.39)$$

donde hemos supuesto que el medio es isotrópico de modo que el argumento $\hat{\mathbf{n}}' \rightarrow \hat{\mathbf{n}}$ en la sección de dispersión se sustituyo por $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}$. La ecuación (1.39) es integrodiferencial y depende de siete variables : $\mathbf{r} = (x, y, z)$, E , $\hat{\mathbf{n}} = (\theta, \phi)$, así como el tiempo t .

Para resolver esta ecuación es necesario especificar las condiciones iniciales así como las condiciones a la frontera que debe satisfacer el flujo $\varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, t)$, es decir, especificando una distribución inicial al tiempo $t = 0$:

$$\varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}, 0) = \varphi_0(\mathbf{r}, E, \hat{\mathbf{n}}); \quad (1.40)$$

y por otra parte, si por la superficie S del reactor no entran neutrones,

entonces :

$$\varphi(\mathbf{r}_S, E, \hat{\Omega}, t) = 0 \quad \text{si} \quad \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\Omega} < 0 \quad \forall \mathbf{r}_S \in S. \quad (1.41)$$

Los neutrones producidos por fisión se incluyen como una componente del término fuente. La razón con que los neutrones de energía E' y dirección $\hat{\Omega}'$ inducen eventos de fisión es $\Sigma_f(E')\varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t)$, donde Σ_f es la sección transversal macroscópica de fisión para neutrones de energía E' .

Si $\nu(E')$ es el número promedio de neutrones producidos por fisión provocada por un neutrón de energía E' , entonces la razón con que los neutrones son producidos por las fisiones en \mathbf{r} al tiempo t es :

$$\int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t). \quad (1.42)$$

Los neutrones producidos por fisión tendrán una distribución dada por el espectro de fisión. Si se supone que la distribución de energías es independiente de la energía del neutrón que produce la fisión y si éstos son emitidos isotrópicamente, se tiene que la fuente de neutrones producida por fisión está dada por :

$$S_f(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t), \quad (1.43)$$

por lo que :

$$S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = S_f(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + S_{ext}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t), \quad (1.44)$$

donde $S_{ext}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ es la razón de producción de neutrones debida a fuentes externas.

1.4. ECUACIONES DE DIFUSION PARA DOS GRUPOS DE NEUTRONES

Dado que la ecuación de transporte es difícil de resolver es necesario simplificarla utilizando la aproximación de difusión y clasificando a los neutrones por sus energías. En este trabajo se utilizarán dos grupos de energías :

a) Neutrones térmicos, que son aquellos que tienen energías desde cero hasta 1 ev. Estos neutrones son los causantes de la mayoría de las fisiones en un reactor térmico.

b) Neutrones rápidos, que son aquellos que tienen energías desde 1 ev hasta la máxima energía que puede alcanzar un neutrón dentro de un reactor nuclear. Los neutrones producidos por la fisión caen dentro de este intervalo.

En esta sección se deriva a partir de la ecuación de transporte, la ecuación de difusión dependiente de la energía. Después se integra esta ecuación sobre los dos grupos de energías antes mencionados para llegar a las ecuaciones de difusión para dos grupos de neutrones.

1.4.1 LA ECUACION DE DIFUSION DEPENDIENTE DE LA ENERGIA. (4)

La aproximación de difusión supone lo siguiente:

- a) El flujo de neutrones depende débilmente de la dirección.
- b) Las fuentes de neutrones son isotrópicas.
- c) La razón de variación temporal de la densidad de corriente es mucho menor que la frecuencia de colisión.

Dado (a), se puede desarrollar el flujo en términos de los armónicos esféricos y considerando solamente hasta términos de primer orden en $\hat{\Omega}$, así pues :

$$\varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, T) \approx \phi(\mathbf{r}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) \cdot \hat{\Omega}. \quad (1.45)$$

Sustituyendo éste aproximación en la ecuación de transporte ecs. (1.39),

(1.43) y (1.44) e integrando sobre el ángulo sólido :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, E, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E, t) \\ &= S_{ext}(\mathbf{r}, E, t) + \int_0^\infty dE' \Sigma_S(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \\ & \quad + \chi(E) \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma(E') \phi(\mathbf{r}, E', t). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Esta no es una ecuación cerrada para el flujo $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ puesto que contiene la corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$. Necesitamos ahora encontrar una ecuación para la corriente neutrónica; para esto multiplicamos la ec. (1.39) por el ángulo sólido $\hat{\Omega}$ e integramos sobre todo $\hat{\Omega}$; con lo cual obtenemos :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}(\mathbf{r}, E, t) + \frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) \\ &= \mathbf{S}_1(\mathbf{r}, E, t) + \int_0^\infty dE' \mathbf{J}(\mathbf{r}, E', t) \Sigma_{S1}(E' \rightarrow E), \end{aligned} \quad (1.47)$$

donde hemos definido $\mu_0 \equiv \cos\theta = \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}$,

$$\Sigma_{S1}(E' \rightarrow E) \equiv 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu_0 \mu_0 \Sigma_S(E' \rightarrow E, \mu_0) \quad (1.48)$$

y

$$\mathbf{S}_1(\mathbf{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} d\Omega \hat{\Omega} S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (1.49)$$

Dada la hipótesis (b) : $\mathbf{S}_1 = 0$. Por la hipótesis (c) : $\|\mathbf{J}\|^{-1} \partial\|\mathbf{J}\|/\partial t \ll v \Sigma_T(\mathbf{r}, E)$. Por lo que la ecuación (1.47) se simplifica :

$$\frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) = -\Sigma_T(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) + \int_0^\infty dE' \mathbf{J}(\mathbf{r}, E', t) \Sigma_{S1}(E' \rightarrow E). \quad (1.50)$$

Si además :

$$\Sigma_{S1}(E' \rightarrow E) = \Sigma_{S1}(E) \delta(E' \rightarrow E), \quad (1.51)$$

entonces :

$$\frac{1}{3} \nabla \phi = -\Sigma_T \mathbf{J} + \Sigma_{S1}(E) \mathbf{J} \quad (1.52)$$

donde

$$\Sigma_{S1}(E) = \bar{\mu}_0 \Sigma_S(E) \quad (1.53)$$

por lo que :

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{3(\Sigma_T - \bar{\mu}_0 \Sigma_S)} \nabla \phi \quad (1.54)$$

Definiendo la sección transversal macroscópica de transporte

$$\Sigma_{tr} \equiv \Sigma_T - \bar{\mu}_0 \Sigma_S \quad (1.55)$$

y el coeficiente de difusión

$$D(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E)}, \quad (1.56)$$

se obtiene la ley de Fick :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = -D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t). \quad (1.57)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.46) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, E, t) - \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E, t) \\ & = S_{ext}(\mathbf{r}, E, t) + \int_0^\infty dE' \Sigma_S(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \\ & \quad + \chi(E) \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma(E') \phi(\mathbf{r}, E', t). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Esta es la ecuación de difusión de neutrones dependiente de la energía.

I.4.3 LA ECUACION DE DIFUSION DE NEUTRONES PARA DOS GRUPOS DE ENERGIAS. ⁽⁵⁾

La ecuación (1.58) es aún muy difícil de resolver en la práctica y es necesario hacer más simplificaciones con el objeto de obtener soluciones aproximadas; para esto es conveniente dividir el rango energético de los neutrones en energías bien definidas, como se verá a continuación .

Los neutrones en un reactor nuclear tienen energías desde aproximadamente 10 Mev hasta cerca de 0.01 ev, además las secciones eficaces de interacción dependen fuertemente de la energía de interacción. En las simplificaciones a la ecuación (1.58) es necesario tomar en cuenta estas características.

Esto se puede lograr si en vez de considerar al flujo de neutrones $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ como una función continua de E , se considera el flujo de neutrones en rangos de energía bien definidos, e.g. :

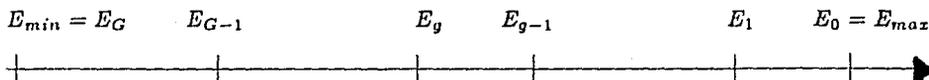


Fig. 1 Clasificación de la energía neutrónica en grupos.

Así, se divide el intervalo energético de los neutrones en G regiones, llamadas grupos de energía. Se puede definir el flujo total correspondiente a cada grupo g como :

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \phi(\mathbf{r}, E, t). \quad (1.59)$$

Para propósitos de este trabajo se considera el intervalo energético de los neutrones dividido en dos grupos, rápido y térmico .

La energía umbral E_1 que divide el grupo térmico y el rápido se escoge suficientemente grande como para que la dispersión de neutrones con energías dentro del grupo térmico al grupo rápido sea despreciable.

Esto conduce a la aproximación de difusión con dos grupos energéticos de neutrones. La obtención de las ecuaciones de difusión de multigrupos se puede obtener siguiendo la misma idea.

Para los propósitos de este trabajo la aproximación de dos grupos será suficiente.

Integrando la ecuación (1.58) entre dos grupos de energías, de E_0 a E_1 , para neutrones rápidos y de E_1 a E_2 para neutrones térmicos y además definiendo :

Flujo térmico :

Flujo rápido :

$$\phi_2(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{E_2}^{E_1} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad \phi_1(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{E_1}^{E_0} dE \phi(\mathbf{r}, E, t); \quad (1.60)$$

las secciones macroscópicas totales térmica y rápida se definen respectivamente como :

$$\begin{aligned} \Sigma_{T_2}(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{1}{\phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t) , \\ \Sigma_{T_1}(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{1}{\phi_1} \int_{E_1}^{E_0} dE \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t) \phi(\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (1.61)$$

y los coeficientes de difusión térmico y rápido como

$$\begin{aligned} D_2(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{\int_{E_2}^{E_1} dE \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) \cdot \int_{E_2}^{E_1} dE D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\left| \int_{E_2}^{E_1} dE \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) \right|^2}, \\ D_1(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{\int_{E_1}^{E_0} dE \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) \cdot \int_{E_1}^{E_0} dE D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\left| \int_{E_1}^{E_0} dE \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) \right|^2}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

respectivamente.

Además, definimos :

$$\frac{1}{v_2} \equiv \frac{1}{\phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE \frac{1}{v} \phi(\mathbf{r}, E, t), \quad \frac{1}{v_1} \equiv \frac{1}{\phi_1} \int_{E_1}^{E_0} dE \frac{1}{v} \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (1.63)$$

y también :

Sección macroscópica de dispersión del grupo rápido al rápido

$$\Sigma_{S_{11}} \equiv \frac{1}{\phi_1} \int_{E_1}^{E_0} dE \int_{E_1}^{E_0} dE' \Sigma(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t)$$

Sección macroscópica de dispersión del grupo rápido al térmico

$$\Sigma_{S_{12}} \equiv \frac{1}{\phi_1} \int_{E_2}^{E_1} dE \int_{E_1}^{E_0} dE' \Sigma(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t)$$

Sección macroscópica de dispersión del grupo térmico al rápido

$$\Sigma_{S_{21}} \equiv \frac{1}{\phi_2} \int_{E_1}^{E_0} dE \int_{E_2}^{E_1} dE' \Sigma(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t)$$

Sección macroscópica de dispersión del grupo térmico al térmico

$$\Sigma_{S_{22}} \equiv \frac{1}{\phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE \int_{E_2}^{E_1} dE' \Sigma(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t)$$

(1.64)

Si la energía de los neutrones es suficientemente alta, las colisiones de dispersión con los núcleos del sistema siempre reducirán la energía de los neutrones. Sin embargo, cuando la energía de los neutrones es del orden de la energía térmica de los núcleos es posible que los neutrones ganen energía en colisiones de dispersión. Como se mencionó anteriormente si uno escoge la energía umbral E suficientemente alta ≈ 1 ev, los neutrones en el grupo térmico no podrán pasar al grupo rápido en colisiones de dispersión. Así :

$$\int_{E_2}^{E_1} dE \Sigma_S(E' \rightarrow E) = \Sigma_S(E') \quad \text{para} \quad E_2 < E' < E_1. \quad (1.65)$$

Entonces :

$$\Sigma_{S_{22}} = \frac{1}{\phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE' \Sigma_S(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) = \Sigma_{S_2}, \quad (1.66)$$

y

$$\Sigma_{S_{21}} = 0. \quad (1.67)$$

Por lo que, usando las definiciones anteriores :

$$\int_{E_2}^{E_1} dE \int_0^{\infty} dE' \Sigma(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) = \phi_1 \Sigma_{S_{12}} + \phi_2 \Sigma_{S_2}, \quad (1.68)$$

y definiendo las secciones transversales de remoción :

$$\begin{aligned} \Sigma_{R_1} &\equiv \Sigma_{T_1} - \Sigma_{S_{11}} \\ &= (\Sigma_{A_1} + \Sigma_{S_{12}} + \Sigma_{S_{11}}) - \Sigma_{S_{11}} \\ &= \Sigma_{A_1} + \Sigma_{S_{12}}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{R_2} &\equiv \Sigma_{T_2} - \Sigma_{S_{22}} \\ &= \Sigma_{T_2} - \Sigma_{S_2} \\ &\equiv \Sigma_{A_2}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Además, dentro de un reactor térmico la mayoría de las fisiones son producidas por los neutrones térmicos y los neutrones producidos por fisión caen dentro del grupo rápido. Esto se puede expresar como :

$$\begin{aligned} \nu \Sigma_{F_1} &\equiv \frac{1}{\phi_1} \int_{E_1}^{E_0} dE' \nu(E') \Sigma_F(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) = 0, \\ \nu \Sigma_{F_2} &\equiv \frac{1}{\phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE' \nu(E') \Sigma_F(E') \phi(\mathbf{r}, E', t), \end{aligned} \quad (1.71)$$

y los espectros de energía de los neutrones de fisión como :

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv \int_{E_1}^{E_0} dE \chi(E) \equiv 1, \\ \chi_2 &\equiv \int_{E_2}^{E_1} dE \chi(E) \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Integrando en los intervalos energéticos correspondientes, el término perteneciente a la fuente externa en la ec. (1.58) da origen a :

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \int_{E_1}^{E_0} dE S_{ext}(\mathbf{r}, E, t), \\ S_2 &\equiv \int_{E_2}^{E_1} dE S_{ext}(\mathbf{r}, E, t). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Con lo cual obtenemos las ecuaciones de difusión para dos grupos energéticos de neutrones :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot D_2(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_2(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{A_2}(\mathbf{r}, t) \phi_2(\mathbf{r}, t) \\ = \Sigma_{S_{12}} \phi_1(\mathbf{r}, t) + S_2, \end{aligned} \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot D_1(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_1(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{A_1}(\mathbf{r}, t) \phi_1(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{S_{12}} \phi_1(\mathbf{r}, t) \\ = \nu \Sigma_{F_2} \phi_2(\mathbf{r}, t) + S_1. \end{aligned} \quad (1.75)$$

En este trabajo se considerará un reactor unidimensional, homogéneo, en estado estacionario y sin fuentes externas por lo que las ecuaciones de difusión quedan :

$$D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2}(x) - \Sigma_{A_2} \phi_2(x) + \Sigma_{S_{12}} \phi_1(x) = 0, \quad (1.76)$$

$$D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2}(x) - \Sigma_{A_1} \phi_1(x) - \Sigma_{S_{12}} \phi_1(x) + \nu \Sigma_{F_2} \phi_2(x) = 0. \quad (1.77)$$

Las cuales deben ser resueltas con las siguientes condiciones a la frontera :

$$\phi_1(-H/2) = \phi_1(H/2) = 0 \quad (1.78)$$

$$\phi_2(-H/2) = \phi_2(H/2) = 0 \quad (1.79)$$

donde $-H/2$ y $H/2$ son los extremos del reactor unidimensional (ver figura 1.2).

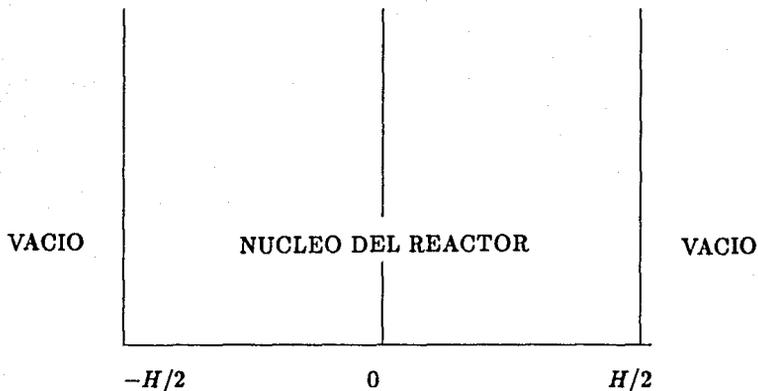
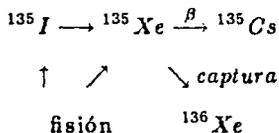


Fig. 2. Diagrama esquemático del reactor.

I.5. ENVENENAMIENTO POR XENÓN. (6)

El producto de fisión más importante en reactores térmicos es el ^{135}Xe , el cual tiene una sección de absorción para neutrones térmicos de $\sigma_{A,\text{Xe}} = 2.7 \times 10^6$ barns. Este isótopo es resultado del decaimiento del ^{135}I y también es producto directo de la fisión, como lo muestra el siguiente diagrama :



Este isótopo decae por desintegración β a ^{135}Cs , y por su gran sección de absorción captura neutrones para convertirse en ^{136}Xe . De acuerdo a lo anterior las ecuaciones de balance del ^{135}I y el ^{135}Xe son respectivamente :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \gamma_I \Sigma_{F_2} \phi_2 - \lambda_I I, \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \lambda_I I + \gamma_X \Sigma_{F_2} \phi_2 - \lambda_X X - \sigma_{A,\text{Xe}} \phi_2 X, \quad (1.81)$$

donde I y X son la concentración de Yodo y Xenón respectivamente, λ_I y λ_X las constantes de desintegración del Yodo y Xenón respectivamente y γ_I y γ_X los rendimientos de estos nucleidos.

En estado estacionario, las concentraciones de ^{135}I y ^{135}Xe no cambian con el tiempo. Para encontrar las concentraciones de equilibrio se igualan las derivadas temporales a cero en las ec.(1.80) y ec.(1.81); y se resuelven las ecuaciones resultantes para I y X ; obteniendo :

$$I = \frac{\gamma_I \Sigma_{F_2} \phi_2}{\lambda_I}. \quad (1.82)$$

$$X = \frac{\Sigma_{F_2} (\lambda_I + \lambda_X) \phi_2}{\lambda_X + \sigma_{A,\text{Xe}} \phi_2}. \quad (1.83)$$

Incluyendo la absorción debida al ^{135}Xe en la ec. de difusión para el flujo térmico, ec(1.76) :

$$D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2}(x) - \Sigma_{A_2} \phi_2(x) - \sigma_{A,\text{Xe}} \phi_2(x) X + \Sigma_{S_{12}} \phi_1(x) = 0. \quad (1.84)$$

por lo que :

$$D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2}(x) - \Sigma_{A_2} \phi_2(x) - \frac{\Sigma_{F_2} (\lambda_I + \lambda_X) \sigma_{A, Xe} \phi_2^2(x)}{\lambda_X - \sigma_{A, Xe} \phi_2} + \Sigma_{S_{12}} \phi_1(x) = 0. \quad (1.85)$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal en ϕ_2 , la cual tiene que ser resuelta simultáneamente con la ecuación de difusión para el grupo rápido. Con el objeto de simplificar su solución, se linealizará.

Notando que el término de absorción debido al Xenón se puede escribir como :

$$\frac{\Sigma_{F_2} (\gamma_I + \gamma_X) \sigma_{A, Xe} \phi_2^2(x)}{\sigma_{A, Xe} \phi_2 \left(1 + \frac{\lambda_X}{\sigma_{A, Xe} \phi_2}\right)} = \frac{\Sigma_{F_2} (\gamma_I + \gamma_X) \phi_2(x)}{1 + \frac{\lambda_X}{\sigma_{A, Xe} \phi_2}}. \quad (1.86)$$

y si suponemos que :

$$\frac{\lambda_X}{\sigma_{A, Xe} \phi_2} \ll 1 \quad (1.87)$$

el término de envenenamiento linealizado resulta :

$$\Sigma_{F_2} (\gamma_I + \gamma_X) \phi_2(x) \quad (1.88)$$

Para que esta suposición sea válida y dado que la constante de decaimiento del ^{135}Xe es $2.09 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$ y la sección transversal de absorción del mismo es $\sigma_{A, Xe} = 2.7 \times 10^6 \text{ barns}$, es necesario que :

$$\phi_2 \gg 8 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ seg}^{-1}. \quad (1.89)$$

Dado que las condiciones de contorno requieren que ϕ_1 y ϕ_2 se anulen en la superficie del reactor esta aproximación no será válida cerca de la orilla del sistema. Para el propósito de este trabajo, supondremos que esta aproximación es válida en todo el volumen del reactor. Entonces, las

ecuaciones de difusión se reducen a :

$$D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2}(x) - \Sigma_{A_2} \phi_2(x) - (\gamma_I + \gamma_X) \Sigma_{F_2} \phi_2(x) + \Sigma_{S_{1,2}} \phi_1(x) = 0, \quad (1.90)$$

$$D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2}(x) - \Sigma_{A_1} \phi_1(x) - \Sigma_{S_{1,2}} \phi_1(x) + \nu \Sigma_{F_2} \phi_2(x) = 0. \quad (1.91)$$

Estas ecuaciones constituirán el modelo de un reactor unidimensional (*slab*) en estado estacionario que, junto con la Teoría de Control Optimo discutida en el siguiente capítulo, utilizaremos para estudiar el problema de maximizar la potencia de un reactor nuclear.

CAPITULO II

INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONTROL OPTIMO.

II.1 INTRODUCCION⁽⁷⁾

Supongamos que un sistema fisico bajo estudio puede ser modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t), t) \quad (2.1)$$

donde $x(t)$ es en general un vector cuyas componentes especifican el estado del sistema. De manera que si al tiempo $t = 0$ se conoce el estado inicial, x_0 , entonces si es posible resolver para x la ecuación (2.1), se puede conocer $x(t)$ para $t \geq 0$.

Si por algún medio este sistema puede ser controlado usando alguno de los parámetros que lo afectan, al cual llamaremos variable de control y que se caracterizará, además, en que sus variaciones pueden ser arbitrarias e independientes del estado del sistema, entonces el comportamiento del sistema puede ser representado por

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad (2.2)$$

donde u es la variable de control.

Si el sistema puede ser llevado de un estado inicial x_0 al tiempo t_0 , a otro estado final x_f a un tiempo t_f , habrá en general un conjunto $\Omega = \{u(t)\}$, finito o no, de funciones del tiempo, no necesariamente continuas, que conduzcan al sistema entre estos estados siguiendo trayectorias posiblemente muy diferentes.

En algunos casos se desea escoger una función $u^*(t) \in \Omega$ de modo que ésta minimize o maximize cierta funcional $J[u]$ al llevar el sistema del estado inicial al final, por ejemplo :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, u, t) dt, \quad (2.3)$$

donde L es una función escogida para evaluar el comportamiento deseado del sistema. A esta funcional, por razones obvias, se le conoce generalmente como índice del comportamiento del sistema.

A la función que optimiza el índice de comportamiento, i.e. que maximiza o minimiza a $J[u]$ se le llama control óptimo u^{op} y a la trayectoria a que da lugar esta función se le conoce como trayectoria óptima del sistema.

Muchas veces el estado final \mathbf{x}_f y el tiempo final t_f de la trayectoria óptima no se conocen directamente, sino a través de un conjunto de ecuaciones

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_f, t_f) = 0, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{M} es un vector que relaciona las componentes del vector de estado y el tiempo (ver Fig. 2.1).

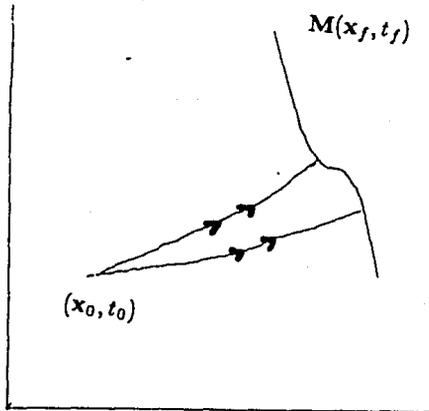


Fig. 2.1

Diagrama esquemático de una trayectoria en el espacio de estados.

En problemas de optimización pueden existir restricciones; un ejemplo es un avión que viaja entre dos ciudades fronterizas en un tiempo mínimo pero restringido a no cruzar la frontera. En general, éstas restricciones pueden estar impuestas sobre las variables de estado y/ó de control.

En la sección II.2 se estudiará el problema de control óptimo con una restricción que depende explícitamente de la variable de control. En la sección II. 3 , la restricción no depende explícitamente de la variable de control. La sección II.4 trata acerca del problema de control óptimo con extremos libres. El principio del Máximo de Potryangin es visto en la sección II.5. La sección II.6 es una síntesis de los problemas anteriores y la sección II.7 ilustra la técnica de Control Optimo a través de un problema de cálculo de variaciones.

En el capítulo se utilizará la notación de Einstein para indicar sumatorias con índices repetidos.

II.2 EL PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO CON RELACIONES RESTRICTIVAS EN LAS QUE APARECE EXPLICITAMENTE LA VARIABLE DE CONTROL. ⁽⁸⁾

El método para encontrar las condiciones necesarias que debe satisfacer una extremal consistirá en obtener la primera variación del índice de comportamiento, incluyendo las ecuaciones dinámicas (2.2), la restricción

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq 0 \quad (2.6)$$

donde C es una función escalar, y la condición final (2.4) usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Dado que la restricción (2.6) contiene explícitamente la variable de con-

trol, si alguna sección ó parte de la trayectoria óptima radica sobre la frontera con la zona prohibida, el valor del control óptimo es determinado resolviendo la ecuación $C(\mathbf{x}, u, t) = 0$ para u . El problema se plantea como sigue :

Encontrar $u(t)$ que maximice la funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, u, t) dt + \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f), \quad (2.7)$$

sujeto a las ecuaciones dinámicas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \quad \text{con } \dot{u} \in \Omega, \quad (2.8)$$

con la condición inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.9)$$

la condición final

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0, \quad \dim\{\mathbf{M}\} \leq \dim\{\mathbf{x}\} + 1, \quad (2.10)$$

y a la restricción

$$C(\mathbf{x}, u, t) \leq 0. \quad (2.11)$$

Notemos aquí que la ec. (2.10) considera también la posibilidad de que tanto el tiempo final t_f , así como todas ó algunas de las componentes del estado final esten predeterminadas.

Este problema es equivalente a maximizar la siguiente funcional (a la cual seguiremos llamando J por comodidad) :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [L(\mathbf{x}, u, t) + \lambda_i f_i(\mathbf{x}, u, t) + \gamma C(\mathbf{x}, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i] dt, \quad (2.12)$$

$$+ \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \mu_k M_k(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$

donde μ es un vector adjunto constante o multiplicador Lagrange, $\lambda(t)$ es una función vectorial adjunta y γ es una función adjunta con valor nulo fuera de la restricción :

$$\gamma = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } C(\mathbf{x}, u, t) = 0; \\ 0 & \text{si } C(\mathbf{x}, u, t) < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Definamos

$$H(\mathbf{x}, \lambda, u, t) \equiv L(\mathbf{x}, u, t) + \lambda_i f_i(\mathbf{x}, u, t) \quad (2.14)$$

como la **función de estado de Potryangin**, la cual también es conocida como el hamiltoniano, aunque este nombre se le da solo por la analogía de las condiciones necesarias satisfechas por un extremal en Control Óptimo con las ecuaciones de Hamilton en Mecánica Clásica. Dado que el añadir una constante a la funcional no altera la trayectoria óptima, la siguiente funcional es equivalente a la anterior :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \lambda, u, t) + \gamma C(\mathbf{x}, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i] dt \quad (2.15)$$

$$+ \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) - \phi(\mathbf{x}(t_0), t_0)$$

$$+ \mu_k M_k(\mathbf{x}(t_f), t_f) - \mu_k M_k(\mathbf{x}(t_0), t_0).$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo introducimos ϕ y M dentro de la integral y a través de la regla de la cadena expresamos las derivadas totales respecto al tiempo en términos de sus derivadas parciales :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\mathbf{x}, \lambda, u, t) + \gamma C(\mathbf{x}, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \right] dt. \quad (2.16)$$

Por simplicidad, pero sin pérdida de generalidad se considera la trayectoria óptima dividida en tres secciones :

- Una inicial sin restricciones ($C(\mathbf{x}, u, t) < 0$),
- Una intermedia con restricción ($C(\mathbf{x}, u, t) = 0$),
- Una final sin restricción ($C(\mathbf{x}, u, t) < 0$),

como se ilustra en la Fig. (2.2)

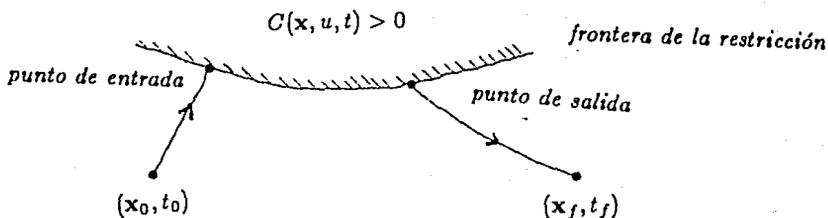


Fig. 2.2 Diagrama esquemático de una trayectoria con restricciones del tipo $C(\mathbf{x}, u, t) \leq 0$.

Considerando lo anterior dividimos la integral en tres partes :

$$J = \int_{t_0}^{t_*} (\dots) dt + \int_{t_*}^{t^*} (\dots) dt + \int_{t^*}^{t_f} (\dots) dt \quad (2.17)$$

Donde t_e y t_s son los puntos de entrada y de salida de la restricción respectivamente. Llamando I_1 , I_2 y I_3 respectivamente a cada una de estas integrales :

$$J = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.18)$$

Por lo que :

$$\delta J = \delta I_1 + \delta I_2 + \delta I_3 \quad (2.19)$$

Si

$$\begin{aligned} L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t) &\equiv H(\mathbf{x}, u, \lambda, t) - \lambda_i \dot{x}_i \\ &+ \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &+ \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

la variación de la primera integral es :

$$\delta I_1 = \int_{t_0}^{t_e} L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t) dt. \quad (2.21)$$

Así,

$$\delta I_1 = \delta \int_{t_0}^{t_e + \delta t_e} L'(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} + \delta \dot{\mathbf{x}}, u + \delta u, \lambda + \delta \lambda, t) dt - \int_{t_0}^{t_e} L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t) dt. \quad (2.22)$$

Desarrollando el primer integrando en serie de Taylor y considerando solamente los términos de orden no mayor al primero :

$$\begin{aligned} \delta I_1 &= \delta \int_{t_0}^{t_e + \delta t_e} [L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t) + \frac{\partial L'}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \frac{\partial L'}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i] dt \\ &- \int_{t_0}^{t_e} L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t) dt. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ahora, separando la primera integral de la ecuación anterior en dos integrales, la primera de 0 a t_e y la segunda de t_e a $t_e + \delta t_e$, de manera que al sumar, en la integral de 0 a t_e se cancelen los términos de orden cero. El resultado es :

$$\begin{aligned} \delta I_1 = & \int_{t_0}^{t_e} \left[\frac{\partial L'}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \frac{\partial L'}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i \right] dt \\ & + \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \left[L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t) + \frac{\partial L'}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \frac{\partial L'}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i \right] dt \end{aligned} \quad (2.24)$$

Integrando por partes el término con $\delta \dot{x}$ y utilizando el teorema de valor medio para evaluar la última integral, conservando solamente hasta los términos de primer orden :

$$\begin{aligned} \delta I_1 = & \int_{t_0}^{t_e} \left[\left\{ \frac{\partial L'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \right) \right\} \delta x_i + \frac{\partial L'}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i \right] dt \\ & + \left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right]_{t_0}^{t_e} + L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t) \Big|_{t_e} \delta t_e. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Sustituyendo $L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t)$ por la expresión en (2.20) en la ecuación anterior y suponiendo que $\phi(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ son funciones continuas con primeras y segundas derivadas parciales continuas, obtenemos :

$$\begin{aligned} \delta I_1 = & \int_{t_0}^{t_e} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i \right) \delta x_i + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\ & + \left(-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right) \delta x_i \Big|_{t_e} \\ & + \left(H - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right) \Big|_{t_e} \delta t_e, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde hemos usado el hecho de que tanto el tiempo inicial t_0 como el estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ están fijos. De la figura 2.3 :

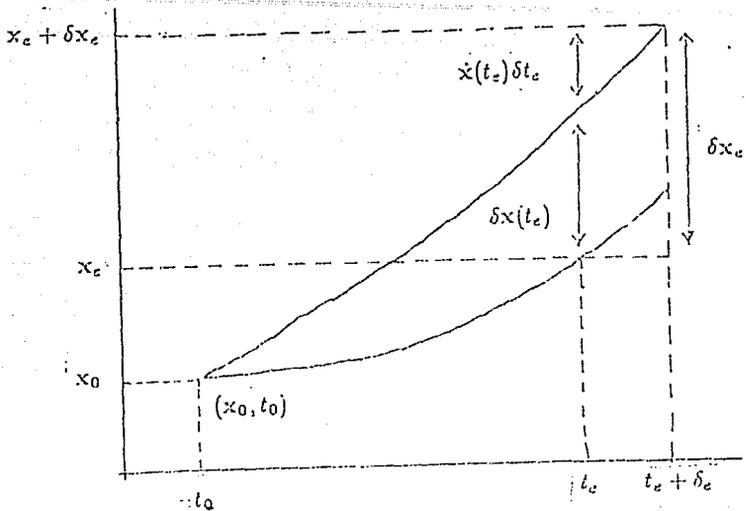


Fig. 2.3. La variación total de las variables de estado en el tiempo de entrada es igual a la suma de las variaciones por el tiempo de entrada y las variables de estado en el punto de entrada.

$$\delta x_{i,e} = \dot{x}_i(t_e) \delta t_e + \delta x_i(t_e), \quad \text{entonces} \quad \delta x_i(t_e) = \delta x_{i,e} - \dot{x}_i(t_e) \delta t_e. \quad (2.27)$$

Así :

$$\begin{aligned} \delta I_1 = \int_{t_0}^{t_e} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \lambda_i \right) \delta x_i + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\ + \left(-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} t + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right) \delta x_{i,e} \Big|_{t_e} \\ + \left(H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right) \Big|_{t_e} \delta t_e \end{aligned} \quad (2.28)$$

Obtengamos ahora δI_2 :

$$\begin{aligned}
\delta I_2 &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[H(\mathbf{x}, u, \lambda, t) + \gamma C(\mathbf{x}, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i \right. \\
&\quad + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \\
&\quad \left. + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, t) + \gamma C(\mathbf{x}, u, t)] dt,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

siguiendo un procedimiento igual al anterior, aplicamos directamente el resultado de la ecuación (2.25) :

$$\begin{aligned}
\delta I_2 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial C}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i \right) \delta x_i \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial C}{\partial u} \right) \delta u + C \delta \gamma + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\
&\quad + \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_1} \\
&\quad - \left[H - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} + \gamma C \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \\
&\quad + \left[H - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} + \gamma C \right] \Big|_{t_1} \delta t_1
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Dado que :

$$\delta x_i(t_e) = \delta x_{i,e} - \dot{x}_i(t_e) \delta t_e, \quad \delta x_i(t_0) = \delta x_{i,0} - \dot{x}_i(t_0) \delta t_0 \tag{2.31}$$

y

$$C(\mathbf{x}(t), t) \Big|_{t_0} = C(\mathbf{x}(t), t) \Big|_{t_f} = 0, \tag{2.32}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta I_2 = \int_{t_0}^{t_1} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial C}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i \right) \delta x_i \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial C}{\partial u} \right) \delta u + C \delta \gamma + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\
& - \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_0} \delta x_{i,c} \\
& - \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right] \Big|_{t_0} \delta t_c \\
& + \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_1} \delta x_{i,s} \\
& + \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right] \Big|_{t_1} \delta t_s
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Asimismo, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\delta I_3 = \int_{t_0}^{t_f} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i \right) \delta x_i \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\
& - \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_0} \delta x_{i,s} \\
& - \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right] \Big|_{t_0} \delta t_s \\
& + \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_f} \delta x_{i,f} \\
& + \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Sustituyendo las variaciones (2.28), (2.33) y (2.34) en la ecuación (2.19), tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta J = \int_{t_0}^{t_f} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i + \gamma \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right. \\
& + \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial C}{\partial u} \right) \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i + C \delta \gamma \left. \right] dt \\
& + \left(-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right) \Big|_{t_f} \delta x_{i,f} \\
& + \left(H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
& + \left(\lambda_i(t_s^+) - \lambda_i(t_s^-) \right) \delta x_{i,s} + \left(H(t_s^-) - H(t_s^+) \right) \delta t_s \\
& + \left(\lambda_i(t_e^+) - \lambda_i(t_e^-) \right) \delta x_{i,e} + \left(H(t_e^-) - H(t_e^+) \right) \delta t_e
\end{aligned} \tag{2.35}$$

con $\gamma = 0$ fuera de la restricción.

Ahora, J tiene un máximo global en u^{op} si

$$J(u^{op}) > J(u) \quad \text{para toda } u \in U, \tag{2.36}$$

donde U es la región de control. Por lo que :

$$\delta J[u^{op}] \leq 0. \tag{2.37}$$

Las variaciones en x , λ , γ y t dependen de las variaciones en la variable de control. Así pues, uno espera que δJ dependa sólo de δu , por lo que si

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial C}{\partial u} \right] \delta u, \tag{2.38}$$

se obtienen las siguientes condiciones de la ec. (2.35) :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial C}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i = 0, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i = 0, \tag{2.40}$$

$$\gamma C = 0, \tag{2.41}$$

$$\left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_f} = 0, \tag{2.42}$$

$$\left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right] \Big|_{t_f} = 0, \quad (2.43)$$

$$\lambda_i(t_s^+) = \lambda_i(t_s^-), \quad (2.44)$$

$$H(t_s^-) = H(t_s^+), \quad (2.45)$$

$$\lambda_i(t_e^+) = \lambda_i(t_e^-), \quad (2.46)$$

$$H(t_e^-) = H(t_e^+). \quad (2.47)$$

Si la región de control no es acotada, el valor del control óptimo debe satisfacer $\delta J = 0$ de modo que

$$\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial C}{\partial u} = 0. \quad (2.48)$$

Estas condiciones son válidas tanto dentro como fuera de la restricción. Algunos comentarios importantes son :

(a) Fuera de la restricción $\gamma \equiv 0$ y la ec. (2.41) se satisface trivialmente. El valor del control óptimo en ésta zona se obtiene entonces de la ec. (2.48), i. e., de

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (2.49)$$

(b) Dentro de la restricción $\gamma(t) \neq 0$ y de la ecuación (2.42), i. e. $C(\mathbf{x}, u, t) = 0$, se obtiene u . La ecuación (2.48) nos da entonces $\gamma(t)$ dentro de la restricción, la cual se debe sustituir en la ec. (2.39), con lo cual tenemos junto con (2.40) un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden.

II.3 CONDICIONES NECESARIAS PARA UNA SOLUCION OPTIMA CON RESTRICCIÓN DE DESIGUALDAD QUE NO DEPENDE EXPLÍCITAMENTE DE LA VARIABLE DE CONTROL.⁽⁹⁾

En esta sección se encuentran las condiciones necesarias que debe satisfacer un extremal en aquellos problemas donde las variables de estado están restringidas a satisfacer una relación de desigualdad de la forma :

$$S(\mathbf{x}, t) \leq 0. \quad (2.50)$$

Dado que S se anula sobre la frontera de la restricción se sigue que sus derivadas totales respecto al tiempo también :

$$\frac{d^k S}{dt^k} = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.51)$$

La primera derivada total respecto al tiempo de S es :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, u, t) \quad (2.52)$$

Dado que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t)$ aparece en la relación anterior, dS/dt puede ser una función explícita de la variable de control $u(t)$. Si dS/dt no es una función explícita de la variable de control, uno debe considerar la segunda derivada total, la tercera derivada total, etc. hasta que resulte una derivada, en la cual aparezca explícitamente la variable de control. Supongamos que ésta aparece explícitamente en la derivada total de orden q , entonces la restricción será llamada una restricción de desigualdad en las variables de estado de orden q . $\frac{d^q S}{dt^q}(\mathbf{x}, u, t) = 0$ juega entonces un papel similar al de $C(\mathbf{x}, u, t) = 0$ en el problema anterior. Por lo que las condiciones de restricción son las mismas sustituyendo $\frac{d^q S}{dt^q}(\mathbf{x}, u, t)$ en vez de $C(\mathbf{x}, u, t)$.

Además en los puntos de entrada se deben cumplir las siguientes condiciones :

$$\left. \begin{aligned} S(\mathbf{x}(t_e), t_e) &= 0 \\ \frac{dS}{dt}(\mathbf{x}(t_e), t_e) &= 0 \\ \frac{d^2 S}{dt^2}(\mathbf{x}(t_e), t_e) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^{q-1} S}{dt^{q-1}}(\mathbf{x}(t_e), t_e) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

El problema es entonces formulado de la siguiente manera :

Encontrar $u(t) \in \Omega$ que maximiza la funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, u, t) dt + \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f), \quad (2.54)$$

sujeto a las ecuaciones dinámicas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \quad (2.55)$$

con la condición inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.56)$$

a la condición final

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0, \quad \dim\{\mathbf{M}\} \leq \dim\{\mathbf{x}\} + 1, \quad (2.57)$$

y la condición

$$S(\mathbf{x}, t) \leq 0, \quad (2.58)$$

más las condiciones en (2.53), si parte de la trayectoria óptima esta sobre la restricción.

Este problema es equivalente a maximizar la siguiente función (a la cual continuaremos llamando J por comodidad) :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[L(\mathbf{x}, u, t) + \lambda_i f_i(\mathbf{x}, u, t) + \gamma \frac{d^q S}{dt^q}(\mathbf{x}, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i \right] dt + \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \mu_k M_k(\mathbf{x}(t_f), t_f), \quad (2.59)$$

donde μ es un vector adjunto o multiplicador de Lagrange, constante, $\lambda(t)$ es una función vectorial adjunta, γ es una función adjunta con valor nulo fuera de la restricción,

$$\gamma = \begin{cases} 0 & S(\mathbf{x}, t) < 0, \\ \gamma(t) & S(\mathbf{x}, t) = 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Usando la definición de la función de estado de Potryangin dada en la ec. (2.14) y dado que el añadir constantes a la funcional no altera la trayectoria óptima resultante, podemos escribir :

$$\begin{aligned}
 J = \int_{t_0}^{t_f} & \left[H(\mathbf{x}, \lambda, u, t) + \gamma \frac{d^q S}{dt^q}(\mathbf{x}, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i \right] dt \\
 & + \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) - \phi(\mathbf{x}(t_0), t_0) \\
 & + \mu_k M_k(\mathbf{x}(t_f), t_f) - \mu_k M_k(\mathbf{x}(t_0), t_0).
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo introducimos ϕ y \mathbf{M} dentro de la integral y a través de la regla de la cadena expresamos sus derivadas totales respecto al tiempo en términos de las derivadas parciales :

$$\begin{aligned}
 J = \int_{t_0}^{t_f} & \left[H(\mathbf{x}, \lambda, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i + \gamma \frac{d^q S}{dt^q}(\mathbf{x}, u, t) \right. \\
 & + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \\
 & \left. + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \right] dt
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Por simplicidad, pero sin pérdida de generalidad se considera la trayectoria óptima dividida en tres secciones (ver Fig. 2.4) :

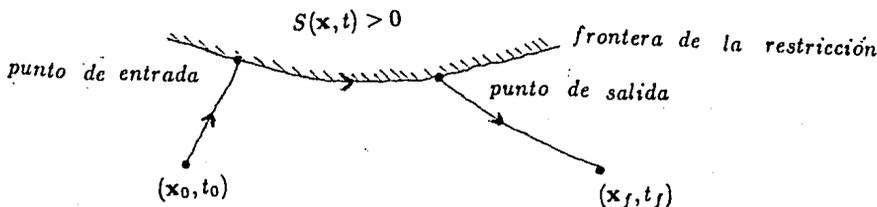


Fig. 2.4. Diagrama esquemático de una trayectoria con restricciones del tipo $S(\mathbf{x}, t) \leq 0$.

- Una inicial sin restricciones ($S(\mathbf{x}, t) < 0$),
- Una intermedia con restricción ($S(\mathbf{x}, t) = 0$),
- Una final sin restricción ($S(\mathbf{x}, t) < 0$).

Considerando lo anterior dividimos la integral en tres partes :

$$J = \int_{t_0}^{t_e} (\dots) dt + \int_{t_e}^{t_s} (\dots) dt + \int_{t_s}^{t_f} (\dots) dt \quad (2.63)$$

Donde t_e y t_s son los puntos de entrada y de salida de la restricción respectivamente. Llamando I_1 , I_2 e I_3 respectivamente a cada una de estas integrales :

$$J = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.64)$$

Consideremos la primera integral :

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_e} \left[H(\mathbf{x}, u, \lambda, t) - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \xi_l \frac{\partial S_l}{\partial x_i} \dot{x}_i + \xi_l \frac{\partial S_l}{\partial t} \right] dt \quad (2.65)$$

Aquí se han introducido las condiciones (2.53) a través de los multiplicadores de Lagrange $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{q-1}$ y se hace uso de la siguiente notación :

$$\left. \begin{aligned} S_0 &\equiv S(\mathbf{x}, t). \\ S_1(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{dS}{dt}(\mathbf{x}, t). \\ S_2(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{d^2 S}{dt^2}(\mathbf{x}, t). \\ &\vdots \\ S_{q-1}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{d^{q-1} S}{dt^{q-1}}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Si $\phi(\mathbf{x}, t)$, $M(\mathbf{x}, t)$ y $S(\mathbf{x}, t), dS/dt(\mathbf{x}, t), \dots, d^{q-1}S(\mathbf{x}, t)/dt^{q-1}$, son funciones continuas con derivadas parciales continuas, sus segundas derivadas parciales pueden intercambiar el orden de derivación, por lo que la variación de I_1 es :

$$\begin{aligned}
\delta I_1 = \int_{t_0}^{t_e} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\
& + \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} + \xi_l \frac{\partial S_l}{\partial x_i} \right] \delta x_i \Big|_{t_e} \\
& + \left[H - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right. \\
& \left. + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} + \xi_l \frac{\partial S_l}{\partial x_i} \dot{x}_i + \xi_l \frac{\partial S_l}{\partial t} \right] \Big|_{t_e} \delta t_e
\end{aligned} \tag{2.67}$$

De la figura :

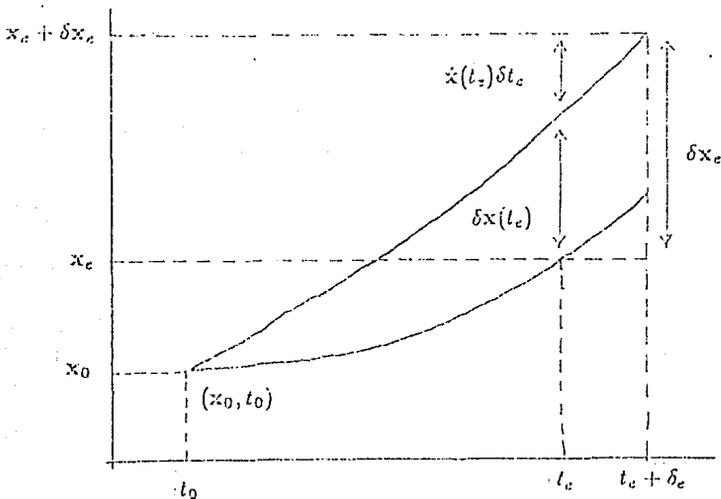


Fig. 2.5 La variación total de las variables de estado en el tiempo de entrada es igual a la suma de las variaciones provocadas por el tiempo de entrada y los estados en ese tiempo.

$$\delta x_{i,e} = \dot{x}_i(t_e) \delta t_e + \delta x_i(t_e),$$

entonces

$$\delta x_i(t_e) = \delta x_{i,e} - \dot{x}_i(t_e) \delta t_e \tag{2.68}$$

Por lo que :

$$\begin{aligned}
\delta I_1 = \int_{t_0}^{t_1} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \lambda_i \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\
& + \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} + \xi_l \frac{\partial S_l}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_0}^{t_1} \delta x_{i,c} \\
& + \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} + \xi_l \frac{\partial S_l}{\partial t} \right] \Big|_{t_0}^{t_1} \delta t_c
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Las expresiones resultantes para δI_2 y δI_3 son semejantes a las expresiones correspondientes en la sección anterior, ecs. (2.30) y (2.31), sustituyendo $C(\mathbf{x}, u, t)$ por $(d^q S/dt^q)$, así :

$$\begin{aligned}
\delta I_2 = \int_{t_0}^{t_1} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) + \lambda_i \right) \delta x_i \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) \right) \delta u + \frac{d^q S}{dt^q} \delta \gamma + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\
& - \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_0^+}^{t_1^+} \delta x_{i,c} \\
& - \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right] \Big|_{t_0^+}^{t_1^+} \delta t_c \\
& + \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_0^-}^{t_1^-} \delta x_{i,s} \\
& + \left[H(\mathbf{x}, u, \lambda, t) + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \Big|_{t_0^-}^{t_1^-} \delta t_s,
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_3 = \int_{t_0}^{t_f} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \lambda_i \right) \delta x_i \right. \\
& + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \left. \right] dt \\
& - \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_0^+} \delta x_{i,s} \\
& - \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right] \Big|_{t_0^+} \delta t_s \\
& + \left[-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right] \Big|_{t_f} \delta x_{i,f} \\
& + \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Sumando los resultados y dado que $\phi(\mathbf{x}, t)$ y $M(\mathbf{x}, t)$ son funciones continuas :

$$\begin{aligned}
\delta J = \int_{t_0}^{t_f} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \lambda_i + \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) \right) \delta x_i \right. \\
& + \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) \right) \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i + \frac{d^q S}{dt^q} \delta \gamma \left. \right] dt \\
& + \left(-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right) \Big|_{t_f} \delta x_{i,f} \\
& + \left(H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
& + (\lambda_i(t_s^+) - \lambda_i(t_s^-)) \delta x_{i,s} + (H(t_s^-) - H(t_s^+)) \delta t_s \\
& + (\lambda_i(t_e^+) - \lambda_i(t_e^-) + \xi_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i}) \delta x_{i,e} + (H(t_e^-) - H(t_e^+) + \xi_i \frac{\partial S_i}{\partial t}) \delta t_e
\end{aligned} \tag{2.72}$$

con $\gamma(t) = 0$ fuera de la restricción.

Si J tiene un máximo global en u^{op} entonces

$$J(u^{op}) \geq J(u) \quad \text{para toda } u \in U, \tag{2.73}$$

donde U es la región de control. Por lo que :

$$\delta J|_{u^{op}} \leq 0 \quad \text{para toda } u \in U. \tag{2.74}$$

Como se mencionó antes si pedimos que δJ solo dependa de las variaciones en u , entonces las siguientes condiciones deben ser satisfechas :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) + \dot{\lambda}_i = 0, \quad \forall i, \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i = 0, \quad \forall i, \quad (2.76)$$

$$\gamma(t) \frac{d^q S}{dt^q} = 0, \quad (2.77)$$

$$\left(-\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right) \Big|_{t_f} = 0, \quad (2.78)$$

$$\left(H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right) \Big|_{t_f} = 0, \quad (2.79)$$

$$\lambda_i(t_s^+) = \lambda_i(t_s^-), \quad \forall i \quad (2.80)$$

$$H(t_s^-) = H(t_s^+), \quad (2.81)$$

$$\lambda_i(t_e^+) = \lambda_i(t_e^-) - \xi_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i} \Big|_{t_e^-}, \quad \forall i, \quad (2.82)$$

$$H(t_e^+) = H(t_e^-) + \xi_i \frac{\partial S_i}{\partial t} \Big|_{t_e^-}. \quad (2.83)$$

Así

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) \right] \delta u \quad (2.84)$$

De nuevo si la región de control es no acotada, el mínimo ó máximo de la funcional es obtenida con $\delta J = 0$, de donde :

$$\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) = 0 \quad (2.85)$$

Estas condiciones son válidas tanto fuera, como sobre, la frontera de la restricción. Debemos notar los siguientes puntos.

(a) Fuera de la restricción $\gamma(t) \equiv 0$ y la ecuación (2.77) se satisface trivialmente; el control óptimo se obtiene entonces de la ec. (2.85), i.e.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

(b) Sobre la restricción $\gamma(t) \neq 0$ y la ec. (2.77) da

$$\frac{d^q S}{dt^q} = 0;$$

y dado que esta ecuación contiene a u explícitamente, el valor óptimo de la variable de control se obtiene resolviendo esta ecuación para u . La ecuación (2.85) se vuelve una ecuación para $\gamma(t)$, que se debe sustituir en (2.75).

II.4 EL PROBLEMA GENERAL CON EXTREMOS LIBRES.

En las secciones anteriores, en el problema de control óptimo, se considero que tanto el tiempo como el estado iniciales estaban fijos, sin embargo es posible que en ciertos problemas el estado inicial y/ó el tiempo inicial no estén predeterminados, sino que estos estén sujetos a satisfacer una cierta relación.

En esta sección encontraremos las condiciones necesarias que la solución óptima debe satisfacer en estos casos. Con objeto de simplificar un poco los cálculos discutiremos aquí el caso en el cual no existan restricciones del tipo $C(x, u, t) \leq 0$ ó $S(x, t) \leq 0$. Los resultados son válidos en casos donde hay estas restricciones, lo cual se puede demostrar, pero no lo haremos aquí. El problema queda planteado como sigue:

Encontrar la función de control $u^{op}(t)$ que maximiza la funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + \phi(x_f, t_f) \quad (2.86)$$

sujeto a las ecuaciones dinámicas

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (2.87)$$

a las condiciones iniciales

$$N(x_0, t_0) = 0, \quad \dim\{N\} \leq \dim\{x\} + 1, \quad (2.88)$$

y a las condiciones finales

$$M(x_f, t_f) = 0, \quad \dim\{M\} \leq \dim\{x\} + 1, \quad (2.89)$$

donde x_0 y t_0 son el estado y el tiempo iniciales y x_f y t_f , el estado y tiempo finales, respectivamente.

En las secciones anteriores el tiempo inicial y el estado inicial estaban dados, lo cual permitía añadir en la funcional las funciones terminales evaluadas en el estado inicial como constantes. En el presente problema, lo anterior no es posible, porque al no estar fijos el estado inicial y/o el tiempo inicial, el añadir las condiciones evaluadas en el estado inicial alteraría la funcional a maximizar. Para evitar esta dificultad, se definen las siguientes funciones :

$$\phi'(x, \varphi, t) = \phi(x, t) - \varphi(t), \quad (2.90)$$

$$N'(x, n, t) = N(x, t) - n(t), \quad (2.91)$$

$$M'(x, m, t) = M(x, t) - m(t), \quad (2.92)$$

donde hemos introducido las variables de holgura; $\varphi(t)$, $n(t)$ y $m(t)$.

Se plantea el siguiente problema, que es equivalente al anterior :

Encontrar u^{op} que maximiza la funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + \phi'(x_f, \varphi_f, t_f), \quad (2.93)$$

sujeta a las ecuaciones dinámicas

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (2.94)$$

con las condiciones

$$\phi'(\mathbf{x}_0, \varphi_0, t_0) = 0, \quad (2.95)$$

$$\mathbf{N}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0, t_0) = 0, \quad (2.96)$$

$$\mathbf{N}'(\mathbf{x}_f, \mathbf{n}_f, t_f) = 0, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{M}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0, t_0) = 0, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{M}'(\mathbf{x}_f, \mathbf{m}_f, t_f) = 0, \quad (2.99)$$

$$\varphi(t_f) = 0, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{0}, \quad (2.101)$$

$$\mathbf{m}(t_f) = \mathbf{0}, \quad (2.102)$$

como se verá las condiciones necesarias que debe satisfacer este problema son independientes de las variables de holgura. En general, las ecs. (2.98) a (2.99) pueden no tomarse iguales a cero, sino constantes diferentes de cero, pero esto no altera el resultado final.

Añadiendo las condiciones a la integral mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange :

$$\begin{aligned} J = \int_{t_0}^{t_f} \left[L(\mathbf{x}, u, t) + \lambda_i f_i - \lambda_i \dot{x}_i \right] dt \\ + \phi'(\mathbf{x}_f, \varphi_f, t_f) - \phi'(\mathbf{x}_0, \varphi_0, t_0) \\ + \nu_l N_l'(\mathbf{x}_f, \mathbf{n}_f, t_f) - \nu_l N_l'(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0, t_0) \\ + \mu_k M_k'(\mathbf{x}_f, \mathbf{m}_f, t_f) - \mu_k M_k'(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0, t_0). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Usando el teorema fundamental del cálculo :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\mathbf{x}, \lambda, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{d\phi'}{dt} + \mu_k \frac{dM_k'}{dt} + \nu_l \frac{dN_l'}{dt} \right] dt, \quad (2.104)$$

como se ha definido anteriormente, $H = L(\mathbf{x}, u, t) + \lambda_i f_i$. Expresando las derivadas totales respecto al tiempo en términos de sus derivadas parciales :

$$\begin{aligned}
J = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\mathbf{x}, \lambda, u, t) - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \dot{\phi} \right. \\
\left. + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_j} \dot{x}_j + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} - \mu_k \dot{m}_k \right. \\
\left. + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \dot{x}_j + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial t} - \nu_l \dot{n}_l \right] dt.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Llamemos al integrando anterior $L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u, \lambda, \dot{\phi}, \dot{\mathbf{m}}, \dot{\mathbf{n}}, t)$. Aplicando el resultado en (2.25), la variación de J es :

$$\begin{aligned}
\delta J = - \left(H - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \dot{\phi} \right. \\
\left. + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_j} \dot{x}_j + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} - \mu_k \dot{m}_k \right. \\
\left. + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \dot{x}_i + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial t} - \nu_l \dot{n}_l \right) \Big|_{t_0} \delta t_0 \\
+ \left(H - \lambda_i \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \dot{\phi} \right. \\
\left. + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} - \mu_k \dot{m}_k \right. \\
\left. + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \dot{x}_i + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial t} - \nu_l \dot{n}_l \right) \Big|_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
+ \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\
+ \left\{ -\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \right\} \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f} \\
- \delta \varphi \Big|_{t_0}^{t_f} - \mu_k \delta m_k \Big|_{t_0}^{t_f} - \nu_l \delta n_l \Big|_{t_0}^{t_f}.
\end{aligned}$$

Usando de nuevo :

$$\delta x_i(t_0) = \delta x_{i,0} - \dot{x}_i(t_0) \delta t_0, \quad \forall i, \tag{2.107}$$

$$\delta x_i(t_f) = \delta x_{i,f} - \dot{x}_i(t_f) \delta t_f, \quad \forall i, \tag{2.108}$$

$$\delta \varphi(t_0) = \delta \varphi_0 - \dot{\varphi}(t_0) \delta t_0, \tag{2.109}$$

$$\delta\varphi(t_f) = \delta\varphi_f - \dot{\varphi}(t_f)\delta t_f, \quad (2.110)$$

$$\delta m_k(t_0) = \delta m_{k,0} - \dot{m}_k(t_0)\delta t_0, \quad \forall k, \quad (2.111)$$

$$\delta m_k(t_f) = \delta m_{k,f} - \dot{m}_k(t_f)\delta t_f, \quad \forall k, \quad (2.112)$$

$$\delta n_l(t_0) = \delta n_{l,0} - \dot{n}_l(t_0)\delta t_0, \quad (2.113)$$

$$\delta n_l(t_f) = \delta n_{l,f} - \dot{n}_l(t_f)\delta t_f, \quad (2.114)$$

de las ecs. (2.100), (2.101) y (2.102) tenemos :

$$\delta\varphi_f = 0 \quad \delta m_{k,f} = 0 \quad \delta n_{l,0} = 0; \quad \forall k, l \quad (2.115)$$

y sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.106), tenemos :

$$\begin{aligned} \delta J = & - \left(H + \frac{\partial\phi}{\partial t} - \dot{\varphi} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} - \mu_k \dot{m}_k + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial t} - \nu_l \dot{n}_l \right) \Big|_{t_0} \delta t_0 \\ & - \left\{ -\lambda_i + \frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \right\} \Big|_{t_0} \delta x_{i,0} \\ & + \left(H + \frac{\partial\phi}{\partial t} - \dot{\varphi} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} - \mu_k \dot{m}_k + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial t} - \nu_l \dot{n}_l \right) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ & + \left\{ -\lambda_i + \frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \right\} \Big|_{t_f} \delta x_{i,f} \quad (2.116) \\ & + \dot{\varphi}(t_f)\delta t_f + \delta\varphi_0 - \dot{\varphi}(t_0)\delta t_0 \\ & + \mu_k \dot{m}_k(t_f)\delta t_f + \mu_k \delta m_{k,0} - \mu_k \dot{m}_k(t_0)\delta t_0 \\ & + \nu_l \dot{n}_l(t_f)\delta t_f - \nu_l \delta n_{k,f} - \nu_l \dot{n}_l(t_0)\delta t_0 \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \end{aligned}$$

De las ecs. (2.97) a (2.100) :

$$\delta\varphi_0 = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \Big|_{t_0} \delta x_{i,0} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{t_0} \delta t_0, \quad (2.117)$$

$$\delta m_{k,0} = \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \Big|_{t_0} \delta x_{i,0} + \frac{\partial M_k}{\partial t} \Big|_{t_0} \delta t_0, \quad (2.118)$$

$$\delta n_{k,0} = \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \Big|_{t_0} \delta x_{i,0} + \frac{\partial M_k}{\partial t} \Big|_{t_0} \delta t_0. \quad (2.119)$$

Por lo que :

$$\begin{aligned}
 \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \lambda_i \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i \right) \delta \lambda_i \right] dt \\
 & - \left(H + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial t} \right) \Big|_{t_0} \delta t_0 \\
 & - \left\{ -\lambda_i + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \right\} \Big|_{t_0} \delta x_{i,0} \\
 & + \left(H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
 & + \left\{ -\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right\} \Big|_{t_f} \delta x_{i,f}
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

Usando los argumentos dados anteriormente, las condiciones necesarias que debe satisfacer una solución óptima del problema planteado de (2.86) a (2.89) son :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \tag{2.121}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\lambda_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.122}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = \dot{x}_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.123}$$

$$\left\{ H + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial t} \right\} \Big|_{t_0} = 0, \tag{2.124}$$

$$\left\{ -\lambda_i + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \right\} = 0 \Big|_{t_0}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.125}$$

$$\left\{ H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right\} \Big|_{t_f} = 0, \tag{2.126}$$

$$\left\{ -\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right\} \Big|_{t_f} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.127}$$

Notesé que cuando el tiempo inicial no esta especificado $\partial N_l / \partial t = 0$ y la condición de transversalidad (2.124) da la siguiente condición para el hamiltoniano :

$$H \Big|_{t_0} = 0. \quad (2.128)$$

Asimismo, si alguna variable del estado inicial $x_i(t_0)$ no esta especificada la condición de transversalidad correspondiente (2.125) da que

$$\lambda_i(t_0) = 0. \quad (2.129)$$

II.5 PRINCIPIO DEL MAXIMO DE POTRYANGIN.

Hemos mostrado que en general cuando una trayectoria contiene una parte sobre la restricción, ya sea del tipo $C(x, u, t) \leq 0$ ó $S(x, t) \leq 0$, el valor del control en esta región esta determinado completamente.

Dado que queremos maximizar J , el valor del control fuera de la restricción es determinado de modo que

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt \leq 0, \quad (2.130)$$

cuando las variaciones son hechas alrededor de la solución óptima.

Si la región de control es no acotada, las variaciones δu son arbitrarias y entonces uno pide que, si la solución óptima existe, el valor de control óptimo sea obtenido de

$$\frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{u^{op}} = 0. \quad (2.131)$$

Sin embargo cuando la región de control es acotada, este procedimiento puede no proporcionar el control óptimo sino algún otro valor.

L. S. Potryangin⁽¹⁰⁾ demostró que en cualquier caso el control óptimo, u^{op} , debe ser obtenido tal que

$$H(x, \lambda, u^{op}, t) \geq H(x, \lambda, u, t) \quad (2.137)$$

con $u, u^{op} \in U$, donde U es la región de control que puede ó no ser acotada. Esta condición es conocida como el Principio del Máximo de Potryangin.

Así, en general, el valor del control óptimo fuera de la restricción, en caso de existir, debe ser obtenida de (2.132) y no de (2.131). Sin embargo, si la región de control es no acotada, y la solución óptima existe, entonces las condiciones (2.131) y (2.132) son equivalentes.

Debemos notar que el caso que hemos tratado aquí es el de maximizar una funcional J ; en el caso en el cual se quiera minimizar la funcional J , se puede multiplicar la funcional por -1 y buscar maximizar la nueva funcional ó simplemente cambiar el orden en las desigualdades (2.130) y (2.132).

II.6 CONDICIONES NECESARIAS PARA UNA SOLUCION ÓPTIMA CON RESTRICCIÓN DE DESIGUALDAD QUE NO DEPENDE EXPLÍCITAMENTE DE LA VARIABLE DE CONTROL Y CON CONDICIONES INICIALES Y FINALES NO COMPLETAMENTE DETERMINADAS.

En las secciones anteriores hemos deducido las condiciones necesarias que todo candidato a solución óptima debe satisfacer en un problema de control óptimo : (a) con restricciones de desigualdad de los tipos "variable de control" y "variable de estado"; (b) sin restricciones de desigualdad pero con ambos extremos libres. En los casos anteriores se supuso que la región de control no era acotada. El "Principio del Máximo de Potryangin" se usa cuando la región de control está acotada.

En esta sección estudiaremos la síntesis de los problemas anteriores, esto es, el problema de control óptimo con una restricción que no depende explícitamente de la variable de control, condiciones iniciales y finales no especificadas y en el cual la región de control está acotada.

El problema se plantea de la siguiente forma :

Encontrar la función de control $u^{op}(t) \in U$, donde U es la región de control

con $U = \{u | u_{min} \leq u \leq u_{max}\}$, que maximiza la funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, u, t) dt + \phi(\mathbf{x}_f, t_f), \quad (2.133)$$

sujeto a las ecuaciones dinámicas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \quad (2.134)$$

a la restricción

$$S(\mathbf{x}, t) \leq 0, \quad (2.135)$$

a las condiciones iniciales

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad \dim\{\mathbf{N}\} \leq \dim\{\mathbf{x}\} + 1 \quad (2.136)$$

y a las condiciones finales

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_f, t_f) = 0, \quad \dim\{\mathbf{M}\} \leq \dim\{\mathbf{x}\} + 1. \quad (2.137)$$

donde \mathbf{x}_f y t_0 son el estado y el tiempo inicial y \mathbf{x}_f y t_f el estado y el tiempo final.

El procedimiento para obtener las condiciones necesarias es similar al efectuado en los anteriores casos y no lo repetiremos aquí, porque no agrega ningún concepto nuevo.

Si $u^{op} \in U$, es la solución óptima del problema enunciado, éste debe satisfacer las siguientes condiciones :

1) El principio del Máximo de Potryangin. En las regiones donde la trayectoria óptima no esté sobre la frontera de la restricción, el control u^{op} debe ser tal que

$$H(\mathbf{x}, u^{op}, \lambda, t) \geq H(\mathbf{x}, u, \lambda, t), \quad \forall u \in U. \quad (2.138)$$

En este caso la solución óptima se busca considerando cualquiera de los

puntos críticos del hamiltoniano, i. e. u_{max} , u_{min} , posibles puntos de discontinuidad de H (si existieran) y puntos que satisfacen

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (2.139)$$

2) Regiones con restricción. En las regiones donde la trayectoria óptima esté sobre la restricción $S(\mathbf{x}, t)$, el control óptimo está dado por la derivada total de orden q en la que aparece explícitamente la variable de control, i.e.

$$\gamma \frac{d^q S}{dt^q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad (2.140)$$

donde la función gamma se define de tal manera que

$$\gamma = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } S(\mathbf{x}, t) = 0, \\ 0 & \text{si } S(\mathbf{x}, t) < 0; \end{cases} \quad (2.141)$$

mientras que la ec. (2.139) se transforma en la siguiente ecuación para γ , i.e.

$$\frac{\partial H}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) = 0. \quad (2.142)$$

Cuando la trayectoria óptima está fuera de la restricción, γ es idénticamente cero y la ecuación anterior se reduce a la ec. (2.139).

3) Las ecuaciones diferenciales para las variables adjuntas son

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i + \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{d^q S}{dt^q} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.143)$$

Si se está fuera de la restricción, la función γ es idénticamente cero y el término conteniendo la derivada q -ésima de la restricción, se anula, de otra manera la ec. (2.142) se resuelve para γ y ésta expresión se sustituye en la ecuación anterior.

4) Las ecuaciones dinámicas, siguen siendo

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} - \dot{x}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.144)$$

5) Las condiciones de transversalidad que deben ser satisfechas

en el estado inicial son

$$\left\{ H + \nu_i \frac{\partial N_i}{\partial t} \right\} \Big|_{t_0} = 0, \quad (2.145)$$

$$\left\{ -\lambda_i + \nu_i \frac{\partial N_i}{\partial x_i} \right\} \Big|_{t_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.146)$$

6) Las condiciones para el punto de entrada a la restricción son :

$$\lambda_i(t_e^-) - \xi_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i} \Big|_{t_e^-} = \lambda_i(t_e^+) \quad j = 0, 1, \dots, q-1. \quad (2.147)$$

$$H(t_e^-) + \xi_i \frac{\partial S_i}{\partial t} \Big|_{t_e^-} = H(t_e^+) \quad j = 0, 1, \dots, q-1. \quad (2.148)$$

7) Las condiciones para el punto de salida de la restricción son

$$\lambda_i(t_s^+) = \lambda_i(t_s^-), \quad (2.149)$$

$$H(t_s^-) = H(t_s^+). \quad (2.150)$$

8) Las condiciones de transversalidad que se deben de satisfacer

en el estado final son

$$\left\{ H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right\} \Big|_{t_f} = 0, \quad (2.151)$$

$$\left\{ -\lambda_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial x_i} \right\} \Big|_{t_f} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.152)$$

Las condiciones necesarias resumidas en esta sección serán las que aplicaremos en el problema físico del siguiente capítulo.

II.7 EJEMPLO DE COMO UN PROBLEMA DE CALCULO DE VARIACIONES PUEDE SER RESUELTO USANDO TEORÍA DE CONTROL OPTIMO.

Ilustraremos la técnica de la teoría de control óptimo a través de un problema sencillo del cálculo de variaciones :

Hallar la distancia mínima entre las curvas $y = x^2$ y $x - y = 5$.

La longitud de una curva $y(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ esta dada por :

$$V = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}(x)^2} dx, \quad (2.153)$$

por lo que el problema consiste en encontrar la curva que minimiza V sobre un conjunto de funciones $y(x)$ que unan a $y = x^2$ y $x - y = 5$.

Replanteando el problema en términos de la teoría de control óptimo :

Encontrar u^{op} que minimiza

$$V = \int_{x_0}^{x_f} \sqrt{1 + u^2} dt, \quad (2.154)$$

a través de

$$\dot{y} = u(x), \quad (2.155)$$

sujeito a

$$N(y_0, x_0) = y_0 - x_0^2 = 0 \quad (2.156)$$

y

$$M(y_f, x_f) = x_f - y_f - 5 = 0, \quad (2.157)$$

donde $u, u^{op} \in U$; y $U = \{u | -\infty < u < \infty\}$, es decir la variable de control no está acotada. La función de Potryangin de este problema es :

$$H = \sqrt{1 + u^2} + \lambda u, \quad (2.158)$$

por lo que las condiciones necesarias son :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \\ -\dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.159)$$

junto con las condiciones :

$$\begin{aligned} \left\{ \nu \frac{\partial N}{\partial y} - \lambda \right\} \Big|_{x_0} &= 0, \\ \left\{ \mu \frac{\partial M}{\partial y} - \lambda \right\} \Big|_{x_f} &= 0, \\ \left\{ H + \nu \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \Big|_{x_0} &= 0, \\ \left\{ H + \mu \frac{\partial M}{\partial x} \right\} \Big|_{x_f} &= 0, \\ M(x_f, y_f) &= 0, \\ N(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.160)$$

De las ecs. en (2.161) $\partial H / \partial y = -\dot{\lambda}$, y usando el hamiltoniano (2.158), $\dot{\lambda} = 0$, por lo que $\lambda = c_1$, donde c_1 es una constante por determinar.

De $\partial H / \partial u = 0$ resulta :

$$\lambda = -\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad (2.162)$$

por lo que u es también una constante a la que llamaremos c_2 . De aquí :

$$\lambda = -\frac{c_2}{\sqrt{1 + c_2^2}}. \quad (2.163)$$

Usando $\partial H/\partial \lambda = \dot{y}$, se obtiene $\dot{y} = u$, por lo que

$$y = c_2 x + c_3, \quad (2.164)$$

donde c_3 es una constante de integración. Hasta aquí el problema ha sido encontrar la distancia mínima entre dos puntos del plano, resultando que la trayectoria óptima es una línea recta como era de esperarse.

A través de las condiciones de transversalidad y las condiciones inicial y final se determinan x_0 , x_f , c_1 , c_2 , c_3 , ν y μ :

El hamiltoniano en términos de u vale:

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + c_2^2}}. \quad (2.165)$$

De la primera y tercera condición en (2.160):

$$\nu = -\frac{c_2}{\sqrt{1 + c_2^2}}. \quad (2.166)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + c_2^2}} = 2\nu x_0 \quad \rightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{2c_2} \quad (2.167)$$

De la segunda y cuarta condiciones de (2.159):

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{1 + c_2^2}}, \quad (2.168)$$

$$\mu = \frac{c_2}{\sqrt{1 + c_2^2}}. \quad (2.169)$$

Por lo que $u = c_2 = -1$, $x_0 = 1/2$, $\nu = \lambda = H = -\mu = 1/\sqrt{2}$. Ahora, haciendo uso de la condición inicial, y de la ec. (2.160):

$$y_0 = x_0^2 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad c_3 = \frac{3}{4} \quad (2.170)$$

Por lo que la ecuación de la trayectoria óptima es:

$$y = -x + 3/4 \quad (2.171)$$

finalmente, de la condición final :

$$x_f - y_f = 5, \quad (2.177)$$

junto con la ec. (2.176) i.e.

$$x_f + y_f = \frac{3}{4}, \quad (2.178)$$

se obtiene que el punto final tiene coordenadas $x_f = 23/8$ y $y_f = -17/8$. Resumiendo, la trayectoria que minimiza la distancia entre las curvas $y = x^2$ y $x - y = 5$ está dada por la recta :

$$\ddot{y} = -x + 3/4, \quad (2.179)$$

con punto inicial $(1/2, 1/4)$ y punto final $(23/8, -17/8)$. La derivada de la parábola en el punto inicial es igual a 1, lo cual concuerda con el hecho de la distancia mínima entre una recta y una curva esta dada por la recta que sea perpendicular tanto a la recta como a la curva.

II.8 COMENTARIOS.

El conjunto de condiciones necesarias obtenidas en este capítulo, conducen a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales con valores tanto iniciales como finales. En general una solución analítica a este tipo de problemas no es posible a menos de que el sistema sea lineal.

Por otra parte las condiciones necesarias que deben ser satisfechas por la solución de un problema de control óptimo del tipo estudiado aquí, no garantizan optimalidad; en el sentido de que es posible que exista un conjunto de soluciones, las cuales satisfagan las condiciones necesarias, con lo cual todas pueden considerarse candidatas a una solución óptima; sin embargo uno espera que la aplicación de las condiciones necesarias presentadas en este capítulo aislen a un candidato único.

CAPITULO III

OPTIMIZACION DE LA POTENCIA DE UN REACTOR NUCLEAR.

III.1. INTRODUCCION

En este capítulo utilizaremos los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para maximizar la potencia de un reactor nuclear con la restricción de que el flujo máximo de neutrones térmicos nunca sea superior a un valor máximo, ϕ_{max} , fijado de antemano, mientras que el flujo rápido permanece libre. Éste tipo de restricción puede aparecer debido a la capacidad limitada de un sistema de enfriamiento de disipar la energía generada por un reactor.

El modelo que utilizaremos será un reactor unidimensional de tamaño finito (*slab*) en la aproximación de dos grupos energéticos de neutrones (el térmico y el rápido), tal como se discutió en el cap. I.

En éste modelo se supondrá que es posible añadir ó sustraer material absorbente de neutrones térmicos (barras de control) en cualquier parte de sistema en forma arbitraria, sin afectar directamente la absorción de neutrones rápidos, ni los coeficientes de difusión. Así se tendrá una distribución homogénea de la sección transversal macroscópica de absorción en todo el núcleo del reactor. La variable de control estará asociada directamente con las variaciones, alrededor de éste valor, de la sección macroscópica de absorción. Estas variaciones, sin embargo, estarán limitadas por un valor máximo y un valor mínimo, reflejando así el efecto de las barras de control.

En la sección VI del capítulo anterior están resumidas las condiciones necesarias que la solución óptima debe satisfacer y que aplicaremos a nuestro problema particular en este capítulo.

III.2. UN PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO.

Con el objeto de plantear el problema descrito en la sección anterior a la forma estándar de un problema de Control Óptimo, definiremos a la variable de control como la cantidad de material absorbente que añadimos o sustraemos a lo largo de la longitud del reactor con objeto de cambiar la distribución espacial de los flujos térmico y rápido. Así

$$u(x) = \frac{\Sigma_c(x)}{D_2}, \quad (3.1)$$

donde D_2 es el coeficiente de difusión térmico, como se discutió en el capítulo I, y $\Sigma_c(x)$ son las variaciones de la sección transversal de captura en la posición x .

La potencia de un reactor nuclear de fisión térmico en forma de "slab" de ancho H está dada por

$$\text{Potencia} = \gamma_{th} \int_{-H/2}^{H/2} \Sigma_{f_2} \phi_2(x) dx, \quad (3.2)$$

donde γ_{th} , es la energía promedio liberada por fisión.

Supondremos que todos los materiales, exceptuando el material absorbente de control, están distribuidos uniformemente a lo largo del reactor. Así, la solución del problema de optimización se espera que sea simétrica respecto al eje central del sistema, el cual supondremos situado en el origen del centro de coordenadas; esto nos permitirá trabajar solo entre 0 y $H/2$, ver Fig. 1.2.

En un reactor unidimensional en estado crítico y estacionario, los flujos térmico y rápido deben satisfacer las ecuaciones de difusión para dos grupos de energías, ecs. (1.90) y (1.91), que son :

$$D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2}(x) - [\Sigma_{a_2} + \Sigma_c(x)] \phi_2(x) - (\gamma_I + \gamma_X) \Sigma_{f_2} \phi_2(x) + \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1(x) = 0, \quad (3.3)$$

$$D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2}(x) - \Sigma_{a_1} \phi_1(x) - \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1(x) + \nu \Sigma_{f_2} \phi_2(x) = 0. \quad (3.4)$$

Si se quiere maximizar la potencia, es razonable suponer que el flujo térmico en el centro del reactor tenga el valor máximo permitido, ϕ_{max} , mientras que en la orilla del reactor los flujos deben anularse. Dada la simetría, las derivadas de los flujos en el centro deben ser nulas.

El problema a tratar consiste en hallar la distribución de material absorbente (ec. (3.1)) que maximice la potencia (ec. (3.2)) satisfaciendo las ecuaciones de difusión (ecs. (3.3) y (3.4)). Con el objeto de plantear el problema en la forma estándar de un problema de control óptimo definiremos las variables de estado como :

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_1, \\ z_2 &= \frac{d\phi_1}{dx}, \\ z_3 &= \phi_2, \\ z_4 &= \frac{d\phi_2}{dx}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

y las siguientes constantes :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2} + \Sigma_{a1}}{D_1}, & a_2 &= \frac{\nu \Sigma_{f2}}{D_1}, \\ a_3 &= \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}{D_2}, & a_4 &= \frac{\Sigma_{a2} + (\gamma_z + \gamma_I) \Sigma_{f2}}{D_2}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

el planteamiento en términos de la teoría de control óptimo es entonces :

Encontrar $u^{op} \in U$ que maximice la funcional

$$J = \int_0^{H/2} z_3(x) dx, \quad (3.7)$$

donde

$$U = \{u \mid u_{min} \leq u \leq u_{max}\}, \quad (3.8)$$

con la restricción

$$S(z, t) = z_3 - \phi_{max} \leq 0, \quad (3.9)$$

y sujeto a las ecuaciones dinámicas :

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2, \quad (3.10)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = a_1 z_1 - a_2 z_3, \quad (3.11)$$

$$\frac{dz_3}{dt} = z_4, \quad (3.12)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -a_3 z_1 + a_4 z_3 + u z_3; \quad (3.13)$$

las condiciones iniciales son :

$$z_1(0) \text{ libre}, \quad (3.14)$$

$$z_2(0) = 0, \quad (3.15)$$

$$z_3(0) = \phi_{m\alpha z}, \quad (3.16)$$

$$z_4(0) = 0; \quad (3.17)$$

y las condiciones finales :

$$z_1(H/2) = 0, \quad (3.18)$$

$$z_2(H/2) \text{ libre}, \quad (3.19)$$

$$z_3(H/2) = 0, \quad (3.20)$$

$$z_4(H/2) \text{ libre}. \quad (3.21)$$

Como se discutió en el capítulo II, sección III, si la restricción no depende explícitamente de la variable de control u , es necesario obtener las derivadas totales de S con respecto a x hasta que aparezca explícitamente u , así

$$S(z, x) = z_3 - \phi_{m\alpha z} = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{dS}{dx}(z, x) = \frac{dz_3}{dx} = z_4 = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2 S}{dx^2}(z, u, x) = \frac{dz_4}{dx} = -a_3 z_1 + a_4 z_3 + u z_3 = 0. \quad (3.24)$$

Dado que la variable de control no aparece, sino hasta la segunda derivada total respecto al tiempo de la restricción, este es un problema de control óptimo con restricción de desigualdad en las variables de estado, de segundo orden.

III.3. APLICACION DE LA TEORIA DE CONTROL OPTIMO.

Definiendo

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \lambda_3(x) \\ \lambda_4(x) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} z_2 \\ a_1 z_1 - a_2 z_3 \\ z_4 \\ -a_3 z_1 + a_4 z_3 + u z_3 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

donde las lambdas son funciones adjuntas y las zetas, las variables de estado, como se definieron en la ec. (3.5). La función de estado de Potryangin es :

$$H = L + \lambda^T f \quad (3.26)$$

Por lo que sustituyendo la ec. (3.7) y las ecuaciones dinámicas ec. (3.10) a (3.13) en la ec. (3.26) :

$$H(z, u, x) = z_3(x) + \lambda_1 z_2 + \lambda_2 (a_1 z_1 - a_2 z_3) + \lambda_3 z_4 + \lambda_4 (-a_3 z_1 + a_4 z_3 + u z_3). \quad (3.27)$$

Hemos supuesto que el valor del flujo térmico en el centro del sistema es ϕ_{max} . Para maximizar la potencia físicamente uno espera poder mantener el flujo térmico en este valor, la mayor distancia posible a partir del centro del reactor. En términos de control óptimo esto es equivalente a pedir que la trayectoria esté inicialmente sobre la frontera de la zona de restricción ec.(3.9).

Podemos entonces dividir la trayectoria óptima en una parte sobre la zona de restricción y una parte final fuera de la zona de restricción. El punto que divide estas dos zonas será denotado por x_s y lo llamaremos el punto de salida de la restricción.

Para encontrar la solución a este problema de optimización usaremos las condiciones necesarias que debe satisfacer una solución para ser considerada candidata a óptima.

Estas condiciones están resumidas en la sección VI del capítulo II, y nuestro objetivo será usarlas para obtener la solución óptima.

Sobre la frontera de la restricción, i. e. desde $x = 0$ a x_2^- ; el control sobre la restricción se obtiene de

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = 0; \quad (3.28)$$

las variables adjuntas deben satisfacer las ecuaciones

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z_i} + \frac{\partial H}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2 S}{dx^2} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{d^2 S}{dx^2}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.29)$$

y las funciones de estado, las ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = \frac{dz_i}{dx}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.30)$$

Fuera de la restricción, i. e. de $x = x_2^+$ hasta $H/2$: El control óptimo u^{op} se encuentra de entre aquellos valores permitidos de la variable de control, ver ec. (3.8), tal que

$$H(\mathbf{x}, \lambda, u^{op}) \geq H(\mathbf{x}, \lambda, u); \quad (3.31)$$

las variables adjuntas satisfacen

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (3.32)$$

y las de estado

$$\frac{dz_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.33)$$

III.4. TRAYECTORIA DEL SISTEMA SOBRE LA RESTRICCIÓN.

Para obtener el valor de la variable de control sobre la restricción usamos las ecs. (3.22) a (3.24); de donde :

$$u^{op} = \left(\frac{a_3}{\phi_{max}} \right) z_1 - a_4, \quad (3.34)$$

el cual sustituido en la ec. (3.29) da el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las funciones adjuntas sobre la restricción :

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = -\lambda_2 a_1, \quad (3.35)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dx} = -\lambda_1, \quad (3.36)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dx} = a_2 \lambda_2 - 1, \quad (3.37)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dx} = -\lambda_3, \quad (3.38)$$

y cuya solución es :

$$\lambda_1 = C_1 \cosh(a_1^{1/2} x) + C_2 \sinh(a_1^{1/2} x), \quad (3.39)$$

$$\lambda_2 = -\frac{C_1}{a_1^{1/2}} \sinh(a_1^{1/2} x) - \frac{C_2}{a_1^{1/2}} \cosh(a_1^{1/2} x), \quad (3.40)$$

$$\lambda_3 = -C_1 \frac{a_2}{a_1} \cosh(a_1^{1/2} x) - C_2 \frac{a_2}{a_1} \sinh(a_1^{1/2} x) - x + C_3, \quad (3.41)$$

$$\lambda_4 = C_1 \frac{a_2}{a_1^{3/2}} \sinh(a_1^{1/2} x) + C_2 \frac{a_2}{a_1^{3/2}} \cosh(a_1^{1/2} x) + x^2/2 - C_3 x + C_4, \quad (3.42)$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes por determinar.

Dado que $z_3(x) = \phi_{max}$ sobre la restricción, $z_4 = 0$ por lo que (3.30) se reduce a :

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad (3.43)$$

$$\frac{dz_2}{dx} = a_1 z_1 - a_2 \phi_{max}. \quad (3.44)$$

Resolviendo este sistema :

$$z_1 = A'_1 e^{\sqrt{a_1}x} + A'_2 e^{-\sqrt{a_1}x} + \frac{a_2}{a_1} \phi_{max}, \quad (3.45)$$

$$z_2 = A'_1 a_1^{1/2} e^{\sqrt{a_1}x} - A'_2 a_1^{1/2} e^{-\sqrt{a_1}x}, \quad (3.46)$$

y usando la condición $z_2(0) = 0$, se obtienen las siguientes soluciones a las ecuaciones de estado sobre la restricción :

$$z_1 = G_0 \cosh(a_1^{1/2} x) + \frac{a_2}{a_1} \phi_{max}, \quad (3.47)$$

$$z_2 = a_1^{1/2} G_0 \sinh(a_1^{1/2} x), \quad (3.48)$$

$$z_3 = \phi_{max}, \quad (3.49)$$

$$z_4 = 0, \quad (3.50)$$

donde $G_0 \equiv 2A'_1$.

III.5. TRAYECTORIA DEL SISTEMA FUERA DE LA RESTRICCIÓN.

Seguendo el Principio del Máximo de Potryangin para encontrar el control óptimo fuera de la restricción se tiene que maximizar el hamiltoniano dado por :

$$H(x, u, x) = z_3(x) + \lambda_1 z_2 + \lambda_2(a_1 z_1 - a_2 z_3) + \lambda_3 z_4 + \lambda_4(-a_3 z_1 + a_4 z_3 + u z_3), \quad (3.51)$$

el cual puede escribirse de la forma :

$$H(u) = H_1 u + H_0, \quad (3.52)$$

donde

$$H_1 = \lambda_4 z_3, \quad (3.53)$$

y

$$H_0 = z_3(x) + \lambda_1 z_2 + \lambda_2(a_1 z_1 - a_2 z_3) + \lambda_3 z_4 + \lambda_4(-a_3 z_1 + a_4 z_3), \quad (3.54)$$

con objeto de resaltar la dependencia lineal del hamiltoniano respecto a la variable de control.

Si $u \in U$ tal que $U = \{u \mid u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$ se tiene, de la ec. (3.30), los siguientes casos :

$$u^{op} = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } H_1 > 0, \\ u_{\min} & \text{si } H_1 < 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Dado que z_3 , el flujo térmico, es siempre positivo, excepto en las orillas del sistema, se sigue que el signo de $\lambda_4(x)$, fuera de la restricción, determinará el valor del control óptimo en el punto x .

Es necesario señalar aquí, que, en general es posible que los candidatos a óptimo contengan una parte de su trayectoria que haga $H_1 = 0$; en este caso el Principio del Máximo de Potryangin no proporciona el control

óptimo. Este tipo de controles se llaman "controles singulares"; el análisis de los controles singulares y las condiciones necesarias para ser considerados candidatos a óptimo han sido desarrollados por varios investigadores (11),(12),(13),(14). Sin embargo, se puede demostrar que los controles singulares no son óptimos en nuestro caso. La demostración de esto, esta fuera del objetivo de la tesis y no será presentado aquí.

De la ec. (3.32), las ecuaciones que gobiernan las variables de de estado y adjuntas del sistema fuera de la restricción son, para las variables adjuntas :

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = -a_1\lambda_2 + a_3\lambda_4, \quad (3.57)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dx} = -\lambda_1, \quad (3.58)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dx} = -1 + a_2\lambda_2 - a_4\lambda_4 - u^{op}\lambda_4, \quad (3.59)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dx} = -\lambda_3, \quad (3.60)$$

y para las variables de estado :

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad (3.61)$$

$$\frac{dz_2}{dx} = a_1z_1 - a_2z_3, \quad (3.62)$$

$$\frac{dz_3}{dx} = z_4, \quad (3.63)$$

$$\frac{dz_4}{dx} = -a_3z_1 + (a_4 + u^{op})z_3. \quad (3.64)$$

El primer sistema de ecuaciones se resuelve derivando sucesivamente (3.57) y sustituyendo las ecuaciones (3.58) a (3.60) por las derivadas resultantes, dando origen a la siguiente ecuación diferencial :

$$\frac{d^4\lambda_1}{dx^4} - (a_1 + a_4 + u^{op})\frac{d^2\lambda_1}{dx^2} + (-a_2a_3 + a_1(a_4 + u^{op}))\lambda_1 = 0, \quad (3.65)$$

cuya ecuación característica es :

$$r^4 - (a_1 + a_4 + u^{op})r^2 + (-a_2a_3 + a_1(a_4 + u^{op})) = 0. \quad (3.66)$$

Las raíces de esta ecuación son :

$$r_1 = P_1^{1/2}, \quad r_2 = -P_1^{1/2}, \quad r_3 = P_2^{1/2}, \quad r_4 = -P_2^{1/2}, \quad (3.67)$$

donde :

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[a_1 + a_4 + u^{op} + \left[(a_1 + a_4 + u^{op})^2 - 4(-a_2a_3 + a_1(a_4 + u^{op})) \right]^{1/2} \right], \quad (3.68)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[a_1 + a_4 + u^{op} - \left[(a_1 + a_4 + u^{op})^2 - 4(-a_2a_3 + a_1(a_4 + u^{op})) \right]^{1/2} \right]. \quad (3.69)$$

En el Apéndice A se muestra que para que exista la solución óptima es necesario que $P_1 > 0$ y $P_2 < 0$. Dado que $P_2 < 0$, definiendo $R_2 = -P_2$ entonces en la ec. (3.61) $r_3 = iR_2^{1/2}$, $r_4 = -iR_2^{1/2}$. Estas dos raíces son números complejos conjugados, por lo que las soluciones serán combinación lineal de $\cos(R_2^{1/2}(x - x_s))$ y de $\sin(R_2^{1/2}(x - x_s))$. Por lo que la solución general al primer sistema de ecuaciones diferenciales es :

$$\lambda_1 = F_1 e^{P_1^{1/2}(x-x_s)} + F_2 e^{-P_1^{1/2}(x-x_s)} + F_3 \cos(R_2^{1/2}(x - x_s)) + F_4 \sin(R_2^{1/2}(x - x_s)), \quad (3.70)$$

$$\lambda_2 = (a_2a_3 - a_1(a_4 + u^{op}))^{-1} \left[-P_1^{1/2} R_2 \left(F_1 e^{P_1^{1/2}(x-x_s)} - F_2 e^{-P_1^{1/2}(x-x_s)} \right) + R_2^{1/2} P_1 \left(-F_3 \sin(R_2^{1/2}(x - x_s)) + F_4 \cos(R_2^{1/2}(x - x_s)) \right) + a_3 \right], \quad (3.71)$$

$$\lambda_3 = a_3^{-1} \left[(a_1 - P_1) \left(F_1 e^{P_1^{1/2}(x-x_s)} + F_2 e^{-P_1^{1/2}(x-x_s)} \right) + (a_1 + R_2) \left(F_3 \cos(R_2^{1/2}(x-x_s)) + F_4 \sin(R_2^{1/2}(x-x_s)) \right) \right], \quad (3.72)$$

$$\lambda_4 = a_3^{-1} (a_2 a_3 - a_1 (a_4 + u^{op}))^{-1} \left[a_1 a_3 + (a_2 a_3 + a_1 (a_1 - P_1)) P_1^{1/2} \left(F_1 e^{P_1^{1/2}(x-x_s)} - F_2 e^{-P_1^{1/2}(x-x_s)} \right) + (a_2 a_3 + a_1 (a_1 + R_2)) R_2^{1/2} \left(-F_3 \sin(R_2^{1/2}(x-x_s)) + F_4 \cos(R_2^{1/2}(x-x_s)) \right) \right], \quad (3.73)$$

con F_1, F_2, F_3 y F_4 son constantes por determinar; en estas soluciones ya se ha introducido el punto de salida x_s .

El segundo sistema de ecuaciones (3.61) a (3.64) se resuelve derivando (3.61) y sustituyendo por las derivadas que aparecen en (3.62) a (3.64) y así sucesivamente hasta que aparezca una ecuación diferencial en términos de z_1 :

$$\frac{d^4 z_1}{dx^4} - (a_1 + a_4 + u^{op}) \frac{d^2 z_1}{dx^2} + (-a_2 a_3 + a_1 (a_4 + u^{op})) z_1 = 0, \quad (3.74)$$

cuya ecuación característica es:

$$r^4 - (a_1 + a_4 + u^{op}) r^2 + (-a_2 a_3 + a_1 (a_4 + u^{op})) = 0, \quad (3.75)$$

que es la misma ecuación para las λ 's por lo que:

$$z_1 = \sum_i G_i e^{r_i(x-x_s)}, \quad (3.76)$$

$$z_2 = \sum_i G_i r_i e^{r_i(x-x_s)}, \quad (3.77)$$

$$z_3 = a_2^{-1} \sum_i G_i (a_1 - r_i^2) e^{r_i(x-x_s)}, \quad (3.78)$$

$$z_4 = a_2^{-1} \sum_i G_i r_i (a_1 - r_i^2) e^{r_i(x-z_*)}, \quad (3.79)$$

donde hemos incluido ya el punto de salida de la restricción z_* ; y G_1, G_2, G_3 y G_4 son constantes por determinar, definidas en la ec. (3.67).

III. 6. LAS CONDICIONES DE TRANSVERSALIDAD, DE FRONTERA Y CONTINUIDAD.

Las condiciones iniciales son :

$$z_1(0) \text{ libre}, \quad (3.80)$$

$$z_2(0) = 0, \quad (3.81)$$

$$z_3(0) = \phi_{max}, \quad (3.82)$$

$$z_4(0) = 0; \quad (3.83)$$

y las condiciones finales :

$$z_1(H/2) = 0, \quad (3.84)$$

$$z_2(H/2) \text{ libre}, \quad (3.85)$$

$$z_3(H/2) = 0, \quad (3.86)$$

$$z_4(H/2) \text{ libre}; \quad (3.87)$$

por lo que :

$$N(z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 - \phi_{max} \\ z_4 \\ x \end{pmatrix}, \quad M(z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ x - H/2 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Aplicando las condiciones de transversalidad, ecs. (2.145), (2.146), (2.151), (2.152), con $\phi = 0$:

$$\left\{ H + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial x} \right\} \Big|_{x_0} = 0, \quad (3.89)$$

$$\left\{ -\lambda_i + \nu_l \frac{\partial N_l}{\partial z_i} \right\} = 0 \Big|_{x_0}, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (3.90)$$

$$\left\{ H + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial t} \right\} \Big|_{x_f} = 0, \quad (3.91)$$

$$\left\{ -\lambda_i + \mu_k \frac{\partial M_k}{\partial z_i} \right\} \Big|_{x_f} = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.92)$$

Las condiciones (3.89) y (3.91) no proporcionan ninguna condición valiosa, solo son ecuaciones a través de las cuales se determinan los valores de algunos de los multiplicadores μ_k y ν_l . Las otras proporcionan las siguientes condiciones de frontera para λ_1 , λ_2 y λ_4 :

$$\lambda_1(0) = 0, \quad (3.93)$$

$$\lambda_2(H/2) = 0, \quad (3.94)$$

$$\lambda_4(H/2) = 0. \quad (3.95)$$

Así obtenemos el siguiente conjunto de condiciones que determinan la solución a nuestro problema de optimización :

$$\lambda_1(0) = 0, \quad (3.96)$$

$$\lambda_1(x_s^-) = \lambda_1(x_s^+), \quad (3.97)$$

$$\lambda_2(x_s^-) = \lambda_2(x_s^+), \quad (3.98)$$

$$\lambda_3(x_s^-) = \lambda_3(x_s^+), \quad (3.99)$$

$$\lambda_4(x_s^-) = \lambda_4(x_s^+), \quad (3.100)$$

$$z_1(x_s^-) = z_1(x_s^+), \quad (3.101)$$

$$z_2(x_s^-) = z_2(x_s^+), \quad (3.102)$$

$$z_3(x_s^-) = z_3(x_s^+), \quad (3.103)$$

$$z_4(x_s^-) = z_4(x_s^+), \quad (3.104)$$

$$H(x_s^-) = H(x_s^+), \quad (3.105)$$

$$z_1(H/2) = 0, \quad (3.106)$$

$$z_3(H/2) = 0, \quad (3.107)$$

$$\lambda_2(H/2) = 0, \quad (3.108)$$

$$\lambda_4(H/2) = 0, \quad (3.109)$$

que son catorce condiciones en total, mientras que las constantes a determinar son x_s , las G_0, G_1, \dots, G_4 , F_1, F_2, \dots, F_4 , C_1, C_2, \dots, C_4 , catorce constantes en total.

Nótese que el valor del control óptimo $u^{op}(x)$, tanto dentro como fuera de la restricción, así como las funciones de estado (trayectoria óptima), estarán determinados una vez que estas constantes hayan sido determinadas.

Considerando la continuidad del hamiltoniano en el punto de salida, ec. (3.105), y utilizando la continuidad de las variables de estado y de las funciones adjuntas en el mismo punto :

$$\lambda_4(x_s^-)u^{op}(x_s^-) = \lambda_4(x_s^+)u^{op}(x_s^+), \quad (3.110)$$

pero $u^{op}(x_s^+)$ puede ser ó u_{min} ó u_{max} , como puede deducirse de la ec. (3.38), mientras que $u^{op}(x_s^-)$ tiene un valor definido que en general es diferente de u_{max} o u_{min} , debido a que se obtiene de pedir que la trayectoria permanezca sobre la frontera de la restricción. Así, la única manera de que se cumpla la ecuación (3.108) es que :

$$\lambda_4(x_s^-) = \lambda_4(x_s^+) = 0. \quad (3.111)$$

En las siguientes subsecciones se encontrarán las constantes por evaluar.

III.3.1. EVALUACION DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO Y LA ECUACION DE CRITICIDAD.

De las condiciones (3.103), (3.104), (3.105) y (3.106) y las ecuaciones (3.49), (3.50), (3.78) y (3.79) se obtienen el siguiente sistema de ecuaciones, que determina el valor de las G 's, que son las constantes de integración :

$$\sum_{i=1}^4 G_i (a_1 - r_i^2) = a_2 \phi_{max}, \quad (3.112)$$

$$\sum_{i=1}^4 G_i r_i (a_1 - r_i^2) = 0, \quad (3.113)$$

$$\sum_{i=1}^4 G_i e^{r_i(H/2 - x_s)} = 0, \quad (3.114)$$

$$\sum_{i=1}^4 G_i (a_1 - r_i^2) e^{r_i(H/2 - x_s)} = 0, \quad (3.115)$$

con :

$$r_1 = P_1^{1/2}, \quad r_2 = -P_1^{1/2}, \quad r_3 = iR_2^{1/2}, \quad r_4 = -iR_2^{1/2}. \quad (3.116)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto para G_1, \dots, G_4 ; si definimos d_r :

$$d_r = R_2^{1/2} \tanh(P_1^{1/2}(H/2 - x_s)) - P_1^{1/2} \tan(R_2^{1/2}(H/2 - x_s)), \quad (3.117)$$

entonces las constantes pueden ser expresadas como :

$$G_1 = \frac{a_2 \phi_{max} i R_2^{1/2} e^{-P_1^{1/2}(H/2 - x_s)}}{2(a_1 - P_1) d_r \cosh(P_1^{1/2}(H/2 - x_s))}, \quad (3.118)$$

$$G_2 = \frac{a_2 \phi_{max} i R_2^{1/2} e^{P_1^{1/2}(H/2 - x_s)}}{2(a_1 - P_1) d_r \cosh(P_1^{1/2}(H/2 - x_s))}, \quad (3.119)$$

$$G_3 = \frac{a_2 \phi_{max} P_1^{1/2} e^{-i R_2^{1/2}(H/2 - x_s)}}{2(a_1 + R_2) d_r \cos(R_2^{1/2}(H/2 - x_s))}, \quad (3.120)$$

$$G_4 = \frac{a_2 \phi_{max} P_1^{1/2} e^{i R_2^{1/2}(H/2 - x_s)}}{2(a_1 - P_2) d_r \cos(R_2^{1/2}(H/2 - x_s))}. \quad (3.121)$$

Las constantes anteriores dependen del valor de x_s y del valor de la variable de control fuera de la restricción, como puede verse en las ecs. (3.68) y (3.69). De la condición (3.102), es decir, de la continuidad de las corrientes de neutrones rápidos en el punto de salida de la restricción, tenemos :

$$a_1^{1/2} G_0 \sinh(a_1^{1/2} x_s) = \sum_{i=1}^4 G_i r_i. \quad (3.122)$$

Despejando G_0 de la ec. anterior :

$$G_0 = \frac{\sum_{i=1}^4 G_i r_i}{a_1^{1/2} \sinh(a_1^{1/2} x_s)}, \quad (3.123)$$

y sustituyendo los valores de las G 's en la ecuación anterior, obtenemos

$$G_0 = \frac{a_2 \phi_{max} P_1^{1/2} R_2^{1/2} (P_1 + R_2)}{a_1^{1/2} \sinh(a_1^{1/2} x_s) d_r (a_1 - P_1)(a_1 + R_2)}. \quad (3.124)$$

Así G_0 también depende del punto de salida. De la condición (3.101), es decir, la continuidad de los flujos rápidos en el punto de salida de la restricción, se tiene

$$G_0 \cosh(a_1^{1/2} x_s) + \frac{a_2}{a_1} \phi_{max} = \sum_{i=1}^4 G_i. \quad (3.125)$$

Sustituyendo las G_i 's en esta ecuación :

$$\begin{aligned}
& [P_2 - (a_4 + u^{op})] P_2^{1/2} \tanh \left(P_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\
& - [P_1 - (a_4 + u^{op})] P_1^{1/2} \tanh \left(P_1^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\
& = (P_1 - P_2) a_1^{1/2} \coth \left(a_1^{1/2} x_s \right).
\end{aligned} \tag{3.126}$$

Esta es una ecuación trascendental que determina x_s como función de u^{op} , una vez que los parámetros han sido especificados. Debemos notar que x_s debe ser siempre mayor o igual a cero y menor o igual a $H/2$. En el Apéndice A se analizan las condiciones para las cuales, existen valores de x_s en ese intervalo. Además, todas las constantes de integración dependen del punto de salida y de u^{op} , por lo que la criticidad del sistema depende de esta ecuación. Por estas razones llamaremos a la ec. (3.126) la *ecuación de criticidad del sistema*.

III.6.2 DETERMINACION DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACION DE LAS ECUACIONES ADJUNTAS.

Ahora, de la condición (3.96) :

$$\lambda_1(0) = C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0) = 0, \quad \text{por lo que} \quad C_1 = 0. \tag{3.127}$$

Usando la condición (3.111) junto con la ec. (3.42), tenemos :

$$C_4 = C_3 x_s - \frac{C_2 a_2}{a_1^{3/2}} \cosh(a_1^{1/2} x_s) - \frac{x_s^2}{2}. \tag{3.128}$$

De la ecuación de continuidad para λ_3 en el punto de salida (ec. 3.99), usando las ecs.(3.41) y (3.72) despejamos C_3 :

$$C_3 = \frac{1}{a_3} (a_1 - P_1) (F_1 + F_2) + \frac{F_3}{a_3} (a_1 + R_2) + x_s + \frac{C_2 a_2}{a_1} \sinh(a_1^{1/2} x_s). \tag{3.129}$$

De la continuidad de λ_1 en el punto de salida, ec. (3.97), y usando las ecs. (3.39) y (3.70) obtenemos

$$C_2 \sinh(a_1^{1/2} x_s) = F_1 + F_2 + F_3, \quad (3.130)$$

de donde :

$$C_2 = (F_1 + F_2 + F_3) / \sinh(a_1^{1/2} x_s). \quad (3.131)$$

Ahora, de la continuidad de λ_2 en el punto de salida, ec. (3.98), y usando las ecs. (3.40) y (3.71),

$$\begin{aligned} & -a_1^{-1/2} C_2 \cosh(a_1^{1/2} x_s) \\ & = (a_2 a_3 - a_1 (a_4 + u^{op}))^{-1} \left[-P_1^{1/2} R_2 (F_1 - F_2) + R_2^{1/2} P_1 F_4 + a_3 \right]. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Sustituyendo C_2 de la ecuación anterior, en esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned} & -a_1^{-1/2} \coth(a_1^{1/2} x_s) (F_1 + F_2 + F_3) \\ & = (a_2 a_3 - a_1 (a_4 + u^{op}))^{-1} \left[-P_1^{1/2} R_2 (F_1 - F_2) + R_2^{1/2} P_1 F_4 + a_3 \right]. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Ahora de la condición $\lambda_2(H/2) = 0$, i.e. ec.(3.108) :

$$\begin{aligned} & -P_1^{1/2} R_2 \left(F_1 e^{P_1^{1/2}(H/2-x_s)} - F_2 e^{-P_1^{1/2}(H/2-x_s)} \right) \\ & + R_2^{1/2} P_1 \left(-F_3 \sin(R_2^{1/2}(H/2-x_s)) + F_4 \cos(R_2^{1/2}(H/2-x_s)) \right) \\ & + a_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.134)$$

De $\lambda_4(H/2) = 0$, es decir, ec. (3.109) :

$$\begin{aligned} & a_1 a_3 + (a_2 a_3 + a_1 (a_1 - P_1)) P_1^{1/2} \left(F_1 e^{P_1^{1/2}(H/2-x_s)} - F_2 e^{-P_1^{1/2}(H/2-x_s)} \right) \\ & + (a_2 a_3 + a_1 (a_1 + R_2)) R_2^{1/2} \left(-F_3 \sin(R_2^{1/2}(H/2-x_s)) \right. \\ & \left. + F_4 \cos(R_2^{1/2}(H/2-x_s)) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Y finalmente usando la ec. (3.111) :

$$a_1 a_3 + (a_2 a_3 + a_1 (a_1 - P_1)) P_1^{1/2} (F_1 - F_2) \\ + (a_2 a_3 + a_1 (a_1 + R_2)) R_2^{1/2} F_4 = 0. \quad (3.136)$$

Por conveniencia definimos las siguientes constantes :

$$b_p \equiv (a_2 a_3 + a_1 (a_1 - P_1)) P_1^{1/2}, \quad (3.137)$$

$$b_r \equiv (a_2 a_3 + a_1 (a_1 + R_2)) R_2^{1/2}, \quad (3.138)$$

$$b_u \equiv a_1^{-1/2} (a_2 a_3 - a_1 (a_4 + u^{op})) \coth(a_1^{1/2} x_s). \quad (3.139)$$

Con estas definiciones las ecuaciones (3.133) a (3.136) nos dan el siguiente sistema de ecuaciones lineales de 4×4 en las F 's :

$$(P_1^{1/2} R_2 - b_u) F_1 - (P_1^{1/2} R_2 + b_u) F_2 - b_u F_3 - R_2^{1/2} P_1 F_4 = a_3, \quad (3.140)$$

$$-P_1^{1/2} R_2 e^{P_1^{1/2}(H/2-x_s)} F_1 + P_1^{1/2} R_2 e^{-P_1^{1/2}(H/2-x_s)} F_2 \\ - R_2^{1/2} P_1 \sin(R_2^{1/2}(H/2-x_s)) F_3 + R_2^{1/2} P_1 \cos(R_2^{1/2}(H/2-x_s)) F_4 = -a_3, \quad (3.141)$$

$$b_p e^{P_1^{1/2}(H/2-x_s)} F_1 - b_p e^{-P_1^{1/2}(H/2-x_s)} F_2 \\ - b_r \sin(R_2^{1/2}(H/2-x_s)) F_3 + b_r \cos(R_2^{1/2}(H/2-x_s)) F_4 = -a_1 a_3, \quad (3.142)$$

y

$$b_p F_1 - b_p F_2 + b_r F_4 = -a_1 a_3. \quad (3.143)$$

La solución de este sistema puede ser escrita como :

$$F_1 = \frac{a_3 d_5 e^{-P_1^{1/2}(H/2-x_s)}}{2c_4 d_1}, \quad (3.144)$$

$$F_2 = \frac{a_3 e^{P_1^{1/2}(H/2-x_s)}}{d_1} \left(\frac{d_5}{2d_4} + d_3 \right), \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} F_3 = & -\frac{a_1 a_3}{b_r} \cot \left(R_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & + \frac{a_3}{d_1} \left(d_2 \csc \left(R_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) + \frac{b_p d_3}{b_r} \cot \left(R_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) e^{P_1^{1/2}(H/2-x_s)} \right) \\ & + \frac{a_3 b_p d_5}{b_r d_4 d_1} \cot \left(R_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \sinh \left(P_1^{1/2} (H/2 - x_s) \right), \end{aligned} \quad (3.146)$$

y

$$F_4 = -\frac{a_1 a_3}{b_r} + \frac{a_3 b_p d_5}{b_r d_4 d_1} \sinh \left(P_1^{1/2} (H/2 - x_s) \right) + \frac{a_3 d_3 b_p}{d_1 b_r} e^{P_1^{1/2}(H/2-x_s)}; \quad (3.147)$$

donde hemos definido

$$d_1 \equiv P_1^{1/2} R_2 b_r + R_2^{1/2} P_1 b_p, \quad (3.148)$$

$$d_2 \equiv a_1 P_1^{1/2} R_2 + b_p, \quad (3.149)$$

$$d_3 \equiv a_1 R_2^{1/2} P_1 - b_r, \quad (3.150)$$

$$\begin{aligned} d_4 \equiv & -b_r b_u \cosh \left(P_1^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & - \sinh \left(P_1^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \left(d_1 + b_u b_p \cot \left(R_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \right), \end{aligned} \quad (3.151)$$

$$\begin{aligned} d_5 \equiv & -d_1 \left(d_3 + a_1 b_u \cot \left(R_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \right) + b_r b_u d_2 \csc \left(R_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & + d_3 e^{P_1^{1/2}(H/2-x_s)} \left(b_r b_u + d_1 + b_u b_p \cot \left(R_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.152)$$

La solución de las ecuaciones adjuntas fuera de la restricción, ecs. (3.70) a (3.73), están determinadas por F_1 , F_2 , F_3 y F_4 , una vez que u^{op} y x_s hayan sido obtenidas; la solución de las ecuaciones adjuntas sobre la restricción, ecs. (3.39) a (3.42), están determinadas por las C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , ecs. (3.127) a (3.129) conociendo C_2 , ec. (3.131), que a su vez está determinada por F_1 , F_2 y F_3 .

III.7. LA SOLUCION OPTIMA.

De la ecuación (3.111) se tiene que $\lambda_4(x_s) = 0$. En la sección V se mostró que es necesario conocer el signo de λ_4 fuera de la restricción para determinar el control óptimo en esa región. De la ec. (3.60) :

$$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_3. \quad (3.153)$$

Por lo que :

$$\text{Si } \lambda_3(x_s) < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_4 > 0, \quad \text{fuera de la restricción, (3.154)}$$

$$\text{Si } \lambda_3(x_s) > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_4 < 0, \quad \text{fuera de la restricción. (3.155)}$$

De modo que el valor de la variable de control inmediatamente después del punto de salida quedará determinado por :

$$\begin{aligned} u^{op} = u_{min} & \quad \text{si } \lambda_3(x_s) > 0, \\ u^{op} = u_{max} & \quad \text{si } \lambda_3(x_s) < 0. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Como se puede deducir de la ec. (3.72), junto con las ecuaciones para los coeficientes F_i , en las ecs. (3.144) - (3.147), no es posible determinar el signo de $\lambda_3(x_s)$ sin conocer x_s , que a su vez depende del valor de u^{op} a través de la ec. de criticidad (ec. 3.126). Por consiguiente, dados los parametros del sistema (longitud del reactor y secciones transversales) se prueban las dos opciones de (3.156) y dado que la solución óptima es única, una de

las soluciones se contradecirá con el valor del signo de λ_3 en el punto de salida de la restricción, mientras que la otra dará la solución buscada. Este procedimiento se esquematiza en la Fig. (3. 1) :

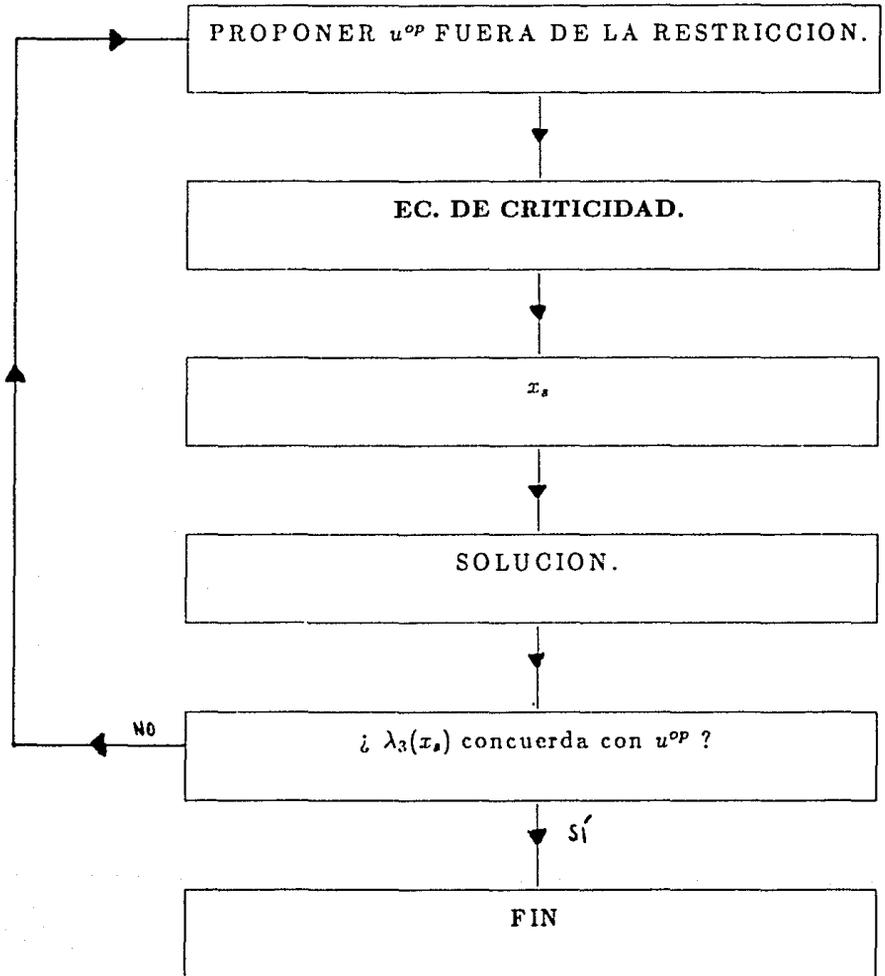


Fig. 3.1. Esquema del procedimiento para encontrar el control óptimo.

El procedimiento detallado es :

- 1) Se propone u^{op} .
- 2) Dados los parámetros del reactor, se encuentra x_* de la ec. de criticidad (ec. (3.126)).
- 3) Se evalúan las constantes :

$$F_1 = \frac{1}{2} \left[a_1 + a_4 + u^{op} + \left((a_1 + a_4 + u^{op})^2 - 4(-a_2 a_3 + a_1(a_4 + u^{op})) \right)^{1/2} \right], \quad (3.157)$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \left[-(a_1 + a_4 + u^{op}) + \left((a_1 + a_4 + u^{op})^2 - 4(-a_2 a_3 + a_1(a_4 + u^{op})) \right)^{1/2} \right], \quad (3.158)$$

y se obtienen los valores de las G 's y las F 's que están dadas por las ecuaciones (3.118) a (3.121) y (3.144) a (3.147) respectivamente. Y de la ec. (3.120) evaluamos

$$G_0 = - \frac{a_2 \phi_{max} P_1^{1/2} R_2^{1/2} (P_1 + R_2)}{a_1^{1/2} \sinh(a_1^{1/2} x_*) d_r (a_1 - P_1)(a_1 + R_2)}, \quad (3.159)$$

donde d_r es :

$$d_r \equiv R_2^{1/2} \tanh(P_1^{1/2}(H/2 - x_*)) - P_1^{1/2} \tanh(R_2^{1/2}(H/2 - x_*)). \quad (3.160)$$

Calculamos

$$C_2 = (F_1 + F_2 + F_3) / \sinh(a_1^{1/2} x_*), \quad (3.161)$$

$$C_3 = \frac{1}{a_3} (a_1 - P_1)(F_1 + F_2) + \frac{F_3}{a_3} (a_1 + R_2) + x_* + \frac{C_2 a_2}{a_1} \sinh(a_1^{1/2} x_*), \quad (3.162)$$

$$C_4 = C_3 x_* - \frac{C_2 a_2}{a_1^{3/2}} \cosh(a_1^{1/2} x_*) - \frac{x_*^2}{2}. \quad (3.163)$$

4) Se obtienen las soluciones dentro de la restricción :

$$u^{op}(x) = \frac{a_3}{\phi_{max}} z_1(x) - a_4; \quad (3.164)$$

$$\lambda_1(x) = C_2 \sinh(a_1^{1/2} x), \quad (3.165)$$

$$\lambda_2(x) = -\frac{C_2}{a_1^{1/2}} \cosh(a_1^{1/2} x), \quad (3.166)$$

$$\lambda_3(x) = -C_2 \frac{a_2}{a_1} \sinh(a_1^{1/2} x) - x + C_3, \quad (3.167)$$

$$\lambda_4(x) = C_2 \frac{a_2}{a_1^{3/2}} \cosh(a_1^{1/2} x) + x^2/2 - C_3 x + C_4; \quad (3.168)$$

$$z_1(x) = G_0 \cosh(a_1^{1/2} x_*) + \frac{a_2}{a_1} \phi_{max}, \quad (3.169)$$

$$z_2(x) = a_1^{1/2} G_0 \sinh(a_1^{1/2} x), \quad (3.170)$$

$$z_3(x) = \phi_{max}, \quad (3.171)$$

$$z_4(x) = 0. \quad (3.172)$$

Y fuera de la restricción, usando las expresiones para los coeficientes F_i en las ecs. (1.144) a (1.147), obtenemos el comportamiento de las variables adjuntas :

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) = & F_1 e^{P_1^{1/2}(x-x_*)} + F_2 e^{-P_1^{1/2}(x-x_*)} \\ & + F_3 \cos(R_2^{1/2}(x-x_*)) + F_4 \sin(R_2^{1/2}(x-x_*)), \end{aligned} \quad (3.173)$$

$$\lambda_2(x) = (a_2 a_3 - a_1 (u_4 + u^{op}))^{-1} \left[-P_1^{1/2} R_2 \left(F_1 e^{P_1^{1/2}(x-x_*)} - F_2 e^{-P_1^{1/2}(x-x_*)} \right) \right. \\ \left. + R_2^{1/2} P_1 \left(-F_3 \sin(R_2^{1/2}(x-x_*)) + F_4 \cos(R_2^{1/2}(x-x_*)) \right) \right. \\ \left. + a_3 \right], \quad (3.174)$$

$$\lambda_3(x) = a_3^{-1} \left[(a_1 - P_1) \left(F_1 e^{P_1^{1/2}(x-x_*)} + F_2 e^{-P_1^{1/2}(x-x_*)} \right) \right. \\ \left. + (a_1 + R_2) \left(F_3 \cos(R_2^{1/2}(x-x_*)) + F_4 \sin(R_2^{1/2}(x-x_*)) \right) \right], \quad (3.175)$$

$$\lambda_4(x) = a_3^{-1} (a_2 a_3 - a_1 (u_4 + u^{op}))^{-1} \left[a_1 a_3 \right. \\ \left. + (-a_2 a_3 + a_1 (a_1 - P_1)) P_1^{1/2} \left(F_1 e^{P_1^{1/2}(x-x_*)} - F_2 e^{-P_1^{1/2}(x-x_*)} \right) \right. \\ \left. + (-a_2 a_3 + a_1 (a_1 - R_2)) R_2^{1/2} \left(-F_3 \sin(R_2^{1/2}(x-x_*)) \right. \right. \\ \left. \left. + F_4 \cos(R_2^{1/2}(x-x_*)) \right) \right]; \quad (3.176)$$

y el comportamiento de las variables de estado, usando las expresiones para las G_i en las ecs. (3.118)—(3.121) está dado por :

$$z_1(x) = \sum G_i e^{r_i(x-x_*)}, \quad (3.177)$$

$$z_2(x) = \sum G_i r_i e^{r_i(x-x_*)}, \quad (3.178)$$

$$z_3(x) = a_2^{-1} \sum G_i (a_1 - r_i^2) e^{r_i(x-x_*)}, \quad (3.179)$$

$$z_4(x) = a_2^{-1} \sum G_i r_i (a_1 - r_i^2) e^{r_i(x-x_*)}. \quad (3.180)$$

5) Se comprueba que el signo de $\lambda_3(x_*)$ corresponda al control óptimo elegido y que $\lambda_4(x)$ no cambie de signo fuera de la restricción.

6) La ec. (3.34) muestra que el control óptimo dentro de la restricción depende de el flujo rápido z_1 , que a su vez depende de la constante G_0 , como lo muestra la ec. (3.47). Para evaluar esta constante es necesario conocer

z , y u^{op} fuera de la restricción, ec. (3.123). Por lo tanto, el control óptimo dentro de la restricción depende del control óptimo fuera de ésta. Dado que el flujo rápido dentro de la restricción alcanza su máximo en el centro del reactor, el control óptimo será máximo en ese punto. Es entonces necesario verificar que el valor máximo del control óptimo sea menor al valor máximo de la variable de control u_{max} . Si esto no se cumple, la solución óptima hallada no se puede implementar.

III.8. COMENTARIOS.

En el siguiente capítulo se usan parámetros típicos de un reactor térmico de agua ligera para ilustrar la solución hallada.

CAP. IV

RESULTADOS

IV.1. INTRODUCCION.

El tratar de encontrar la posición en la cual la trayectoria óptima abandona la restricción, o sea el punto de salida x_s , dió origen a lo que llamamos la ec. de criticidad, ec. (3.126) y que reproducimos nuevamente :

$$\begin{aligned} & (P_2 - (a_4 + u^{op})) P_2^{1/2} \tanh \left(P_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & - (P_1 - (a_4 + u^{op})) P_1^{1/2} \tanh \left(P_1^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & = (P_1 - P_2) a_1^{1/2} \coth \left(a_1^{1/2} x_s \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Siendo ésta una ec. trascendental, no es posible despejar x_s en términos del control óptimo.

Dado que la elección del control óptimo fuera de la restricción, de entre los controles mínimo y máximo, es función del signo de λ_4 fuera de la restricción, como se puede deducir de la ec. (3.56) y que el signo de λ_4 inmediatamente fuera de la restricción depende del signo de λ_3 en el punto de salida, x_s , como se explicó en la sección V del capítulo anterior, es necesario resolver numéricamente la ec. (4.1) para x_s , usando valores de los parámetros para un sistema en particular. Entonces, es necesario proponer un valor del control óptimo, ya sea la cota máxima ó la mínima, evaluar λ_3 en x_s y revisar que el signo de λ_3 corresponda al control óptimo elegido; de otro modo, hay que usar el otro valor posible del control óptimo y repetir el procedimiento.

En este capítulo usaremos valores típicos de los parámetros de un reactor de agua ligera para ilustrar las soluciones óptimas obtenidas en el capítulo

anterior.

IV.2. EVALUACION NUMERICA USANDO PARAMETROS TIPICOS DE UN LV

Para analizar las soluciones se utilizaron parámetros típicos para un reactor LWR (esto es, moderado por agua ligera) bajo la aproximación de dos grupos¹⁵.

Tabla I

	GRUPO RAPIDO	GRUPO TERMICO.
D (cm)	1.40	0.400
Σ_a (cm ⁻¹)	0.0095	0.080
$\nu\Sigma_f$ (cm ⁻¹)		0.1400
Σ_R (cm ⁻¹)	0.0166	
ν	"	2.6 ⁽¹⁶⁾

El ancho del reactor se escoge de 300 cm. Y la magnitud del flujo térmico máximo se impone que sea de $\phi_{max} = 10^{15} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

La existencia de la solución a la ec. de criticidad (ec. 3.126) impone una cota superior al control óptimo fuera de la restricción† :

$$u^{op} < a_2 a_3 / a_1 - a_4 \quad (4.2)$$

Para este caso, ésta cota indica que

$$\Sigma_c^{op} < 5.5959924 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}. \quad (4.3)$$

Utilizando los datos de la Tabla I y usando el método de Newton para resolver la ecuación de criticidad†† se encuentra que para

† Ver Apéndice A.

†† Ver Apéndice B

$\Sigma_c^{op} = 5.63142003 \times 10^{-3} \text{cm}^{-1}$ el punto de salida es $x_s = 6.9002725 \times 10^{-6} \text{cm}$, sucesivamente se encuentran puntos de salida para valores menores de Σ_c^{op} . Los resultados son presentados a través de la figura 1.

Después se evalúan los valores de λ_3 para cada par (u^{op}, x_s) . Se muestran los resultados en la figura 2. Después se escogieron tres valores de control óptimo fuera de la restricción y se graficaron sus correspondientes variables de estado y variables adjuntas (gráficas 3 a 23).

En la figura 1, la gráfica muestra que la sección transversal macroscópica de control, Σ_c^{op} fuera de la restricción, la cual es proporcional a u^{op} , es suavemente decreciente para puntos de salida de cero a cien centímetros aproximadamente y después cae bruscamente. El método de Newton no converge cuando uno se acerca a puntos de salida cercanos a 150 cm, la orilla del reactor. Es por eso que la gráfica termina en $x_s = 145 \text{ cm}$.

La gráfica es positiva de cero a 108 cm, aproximadamente, y negativa después. La parte positiva indica que para puntos de salida en esa región es necesario introducir material absorbente fuera de la restricción, para alcanzar la criticidad, mientras que la parte negativa indica que es necesario sacar material absorbente para alcanzar la criticidad.

La gráfica 2 muestra que $\lambda_3(x_s) > 0$ para todos los puntos de salida entre cero y 145 cm. Esto nos dice que $u^{op} = u_{min}$ para todos los puntos de salida entre cero y 145 cm.

SECCION DE CONTROL OPTIMA VS. PUNTO DE SALIDA.

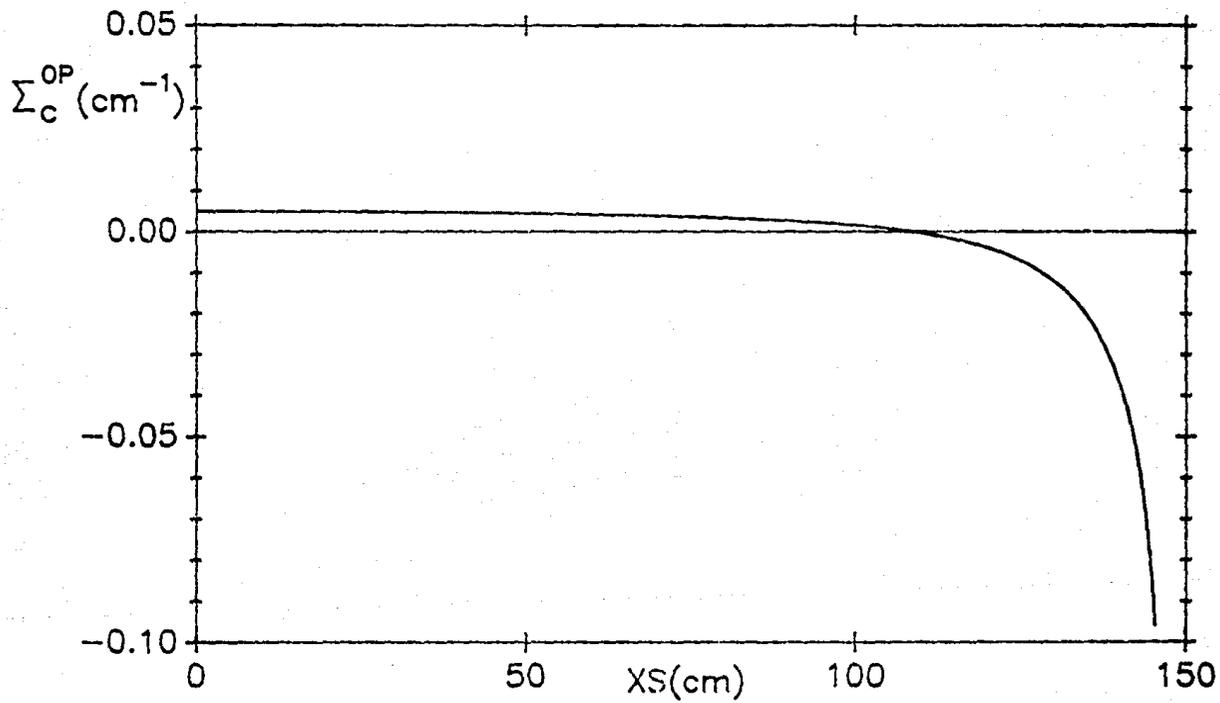


FIG. 1

LAMBDA 3 VS. PUNTO DE SALIDA

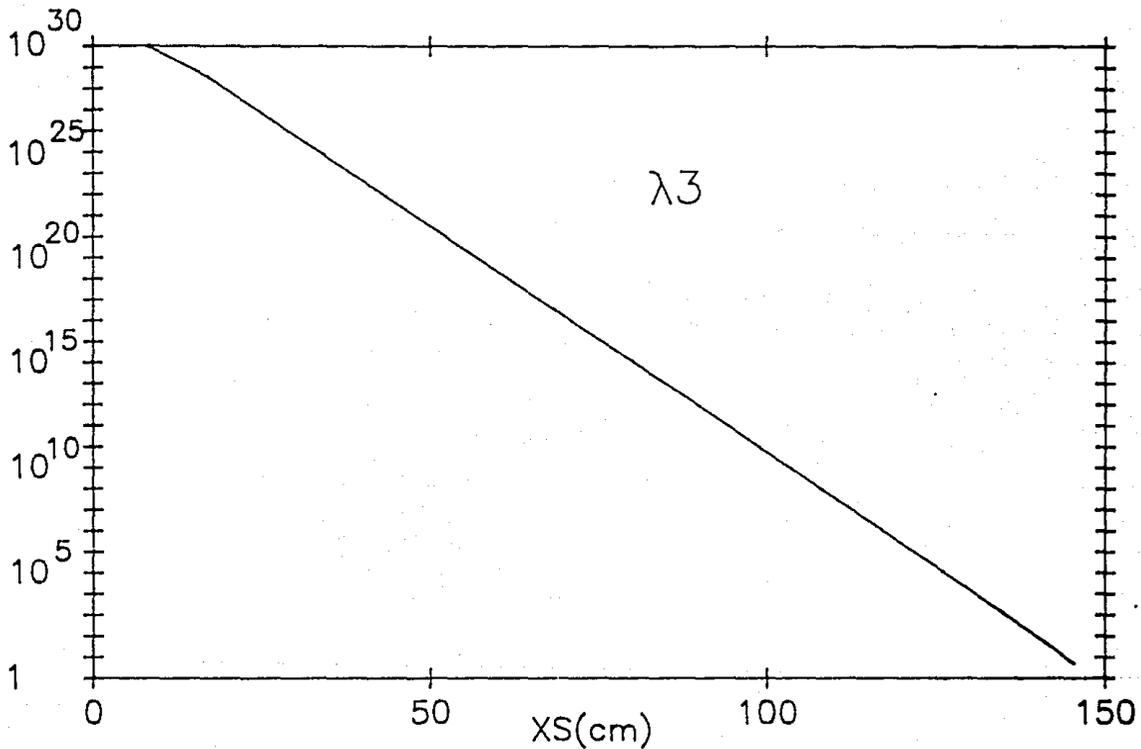


FIG. 2

a) Con los parámetros de la Tabla I y escogiendo un punto de salida de 0.014 cm, al cual le corresponde el valor de $u^{op} = 1.2578 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-2}$ fuera de la restricción, se hicieron las figuras 3 a 9.

La figura 3 muestra que el control óptimo es constante en todo el reactor. Esta situación corresponde a la de un reactor homogéneo. En el Apéndice A se muestra que para este caso, el control necesario para que el sistema alcance la criticidad es

$$u = \frac{a_2 a_3}{a_1 + \pi^2 / H^2} - a_4 - \frac{\pi^2}{H^2}, \quad (4.4)$$

que evaluando nos dice que $u = 1.2578 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-2}$, lo cual concuerda con el resultado obtenido.

Los parámetros de la Tabla I, junto con la elección de un punto de salida de $x_s = 0.014$ nos da un sistema supercrítico, por lo que la gráfica señala que hay que aumentar de manera constante el material absorbente en cada punto para alcanzar la criticidad.

Dado que el punto de salida es casi cero, las figuras 4 y 5 de las funciones adjuntas están descritas totalmente por las ecuaciones (3.173) a (3.176), esto es, las funciones adjuntas fuera de la restricción. En estas, se logra apreciar el cumplimiento de las condiciones $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(H/2) = 0$, $\lambda_4(H/2) = 0$ y $\lambda_4(x_s) = 0$. Nótese que λ_4 es decreciente alrededor del punto de salida, $x_s = 0$. Además encontramos que $\lambda_3(x_s) > 0$. De la ec. (3.56), esto confirma que $u^{op} = u_{min}$.

En la fig. 6 y 7 se muestran los flujos rápido y térmico respectivamente. Dado que el punto de salida esta casi en cero, a partir de este punto el flujo comienza a decrecer suavemente en forma cóncava de $\phi_2 = \phi_{max} = 10^{16} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ hasta ser igual a cero en la orilla del reactor. El flujo rápido es mayor que el flujo térmico y decae a cero de manera semejante. Esto provoca que la corriente rápida sea mayor que la corriente térmica, iniciando ambas en cero, dada la simetría del reactor y aumentan para puntos cercanos a la orilla del reactor. Esto se muestra en las figuras 8 y 9.

CONTROL OPTIMO VS. POSICION, $X_S = 0$ cm.

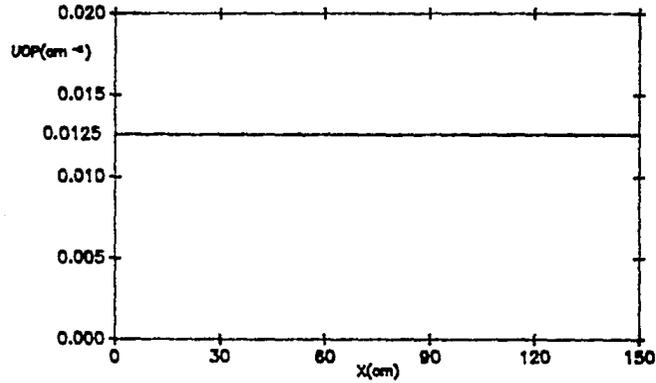


FIG. 3

LAMBDA 1 Y 3 VS. POSICION, $X_S = 0$ cm.

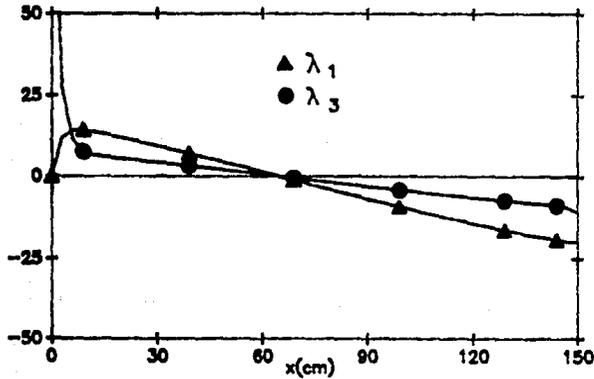


FIG. 4

LAMBDA 2 Y 4 VS. POSICION, $X_S = 0$ cm.

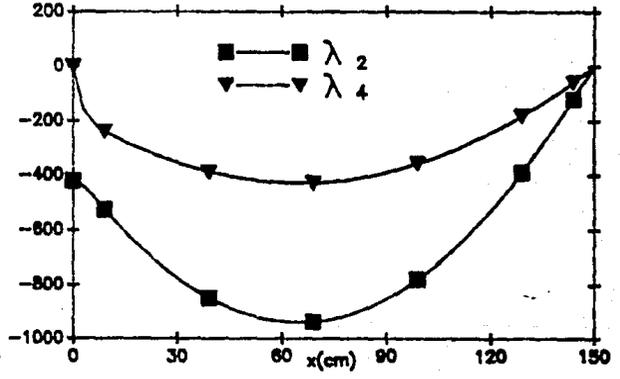


FIG. 5

FLUJO RAPIDO VS. POSICION, XS = 0 cm.

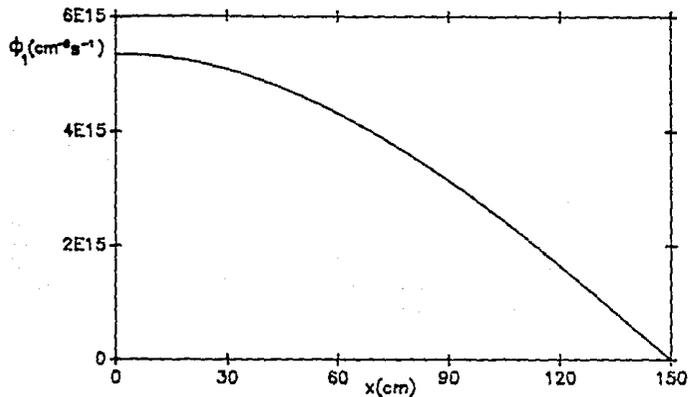


FIG. 6

FLUJO TERMICO VS. POSICION, XS = 0 cm.

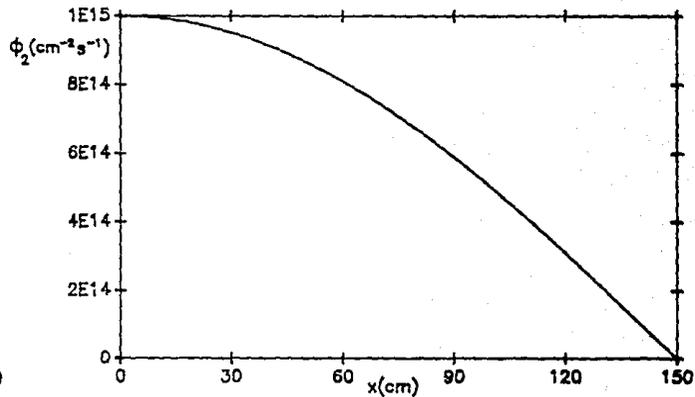


FIG. 7

CORRIENTE RAPIDA VS. POSICION, XS = 0 cm.

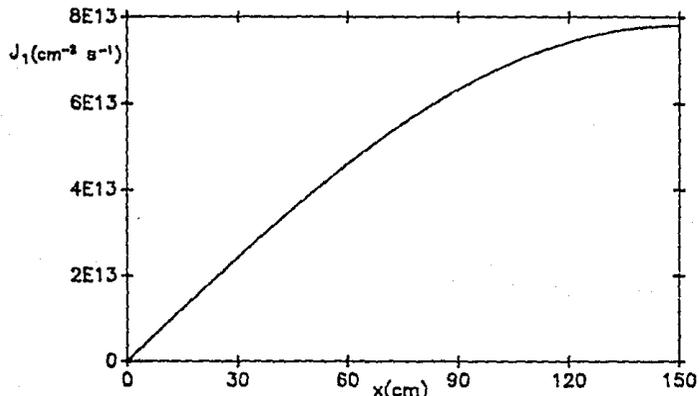


FIG. 8

CORRIENTE TERMICA VS POSICION, XS = 0 cm.

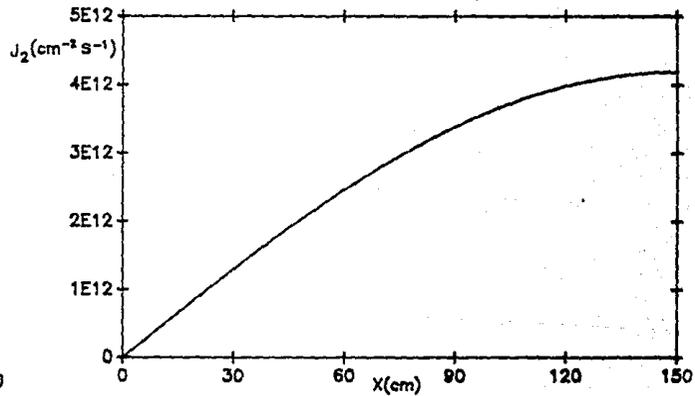


FIG. 9

b) Para este caso $u^{op} = 8.2553 \times 10^{-3} \text{cm}^{-2}$ fuera de la restricción, al cual le corresponde un punto de salida $x_s = 85 \text{cm}$.

La gráfica 10 muestra el control óptimo vs. la posición. El control es máximo en $x = 0$, se mantiene constante hasta los 60 cm, aproximadamente y después cae bruscamente cerca del punto de salida, donde hay una discontinuidad. Fuera de la restricción, el control óptimo es igual a $8.235 \times 10^{-3} \text{cm}^{-2}$. Nótese que el valor máximo de u^{op} para $x_s = 85 \text{cm}$ es mayor que el máximo de u^{op} para $x_s = 0 \text{cm}$.

En las figuras 11 y 12 se observa que las funciones adjuntas cumplen las condiciones $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(H/2) = 0$, $\lambda_4(H/2) = 0$ y $\lambda_4(x_s) = 0$. Nótese que λ_4 es decreciente alrededor del punto de salida, $x_s = 85 \text{cm}$ y que $\lambda_3(x_s) > 0$. De la ec. (3.56), esto confirma que $u^{op} = u_{min}$.

Las figuras 13 y 14 muestran los flujos rápido y térmico respectivamente. El flujo térmico se mantiene igual a $10^{15} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ hasta $x_s = 85 \text{cm}$ y empieza a decrecer, siendo igual a cero en la orilla del reactor. El flujo rápido se comporta casi de la misma manera que el térmico, solo que el flujo rápido es mayor que el térmico.

La corriente rápida (fig. 15) es cero hasta los 60 cm aproximadamente, debido a que el flujo rápido es constante en esa región, después crece de manera brusca. El mismo comportamiento exhibe el flujo térmico (fig. 16), excepto que este es cero hasta el punto de salida exactamente.

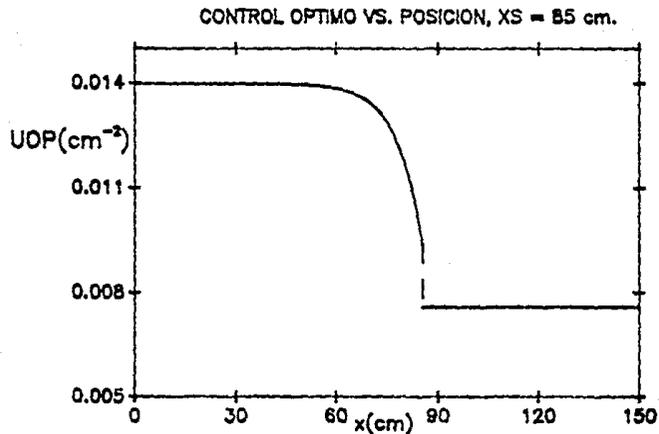


FIG. 10

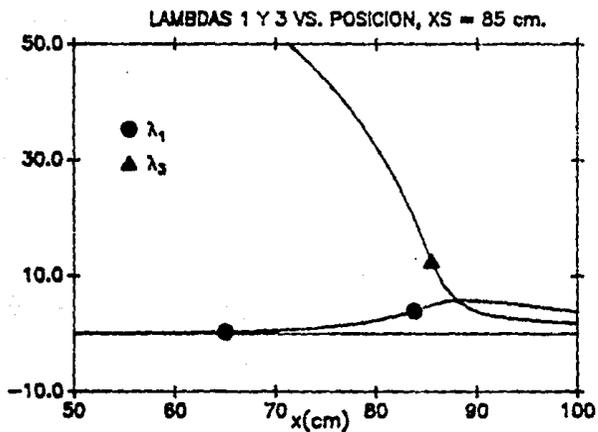


FIG. 11

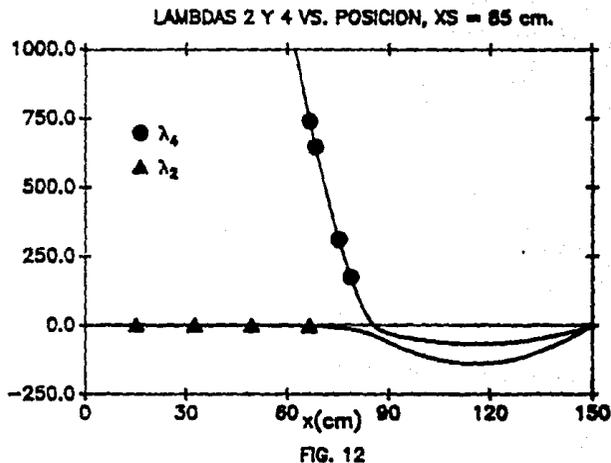


FIG. 12

FLUJO RAPIDO VS. POSICION, XS = 85 cm.

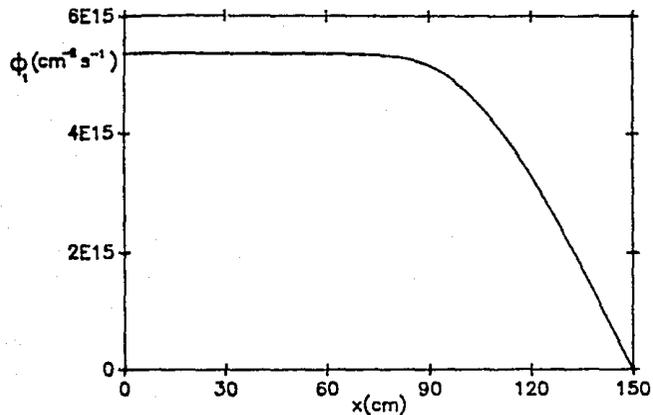


FIG. 13

FLUJO TERMICO VS. POSICION, XS = 85 cm.

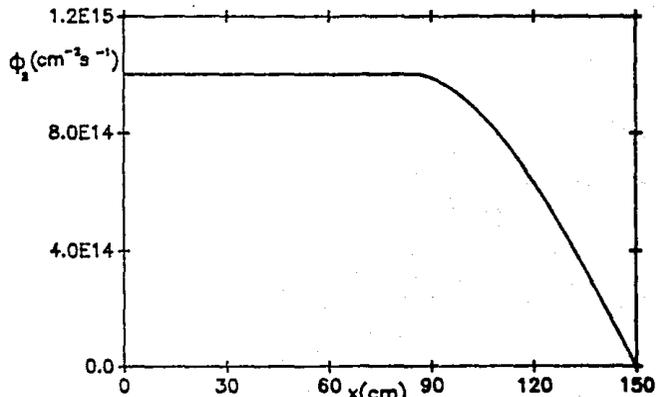


FIG. 14

CORRIENTE RAPIDA VS. POSICION, XS = 85 cm.

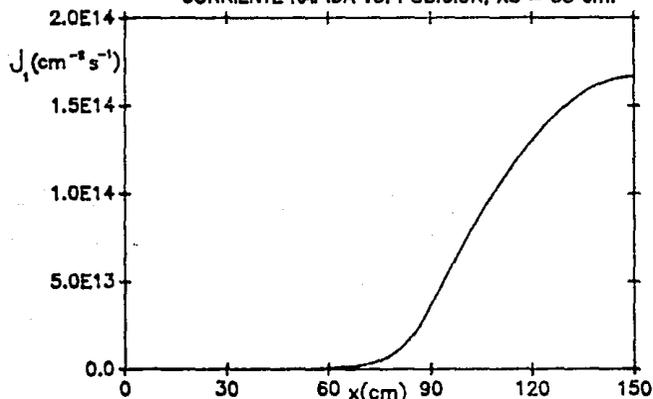


FIG. 15

CORRIENTE TERMICA VS. POSICION, XS = 85 cm.

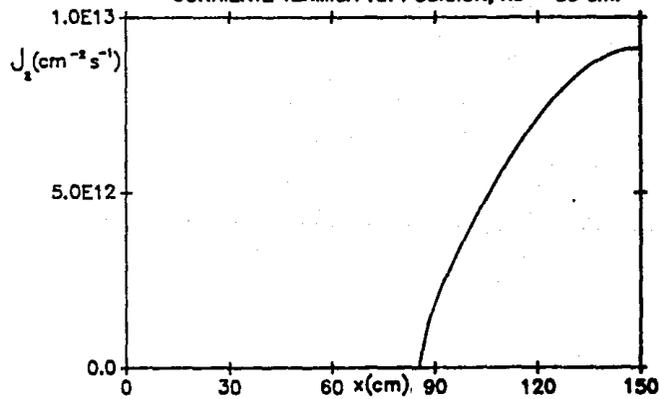


FIG. 16

c) Escogiendo $u_{min} = -0.03092 \text{ cm}^{-2}$ se encuentra que el punto de salida $x_s = 130.3 \text{ cm}$. La Fig. 17 muestra el comportamiento del control óptimo. En ésta se observa que se debe introducir material absorbente de manera uniforme hasta $x = 90 \text{ cm}$ aproximadamente. De ahí, se disminuye suavemente esta cantidad hasta $x = 124 \text{ cm}$ aproximadamente, donde se empieza a quitar material absorbente y a partir del punto de salida, $x_s = 130 \text{ cm}$ el control óptimo es el control mínimo.

La fig. 18 muestra que $\lambda_3(x_s) > 0$, lo cual confirma que u^o fuera de la restricción es igual a u_{min} . En la fig. 19 se observa que se cumplen las condiciones $\lambda_1(x_s) - \lambda_1(H/2) = \lambda_2(H/2) = 0$.

La figura 21 exhibe el comportamiento del flujo térmico. Este es igual al flujo térmico máximo $\phi_{max} = 10^{15} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ hasta el punto de salida, después cae a cero en 150 cm . El flujo rápido es mayor que el térmico, cayendo a cero suavemente como lo exhibe la fig. 20.

La figura 22 ilustra la corriente rápida, ésta pareciera ser igual a cero hasta 90 cm aproximadamente, pero en realidad es muy pequeña hasta este punto donde aumenta al acercarse a la orilla del reactor. La corriente térmica es igual a cero hasta 130 cm , el punto de salida, donde aumenta, como lo muestra la fig. 23.

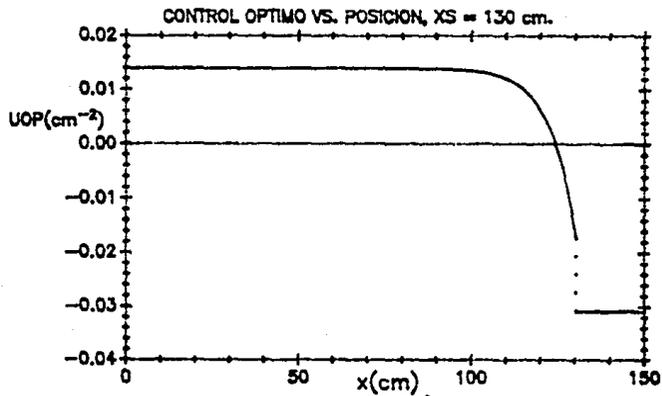


FIG. 17

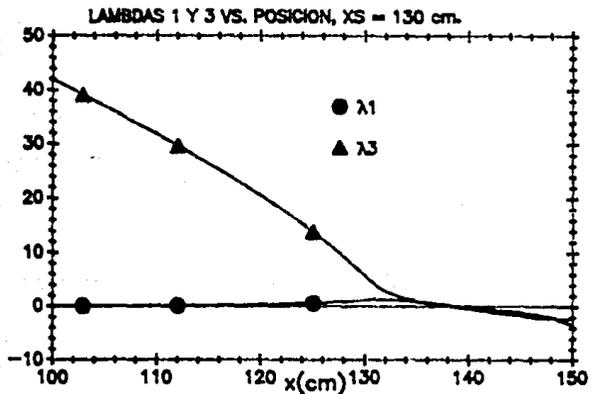


FIG. 18

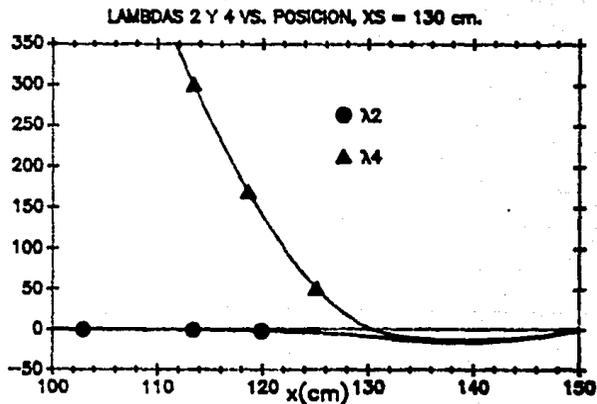


FIG. 19

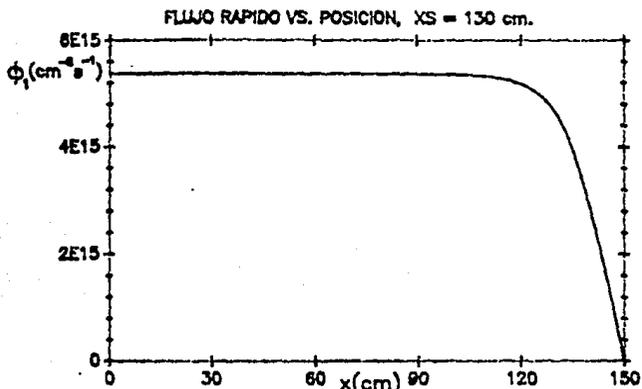


FIG. 20

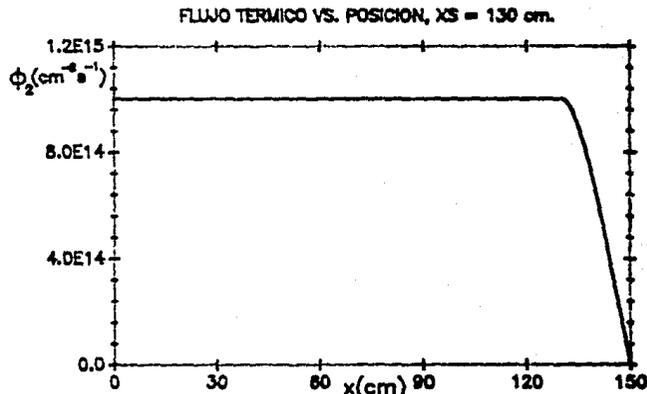


FIG. 21

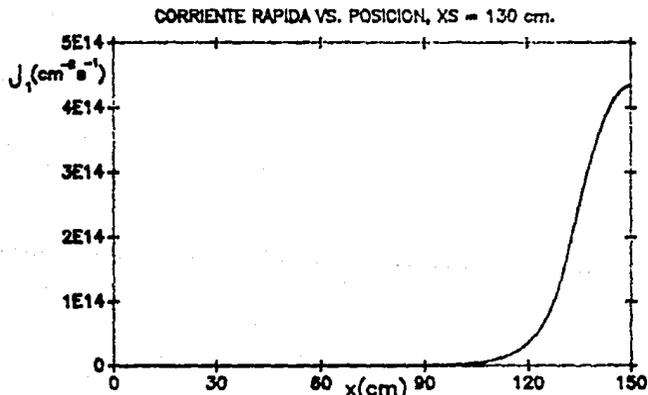


FIG. 22

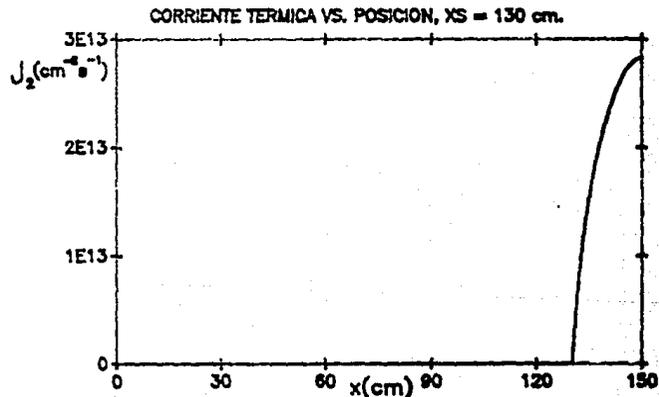


FIG. 23

d) Utilizando los valores de la Tabla I y una $u^{op} = -2.2717 \times 10^{-2} \text{cm}^{-2}$ se obtiene que el punto de salida es de 145.2 cm.

Cabe decir, que el método de Newton no converge para valores del control menores al indicado. Por lo que no se encontraron puntos de salida mayores de 145 cm.

En la gráfica 24 se observa que el control óptimo permanece casi constante hasta que después de los 120 cm del centro del reactor, baja bruscamente, siendo discontinuo en el punto de salida y teniendo un valor igual a $u^{op} = -2.2717 \times 10^{-2} \text{cm}^{-2}$ de 145 cm a 150 cm.

Las funciones adjuntas (gráficas 24 y 25) cumplen con las condiciones $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(H/2) = 0$, $\lambda_4(H/2) = 0$ y $\lambda_4(x_s) = 0$. Nótese que $\lambda_4(x)$ es decreciente alrededor del punto de salida, $x_s = 145$ cm. Además, encontramos que $\lambda_3(x_s) > 0$. De la ec. (3.56), esto confirma que $u^{op} = u_{min}$.

El flujo térmico (fig. 28) permanece constante e igual a $10^{15} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ desde el centro hasta 145 cm, donde cae bruscamente, siendo igual a cero en la orilla del reactor. El flujo rápido (fig. 20) es mayor y empieza a decrecer desde 100 cm, aproximadamente.

En las fig. 29 y 30 se muestra la corriente rápida y térmica. Ya que el flujo rápido empieza a decrecer en aproximadamente 100 cm, la corriente rápida comienza a crecer a partir de este punto. De la misma manera, la corriente térmica crece bruscamente a partir de 145 cm. Nótese que la magnitud de las corrientes crece cuando el punto de salida se acerca a la orilla del reactor. Esto es debido a que los flujos tienen que disminuir más rápido a cero cuando el punto de salida se acerca a la orilla del reactor.

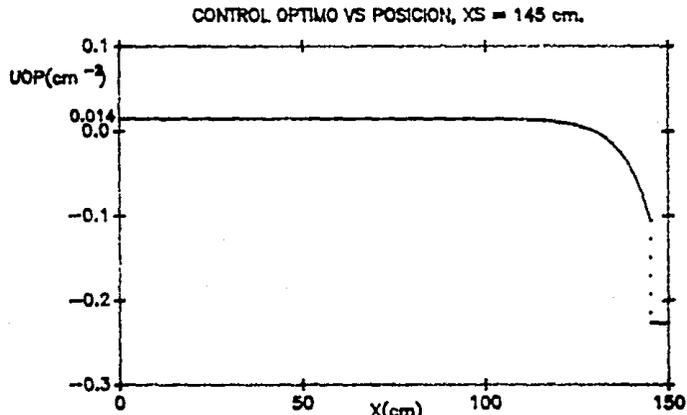


FIG. 24

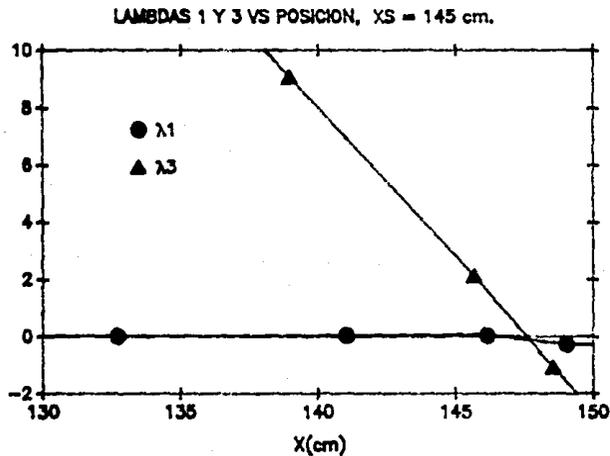


FIG. 25

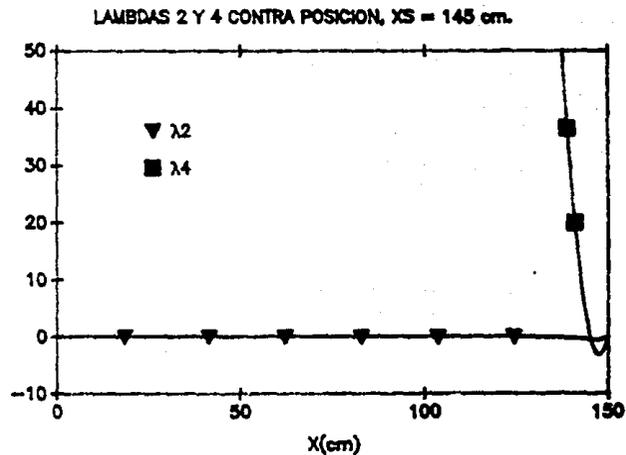


FIG. 26

FLUJO RAPIDO VS POSICION, XS = 145 cm.

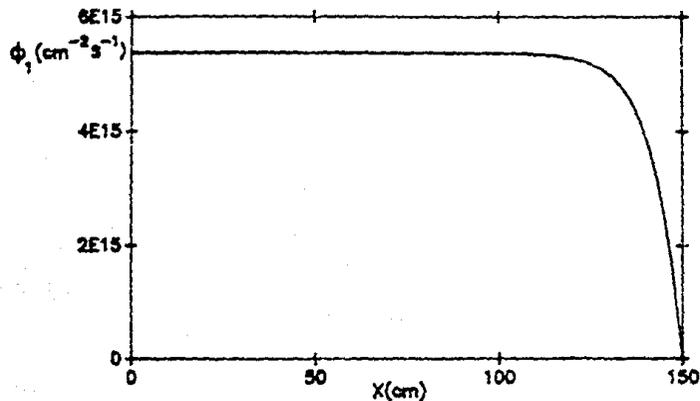


FIG. 27

FLUJO TERMICO VS POSICION, XS = 145 cm.

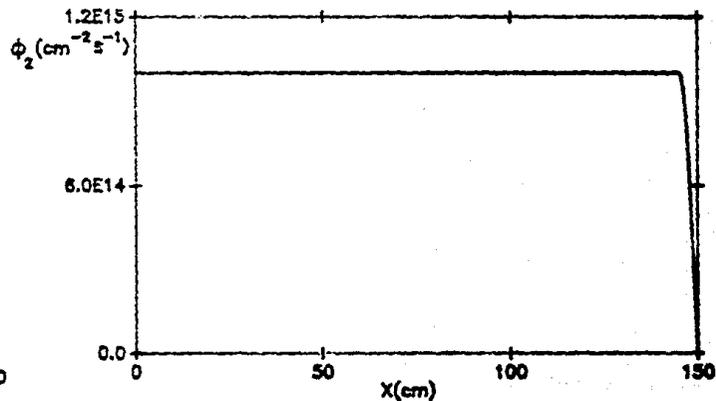


FIG. 28

CORRIENTE RAPIDA VS POSICION, XS = 145 cm.

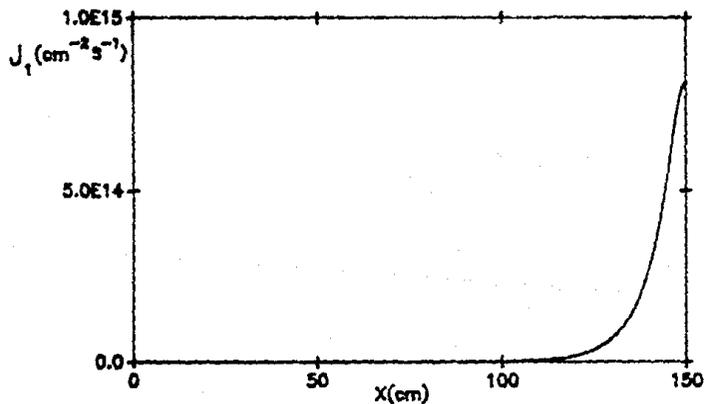


FIG. 29

CORRIENTE TERMICA VS POSICION, XS = 145 cm.

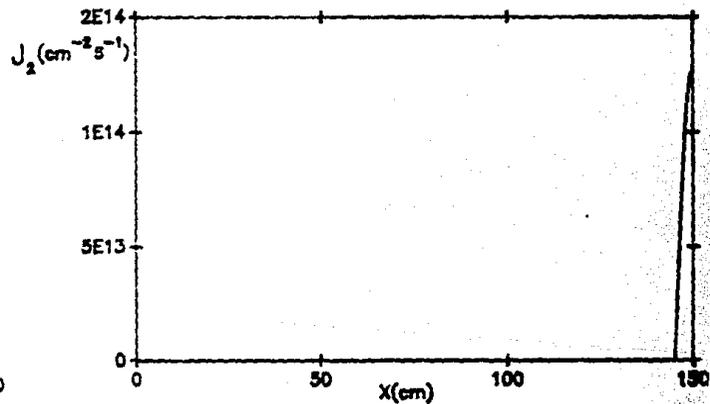


FIG. 30

IV.3. DISCUSION DE LOS RESULTADOS.

La gráfica 1 muestra que conforme el punto de salida crece, la sección de control fuera de la restricción decrece. La gráfica 2 enseña que λ_2 es positiva para todos los valores de el punto de salida dentro del intervalo de trabajo, esto es de 0 a 150 cm, por lo que el control óptimo inmediatamente fuera de la restricción en ese intervalo es

$$u^{op} = u^{min} \quad (4.4)$$

Esto nos dice que mientras menos posibilidad haya de sacar material absorbente del reactor, el punto de salida de la restricción debe estar más cerca del centro del reactor.

Puede entenderse que el control óptimo fuera de la restricción sea el infimo de la región de control mediante el siguiente argumento :

La potencia es proporcional al área bajo la gráfica de flujo térmico contra la posición. Así, mientras más grande sea la región donde el flujo térmico es igual al flujo térmico máximo, ϕ_{max} , la potencia será mayor. Pero el flujo térmico debe valer cero en la orilla del reactor, por lo que el flujo térmico decrece con una trayectoria convexa, abarcando de esta manera el mayor área posible, como lo muestran las gráficas 7, 14, 21 y 28 (ϕ_2 vs. x). Al tratar de que el flujo térmico crezca de cero a su valor máximo, es necesario quitar la mayor cantidad de material absorbedor de la orilla del reactor, por lo tanto el control óptimo permitido fuera de la restricción es la cota inferior de la región de control. Esto es ilustrado en las gráficas 3, 10, 17 y 24. El control óptimo dentro de la restricción esta determinado por ésta, o sea, este debe mantener al flujo térmico como el flujo máximo posible (ec. 3.22) mientras que el límite entre las dos regiones, x_s , es determinada de tal manera que mantenga la criticidad del sistema (fue por esta razón por lo que a la ec. 4.1 se le llamó ec. de criticidad).

Así mientras el punto de salida se acerca a la orilla del reactor el control óptimo fuera de la restricción disminuye para mantener la criticidad del

sistema, como lo muestra la gráfica 1.

En la gráfica 3, el punto de salida esta en cero. Esta situación es la de un reactor homogéneo. Los valores del control óptimo encontrados para estos casos corresponden a los hallados utilizando la ec. (A.30) del Apéndice A, la cual es obtenida al buscar la criticidad de un reactor homogéneo. Mientras que en las gráficas 10, 17 y 24 se logra apreciar la discontinuidad del control óptimo en el punto de salida.

Nótese en estas gráficas que el valor máximo del control óptimo crece al disminuir u_{min} . Por lo que es necesario revisar que este valor no sea mayor a u_{max} la cota superior de control. En caso contrario la solución hallada no se puede implementar.

Para las gráficas de las variables adjuntas (4, 5, 11, 12, 18, 19, 25 y 26 se muestra que estas cumplen con las condiciones $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(H/2) = 0$ y $\lambda_4(H/2) = 0$ mientras que $\lambda_3(x_s) > 0$ para todos los casos.

El flujo térmico (graf. 7, 13, 21, 28) cumple con la restricción ($\phi_2 = \phi_{max}$) y decae a cero en la orilla del reactor en forma convexa como ya hablamos comentado. El flujo rápido es un poco mayor y sigue el mismo comportamiento (graf. 6, 13, 20 y 27).

Dada la restricción de que el flujo térmico tenga un valor máximo en la región central del reactor, en esa región el flujo térmico es constante, por lo que la corriente térmica es cero en esa región, aumentando después del punto de salida (graf. 9, 16, 23, 30). La corriente rápida se comporta de manera semejante (graf. 8, 15, 22, 29) aparentemente, en realidad, aunque el aumento de la corriente rápida dentro de la restricción es pequeño para poder ser apreciado, éste es notorio al acercarse al punto de salida.

Al acercarse el punto de salida a la orilla del reactor, las corrientes crecen ya que los flujos se mantienen más sobre la restricción y la pendiente de estos hacia cero crece.

CAPITULO V. CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha aplicado la teoría de control óptimo con éxito para encontrar la distribución de material absorbente que maximiza la potencia de un reactor nuclear tipo *slab* bajo la restricción de que el flujo térmico de neutrones no sobrepase nunca un valor predeterminado, teniendo en cuenta que la cantidad de material absorbente que se puede añadir o sustraerse a lo largo del reactor (v. gr. barras de control) está acotada entre un valor mínimo y máximo.

Se presentaron dos casos principales usando valores típicos de los parámetros de un reactor de agua ligera, diferenciándose solamente en el valor de la sección macroscópica de absorción térmica. En cada caso se escogieron tres situaciones diferentes correspondientes a diferentes valores del mínimo valor que la variable de control u^{op} podía tener, ya que se encontró que la distribución óptima depende de este valor.

Se observa que el valor máximo de la cantidad de material absorbedor que se puede añadir al sistema, juega sólo un papel que podríamos llamar de comparación. Puesto que el valor máximo actual que se añade localmente al sistema está dado por el valor del control óptimo sobre la restricción en el centro del sistema; así si éste valor es mayor que u_{max} para ese sistema, entonces no existe solución óptima con las características que pedimos en este trabajo, es decir, $\phi_2(0) = \phi_{max}$. Entonces, el problema de control óptimo debe ser planteado con la condición $\phi_2(0)$ libre. Sin embargo, esta situación podría considerarse como no común puesto que un reactor nuclear debe ser siempre diseñado con un exceso de reactividad negativa.

Como se ha podido observar en esta tesis, dado que la solución analítica a problemas de control óptimo involucra resolver un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, con valores iniciales y finales, este tipo de soluciones es, en general, no accesible excepto en sistemas lineales de bajo orden.

Cuando la solución analítica no es posible de obtenerse ó simplemente no

es práctica, es necesario usar algoritmos numéricos tales como programación lineal, métodos de gradientes conjugados...etc..

**A. CONSIDERACIONES SOBRE LA EXISTENCIA DE LA SOLUCION
A LA ECUACION DE CRITICIDAD.**

En esta subsección se encontrarán condiciones necesarias para la existencia de solución en u^{op} de la ecuación de criticidad (ec. 3.126). Para que la solución exista es necesario que los signos de ambos lados de la ecuación sean iguales. La ecuación de criticidad es :

$$\begin{aligned} & [P_2 - (a_4 + u^{op})] P_2^{1/2} \tanh \left(P_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & - [P_1 - (a_4 + u^{op})] P_1^{1/2} \tanh \left(P_1^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & = (P_1 - P_2) a_1^{1/2} \coth \left(a_1^{1/2} x_s \right). \end{aligned} \quad (A.1)$$

Recordando que :

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[a_1 + a_4 + u^{op} + \left((a_1 + a_4 + u^{op})^2 - 4(-a_2 a_3 + a_1(a_4 + u^{op})) \right)^{1/2} \right] \quad (A.2)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[a_1 + a_4 + u^{op} - \left((a_1 + a_4 + u^{op})^2 - 4(-a_2 a_3 + a_1(a_4 + u^{op})) \right)^{1/2} \right] \quad (A.3)$$

las cuales puede presentarse como :

$$P_1 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + u^{op}) + \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 - (a_4 + u^{op}))^2 + 4a_2 a_3} \quad (A.4)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + u^{op}) - \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 - (a_4 + u^{op}))^2 + 4a_2a_3} \quad (A.5)$$

Dado que a_1, a_2, a_3 y a_4 son positivas :

$$P_1 - (a_4 + u^{op}) = \frac{1}{2} (a_1 - (a_4 + u^{op})) + \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 - (a_4 + u^{op}))^2 + 4a_2a_3} > 0 \quad (A.6)$$

$$P_2 - (a_4 + u^{op}) = \frac{1}{2} (a_1 - (a_4 + u^{op})) - \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 - (a_4 + u^{op}))^2 + 4a_2a_3} < 0 \quad (A.7)$$

y

$$P_1 - P_2 = \sqrt{(a_1 - (a_4 + u^{op}))^2 + 4a_2a_3} > 0 \quad (A.8)$$

Dado que $0 \leq x_s \leq H/2$ el miembro de la derecha de la ec. de criticidad (ec. A.1) es positivo siempre, el lado izquierdo debe ser mayor que cero. Considerando los signos de P_1 y P_2 :

- 1) Si $a_1 + a_4 + u^{op} > 0$ y $u^{op} > \frac{a_2a_3}{a_1} - a_4 \rightarrow P_1 > 0$ y $P_2 > 0$
- 2) Si $a_1 + a_4 + u^{op} > 0$ y $u^{op} < \frac{a_2a_3}{a_1} - a_4 \rightarrow P_1 > 0$ y $P_2 < 0$
- 3) Si $a_1 + a_4 + u^{op} < 0$ y $u^{op} > \frac{a_2a_3}{a_1} - a_4 \rightarrow P_1 < 0$ y $P_2 < 0$
- 4) Si $a_1 + a_4 + u^{op} < 0$ y $u^{op} < \frac{a_2a_3}{a_1} - a_4 \rightarrow P_1 > 0$ y $P_2 < 0$

1) No es posible, dado que $P_1 > P_2$, $\tanh(P_2^{1/2}(H/2 - x_s)) < \tanh(P_1^{1/2}(H/2 - x_s))$ y el término de la izquierda de la ecuación de criticidad sería negativo.

3) No es posible ya que $a_4 + u^{op}$ sería menor que $-a_1$ o sea $a_4 + u^{op}$ sería negativa y $a_4 + u^{op} > a_2a_3/a_1$ implica que este término es positivo lo cual es una contradicción.

No importa en 2) y 4) si $a_1 + a_4 + u^{op}$ es positiva o negativa. Por lo que para que el miembro de la derecha y el de la izquierda de la ecuación

de criticidad tengan el mismo signo se necesita que :

$$u^{op} < \frac{a_2 a_3}{a_1} - a_4 \quad (A.9)$$

resultando de esto que $P_1 > 0$ y $P_2 < 0$. Dado que $P_2^{1/2}$ es un número imaginario puro, definimos R_2 tal que $R_2 \equiv -P_2$. Por lo que la ecuación de criticidad resulta :

$$\begin{aligned} & (P_2 - (a_4 + u^{op})) P_2^{1/2} \tanh \left(P_2^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & + (P_1 - (a_4 + u^{op})) P_1^{1/2} \tanh \left(P_1^{1/2} (H/2 - x_s) \right) \\ & = (P_2 - P_1) a_1^{1/2} \coth \left(a_1^{1/2} x_s \right). \end{aligned} \quad (A.10)$$

dado que $P_1 - P_2 < 0$ y que para $x_s \in [0, H/2]$, $\coth(a_1^{1/2} x_s) \geq 1$ se tiene que cumplir :

$$\begin{aligned} & (R_2 + (a_4 + u^{op})) R_2^{1/2} \\ & \geq (P_1 - (a_4 + u^{op})) P_1^{1/2} \tanh(P_1^{1/2} (H/2 - x_s)) + a_1^{1/2} (P_1 - P_2) \end{aligned} \quad (A.11)$$

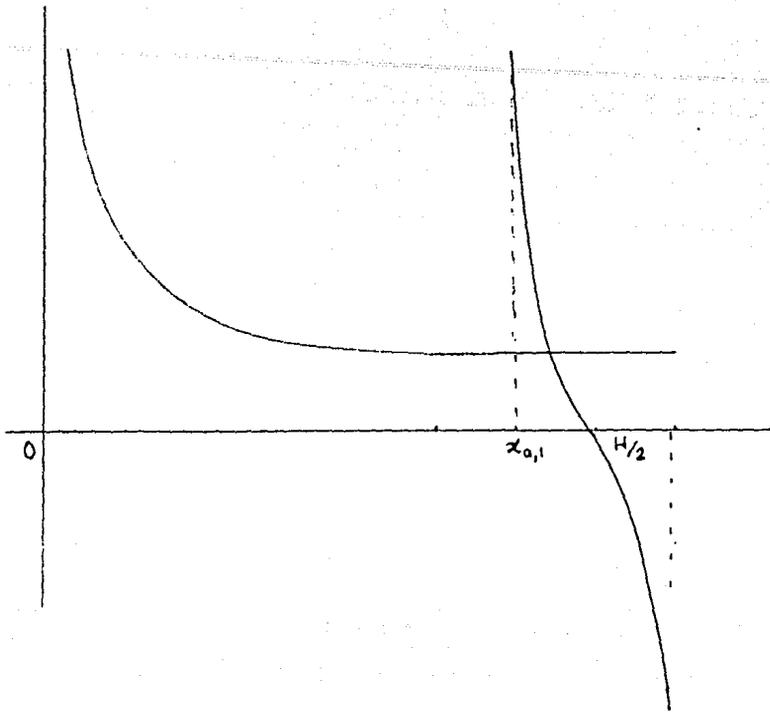


fig. (A.1)

Se puede apreciar que la solución existe si la primera asíntota de la tangente $x_{a,1} \geq 0$; esto es :

$$R_2^{1/2}(H/2 - x_s) = \pi/2 \quad \rightarrow \quad x_s = \frac{H}{2} - \frac{\pi}{2R_2^{1/2}} \geq 0$$

$$\text{o sea} \quad R_2 \geq \frac{\pi^2}{H^2} \quad (\text{A.12})$$

Dado que el punto de salida determina el intervalo durante el cual el flujo térmico sea igual al flujo máximo $\phi_{\text{máx}}$, mientras el punto de salida esté más cercano a la orilla del reactor la potencia será mayor. Por lo que la solución óptima será el punto de salida que este más cerca de la orilla.

Es interesante estudiar cual es la ecuación de criticidad para un reactor lineal, homogéneo, en estado estacionario. A éste reactor lo podemos con-

siderar regulado por un control constante u . Este sería el caso de un reactor con un punto de salida $x_s = 0$. Las ecuaciones de difusión (ecs. 1.90 y 1.91) para este reactor son :

$$D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2}(x) - (\Sigma_{A_2} + \Sigma_c) \phi_2(x) - (\gamma_I + \gamma_X) \Sigma_{F_2} \phi_2(x) + \Sigma_{S_{12}} \phi_1(x) = 0, \quad (A.13)$$

$$D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2}(x) - \Sigma_{A_1} \phi_1(x) - \Sigma_{S_{12}} \phi_1(x) + \nu \Sigma_{F_2} \phi_2(x) = 0, \quad (A.14)$$

donde Σ_c es la sección de control, la cual es constante a lo largo del reactor.

Utilizando las convenciones en (3.1) y (3.6) las ecuaciones de difusión pueden ser escritas como

$$\frac{d^2 \phi_2}{dx^2}(x) - (a_4 + u) \phi_2(x) + a_3 \phi_1(x) = 0, \quad (A.15)$$

$$\frac{d^2 \phi_1}{dx^2}(x) - a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) = 0, \quad (A.16)$$

e imponiendo las siguientes condiciones :

$$\phi_1(H/2) = 0 \quad (A.17)$$

$$\frac{d\phi_1}{dx}(0) = 0 \quad (A.18)$$

$$\phi_2(0) = \phi_{max} \quad (A.19)$$

$$\phi_2(H/2) = 0 \quad (A.20)$$

Estas son ecuaciones de segundo grado, cuya solución es del tipo

$$\sum_0^{\infty} A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x). \quad (A.21)$$

Dado que nuestro sistema es simétrico, las soluciones son funciones pares, entonces los coeficientes B_n son igual a cero. Proponiendo

$$\phi_1(x) = \sum_0^{\infty} A_n \cos(\omega_n x) \quad (A.22).$$

el argumento anterior es equivalente a utilizar (A.18). En un reactor en estado estacionario, la solución viene expresada por el primer armónico, por lo que escogemos $n=0$, lo cual nos elimina una condición más. Utilizando (A.17) se halla :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{H}. \quad (A.23)$$

por lo que

$$\phi_1(x) = A_0 \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right) \quad (A.24)$$

Despejando ϕ_2 de (A.16), encontramos que

$$\phi_2(x) = \frac{1}{a_2} \left[a_1 \phi_1(x) - \frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2} \right] \quad (A.25)$$

y sustituyendo ϕ_1 en la ecuación anterior :

$$\phi_2(x) = \frac{A_0}{a_2} \left(a_1 + \frac{\pi^2}{H^2} \right) \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right). \quad (A.26)$$

Utilizando (A.19) se encuentra que :

$$A_0 = \frac{\phi_{max} a_2}{a_1 + \frac{\pi^2}{H^2}}, \quad (A.27)$$

entonces

$$\phi_1(x) = \frac{\phi_{max} a_2}{a_1 + \frac{\pi^2}{H^2}} \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right), \quad (A.28)$$

$$\phi_2(x) = \phi_{max} \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right), \quad (A.29)$$

por lo que sustituyendo en (A.15) y despejando u , esto es, la cantidad de material absorbente que necesitamos añadir o quitar para que al sistema sea crítico, encontramos que

$$u = \frac{a_2 a_3}{a_1 + \frac{\pi^2}{H^2}} - a_4 - \frac{\pi^2}{H^2}. \quad (A.30)$$

Si el reactor es infinito, la condición anterior se convierte en la expresión (A.9), la cual nos da una cota superior sobre la variable de control u^{op} . Esto sugiere que la ec. de criticidad tiene soluciones para puntos de salida entre cero y $H/2$, si los valores de u^{op} se toman menores al que da (A.30). En el capítulo IV se ilustra esto.

APENDICE B.

El siguiente programa fue ejecutado en la computadora microVAX del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM.

```
C PROGRAMA QUE CALCULA LA DISTRIBUCION OPTIMA DE CONTROL
C PARA MAXIMIZAR LA POTENCIA DE UN REACTOR NUCLEAR.
C EL PROGRAMA ESTA ESTRUCTURADO DE TAL MANERA QUE DADO
C LOS PARAMETROS DEL REACTOR Y LA VARIABLE DE CONTROL
C MINIMA, ENCUENTRA EL PUNTO DE SALIDA A TRAVES DEL METODO
C DE NEWTON Y CALCULA LAS DISTRIBUCIONES CORRESPONDIENTES
C A ESE PUNTO.

C PROGRAMA QUE CALCULA LA SOLUCION A LA EC. DE CRITICIDAD
IMPLICIT REAL*16 (A-H,O-Z)
DIMENSION XS(600),Z1(600),Z2(600),Z3(600),Z4(600)
DIMENSION XX(ECO),Z1N(600),Z2N(600)
DIMENSION VJ1(600),VJ2(600),UOPD(600)
DIMENSION VLAM1(600),VLAM2(600),VLAM3(600),VLAM4(600)
C XS PUNTO DE SALIDA
C X PUNTO DE SALIDA DEFINITIVO
C H ANCHO DEL REACTOR
C N NUMERO DE PUNTOS EN LA RESTRICCION
C M NUMERO DE PUNTOS FUERA DE LA RESTRICCION
C PHIM FLUJO MAXIMO
C SC SECCION TRANSVERSAL MACROSCOPICA DE CONTROL
C UOP VARIABLE DE CONTROL FUERA DE LA RESTRICCION
C D1 COEFICIENTE DE DIFUSION RAPIDO
C D2 COEFICIENTE DE DIFUSION TERMICO
C SA1 SECCION DE ABSORCION MACROSCOPICA RAPIDA
C SA2 SECCION DE ABSORCION MACROSCOPICA TERMICA
C SF2 SECCION MACROSCOPICA DE FISION TERMICA
C MULTIPLICADO POR EL NUMERO PROMEDIO DE NEUTRONES
C PRODUCIDOS POR FISION.
C SR SECCION MACROSCOPICA DE TRANSFERENCIA
C DEL GRUPO RAPIDO AL TERMICO
C GAMX RENDIMIENTO DEL XENON
C GAM1 RENDIMIENTO DEL YODO
C Z1,...,Z4 VARIABLES DE ESTADO
C VLAM1,...,VLAM4 VARIABLES ADJUNTAS
C VJ1 Y VJ2 CORRIENTES RAPIDA Y TERMICA
C UOPD VARIABLE DE CONTROL
C N ES EL NUMERO DE PUNTOS DENTRO DE LA RESTRICCION
C M ES EL NUMERO DE PUNTOS FUERA DE LA RESTRICCION

C -----
C ESTA PARTE INTRODUCE LOS PARAMETROS
C -----
OPEN(UNIT=7, FILE='STR.DAT', STATUS='OLD', FORM='FORMATTED')
OPEN(UNIT=10, FILE='SOL.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
READ(7,1001)H,SC,D1,D2
READ(7,1001)SA1,SA2,SF2,SR
READ(7,1001)GAMX,GAM1,PHIM,TT
READ(7,1000)H,M
```

C -----

```

C  ESTA PARTE CALCULA LAS CONSTANTES DE LAS EC. DE DIFUSION
C  -----
1B  A1=(SR+SA1)/D1
    A2=SF2/D1
    A3=GR/D2
    A4=(SA2+(GAMX+GAMI)*(SF2/2.0))/D2
    UCP=CC/D2
    PP=A1+A4+UCP
    PR=QSQRT((A1-A4-UCP)**2+4.*A2*A3)
    P1=(PP+PR)/2.
    R2=(-PP+PR)/2.
    P2=-R2
C  -----
C  EN CASO DE QUE P2 SEA POSITIVO, LA SIGUIENTE INSTRUCCION
C  TERMINA EL PROGRAMA
C  -----
20  IF(P2.GT.0) GOTO 3000
C  -----
C  LA POSICION DE LA ASINTOTA MAS CERCANA A LA ORILLA DEL
C  REACTOR ES USADA PARA PROPONER EL PUNTO INICIAL DEL METODO DE NEWTON
C  -----
    XA=H/2.-3.1415926536/(2.*QSQRT(R2))
    IF(XA.LT.H/2.) GOTO 21
C  -----
C  SI LA ASINTOTA ANTERIOR CRUZA POR CERO FUERA DEL REACTOR
C  LA SIGUIENTE ASINTOTA HACIA EL CENTRO DEL MISMO ES USADA
C  -----
    XA=H/2.-3.*3.1415926536/(2.*QSQRT(R2))
C  -----
C  SE ESCOGE EL PUNTO INICIAL CERCA DE LA ASINTOTA
C  -----
21  XS(1)=XA+XA/100.
C  -----
C  EL METODO DE NEWTON
C  -----
30  DO 100 I=1,500
C  -----
C  Y ES LA ECUACION DE CRITICIDAD
C  -----
    UT1=(P1+R2)*QSQRT(A1)*COTH(QSQRT(A1)*XS(I))
    UT2=(R2+A4+UCP)*QSQRT(R2)*QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-XS(I)))
    UT3=(P1-A4-UOP)*QSQRT(P1)*QTANH(QSQRT(P1)*(H/2.-XS(I)))
    Y=UT1-UT2+UT3
C  -----
C  EDY(I) ES LA DERIVADA DE LA EC. DE CRITICIDAD
C  -----
    VT1=(P1+R2)*A1*(1.-(COTH(QSQRT(A1)*XS(I)))**2)
    VT2=- (R2+A4+UCP)*R2*(1.+(QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-XS(I))))**2)
    VT3=- (P1-A4-UOP)*P1*(1.-(QTANH(QSQRT(P1)*(H/2.-XS(I))))**2)
    DDY=VT1-VT2+VT3
C  -----
C  EL ALGORITMO DEL METODO
C  -----

```

```

XS(I+1)=XS(I)-Y/DDY
C -----
C SALIDA DEL CICLO
C -----
IF(QABS((XS(L)-XS(I+1))/XS(I)).LT.TT)GOTO 300
100 CONTINUE
C -----
C SI EL METODO NO CONVERGE EL PROGRAMA SE DETIENE
C -----
GOTO 3000

C -----
C -----
C ESTA PARTE SE OCUPA DE TABULAR LAS VARIABLES DE ESTADO
C -----
C -----
200 X=XS(I+1)

C -----
C EVALUACION DE CONSTANTES QUE DEPENDEN DEL PUNTO DE SALIDA
C -----
210 DR=QSQRT(R2)*QTANH(QSQRT(P1)*(H/2.-X))
IQSQRT(P1)*QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-X))
TT1=QTANH(QSQRT(P1)*(H/2.-X))
TT2=QSQRT(R2)*QTANH(QSQRT(P1)*(H/2.-X))
TT3=QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-X))
TT4=QSQRT(P1)*QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-X))
T3=A2*PHIM+QSQRT(P1*R2)*(P1*R2)
T4=QSQRT(A1)*QSINH(QSQRT(A1)*X)*(A1+R2)*(A1-P1)*DR
AA1=-T3/T4
T7=QCOSH(QSQRT(P1)*(H/2.-X))
T8=QCOS(QSQRT(R2)*(H/2.-X))
T6=(A1-P1)*T7
T6=(A1+R2)*T8
BP=(A2*A3+A1*(A1-P1))*QSQRT(P1)
BR=(A2*A3+A1*(A1+R2))*QSQRT(R2)
BUL=A2*A3-A1*(A1+UOP)
BU=BUL*COTH(QSQRT(A1)*X)/QSQRT(A1)
D11=QSQRT(P1)*R2+BR+QSQRT(R2)*P1*BP
D2ME=A1+QSQRT(R2)*P1-BR
D3M=A1*P1+QSQRT(R2)-BR
D2MAS=A1+QSQRT(P1)*R2+BP
D4=-BR+BU+QCOSH(QSQRT(P1)*(H/2.-X))
1 -QSINH(QSQRT(P1)*(H/2.-X))*
1 (D11+BU*BP/QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-X)))
D5=-D11+(D3M+A1*BU/QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-X)))
1 +BR+BU+D2MAS/QSINH(QSQRT(R2)*(H/2.-X))+
1 D2ME*QEXP(QSQRT(P1)*(H/2.-X))
1 *(BR+BU+D11+BU*BP/QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-X)))
F1=(D5/(2.*D11+D4))*QEXP(-QSQRT(P1)*(H/2.-X))
FA=D5/(2.*D4)+D2ME
F2=FA*(1./D11)*QEXP(QSQRT(P1)*(H/2.-X))
F4=-A1/BR
1 +BP*D2ME*QEXP(QSQRT(P1)*(H/2.-X))/(BR+D11)

```

```

1 +BP*D5*QSINH(QSQRT(P1)*(H/2.-X))/(BR*D11*D4)
  F3=F4/QTAN(QSQRT(R2)*(H/2.-X))
1 +D2MAS/(D11*QSIN(QSQRT(R2)*(H/2.-X)))
  C3=A3*(F1+F2+F3)/QSINH(QSQRT(A1)*X)
  C4=(F1+F2)*(A1-P1)+F3*(A1+R2)+X
1 +C3*A2*QSINH(QSQRT(A1)*X)/A1
  C5=C4*X-(X**2)/2.-C3*A2*QCOSH(QSQRT(A1)*X)/(A1**(3./2.))
C -----
C EL INCREMENTO EN LA POSICION
C -----
  DELXN=X/QFLOAT(N)
  DELXM=(X/2.-X)/QFLOAT(M)
C -----
C LA DISTRIBUCION DENTRO DE LA RESTRICCION
C -----
  XX(1)=0.0
300 DO 400 I=1,N+1
  Z1(I)=A1+QCOSH(QSQRT(A1)*XX(I))+(A2*PHIM/A1)
  Z2(I)=QSQRT(A1)*A1+QSINH(QSQRT(A1)*XX(I))
  Z3(I)=PHIM
  Z4(I)=0.0
  UOPD(I)=A3+Z1(I)/PHIM-A4
  Z1N(I)=Z1(I)/Z1(1)
  Z2N(I)=1
  VJ1(I)=-D1*Z2(I)
  VJ2(I)=-D2*Z4(I)
C -----
C LAMBDA DENTRO DE LA RESTRICCION
C -----
  VLAM1(I)=C3*QSINH(QSQRT(A1)*XX(I))
  VLAM2(I)=-C3*QCOSH(QSQRT(A1)*XX(I))/QSQRT(A1)
  VLAM3(I)=-C3*A2*QSINH(QSQRT(A1)*XX(I))/A1-XX(I)+C4
  VLAM4(I)=C3*A2*QCOSH(QSQRT(A1)*XX(I))/A1**(3./2.)
1 +(XX(I)**2)/2.-C4*XX(I)+C5
  XX(I+1)=XX(I)+DELXN
400 CONTINUE
C -----
C TRAYECTORIA FUERA DE LA RESTRICCION
C -----
  XX(N+2)=X
410 DO 420 J=N+2,N+N+2
  Z1(J)=(A2*PHIM/DR)*(QSQRT(R2)*QSINH(QSQRT(P1)*(H/2.-XX(J)))/T5
1 -QSQRT(P1)*QSIN(QSQRT(R2)*(H/2.-XX(J)))/T6)
  Z2(J)=-(A2*PHIM*QSQRT(R2*P1)/DR)*
1 (QCOSH(QSQRT(P1)*(H/2.-XX(J)))/T5
1 -QCOS(QSQRT(R2)*(H/2.-XX(J)))/T6)
  Z3(J)=(PHIM/DR)*(QSQRT(R2)*QSINH(QSQRT(P1)*(H/2.-XX(J)))/T7
1 -QSQRT(P1)*QSIN(QSQRT(R2)*(H/2.-XX(J)))/T8)
  Z4(J)=(PHIM*QSQRT(R2*P1)/DR)*
1 (-QCOSH(QSQRT(P1)*(H/2.-XX(J)))/T7
1 +QCOS(QSQRT(R2)*(H/2.-XX(J)))/T8)
  VJ1(J)=-D1*Z2(J)
  VJ2(J)=-D2*Z4(J)

```

```

UOPD(J)=UCP
C -----
C LAMBDA FUERA DE LA RESTRICION
C -----
VLAM1(J)=A3*(F1+QEXP(QSQRT(P1)*(XX(J)-X))
1 +F2*QEXP(-QSQRT(P1)*(XX(J)-X))
1 +F3*QCOS(QSQRT(R2)*(XX(J)-X))
1 +F4*QSIN(QSQRT(R2)*(XX(J)-X))
VLAM2(J)=(-QSQRT(P1)*R2*(F1+QEXP(QSQRT(P1)*(XX(J)-X))
1 -F2*QEXP(-QSQRT(P1)*(XX(J)-X)))
1 +QSQRT(P1)*P1*(-F3*QSIN(QSQRT(R2)*(XX(J)-X))
1 +F4*QCOS(QSQRT(R2)*(XX(J)-X))+1.)*A3/BUL
VLAM3(J)=(A1-P1)*(F1+QEXP(QSQRT(P1)*(XX(J)-X))
1 +F2*QEXP(-QSQRT(P1)*(XX(J)-X))
1 +(A1+R2)*(F3+QCOS(QSQRT(R2)*(XX(J)-X))
1 +F4*QSIN(QSQRT(R2)*(XX(J)-X)))
VLAM4(J)=(BP*(F1+QEXP(QSQRT(P1)*(XX(J)-X))
1 -F2*QEXP(-QSQRT(P1)*(XX(J)-X))
1 +BR*(-F3*QSIN(QSQRT(R2)*(XX(J)-X))
1 +F4*QCOS(QSQRT(R2)*(XX(J)-X)))+A1)/BUL
XX(J+1)=XX(J)+DELX
120 CONTINUE
C -----
C ESTA PARTE ESCRIBE LOS RESULTADOS
C -----
WRITE(10,1107)
DO 500 I=1,N+1
WRITE(10,1002)I,XX(I),UOPD(I)
500 CONTINUE
DO 510 I=N+2,N+N+2
WRITE(10,1002)I,XX(I),UOPD(I)
510 CONTINUE
WRITE(10,1106)
DO 520 I=1,N+1
WRITE(10,1002)I,Z1(I),VJ1(I),Z3(I),VJ2(I)
520 CONTINUE
DO 530 I=N+2,N+N+2
WRITE(10,1002)I,Z1(I),VJ1(I),Z3(I),VJ2(I)
530 CONTINUE
WRITE(10,1109)
DO 540 I=1,N+1
WRITE(10,1002)I,VLAM1(I),VLAM2(I),VLAM3(I),VLAM4(I)
540 CONTINUE
DO 550 I=N+2,N+N+2
WRITE(10,1002)I,VLAM1(I),VLAM2(I),VLAM3(I),VLAM4(I)
550 CONTINUE
WRITE(10,1102)
WRITE(10,1001)H,SC,D1,D2
WRITE(10,1103)
WRITE(10,1001)SA1,SA2,SF2,SR
WRITE(10,1104)
WRITE(10,1001)GAMX,GAMI,TT,X
WRITE(10,1105)

```

```

WRITE(10,1001)A1,A2,A3,A4
WRITE(10,1106)
WRITE(10,1000)N,M
C -----
C  FORMATOS
C -----
1000FORMAT(/,2(2X,I3),/)
1001FORMAT(/,4(2X,D16.8),/)
1002FORMAT(1X,I3,4(2X,D16.8))
1102FORMAT(/,11X,'H',17X,'SG',15X,'D1',15X,'D2')
1103FORMAT(10X,'SA1',15X,'SA2',14X,'SF2',14X,'SR')
1104FORMAT(10X,'GAMX',14X,'GAMI',13X,'TT',15X,'XS')
1105FORMAT(10X,'A1',16X,'A2',15X,'A3',15X,'A4')
1106FORMAT(4X,'H',4X,'M')
1107FORMAT(/,3X,'I',8X,'POSICION',11X,'UOP')
1108FORMAT(/,3X,'I',9X,'PHI1',15X,'J1',17X,'PHI2',15X,'J2')
1109FORMAT(/,3X,'I',8X,'LAMBDA 1',10X,'LAMBDA 2',10X,'LAMBDA 3',
1 10X,'LAMBDA4')
3000END
C -----
C  FUNCION COTH
C -----
FUNCTION COTH(X)
IMPLICIT REAL*16 (A-H,O-Z)
COth=1./QTANH(X)
RETURN
END

```

REFERENCIAS

Las referencias están ordenadas conforme se fueron citando en la tesis, excepto de la 17 a la 20.

- [1] Duderstad, J. J. & Hamilton, L. J.; "Nuclear Reactor Analysis", (1976), John Wiley and Sons.
- [2] S. Glasstone, "La Energía Atómica", primera ed., (1963), CECSA, México.
- [3] Duderstad, J. J. & Hamilton, L. J.; *Op. cit.*, Cap. IV.
- [4] Duderstad, J. J. & Hamilton, L. J.; *Op. cit.* Cap. VII.
- [5] Duderstad, J. J. & Hamilton, L. J.; *Op. cit.* Cap. VII.
- [6] Lamarsh, J.R., "Nuclear Reactor Theory", (1966), Addison-Wesley.
- [7] Melsa, J. L. y Schultz, D. G., "State Functions & Linear Control Systems", (1969), Mc Graw-Hill, Cap. VI.
- [8] Bryson Jr., A.E., Denham, W.F. & Dreyfus, S.E.; "Optimal Programming Problems with Inequality Constraints. I: Necessary Conditions For Extremal Solutions." *AIAA JOURNAL*, Vol. 1 No. 12 (1963).
- [9] Bryson Jr., A.E., Denham, W.F. & Dreyfus, S.E.; *Op. cit.*
- [10] Pontryagin, L. S., et al.: "The Mathematical Theory of Optimal Processes", (1962), Interscience, N. Y.
- [11] Bell, D.J. y Jacobson, D.H.: "Singular Optimal Control Problems"; (1975), Academic Press.
- [12] Gabasov, R. y Kirillova, F.M.: "Higher Order Conditions For Optimality"; *SIAM J. of Control*, Vol. 10, 127(1972).
- [13] Johnson, C. D. : "Singular Solutions" *Adv. in Control Systems*, Vol. 2, (1965), Academic Press.
- [14] Kelley, H. J., Kopp, R. E. y Moyer, A. G.: "Topics in Optimization", Vol. 2, (1966), Academic Press.
- [15] H.W. Graves, Jr.: "Nuclear Fuel Management.", (1979), John Wiley & Sons.
- [16] Lamarsh, J.R., "Nuclear Reactor Theory", (1966), Addison-Wesley.

Las siguientes referencias son antecedentes de este trabajo :

- [17] Suda, N., Yamaguchi, T., Sakurai, Y.: *J. Nucl. Sci. Technol.*, 5 [9], 452-457 (1968).
- [18] Koga, R., Hattori, Y., Iwazumi, T.: *J. Nucl. Sci. Technol.*, 8 [5], pp. 267-270 (1971).
- [19] Vitela E.J., Akcasu, A. Z.: *J. Nucl. Sci. Technol.*, 20 [5], 359 (1983).
- [20] Vitela E.J.: *J. Nucl. Sci. Technol.*, 23 [12], 1045-1050 (1986).