9
2ej

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TEORIA Y PRACTICA DE LAS ANUALIDADES CIERTAS Y CONTINGENTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

FALLA DE ORIGEN

Iván Barón Ruiz

México,D.F. 1991

INDICE

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo se hizo con la finalidad, de que cualquier persona con una preparación mínima en matemáticas financieras y no sólo el alumno de la carrera de actuaría, tuviera acceso a una herramienta y guía para el estudio de las operaciones financieras que se practican a diario en nuestro entorno económico y social.

Por otra parte, en el transcurso de mi experiencia estudiantil y laboral advertí la carencia de un material sobre anualidades, que cumpliera con varias condiciones; por ejemplo, que fuera accesible en su lectura y sin recurrir en exceso a demostraciones y teoremas difíciles, que supliera las demostraciones mediante explicaciones intuitivamente comprensibles, mediante ejemplos financieros de hoy en día; realista, para que incluyese condiciones como las prevalecientes en el medio mexicano y latinoamericano, teniendo en cuenta operaciones financieras, tasas de interés, costos de inmuebles y muebles a costos verdaderos de hoy en día; actualizado, para que tuviera entre sus elementos la tecnología indispensable de la computación y las calculadoras modernas, elementos infaltables del mundo moderno.

Confío en haber logrado un trabajo que satisfaga estas características. para lo cual el trabajo se compone de seis capítulos:

a)- En el primer capítulo se ha incluído los temas de exponentes, logaritmos, progresiones y el concepto de interés, que aunque posiblemente ya sean temas conocidos por el lector, son fundamentales para la comprensión de las anualidades.

b)- En el segundo capítulo, se explica el significado de una anualidad y en especial cuando son simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer periodo de tiempo, así mismo se considera la obtención de su monto, valor actual, renta, plazo e interés en forma general.

c)- En el tercer capítulo, se estudian las anualidades anticipadas las cuales son casos específicos, como cuando los pagos e interéses se hacen por anticipado, se explica la obtención de su monto, valor actual, renta, plazo e interés.

d)- En el capítulo cuarto, se estudian las anualidades diferidas, las cuales consisten en hacer pagos que se empiezan a hacer después de cierto tiempo de haber hecho la operación financiera y se explica también, la obtención de su monto, valor actual, renta, plazo e interés.

e)- En el quinto capítulo, se estudia el caso general de anualidades que consisten en los casos en los que los periodos de pago no coinciden con los periodos de capitalización. Y por último en el capítulo seis,

f)- Se estudian las anualidades contingentes, las cuales son aquellas en las que su fecha de inicio o la de terminación o ambas dependen de algún suceso que se sabe va a ocurrir, pero no se sabe cuando. Así mismo se anexa al final una tabla de mortalidad de la experiencia mexicana de 1962-1967, con la finalidad de comprender y resolver problemas propios de las anualidades contingentes.

TEORIA Y PRACTICA DE LAS ANUALIDADES

CIERTAS Y CONTINGENTES

CAPITULO I

"FUNDAMENTOS"

1.1 Exponentes

El producto de un número real que se multiplica por si mismo, se denota como **axa o aa.** Si el mismo número se vuelve a multiplicar por si mismo, se denota como **axaxa o aaa.** Para simplificar este tipo de expresiones se acostumbra utilizar una notación común para todos tal que:

$$\mathbf{axa} = a^2$$

$$\mathbf{axaxa} = \mathbf{a}^3$$

$$\mathbf{axaxaxa} = \mathbf{a}^4$$

Donde el símbolo **a**, es llamado base y el número escrito arriba y a la derecha, es llamado exponente. El exponente indica el número de veces que la base se toma como factor.

Debido a esto, podemos decir que si **n** es un entero positivo y **a** es cualquier número real,

$$a^n = \underbrace{axaxaxaxax...a}_{n\ factores}$$

donde $\mathbf{a}^n$, se lee como: " **a elevado a la n-ésima potencia** " ya que a es la base y **n** el exponente o potencia.

Ejemplos:

$$5x5 = 5^2 = 25$$

$$2x2x2 = 2^3 = 8$$

$$(-4)(-4)(-4)(-4) = (-4)^4 = 256$$

$$(1+0.05)(1+0.05)(1+0.05)(1+0.05) = (1+0.05)^4 = 1.21550625$$

$$axaxaxaxaxbxb = a^5 x\ b^2$$

$$(1+r)(1+r)(1+r) = (1+r)^3$$

1.2 Leyes de los exponentes

Sea **a** y **b** dos números reales, distintos de cero y **m, n** dos enteros positivos, entonces se cumplen las siguientes leyes para exponentes positivos.

1.-) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2.-) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad m > n$$

3.-) $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad m < n$$

4.-) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0 = 1 \qquad m = n$$

5.-) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

6.) $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

7.-) $(a.b)^m = a^m \, . \, b^m$

NOTA:

Debe tenerse en cuenta que estas leyes han sido establecidas, solamente para exponentes enteros y positivos. Si se quiere que estas leyes sean también válidas para exponentes que no sean números enteros y positivos, es necesario establecer el significado que se debe dar a los exponentes negativos, los cuales se tratarán más adelante.

Las siguientes leyes de exponentes se pueden clasificar de la siguiente manera:

a.) **" Producto de dos potencias de la misma base "**

Para encontrar el producto de dos potencias de la misma base, elévese la base a una potencia igual a la suma de los exponentes.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

b.) **" Cociente de dos potencias de la misma base "**

Para encontrar el cociente de dos potencias de la misma base, elévese a una potencia igual al exponente del numerador, menos el exponente del denominador, esto es válido siempre que: **m > n**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad m > n$$

Para **m < n**

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad m < n$$

Para **m = n**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0 = 1 \qquad m = n$$

c.) **" Potencia de una potencia "**

Para elevar la n-ésima potencia, elévese la base a una potencia igual al producto de los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

d.) **" Potencia del cociente de dos factores "**

Para determinar la n-ésima potencia del cociente de dos factores, encuéntrese el cociente de cada factor elevado a la n-ésima potencia.

$$\left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

e.) **" Potencia del producto de dos factores "**

Para determinar la n-ésima potencia del cociente de dos factores, encuéntrese el producto de cada factor elevado a la n-ésima potencia.

$$(a.b)^m = a^m \;.\; b^m$$

1.3 Exponente cero, negativo y fraccionario

I.) EXPONENTE CERO

Sea a un número real diferente de cero, $a^0 = 1$

Esta aseveración puede demostrarse, aplicando la regla del cociente de dos potencias de la misma base. Considérese el siguiente cociente:

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

puesto que todo número dividido por sí mismo, es igual a la unidad. Ahora aplicando la regla del cociente de dos potencias se tiene:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

$(5)^{0} = 1$

$(3a)^{0} = 1$

$-4x^{0} = -4\ (1) = -4$ si x es distinto de cero

$0^{0} =$ No es aplicable.

II.) EXPONENTE NEGATIVO

Sea **m** un número entero y positivo y, por lo tanto, **-m** un número entero y negativo. Entonces, suponiendo que la ley de los exponentes del "producto de dos potencias de la misma base", sea válida para exponentes negativos, tendremos:

$$a^{m} . a^{-m} = a^{m-m} = a^{0} = 1$$

de donde

$$a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$$

y

$$a^{m} = \frac{1}{a^{-m}}$$

esto es, el significado de un exponente negativo, queda dado por la igualdad.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^{m}} \quad , \text{ a distinto de cero}$$

por lo tanto, en una fracción, cualquier factor puede ser trasladada del numerador al denominador y viseversa, siempre que se cambie el signo de su exponente.

Para comprobar esto, observe que:

$$\frac{y^3}{y^8} = y^{3-8} = y^{-5}$$

y, también

$$\frac{y^3}{y^8} = \frac{y \times y \times y}{y \times y \times y \times y \times y \times y \times y \times y} = \frac{1}{y^5}$$

por lo tanto

$$\frac{y^3}{y^8} = y^{-5} = \frac{1}{y^5}$$

numéricamente puede demostrarse utilizando el siguiente ejemplo:

$$\frac{2^4}{2^6} = 2^{4-6} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{4^2}{4^3} = 4^{2-3} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

III.) EXPONENTE FRACCIONARIO

Sea **q** un número entero y positivo; por lo tanto **1/q** una fracción positiva. Se considerará ahora el significado de $a^{1/q}$, cuando **a** es distinto de cero. Para que la ley de los exponentes "Producto de dos potencias de la misma base", sea válida para este exponente fraccionario, deberá verificarse que:

$$a^{1/q} \times a^{1/q} \times a^{1/q} \ldots \text{ q factores } = a^{1/q + 1/q + 1/q + \ldots \text{ q terminos}}$$

$$= a^{(1/q)q} = a$$

esto es, $a^{1/q}$ tiene que tener la propiedad de que su potencia de grado **q** sea igual a **a**. Entonces se define a, **a** como una raíz de índice **q** de **a**, y se escribe como:

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$$

en donde el símbolo $\sqrt{}$ se llama radical y el entero **q** es el índice de la raíz.

NOTA:

Para **q = 2**, es costumbre omitir el índice correspondiente a la operación llamada raíz cuadrada.

En general, si **p** y **q** son enteros y positivos se tiene que:

$$(a^{p/q})^q = a^{p/q(q)} \quad a^p \; ,$$

de donde, por definición,

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p = (a^{1/q})^p$$

esto es, $a^{p/q}$ significa la raíz de índice **q**, de la potencia de grado **p** de **a**. Por lo tanto, en un exponente fraccionario el númerador significa una potencia y el denominador una raíz.

Ejemplo

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4.$$

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{64})^1 = (64^{1/3})^1 = 4^1 = 4.$$

si usamos solamente la raíz principal, una potencia de exponente fraccionario, se puede calcular, elevando la potencia y la raíz en cualquier órden.

1.4 Logaritmos

Sean **N**, **b** dos números positivos, teniendo en cuenta que **b** sea diferente de 1, se dice que el logaritmo en base **b** del número **N**, es el exponente **L** de la base **b** tal que $b^L = N$. Lo siguiente se escribe como:

$$L = \log_b N$$

y se lee **"L es igual al logaritmo de N en la base b"**, por lo cual un logaritmo es un exponente. De aquí la siguiente definición:

El logaritmo de un número en una base dada, es el exponente a que se debe elevar la base para obtener el número.

Ejemplo

$$3 = \log_2 8,$$

se lee como, 3 es igual a logaritmo de 8 en la base 2 ya que,

$$2^3 = 8.$$

en la práctica se utilizan dos tipos de logaritmos: naturales cuya base es el número e = 2.718281829..., y los logaritmos comunes, cuya base es b = 10. Ambos pueden calcularse fácilmente, mediante una calculadora electrónica o mediante tablas.

Los logaritmos de base 10 son llamados logaritmos comunes y para identificarlos se utiliza el símbolo:

$$L = \log_{10} N = \log N$$

Los logaritmos naturales (base e) se simbolizan como sigue:

$$\mathbf{Ln = \log_e nat\ N}$$

Las leyes y procedimientos generales que aquí se tratarán, son aplicables de igual forma para los logaritmos naturales y los logaritmos comunes, por los que ambos pueden ser utilizados en forma indistinta.

En lo sucesivo, la palabra **"logaritmos"** se referirá a los logaritmos comunes **(base 10)**, es necesario destacar que **N** debe ser un número positivo, en tanto que el **log** N puede ser cualquier número real positivo, negativo o cero.

a.) LEYES DE LOGARITMOS

Hemos visto que un logaritmo es un exponente de base b. Por tanto, expresando las leyes de los exponentes en forma logarítmica, obtendremos las siguientes leyes:

1.- El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números, es decir,

$$\log(M \times N) = \log M + \log N$$

2.- El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor; es decir:

$$\log\left(\frac{M}{N} \right) = \log M - \log N$$

3.- El logaritmo de la n-ésima potencia de un número positivo es igual a **n** veces el logaritmo del número, es decir,

$$\log M^n = n \log M$$

donde n puede ser cualquier número real.

4.- El logaritmo de la raíz n-ésima positiva real de un número positivo, es igual al resultado de dividir entre n el logaritmo del número, es decir:

$$\log M^{1/n} = \frac{1}{n} \log M.$$

b.) ANTILOGARITMO

Si **L = log N, N** es llamado el antilogaritmo de **L** y se denota como:

$$N \text{ antilog } L \text{ cuando } L = \log N$$

por ejemplo

$$200 = \text{antilog } 2.301030 \quad \text{ya que } \log 200 = 2.301030$$

El antilogaritmo de un logaritmo dado, puede ser determinado utilizando una calculadora o por medio de tablas.

c.) CALCULOS CON LOGARITMOS

Estableceremos ahora las ventajas de los logaritmos al efectuar operaciones aritméticas. De acuerdo con las propiedades de los logaritmos ya dados.

En esta sección se presentará una serie de problemas resueltos con las soluciones de los problemas.

Ejemplos

a) $$\frac{346 \times 0.0269}{45.21}$$

b) $$(0.03768)^2(6.354428)^6$$

c) $$\sqrt[4]{\left[\frac{(5.36)^2\,(67.48)^3}{(356.27)^2}\right]^3}$$

Solución

a) $$\log \frac{346 \times 0.0269}{45.21} = \log 346 + \log 0.0269 - \log 45.21$$

$$= 2.5391 - 1.5702 - 1.6552 = -0.6864$$

$$\text{antilog } (-0.6864) = 0.2058$$

b) $$\log ((0.03768)^2 (6.354428)^6) =$$

$$(2 \times \log 0.03768) + (6 \times \log 6.354428) =$$

$$(2 \times -1.423889) + (6 \times 0.803076) =$$

$$- 2.847778 + 4.818456 = 1.970678$$

$$\text{antilog } 1.970678 = 93.471239$$

c) $$\sqrt[4]{\left[\frac{(5.36)^2 (67.48)^3}{(356.27)^2} \right]^3}$$

$$= 3/4 \ (2x\log 5.36 + 3x\log 67.48 - 2x\log 356.72)$$

$$= 3/4 \ (2x0.729165 + 3x1.829175 - 2x2.552327)$$

$$= 3/4 \ (1.45833 + 5.487525 - 5.104654)$$

$$= 3/4 \ (1.841201) = 1.380901$$

$$\text{antilog } 1.380901 = 24.038147$$

Ejemplos:

1.- Determine el valor de la incógnita i (que representa la tasa de interés por período) si;

$$1000 \times (1+i)^3 = 3000$$

Solución

a) Empleando logaritmos:

$$\log 1000 + 3 \log (1+i) = \log 3000$$

$$3 \log (1+i) = \log 3000 - \log 1000$$

$$\log (1+i) = \frac{\log 3000 - \log 1000}{3}$$

$$\log (1+i) = \frac{3.477121 - 3}{3}$$

$$(1+i) = \text{antilog } 0.159040$$

$$i = 1.442249 - 1$$

$$i = 0.442249$$

$$i = 44.22\%$$

b) Solución directa:

$$1000 (1+i)^3 = 3000$$

$$(1+i)^3 = 3$$

$$(1+i) = 3^{1/3}$$

$$i = 1.442249571 - 1$$

$$i = 0.442249571$$

$$i = 44.22\ \%$$

2.- Determine d (tasa compuesta anual de depreciación), si:

$$900000 (1-d)^3 = 200000$$

Solución

a) Empleando logaritmos

$$\log 900000 + 3 \log (1-d) = \log 200000$$

$$3 \log (1-d) = \log 200000 - \log 900000$$

$$\log (1-d) = \frac{\log 200000 - \log 900000}{3}$$

$$\log (1-d) = \frac{5.301030 - 5.954243}{3}$$

$$\log (1-d) = -0.217737$$

$$(1-d) = \text{antilog} (-0.217737)$$

$$d = 1 - 0.605706866$$

$$d = 0.394292$$

$$d = 39.43\ \%$$

3.- Determine el valor de n (número de periodos de conversión), si n representa semestres y:

$$3500000\ (1+0.25)^{-n} = 500000$$

Solución

$$\log 3500000 + (-n \log 1.25) = \log 500000$$

$$-n = \frac{\log 500000 - \log 3500000}{\log 1.25}$$

$$-n = \frac{5.698970004 - 6.544068044}{0.096910013}$$

$$-n = -8.72044089$$

$$n = 8.72044089$$

$$n = 8.72 \text{ semestres}$$

1.5 Progresiones aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión de números llamados términos, tales que dos números cualquiera consecutivos de la sucesión, están separadas por una misma cantidad llamada diferencia común.
Unos ejemplos de progresiones aritméticas son:

1,4,7,10, ... cuya diferencia común es 3
30,25,20,15, ... cuya diferencia común es -5

De acuerdo con la definición, una progresión aritmética puede escribirse de la forma:

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ \ldots ,$$

en donde a_1 se llama primer término y **d** es la diferencia. Si a_n representa el n-ésimo término de la sucesión, entonces:

el segundo término es $a_2 = a_1 + d$

el tercer término es $a_3 = a_1 + 2d$

el cuarto término es $a_4 = a_1 + 3d$

y en general, el n-ésimo término es:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ahora vamos a obtener una expresión para la suma S_n, de los n primeros términos de la sucesión, es decir, para la suma:

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \dots + (a_n-2d) + (a_n-d) + a_n$$

pero también puede escribirse en forma inversa:

$$S_n = a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \dots + (a_1+2d) + (a_1+d) + a_1$$

si se suman las dos expresiones término a término se tiene:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

de donde

$$2S_n = n\,(a_1 + a_n)$$

$$S_n = n/2\,(a_1 + a_n)$$

así, la suma de una progresión aritmética de n términos, es igual a la suma del primer y último término multiplicado por **n** y dividido entre dos.

Por lo tanto, si en una progresión aritmética a_1 es el primer término, a_n es el n-ésimo término, **d** es la diferencia y S_n es la suma de los **n** primeros términos, tenemos que:

$$S_n = n/2\,(a_1 + a_n) \text{ pero } a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$

implica que:

$$S_n = n/2\,(a_1 + (a_1 + (n - 1)\,d))$$

$$S_n = n/2 + [2a_1 + (n - 1)\,d]$$

Es importante observar, que los cinco elementos: a_1, a_n, d, n y S_n, de una progresión aritmética están relacionadas por medio de dos formulas independientes. Por tanto, si se conocen tres cualesquiera de dichos elementos pueden calcularse las otras dos.

Ejemplos:

(a).- En la progresión aritmética 1,4,7,10,...,calcular el término de lugar doce y la suma de los primeros doce términos.

Solución

En ésta sucesión $a_1 = 1$, $d = 3, n = 12$ por lo tanto;

$$a_{12} = a_1 + (n - 1)\,d$$

$$a_{12} = 1 + (12 - 1)\,3$$

$$a_{12} = 1 + (11)\,3 = 34$$

Para determinar la suma se tiene que:

$$S_{12} = n/2\ [2a_1 + (n - 1)\ d]$$

$$S_{12} = 12/2\ [2\ (1) + (12 - 1)\ 3]$$

$$S_{12} = 6\ [2+33]$$

$$S_{12} = 6\ (35) = 210$$

(b).- El primer término de una progesión aritmética es: $a_1 = -2$, el último término es $a_n = 48$, y $S = 253$. determine **n.**

Solución

Sustituyendo los datos en la siguiente fórmula $S = n/2\ [\ a_1 + a_n]$ se tiene que:

$$253 = n/2\ [-2 + 48] = n/2\ [46] \Rightarrow 506 = n\ [46] \Rightarrow n = 506/46 = 11.$$

1.6 Progresiones geométricas

Una progresión geométrica, es una sucesión de números, tal que; cualquier término posterior al primero, se obtiene multiplicando el término anterior por un número no nulo llamado razón de la progresión.

Ejemplos :

3,6,12,24,48,..., es una progresión geométrica cuya razón común es 2.
2,6,18,54,162,.., es una progresión geométrica cuya razón común es 3.
-2,8,-32,128,..., es una progresión geométrica cuya razón común es 4.

Para obtener la fórmula concerniente a la progresión geométrica se considerará qué:

a_1 Primer término.

l Ultimo término.

r razón.

n Número de término.

De acuerdo con la notación anterior, los seis primeros términos de una progresión geométrica, en la que a_1 es el primer término y r es la razón:

$$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\ a_1r^3,\ a_1r^4,\ a_1r^5$$

donde se observa que el exponente de r en el segundo término es uno y que dicho exponente se incrementa en uno, al pasar de un término al siguiente. Por tanto, el exponente de r en cualquier término de la progresión es igual al número de orden del término menos uno.

En consecuencia, el n-ésimo término es a_1r^{n-1}, de ése modo se tiene la fórmula:

$$l = a_1r^{n-1}. \qquad \text{.....................(1)}$$

Ejemplo:

Encontrar el séptimo término de la progresión geométrica 36,-12,4,...,

Solución

En esta progresión cada término después del primero, se obtiene multiplicando el que le precede por -1/3, ya que dados dos términos consecutivos de una progresión geométrica su razón se calcula dividiendo el segundo término por el primero, en éste caso -12/36 = -1/3. Por tanto:

$r = -1/3,\ a_1 = 36,\ n = 7.$ Sustituyendo estos valores en la fórmula

$$l = a_1r^{n-1} = 36\ (\ -1/3\ )^{7-1} \quad = 36/(-3)^6 = 36/729 = 4/81$$

a.) "Suma de una progresión geométrica"

Si se suman los términos de una progresión geométrica

$a_1, \; a_1 r, \; a_1 r^2, \ldots, a_1 r^{n-2}, \; a_1 r^{n-1}$, se tiene la siguiente fórmula:

$$S = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

si multiplicamos por r la igualdad (1) se tiene:

$$rS = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

si restamos la igualdad (1) y (2) se tiene:

$$S - rS = a_1 - a_1 r^n \qquad \Rightarrow \qquad S\,(1 - r) = a_1 - a_1 r^n$$

resolviendo para S esta ecuación, se tiene:

$$S = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \quad \text{con } r \text{ distinto de cero.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Si se multiplica por r al $= a_1 r^{n-1}$ se obtiene $rl = ar^n$. Luego, si se sustituye a ar^n por rl en (3), se tiene:

$$S = \frac{a_1 - rl}{1 - r} \quad \text{con } r \text{ distinto de cero.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

NOTA

Es conveniente utilizar la fórmula (4) cuando $r < 1$ y la expresión

$$S = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \quad \text{con } r \text{ distinto de cero. Cuando } r > 1.$$

Una progresión geométrica será creciente si la razón común **r** es positiva mayor que 1.

Una progresión geométrica será decreciente si la razón común de **r** es positiva menor que 1.

Ejemplos:

(a).- Encontrar la suma de los seis primeros términos de la progresión 2, -6, 18, ...

(b).- El primer término de una progresión geométrica es 3 y el cuarto 24. Encontrar el décimo término y la suma de los diez primeros términos.

(c).- La inflación de México se ha incrementado en un 40% en promedio durante los últimos 5 años. ¿Cúal es el precio actual de un "bien" que tenía un precio de $100.00 hace 5 años?

Solución

(a).- En esta progresión, $a_1 = 2$, $r = -3$, y $n = 6$. Por tanto, sustituyendo estos valores en (4), se tiene:

$$S = \frac{2 - 2\,(-3)^6}{1 - (-3)} = \frac{2 - 2\,(729)}{1 + 3} = -364$$

(b). Tanto para encontrar la suma como para encontrar el décimo término se requiere conocer el valor de **r**. Este valor se obtiene considerando de la progresión que puede formarse con los cuatro primeros términos que hay entre **3** y **24**. De ese modo, se tiene $a_1 = 3$, $l = 24$, y $n = 24$. Sustituyendo estos valore en (1) se tiene:

$$24 = 3r^{4-1}$$

$3r^3 = 24$ Dividiendo ambos miembros por 3

$r^3 = 8$ resolviendo para **r**

$$r = 2$$

Usando de nuevo (1), para $a_1 = 3$, $l = 24$, $r = 2$, y $n = 10$, se tiene:

$$l = 3(2^{10-1})$$

$$= 3(512)$$

$$= 1536$$

Por tanto, el décimo término es 1536.

Para obtener S, se emplea (4) para $a_1 = 3$, $r = 2$, $n = 10$, y se obtiene:

$$S = \frac{3 - 3\ (2)^{10}}{1 - 2} = \frac{3 - 3\ (1024)}{-1} = \frac{3 - 3072}{-1} = 3069.$$

(c).- En este caso se emplea (1) para $a_1 = 100$, $r = (1 + 0.04)$, $n = 6$. y se obtiene:

$$l = 100\ (1.04)^{6-1} = 100\ (1.04)^5 = 100\ (5.37824) = 537.8$$

Puede esperarse que el precio del "bien" se haya más que quintuplicado en ese período dada una inflación promedio de 40%, puesto que dicha inflación se va calculando sobre la del año anterior, que a su vez lo fue sobre la del anterior y así sucesivamente, es por eso que $r = (1+i)$.

1.7 Progresiones geométricas infinitas

Si en una progresión geométrica la razón está comprendida entre -1 y 1, los valores numéricos de los términos decrecen conforme se incrementan. Por tanto, si el número de términos de la progresión es suficientemente grande se puede esperar que la adición de más términos no influya perceptiblemente en el valor de la suma de ellos. Se demostrará que si $-1 < r < 1$, la suma de los términos de una progresión geométrica, se va aproximando a un número fijo, a medida que n se incrementa.

La fórmula (4) de una progresión geométrica se puede expresar en la forma

$$S = \frac{a}{1 - r}\ (1-r) \qquad \text{con } r \text{ distinto de cero.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Si $-1 < r < 1$, entonces el valor numérico de r^n disminuye cuando **n** se incrementa y se puede hacer arbitrariamente pequeño, escogiendo a **n** suficientemente grande. Por tanto, al incrementarse el valor de **n** la cantidad dentro del paréntisis en (6), se aproxima cada vez más a uno. De ese modo S se aproxima a **a/(1-r)**. En otras palabras: cuanto mayor sea el valor de **n** más próximo está el valor de S al valor de **a/(1-r)**. En consecuencia, cuando en una progresión geométrica la razón está entre -1 y 1 y el número de términos es ilimitado, se puede escribir:

$$S = \frac{a}{1 - r} \quad \text{con } r \text{ distinto de cero.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Ejemplos

(a) En contrar la suma de 1 + 1/2 + 1/4 + ... en donde los puntos indican que la progresión no tiene fin.

Solución

En esta progresión, a = 1, r = 1/2. Por tanto, según (7)

$$S = \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

(b) Demostrar que 0.333 ... = 1/3.

Solución

La fracción decimal 0.333... se puede expresar como la progresión 0.3 + 0.03 + 0.003 + ... en la cual a = 0.3, r = 0.1 Por tanto, de acuerdo con (7) la suma S es:

$$S = \frac{0.3}{1 - 0.1} = \frac{0.3}{0.9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(c) Expresar 3.2181818... como fracción común.

Solución

El número dado puede expresarse como 3.2 más una progresión infinita con a = 0.018 y r = 0.01 Por tanto, según (7);

$$3.2181818... = 3.2 + 0.018 + 0.00018 + 0.0000018 + ...$$

$$= 3.2 + \frac{0.018}{1-0.01} = 3.2 + \frac{0.018}{0.99}$$

$$= 3.2 + \frac{1}{55} = 3\frac{12}{55}$$

1.8 Concepto de interés

El interés es la cantidad que se paga o se gana por el uso del dinero en el transcurso de un determinado tiempo, si se supone que una persona pide un préstamo a un banco por 100,000.00 durante un lapso de tiempo de dos meses y después de ese tiempo esa persona entrega al banco 110,000.00, se obseva que desde el punto de vista para el banco el 10% son su ganancia al haber invertido su dinero en el préstamo y, desde el punto de vista para la persona, son el costo de haber utilizado los 100,000.00 durante dos meses.

hay dos tipos de interés, simple y compuesto. El interés simple es aquel en el que el interés se paga al final de un período especificado y se calcula sobre el capital original, permaneciendo constante el capital durante todo el tiempo que dure la operación financiera.

El interés simple devengado al final de un período especificado, puede añadirse al capital original para formar un nuevo capital. Entonces, el interés del siguiente período se calcula sobre este nuevo capital. Si este proceso se repite por dos o más períodos, el aumento total del capital original se llama interés compuesto.

El interés es una parte fraccionaria del capital; cuando ésta fracción se expresa como un tanto por ciento, se llama tasa de interés.

El interés puede ser convertido en capital anual, semestral, trimestral, mensualmente, etc. Dicho período es denominado " período de capitalización ". Al número de veces que el intéres se capitaliza durante un año se le denomina frecuencia de converción.

Hay dos tipos de tasas de interés, y son:

Tasa nominal o tasa anual: Si el período de capitalización es diferente de un año la tasa anual establecida se llama tasa nominal.

Ejemplo:

Si se invierten $100.00 al 5 por ciento anual y el interés es capitalizable semestral mente, la tasa nominal es del 5 por ciento.

Tasa efectiva o tasa real: es aquella tasa anual a la cual el capital se incrementa cuando la tasa nominal es j y la capitalización se hace m veces por año, se llama tasa efectiva.

Ejemplo:

Encontrar la tasa efectiva anual, si la tasa nominal es del 8 por ciento, capitalizable trimestralmente.

Solución

Como la tasa nominal o anual es convertible trimestralmente se tiene que

$0.08/4 = 0.02$ ya que el año tiene 4 trimestres.

Como se quiere encontrar la tasa efectiva anual se tiene que:

$(1+i)^1 = (1.02)^4$ y resolviendo para i se tiene

$i = (1.02)^{4/1} - 1 = 1.0824 - 1 = 0.0824 = 8.24$ por ciento.

1.9 Resumen

En este capítulo se estudiarón cuatro, temas básicos para la comprensión y manejo de las anualidades. Estos cuatro temas son:

a) Exponentes y sus leyes.

b) Logaritmos y antilogaritmos.

c) Progresiones: aritméticas y geométricas.

d) Concepto de interés.

Un exponente indica el número de veces que un valor llamado base, debe multiplicarse por si mismo y se expresa en su forma general como a donde a es la base y n el exponente.

Los exponentes están regidos por las siguiente leyes:

1.-) $a^m x\ a^n = a^{m+n}$

2.-) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad m > n$$

3.-) $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad m < n$$

4.-) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0 = 1 \qquad m = n$$

5.-) $(a^m)^n = a^{mxn}$

6.-) $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

7.-) $(a.b)^m = a^m \ .\ b^m$

8.-) $a^0 = 1$

9.-) $$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

10.-) $$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p = (a^{1/q})^p$$

Un logaritmo es el exponente del cuál debe elevarse una base para obtener un número determinado y se expresa en forma general como:

$$b^l = N \qquad \text{o} \qquad L = b^l = N$$

y se lee como el logaritmo en base **b** del número **N** siendo el exponente **L** de la base **b** tal que:

$$b^l = N$$

Ejemplo:

$$3 = \log_2 8 \quad \text{ya que} \quad 2^3 = 8$$
$$L = \log_b N \qquad\qquad b^l = N$$

Es necesario destacar que $N > 1$ y $\log_b N$ puede ser <, =, > que cero.

Las tres leyes fundamentales de los logaritmos son:

1.- $\text{Log}(A \times B) = \text{Log}\, A + \text{Log}\, B$

2.- $\text{Log}(A/B) = \text{Log}\, A - \text{Log}\, B$

3.- $\text{Log}\, A^n = n\, \text{Log}\, A$

4.- $\text{Log}\, A^{1/n} = \dfrac{1}{n}\, \text{Log}\, A$

Una progresión aritmética es una sucesión de números llamados términos. Tales que cualquiera de los dos números consecutivos de la sucesión están separados por una misma cantidad llamada razón común.

Las progresiones aritméticas son la base teórica del interés y el descuento simple.

Las progresiones geométricas son la base del interés compuesto y las anualidades, y se define como una sucesión de números llamados términos, tales que cualquiera de los dos números consecutivos guardan una razón común. Se debe tener en cuenta que en una progresión geométrica cualquier número posterior puede ser obtenido del anterior, multiplicándolo por un número constante llamada razón común.

CAPITULO 2

ANUALIDADES SIMPLES, CIERTAS, VENCIDAS Y PAGADERAS EN EL PRIMER PERIODO DE TIEMPO.

2.1 Terminología

Se denomina anualidad a un conjunto de pagos iguales, realizados a intervalos iguales en tiempo y no necesariamente los pagos son anuales.

Algunos ejemplos de anualidades son:

* Pagos mensuales por renta

* El cobro quincenal o semanal de sueldos

* Abonos mensuales a una cuenta de crédito

* Pagos anuales de primas de pólizas de seguro de vida

Se conoce como período de pago al tiempo que transcurre entre un pago y otro, y se denomina plazo de una anualidad al tiempo que transcurre entre el inicio del primer período y el final del último.

Renta es el pago periódico que se hace.

2.2 Tipos de anualidades

Existen varios tipos de anualidades, conviene clasificarlas de acuerdo con diversos criterios.

Criterios	**Tipos de anualidades**
a) Tiempo	Ciertas y Contingentes
b) Interés	Simples y Generales
c) Pagos	Vencidas y Anticipadas
d) Iniciación	Pagadas en el primer período de tiempo y Diferidas

a) De acuerdo con el tiempo.

Este criterio de clasificación se refiere a las fechas de iniciación y de terminación de las anualidades.

* Anualidad cierta. Sus fechas son fijas y se estipulan de antemano. Por ejemplo: Pagos mensuales por renta.

* Anualidades contingentes. Están representadas por una serie de pagos que se efectúan, sujetos a algún evento fortuito. Por ejemplo: Renta vitalicia que se otorga a un conyuge tras la muerte del otro.

b) De acuerdo con intereses:

* Anualidad simple. Cuando el período de pago coinside con el de capitalización de los intereses. Un ejemplo es el pago de una renta mensual **x** con intereses al i % anual capitalizable mensual.

* Anualidad general. A diferencia de la anterior, el período de pago no coincide con el de capitalización de los intereses. Un ejemplo es el pago de una renta **x** semestral con intereses al **i** % anual capitalizable trimestralmente.

c) De acuerdo con los pagos.

* Anualidad vencida: se le conoce como anualidad ordinaria, se trata de casos en los que los pagos se efectúan a su vencimiento, o sea, al final de cada período.

* Anualidad anticipada. es aquella en la que los pagos se realizan al principio de cada período.

d) De acuerdo con el momento en que se inicia:

* Anualidad pagada en el primer período de tiempo: son los casos más comunes de anualidades; ya que la realización de los cobros o pagos tienen lugar en el primer período inmediatamente siguiente a la formalización del trato y pueden ser vencidos o anticipados. Un ejemplo es comprar a crédito hoy un artículo que se va a pagar con mensualidades, la primera de las cuales habrá de realizarse en ese momento.

* Anualidad diferida. A diferencia de la anterior se pospone la realización de los cobros o pagos. Un ejemplo es comprar a crédito hoy un artículo que se va a pagar con mensualidades, la primera de las cuales habrá de realizarse ocho meses después.

2.3 Monto

Monto es el valor en el momento de su vencimiento de una anualidad, o bien, es el valor de todos los pagos al final de la operación.
Dada su importancia, vale la pena destacar las características de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo

* Simples: El período de pagos coincide con el de capitalización.

* Ciertas: Las fechas de los pagos son conocidas y fijadas con anticipación.

* Vencidas: Los pagos se realizan al final de los correspondientes periodos.

* Pagaderas en el primer período de tiempo: Los pagos se comienzan a hacer desde el primer período en que se realiza la operación.

Es importante hacer notar que los elementos que intervienen en este tipo de anualidades son:

R : La renta o pago por período.

C : Capital de una anualidad o el valor total de los pagos en el momento presente.

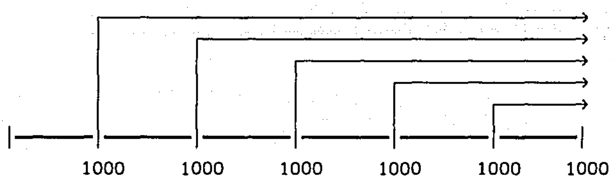
M : El valor de los pagos en el momento de su vencimiento, o monto de la anualidad.

La fórmula de una anualidad es una progresión geométrica ya que dicha fórmula se puede deducir del siguiente ejemplo:

¿Que cantidad se acomularía en un semestre si se depositaran **$1000.00** al finalizar cada mes en una cuenta de inversiones que rinde el 30% anual convertible mensualmente?

Solución

Se representara la situación en un diagrama de tiempo y valor:



Ya que el interés por período es del 30% anual convertible mensualmente se tiene que $i = 0.30/12 = 0.025$ y el monto de la anualidad sería igual a la suma de los montos de cada uno de los depósitos al final del semestre.

$$M = 1000 + 1000\,(1 + 0.025) + 1000\,(1 + 0.025)^2 + 1000\,(1 + 0.025)^3$$

$$+ 1000\,(1 + 0.025)^4 + 1000\,(1 + 0.025)^5 = 6,387.74$$

$$M = \$6,387.74$$

Como se vió el monto es una progresión geométrica donde:

a_1 = 1000, el primer término de una progresión geométrica o la renta de una anualidad (R).

r = (1+i), la razón de una progresión geométrica.

n = 6, el número de términos o depósitos.

y de la fórmula ya vista en el capítulo 1, la suma de los términos de una progresión geométrica es:

$$S = a_1 \frac{(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

ya que **S = M** y sustituyendo la terminología se tiene que:

$$M = \frac{R - R(1+i)^n}{1 - (1+i)} = \frac{R[1 - (1+i)^n]}{1 - 1 - i} = R \frac{1 - (1+i)^n}{-i}$$

multiplicando por -1 a la fracción:

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Esta fórmula es la que comunmente se utiliza para calcular el monto de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo y como la fórmula proviene de la suma de una progresión geométrica se escribe de la siguiente manera:

$$M = R\, S_{\overline{n|}\, i} \quad \text{(valuada a la tasa i)} \qquad \text{donde} \quad S_{\overline{n|}\, i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ahora bien usando esta fórmula para resolver el ejemplo anterior se tiene:

$M = ?$

$R = 1000$

$n = 6$

$i = 0.30/12 = 0.025$

$$S_{\overline{6}|0.025} = \frac{(1+0.025)^6 - 1}{0.025}$$

$$M = 1,000 \frac{(1+0.025)^6 - 1}{0.025} = 6,387.74$$

resultado que es igual al obtenido antes.

Ejemplo:

¿Cual es el monto de $100,000.00 semestrales depositados durante cuatro años y medio en una cuenta bancaria que rinde **48%** anual capitalizable semestralmente?

Solución

$M = ?$

$R = 100,000$

$n = 4.5\ (2) = 9$

$i = 0.48/2 = 0.24$

$$M = 100,000 \frac{(1+0.24)^9 - 1}{0.24} = 99,141.68$$

Ejemplo:

El ingeniero Pelaéz deposita $5,000.00 al mes de haber nacido su hijo. Continúa haciendo depósitos mensuales por esa cantidad hasta que el hijo cumpla 26 años de edad para que en ese día, se le entregue lo acomulado como herencia. Si durante los primeros seis años de vida del hijo la cuenta pagó 36% anual convertible mensualmente y durante los 20 años restantes pagó 2% efectiva mensual ¿cuanto recibió el hijo a los 26 años?

Solución

M = ?

R = 5,000

n = los primeros 6 años son 6 (12) = 72 meses.

n = los últimos 20 años son 20 (12) = 240 meses.

i = los primeros 6 años son 0.36/12 = 0.03 mensual.

i = los últimos 20 años son 0.02 efectiva mensual.

Primero se calcula lo que se acomuló durante los primeros 6 años con un interés del 3% mensual.

$$M = 5,000 \; \frac{(1+0.03)^{72} - 1}{0.03} = 1,233,336.21$$

El total acomulado al final sería igual al valor de 1,233,333.21 con su respectivo monto a interés compuesto durante el tiempo que le falta para cumplir 26 años, es decir 20 años mas o 240 meses y con un interés del 2% efectiva mensualmente mas el monto de las anualidades de $5,000.00 durante los 20 años restantes o 240 meses y con un interes del 2% efectivo mensualmente.

$$M = 1,233,333.21 \; (1+0.02)^{240} + 5,000 \; \frac{(1+0.02)^{240} - 1}{0.02} = 171,651,609.5$$

Una exhorbitante cantidad de dinero.

2.4 Valor actual

El valor actual de una anualidad se define como la suma de los valores actuales de todos los pagos.

Ejemplo:

¿Cuál es el valor actual de una renta vencida de **$500,000.00** trimestral durante 2 años si el dinero vale 8% anual capitalizable trimestralmente?

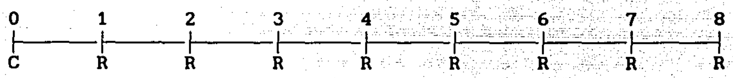
Solución

$C = ?$

$R = 500,000$ trimestral.

$n = 2(4) = 8$ Trimestral

$i = 0.08/4 = 0.02$ Trimestral.



Este es el caso inverso del monto. El valor actual de la anualidad sería la suma de los valores actuales de la 8 rentas.

$$C = 500,000\,(1+i)^{-1} + 500,000\,(1+i)^{-2} + 500,000\,(1+i)^{-3} + 500,000\,(1+i)^{-4}$$

$$+ 500,000\,(1+i)^{-5} + 500,000\,(1+i)^{-6} + 500,000\,(1+i)^{-7} + 500,000\,(1+i)^{-8}$$

$$= 490,196.08 + 480,584.39 + 471,161.17 + 461,922.72 + 452,865.41 + 443,985.69 + 435,280.09 + 426,745.19$$

$$= 3,662,740.72$$

de la misma manera que en el monto, puede verse que esa suma de términos es una progresión geométrica con

$a_1 = 500,000\,(1.02)^{-1} \quad = R\,(1+i)^{-1}$

$n = 8$

$r = (1+0.02)^{-1} \quad = (1+i)^{-1}$

usando la fórmula de la suma de una progresión geométrica se tiene:

$$S = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} = \frac{500,000\ (1+0.02)^{-1} - 500,000\ (1+0.02)^{-1}\ [(1.02)^{-8}]}{1 - (1+0.02)^{-1}}$$

$$= \frac{490,196.08 - 490,196.08\ (0.85349903)}{0.0196078}$$

$$= \frac{490,196.08 - 418,377.63}{0.0196078} = \frac{71818.446}{0.0196078} = 3,662,740.72$$

y, su correspondiente fórmula es:

$$C = \frac{R\ (1+i)^{-1} - R\ (1+i)^{-1}\ [(1+i)^{-1}]^n}{1 - (1+i)^{-1}}$$

$$C = \frac{R\ (1+i)^{-1} - R\ (1+i)^{-1}\ (1+i)^{-n}}{1 - \frac{1}{(1+i)}}$$

$$C = \frac{R\ (1+i)^{-1}\ [1 - (1+i)^{-n}]}{\frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i}}$$

$$C = \frac{R\ (1+i)^{-1}\ [1 - (1+i)^{-n}]}{\frac{1+i - 1}{1+i}}$$

$$C = \frac{R\ (1+i)^{-1}\ [1 - (1+i)^{-n}]}{\frac{i}{1+i}}$$

$$C = \frac{(1+i)\ R\ (1+i)^{-1}\ [1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$C = R\ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

que es la forma más común del valor actual de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo, la notación de la fórmula de valor actual se puede escribir como:

$$C = R\, a_{\overline{n|}\, i} \qquad \text{donde} \qquad a_{\overline{n|}\, i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

utilizando esta fórmula para resolver el ejemplo anterior se tiene que

$$C = 500{,}0000\, \frac{1 - (1+0.02)^{-8}}{0.02} = 3{,}662{,}740.72$$

resultado que es igual al obtenido antes.

Ejemplo:

¿Cual es el valor actual de una renta bimestral de **$350,000.00** depositados al final de cada uno de 7 bimestres, si la tasa de interés es del 3% anual convertible bimestralmente?

Solución

C = ?

R = 350,000

n = 7

i = 0.03/6 = 0.005

Utilizando la fórmula de valor actual se tiene:

$$C = 350{,}000\, \frac{1 - (1+0.005)^{-7}}{0.005} = 2{,}401{,}725.91$$

Ejemplo:

Encuéntrese el importe pagado en valor actual por un televisor, por el cual se entregó un enganche de **$220,000.00**, si se hicieron siete pagos mensuales vencidos por **$18,000.00** y un último pago al final del octavo mes por **$23,000.00** si se considera un interés del **59%** anual convertible mensualmente.

Solución

El importe es igual al enganche mas el valor actual de la anualidad con renta de $18,000.00 mas el valor actual del pago final.

C = ?

Enganche = 220,000

R = 18,000 con 7 pagos mensuales vencidos

Pago final al octavo mes = 23,000

i = 0.59/12 = 0.049

$$C = 220{,}000 + 18{,}000 \frac{1 - (1+0.049)^{-7}}{0.049} + 23{,}000\ (1+0.049)^{-8}$$

$$C = 220{,}000 + 104{,}533.23 + 15{,}686.42 = 340{,}219.66$$

Ejemplo:

¿Que cantidad se debería depositar el 31 de enero del primer año para poder hacer 15 retiros mensuales de $500,000.00, a partir del último día de febrero de ese año, si la cuenta en que se depósita paga 63% anual convertible mensualmente?

Solución

C = ?

R = 500,000

n = 15

i = 0.63/12 = 0.0525

Utilizando la fórmula de valor actual se tiene

$$C = 500{,}000\ \frac{1 - (1+0.0525)^{-15}}{0.0525} = 5{,}103{,}230.7$$

2.5 Renta

Se conoce como renta al pago o depósito periódico que se realiza con intervalos iguales de tiempo.

Sabemos que la fórmula de valor actual de una anualidad simple, cierta, o vencida y pagaderas en el primer periodo de tiempo es:

$$C = R\, a_{\overline{n}|i} \qquad \text{donde} \qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

lo que implica que la renta sea:

$$R = \frac{C}{a_{\overline{n}|i}} = R\,\frac{C}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$ Por lo tanto la fórmula de la renta es:

$$R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Ejemplo:

Una persona adquiere hoy a crédito una video-casetera. La video-casetera cuesta $975,000.00 y conviene pagarla en 7 mensualidades vencidas, ¿cuánto tendrá que pagar cada mes si se le cobran el 6.8% efectivo mensual de interés?

Solución

$C = 975{,}000$

$R = ?$

$n = 7$

$i = 0.068$

Utilizando la fórmula de renta se tiene:

$$R = \frac{975,000\ (0.068)}{1 - (1+0.068)^{-7}} = \frac{66,300}{0.37} = 179,654.89$$

Ejemplo:

Encontrar el pago que debe hacerse al final de cada seis meses durante nueve años, para formar un monto de $5,000,000.00, si el dinero vale 4% anual capitalizable semestralmente.

Solución

$M = 5,000,000$

$R = ?$

$n = 9\ (2) = 18$

$i = 0.04/2 = 0.02$

utilizando la fórmula de renta se tiene:

$$R = \frac{5,000,000\ (0.02)}{(1+0.02)^{18} - 1} = 233,510.5108$$

Ejemplo:

Una empresa contrae una deuda de $90,000,000.00 con un banco. Si éste cargo a ese tipo de préstamos 90% anual convertible mensualmente, ¿cuánto tendría que pagar mensualmente la empresa para saldar su deuda dentro de 15 meses?

Solución

$C = 90,000,000$

$R = ?$

$n = 15$

$i = 0.9/12 = 0.075$

utilizando la fórmula de renta se tiene

$$R = \frac{90,000,000\ (0.075)}{1 - (1+0.075)^{-15}} = 10,195,851.26$$

2.6 Plazo

El tiempo o plazo de una anualidad se calcula por medio del número de periodos de pago n.

Ejemplo:

Calcular el número de meses necesarios, para pagar una deuda de **$23,000,000.00** por medio de pagos mensuales iguales de **$725,000.00** cobrándose un interés anual convertible mensualmente del **6%**

Salución

Sabemos que la fórmula de valor actual es:

$$C = R\, a_{\overline{n}|i} \quad \text{donde} \quad a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

de donde $\dfrac{Ci}{R} = 1-(1+i)^{-n}$

y también $(1+i)^{-n} = 1-\dfrac{Ci}{R} = \dfrac{R-Ci}{R}$

entonces $(1+i)^{n} = \dfrac{R}{R-Ci}$

aplicando logaritmos se tiene que:

$$n\log(1+i) = \log R - \log(R-Ci)$$

de donde se obtiene la fórmula buscada

$$n = \frac{\log R - \log(R-Ci)}{\log(1+i)}$$

Utilizando la fórmula para resolver el ejercicio se tiene que:

C = 23,000,000

R = 725,000

n = ?

i = 0.06/12 = 0.005

$$n = \frac{\log 725{,}000 - \log(725{,}000 - 23{,}000{,}000(0.005))}{\log(1+0.005)}$$

$$n = \frac{\log 725{,}000 - \log(725{,}000 - 115{,}000)}{\log(1+0.005)}$$

$$n = \frac{\log 725{,}000 - \log(610{,}000)}{\log(1+0.005)}$$

$$n = \frac{5.860338007 - 5.785329835}{0.002166061757}$$

$$n = \frac{0.075008171}{0.002166061757} = 34.62882407 \text{ meses.}$$

Ejemplo:

¿Cuántos pagos de **$43,702.46** a final de mes tendría que hacer el comprador de un automóvil, que cuesta $7,300,000.00 si dá $5,600,000.00 de enganche y acuerda pagar 6.8% anual capitalizable mensualmente sobre el saldo?

Solución

$C = 7{,}300{,}000 - 5{,}600{,}000 = 1{,}700{,}000$

$R = 43{,}702.46$

$n = ?$

$i = 0.068/12 = 0.0056$

$$n = \frac{\log 43{,}702.46 - \log(43{,}702.46 - 1{,}700{,}000(0.0056))}{\log(1+0.0056)}$$

$$n = \frac{\log 43{,}702.46 - \log(43{,}702.46 - 9{,}633.33)}{\log(1+0.0056)}$$

$$n = \frac{\log 43{,}702.46 - \log(34{,}069.13)}{\log(1+0.0056)}$$

$$n = \frac{4.640505884 - 4.532361001}{0.002425264}$$

$$n = \frac{0.108144883}{0.002425264} = 44.59096114 \text{ meses.}$$

Ejemplo:

¿Cuántos pagos bimestrales vencidos de **$145,000.00** se tendrían que hacer para saldar una deuda pagadera hoy de **$800,000.00**, si el primer pago se realiza dentro de dos meses y el interés es del **11%** efectivo bimestral?

Solución

$C = 800{,}000$

$R = 145{,}000$

$n = ?$

$i = 0.11$

$$n = \frac{\log 145{,}000 - \log(145{,}000 - 800{,}000(0.11))}{\log(1+0.11)}$$

$$n = \frac{\log 145{,}000 - \log(145{,}000 - 88{,}000)}{\log(1+0.11)}$$

$$n = \frac{\log 145{,}000 - \log(57{,}000)}{\log(1+0.11)}$$

$$n = \frac{5.161368002 - 4.755874856}{0.045322978}$$

$$n = \frac{0.405493146}{0.045322978} = 8.946745282 \text{ bimestrales.}$$

al igual que en los casos anteriores en los que se ha encontrado que el número de pagos o periodos es fraccionario, se pueden hacer dos cosas:

a) hacer ocho pagos de $145,000.00 y un noveno de un pago menor.

b) hacer siete pagos de $145,000.00 y un pago al final, mayor.

A saber:

a) Al cabo del octavo pago, el valor de todos los abonos (a su valor futuro) seria:

$$M = 145,000 \frac{(1.11)^8 - 1}{0.11} = 1,719,617.97$$

mientras que el valor del adeudo después de ocho bimestres seria:

$$800,000\ (1.11)^8 = 1,843,630.22$$

Por lo que el valor del adeudo al final del octavo bimestre, inmediatamente después de efectuar el pago correspondiente sería:

$$1,843,630.22 - 1,719,617.97 = 124,012.25$$

El valor de esa cantidad un bimestre después sería:

$$124,012.25\ (1.11) = 137,653.59$$

cantidad que debería pagarse al cabo del noveno bimestre.

b) Si se hiceran siete pagos de $145,000.00 su monto en el momento de hacer el séptimo pago sería:

$$M = 145,000 \frac{(1.11)^7 - 1}{0.11} = 1,418,574.75$$

y el valor del adeudo:

$$800,000\ (1.11)^7 = 1,660,928.12$$

El saldo al séptimo bimestre es:

$$1,660,928.12 - 1,418,574.75 = 242,353.37$$

y al término del octavo bimestre sería necesario pagar:

$$242,353.37\ (1.11) = 269,012.24$$

cantidad que debería pagarse al cabo del octavo bimestre para saldar completamente su deuda.
Con referencia al ejemplo anterior, nótese que se encontró en a) y en b) el pago final que es necesario hacer, determinando el valor futuro (monto) tanto de los pagos como del adeudo.
En este ejemplo se mostrará que se obtienen los mismos resultados calculando sus correspondientes valores actuales. se utilizará el caso a) en el que se decide hacer ocho pagos completos y un pago final menor:
El valor actual de los ocho pagos completos es:

$$C = 145{,}000 \frac{1 - (1+0.11)^{-8}}{0.11} = 746{,}187.80$$

Como el valor actual de la deuda es de $800,000.00 el saldo de la operación, a su valor actual, es:

$$800{,}000 - 746{,}187.80 = 53{,}812.20$$

Y este saldo, llevado a su valor después de nueve bimestres (que es cuando hay que hacerse el último pago) es:

$$53{,}812.20\ (1.11)^{9} = 137{,}653.59$$

misma respuesta que se obtuvo en el ejemplo anterior.

2.7 Interés

En este tema se verán algunos ejemplos en los que lo que interesa es determinar el interés que se paga.

Ejemplo:

Claudia Torres debe pagar hoy $350,000.00 como no tiene esa cantidad disponible, acuerda con su acredor pagarle mediante seis abonos mensuales de $68,000.00 el primero de ellos al final de mes. ¿Que tasa de interés efectiva mensual tendrá que pagar?

Solución

$R = 68{,}000$

$C = 350{,}000$

$n = 6$

$i = ?$

Utilizando la fórmula de valor actual se tiene:

$$350,000 = 68,000 \ \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}$$

$$\frac{1 - (1+i)^{-6}}{i} = \frac{350,000}{68,000} = 5.14705882$$

Como no es posible despejar la i, se tiene que seguir un procedimiento de interpolación para encontrar su valor. Este procedimiento consiste en dos pasos:

1.- Ensayar valores en la expresión donde se encuentra la i.

$$i = \left(\frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}\right)$$

para encontrar dos valores que estén cercanos a 5.14705882, uno mayor y otro menor.

2.- Interpolar entre los dos valores encontrados en 1 para determinar el valor de i.

En primer lugar se ensayan valores para $\left(\frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}\right)$

Si i = 0.05 $\quad \frac{1 - (1.05)^{-6}}{0.05} = 5.07569207$

que es bastante cercano al valor 5.14705882 que se busca.

Si i = 0.045 $\quad \frac{1 - (1.045)^{-6}}{0.045} = 5.15787248$

Este es mayor que el valor que se busca; ahora uno un poco menor:

Si i = 0.046 $\quad \frac{1 - (1.046)^{-6}}{0.046} = 5.14127181$

Si i = 0.0455 $\quad \frac{1 - (1.0455)^{-6}}{0.0455} = 5.14956176$

Ahora ya se tiene dos valores muy cercanos al valor deseado; uno mayor y otro menor. El segundo paso es interpolar entre estos dos valores para determinar en forma más exacta, la tasa de interés que se necesita. El razonamiento es el siguiente:

* Se necesita encontrar el valor de i que haga que $\frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}$ sea igual a 5.14705882, porque esta i es la que hace que se cumplan las condiciones planteadas en el ejemplo y es por lo tanto, la i que se busca.

* Ya se determinó en el paso anterior que:

$$\text{Si } i = 0.0455 \qquad \frac{1 - (1.0455)^{-6}}{0.0455} = 5.14956176$$

y que

$$\text{Si } i = 0.046 \qquad \frac{1 - (1+0.046)^{-6}}{0.046} = 5.14127181$$

De donde se concluye que la tasa i que se busca está entre **0.046** y **0.0455**, para ilustrar el procedimiento se muestran las condiciones descritas en los párrafos anteriores mediante un diagrama:

```
5.14127181              5.14705882              5.14956176
    |------------------------|------------------------|
  0.046                      i                      0.0455
```

Lo que se va a hacer a partir de este diagrama para encontrar un valor más preciso de i es plantear una proporción y, para comprender mejor lo que se hace, se repasarán las relaciones existentes entre las cantidades que aparecen en el esquema anterior:

Puede calcularse:

5.14956176 - 5.14127181 = 0.00828995 es la distancia total entre esas dos cantidades y,

$$\frac{5.14705882 - 5.14127181}{5.14956176 - 5.14127181} = \frac{0.00578701}{0.00828995} = 0.69807538$$

lo que significa que 0.00578701 (el numerador) representa aproximadamente 69.8% de la distancia total, y como esta proporción debe ser cierta también para la distancia total entre las tasas, entonces la tasa que se busca debe (verse el diagrama) ser igual a **0.046** menos **69.8%** de la distancia total entre las tasas.

$$0.046 - 0.69807538\,(0.046 - 0.0455) = 0.04565096$$

Se puede verificar que esta tasa dá una mejor aproximación del factor:

$$\frac{1 - (1.04565096)^{-6}}{0.04565096} = 5.14705667$$

que es practicamente el valor buscado.

Por ello entonces, la respuesta del ejemplo es que la persona pagará **4.57%** efectivo mensual de interés.

El procedimiento de interpolación se puede resumir de la siguiente manera :

$$\frac{5.14705882 - 5.14127181}{5.14956176 - 5.14127181} = \frac{i - 0.046}{0.0455 - 0.046}$$

$$\frac{0.00578701}{0.00828995} = \frac{i - 0.046}{-0.0005}$$

$$i - 0.046 = -0.0005\ (0.69807538)$$

$$i = 0.046 - 0.00034904$$

$$i = 0.04565096$$

Ejemplo:

¿A qué tasa anual convertible trimestralmente se acumulan **$500,000.00** en el momento de realizar el último de 15 depósitos trimestrales de **$10,000.00**?

Solución

$M = 500,000$

$R = 10,000$

$n = 15$

$i = ?$

Utilizando la fórmula de monto se tiene:

$$500,000 = 10,000\ \frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^{15} - 1}{i} = \frac{500,000}{10,000} = 50$$

Ensayando valores de i (altos ya que es trimestral):

$$\text{Si } i = 0.15 \quad \frac{(1.15)^{15} - 1}{0.15} = 47.58041086$$

$$\text{Si } i = 0.16 \quad \frac{(1.16)^{15} - 1}{0.16} = 51.65950541$$

$$\text{Si } i = 0.157 \quad \frac{(1.157)^{15} - 1}{0.157} = 50.39819915$$

$$\text{Si } i = 0.1560 \quad \frac{(1.1560)^{15} - 1}{0.1560} = 49.98504380$$

$$\text{Si } i = 0.1561 \quad \frac{(1.1561)^{15} - 1}{0.1561} = 50.02619735$$

Para interpolar

49.98504380	50	50.02619735
0.1560	i	0.1561

$$\frac{50 - 49.9850438}{50.02619735 - 49.9850438} = \frac{i - 0.1560}{0.1561 - 0.1560}$$

$$\frac{0.0149562}{0.04115355} = \frac{i - 0.1560}{0.0001}$$

$$i - 0.1560 = 0.36342430\ (0.0001)$$

$$i = 0.1560 + 0.00003634$$

$$i = 0.15603634$$

Comprobando el resultado anterior

$$\frac{(1.15603634)^{15} - 1}{0.15603634} = 49.9999999$$

que es practicamente el valor buscado.

Y, por tanto, se requiere una tasa de **0.15603634 (4) = 0.62414536, 62.42%** anual convertible trimestralmente, para hacer que el monto de **15** pagos trimestrales de **$10,000.00** sea **$500,000.00**

2.8 Resumen

En este capitulo se introdujo el concepto de anualidades un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos de tiempo iguales.

Se mencionó que resulta conveniente identificar los diferentes tipos de ellas, clasificándolas de acuerdo a cuatro criterios. Se revisaron las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer periodo de tiempo. Se derivaron las fórmulas para calcular su monto y su valor actual o capital y se ilustraron diversos casos en los que fué necesario calcular esos dos conceptos, así como también el plazo , renta y tasa de interés.

FORMULAS IMPORTANTES

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$M = R\, S_{\overline{n|}\,i} \quad \text{(valuada a la tasa i)} \quad \text{donde} \quad S_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$C = R\, a_{\overline{n|}\,i} \quad \text{donde} \quad a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

CAPITULO 3

ANUALIDADES ANTICIPADAS

3.1 introducción.

Como se vió en el capitulo anterior, las anualidades se clasifican de acuerdo con cuatro criterios que son: tiempo, intereses, pagos, e iniciación.

Las anualidades anticipadas son aquellas en la que los pagos se realizan al principio de cada período, como es el caso de rentas pagadas por anticipado, primas de seguros, intereses pagados por anticipado.

En este capítulo se analizarán las anualidades anticipadas que serán vistas en su caso simple, (cuando el período de pago coincide con el de capitalización), ya que el caso general se analiza en otro capítulo.

Dado que las anualidades contingentes se analizan también en otro capítulo, las anualidades anticipadas que se estudian en este capítulo son del caso cierto, es decir; son aquellas en las que se conocen con certeza las fechas de los periodos.

"Por ello, en este capítulo se verán:"

* Anualidades simples, ciertas, anticipadas y pagaderas en el primer período de tiempo.

Se hará mediante las fórmulas ya conocidas de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo.

$$M = R \; s_{\overline{n|}\,i} = R \; \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

$$C = R \; a_{\overline{n|}\,i} = R \; \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

3.2 Monto y valor actual.

Las características de estas anualidades, pueden decirse que son:

Simples: Porque el período de pago corresponde al de capitalización.

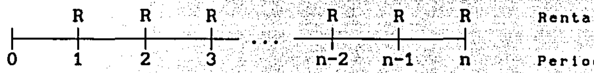
Ciertas: Porque las fechas y los plazos son fijos y se conocen con anticipación.

Anticipadas: Porque al inicio de los pagos o depósitos se hacen al principio de los periodos de pago y capitalización (por anticipado).

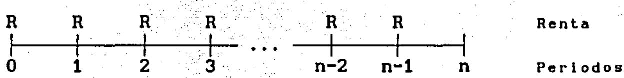
Pagadas en el primer período de tiempo: Porque los pagos o depósitos se inician en el mismo período en el que se formaliza la operación.

Es útil comparar mediante diagramas las anualidades vencidas y las anticipadas para comprender la diferencia.

Anualidad vencida



Anualidad anticipada

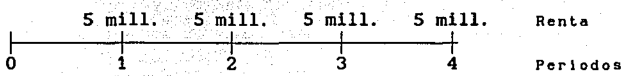


Ejemplo:

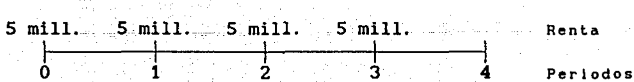
Encontrar el monto de cuatro pagos anuales de **$5,000,000.00** si el primero de ellos se efectúa en este momento y la tasa de interés es del **12%** efectivo anual.

Solución

Representando la situación en un diagrama de tiempo y valor de una anualidad vencida se tiene que:



Observando el diagrama puede apreciarse que si se consideran los **4** pagos de **$5,000,000.00** como si fueran una anualidad anticipada se representaria de la siguiente manera.



Aplicando la fórmula de monto hace que se obtenga el valor de la anualidad en el tercer año, o sea como si el inicio del plazo hubiera sido en el período -1. Es decir:

$$M = R \ \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 5{,}000{,}000 = \frac{(1.12)^4 - 1}{0.12} = 23{,}896{,}640$$

que sería el monto al principio del tercer año, pero como se busca el monto al final del plazo, es decir, un año después, hay que calcular el valor de este monto al cabo de un año después, por lo tanto:

$$23,896,640\ (1.12) = 26,764,236.80$$

que es el monto que se busca y la fórmula sería entonces:

$$M = R\ \frac{(1+i)^n - 1}{i}\ (1+i)$$

Aplicando ésta fórmula al ejemplo anterior se tiene:

$$M = 5,000,000\ \frac{(1.12)^4 - 1}{0.12}\ (1.12) = 26,764,236.80$$

Ahora sabemos que el monto de una anualidad anticipada es:

$$M = R\ \frac{(1+i)^n - 1}{i}\ (1+i) = R\ \frac{(1+i)^n - 1}{i}\ \frac{(1+i)}{1}$$

$$M = R\ \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = R\ \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}$$

$$= R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

La notación de una anualidad anticipada es:

$$M = R\ \bar{S}_{\overline{n+1}|\,i} = \quad \text{donde} \quad \bar{S}_{\overline{n+1}|\,i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1$$

(valuada a la tasa i)

Aplicando la fórmula al ejemplo anterior se tiene que:

$M = ?$

$R = 5,000,000$

$n = 4$

$i = 0.12$

$$M = 5,000,000\left[\frac{(1.12)^5 - 1}{0.12} - 1\right]$$

$$M = 26,764,236.80$$

Ejemplo:

Un inversionista depósita en una cuenta bancaria $15,000,000.00 al principio de cada mes. Si la cuenta paga 8.7% efectivo mensual de interés, ¿cuánto habrá ahorrado durante año y medio?

Solución

$M = ?$

$R = 15,000,000$

$n = 1.5\ (12) = 18$

$i = 0.087$

$$M = 15,000,000 \left[\frac{(1.087)^{19} - 1}{0.087} - 1 \right]$$

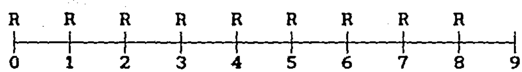
$$M = 15,000,000\ (43.59014802) = 653,852,220.30$$

Ejemplo:

Encuéntrese el valor actual de nueve pagos bimestrales de $50,000.00, con un interés de 10.28% efectivo bimestral.

Solución

Representando la situación en un diagrama de tiempo y valor se tiene:



Este es el caso del valor actual de una anualidad anticipada. El valor actual de la anualidad sería la suma de los valores actuales de las 8 rentas, mas la primera renta que ya está en su valor presente es decir:

$$C = 50,000 + 50,000\ (1+i)^{-1} + 50,000\ (1+i)^{-2} + 50,000\ (1+i)^{-3} +$$

$$50,000\ (1+i)^{-4} + 50,000\ (1+i)^{-5} + 50,000\ (1+i)^{-6} + 50,000\ (1+i)^{-7}$$

$$+ 50,000\ (1+i)^{-8} = 314,048.88$$

Se puede ver que esta suma de términos es una progresión geométrica con:

$a_1 = 50,000 = R$

$r = (1+i)^{-1}$

$S = C$

y su fórmula correspondiente es:

$$C = \frac{R - R\left[(1+i)^{-1}\right]^{n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{R - R\,(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{\frac{1+i-1}{1+i}}$$

$$= R\left[\frac{(1+i)-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] = R\left[\frac{i}{i}+\frac{1}{i}-\frac{(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$= R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

La notación del valor actual de una anualidad anticipada es:

$$C = R\,\bar{a}_{\overline{n|}\,i} \quad \text{donde} \quad \bar{a}_{\overline{n|}\,i} = 1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

Aplicando la fórmula de valor actual al ejemplo anterior tenemos que:

$C = ?$

$R = 50,000$

$n = 9$

$i = 0.1028$

$$C = 50,000\left[1+\frac{1-(1+0.1028)^{-8}}{0.1028}\right] = 314,048.88$$

Ejemplo:

Si se puede adquirir un articulo pagando $300,000.00 de inmediato y haciendo 4 abonos bimestrales por la misma cantidad, ¿cuál es su valor de contado si se considera un interés a razón del 82% anual convertible con la misma periosidad que los pagos?

Solución

$C = ?$

$R = 300,000$

$n = 4$

$i = 0.82/6 = 0.136$

Aplicando la fórmula de valor actual tenemos:

$$C = 300,000 + 300,000\left[1+\frac{1-(1+0.136)^{-3}}{0.136}\right] = 1,301,191.25$$

3.3 Renta, plazo e interés

Cuando se desea conocer cualquiera de estos tres conceptos se utilizan las fórmulas de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo.

Ejemplo:

En una tienda se vende una licuadora por $80,000.00 al contado o mediante cinco abonos mensuales anticipados. Si el interés es del 72.24% anual convertible mensualmente, calcúlese el valor del pago.

Solución

C = 80,000

R = ?

n = 5

i = 0.7224/12 = 0.0602

$$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$R = \frac{C}{\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]}$$

$$R = \frac{80,000}{\left[1 + \frac{1-(1+0.0602)^{-4}}{0.0602}\right]}$$

$$R = \frac{80,000}{4.46351929} = 17,923.08$$

Ejemplo:

La Srita. Torres debe pagar **$2,000,000.00** dentro de dos años, y para reunir esta cantidad decide hacer **4** depósitos mensuales en una cuenta de inversión que rinde el 2% efectivo mensual de interés. ¿De cuánto deben ser sus depósitos si hoy realiza el primero?

Solución

$M = 2,000,000$

$R = ?$

$n = 4$

$i = 0.02$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

$$R = \frac{M}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]}$$

$$R = \frac{2,000,000}{\left[\frac{(1+0.02)^{5}-1}{0.02}-1\right]}$$

$$R = \frac{2,000,000}{4.20404016} = 475,732.8484$$

Ejemplo:

En una tienda se vende un televisor a colores por **$1,900,000.00** al contado o mediante pagos mensuales anticipados de **$300,000.00** con un interés del **9%** anual convertible mensualmente. ¿Cuántos pagos será necesario hacer para adquirir el televisor?

Solución

$C = 1,900,000$

$R = 300,000$

$n = ?$

$i = 0.09/12 = 0.0075$

$$C = R \left[1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i} \right]$$

$$C/R = 1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i}$$

$$i\ (C/R - 1) = 1 - (1+i)^{-n+1}$$

$$Ci/R - i - 1 = -\ (1+i)^{-n+1}$$

$$(1+i)^{-n+1} = 1 + i - Ci/R$$

$$-n+1\ \log(1+i) = \log(1 + i - Ci/R)$$

$$-n+1 = \frac{\log(1 + i - Ci/R)}{\log(1+i)}$$

$$n - 1 = - \frac{\log(1 + i - Ci/R)}{\log(1+i)}$$

$$n = 1 - \frac{\log(1 + i - Ci/R)}{\log(1+i)}$$

Aplicando la fórmula al ejemplo anterior se tiene:

$$n = 1 - \frac{\log(1+0.0075 - 1,900,000\ (0.0075)\ /\ 300,000)}{\log(1 + 0.0075)}$$

$$n = 1 - \frac{\log(0.96)}{\log(1.0075)}$$

$$n = 1 + 5.463318181$$

$$n = 6.463318181 \text{ mensual}$$

Ejemplo:

Una persona desea reunir **$3,000,000.00** mediante depósitos anticipados mensuales de **$200,000.00** en una cuenta bancaria que paga **10%** anual convertible mensualmente ¿cuántos depósitos tendrá que hacer para reunir esa cantidad?
Solución

$M = 3,000,000$

$R = 200,000$

$n = ?$

$i = 0.10/12 = 0.0083$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$3,000,000 = 200,000\left[\frac{(1.0083)^{n+1} - 1}{0.0083} - 1\right]$$

$$\left[\frac{3,000,000}{200,000} + 1\right] 0.0083 + 1 = (1.0083)^{n+1}$$

$$(1.0083)^{n+1} = 1.1328$$

$$(n+1)\log(1.0083) = \log(1.1328)$$

$$n = \frac{\log(1.1328)}{\log(1.008)} - 1$$

$$n = 15.08544635 - 1$$

$$n = 14.08544635$$

$$0.08544635\ (30) = 2.56$$

Por lo tanto en 14 meses y aproximadamente 2 días reuniría lo que desea.

Ejemplo:

Se ofrecen en venta casas a crédito que se entregan un año después de efectuar la solicitud. En el momento de la entrega se debe pagar un enganche de **$2,500,000.00**, si la compañía acepta recibir a cambio del enganche **12** mensualidades anticipadas de **$182,744.10**, ¿qué tipo de interés anual convertible mensualmente es el que paga la compañía?

Solución

$M = 2,500,000$

$R = 182,744.10$

$n = 12$

$i = ?$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$2,500,000 = 182,744.10\left[\frac{(1.i)^{13} - 1}{i} - 1\right]$$

$$\frac{2,500,000}{182,744.10} + 1 = \frac{(1.i)^{13} - 1}{i}$$

$$\frac{(1.i)^{13} - 1}{i} = 14.68033222$$

Y al igual que se a hecho antes, se determina i mediante un proceso de interpolación cuyo primer paso consiste en aproximarlo mediante ensayos:

Si $i = 0.03$ entonces $i = 15.61779045$

Si $i = 0.02$ entonces $i = 14.68033152$

Debido a que si $i = 0.02$ es prácticamente el factor buscado, la respuesta del ejemplo es, la compañía, paga una tasa efectiva mensual del 12% y una tasa anual de **0.2 (12) = 0.24** es decir el **24%** anual convertible mensualmente.

Ejemplo:

Una empresa de seguros hace préstamos a sus empleados con más de 10 años de antigüedad y cierto nivel de sueldo en las siguientes condiciones:

Importe del prestamo $1,000,000.00

Plazo 18 meses

Pago 18 abonos mensuales de $56,000.00 comenzando al momento de entregar el préstamo ¿qué interés anual convertible mensual le cobra la empresa a sus empleados?

Solución

$C = \$1,000,000$

$R = 56,000$

$n = 18$

$i = ?$

$$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

sustituyendo valores

$$1,000,000 = 56,000\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-18+1}}{i}\right]$$

$$\frac{1,000,000}{56,000} - 1 = \frac{1-(1+i)^{-17}}{i}$$

$$16.85714286 = \frac{1-(1+i)^{-17}}{i}$$

se determina i mediante un proceso de interpolación, cuyo primer paso consiste en aproximar i mediante ensayos.

Si $i = 0.01$ entonces $i = 15.562251$

Si $i = 0.001$ entonces $i = 16.86308124$

Si $i = 0.009$ entonces $i = 16.86308129$

aplicando el método del capítulo anterior para encontrar el valor de i se tiene:

$$\frac{16.85714286 - 16.8479641}{16.86308129 - 16.8479641} = \frac{0.00917876}{0.015117188} = 0.607173768$$

$$0.001 - 0.607173768(0.001 - 0.0009) = 0.00093$$

por lo tanto el valor de $i = 0.00093$

Se puede verificar que ésta tasa dá una mejor aproximación al factor;

$$\frac{1 - (1.00093)^{-17}}{0.00093} = 16.85714025 \approx 16.85714286$$

que es prácticamente el valor que se busca.

Por ello la respuesta del ejemplo anterior, es que la compañía de seguros les cobra a sus empleados un interés del **0.093%** efctivo mensual o **1.116%** anual convertible mensualmente.

3.4 Resumen

En este capítulo se introdujo el concepto de las anualidades anticipadas y se vió que este tipo de anualidades se pueden manejar con las ya conocidas fórmulas de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo y que sólo se requieren de pequeñas modificaciones para tomar en cuenta que los pagos o depósitos se hacen por anticipado, teniendo en cuenta que la definición de una anualidad anticipada es, aquella donde al inicio de los pagos o depósitos se hacen en el mismo período en que se formaliza la operación.

FORMULAS IMPORTANTES

$$M = R\ \bar{S}_{\overline{n+1}|\,i} \qquad \text{donde} \qquad \bar{S}_{\overline{n+1}|\,i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1$$

$$C = R\ \bar{a}_{\overline{n}|\,i} \qquad \text{donde} \qquad \bar{a}_{\overline{n}|\,i} = 1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i}$$

$$n = 1 - \frac{\log(1 + i - Ci/R)}{\log(1+i)}$$

CAPITULO 4

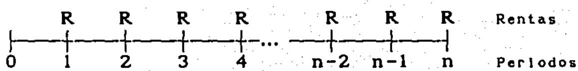
ANUALIDADES DIFERIDAS

4.1 Introducción

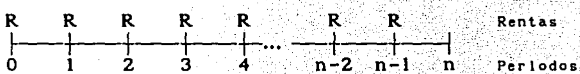
En este capítulo se analizarán las anualidades diferidas. Al igual que en el capítulo anterior, se reduce el análisis a las anualidades simples y ciertas, debido a que sus contrapartes los casos generales y contingentes, se verán en los siguientes capítulos. Las anualidades diferidas, surgen del criterio de clasificación referente al momento en que se inician los pagos o abonos. Es por eso que las anualidades diferidas se definen como aquellas en las que el inicio de los cobros o depósitos se posponen para un período posterior al de la formalización de la operación.

Para el estudio de este tipo de anualidades no se requieren de nuevas fórmulas ya que se manejan con las mismas expresiones que se han venido utilizando y que se obtuvieron para las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo. Sólo será necesario hacer las modificaciones necesarias para tomar en consideración la pospuesta en el inicio de los pagos o depósitos.
Sería útil hacer un diagrama de tiempo y valor para comprender mejor los distintos tipos de anualidades hasta ahora analizadas.

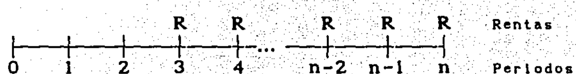
Anualidad Vencida



Anualidad Anticipada



Anualidad Diferida



4.2 Monto y valor actual

Se ilustrarán estos conceptos mediante los siguientes ejemplos:

Una tienda de árticulos eléctricos ofrece un plan de venta de "compre ahora y pague después" con este plan, el Ing. Luna adquirió una cocina integral que recibe el 1o de enero y que debe pagar mediante 5 mensualidades de $650,000.00 a partir del 1o de julio, si se considera el interés del 12% anual convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de contado de la cocina integral?

Solución

$C = ?$

$R = \$650,000$

$n = 5$

$i = 0.12/12 = 0.01$

Aplicando la fórmula del valor actual de una anualidad vencida se tiene:

$$C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$C = 650,000 \frac{1 - (1+0.01)^{-5}}{0.01} = 650,000 \; (4.853431231) = 3,154,730.3$$

que sería el valor actual de una anualidad vencida el primero de junio, ya que se calculó con la fórmula de una anualidad vencida.
Lo único que resta hacer es calcular el valor actual de 3,154,730.3 al primero de enero, que es cuando el Ingeniero Luna recibió la cocina integral es decir:

$$C = 3,154,730.3 \; (1+i)^{-n}$$

$$= 3,154,730.3 \; (1.01)^{-5}$$

$$= 3,001,617.63$$

que es el valor actual al primero de enero, en resumen se tiene que:

$$C = 650,000 \frac{1 - (1+0.01)^{-5}}{0.01} (1+0.01)^{-5}$$

$$C = 650,000 \; (4.853431231) \; (0.951465687) = 3,001,617.63$$

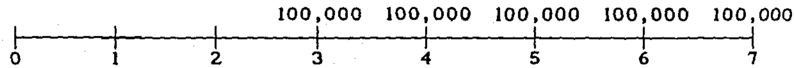
Como puede verse en este ejemplo y los restantes del capítulo, en el caso de las anualidades diferidas lo que se hace es encontrar el valor actual (o monto) de la anualidad vencida y pagadera en el primer período de tiempo correspondiente (3,154,730.3, en este caso); y luego trasladarla, tantos periodos hacia atrás como sea necesario, y ésto es en otras palabras, el planteamiento de la ecuación de equivalencia apropiada.

Ejemplo:

Una persona desea un préstamo por el cual puede pagar **$100,000.00** anuales durante **5** años, efectuándo el primer pago al final del tercer año. Si la tasa de interés es del **7%** efectivo anual ¿cuánto se le puede prestar?

Solución

Haciendo un diagrama de tiempo y valor se tiene:



C = ?

R = $100,000

n = 5

i = 0.07

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$C = 100{,}000\,\frac{1-(1+0.07)^{-5}}{0.07}\,(1+0.07)^{-2}$$

$$C = 100{,}000\,(\,4.100197435)\,(0.873438728)$$

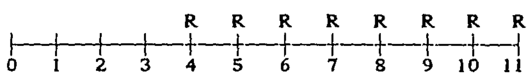
$$C = 358{,}127.1234$$

Ejemplo:

Calcular el valor actual de una renta semestral de **$500,000.00** durante **4** años, si el primer pago semestral se realiza dentro de **2** años y el interés es del **15%** efectivo semestral.

Solución

Haciendo un diagrama de tiempo y valor se tiene:



C = ?

R = $500,000

n = 8

i = 0.15

Aplicando la fórmula descrita se tiene que:

$$C = R\ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$C = 500{,}000\ \frac{1 - (1+0.15)^{-8}}{0.15}\ (1+0.15)^{-3}$$

$$C = 500{,}000\ (\ 4.487321508)\ (0.657516232)$$

$$C = 1{,}475{,}243.36$$

Ejemplo:

¿Cuál es el monto de la anualidad planteada en el ejemplo anterior?

Solución

El monto se puede calcular como el de una anualidad vencida, ya que la consideración de sí, la anualidad es diferida o pagadera en el primer período de tiempo carace de interés cuando lo que se requiere es determinar el monto. Por lo tanto el monto es:

$$M = R\ \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$ y en este caso se tiene que

$$M = 500{,}000\ \frac{(1+0.15)^{8} - 1}{0.15}$$

$$M = 6{,}683{,}409.54$$

Puede observarse que se puede calcular el monto como el valor futuro, es decir:

$M = 1{,}475{,}243.36\ (1+0.15)^{11}$

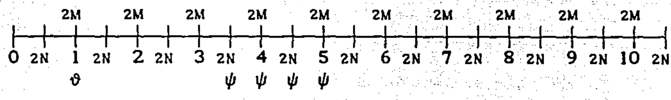
$M = 6{,}683{,}409.54$

Ejemplo:

El 2 de mayo del primer año se depósitan $500,000.00 y apartir del 2 de noviembre del tercer año y hasta el 2 de mayo del quinto año se depositan cada 6 meses $300,000.00 en una cuenta que abona el 28% efectivo semestral, ¿cuánto se habrá acumulado al 2 de noviembre del año 10?

Solución

Haciendo un diagrama de tiempo y valor se tiene:



2M = 2 de mayo

2N = 2 de noviembre

ϑ = \$500,000

ψ = \$300,000

$$M = 500{,}000\ (1+0.28)^{20} + 300{,}000\ \frac{(1+0.28)^{4} - 1}{0.28}\ (1.28)^{11}$$

$$M = 69{,}689{,}828.72 + 1{,}804{,}665.6\ (15.11157274)$$

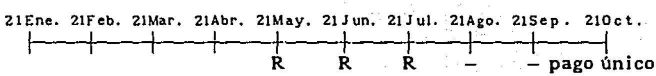
$$M = 96{,}961{,}164.21$$

Ejemplo:

El 21 de enero un deudor acuerda pagar su deuda mediante 6 pagos mensuales de \$850,000.00 haciendo el primero el 21 de mayo del mismo año. Si después de realizar el tercer pago deja de hacer 2 pagos ¿qué pago único deberá hacer al vencer el último pago pactado originalmente para saldar completamente su deuda, si el interés se calcula al 68.4% anual convertible mensualmente.

Solución

El valor del monto de su deuda total sería el siguiente: Haciendo un diagrama de tiempo y valor se tiene



El monto de su deuda al 21 de octubre sería:

$$M = 850{,}000\ \frac{(1+0.057)^{6} - 1}{0.057} = 5{,}884{,}398.557$$

$$M = 5{,}884{,}398.557$$

Pero el valor de lo que en realidad se pagó al finalizar el plazo es:

$$M = 850{,}000\ \frac{(1+0.057)^{3} - 1}{0.057}\ (1+0.057)^{3}$$

$$M = 3{,}186{,}286.906$$

Por lo tanto el pago único que deberá hacer para saldar su deuda el 21 de octubre será de:

$$5,884,398.557 - 3,186,286.906 = 2,698,111.651$$

4.3 Renta, plazo e interes

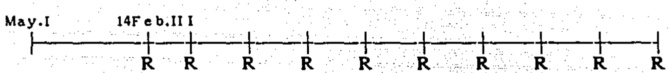
Son tres conceptos bastante interesante, ya que implican una serie de conceptos ya dominados y explicados hasta este momento.
Algunos ejemplos son los siguientes:

Ejemplo:

El 14 de mayo del primer año se depositaron **$750,000.00** en un fondo de inversión, con el objeto de retirar 10 mensualidades a partir del 14 de febrero del tercer año. Si los interesés que gana la inversión son del 57.48% anual convertible cada mes, hallar el valor de las mensualidades que se podrán retirar.

Solución

Haciendo un diagrama de tiempo y valor se tiene:



$$750,000 = R\ \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i}\ (1+i)^{-20}$$

$i = 0.57.48/12$

$i = 0.0479$

$$750,000 = R\ \frac{1 - (1.0479)^{-10}}{0.0479}\ (1.0479)^{-20}$$

$$750,000 = R\ (7.801092545)\ (0.392286346)$$

$$750,000\ R\ (3.060262093)$$

$$R = \frac{750,000}{3.060262093}$$

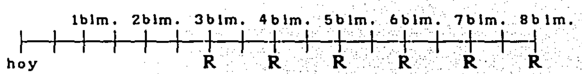
$$R = 245,077.05$$

Ejemplo:

El valor de contado de un televisor a colores es de **$1,500,000.00**, se puede adquirir a crédito mediante 6 pagos bimestrales, el primero de los cuales debe realizarse 6 meses después de la adquisición. Si el interés que se carga es del 11% efectivo bimestral ¿de cuánto deben ser los pagos?

Solución

Haciendo un diagrama de tiempo y valor se tiene:



$$1{,}500{,}000\ (1.11)^2 = R\ \frac{1-(1.11)^{-6}}{0.11}$$

$$1{,}848{,}150 = R\ (4.230537854)$$

$$R = \frac{1{,}848{,}150}{4.230537854}$$

$$R = 436{,}859.346$$

Planteado de otra manera

$$1{,}500{,}000\ (1.11)^8 = R\ \frac{1-(1.11)^{6}}{0.11}$$

$$3{,}456{,}806.654 = R\ (7.912859565)$$

$$R = \frac{3{,}456{,}806.655}{7.912859565}$$

$$R = 436{,}859.346$$

Ejemplo:

Si se depósitan hoy \$2,000,000.00 en una cuenta de inversiones que paga el 66% anual convertible mensualmente, ¿cuántos retiros mensuales de \$250,000.00 se podrán hacer comenzando dentro de seis meses?

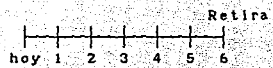
Solución

$C = 2,000,000$

$R = 250,000$

$n = ?$

$i = 0.66/12 = 0.055$



$$2,000,000(1.055)^5 = 250,000\left[\frac{1-(1.055)^{-n}}{0.055}\right]$$

$$\frac{2,613,920.01}{250,000} = \frac{1-(1.055)^{-n}}{0.055}$$

$$10.455668005\ (0.055) = 1 - (1.055)^{-n}$$

$$1 - 0.575062402 = (1.055)^{-n}$$

$$0.424937597 = (1.055)^{-n}$$

$$\log 0.424937597 = -n \log 1.055$$

$$-n = \frac{\log (0.424937597)}{\log 1.055}$$

$$-n = \frac{-0.37167484}{0.02325245}$$

$$-n = -15.9843237$$

$$n = 15.9843237$$

Puede observarse que ésta sería la respuesta matemática y la respuesta real es la siguiente:

a) Retirar 15 mensualidades de 250,000 y una decimosexta de :

$$2{,}613{,}920.01\ (1.055)^{15} - 250{,}000\ \frac{(1.055)^{15} - 1}{0.055}$$

$$= 233{,}349.1015$$

b) Retirar 14 mensualidades de 250,000 y una decimoquinta de:

$$2{,}613{,}920.01\ (1.055)^{14} - 250{,}000\ \frac{(1.055)^{14} - 1}{0.055}$$

$$= 458{,}150$$

Ejemplo:

Si para pagar una deuda de $800,000,000 se hacen 5 pagos mensuales de $250,000.00 comenzando 8 meses después de formalizar la operación, Cuál fué la tasa efectiva mensual de interés que se cobró?

Solución

Hciendo un diagrama de tiempo y valor se tiene que:

800,000			250,000	250 mil	250 mil	250 mil	250 mil
hoy	1	7	8	9	10	11	12

$$800{,}000\ (1+ i)^{7} = 250{,}000 \left(\frac{1-(1+i)^{-5}}{i} \right)$$

$$\frac{\dfrac{1-(1+i)^{-5}}{i}}{(1+i)^{7}} = \frac{800{,}000}{250{,}000}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i(1+i)^{7}} = 3.2$$

el siguiente paso consiste en ensayar valores de i para encontrar dos valores entre los cuales se encuentra 3.2 y después aproximar i mediante una interpolación lineal.

$$\text{Si } i = 0.45 \qquad = 3.22587984$$

$$i = 0.458 \qquad = 3.20150514$$

$$i = 0.0458 \qquad = 3.19998859$$

$$i = 0.04584 \qquad = 3.20029183$$

debido a que si $i = 0.04584 = 3.20029183$

es prácticamente el valor buscado del factor, ya que:

$$3.200291183 \simeq 3.2$$

Comprobando:

$$800{,}000\ (1.04584)^7 = 250{,}000\ \frac{1-(1.04584)^{-5}}{0.04584}$$

$$1{,}094{,}830.088 \simeq 1{,}094{,}830.09$$

Por lo tanto, el interés fué del 4.58% mensual aproximadamente.

4.4 Resumen

En este capítulo se revisaron las anualidades diferidas, que son aquellas en las que se pospone el inicio de los cobros o depósitos para un período posterior al de la formalización del trato.

Este tipo de anualidades pueden resolverse utilizando las fórmulas ya conocidas simplemente haciendo modificaciones necesarias para ordenar las posiciones de los pagos.

Se observa que en el cálculo del monto, la posposición, o diferimiento de las rentas no tiene efecto sobre el comportamiento de una anualidad y por eso se puede determinar en forma directa con la fórmula del monto o capital de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo.

CAPITULO 5

CASO GENERAL DE ANUALIDADES

5.1 introducción

Las anualidades generales son aquellas en el que el período de pago no coincide con el período de capitalización.

En este capítulo se analizarán las anualidades generales, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo, exeptuando las anualidades contingentes ya que se analizaran en el último capítulo.
Los casos diferidos y anticipados de las anualidades generales pueden resolverse combinando los métodos de los capítulos anteriores.
La forma más sencilla de resolver las anualidades generales es modificarlas para que se ajusten al caso simple y luego utilizar las fórmulas ya conocidas de estas para encontrar los valores deseados.
Existen dos principales maneras de convertir anualidades generales a anualidades simples y son:

a) Encontrando la tasa de interés equivalente.

b) Encontrando la renta o pago periódico equivalente.

Hay dos casos de anualidades generales los cuales son:

1 El período de pago es más largo que el de capitalización.

2 El período de capitalización es más largo que el período de pago.

5.2 Monto y valor actual

Se utilizara un ejemplo sencillo para ilustrar los dos métodos más comunes.

Caso 1 El período de pago es más largo que el de capitalización.

Método a) Encontrando la tasa de interés equivalente.

Ejemplo:

Encontrar el monto de 4 pagos trimestrales por concepto de un automóvil si los pagos son de $985,000.00 y el interés es del 66% anual comvertible mensualmente.

Solución

M = ?

R = 985,000

n = 4 trimestres.

i = 0.66/12 = 0.055 mensual

Encontrando la tasa de interés equivalente en cada uno de los trimestres hay tres periodos de capitalización. Si concideramos un solo trimestre tendriamos que encontrar la tasa trimestral efectiva que es equivalente a una tasa mensual efectiva del 5.5%.
Realizando la converción se tiene:

$$(1+i)^4 = (1+0.055)^{12}$$

$$i = (1.055)^{12/4} - 1 = (1.055)^3 - 1 = 1.17424138 - 1 = 0.17424138$$

Habiendo obtenido la tasa efectiva por trimestre hemos convertido la anualidad general en una simple con los siguientes datos:

M = ?

R = 985,000

n = 4 trimestres.

i = 0.17424138

y se resuelve aplicando la fórmula conocida del monto para una anualidad simple:

$$M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$M = 985{,}000\,\frac{(1+0.17424138)^4 - 1}{0.17424138}$$

$$M = 985{,}000\ (5.172178492)$$

$$M = 5{,}094{,}595.81$$

Método b)

Encontrando la renta equivalente.
Como se plantéo el interés capitalizable cada mes, tendriamos que encontrar una renta mensual durante tres meses que fuera equivalente a una renta trimestral de $985,000.00
Por lo tanto para encontrar la renta equivalente sera:

M = 985,000

R'= ?

n = 3 trimestres.

i = 0.055

aplicando la fórmula de monto de una anualidad se tiene que:

$$M = R' \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$985{,}000 = R' \frac{(1+0.055)^3 - 1}{0.055}$$

$$R' = \frac{985{,}000}{3.168025091}$$

$$R' = 310{,}919.25$$

Ahora, se determinara el monto de estas rentas equivalentes para el plazo completo de la anualidad.

M = ?

R = 310,919.25

n = 4 trimestres por 3 meses cada uno igual a 12.

i = 0.055

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$M = 310{,}919.25 \frac{(1+0.055)^{12} - 1}{0.055}$$

$$M = 310{,}919.25\ (16.38559065)$$

$$M = 5{,}094{,}595.55$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo mediante el otro método.

Caso 2

El período de capitalización es más largo que el período de pago.

Método a) Encontrando la tasa de interés equivalente.

Ejemplo:

Encontrar el monto de un conjunto de 10 depósitos mensuales de $250,000.00 si el interés que se gana es del 60% anual convertible semestralmente

Solución

Como las rentas son mensuales, es necesario encontrar el interés efectivo mensual equivalente al 30% semestral también efectivo.

$$(1+i)^{12} = (1+0.3)^{2}$$

$$i = (1.3)^{2/12} - 1 = (1.3)^{1/6} - 1 = 1.044697507 - 1 = 0.044697507$$

Por lo cual el problema se resuelve con:

$M = ?$

$R = 250,000$

$n = 10$

$i = 0.044697507$

aplicando la fórmula conocida del monto para una anualidad simple:

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$M = 250,000\,\frac{(1+0.044697507)^{10} - 1}{0.044697507}$$

$$M = 250,000\ (12.27092909)$$

$$M = 3,067,732.273$$

Método b) Encontrando la renta equivalente. Se determina la renta que coincide con el período de capitalización de 6 meses, se puede apreciar que esa renta es el monto de las rentas mensuales por semestre

$$R' = \frac{(1+0.044697507)^6 - 1}{0.044697507}$$

$$R' = 250{,}000(6.71178363)$$

$$R' = 1{,}677{,}945.908$$

por lo cual para el plazo total tenemos:

$M = ?$

$R = 1{,}677{,}945.908$

$n = 10/6 = 5/3 = 1.66666667$

$i = 0.3$

$$M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$M = 1{,}677{,}945.908\,\frac{(1+0.3)^{5/3} - 1}{0.3}$$

$$M = 1{,}677{,}945.908\ (1.828266509)$$

$$M = 3{,}067{,}732.307$$

Que es prácticamente el resultado anterior.

Ejemplo:

Calcular el valor actual de un conjunto de 4 pagos trimestrales de \$50,000.00 si el interés es del 66% anual convertible mensualmente.

Solución

a) Encontrando el interés equivalente.

Como ya sabemos tenemos que encontrar la tasa efectiva trimestral equivalente a una tasa del 5.5% mensual efectiva, es decir:

$$(1+i)^4 = (1+0.055)^{12}$$

$$i = (1.055)^{12/4} - 1 = (1.055)^3 - 1 = 1.17424138 - 1 = 0.17424138$$

aplicando la fórmula de valor actual con los siguientes datos

$C = ?$

$R = 50{,}000$

$n = 4$

$i = 0.17424138$

sustituyendo los valores

$$C = R\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$C = 50{,}000\,\frac{1 - (1+0.17424138)^{-4}}{0.17424138}$$

$$C = 50{,}000\ (2.72047025)$$

$$C = 136{,}023.51$$

b) Encontrando la renta equivalente.

Se tendría que encontrar una renta mensual durante tres meses que fuera equivalente a una renta trimestral de $50,000.00 por lo cual se tiene que:

$M = 50{,}000$

$R' = ?$

$n = 3$

$i = 0.055$

aplicando la fórmula de monto de una anualidad se tiene que:

$$M = R' \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$50{,}000 = R' \frac{(1+0.055)^3 - 1}{0.055}$$

$$R' = \frac{50{,}000}{3.168025091}$$

$$R' = 15{,}782.70374$$

y ya que tenemos la renta mensual equivalente a la renta trimestral, aplicamos la fórmula de valor actual con los siguientes datos

$C = ?$

$R = 15{,}782.70374$

$n = 4\ (3) = 12$ meses.

$i = 0.055$

$$C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

sustituyendo valores

$$C = 15,782.70374 \frac{1 - (1+0.055)^{-12}}{0.055}$$

$$C = 15,782.70374\ (8.618517849)$$

$$C = 136,023.5139$$

Que es el mismo resultado del inciso a).

Ejemplo:

¿Cuál es el monto y el valor actual de un conjunto de 24 pagos bimestrales de $45,000.00 si el interés es del 18% trimestral efectiva? Utilice la tasa equivalente.

Solución

Tenemos que encontrar una tasa efectiva bimestral equivalente a una tasa del 18% trimestral efectiva, por lo cual se tiene que:

$$(1+i)^{6} = (1+0.18)^{4}$$

$$i = (1.18)^{4/6} - 1 = (1.18)^{2/3} - 1 = 1.116660973 - 1 = 0.116660973$$

Para encontrar el valor actual tenemos los siguientes datos:

$C = ?$

$R = 45,000$

$n = 24$

$i = 0.116660973$

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$C = 45,000 \frac{1 - (1+0.116660973)^{-24}}{0.116660973}$$

$$C = 45,000\ (7.965163255)$$

$$C = 358,432.3465$$

Para encontrar el monto podemos calcularlo como:

$$M = C\ (1+i)^n$$

$$M = 358{,}432.3465 \quad (1.116660973)^{24}$$

$$M = 358{,}432.3465\ (14.12902229)$$

$$M = 5{,}064{,}298.613$$

Para comprobar tenemos que:

$$M = R\ \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

como ya sabemos;

M = ?

R = 45,000

n = 24

i = 0.116660973

sustituyendo valores

$$M = 45{,}000\ \frac{(1+0.116660973)^{24} - 1}{0.11666973}$$

$$M = 45{,}000\ (112.539969)$$

$$M = 5{,}064{,}298.607$$

Que sería el resultado anterior.

5.3 Renta

Para encontrar la renta, se convierte la anualidad general en otra equivalente, y como se busca la renta, entonces se utiliza la tasa equivalente.

Ejemplo:

Un profecionista desea ahorrar $25,000.00 en los proximos dos años para adquirir el enganche de un departamento, si puede hacer depósitos semanales en una cuenta que paga el 14% anual convertible mensualmente ¿cuánto debe depositar cada semana si se concideran 48 semanas al año?

Solución

$$i = 0.14/12 = 0.011666666 \text{ efectiva mensual}$$

Tenemos que encontrar una tasa efectiva semanal equivalente a una tasa mensual del 0.011666666 efectiva mensual

$$(1+i)^4 = (1+0.011666667)$$

$$i = (1.11666666)^{1/4} - 1 = 1.002903992 - 1 = 0.002903992$$

Para encontrar la renta tenemos los siguientes datos:

M = 25,000,000

R = ?

n = 96

i = 0.002903992

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$25{,}000{,}000 = R \frac{(1+0.002903992)^{96} - 1}{0.002903992}$$

$$R = \frac{25{,}000{,}000}{109.1822394}$$

$$R = 228{,}974.97$$

Ejemplo:

Un empleado adquiere un seguro para su automóvil a través de la póliza grupal de la empresa donde trabaja. Si el valor de contado del seguro es de $900,000.00 la vigencia de póliza es de un año, el interés es del 18% anual convertible mensualmente y va a pagar mediante descuentos quincenales por nómina, ¿cuánto es lo que le descontarán cada quincena?

Solución

i = 0.18/12 = 0.015 efectiva mensual

Tenemos que encontrar una tasa efectiva quincenal equivalente a una tasa del 0.015 efectiva mensual

$$(1+i)^{24} = (1+0.015)^{12}$$

$$i = (1.015)^{1/2} - 1 = 1.007472084 - 1 = 0.007472084$$

Para encontrar el valor actual tenemos los siguientes datos:

C = 900,000

R = ?

n = 24

i = 0.007472084

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$C = R\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$900{,}000 = R\,\frac{1 - (1+0.007472084)^{-24}}{0.007472084}$$

$$R = \frac{900{,}000}{21.89651193}$$

$$R = 41{,}102.4369$$

Ejemplo:

Para la compra de un automóvil salido de la agencia, que cuesta \$28,000,000.00 se ofrece el siguiente plan:

- Enganche del 45% del precio de compra.

- 36 meses de plazo para pagar.

- 21.65% efectivo trimestral de interés.

¿ de cuánto tendrían que ser los 36 pagos mensuales?

Solución

Tenemos que calcular una tasa mensual efectiva a una tasa del 21.65% efectiva trimestralmente

$$(1+i)^{12} = (1+0.2165)^4$$

$$i = (1.2165)^{1/3} - 1 = 1.067506933 - 1 = 0.067506933$$

Por otro lado el enganche es de 12,600,000 por lo que:

$$28,000,000 - 12,600,000 = 15,4000,000$$

y para calcular la renta se tiene:

$C = 15,400,000$

$R = ?$

$n = 36$

$i = 0.067506933$

utilizando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$C = R\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$15,400,000 = R\,\frac{1 - (1+0.067506933)^{-36}}{0.067506933}$$

$$R = \frac{15,400,000}{3.40301033}$$

$$R = 4,525,405.011$$

5.4 Tasa de interés y plazo

Ejemplo:

¿A qué tasa de interés efectiva anual, tendría que hacerse 15 depósitos bimestrales de $500,000.00 para que arrojen un monto de $25,500,000.00 al momento de hacer el último depósito ?

Solución

M = 25,500,000
R = 500,000
n = 15 bimestres
i = ? (efectiva anual)

aplicando la fórmula correspondiente:

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$25,500,000 = 500,000\,\frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$$

$$\frac{25,500,000}{500,000} = \frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$$

$$51 = \frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$$

y, al igual que en capítulos anteriores, se necesita encontrar el valor de i que haga que la expresión

$$\frac{(1+i)^{15} - 1}{i} = 51 \qquad \text{se cumpla}$$

si $i = 0.016$ $\qquad \frac{(1+i)^{15} - 1}{i} = 51.6595$

$i = 0.159$ $\qquad = 516595$

$i = 0.1585$ $\qquad = 512353$

$i = 0.15845$ $\qquad = 51.00371146$

$i = 0.15844$ $\qquad = 50.99950924$

interpolando entre i = 0.15845 e i = 0.15844

$$\begin{array}{ccc} 0.15844 & i & 0.15845 \\ \vdash\!\!\!\text{———————————} & \!\!\text{———————————}\!\!\! & \dashv \\ 50.99950924 & 51 & 51.00371146 \end{array}$$

$$\frac{i - 0.15844}{0.15845 - 0.15844} = \frac{51 - 50.99950924}{51.00371146 - 50.99950924} = \frac{0.00049076}{0.00420222}$$

$$= 0.116785889$$

por lo tanto:

$$\frac{i - 0.15844}{0.15845 - 0.15844} = \frac{i - 0.15844}{0.00001} = 0.116785889$$

$$i = 0.116785889\ (0.00001) + 0.15844 = 0.158441167$$

entonces i = 0.158441167 es la tasa bimestral, comprobando se tiene que:

$$\frac{(1+0.158441167)^{15} - 1}{0.158441167} = 51.00000022$$

que practicamente es igual a 51.

para encontrar la tasa efectiva anual.

$$(1+i) = (1+0.158441167)^{6}$$

$$i = (1+0.158441167)^{6} - 1$$

$$i = 1.41681771 \text{ tasa efectiva anual}$$

Ejemplo:

Se depositan hoy \$12,000,000.00 y se hacen 6 retiros mensuales de \$2,500,000.00 ¿Qué tasa anual convertible semestralmente ganó el depósito?

Solución

$C = 12{,}000{,}000$
$R = 2{,}500{,}000$
$n = 6$
$i = ?$

aplicando la fórmula correspondiente:

$$C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

sustituyendo valores;

$$12{,}000{,}000 = 2{,}500{,}000 \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}$$

$$\frac{12{,}000{,}000}{2{,}500{,}000} = \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}$$

$$4.8 = \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}$$

y, al igual que en el ejemplo anterior, se necesita encontrar el valor de i que haga que la expresión. . . .

$$\frac{1 - (1+i)^{-6}}{i} = 4.8 \qquad \text{se cumpla}$$

si $i = 0.06$ $\qquad \dfrac{1 - (1+i)^{-6}}{i} = 4.796112438$

$i = 0.068 \qquad = 4.796112438$

$i = 0.0678 \qquad = 4.799085521$

$i = 0.0677 \qquad = 4.800573145$

interpolando entre i = 0.0678 e i = 0.0677

$$\begin{array}{ccc} 0.0677 & i & 0.678 \\ \vdash\!\!\text{---------} & + & \text{---------}\!\!\dashv \\ 4.800573145 & 4.8 & 4.799085521 \end{array}$$

$$\frac{i - 0.0678}{0.0677 - 0.0678} = \frac{4.8 - 4.799085521}{4.800573145 - 4.799085521} = \frac{0.000914479}{0.001487624}$$

$= 0.614724554$

por lo tanto

$$\frac{i - 0.0678}{0.0677 - 0.0678} = \frac{i - 0.0678}{0.0001} = 0.614724554$$

$i = 0.6124554\ (-0.0001) + 0.0678 = -0.0000614724554 + 0.0678$

$i = 0.067738527$ **mensual.**

para encontrar la tasa anual convertible semestralmente, encontramos la tasa efectiva semestral.

$(1+i)^2 = (1+0.067738527)^{12}$

$i = (1+0.067738527)^{12/2} - 1$

$i = 0.4817996220$ **efectiva semestral.**

$i = 0.481799620\ (2) = 0.963599256$ **anual convertible semestralmente.**

Ejemplo:

El Ingeniero Torres desea acumular **$750,000,000.00** para poner una fabrica de circuitos para televisores, mediante un negocio que rinde una tasa del **48%** efectiva mensual, ésta cantidad de dinero la desea reunir mediante depósitos trimestrales de **$17,500,000.00** ¿Cuántos depósitos trimestrales deben hacerse?

Solución

primero encontramos la tasa de interés efectiva trimestral equivalente a una tasa efectiva mensual.

$$(1+i)^4 = (1+0.048)^{12}$$

$$i = (1.048)^{12/4} - 1 = 0.151022592 \text{ efectiva trimestral}$$

Para encontrar los depósitos tenemos los siguientes datos:

M = 750,000,000

R = 17,500,000

n = ?

i = 0.151022592

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

sustituyendo valores

$$750{,}000{,}000 = 17{,}500{,}000\,\frac{(1+0.1510225922)^n - 1}{0.1510225922}$$

$$\frac{750{,}000{,}000}{17{,}500{,}000}\,(0.151022592) + 1 = (1.0151022592)^n$$

$$42.85714286\,(0.151022592) + 1 = (1.0151022592)^n$$

$$6.4723968 + 1 = (1.0151022592)^n$$

$$7.4723968 = (1.0151022592)^n$$

aplicando logaritmos

$$\log 7.4723968 = n \;\log (1.0151022592)$$

$$n = \frac{\log 7.4723968}{\log 1.0151022592} = \frac{0.873459925}{0.006509794} = 134.1762721$$

n = 134 trimestres y 5 dias.

Ejemplo:

La unión de colonos de la asociación fuente de agua viva, de la delegación Alvaro Obregon, debe pagar un préstamo hipotecario que acaban de obtener , para construir un edificio de departamentos en condominio. El importe del préstamo es de **$1,750,000,000.00** y lo deben liquidar con pagos mensuales de **$27,000,000.00** comenzando a pagar un mes después de que se les entregen los departamentos. Si el interés pactado es del **12%** anual efectivo, **a)** ¿cuántos pagos completos deben hacer?, **b)** ¿con qué pago final menor, realizado un mes después del último pago completo, liquidan totalmente el prestamo?

Solución

a) Encontramos la tasa de interés mensual equivalente a una tasa del **12%** anual efectiva.

$$(1+i)^{12} = 1.12$$

$$i = (1.12)^{1/12} - 1 = 0.009488792$$

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$1{,}750{,}000{,}000 = 27{,}000{,}000 \frac{1 - (1+0.009488792)^{-n}}{0.009488792}$$

$$1 - \frac{1{,}750{,}000{,}000}{27{,}000{,}000} (0.009488792) = (1.009488792)^{-n}$$

$$1 - 0.615014356 = (1.009488792)^{-n}$$

$$0.384985643 = (1.009488792)^{-n}$$

$$(1.009488792)^{-n} = 0.384985643$$

aplicando logaritmos

$$-n \log (1.009488792) = \log (0.384985643)$$

$$-n = \frac{\log 0.384985643}{\log 1.009488792} = \frac{-(0.414555465)}{(0.004101501)} =-101.0740862$$

$$-n = 101.0740862$$

por lo tanto, tendrán que hacer 101 pagos completos mensuales o aproximadamente 8.41666 años.

b) Para encontrar el valor del último pago:

$$\begin{bmatrix} \text{último pago} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{valor (monto) del} \\ \text{prestamo al 102 mes} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{valor de los 101} \\ \text{pagos al 101 mes} \end{bmatrix}$$

por lo que la ecuación equivalente sera:

$$X = 1{,}750{,}000{,}000\ (1.009488792)^{102}$$

$$- \left[27{,}000{,}000\ \frac{(1.009488792)^{-101} - 1}{0.009488792}\right] (1.009488792)$$

$$X = 4{,}585{,}547{,}541 - 4{,}583{,}539{,}231$$

$$X = 2{,}008{,}309.61$$

5.5 Anualidades generales anticipadas

Este tipo de anualidades, como se vió antes, se refiere a las operaciones en las que los pagos o depósitos se hacen al principio del período de pago.

La solución se obtiene convirtiendo la anualidad general en una anualidad simple y vencida equivalente.

Ejemplo:

¿Cuál es el valor actual de un conjunto de 28 pagos semestrales anticipados de $750,000.00 si el interés es del 19% anual convertible cada cuatro meses?

Solución

Encontramos la tasa efectiva equivalente por semestre, el 19% anual convertible cada 4 meses equivale al 0.06333333 y la tasa equivalente por semestre es:

$$(1+i)^{2} = (1.06333333)^{3}$$

$$i = (1.06333333)^{3/2} - 1 = 0.096488654 \text{ efectiva semestral}$$

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$C = R \left[1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i} \right]$$

$$C = 750,000 \left[1 + \frac{1 - (1+0.096488654)^{-27}}{0.096488654} \right]$$

$$C = 7,876,576.556$$

Ejemplo:

¿Qué depósito anticipado quincenal se debe hacer durante 15 bimestres para acumular $32,000,000.00 quince días después de realizar el último depósito, si el dinero produce el 14% anual convertible cada mes?.

Solución

La tasa equivalente del 14% anual convertible cada mes es:

$i = 0.14/12 = 0.011666666$ efectiva mensual

Tenemos que encontrar una tasa efectiva quincenal equivalente a una tasa efectiva mensual del 0.011666666

$$(1+i)^{24} = (1+0.11666666)^{12}$$

$i = (1.11666666)^{1/2} - 1 = 1.056724496 - 1 = 0.056724496$ efectiva quincenal.

Por otro lado 15 bimestres equivalen a 15(4)= 60 quincenas

Para encontrar la renta tenemos los siguientes datos:

$M = 32,000,000$
$R = ?$
$n = 60$
$i = 0.056724496$

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$M = R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

sustituyendo valores

$$32,000,000 = R \left[\frac{(1+0.056724496)^{61} - 1}{0.056724496} - 1 \right]$$

$$R = \frac{32,000,000}{491.75566074}$$

$$R = 65,072.97429$$

Ejemplo:

Un artículo eléctrico se compra mediante crédito de la siguiente manera su valor es de $612,500.00 a pagar en 9 meses mediante pagos de $87,500.00 mensuales, comenzando a pagar al momento de la compra. ¿Qué interés efectivo anual se paga en la operación?

Solución

C = 612,500
R = 87,500
n = 9
i = ?

aplicando la fórmula correspondiente

$$C = R \left[1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i} \right]$$

sustituyendo valores

$$612,500 = 87,500 \left[1 + \frac{1 - (1+i)^{-9+1}}{i} \right]$$

$$\frac{612,500}{87,500} - 1 = \frac{1 - (1+i)^{-8}}{i}$$

$$7 = \frac{1 - (1+i)^{-8}}{i}$$

y, al igual que en los ejemplos anteriores, se necesita encontrar el valor de i que haga que la expresión:

$$\frac{1-(1+i)^{-8}}{i} = 7 \qquad \text{se cumpla}$$

$$\text{si } i = 0.03 \qquad \frac{1-(1+i)^{-8}}{i} = 7.019692189$$

$$i = 0.0299 \qquad = 6.990174149$$

$$i = 0.002999 \qquad = 7.001579338$$

interpolando entre i = 0.0299 e i = 0.00299

0.02999	i	0.0299
7.001579338	7	6.990174149

$$\frac{i - 0.0299}{0.02999 - 0.0299} = \frac{7 - 6.990174149}{7.001579338 - 6.990174149} = \frac{0.009825851}{0.011405189}$$

$= 0.861524609$

por lo tanto

$$\frac{i - 0.0299}{0.02999 - 0.02999} = \frac{i - 0.0299}{0.00009} = 0.861524609$$

$i = 0.861524609\ (0.00009) + 0.0299$

$i = 0.029997537$ mensual.

y el interés efectivo anual es:

$(1+i) = (1+0.029997537)^{12}$

$i = (1+0.029997537)^{12} - 1$

$i = 0.425719975$ efectiva anual

Ejemplo:

¿Con cuántos pagos anticipados de **$100,000.00** realizados cada principio de mes, se alcanza un monto de **$713,458.014** si el dinero rinde **4.97%** efectivo semestral?

Solución

La tasa equivalente efectiva semestral a una efectiva mensual es:

$$(1+i)^{12} = (1+0.0497)^{2}$$

$$i = (1.0497)^{1/6} - 1 = 0.008116832 \quad \textbf{efectiva mensual}$$

Para encontrar los pagos anticipados tenemos los siguientes datos:

$M = 713{,}458.014$
$R = 100{,}000$
$n = ?$
$i = 0.008116832$

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right]$$

sustituyendo valores

$$713{,}458.014 = 100{,}000\left[\frac{(1+0.008116832)^{n+1}-1}{0.008116832} - 1\right]$$

$$\frac{713{,}458.014}{100{,}000} + 1 = \left[\frac{(1+0.008116832)^{n+1}-1}{0.008116832} - 1\right]$$

$$\left[\frac{713{,}458.014}{100{,}000} + 1\right](0.008116832) = (1.008116832)^{n+1}$$

$$1.06602702 = (1.008116832)^{n+1}$$

aplicando logaritmos

$$\log 1.06602702 = n+1 \quad \log (1.008116832)$$

$$\frac{\log 1.06602702}{\log 1.008116832} - 1 = n$$

$$n = \frac{0.027768212}{0.003510865} - 1$$

$$n = 7.909220324 - 1$$

$$n = 6.909220324$$

5.5 Anualidades generales diferidas

Como ya sabemos son aquellas en las que el período de pago y el de interés no coinciden y en las que además, se pospone el inicio de los pagos o depósitos para un período posterior al de la realización de la operación.

Ejemplo:

Al cumplir 18 años Evans depósita $7,500,000.00 en una cuenta de inversión que produce el 14% anual convertible mensualmente. Si desea comenzar a hacer retiros trimestrales de $8,000,000.00 el dia de su cumpleaños número 27. ¿Qué edad tendrá al realizar el último retiro menor de $8,000,000.00 3 meses despúes de haber hecho el último retiro completo?

Solución

$$(1+i)^4 = (1.011666666)^{12}$$

$$i = (1.011666666)^3 - 1 = 0.035409921 \quad \textbf{trimestral}$$

El valor de su depósito un trimestre antes de cumplir 27 años es:

$$7,500,000 \ (1.035409921)^{35} = 25,350,850.36$$

a anualidad equivalente es:

$$25{,}350{,}850.36 = 8{,}000{,}000\ \frac{1 - (1+0.035409921)^{-n}}{0.035409921}$$

$$1 - \frac{25{,}350{,}850.36}{8{,}000{,}000}\ (0.035409921) = (1.035409921)^{-n}$$

$$1 - 1.122089511 = (1.009488792)^{-n}$$

$$0.122089511 = (1.035409921)^{-n}$$

$$(1.035409921)^{-n} = 0.122089511$$

aplicando logaritmos

$$n = -\ \frac{\log\ 0.122089511}{\log\ 1.035409921} = 60.43556046$$

Hará entonces 60 retiros completos y un retiro sexagésimo de menor valor. Al hacer este último retiro tendrá 27 años más 60 trimestres; o sea 42 años.

Nota: Se suman 60 trimestres y no 61 por que el primero lo hace al cumplir los 27 años.

Ejemplo:

El 3 de junio del año 1, la compañía "Desarrollo de Sistemas y Análisis Computacional S.A de C.V", adquiere una deuda con valor de **$35,000,000.00** a pagar el 3 de junio del año 2. Poco antes de que venza su deuda la compañía ofrece a su acreedor cambiar ese pago único en 5 pagos mensuales a realizar el primero el 3 de octubre del mismo año 2.

Si acuerdan un interés del 65% efectivo anual ¿de cuanto deben ser los pagos mensuales?

Solución

La tasa equivalente es:

$$(1+i)^{12} = 1+0.65$$

$$i = (1.65)^{1/12} - 1 = 1.042614263 - 1 = 0.042614263$$

Por otro lado el valor del adeudo al 3 de septiembre del año 2 es:

$$35{,}000{,}000 \quad (1.042614263)^3 = 39{,}667{,}883.62$$

y para calcular la renta se tiene:

C = 39,667,883.62
R = ?
n = 5
i = 0.042614263

utilizando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$39{,}667{,}883.62 = R \frac{1 - (1+0.042614263)^{-5}}{0.042614263}$$

$$R = \frac{39{,}667{,}883.62}{4.419316007}$$

$$R = 8{,}976{,}023.339$$

5.7 Resumen

En este capítulo se analizo los casos generales de las anualidades hasta ahora estudiadas, haciendo notar que el período de pago y capitalización no coinsiden, también se comprobó que para resolver este tipo de anualidades, lo más fácil es modificar sus planteamientos para ajustarlas al caso simple y lugo aplicar las fórmulas de éstas que ya se revisarón antes.

Los métodos que pueden utilizarse para comvertir anualidades generales en simple son:

a) Encontrando la tasa de interés equivalente.

b) Encontrando la renta o pago periódico equivalente.

Al revisar los planteamientos de las anualidads generales, conviene identificar en cuál de sus dos casos posibles cae:

1 El período de pago es más largo que el de capitalización.

2 El período de capitalización es más largo que el período de pago.

Se debe de determinar que procedimiento de solución es más sencillo ya que el que se escoja dará el resultado correcto de la anualidad.

CAPITULO 6

ANUALIDADES CONTINGENTES

6.1 Introducción

Una anualidad contingente es aquella en la que su fecha de inicio o la de terminación o ambas, dependen de algún suceso que sabe va a ocurrir pero no se sabe cuando.

Algunos ejemplos muy comunes de anualidades contingentes serían:

a) El pago de una pensión a una viuda, por motivo del fallecimiento de su esposo.
b) El pago de una pensión a un trabajador que se jubila.

Vale la pena destacar que existe una clasificación de anualidades contingentes y son:

Renta vitalicia: Es una anualidad que se paga a una persona a partir de cierta fecha mientras ésta permanezca viva, y se le puede denominar anualidad vitalicia.

Anualidad contingente temporal: Es aquélla en la que se paga un número fijo de rentas, a diferencia de una renta durante todo el tiempo que la persona permanezca con vida.

Un dotal puro: Es un compromiso de pagar a una persona, determinada cantidad en una fecha futura, siempre y cuando esté viva para recibirla.
Son muy numerosas las aplicaciones y variaciones de las anualidades contingentes y, de hecho, su estudio exhaustivo compete al área del cálculo actuarial. Por lo cual sólo se ilustrarán algunos de los principales tipos de anualidades contingentes.

6.2 Nomenclatura

Se define una notación básica y general que se utiliza en el área de cálculo actuarial, para comprender y entender los ejemplos analizados en este capítulo.

l_x = El número de vivos a la edad x.

l_{x+n} = El número de vivos a la edad x+n.

P_x = Es la probabilidad de que una persona de edad x llege con vida a la edad x+1, y esta dada por:

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$_nP_x$ = Es la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad x+n, y esta dada por:

$$_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Valores conmutados

$D_x = (1+i)^{-n}\ l_x$

$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{99}$

$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{99}$

6.3 Valor actual de un dotal puro

Un dotal puro es una promesa de pagar una cantidad determinada a una fecha futura, si el beneficiario continúa con vida.
Sabemos que el valor actual de una cantidad pagadera a un futuro está dada por:

$$C = M\ (1+i)^{-n}$$

Ejemplo:

¿Cuál es el valor actual de $5,000,000.00 pagaderos dentro de 10 años si el interés es del 65% efectivo anual?

Solución

Aplicando la fórmula descrita arriba para el valor actual de un monto se tiene que:

$$C = 5,000,000\ (1.65)^{-10} = 5,000,000\ (0.00668591) = 33,429.55244$$

por otro lado:

¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene ahora 33 años de edad llegue con vida a los 39 años?

Solución

Como ya sabemos la probabilidad de que una persona de edad **x** llegue con vida a la edad **x+n**, está definida como:

$$_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

y utilizando la tabla de mortalidad anexada en el apéndice se tiene que:

$n = 6$

$l_x = l_{33} = 9633282$

$l_{x+n} = l_{39} = 9460361$

sustituyendo en la fórmula:

$$nPx = \frac{lx+n}{lx} = \frac{9460361}{9633282} = 0.982049627$$

Si se combinaran los resultados de ambos ejemplos se podría plantear el siguiente ejemplo.

¿Cuál sería el valor actual de $5,000,000.00, pagaderos dentro de 10 años a una persona que actualmente tiene 33 años, si llega a la edad de 39 años?

Solución

El significado de los cálculos anteriores se puede decir que son el valor actual de la cantidad multiplicada por la probabilidad de que el beneficiario cobre el dotal puro, (la probabilidad de que el beneficiario este vivo para cobrar) es decir:

$$C = M\ (1+i)^{-n}\ nPx$$

sustituyendo

$$C = 5,000,000\ (1.68)^{-10}\ (0.982049627)$$

Por lo que el valor actual es:

$$C = 33,429.55244\ (0.982049627)$$

$$C = 32,829.4795$$

Es común representar por medio del símbolo nEx el valor actual de un dotal puro de $1.00 pagadero a una persona que tenga ahora la edad **x** y alcance la edad **x+n** para cobrar.

Utilizando esta notación:

$$nEx = (1+i)^{-n}\ \frac{lx+n}{lx}$$

y el valor actual de un dotal puro de **$M** a futuro es:

$$C = M\ nEx$$

Nota: Se introduce el símbolo nEx por que resulta conveniente para el análisis de las anualidades vitalicias.

Por otro lado, aún que se puede manejar anualidades contingentes con tasas de interés mensual, semestral, etc. Solo nos ocuparemos de las que tienen plazo anual y considerando que las tasas de interés reales en seguros, es cuando mucho del 18% nominal, se utilizará esta tasa de interés en lo que resta del capítulo para simplificar cálculos.

Ejemplo:

¿Cuál es el valor actual de un dotal puro de **$500,000,000.00**,pagadero a una persona cuando cumpla los 65 años, si ahora tiene **32** años y el interés es del **18%** nominal?

Solución

M = 500,000,000

C = ?

n = 33

x = 32

x+n = 65

i = 0.18

Aplicando los valores de la tabla de mortalidad y la fórmula correspondiente se tiene que:

$$C = M \; {}_{n}E_{x}$$

$$C = 500{,}000{,}000 \; (1.18)^{-33} \; \frac{7{,}060{,}498}{9{,}658{,}142}$$

$$C = 2{,}122{,}578.512 \; (0.731041022)$$

$$C = 1{,}551{,}691.965$$

Ejemplo:

Si el valor actual de un dotal puro pagadero a una persona de **47** años al cumplir los 65 años es de **$2,321,932.66**. Calcular su valor futuro (Monto).

Solución

C = 2,321,932.66

n = 18

x = 47

x+n = 65

sustituyendo

$$2{,}321{,}932.66 = M\ {}_nE_x = M\ \frac{l_{x+n}}{l_x} = M\ \frac{l_{65}}{l_{47}} = M\ \frac{7{,}060{,}498}{9{,}122{,}355}$$

de donde:

$$M = \frac{2{,}321{,}932.66\ (9{,}122{,}355)}{7{,}060{,}498}$$

$$M = 3{,}000{,}000$$

6.4 Anualidades vitalicias vencidas

Una anualidad vitalicia vencida, es el caso de pagos de una renta de por vida para una persona con x años de edad. Se tiene en cuenta que como se estudian las anualidades vitalicias vencidas, el primer pago de la renta se hace cuando la persona tiene **x+1** años, el segundo cuando tiene **x+2** años y así sucesivamente mientras esté vivo.
Representando esto en forma gráfica se tiene que:

x	x+1	x+2	x+3	x+4	x+5	x+6	x+7	...	96	97	98	99
	R	R	R	R	R	R	R		R	R	R	R

Una anualidad vitalicia se puede considerar que es un conjunto de dotales puros y, por ello:

El valor actual de una anualidad contigente puede contemplarse como la suma de los valores actuales de cada uno de esos dotales.

Si se supone, que el monto de cada una de las rentas de la anualidad o, lo que es lo mismo, cada uno de los dotales puros, tienen un valor de **$1.00** la situación podría representarse gráficamente como:

x	x+1	x+2	x+3	x+4	x+5	x+6	x+7	...	96	97	98	99
	$1	$1	$1	$1	$1	$1	$1		$1	$1	$1	$1

Si se denota por a_x el valor actual de una anualidad vitalicia ordinaria de **$1.00** por año, para una persona de edad **x** y, dado que se ha utilizado el símbolo ${}_nE_x$ para representar el valor actual de un dotal puro unitario, el valor actual de la anualidad sería:

$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots$ hasta el final de la tabla de mortalidad ($x = 99$)

y como:

$$ {}_nE_x = (1+i)^{-n} \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

Entonces:

$$ a_x = (1+i)^{-1} \frac{l_{x+1}}{l_x} + (1+i)^{-2} \frac{l_{x+2}}{l_x} + \ldots \quad \text{(hasta el final de la tabla)} $$

$$ = \frac{(1+i)^{-1} l_{x+1} + (1+i)^{-2} l_{x+2} + \ldots}{l_x} \quad \text{(hasta el final de la tabla)} $$

Por otro lado se definió los valores conmutados como:

$$ D_x = (1+i)^{-x}\, l_x $$

$$ N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{99} $$

Si;

$$ a_x = \frac{(1+i)^{-1} l_{x+1} + (1+i)^{-2} l_{x+2} + \ldots}{l_x} \quad \text{(hasta el final de la tabla)} $$

Simplificando esta expresión, multiplicamos el numerador y el denominador por $(1+i)^{-x}$ se obtiene el siguiente resultado:

$$ a_x = \frac{(1+i)^{-x-1}\, l_{x+1} + (1+i)^{-x-2}\, l_{x+2} + \ldots}{(1+i)^{-x}\, l_x} \quad \text{(hasta el final de la tabla)} $$

$$ a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots}{D_x} \quad \text{(hasta el final de la tabla)} $$

$$ a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} $$

Por lo que el valor actual C de una anualidad vitalicia vencida de $R anuales, pagaderos a una persona de edad **x** es:

$$ C = R\ a_x $$

$$ C = R\ \frac{N_{x+1}}{D_x} $$

Además, al valor actual de una anualidad contingente (vencida, anticipada o diferida) se le conoce como prima neta única ya que, evidentemente tiene amplia aplicación en el área de seguros.

Ejemplo:

¿Cuál es la prima neta única de una anualidad vitalicia vencida de $2,659,000.00 anuales pagadera a una persona de 60 años, si el interés es del 18% anual?

Solución

R = 2,659,000

i = 0.18

x = 60

C = R ax

Utilizando la fórmula y la tabla de mortalidad se tiene que:

$$C = 2,659,000 \frac{N_{60+1}}{D_{60}} = 2,659,000 \frac{N_{61}}{D_{60}} = 2,659,000 \frac{1,767.463}{386.0296}$$

$$C = 2,659,000\ (4.578568586) = 12,174,413.87$$

Ejemplo:

El valor actual de una anualidad vitalicia vencida pagadera a una persona de 54 años es de $2,000,000.00. Calcular el valor del pago anual.

$$C = 2,000,000$$

$$x = 54$$

$$C = R \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Utilizando la tabla de mortalidad se tiene que:

$$2,000,000 = R \frac{N_{54+1}}{D_{54}}$$

$$2,000,000 = R \frac{N_{55}}{D_{54}}$$

$$2,000,000 = R \frac{5,582.997}{1,133.207}$$

$$R = \frac{2,000,000\ (1,133.207)}{5,582.997}$$

$$R = 405,949.35$$

6.5 Anualidades vitalicias anticipadas.

Una anualidad vitalicia anticipada es un conjunto de pagos (anuales en el caso de este trabajo para facilitar los cálculos) pagaderos a una persona de x años de edad mientras vive.

Su valor actual sería la suma de los valores actuales de un conjunto de dotales puros. Si suponemos, un pago anual de **$1.00** por anticipado y utilizamos el símbolo $\ddot{a}_x$ para denotar el valor actual de una anualidad vitalicia, anticipada de $1.00 anuales para una persona de edad x, pagadera mientras viva.

Como el primer pago se hace al momento de realizar la operación y como se le paga en tanto viva, el valor actual de esta anualidad es un pago al momento de formalizar la operación más el valor actual de la anualidad contingente vencida y unitaria es decir:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

sustituyendo a $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$ y aplicando las fórmulas de valores conmutados se tiene que:

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots}{D_x}$$

y como $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots$ se tiene que

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

y el valor actual ser;

$$C = R\,\ddot{a}_x = R\,\frac{N_x}{D_x}$$

$$C = R\,\frac{N_x}{D_x}$$

Ejemplo:

Calcular el valor actual (o prima neta única)de una anualidad anticipada de $1,300,000.00 anuales pagaderos por anticipado a una persona de 54 años de edad.

$$R = 1{,}300{,}000$$

$$x = 54$$

$$C = R\,\frac{N_x}{D_x}$$

utilizando la tabla de mortalidad se tiene que:

$$C = 1,300,000 \frac{N_{54}}{D_{54}}$$

$$C = 1,300,000 \frac{6,716.205}{1,133.207}$$

$$C = 1,300,000\ (5.926723891)$$

$$C = 7,704,741.058$$

Ejemplo:

Determinar la prima neta única de una anualidad anticipada de $65,000.00 anuales pagaderos por anticipado a una persona de 35 años de edad.

$$R = 65,000$$

$$x = 35$$

$$C = R \frac{N_x}{D_x}$$

Utilizando la tabla de mortalidad se tiene que:

$$C = 65,000 \frac{N_{35}}{D_{35}}$$

$$C = 65,000 \frac{186,783.0}{29,209.45}$$

$$C = 415,649.56$$

6.6 Anualidades vitalicias diferidas.

Este sería el caso de una anualidad pagadera a una persona de **x** años de edad, pero posponiendo el inicio del pago durante **k-años**. Se pueden representar dos casos y son:

Que el primer pago se haga unos años después de expirar el período de aplazamiento **(k)** en cuyo caso tendríamos una anualidad vitalicia diferida vencida.

Que el primer pago se haga al momento de expirar el período de aplazamiento. En este caso se tiene una anualidad vitalicia diferida anticipada.

Se analizarán los dos casos por separado.

Anualidades vitalicias diferidas vencidas

A una persona de edad x se le va a pagar una anualidad de **$1.00** anuales. El primer pago se realizará después de **k** años y, como se trata de una anualidad vencida, el primer pago se hace un año después de vencer el período de aplazamiento, o sea el año **k+1**. Además seguiremos utilizando la tasa de 18%. Se utilizará el símbolo $k\backslash^{a}x$. Para denotar el valor actual (prima neta única) de una nualidad vitalicia vencida de **$1.00**, diferida durante k años. Se tiene entonces que:

$$k\backslash^{a}x = \frac{{}_{k+1}E_x + {}_{k+2}E_x + {}_{k+3}E_x + \dots}{l_x} \qquad \text{(hasta el final de latabla)}$$

$$= \frac{(1+i)^{-(k+1)} l_{x+K+1} + (1+i)^{-(x+k+2)} l_{x+K+2} + \dots}{l_x} \qquad \text{(hasta el final de la tabla}$$

Para simplifacar la exprexion multiplicamos el númerador y el denominador por $(1+i)^{-x}$

$$= \frac{(1+i)^{-(x+k+1)} l_{x+K+1} + (1+i)^{-(x+k+2)} l_{x+K+2} + \dots}{(1+i)^{-x}\, l_x} \qquad \text{(hasta el final de la tabla)}$$

$$= \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + \dots}{D_x} \qquad \text{(hasta el final de la tabla)}$$

$$k\backslash^{a}x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

Y el valor actual estaría dado por

$$C = R\ k\backslash^{a}x$$

$$C = R\ \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

Ejemplo:

¿Cuál es la prima neta única de una anualidad vitalicia vencida de **$1.00** pagadera a una persona de 40 años, si el primer pago debe hacerse cuando ésta persona tenga 60 años?

Solución

$x = 40$

$k = 20$

$R = 1$

$$_{20\backslash}a_{40} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} = \frac{N_{61}}{D_{40}} = \frac{1767.463}{12562.14} = 0.14069760$$

Ejemplo:

Determinar la prima neta única de una anualidad de **$250,000.00** anuales pagadera a una persona de 48 años si, el primer pago debe hacerse dentro de 15 años?

Solución

Obsérvese que en este caso al especificar al primer pago debe hacerse dentro de 15 años, no se sabe en realidad si la anualidad es anticipada o vencida pero, al saber que el primer pago se realiza dentro de 15 años y que **k+1** = 15, se puede determinar el valor actual si se considera la operación como una anualidad vencida con **k** = 14, es decir:

$x = 48$

$k = 14$

$R = 250{,}000$

aplicando la fórmula correspondiente se tiene que:

$$C = R\ {}_{K\backslash}a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} = 250{,}000\ \frac{N_{48+14+1}}{D_{48}}$$

$$= 250{,}000\ \frac{N_{63}}{D_{48}} = 250{,}000\ \frac{1180.162}{3214.367} = 91788.06$$

Anualidades vitalicias diferidas anticipadas

En este tipo de anualidades el primer pago se hace el día en que vence el período de aplazamiento o diferimiento.

Y el desarrollo anterior, es fácil comprobar ya que el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada es de $1.00 y diferida durante **K** años es:

$$_{k\backslash}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

Y

El valor actual estaría dado por

$$C = R\ _{k\backslash}\ddot{a}_x$$

$$C = R\ \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

Ejemplo:

Encontrar el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de $1.00 pagadera a una persona de 35 años de edad si se aplaza 10 años.

Solución

$x = 35$

$k = 10$

$R = 1$

$$_{10\backslash}\ddot{a}_{35} = \frac{N_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{45}}{D_{35}} = \frac{33505.42}{29209.45} = 1.14707466$$

Ejemplo:

¿Cuál es la prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de $300,000.00 pagadera a una persona de 50 años de edad y diferida durante 5 años?

Solución

$R = 300,000$

$k = 5$

$x = 50$

$$C = 300,000\ \frac{N_{50+5}}{D_{50}} = \frac{N_{55}}{D_{50}} = \frac{5582.997}{2276.728} = 735660.61$$

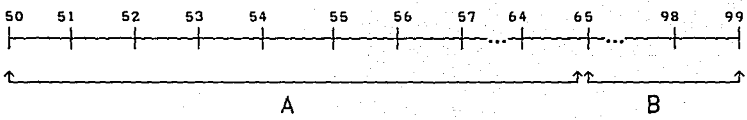
6.7 Anualidades contingentes temporales

Es una anualidad que se paga durante un número especificado de periodos y termina al cubrir este número de pagos (aunque el rentista siga vivo) o a su muerte, si ocurre antes de cubrir todos los pagos.

Anualidades contingentes temporales vencidas

Ejemplo:

Se le va a pagar a una persona de 50 años de edad una anualidad de **$1.00**, durante 15 años. ¿Cuál es el valor de la prima neta única? ilustrando el caso se tiene que:



Si se considera la parte **A** del diagrama anterior, tenemos la anualidad contingente temporal propuesta en el ejemplo. Si se añadiera la parte **B** puede contemplarse como una anualidad vitalicia vencida y diferida durante **n** años donde **n** sería el número de pagos de la anualidad temporal. Y de esto se puede considerar que la anualidad contingente temporal es igual a una anualidad vitalicia vencida y diferida **n** años.

Para el caso de una anulidad de **$1.00** y utilizando el símbolo a_{xn} para denotar el valor actual de una anualidad temporal de **$1.00** pagadera a una persona con **x** años de edad y durante **n** años, se tiene:

$$a_{xn} = a_{xn} - {}_{n\backslash}a_x$$

Y recordando que

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Y

$$_{n\backslash}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

Por lo que

$$a_{xn} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Y el valor actual sería:

$$C = R\ a_{xn}$$

$$C = R\ \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Ejemplo:

Se le va a pagar a una persona de 45 años de edad una anualidad contingente temporal y vencida de $100,000 durante 10 años:

¿Cuál es su prima neta única?

Solución

$R = \$100,000$

$x = 45$

$n = 10$

$$C = R\, a_{xn} = R\, \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$C = 100,000\, \frac{N_{46} - N_{56}}{D_{46}} = 100,000\, \frac{28,132.59 - 4633.158}{5372.831}$$

$$C = 437,375.23$$

Anualidades contingentes temporales anticipadas

En estos casos el primer pago se hace al principio del primer período de pago. En los desarrolos anteriores puede verse que el valor actual o prima neta única de este tipo de anualidades está dado:

$$C = R\, \ddot{a}_{xn}$$

$$C = R\, \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Ejemplo:

El señor torres, de 65 años de edad, va a recibir una anualidad anticipada de $300,000.00 durante 10 años siempre y cuando permanezca vivo para cobrarla. Calcular su prima neta única.

Solución

$$C = R\, \ddot{a}_{xn} = R\, \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$C = 300,000\, \frac{N_{65} - N_{75}}{D_{65}} = 300,000\, \frac{777.3924 - 70.544498}{150.1429}$$

$$C = 1,412,350.32$$

6.8 Resumen

En este capítulo se estudiaron las anualidades contingentes, que son aquellas en las cuales su fecha de inicio o de terminación o ambas dependen de algún suceso que se sabe va a ocurrir, pero no se sabe cuando. Un concepto muy importante para el manejo de anualidades contingentes es el de la renta vitalicia: una anualidad que se paga a una persona a partir de cierta fecha y mientras esta viva para recibirla. Tambien se estudió el concepto de un dotal puro, que es un compromiso de pagar a una persona una cantidad determinada en una fecha futura siempre y cuando la persona esté viva para recibirla.

Con estos elementos y ya conocidos las de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagadearas en el primer período de tiempo se estudiaron las:

Anualidades vitalicias vencidas. Con respecto a éstas se vió que se les puede contemplar como un conjunto de dotales puros y que, por ello, su valor actual o capital es la suma de los valores actuales de cada uno de los dotales puros donde a ese valor actual de una anualidad contingente se le llama prima neta única.

Anualidades vitalicias anticipadas, que se pueden contemplar, al igual que las dos siguientes :

"Anualidades vitalicias diferidas vencidas."

"Anualidades vitalicias diferidas anticipadas."

Estos tipos de anualidades pueden resolverse combinando las fórmulas de las anualidades simples, ciertas, vencidas y pagaderas en el primer período de tiempo inmediatas y tomando en cuenta sus correspondientes caracteristicas.

Anualidades contingentes temporales, son aquellas que se pagan durante un número especificado de periodos y terminan al cubrirse éste número de pagos sin tener en cuenta si el beneficiario vive o muere para cobrar los pagos, se revisaron los casos vencidos y anticipados.

TABLA DE MORTALIDAD

Una tabla de mortalidad es el registro estadístico de las muertes ocurridas en un grupo suficientemente grande de personas en un período determinado. La población considerada es un grupo de tenedores de pólizas de seguros de vida y la tabla de mortalidad resultante se utiliza para el cálculo de las primas de éste tipo de seguros. La tabla de mortalidad que se utilizará en éste trabajo es la tabla de mortalidad con la experiencia mexicana de 1962 a 1967 y está calculada con el 18% anual.

Tabla de Mortalidad de la Experiencia Mexicana de 1962 — 1967

Edad	l_x	d_x	$1000q_x$	D_x	N_x	edad
15	10.000,000	17,810	1.781	835160.4	5414388.	15
16	9.982,190	17,958	1.799	706502.5	4579227.	16
17	9.964,232	18,125	1.819	597653.8	3872725.	17
18	9.946,107	18,311	1.841	505565.0	3275071.	18
19	9.927,796	18,525	1.866	427656.1	2769506.	19
20	9.909,271	18,758	1.893	361744.2	2341850.	20
21	9.890,513	19,019	1.923	305982.6	1980106.	21
22	9.871,494	19,319	1.957	258808.6	1674123.	22
23	9.852,175	19,645	1.994	218900.1	1415314.	23
24	9.832,530	20,009	2.035	185138.7	1196414.	24
25	9.812,521	20,410	2.080	156577.9	1011276.	25
26	9.792,111	20,867	2.131	132417.1	854697.8	26
27	9.771,244	21,370	2.187	111978.8	722280.7	27
28	9.749,874	21,927	2.249	94689.71	610301.9	28
29	9.727,947	22,549	2.318	80065.05	515612.2	29
30	9.705,398	23,244	2.395	67694.46	435547.2	30
31	9.682,154	24,012	2.480	57230.79	367852.7	31
32	9.658,142	24,860	2.574	48380.39	310621.9	32
33	9.633,282	25,808	2.679	40894.79	262241.5	33
34	9.607,474	26,853	2.795	34563.76	221346.7	34
35	9.580,621	28,004	2.923	29209.45	186783.0	35
36	9.552,617	29,288	3.066	24681.42	157573.5	36
37	9.523,329	30,703	3.224	20852.33	132892.1	37
38	9.492,626	32,265	3.399	17614.49	112039.8	38
39	9.460,361	34,001	3.594	14876.80	94425.29	39
40	9.426,360	35,905	3.809	12562.14	79548.49	40
41	9.390,455	38,013	4.048	10605.33	66986.35	41
42	9.352,442	40,346	4.314	8951.189	56381.01	42
43	9.312,096	42,910	4.608	7553.029	47429.82	43
44	9.269,186	45,734	4.934	6371.377	39876.80	44
45	9.223,452	48,838	5.295	5372.831	33505.42	45
46	9.174,614	52,259	5.696	4529.137	28132.59	46
47	9.122,355	56,020	6.141	3816.389	23603.45	47
48	9.066,335	60,146	6.634	3214.367	19787.06	48
49	9.006,189	64,664	7.180	2705.968	16572.70	49
50	8.941,525	69,619	7.786	2276.728	13866.73	50
51	8.871,906	75,030	8.457	1914.408	11590.00	51
52	8.796,876	80,940	9.201	1608.659	9675.591	52
53	8.715,936	87,386	10.026	1350.727	8066.932	53
54	8.628,550	94,396	10.940	1133.207	6716.205	54
55	8.534,154	102,017	11.954	949.8392	5582.997	55
56	8.432,137	110,259	13.076	795.3261	4633.158	56
57	8.321,878	119,169	14.320	665.1919	3837.832	57
58	8.202,709	128,758	15.697	555.6494	3172.640	58
59	8.073,951	139,058	17.223	463.4978	2616.991	59
60	7.934,893	150,065	18.912	386.0296	2153.493	60
61	7.784,828	161,792	20.783	320.9568	1767.463	61
62	7.623,036	174,217	22.854	266.3444	1446.506	62

Tabla de Mortalidad de la Experiencia Mexicana de 1962 — 1967
(Continuación)

Edad	l_x	d_x	$1000q_x$	D_x	N_x	*edad*
63	7.448,819	187,308	25.146	220.5571	1180.162	63
64	7.261,511	201,013	27 .682	182.2127	959.6051	64
65	7.060,498	215,260	30.488	150.1429	777.3924	65
66	6.845,238	229,932	33.590	123.3605	627.2495	66
67	6.615,306	244,892	37.019	101.0312	503.8890	67
68	6.370,414	259,970	40.809	82.45010	402.8578	68
69	6.110,444	274,939	44.995	67.02152	320.4077	69
70	5.835,505	289,546	49.618	54.24228	253.3862	70
71	5.545,959	303,464	54.718	43.68719	199.1439	71
72	5.242,495	316,353	60.344	34.99722	155.4567	72
73	4.926,142	327,815	66.546	27.86894	120.4595	73
74	4.598,327	337,407	73.376	22.04608	92.59057	74
75	4.260,920	344,683	80.894	17.31222	70.54449	75
76	3.916,237	349,183	89.163	13.48455	53.23227	76
77	3.567,054	350,452	98.247	10.40867	39.74772	77
78	3.216,602	348,091	108.217	7.954278	29.33905	78
79	2.868,511	341,777	119.148	6.011432	21.38477	79
80	2.526,734	331,293	131.115	4.487443	15.37334	80
81	2.195,441	316,583	144.200	3.304298	10.88590	81
82	1.878,858	297,767	158.483	2.396455	7.581602	82
83	1.581,091	275,186	174.048	1.709032	5.185146	83
84	1.305,905	249,397	190.976	1.196253	3.476114	84
85	1.056,508	221,178	209.348	8.201668E-1	2.279861	85
86	835,330	191,489	229.238	5.495478E-1	1.459695	86
87	643,841	161,422	250.717	3.589583E-1	9.101467E-1	87
88	482,419	132,106	273.841	2.279333E-1	5.511884E-1	88
89	350,313	104,624	298.658	1.402677E-1	3.232551E-1	89
90	245,689	79,897	325.194	8.336909E-2	1.829875E-1	90
91	165,792	58,600	353.455	4.767612E-2	9.961838E-2	91
92	107,192	41,100	383.421	2.612268E-2	5.194226E-2	92
93	66,092	27,431	415.037	1.364967E-2	2.581958E-2	93
94	38,661	17,328	448.214	6.766505E-3	1.216991E-2	94
95	21,333	10,300	482.819	3.164180E-3	5.403406E-3	95
96	11,033	5,722	518.669	1.386823E-3	2.239226E-3	96
97	5,311	2,950	555.536	5.657461E-4	8.524032E-4	97
98	2,361	1,400	593.136	2.131372E-4	2.866571E-4	98
99	961	961	1000.000	7.351986E-5	7.351986E-5	99

BIBLIOGRAFIA

Algebra.
Charles H. Lehmann.
Limusa.

Algebra.
Paul K. Rees, Fred W. Sparks.
Editorial Reverte Mexicana.

Matamáticas Financieras.
Act. Benjamín de la Cueva.
Editorial Porrúa, S.A.

Matemáticas Financieras.
V.M. Aguilera Gómez, A Díaz Mata.
Editorial McGRAW-HILL.

El Arte de Enseñar Matemáticas.
Simssón A. C.
Barcelona, 1979.