



38
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre la teoría
de los osciladores no lineales

Tesis

que para obtener el título de

matemático

presenta

Rafael Villarroel Flores

FALLA DE ORIGEN

Octubre de 1991



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Introducción

Es común en las ciencias aplicadas como la Biología, la Electrotecnia y la Mecánica encontrarse con problemas relacionados con oscilaciones no lineales. Para el estudio de tales problemas se requiere aplicar métodos provenientes de la teoría de los sistemas dinámicos y de las bifurcaciones.

En la literatura aparecen muchos trabajos que modelan matemáticamente, con éxito, el comportamiento de fenómenos correspondientes a las ramas mencionadas anteriormente, y lo hacen mediante el empleo de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por lo anterior, consideramos importante estudiar al menos uno de los osciladores no lineales de amplia aplicación en los modelos matemáticos y que es el oscilador de Van der Pol (los otros son el de Duffing y las ecuaciones de Lorenz). Con este trabajo se pretende mostrar, de manera compacta y unificada, lo que es la teoría de los osciladores no lineales sin tener que adentrarse en grandes volúmenes dando a la vez los antecedentes necesarios para su estudio y, finalmente, dar a conocer una de sus aplicaciones a otra rama de la ciencia, la biología.

El capítulo 1 presenta resultados sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales más simples: lineales con coeficientes constantes. En el capítulo 2 se demuestran teoremas muy importantes para la teoría de las ecuaciones diferenciales: existencia y unicidad de soluciones, continuidad con respecto a condiciones iniciales y existencia de un intervalo máximo de definición de una solución. En el capítulo 3 se definen el flujo de una ecuación y el concepto de sistema dinámico. Se demuestra que, en cierto sentido, el flujo de una ecuación diferencial es un ejemplo de un sistema dinámico. En el capítulo 4 se estudia la teoría local de estabilidad. El capítulo 5 se dedica exclusivamente a la demostración y aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson, que es una herramienta básica en el establecimiento de soluciones oscilatorias de un sistema. Las principales características del oscilador de Van der Pol se exponen en el capítulo 6. Finalmente, el objetivo del capítulo 7 es ilustrar brevemente una aplicación a la biología de la teoría ya desarrollada.

Índice

Capítulo 1: <i>Sistemas lineales</i>	1
1.1. Definiciones y propiedades básicas	1
1.2. Forma canónica real	2
1.3. La función exponencial de matrices	3
1.4. El retrato fase	6
1.5. Sumideros y fuentes	6
1.6. Flujos hiperbólicos	10
Capítulo 2: <i>Teoremas fundamentales</i>	12
2.1. Definiciones	12
2.2. Teorema de existencia y unicidad	14
2.3. Continuidad con respecto a condiciones iniciales	19
2.4. El intervalo máximo	20
Capítulo 3: <i>Sistemas dinámicos</i>	26
3.1. El flujo de una ecuación diferencial	26
3.2. Teoremas sobre flujos	27
3.3. Diferenciabilidad del flujo	29
3.4. Definiciones	36
Capítulo 4: <i>Estabilidad</i>	37
4.1. Sumideros no lineales	37
4.2. Estabilidad	39
4.3. Funciones de Liapunov	39
4.4. Conjuntos límite	41
Capítulo 5: <i>El teorema de Poincaré-Bendixson</i>	43
5.1. Definiciones	43
5.2. Lemas básicos	45
5.3. El teorema de Poincaré-Bendixson	50
5.4. Aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson	53
Capítulo 6: <i>El oscilador de Van der Pol</i>	56
Capítulo 7: <i>Una aplicación a la biología</i>	69

Sistemas lineales

1.1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES BASICAS

Definición. Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales es una ecuación de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \quad (1)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es un vector en \mathbf{R}^n y $A(t)$ es una matriz en $\mathbf{R}^{n \times n}$. En otras palabras:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

donde las $a_{ij}(t)$ son funciones reales de variable real continuas, definidas en un intervalo de \mathbf{R} . Una **solución** del sistema (1) es un conjunto de n funciones $x_1(t), \dots, x_n(t)$ diferenciables tales que la función vectorial $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, la traspuesta de $[x_1(t), \dots, x_n(t)]$, satisface (1). (También se dirá en este caso que $\mathbf{x}(t)$ es solución). Se suele pedir además que $\mathbf{x}(t)$ cumpla una condición de la forma:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n \quad (2)$$

llamada condición inicial.

El conjunto de soluciones del sistema (1) forma un espacio vectorial de dimensión n .

Definición. A la matriz (1) se le llama la forma canónica real de T .

1.3. LA FUNCION EXPONENCIAL DE MATRICES

Para cada $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, se define $e^A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ como la serie:

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots \quad (1)$$

Consideremos en $\mathbf{R}^{n \times n}$ la norma $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{|A_{ij}|\}$. Entonces se tiene, para $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \|AB\| &= |(AB)_{i_0 j_0}| \quad \text{para algunos } i_0, j_0 \\ &= \left| \sum_{k=1}^n A_{i_0 k} B_{k j_0} \right| \leq \sum_{k=1}^n |A_{i_0 k}| |B_{k j_0}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|A\| \|B\| = n \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

Para ver que (1) está bien definido para cualquier matriz A , definimos $S_m = \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}$, y demostraremos que $\lim_{m \rightarrow \infty} (S_m)_{ij}$ existe para cualesquier i, j tales que $1 \leq i, j \leq n$. Pues

$$(S_m)_{ij} = \left(\sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} \right)_{ij} = \sum_{k=0}^m \frac{(A^k)_{ij}}{k!}$$

y entonces

$$\sum_{k=0}^m \frac{|(A^k)_{ij}|}{k!} \leq \sum_{k=0}^m \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^m \frac{n^{k-1} \|A\|^k}{k!} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^m \frac{(n \|A\|)^k}{k!} \leq \frac{1}{n} e^{n \|A\|}$$

Por tanto $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij}}{k!}$ es absolutamente convergente. Esto implica que e^A está definido para cualquier A .

Por lo anterior, dados cualquier vector $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ y cualquier matriz $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, podemos definir una función $\mathbf{x}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ como $\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0$.

entonces:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

ii) Si A y B conmutan, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.

iii) Si $A = PBP^{-1}$, entonces $e^A = Pe^B P^{-1}$, donde P es cualquier matriz invertible.

iv)

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tA} = e^a \begin{bmatrix} \cos bt & -\operatorname{sen} bt \\ \operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

v)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ t & 0 & & \\ \frac{t^2}{2!} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & & \frac{t^2}{2!} & t & 0 \end{bmatrix}$$

Análogamente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ I_2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ tI_2 & 0 & & \\ \frac{t^2}{2!} I_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} I_2 & & \frac{t^2}{2!} I_2 & tI_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Todo lo anterior se resume en el siguiente teorema:

Teorema 2. *Cualquier entrada de la matriz e^{tA} (y por tanto, cualquier solución del sistema de ecuaciones $\dot{x} = Ax$) es una combinación lineal de funciones de la forma $t^n e^{at} \cos bt$, $t^n e^{at} \operatorname{sen} bt$, donde $a + ib$ es valor propio de A , y n no excede a la multiplicidad de $a + ib$.*

Demostración: Escribimos a la matriz A como $A = PJP^{-1}$, donde J es la forma canónica real de A , y P es una matriz adecuada. Entonces, por las

propiedades i)-v) de la función exponencial, las componentes de la matriz e^{tJ} tienen la forma descrita en el enunciado del teorema, por tanto también las componentes de la matriz $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$ la tienen. ■

1.4. EL RETRATO FASE

Las ecuaciones diferenciales se pueden examinar también desde un punto de vista geométrico. Notemos que cada solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ define una curva en \mathbf{R}^n parametrizada por t . Si interpretamos a la variable t como el tiempo, la curva solución $\mathbf{x}(t)$ describe el movimiento de una partícula en el espacio, que en el tiempo t está situada en el punto con coordenadas $\mathbf{x}(t)$ y tiene velocidad $A\mathbf{x}(t)$. En el caso $n = 2$, al dibujar unas cuantas curvas solución, logramos una idea general del comportamiento de todas las soluciones.

Definición. A la curva que una solución $\mathbf{x}(t)$ describe en el espacio \mathbf{R}^n se le llama **trayectoria**, o bien **característica**, del punto $\mathbf{x}(0)$.

Ejemplo. Consideremos el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

La solución general es:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

y se cumple que $x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = c_1^2 + c_2^2$. Por tanto, en el plano x_1x_2 , la trayectoria de cualquier punto está sobre una circunferencia de radio $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ con centro en el origen, como se ve en la figura 1. Las flechas indican la dirección de la curva cuando el parámetro se incrementa.

1.5. SUMIDEROS Y FUENTES

Dado un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales ordinarias:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{1}$$

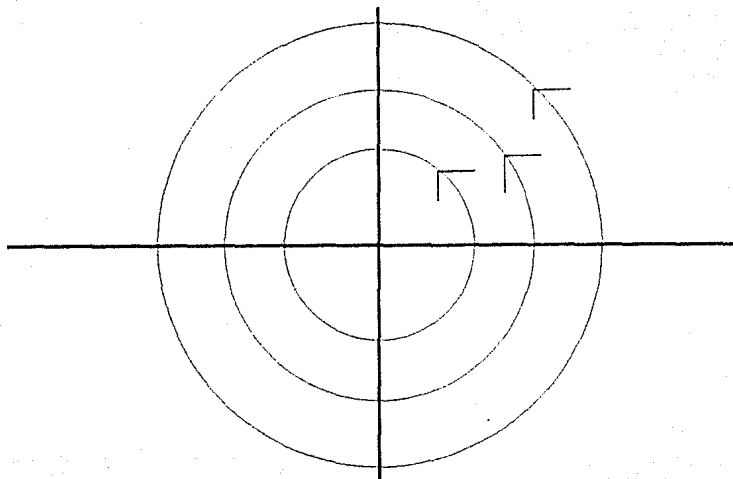


Figura 1

lo escribiremos en la forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (2)$$

Observemos que la función constante $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ es siempre una solución de (2).

Definición. $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un **sumidero** de la ecuación (2) si todos los valores propios de A tienen parte real negativa.

Si $\mathbf{0}$ es un sumidero, el comportamiento de las soluciones de la ecuación (2) cuando $t \rightarrow \infty$ está bien determinado, en el sentido que expresa el siguiente teorema.

Teorema 1. Sea $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathbf{0}$ es un sumidero del sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.
- Para toda norma en \mathbf{R}^n existen constantes $k > 0$, $b > 0$ tales que

$$|e^{tA}\mathbf{x}| \leq ke^{-bt}|\mathbf{x}|$$

para $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. (Esto implica que toda solución $\mathbf{x}(t)$ cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$)

Demostración:

- \Rightarrow a) Supongamos que A tiene un valor propio $\lambda = a + ib$, donde

Aquí, $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. El polinomio característico de A es $\lambda^2 + 4\lambda + 5$ y sus valores propios son $-2 + i$, $-2 - i$. Por tanto, $\mathbf{0}$ es un sumidero de A . La solución general de este sistema es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \sin t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

y se verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

Definición. $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es una fuente de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ si todos los valores propios de A tienen parte real positiva.

Tenemos un teorema análogo al teorema 1 para fuentes, para demostrarlo sólo necesitamos invertir las desigualdades en la demostración anterior.

Teorema 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El origen es una fuente del sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.
- Para toda norma en \mathbb{R}^n existen constantes $L > 0$, $a > 0$ tales que

$$|e^{tA}\mathbf{x}| \geq L e^{at} |\mathbf{x}|$$

para $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo. Tomemos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de A son 2 , $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$. Por tanto, el origen es una fuente del sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Aquí, la solución general es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \\ \cos \sqrt{2}t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \\ \cos \sqrt{2}t + 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos \sqrt{2}t - 2 \sin \sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos \sqrt{2}t - \sin \sqrt{2}t \\ 2\sqrt{2} \cos \sqrt{2}t - \sin \sqrt{2}t \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$ si $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$, lo cual es implicado por la condición b).

Definición. Si A tiene un sumidero en cero, a e^{tA} se le llama **contracción**, y si cero es una fuente de A , se dice que e^{tA} es una **expansión**.

1.6. FLUJOS HIPERBOLICOS

En esta sección consideramos un caso más general que en la sección anterior.

Definición. e^{tA} es un **flujo hiperbólico** si todos los valores propios de A tienen parte real distinta de cero.

Claramente las contracciones y las expansiones son flujos hiperbólicos. En cierto sentido, su estudio se reduce al de los casos más particulares de contracciones y expansiones.

Teorema 1. Sean $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y e^{tA} un flujo hiperbólico. Entonces \mathbf{R}^n tiene una descomposición: $\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$ en subespacios invariantes bajo A , tales que el flujo que A induce en E^s es una contracción, y el flujo inducido en E^u es una expansión. Tal descomposición es única.

Demostración: Sea \mathcal{B} una base para el operador A en la forma canónica real. Ordenamos a \mathcal{B} de modo que la matriz en forma canónica tenga primero los bloques correspondientes a los valores propios con parte real negativa y después los correspondientes a los valores propios con parte real positiva. Entonces E^s será el espacio generado por los primeros vectores y E^u por los segundos. Claramente $\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$.

Como E^s es invariante bajo A , también lo es bajo e^{tA} . Si denotamos $A|E^s$ como A_s y $A|E^u$ como A_u , entonces claramente $e^{tA}|E^s = e^{tA_s}$. Por tanto, $e^{tA}|E^s$ es una contracción, y análogamente $e^{tA}|E^u$ es una expansión.

Supongamos que $F^s \oplus F^u$ es una descomposición de \mathbf{R}^n con las características deseadas. Sea $\mathbf{x} \in F^s$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, donde $\mathbf{y} \in E^s$, $\mathbf{z} \in E^u$. Como $|e^{tA}\mathbf{x}| \rightarrow 0$ y $|e^{tA}\mathbf{y}| \rightarrow 0$, tenemos que $|e^{tA}\mathbf{z}| \rightarrow 0$. Pero $e^{tA}|E^u$ es una expansión, por tanto $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Con esto demostramos que $F^s \subset E^s$. De modo análogo podemos ver que $E^s \subset F^s$, y entonces $E^s = F^s$. Considerando e^{-tA} , también podemos ver que $E^u = F^u$. ■

Capítulo 2

Teoremas fundamentales

En esta parte, empezamos a estudiar los sistemas no lineales, generalizando los conceptos del capítulo anterior. En lo sucesivo, emplearemos J y U para denotar respectivamente un intervalo abierto de \mathbf{R} y un subconjunto abierto de \mathbf{R}^n .

2.1. DEFINICIONES

Definición. *Un sistema de ecuaciones diferenciales es una ecuación de la forma:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

donde $\mathbf{f} : J \times U \subset \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ es continua. Una **solución** del sistema (1) es una curva diferenciable $\mathbf{x}(t)$ definida en un intervalo $J' \subset J$ tal que $\mathbf{x}(t) \in U$ para $t \in J'$ y con la propiedad:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

para $t \in J'$. Si se fijan de antemano $t_0 \in J$ y $\mathbf{x}_0 \in U$, y $\mathbf{x}(t)$ cumple además que

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n \quad (2)$$

decimos que $\mathbf{x}(t)$ es solución del problema (1) con **condición inicial** (2). Si \mathbf{f} es independiente de t al sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se le llama **autónomo**.

En la siguiente definición, denotaremos por \mathbf{f}_t a la función $\mathbf{f}_t : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ dada por $\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Definición. La función $f(t, \mathbf{x})$ con dominio en $J \times U$ es de Lipschitz en \mathbf{x} si existe una constante K tal que

$$|f(t, \mathbf{x}_1) - f(t, \mathbf{x}_2)| \leq K|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

para $t \in J$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$. En este caso K es una constante de Lipschitz para f . Se dice que f es localmente de Lipschitz si para todo punto (t, \mathbf{x}) de $J \times U$ existen un intervalo cerrado J_0 que contiene a t y una vecindad U_0 de \mathbf{x} tal que $f|_{J_0 \times U_0}$ es de Lipschitz en \mathbf{x} .

El siguiente lema nos proporciona los ejemplos más sencillos de funciones de Lipschitz.

Lema. Si $f(t, \mathbf{x})$ es de clase C^1 (*), entonces f es localmente de Lipschitz.

Demostración: Sea $(t_0, \mathbf{x}_0) \in J \times U$. Sea J_0 un intervalo cerrado tal que $t_0 \in J_0 \subset J$. Si consideramos en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ la norma: $\|T\| = \sup\{|T(\mathbf{x})| : |\mathbf{x}| = 1\}$, el hecho de que f es C^1 significa que la aplicación:

$$\begin{array}{l} J \times U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n) \\ \text{tal que } (t, \mathbf{x}) \mapsto Df(t, \mathbf{x}) \end{array}$$

es continua.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(\mathbf{x})} =: U_0 \subset U$. Sea $K = \max\{\|Df(t, \mathbf{x})\| : \mathbf{x} \in U_0, t \in J_0\}$. Como $Df_t(\mathbf{x})\mathbf{u} = Df(t, \mathbf{x})(0, \mathbf{u})$, tenemos que $K \geq \|Df_t(\mathbf{x})\|$ para cualesquier $\mathbf{x} \in U_0$, $t \in J_0$. Veremos que $f(t, \mathbf{x})$ con dominio en $J_0 \times U_0$ es de Lipschitz en \mathbf{x} con constante K .

Sean $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in U_0$, $t \in J_0$. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{y}$. Entonces $\mathbf{y} + s\mathbf{u} \in U_0$ para todo $s \in [0, 1]$. Definimos $\Phi(s) = f_t(\mathbf{y} + s\mathbf{u})$, por lo que Φ es una función $\Phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por la regla de la cadena, se tiene: $\Phi'(s) = Df_t(\mathbf{y} + s\mathbf{u})\mathbf{u}$. Por tanto:

$$f_t(\mathbf{z}) - f_t(\mathbf{y}) = \Phi(1) - \Phi(0) = \int_0^1 \Phi'(s) ds = \int_0^1 Df_t(\mathbf{y} + s\mathbf{u})\mathbf{u} ds$$

(*) Una función de clase C^1 es una función tal que todas sus derivadas parciales existen y son continuas. Un hecho equivalente se usa en la demostración.

y entonces:

$$\begin{aligned}
 |f(t, z) - f(t, y)| &= |f_t(z) - f_t(y)| = \left| \int_0^1 Df_t(y + su)(u) ds \right| \\
 &\leq \int_0^1 |Df_t(y + su)(u)| ds \\
 &\leq \int_0^1 \|Df_t(y + su)\| \|u\| ds \\
 &\leq \int_0^1 K \|u\| ds \\
 &= K \|u\| = K \|z - y\| \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Observemos ahora que si $x: J \rightarrow \mathbf{R}^n$ (donde J es un intervalo abierto en \mathbf{R} que contiene a t_0) satisface:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)); \quad x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

integrando, tenemos:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (4)$$

Recíprocamente, si $x(t)$ satisface la ecuación integral (4), obtenemos que $x(t_0) = x_0$ y que $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Por tanto, los problemas (3) y (4) son equivalentes. La demostración del teorema de existencia y unicidad se basará en hallar una solución a la ecuación integral (4).

2.2. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Demostraremos una versión del teorema que no es la más general, pero sí suficiente para nuestros propósitos.

Teorema. Sean $f: J \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función C^1 , $t_0 \in J$ y $x_0 \in U$. Entonces existen $c > 0$ y una solución única $x: (t_0 - c, t_0 + c) \rightarrow U$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$.

Demostración: Para $x_0 \in U$ escogemos una bola cerrada U_0 con centro en x_0 y un intervalo cerrado $J' = [t_0 - d, t_0 + d] \subset J$, $d > 0$ tal que $f \mid J' \times U_0$

sea de Lipschitz en \mathbf{x} con constante K . Sea M una cota para \mathbf{f} en $J' \times U_0$. Sea $a > 0$ tal que $a < \min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$, donde b es el radio de la bola U_0 . Sea $J_0 = [t_0 - a, t_0 + a] \cap J'$. Definiremos ahora una sucesión de funciones $\{\mathbf{u}_k(t)\}$ con dominio en J_0 y codominio en \mathbf{R}^n del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0(t) &\equiv \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_0(s)) ds\end{aligned}$$

Suponiendo que $\mathbf{u}_k(t)$ ha sido definida y que $|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{x}_0| \leq b$ para toda $t \in J_0$ (es decir $\mathbf{u}_k(t) \in U_0$ para toda $t \in J_0$), definimos

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_k(s)) ds$$

Entonces:

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_0| &= \left| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_k(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{f}(s, \mathbf{u}_k(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| \\ &\leq Ma < M \frac{b}{M} = b\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión $\{\mathbf{u}_k(t)\}$ está bien definida.

Ahora veremos que esta sucesión es una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones de J_0 en \mathbf{R}^n con la norma del supremo.

Sea $L = \max_{t \in J_0} \{|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_0(t)|\}$. Entonces:

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_0(s)) ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_0(s)| ds \right| \\ &\leq aKL\end{aligned}$$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}: J_0 \rightarrow U$ dos soluciones de (1) tales que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$.
 Sea $Q = \max_{t \in J_0} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|$. Supongamos que $|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{y}(t_1)| = Q$.
 Entonces:

$$\begin{aligned} Q = |\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{y}(t_1)| &= \left| \int_{t_0}^{t_1} [\dot{\mathbf{x}}(s) - \dot{\mathbf{y}}(s)] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t_1} K |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| ds \right| \\ &\leq aKQ \end{aligned}$$

Como $aK < 1$, tenemos que $Q \leq aKQ$ es imposible a menos que $Q = 0$.
 Por tanto:

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$$

lo cual demuestra el teorema, tomando c como el radio del intervalo J_0 . ■

Observaciones. El teorema anterior tiene implicaciones interesantes para el retrato fase de sistemas autónomos. Primero, dos trayectorias del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ no pueden cruzarse, como en la figura 1.

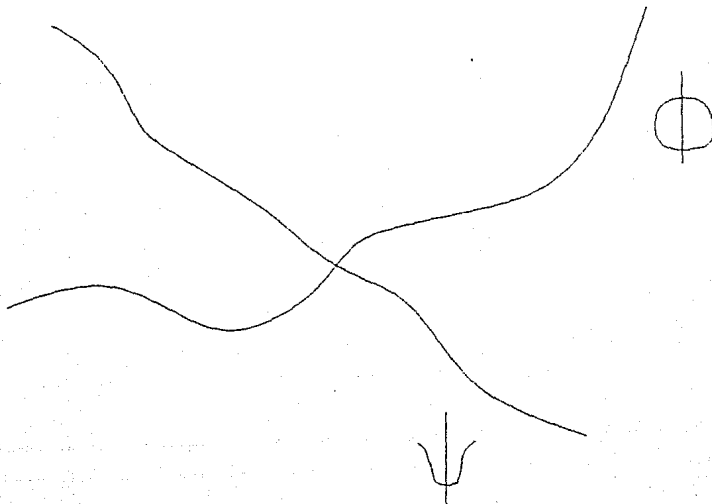


Figura 1

Pues si $\Phi: J \rightarrow U$, $\Psi: J \rightarrow U$ son dos soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ tales que $\Phi(t_1) = \Psi(t_2)$, llegamos a que $\Phi(t_1)$ no puede ser un punto de cruce, pues definiendo la función $\Psi_1(t)$ como $\Psi(t_2 - t_1 + t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\Psi_1'(t) &= \Psi'(t_2 - t_1 + t) \\ &= \mathbf{f}(\Psi(t_2 - t_1 + t)) \\ &= \mathbf{f}(\Psi_1(t))\end{aligned}$$

Por tanto, Ψ_1 es solución, y $\Psi_1(t_1) = \Psi(t_2) = \Phi(t_1)$. Por unicidad, Ψ_1 y Φ coinciden en una vecindad de t_1 . Luego Φ y Ψ no se cruzan en $\Phi(t_1)$.

Similarmente, una trayectoria no puede cortarse a sí misma, como en la figura 2.

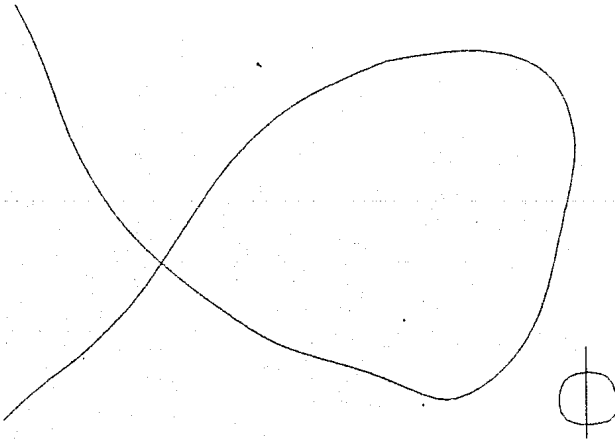


Figura 2

De hecho, si una solución $\Phi: J \rightarrow U$ cumple $\Phi(t_1) = \Phi(t_1 + w)$ para algunos $t_1 \in J$ y $w > 0$, entonces la trayectoria correspondiente es una curva cerrada.

2.3. CONTINUIDAD CON RESPECTO A CONDICIONES INICIALES

El teorema de esta sección nos permite conocer cómo se perturban las soluciones al variar la condición inicial. La demostración depende del siguiente lema, que se usará varias veces a lo largo de este trabajo.

Lema. (desigualdad de Gronwall) Sea $v: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbf{R}$ continua y no negativa. Supongamos que existen constantes $C \geq 0$, $K \geq 0$ tales que:

$$v(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^t K v(s) ds \right|$$

para $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Entonces:

$$v(t) \leq C e^{K|t-t_0|}$$

para $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Demostración: Supongamos primero $C > 0$ y $t > t_0$. Definimos

$$V(t) = C + \left| \int_{t_0}^t K v(s) ds \right| = C + \int_{t_0}^t K v(s) ds > 0$$

Por hipótesis, $v(t) \leq V(t)$. Derivando, tenemos: $V'(t) = K v(t)$, por tanto:

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{K v(t)}{V(t)} \leq K$$

de donde

$$\frac{d}{dt} \log V(t) \leq K$$

luego, integrando:

$$\log V(t) - \log V(t_0) \leq K(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \log V(t) \leq \log V(t_0) + K(t - t_0)$$

Como $V(t_0) = C$, tenemos, tomando exponenciales:

$$V(t) \leq C e^{K(t-t_0)}$$

y por tanto:

$$v(t) \leq V(t) \leq C e^{K(t-t_0)}$$

Si $t < t_0$, entonces $V(t) = C - \int_{t_0}^t K v(s) ds$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{-K v(t)}{V(t)} &\geq -K \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \log V(s) ds \leq \int_{t_0}^t -K ds \\ &\Rightarrow \log V(t) - \log V(t_0) \leq -K(t - t_0) = K|t - t_0| \\ &\Rightarrow v(t) \leq V(t) \leq V(t_0) e^{K|t-t_0|} = C e^{K|t-t_0|} \end{aligned}$$

Si $C = 0$, aplicamos los argumentos de arriba para una sucesión $\{C_n\}$ de números positivos que tiende a cero. Con esto se prueba el lema. ■

Teorema. Sea $f: J \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ tal que K es constante de Lipschitz para f , con t en el intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset J$. Sean $y(t)$, $z(t)$ soluciones de $\dot{x} = f(t, x)$ en el intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Entonces, para todo $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ se tiene:

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| e^{K|t-t_0|}$$

Demostración: Sea $v(t) = |y(t) - z(t)|$. Como

$$y(t) - z(t) = y(t_0) - z(t_0) + \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds$$

tenemos:

$$v(t) \leq v(t_0) + \left| \int_{t_0}^t K v(s) ds \right|$$

Entonces, por el lema:

$$v(t) \leq v(t_0) e^{K|t-t_0|}$$

como queríamos demostrar. ■

2.4. EL INTERVALO MAXIMO

A partir de este momento consideraremos solamente sistemas de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

Es decir, la aplicación f que define el sistema es independiente de t .

Lema. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación C^1 . Supongamos que dos soluciones $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ están definidas en el intervalo abierto J tal que $t_0 \in J$ y $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{v}(t_0)$. Entonces $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ para todo $t \in J$.

Demostración: Por el teorema de unicidad de soluciones, sabemos que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ en algún intervalo que contiene a t_0 . Sea J^* la unión de todos los intervalos abiertos J_0 que contienen a t_0 y contenidos en J tales que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ para toda $t \in J_0$. J^* es un intervalo abierto (pues es unión de intervalos abiertos con un punto en común) y contiene a t_0 . Afirmamos que $J^* = J$. Pues si no, sea t_1 un extremo de J^* . Entonces $t_1 \in J$. Por continuidad, $\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{v}(t_1)$. Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, existe J' un intervalo abierto centrado en t_1 tal que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ en J' . Entonces $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ en $J^* \cup J'$, que es un intervalo más grande que J^* . Por tanto, $J^* = J$. ■

Lema. Con las hipótesis del lema anterior, para cada $\mathbf{x}_0 \in U$ existe un intervalo abierto máximo (α, β) que contiene a t_0 en el cual está definida una solución $\mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, en el sentido de que si J es un intervalo abierto tal que $t_0 \in J$ y está definida una solución \mathbf{y} de (1) tal que $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$, entonces $J \subset (\alpha, \beta)$. No se excluyen las posibilidades $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$.

Demostración: Por el teorema de existencia, hay un intervalo que contiene a t_0 en el cual está definida una solución $\mathbf{y}(t)$ tal que $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Sea (α, β) la unión de tales intervalos. Definimos la función \mathbf{x} en (α, β) del siguiente modo: Dado $t \in (\alpha, \beta)$ sea \mathbf{y} una solución definida en un intervalo que contenga a t_0 y a t . Entonces $\mathbf{x}(t) := \mathbf{y}(t)$. Por el lema anterior, \mathbf{x} está bien definida y es una solución. Por construcción se tiene que (α, β) es máximo en el sentido descrito. ■

Corolario 1. Sea J el intervalo máximo de la solución $\mathbf{x}(t)$ tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ y sea $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Entonces J también es el intervalo máximo de las soluciones \mathbf{y} tales que $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1$.

Demostración: Sea J' el intervalo máximo donde está definida una solución $\mathbf{y}(t)$ tal que $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1$. Como $\mathbf{x}(t)$ es una de tales soluciones, se tiene que $J \subset J'$. Pero la contención no puede ser propia, ya que se contradice la maximalidad de J . Por tanto, $J' = J$.

Lema. Sea $f(t)$ una función con valores en \mathbf{R}^n continua y definida en el intervalo finito (a, b) . Entonces f se extiende a una función continua en $[a, b]$ si y sólo si f es uniformemente continua en (a, b) .

Demostración: Supongamos primero que f se extiende a una función continua en $[a, b]$, entonces la extensión será uniformemente continua en $[a, b]$, por tanto en (a, b) .

Ahora, supongamos que f es uniformemente continua en (a, b) . Sea $\{t_n\}$ una sucesión creciente que converge a b . Entonces $\{t_n\}$ es de Cauchy en (a, b) , y por la continuidad uniforme, $\{f(t_n)\}$ es de Cauchy en \mathbf{R} . Sea $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$. Demostraremos en seguida que $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = y$.

Sea $\varepsilon > 0$. Sea $N \geq 0$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f(t_n) - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, y para $\frac{\varepsilon}{2}$ sea δ garantizada por la continuidad uniforme. Sea t_n con $n \geq N$ y $t_n \in (b - \delta, b]$. Entonces si $t \in (b - \delta, b]$, tenemos que:

$$|f(t) - y| \leq |f(t_n) - y| + |f(t) - f(t_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto, podemos extender continuamente f a b definiendo $f(b) = y$. El caso de $f(a)$ se trata de manera análoga. ■

Teorema 1. Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función C^1 . Sea $y(t)$ una solución en un intervalo abierto máximo $J = (\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$ con $\beta < \infty$. Entonces, dado cualquier conjunto compacto $K \subset U$, existe $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $y(t)$ no está en K .

Demostración: Supongamos $y(t) \in K$ para $t \in (\alpha, \beta)$. Como f es continua, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para $x \in K$.

Sea $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Demostraremos que y puede extenderse a una función continua $y: [\gamma, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$. Por el lema anterior, basta demostrar que y es uniformemente continua en (α, β) .

Si $t_0 < t_1$, donde $t_0, t_1 \in (\alpha, \beta)$, tenemos:

$$\begin{aligned} |y(t_1) - y(t_0)| &= \left| \int_{t_0}^{t_1} \dot{y}(s) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} |f(y(s))| ds \\ &\leq M(t_1 - t_0) \end{aligned}$$

donde $M = \max_{\mathbf{x} \in A} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|$. Por tanto, $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*$. Por hipótesis, existe una vecindad W de \mathbf{x}^* tal que $\mathbf{f}|_W$ es Lipschitz con constante K . Además, existe un número natural N tal que $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \in W$ para $n \geq N$. Por tanto, tendríamos:

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_n)| \leq K |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n|, \quad n \geq N$$

lo cual contradice (2) para n suficientemente grande. ■

Teorema 2. Sea $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^1 . Sea $\mathbf{y}(t)$ una solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, con $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Entonces existen una vecindad $W \subset U$ de \mathbf{y}_0 y una constante K tal que si $\mathbf{z}_0 \in W$, existe una solución $\mathbf{z}(t)$ también definida en $[a, b]$ tal que $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ y además:

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)| \leq |\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0| e^{K|t-t_0|} \quad (3)$$

para $t \in [a, b]$.

Demostración: Como $[a, b]$ es compacto y \mathbf{y} es continua, tenemos que $\mathbf{y}([a, b])$ es compacto en U . Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que una vecindad de radio 2ε del conjunto $\mathbf{y}([a, b])$ está completamente contenida en U . Sea A la cerradura de la vecindad de radio ε . Entonces, A es compacto, y de hecho:

$$A = \{\mathbf{x} \in U \mid \text{existe } t \in [a, b] \text{ tal que } |\mathbf{x} - \mathbf{y}(t)| \leq \varepsilon\} \subset U$$

Puesto que \mathbf{f} es C^1 , entonces es localmente Lipschitz, por tanto tenemos que $\mathbf{f}|_A$ es Lipschitz con constante K .

Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ y $\delta e^{K(b-a)} < \varepsilon$. Demostraremos que la vecindad de \mathbf{y}_0 requerida es la bola centrada en \mathbf{y}_0 con radio δ .

Sea \mathbf{z}_0 tal que $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta$. Entonces $\mathbf{z}_0 \in U$, pues $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}(t_0)| \leq \varepsilon$. Por tanto existe una solución $\mathbf{z}(t)$ tal que $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ y \mathbf{z} está definida en un intervalo máximo (α, β) . Demostraremos que $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. Supongamos que $\beta \leq b$. Entonces tenemos que $\mathbf{z}(t) \in A$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Pues de no ser así, existiría $t^* \in (\alpha, \beta)$ tal que $\mathbf{z}(t) \in A$ para $t \in (\alpha, t^*)$ y $\mathbf{z}(t^*)$ está en la frontera de A . Pero entonces

$$|\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq |\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| + \left| \int_{t_0}^t K |\mathbf{z}(s) - \mathbf{y}(s)| ds \right|$$

Sistemas dinámicos

3.1. EL FLUJO DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una función C^1 , $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Para cada $\mathbf{y} \in U$ existe una única solución $\Phi(t)$ de la ecuación diferencial (1) con $\Phi(0) = \mathbf{y}$ definida en un intervalo abierto máximo $J(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}$. Indicaremos la dependencia de $\Phi(t)$ con respecto a \mathbf{y} escribiendo:

$$\Phi(t, \mathbf{y}) := \Phi(t)$$

Es decir, $\Phi(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$ el siguiente conjunto:

$$\Omega = \{ (t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in J(\mathbf{y}) \}$$

Definición. La aplicación $(t, \mathbf{y}) \mapsto \Phi(t, \mathbf{y})$ es una función $\Phi: \Omega \rightarrow U$, a la que llamaremos el **flujo** de la ecuación (1).

Escribiremos frecuentemente:

$$\Phi_t(\mathbf{x}) := \Phi(t, \mathbf{x})$$

$J(\Phi_t(\mathbf{x}))$, la solución $\mathbf{y}^*(r) = \Phi(r, \Phi_t(\mathbf{x}))$ está definida en $(s - \varepsilon, \varepsilon)$ para alguna $\varepsilon > 0$. Por tanto, la solución $\mathbf{y}(r) = \Phi(r - t, \Phi_t(\mathbf{x}))$ está definida para r en el intervalo $(s + t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Nuevamente $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t)$, de donde como en el caso anterior, se tiene

$$\Phi_s(\Phi_t(\mathbf{x})) = \Phi(s, \Phi_t(\mathbf{x})) = \mathbf{y}(s+t) = \mathbf{z}(s+t) = \Phi(s+t, \mathbf{x}) = \Phi_{s+t}(\mathbf{x}) \quad \blacksquare$$

Teorema 2. *El conjunto Ω es abierto en $\mathbf{R} \times U$ y $\Phi: \Omega \rightarrow U$ es una función continua.*

Demostración: Sea $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$. Entonces la solución $t \mapsto \Phi(t, \mathbf{x}_0)$ está definida en el intervalo $J(\mathbf{x}_0)$ que contiene a 0 y a t_0 . Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado que contenga a 0 y a t_0 contenido en $J(\mathbf{x}_0)$. Por el teorema 2 de la sección 2.4. existe una vecindad W de \mathbf{x}_0 y una constante $K > 0$ tales que para todo $\mathbf{x} \in W$, la curva solución $t \mapsto \Phi(t, \mathbf{x})$ está definida en I y:

$$|\Phi(t, \mathbf{x}) - \Phi(t, \mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| e^{K|t|} \quad (1)$$

Por tanto, $(a, b) \times W \subset \Omega$, de donde se obtiene que Ω es abierto.

Para ver que Φ es continua, sea $\{(t_n, \mathbf{x}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Ω que converge a (t_0, \mathbf{x}_0) . Entonces t_n está en I para n suficientemente grande, y tenemos que:

$$|\Phi(t_n, \mathbf{x}_n) - \Phi(t_0, \mathbf{x}_0)| \leq |\Phi(t_n, \mathbf{x}_n) - \Phi(t_n, \mathbf{x}_0)| + |\Phi(t_n, \mathbf{x}_0) - \Phi(t_0, \mathbf{x}_0)| \quad (2)$$

Por la observación anterior:

$$|\Phi(t_n, \mathbf{x}_n) - \Phi(t_n, \mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| e^{K|t_n|} \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| e^{K \max\{-a, b\}}$$

entonces, el primer término del miembro derecho de la desigualdad (2) tiende a cero cuando \mathbf{x}_n tiende a \mathbf{x}_0 . Como $\Phi(\cdot, \mathbf{x}_0)$ es diferenciable, el segundo término también tiende a cero cuando $t_n \rightarrow t_0$. Por tanto, Φ es continua. \blacksquare

Si $(t, \mathbf{x}_0) \in \Omega$, vimos que existe una vecindad $W \subset U$ de \mathbf{x}_0 tal que $t \times W \subset \Omega$. Por tanto, $\Phi_t(\mathbf{x})$ está definido para cualquier $\mathbf{x} \in W$. Tenemos entonces la función:

$$\begin{array}{l} \Phi_t: W \rightarrow U \\ \text{tal que} \quad \mathbf{x} \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}) \end{array}$$

y que K es una constante de Lipschitz en \mathbf{x} para \mathbf{f} . Si $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ son soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ y $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ respectivamente, definidas en un intervalo J y $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$, entonces:

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{K} (e^{K|t-t_0|} - 1)$$

para $t \in J$.

Demostración: Para $t \in J$, $t > t_0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) &= \int_{t_0}^t [\dot{\mathbf{x}}(s) - \dot{\mathbf{y}}(s)] ds \\ &= \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{g}(s, \mathbf{x}(s))] ds. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t |\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t K |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| ds + \int_{t_0}^t \varepsilon ds. \end{aligned}$$

Sea $u(t) = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|$. Entonces:

$$u(t) \leq K \int_{t_0}^t \left[u(s) + \frac{\varepsilon}{K} \right] ds \quad \Rightarrow \quad u(t) + \frac{\varepsilon}{K} \leq \frac{\varepsilon}{K} + K \int_{t_0}^t \left[u(s) + \frac{\varepsilon}{K} \right] ds$$

En el caso de que $t < t_0$, considerando que

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) = \int_t^{t_0} [\dot{\mathbf{x}}(s) - \dot{\mathbf{y}}(s)] ds$$

llegamos a que

$$u(t) + \frac{\varepsilon}{K} \leq \frac{\varepsilon}{K} + K \int_t^{t_0} \left[u(s) + \frac{\varepsilon}{K} \right] ds = \frac{\varepsilon}{K} + \frac{\varepsilon}{K} \left| \int_{t_0}^t \left[u(s) + \frac{\varepsilon}{K} \right] ds \right|$$

Se sigue de la desigualdad de Gronwall que:

$$u(t) + \frac{\varepsilon}{K} \leq \frac{\varepsilon}{K} e^{K|t-t_0|}$$

como queríamos demostrar. ■

se llama la **ecuación variacional** de (1) a lo largo de la solución $\mathbf{y}(s)$.

Sea $\mathbf{y}(s)$ una solución de (1) definida en un intervalo abierto J que contiene al 0. Tenemos que $A: J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, definida por $A(s) := D\mathbf{f}(\mathbf{y}(s))$ es continua, pues es composición de las aplicaciones continuas $\mathbf{y}: J \rightarrow U$ y $D\mathbf{f}: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, para cualquier $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ existe una vecindad del 0 donde está definida una solución $\mathbf{u}(s)$ de (2) tal que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. Demostraremos ahora que si $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in U$ y \mathbf{u}_0 es pequeño, entonces la función $\mathbf{y}^*(s) = \mathbf{y}(s) + \mathbf{u}(s)$ es una buena aproximación a la solución $\mathbf{x}(s)$ de (1) con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{u}_0$.

Usaremos la siguiente notación: Para $\xi \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por

$$s \mapsto \mathbf{u}(s, \xi)$$

a la solución de (2) que envía 0 a ξ . Observemos que $\mathbf{u}(s, \cdot)$ es una transformación lineal, por ser solución de un sistema lineal. Si $\mathbf{y}_0 + \xi \in U$, denotaremos por

$$s \mapsto \mathbf{y}(s, \xi)$$

a la solución de (1) que envía 0 a $\mathbf{y}_0 + \xi$. Es decir: $\mathbf{y}(s, \xi) = \Phi_s(\mathbf{y}_0 + \xi)$.

Lema. Sea $J_0 = [a, b] \subset J$ un intervalo cerrado que contiene a 0 en donde está definida la solución $\mathbf{y}(t)$. Entonces:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{y}(t, \xi) - \mathbf{y}(t) - \mathbf{u}(t, \xi)|}{|\xi|}$$

para cualquier $t \in J_0$.

Demostración: Las ecuaciones integrales satisfechas por $\mathbf{y}(t, \xi)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{u}(t, \xi)$ en $[a, b]$ para ξ suficientemente pequeño son:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{y}(s)) \, ds, \\ \mathbf{y}(t, \xi) &= \mathbf{y}_0 + \xi + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{y}(s, \xi)) \, ds, \\ \mathbf{u}(t, \xi) &= \xi + \int_0^t D\mathbf{f}(\mathbf{y}(s)) \mathbf{u}(s, \xi) \, ds. \end{aligned}$$

de donde:

$$g(t, \xi) \leq \left| \int_0^t Ng(s, \xi) ds \right| + C\varepsilon|\xi|$$

donde $C = \int_0^b e^{K|s|} ds$, con b el extremo del intervalo J_0 con mayor valor absoluto. Aplicando la desigualdad de Gronwall, tenemos:

$$g(t, \xi) \leq C\varepsilon e^{N|t|}|\xi| \leq C\varepsilon e^{Nb}|\xi|$$

Puesto que ε es un número positivo arbitrario, se obtiene que $g(t, \xi)/|\xi| \rightarrow 0$ como queríamos demostrar. ■

Teorema. El flujo $\Phi(t, \mathbf{x})$ de (1) es una función C^1 , es decir, $\partial\Phi/\partial t$ y $\partial\Phi/\partial \mathbf{x}$ existen y son continuas.

Demostración: Por definición de Φ , se tiene que

$$\partial\Phi(t, \mathbf{x})/\partial t = \mathbf{f}(\Phi_t(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\Phi(t, \mathbf{x}))$$

que es continua.

Sea $(t, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Sean $J_0 = [a, b]$ y W como en los lemas anteriores, tales que $(t, \mathbf{y}_0) \in (a, b) \times W$. Entonces la derivada $\partial\Phi(t, \mathbf{y}_0)/\partial \mathbf{x}$ es la derivada de la transformación $\Phi_t: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en el punto \mathbf{y}_0 . Es decir, es la transformación lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|\Phi_t(\mathbf{y}_0 + \xi) - \Phi_t(\mathbf{y}_0) - L(\xi)|}{|\xi|} = 0$$

Con la notación del lema anterior, $\Phi_t(\mathbf{y}_0 + \xi) - \Phi_t(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}(t, \xi) - \mathbf{y}(t)$. Por tanto, $D\Phi_t(\mathbf{y}_0) = \mathbf{u}(t, \cdot)$.

Ahora, para tener que Φ es C^1 , debemos mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{l} (a, b) \times W \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ \text{tal que } (t, \mathbf{y}_0) \mapsto D\Phi_t(\mathbf{y}_0) \end{array}$$

es continua. Pero esta es continua si y sólo si las aplicaciones

$$\begin{array}{l} (a, b) \times W \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{tal que } (t, \mathbf{y}_0) \mapsto D\Phi_t(\mathbf{y}_0)\mathbf{e}_i \end{array}$$

3.4. DEFINICIONES

Definición. Un sistema dinámico es una función C^1 , $\Phi: \mathbf{R} \times U \rightarrow U$, donde U es un subconjunto abierto de \mathbf{R}^n , tal que con la notación $\Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi_t(\mathbf{x})$ se tiene que: a) $\Phi_0: U \rightarrow U$ es la función identidad. b) $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$ para $s, t \in \mathbf{R}$.

Ejemplo. Definamos $\Phi(t, \mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x}$, donde A es una matriz constante. Claramente Φ es C^1 y Φ_0 es la identidad. Además:

$$\Phi_s(\Phi_t(\mathbf{x})) = e^{sA}e^{tA}\mathbf{x} = e^{(s+t)A}\mathbf{x} = \Phi_{s+t}(\mathbf{x})$$

Por tanto, Φ es un sistema dinámico.

Observación. Dado un sistema dinámico Φ , podemos definir un campo vectorial \mathbf{f} en \mathbf{R}^n de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(\mathbf{x})$$

Teorema. Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ como en la observación anterior. Entonces, las curvas definidas por $\mathbf{y}(t) = \Phi_t(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$ son soluciones de la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Demostración: Es inmediata, pues:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \Phi_t(\mathbf{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi_{t_0+h}(\mathbf{x}) - \Phi_{t_0}(\mathbf{x})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi_h(\Phi_{t_0}(\mathbf{x})) - \Phi_0(\Phi_{t_0}(\mathbf{x}))}{h} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(\Phi_{t_0}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{f}(\Phi_{t_0}(\mathbf{x})) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Recíprocamente, según vimos en las secciones anteriores de este capítulo, una ecuación diferencial autónoma da origen a un sistema dinámico, a saber, el flujo de la ecuación, salvo que $\Phi_t(\mathbf{x})$ puede no estar definido para todo $t \in \mathbf{R}$.

Capítulo 4

Estabilidad

En este capítulo introducimos los conceptos de estabilidad y de conjuntos límite.

4.1. SUMIDEROS NO LINEALES

Consideremos la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una función de clase C^1 y U es un abierto de \mathbf{R}^n .

Definición. $\mathbf{x}_0 \in U$ se llama **punto de equilibrio** si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. En este caso, decimos que \mathbf{x}_0 es un **sumidero** si todos los valores propios de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real negativa.

Observemos que si \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio, la función $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ es solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Por tanto, si $\Phi: \Omega \rightarrow U$ es el flujo asociado, se tiene que $\Phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ para cualquier $t \in \mathbf{R}$. Por esto, a los puntos de equilibrio también suele llamárseles **puntos estacionarios**.

Teorema. Sea $\mathbf{x}_0 \in U$ un sumidero de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Supongamos que todo valor propio de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tiene parte real menor que $-c$, con $c > 0$. Entonces existe una vecindad $W \subset U$ de \mathbf{x}_0 tal que:

- $\Phi_t(\mathbf{x})$ está definida y en U para cualquier $\mathbf{x} \in W$, $t > 0$.
- Para cualquier norma en \mathbf{R}^n existe una constante $k > 0$ tal que:

$$|\Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0| \leq k e^{-ct} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$$

para cualquier $\mathbf{x} \in W$, $t > 0$. En particular, $\Phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier $\mathbf{x} \in W$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Definimos la matriz A como $Df(\mathbf{0})$, y sea $b > 0$ tal que $-b < -c$ y $-b$ es mayor que las partes reales de todos los valores propios de A . Por el teorema 1 de la sección 1.5, existe $k > 0$ tal que:

$$|e^{tA}\mathbf{x}| \leq ke^{-bt}|\mathbf{x}|$$

para todo \mathbf{x} y toda $t > 0$. Definimos $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{x}$. Por definición de derivada se tiene que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} |\mathbf{g}(\mathbf{x})|/|\mathbf{x}| = 0$. Sea $\varepsilon = \frac{b-c}{k}$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $|\mathbf{x}| < \delta$, se tiene que $\mathbf{x} \in U$ y $|\mathbf{g}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon|\mathbf{x}|$.

Sea $\mathbf{y}(t) = \Phi_t(\mathbf{x})$, con $|\mathbf{x}| < \frac{\delta}{k}$. La solución $\mathbf{y}(t)$ puede representarse, en donde esté definida, por

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{x} + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{g}(\mathbf{y}(s)) ds$$

como puede verificarse al derivar, con lo que obtenemos

$$\dot{\mathbf{y}} = Ae^{tA}\mathbf{x} + \int_0^t Ae^{(t-s)A}\mathbf{g}(\mathbf{y}(s)) ds + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t))$$

Por tanto, siempre que $|\mathbf{y}(t)| < \delta$

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}(t)| &\leq ke^{-bt}|\mathbf{x}| + \int_0^t ke^{-b(t-s)}|\mathbf{g}(\mathbf{y}(s))| ds \\ &\leq ke^{-bt}|\mathbf{x}| + \varepsilon k \int_0^t e^{-b(t-s)}|\mathbf{y}(s)| ds \end{aligned} \quad (1)$$

lo cual implica

$$e^{bt}|\mathbf{y}(t)| \leq k|\mathbf{x}| + \varepsilon k \int_0^t e^{bs}|\mathbf{y}(s)| ds$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall (sección 2.3, capítulo 2), obtenemos:

$$e^{bt}|\mathbf{y}(t)| \leq k|\mathbf{x}|e^{\varepsilon kt}$$

Por tanto,

$$|\mathbf{y}(t)| \leq k|\mathbf{x}|e^{(\varepsilon k - b)t} = ke^{-ct}|\mathbf{x}| < \delta \quad (2)$$

Como $|\mathbf{x}| < \frac{\delta}{k}$ se tiene que $\mathbf{y}(t) < \delta$ para todo $t > 0$. Entonces (2) es válido para cualquier $t > 0$. Con esto se demuestra b), y por consiguiente a), tomando a W como la bola centrada en el origen con radio δ/k . ■

4.2. ESTABILIDAD

Intuitivamente, un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es estable si cualquier solución $\mathbf{y}(t)$ con $\mathbf{y}(0)$ cercano a \mathbf{x}_0 permanece cercana a \mathbf{x}_0 . Este concepto es muy importante en las aplicaciones de las matemáticas debido a los posibles errores en las mediciones.

Definición. Sea \mathbf{x}_0 un punto de equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Entonces \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio estable si para cualquier vecindad W de \mathbf{x}_0 existe otra vecindad W_1 de \mathbf{x}_0 tal que cualquier solución $\mathbf{y}(t)$ con $\mathbf{y}(0) \in W_1$ es tal que $\mathbf{y}(t) \in W$ para toda $t > 0$. Si puede escogerse a W_1 de modo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0$, decimos que \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si \mathbf{x}_0 no es un punto de equilibrio estable, se dice que es inestable.

Por ejemplo, un sumidero es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Un ejemplo de un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable aparece en la sección 1.4.

4.3. FUNCIONES DE LIAPUNOV

El teorema de la sección 4.1. nos da un criterio de estabilidad asintótica. Sin embargo, es posible tener un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 que sea asintóticamente estable, sin que se cumpla tal condición. Necesitamos por tanto un método menos restrictivo para reconocer estabilidad, que daremos en esta sección.

Sea $V: W \rightarrow \mathbf{R}$ una función diferenciable definida en una vecindad del punto de equilibrio \mathbf{x}_0 . Denotaremos por $\dot{V}: W \rightarrow \mathbf{R}$ a la función definida por:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = DV(\mathbf{x})(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Por tanto,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(\Phi_t(\mathbf{x}))$$

Entonces, si $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$, sabemos que V decrece por la trayectoria que comienza en \mathbf{x} .

Teorema. Sea $\mathbf{x}_0 \in U$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Sea $V: W \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua definida en una vecindad de \mathbf{x}_0 diferenciable en $W \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ tal que:

a) $V(\mathbf{x}_0) = 0$, y $V(\mathbf{x}) > 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$;

b) $\dot{V} \leq 0$ en $W \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Entonces \mathbf{x}_0 un punto de equilibrio estable. Si además:

c) $\dot{V} < 0$ en $W \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, entonces \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Demostración: Dada W vecindad de \mathbf{x}_0 , sea $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(\mathbf{x}_0)} \subset W$. Sea α el mínimo de V en la frontera de $B_\delta(\mathbf{x}_0)$. Por la condición a), tenemos que $\alpha > 0$. Sea $U_1 = \{\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \mid V(\mathbf{x}) < \alpha\}$. Entonces ninguna solución que comience en U_1 puede alcanzar la frontera de $B_\delta(\mathbf{x}_0)$, ya que V decrece a lo largo de trayectorias. Por tanto \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio estable.

Ahora supongamos que se cumple c), es decir, V es estrictamente decreciente a lo largo de trayectorias. Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución que comienza en U_1 y sea $\{t_n\}$ una sucesión monótona en \mathbf{R} que tiende a infinito. Supongamos que $\mathbf{x}(t_n)$ converge a $\mathbf{z}_0 \in \overline{B_\delta(\mathbf{x}_0)}$. Esto lo podemos suponer, por la compacidad de $\overline{B_\delta(\mathbf{x}_0)}$. Afirmamos que $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0$. Pues $V(\mathbf{x}(t)) \geq V(\mathbf{z}_0)$ para toda t , ya que $V(\mathbf{x}(t))$ decrece y $V(\mathbf{x}(t_n)) \rightarrow V(\mathbf{z}_0)$, por la continuidad de V . Si $\mathbf{z}_0 \neq \mathbf{x}_0$, sea $\mathbf{z}(t) = \Phi_t(\mathbf{z}_0)$ la solución que comienza en \mathbf{z}_0 . Para cualquier $s > 0$, tenemos que $V(\Phi_s(\mathbf{z}_0)) < V(\mathbf{z}_0)$. Por continuidad, para todo \mathbf{y} suficientemente cercano a \mathbf{z}_0 se tiene que $V(\Phi_s(\mathbf{y})) < V(\mathbf{z}_0)$ para $s > 0$. Tomando $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t_n)$ con n suficientemente grande, tendríamos

$$V(\mathbf{x}(s + t_n)) < V(\mathbf{z}_0)$$

Pero ésto contradice que $V(\mathbf{x}(t)) \geq V(\mathbf{z}_0)$ para toda $t \geq 0$. Por tanto, $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0$.

Ahora, si suponemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{x}_0$, podríamos construir una sucesión monótona $\{t_n\}$ que tienda a infinito tal que $\mathbf{x}(t_n)$ no pertenece a $B_r(\mathbf{x}_0)$ para toda n , con $r > 0$. Pero entonces ninguna subsucesión de $V(\mathbf{x}(t_n))$ puede converger a $V(\mathbf{x}_0) = 0$, contra lo que hemos demostrado arriba. Por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$. ■

Por ejemplo, en la demostración del teorema anterior se tiene que el conjunto $\{\mathbf{x}_0\}$ es el conjunto límite de cualquier trayectoria que comience en U_1 . En el próximo capítulo clasificaremos todos los conjuntos límite posibles en los sistemas dinámicos bidimensionales.

Definición. Una sección (con respecto a f) es un segmento de recta finito L tal que:

- a) Todos los puntos de L son puntos regulares de (1).
- b) En todos los puntos de L , la dirección del vector f es distinta de la de L .

El siguiente lema proporciona las propiedades más elementales de las secciones:

Lema.

- a) A través de cualquier punto regular $A = (x_0, y_0)$ en U puede trazarse una sección L que contenga a A en su interior, y L puede tener cualquier dirección excepto la de $f(x_0, y_0)$.
- b) Cualquier trayectoria que interseque a una sección L la cruza transversalmente de un lado a otro, y todas las trayectorias que cruzan a L lo hacen en el mismo sentido.
- c) El conjunto

$$C = \{ \Phi_t(\mathbf{x}) \mid a \leq t \leq b, \mathbf{x} \in U \}$$

cruza a L un número finito de veces, es decir, $\Phi_t(\mathbf{x}) \in L$ para un número finito de valores de $t \in [a, b]$ para cualquier \mathbf{x} .

d) Sea A un punto en el interior de una sección L . Entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe una bola Γ con centro en A , tal que cualquier trayectoria que comience en $\mathbf{x} \in \Gamma$ interseca a L en un tiempo $t(\mathbf{x})$, con $|t(\mathbf{x})| < \varepsilon$. De hecho, dada cualquier vecindad W de A podemos tomar a Γ de modo que $\Phi_{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in W \cap L$ para cualquier $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Demostración: Las demostraciones de a) y b) se siguen inmediatamente de la continuidad de f . Demostraremos entonces c). Supongamos que existe $\{t_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ una sucesión de diferentes valores de t tales que $\Phi_{t_n}(\mathbf{x}) \in L$. Sean $A_n = \Phi_{t_n}(\mathbf{x})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que t_n converge a t_0 . Sea $A_0 = \Phi_{t_0}(\mathbf{x})$. Por continuidad de $\Phi(\cdot, \mathbf{x})$, se tiene que A_n converge a A_0 y como L es cerrado, $A_0 \in L$. Si denotamos por $\overline{A_0 A_n}$ al segmento de recta que va de A_0 a A_n , entonces $\{\overline{A_0 A_n}\}$ es una sucesión de segmentos cuya dirección límite es la de la tangente a C en A_0 . Pues la dirección de $\overline{A_0 A_n}$ es la del vector $\frac{1}{t_n - t_0}(x(t_n) - x(t_0), y(t_n) - y(t_0))$ que tiende a $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = f(x(t_0), y(t_0))$ cuando $n \rightarrow \infty$. Pero como cada

A_n está en L , la dirección límite es la dirección de L , lo cual es imposible por la condición b) en la definición de sección. Con esto se demuestra c).

Para demostrar d), supondremos sin pérdida de generalidad, que A es el origen y que L tiene la dirección del eje x . Tenemos que las componentes $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ de $\Phi_t(x_0, y_0)$ son funciones de clase C^1 considerando como variables a t , x_0 y y_0 . Además, por definición de sección sabemos que $\partial y(0, 0, 0)/\partial t \neq 0$. Por tanto, usando el teorema de la función implícita, la ecuación $y(t, x_0, y_0) = 0$ tiene una única solución continua $t = t(x_0, y_0)$ definida en una bola Γ con centro en el origen. Puesto que $t(0, 0) = 0$, si escogemos Γ de radio suficientemente pequeño, se tendrá $|t(x_0, y_0)| < \varepsilon$ para $(x_0, y_0) \in \Gamma$. La última afirmación se sigue de la continuidad de $\Phi(t(x, y), x, y)$. ■

5.2. LEMAS BASICOS

En esta sección supondremos que $C = \{ \Phi_t(\mathbf{x}) \mid t > 0 \}$ es una trayectoria que comienza en $\mathbf{x} \in U$ y que está completamente contenida en un conjunto compacto R del plano, que a su vez está contenido en U . En este caso, el conjunto límite de C , que definimos en la sección 4.4, y denotamos por C' , debe ser no vacío, ya que para cualquier sucesión $\{t_n\}$ que tiende a infinito, la sucesión $\{(x(t_n), y(t_n))\}$ tiene una subsucesión convergente. Además, claramente $C' \subset R$.

Lema 1. *El conjunto C' es cerrado y conexo, además*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d[(x(t), y(t)), C'] = 0 \quad (1)$$

Demostración: Demostraremos primero que C' es cerrado. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de puntos en C' que converge al punto A . Entonces, para cada n existe una sucesión $\{s_k^n\}_k$ que tiende a infinito tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(s_k^n), y(s_k^n)) = A_n$$

Por tanto, para cualquier n existe k_n tal que $s_{k_n}^n > n$ y

$$d[(x(s_{k_n}^n), y(s_{k_n}^n)), A_n] < \frac{1}{n}$$

Tomemos $t_n = s_{k_n}^n$. La sucesión $\{t_n\}$ tiende a infinito, y además:

$$d[(x(t_n), y(t_n)), A_n] < \frac{1}{n}$$

Por tanto, la sucesión $\{(x(t_n), y(t_n))\}$ converge a A , de donde $A \in C'$ y C' es cerrado.

Demostraremos ahora que C' es conexo. Supongamos que no, entonces existen dos conjuntos M, N ajenos, no vacíos y cerrados en C' tales que:

$$C' = M \cup N$$

Como C' es cerrado, M y N son compactos, por tanto existe entre ellos una distancia positiva δ . Tomemos ahora una sucesión monótona $\{t_n\}$ que tienda a infinito tal que

$$\begin{aligned} d[(x(t_n), y(t_n)), M] &< \frac{\delta}{4} && \text{para } n \text{ par} \\ d[(x(t_n), y(t_n)), N] &< \frac{\delta}{4} && \text{para } n \text{ impar} \end{aligned}$$

Si definimos $u(t) = d[(x(t), y(t)), M] - d[(x(t), y(t)), N]$, entonces u es continua y cambia de signo en $[t_{2n-1}, t_{2n}]$. Por tanto, existe t'_n tal que $t_{2n-1} < t'_n < t_{2n}$ para $n = 1, 2, \dots$ y

$$d[(x(t'_n), y(t'_n)), M] = d[(x(t'_n), y(t'_n)), N]$$

Además

$$\begin{aligned} \delta = d[M, N] &\leq d[(x(t'_n), y(t'_n)), M] + d[(x(t'_n), y(t'_n)), N] \\ &= 2d[(x(t'_n), y(t'_n)), M] \\ &= 2d[(x(t'_n), y(t'_n)), M \cup N] \end{aligned}$$

Por tanto

$$d[(x(t'_n), y(t'_n)), M \cup N] \geq \frac{\delta}{2} \quad (2)$$

Ahora, la sucesión $\{(x(t'_n), y(t'_n))\}$ debe tener una subsucesión convergente a un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in C'$. Por (2),

$$d[(\bar{x}, \bar{y}), M \cup N] \geq \frac{\delta}{2}$$

lo cual es una contradicción, pues $M \cup N = C'$. Por tanto, C' es conexo.

Finalmente, si (1) no se cumple, debe existir $\delta > 0$ y una sucesión $\{t_n\}$ que tiende a infinito tal que

$$d[(x(t_n), y(t_n)), C'] \geq \delta.$$

Entonces, como antes, existe una subsucesión de $\{(x(t_n), y(t_n))\}$ que converge a $(\bar{x}, \bar{y}) \in C'$, pero $d[(\bar{x}, \bar{y}), C'] \geq \delta$, lo cual es una contradicción. ■

Lema 2. Si C' contiene un punto regular $A = (\bar{x}, \bar{y})$, la característica Γ que comienza en A está contenida completamente en C'' .

Demostración: Sea $\Gamma(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$. Entonces,

$$(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = (\bar{x}, \bar{y})$$

Sea $\{t_n\}$ una sucesión que tiende a infinito tal que

$$\{\Phi_{t_n}(x(0), y(0))\} \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$$

Sea $\mathbf{x}_0 = (x(0), y(0))$. Entonces, para cualquier t_0 se tiene

$$\Phi(t_n + t_0, \mathbf{x}_0) = \Phi(t_0, \Phi(t_n, \mathbf{x}_0)) \rightarrow \Phi(t_0, (\bar{x}, \bar{y})) = \Gamma(t_0) \quad \blacksquare$$

Las demostraciones anteriores pueden generalizarse a más dimensiones. En particular, por el lema anterior, cualquier conjunto límite consta de puntos de equilibrio y trayectorias completas. De aquí en adelante los resultados en general sólo son válidos en dos dimensiones, pues utilizaremos como herramienta fundamental el teorema de la curva de Jordan.

Teorema. (de la curva de Jordan) Dada una curva simple cerrada

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

diferenciable por partes con imagen Γ , existen dos conjuntos conexos U, V tales que $\mathbf{R}^2 = U \cup \Gamma \cup V$, U es acotado (y se llama interior de Γ), V es no acotado; y cualquier curva continua que empieza en U y termina en V interseca a Γ . ■

Lema 3. Si una órbita cerrada interseca una sección, entonces la interseca en un solo punto.

Demostración: Sea $C = \{\Phi_t(\mathbf{x}) \mid t > 0\}$ una trayectoria y L una sección tal que $C \cap L$ consta de más de un punto. Veremos que C no puede ser una trayectoria cerrada.

Sean $\mathbf{x}_1 = \Phi_{t_1}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_2 = \Phi_{t_2}(\mathbf{x})$ puntos distintos en la intersección de C con L , con $t_1 < t_2$. Entonces hay un número finito de valores de t

una sucesión monótona infinita $\{t_n\}$ que tiende a infinito.

Sea $A_n = \{(x(t_n), y(t_n))\}$. Si $A_1 = A_2$, entonces C es una trayectoria cerrada, por tanto $A_1 = A_n$ para cualquier n . Ahora bien, el límite de la sucesión $\{A_n\}$ (que es A_1) debe estar en $C' \cap L \subset C \cap L$, por el lema 3. Pero $C \cap L = \{A\}$, por tanto $A = A_1 = A_2 = \dots$.

Supongamos ahora $A_1 \neq A_2$. Por argumentos de unicidad, todos los puntos A_n deben ser distintos entre sí. Por otra parte, la curva C no interseca a L para $t \in (t_1, t_2)$, por tanto, el conjunto

$$\{(x(t), y(t)) \mid t \in [t_1, t_2]\} \cup \overline{A_1 A_2}$$

forma una curva cerrada Γ a la que puede aplicarse el teorema de Jordan. Tenemos entonces dos casos:

Caso 1: Para $t > t_2$, se tiene que C está en el interior de Γ . La situación es la misma que en la figura 1 a la izquierda, con A_1 en el papel de x_1 y A_2 en el papel de x_3 . Entonces, por el teorema de Jordan, el punto A_3 debe estar en el interior de Γ . Por tanto, A_2 está entre A_1 y A_3 . De hecho, la curva C debe cortar a L como se muestra en la figura, pues C no puede cortarse a sí misma y debe cortar a L siempre en el mismo sentido, por el inciso b) del lema de la sección 5.1. Lo que resta del teorema se sigue por inducción.

Caso 2: Para $t > t_2$, se tiene que C está en el exterior de Γ , como en la figura 2. En este caso, C no puede llegar al interior de Γ , y se aplican los argumentos del caso 1 de manera análoga. ■

En la demostración anterior, observamos que A es el único punto de acumulación de los A_n . Ya que al ser $\{A_n\}$ una sucesión "monótona", sólo puede tener un punto de acumulación, que debe ser A , ya que por el inciso d) del lema de la sección anterior, cualquier vecindad de A en L contiene puntos de C , correspondientes a valores arbitrariamente grandes de t , es decir, puntos de la sucesión $\{A_n\}$.

Lema 5. Ninguna sección L puede cortar a C' en dos puntos distintos.

Demostración: Supongamos y_1, y_2 puntos distintos en $C' \cap L$. Sean V, W vecindades ajenas de tales puntos. Por el inciso d) del lema de la sección 5.1. existen puntos $x_1 \in V, x_2 \in W$ de C correspondientes a los tiempos t_1, t_2 con $t_1 < t_2$. Entonces entre los puntos x_1 y x_2 hay al menos un $y_i, i = 1, 2$, o bien entre los puntos y_1, y_2 hay algún x_i . Una consideración

Teorema 1. (Poincaré-Bendixson) Si C' no contiene puntos de equilibrio, entonces C' es una trayectoria cerrada F .

Demostración: Sea A un punto de C' y F la trayectoria que comienza en A . Por el lema 2, se tiene que $F \subset C'$. Sea F' el conjunto límite de F . Como C' es cerrado, $F' \subset C'$. Sea $B \in F'$. Tenemos que B es regular por estar en C' . Sea L una sección por B . Por el lema 5, $F' \cap L = \{B\}$. También C' corta a L en solamente un punto, y como $F' \subset C'$, ese punto es precisamente B . Como $B \in F'$, en cualquier vecindad de B existen puntos de F correspondientes a valores arbitrariamente grandes de t , que por el inciso d) del lema de la sección 5.1. se pueden llevar a L . Por tanto, F corta a L , y como $F \subset C'$, se tiene que $F \cap L = \{B\}$. Por el lema 4, F es una trayectoria cerrada, y por el lema 6, $F = C'$. ■

Si C no es ya una trayectoria cerrada, entonces intuitivamente es claro que debe presentarse alguna de las situaciones de la figura 3.

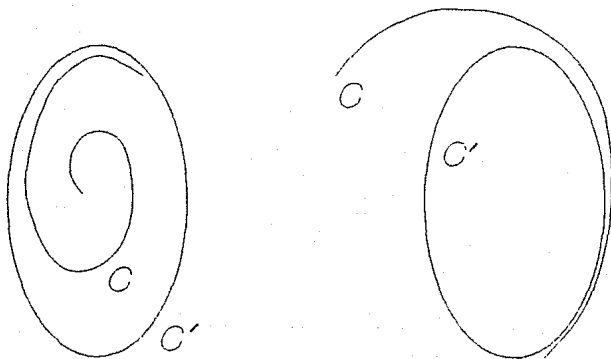


Figura 3

Definición. Si $F = C'$, a F se le llama ciclo límite.

Los siguientes teoremas precisarán las conclusiones del teorema anterior.

Teorema 2. Con las hipótesis del teorema anterior, supongamos que C no es una trayectoria cerrada. Sea $A \in F = C'$, L una sección por A y h el periodo de F . Sean A_n los puntos de intersección de C con L correspondientes a una sucesión monótona $\{t_n\}$ como en el lema 4. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1} - t_n) = h$$

Demostración: Supongamos primero que A es el origen y que L está sobre el eje x . Entonces, si $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)) = \Phi_t(x_0, y_0)$, se tiene que $\partial y(h, 0, 0)/\partial t \neq 0$, por definición de sección, y $y(h, 0, 0) = 0$. Por el teorema de la función implícita, existe una función continua σ definida en una vecindad del origen tal que $\sigma(0, 0) = h$ y $y(\sigma(x_0, y_0), x_0, y_0) = 0$. En la notación original, existe una función continua σ definida en una vecindad W de A tal que $\sigma(A) = h$. Como $A_n \rightarrow A$, tenemos que $\sigma(A_n) \rightarrow \sigma(A)$. Pero $\sigma(A_n) = t_{n+1} - t_n$ y $\sigma(A) = h$. ■

La función $\mathbf{x} \mapsto \Phi_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ considerada como definida en L y con valores en L , es un ejemplo de una **aplicación de Poincaré**. A cada punto de la sección, la aplicación de Poincaré le asigna el punto en que “regresa” a la sección.

Teorema 3. Supongamos que los puntos de equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ son aislados y que C' contiene al menos un punto de equilibrio A . Entonces:

a) Si C' no contiene puntos regulares, entonces C' consta únicamente del punto A , y $(x(t), y(t)) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$.

b) Si C' contiene al menos un punto regular, entonces C' consta de un número finito de puntos de equilibrio $\{A_n\}$ y un conjunto de trayectorias $\{C_a\}$, en donde si $t \rightarrow \infty$, se tiene que cada C_a se aproxima a un punto de equilibrio.

Demostración: Si C' no contiene puntos regulares, por ser conexo se debe tener que $C' = \{A\}$ y que C se aproxima a A cuando $t \rightarrow \infty$ por el lema 1. Si C' contiene un punto regular, entonces C' consta de un conjunto $\{A_n\}$ de puntos de equilibrio y un conjunto $\{C_a\}$ de trayectorias completas, en donde $\{A_n\}$ debe ser finito, pues de lo contrario tendría un punto de acumulación, contradiciendo la hipótesis de que los puntos de equilibrio están aislados. Si algún C'_a contiene un punto regular A , sea L la sección por A . Entonces $C' \cap L = \{A\}$. Pero la trayectoria C_a necesariamente

corta a L (por el lema de la sección anterior y el hecho de que $A \in C'_a$), y como $C_a \cap L \subset C' \cap L$, se tiene que $C_a \cap L = \{A\}$. Por el lema 4 se deduce que C_a es una trayectoria cerrada, y por el lema 6, también C' es una trayectoria cerrada. Pero ésto contradice la hipótesis de que C' contiene un punto de equilibrio. Por tanto, C'_a consta de un punto de equilibrio al cual se aproxima la trayectoria C_a . ■

Una observación final de esta sección. Así como definimos los conjuntos límite de trayectorias, que en tratados más generales se llaman ω -conjuntos límite, puede definirse el α -conjunto límite de la trayectoria que comienza en \mathbf{x} como

$$\{ \mathbf{y} \in U \mid \text{existe una sucesión } \{t_n\} \rightarrow -\infty \text{ tal que } \Phi_{t_n}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{y} \}$$

y se obtienen resultados análogos.

5.4. APLICACIONES DEL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

En esta sección, denotaremos el conjunto de ω -puntos límite de la trayectoria que comienza en \mathbf{x} como $\omega(\mathbf{x})$ y el conjunto de α -puntos límite de la misma trayectoria como $\alpha(\mathbf{x})$. Claramente el conjunto límite de una trayectoria no depende del punto inicial.

Lema. Sea C un ciclo límite, con $C = \omega(\mathbf{x})$. Entonces el conjunto:

$$\Lambda = \{ \mathbf{y} \mid C = \omega(\mathbf{y}) \}$$

es abierto.

Demostración: Sea A un punto en C , y L una sección por A . Consideremos los puntos A_1, A_2 y la curva Γ de la demostración del lema 4. En cualquiera de los dos casos, la región D entre la curva Γ y la curva C es tal que la trayectoria de cualquier punto en D está completamente contenida en él. De hecho, $D \subset \Lambda$, pues si $\mathbf{z} \in D$, las intersecciones de la trayectoria de \mathbf{z} con L están intercaladas entre los términos de la sucesión $\{A_n\}$. Ahora, si $\mathbf{y} \in \Lambda$, tenemos que $\Phi_t(\mathbf{y}) \in D$ para t suficientemente grande. Por la continuidad de Φ_t se tiene entonces que $\Phi_t(\mathbf{x})$ está en D para toda \mathbf{x} en una vecindad W de \mathbf{y} . Por tanto, $W \subset \Lambda$, lo cual demuestra que Λ es abierto. ■

$\mathbf{x}_n \in \omega(\mathbf{x})$ para todo n suficientemente grande y $\omega(\mathbf{x})$ es cerrado, se tendría que $\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{x})$, lo cual implica que la trayectoria por \mathbf{x} está contenida en $\omega(\mathbf{x})$, lo cual contradice que la trayectoria por \mathbf{x} es un conjunto distinto de $\omega(\mathbf{x})$. Sea entonces γ la trayectoria de \mathbf{x} , que determina un área $S(\gamma)$. Suponiendo que el área determinada por una curva cambia continuamente al cambiar continuamente la curva, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S(\gamma)$. Por tanto, $S(\gamma) = S$. Entonces, la curva γ no puede contener trayectorias cerradas ni puntos de equilibrio, contradiciendo el lema anterior. ■

Teorema 3. *Sea H una primera integral de un sistema dinámico bidimensional (es decir, H es una función real constante sobre trayectorias). Si en todo conjunto abierto H no es constante, entonces no hay ciclos límite.*

Demostración: Supongamos que existe un ciclo límite C . Sea $\mathbf{x}(t)$ una trayectoria que se aproxima a C , y $c = H(\mathbf{x}(t))$. Por continuidad, $H = c$ sobre C . Entonces, por el primer lema de esta sección, se tiene que H es constante en un conjunto abierto. ■

El oscilador de Van der Pol

El propósito de este capítulo es exponer las principales características de uno de los osciladores no lineales más importantes en las aplicaciones a otras ramas de la ciencia.

La ecuación que comúnmente se conoce con el nombre de **oscilador de Van der Pol** es de la forma:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

Aquí consideraremos solamente el caso $\varepsilon > 0$. Si introducimos la nueva variable

$$y = \dot{x} + \varepsilon\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)$$

obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \varepsilon\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \quad (2)$$

Claramente el origen es el único punto de equilibrio del sistema. Además, al denotar a $(y - \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - x), -x)$ como $\mathbf{f}(x, y)$ y a (x, y) como \mathbf{x} , de modo que (2) es el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, podemos observar que, dado que $\mathbf{f}(-x, -y) = -\mathbf{f}(x, y)$, se tiene que si $\mathbf{x}(t)$ es solución de (2), también lo es $-\mathbf{x}(t)$. Por tanto, el retrato fase en el plano xy es simétrico con respecto al origen.

A continuación, consideramos el comportamiento del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y)$ en cada una de las curvas y regiones anteriores, en donde \dot{x} y \dot{y} tienen signo constante. (Ver figura 2).

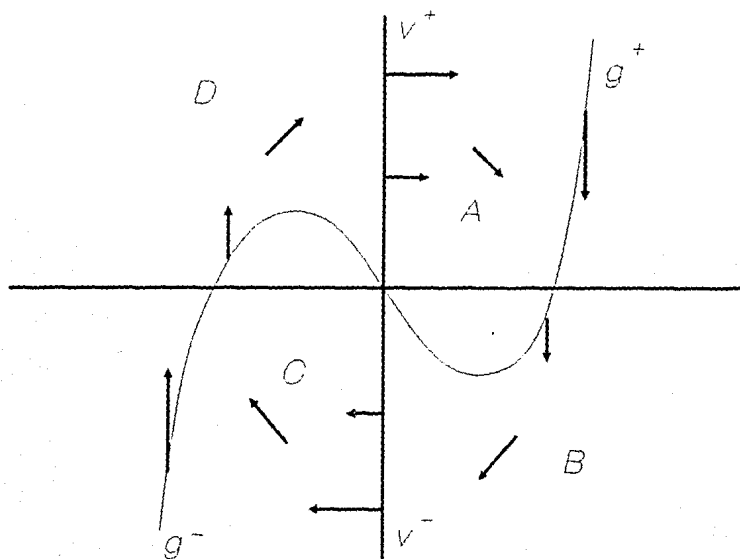


Figura 2

La figura sugiere el comportamiento oscilatorio del sistema, que precisamos en seguida:

Lema. A excepción del punto de equilibrio $(0, 0)$, cualquier trayectoria cruza las curvas v^+ , v^- , g^+ y g^- , pasando por las regiones A, B, C y D en el sentido dextrógiro.

Demostración: Veamos la demostración por casos:

Caso 1: Supongamos que $\mathbf{x}(0) = (0, y_0) \in v^+$. Como $\dot{x}(0) > 0$, la trayectoria $(x(t), y(t)) = \Phi_t(0, y_0)$ entra inmediatamente a la región A. Afirmamos que debe cortar a la curva g^+ . (Ver figura 3).

Pues si no, entonces la trayectoria estaría contenida en la región R limitada por las curvas $y = x(0)$, $y = \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - x)$ y $x = 0$. Por el corolario de la sección 2.4, se tiene que \mathbf{x} está definido para todo $t \geq 0$. Por el

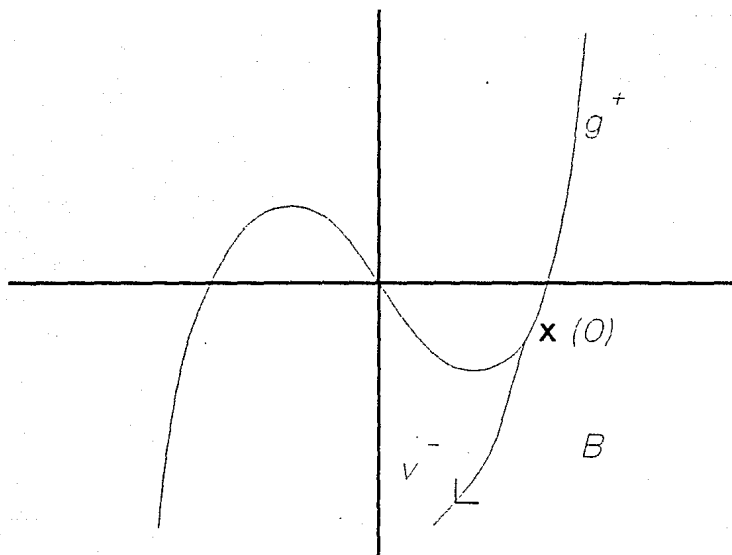


Figura 4

extiende continuamente. Pero ésto no es posible por la maximalidad de (α, β) . Por tanto, $\beta = \infty$. Además $y(t)$ no está acotada inferiormente, pues de ser así, x estaría acotada en un subconjunto compacto del plano, y podríamos obtener una contradicción aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson como en el caso 1.

Tenemos entonces a la función $x(t)$ definida en $[0, \infty)$, estrictamente decreciente, con $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \gamma$. Por tanto, podemos definir una inversa diferenciable $t(x)$ en el intervalo $(\gamma, x(0)]$, y luego a y como función diferenciable de x en el mismo intervalo. Por la regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-x}{y - \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - x)}$$

Como $|x(t)|$ está acotada y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$, entonces se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \gamma} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0$$

Por tanto, $\frac{dy}{dx}$ se puede extender a una función acotada en $[\gamma, x(0)]$, lo que implica que $y(x)$ es uniformemente continua en $(\gamma, x(0)]$. Entonces, $y(x)$ se

puede extender continuamente a γ . Pero ésto contradice que $\lim_{x \rightarrow \gamma} y(x) = -\infty$.

Los casos restantes se siguen de la simetría del retrato fase. ■

En lo sucesivo usaremos el siguiente lema elemental.

Lema. Sea $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función inyectiva y continua tal que $f(0) = 0$. Entonces f es estrictamente creciente. ■

Para cada punto $\mathbf{p} \in v^+$, ya hemos demostrado que existe un número $t_1(\mathbf{p})$ con la propiedad de ser el menor número positivo tal que $\Phi_{t_1(\mathbf{p})}(\mathbf{p}) \in v^+$. Recordando los conceptos del capítulo anterior, como v^+ es una sección con respecto a \mathbf{f} , podemos demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{l} \sigma: v^+ \rightarrow v^+ \\ \text{tal que } \mathbf{p} \mapsto \Phi_{t_1(\mathbf{p})}(\mathbf{p}) \end{array}$$

es continua. Por unicidad de soluciones, σ también es inyectiva.

Lema. Sea $\mathbf{p} \in v^+$. Entonces \mathbf{p} es un punto fijo de σ (es decir, $\sigma(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$) si y sólo si \mathbf{p} está en una trayectoria cerrada. Más aún, cualquier trayectoria cerrada interseca a v^+ .

Demostración: Supongamos que $\sigma(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Entonces $\Phi_{t_1}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ para algún número $t_1 > 0$, lo cual implica que $\Phi(t + t_1, \mathbf{p}) = \Phi(t, \mathbf{p})$, para cualquier $t > 0$, es decir, $\Phi_t(\mathbf{p})$ es una solución de periodo t_1 .

Supongamos ahora que $\sigma(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}$. Sea $v^* = v^+ \cup \{(0, 0)\}$. Tenemos que σ se extiende a una función continua $\sigma: v^* \rightarrow v^*$ tal que $\sigma((0, 0)) = (0, 0)$. Identificando a v^* con el intervalo $[0, \infty)$ por medio de la coordenada y , podemos definir un orden natural en v^* del siguiente modo: $(0, z) > (0, y)$ si y sólo si $z > y$. Aplicando el lema anterior, obtenemos que σ es estrictamente creciente con respecto a ese orden. Por tanto en caso de que $\sigma(\mathbf{p}) > \mathbf{p}$, se tiene que $\sigma^2(\mathbf{p}) = \sigma(\sigma(\mathbf{p})) > \sigma(\mathbf{p}) > \mathbf{p}$, y en general $\sigma^n(\mathbf{p}) > \mathbf{p}$. Por tanto, \mathbf{p} no está en una trayectoria cerrada. Lo mismo se obtiene en el caso en que $\sigma(\mathbf{p}) < \mathbf{p}$.

La última afirmación se sigue del hecho de que cualquier trayectoria distinta del origen interseca a v^+ . ■

Usaremos la notación siguiente. Para cada punto $\mathbf{p} \in v^+$ sea $t_2(\mathbf{p})$ el menor número positivo tal que $\Phi_{t_2(\mathbf{p})}(\mathbf{p}) \in v^-$. Definimos entonces la

aplicación continua

$$\begin{array}{l} \alpha: v^+ \rightarrow v^- \\ \text{tal que } \mathbf{p} \mapsto \Phi_{t_2(\mathbf{p})}(\mathbf{p}) \end{array}$$

que podemos extender continuamente definiendo $\alpha((0,0)) = (0,0)$. También la aplicación α es inyectiva. Definiremos además la función

$$\begin{array}{l} \delta: v^+ \rightarrow \mathbf{R} \\ \text{tal que } \mathbf{p} \mapsto |\alpha(\mathbf{p})|^2 - |\mathbf{p}|^2 \end{array}$$

Sea \mathbf{p}_0 el único punto en v^+ tal que la trayectoria que comienza en \mathbf{p}_0 pasa por el punto $(\sqrt{3}, 0)$ (es decir, $\mathbf{p}_0 = \Phi_{-t'}((\sqrt{3}, 0))$ para algún $t' > 0$). Sea $r = |\mathbf{p}_0|$.

Para cada curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ y cada función $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definimos

$$\int_{\gamma} F(x, y) := \int_a^b F(x(t), y(t)) dt$$

Si tenemos que $dx/dt \neq 0$ para $t \in [a, b]$, entonces y se expresa como función de x a lo largo de γ , por tanto, se puede hacer el cambio de variable $x = x(t)$

$$\int_a^b F(x(t), y(t)) dt = \int_{x(a)}^{x(b)} F(x, y(x)) \frac{dt}{dx} dx$$

de donde

$$\int_{\gamma} F(x, y) = \int_{x(a)}^{x(b)} \frac{F(x, y(x))}{dx/dt} dx$$

y de manera análoga, si $dy/dt \neq 0$ en $[a, b]$, se tiene que

$$\int_{\gamma} F(x, y) = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{F(x(y), y)}{dy/dt} dy$$

Lema.

a) $\delta(\mathbf{p}) > 0$ si $0 < |\mathbf{p}| < r$.

b) $\delta(\mathbf{p})$ decrece monótonamente a $-\infty$ cuando $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$, $|\mathbf{p}| \geq r$.

Demostración: Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $0 \leq t \leq t_2 = t_2(\mathbf{p})$ la curva solución que une $\mathbf{p} \in v^+$ con $\alpha(\mathbf{p}) \in v^-$. Entonces:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{p}) &= |\alpha(\mathbf{p})|^2 - |\mathbf{p}|^2 = \int_0^{t_2} \frac{d}{dt} |\gamma(t)|^2 dt \\ &= 2 \int_0^{t_2} (x\dot{x} + y\dot{y}) dt \\ &= 2 \int_0^{t_2} [x(y - \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - x)) + y(-x)] dt \\ &= 2 \int_0^{t_2} -\varepsilon x(\frac{1}{3}x^3 - x) dt \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon \int_0^{t_2} x^2(t)(3 - x^2(t)) dt = \frac{2}{3}\varepsilon \int_{\gamma} x^2(3 - x^2) \end{aligned}$$

Con ésto se prueba la parte a), pues en este caso se tiene que $0 \leq x(t) \leq \sqrt{3}$, y por tanto el integrando es positivo.

Ahora veremos el caso en que $|\mathbf{p}| > r$. Dividimos a la curva solución γ en tres curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ como en la figura 5.

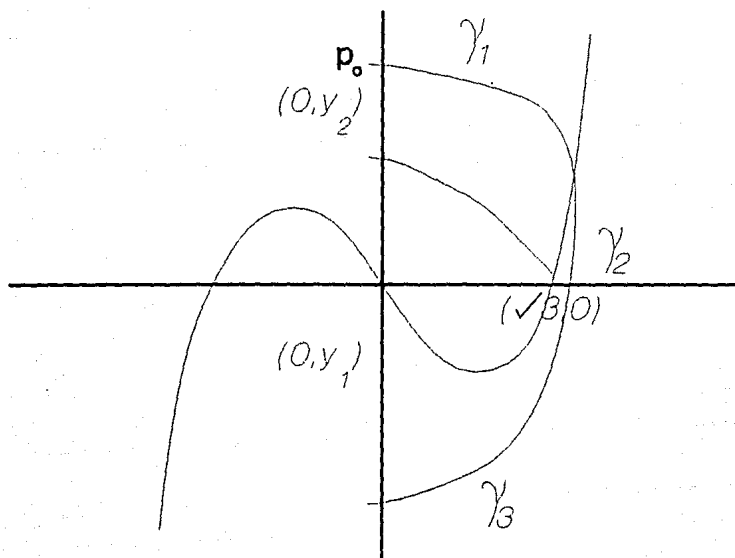


Figura 5

Entonces

$$\delta(\mathbf{p}) = \delta_1(\mathbf{p}) + \delta_2(\mathbf{p}) + \delta_3(\mathbf{p})$$

donde

$$\delta_i(\mathbf{p}) = \frac{2}{3}\varepsilon \int_{\gamma_i} x^2(3-x^2), \quad i = 1, 2, 3.$$

Puesto que y es función de x a lo largo de γ_1 , tenemos

$$\delta_1(\mathbf{p}) = \frac{2}{3}\varepsilon \int_0^3 \frac{x^2(3-x^2)}{dx/dt} dx = \frac{2}{3}\varepsilon \int_0^3 \frac{x^2(3-x^2)}{y - \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - x)} dx \geq 0$$

Notemos que cuando $|\mathbf{p}|$ se incrementa con $\mathbf{p} \in v^+$, la función $y - \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - x)$ incrementa sus valores para $(x, y) \in \gamma_1$, mientras que $x^2(3-x^2)$ permanece acotado. Por tanto, $\delta_1(\mathbf{p})$ decrece cuando $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$. De modo similar, tenemos que $\delta_3(\mathbf{p})$ decrece en valor absoluto cuando $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$.

Sobre la curva γ_2 , x es función de y y $x(t) \geq \sqrt{3}$. Por tanto:

$$\delta_2(\mathbf{p}) = \frac{2}{3}\varepsilon \int_{y_2}^{y_1} -x(y)(3-x^2(y)) dy = \frac{2}{3}\varepsilon \int_{y_1}^{y_2} x(y)(3-x^2(y)) dy < 0$$

Observamos que cuando $|\mathbf{p}|$ aumenta, el dominio de integración $[y_1, y_2]$ se hace cada vez más grande y la curva γ_2 se mueve hacia la derecha. Por tanto, $\delta_2(\mathbf{p})$ decrece cuando $|\mathbf{p}|$ crece, y de hecho $\lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \delta_2(\mathbf{p}) = -\infty$. Esto completa la demostración. ■

A continuación se enuncia el teorema principal del capítulo.

Teorema. *Hay una solución periódica no trivial de (2), y cualquier otra solución distinta del punto de equilibrio tiene como conjunto límite esa solución periódica.*

Demostración: Con la información del lema anterior, podemos trazar un esbozo de la gráfica de la función $\delta(\mathbf{p})$. (Figura 6).

Por el teorema del valor intermedio, existe un único punto \mathbf{q}_0 tal que $\delta(\mathbf{q}_0) = 0$, por tanto existe un único punto \mathbf{q}_0 tal que $\alpha(\mathbf{q}_0) = -\mathbf{q}_0$. Por la simetría del plano fase cada trayectoria cerrada de (2) se corresponde con un punto \mathbf{q} con tal propiedad. De ésto se concluye que existe sólo una trayectoria cerrada no trivial.

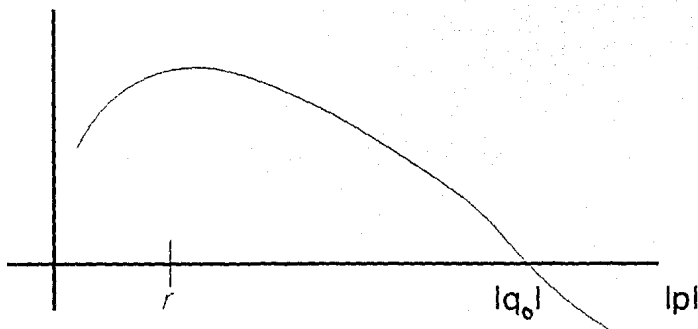


Figura 6

Para estudiar el comportamiento de las otras trayectorias, definamos la aplicación $\beta: v^- \rightarrow v^+$, tal que a cada punto de v^- le asocia la primera intersección de su trayectoria con v^+ . Notemos que $\sigma = \beta \circ \alpha$, y por la simetría, $\beta(\mathbf{p}) = -\alpha(-\mathbf{p})$. Identificamos el eje y con la recta real, entonces escribiremos $\mathbf{p} > \mathbf{q}$ si \mathbf{p} está arriba de \mathbf{q} . Por la unicidad de soluciones y el teorema de Jordan, tenemos que la aplicación σ preserva este orden, mientras que α y β lo invierten.

Tomemos $\mathbf{p} \in v^+$ donde $\mathbf{p} > \mathbf{q}_0$. Como $\alpha(\mathbf{q}_0) = -\mathbf{q}_0$, tenemos que $\alpha(\mathbf{p}) < -\mathbf{q}_0$ y que $\sigma(\mathbf{p}) > \mathbf{q}_0$. Además, $\delta(\mathbf{p}) < 0$, lo que significa que $\alpha(\mathbf{p}) > -\mathbf{p}$. Por tanto

$$\sigma(\mathbf{p}) = \beta(\alpha(\mathbf{p})) < \beta(-\mathbf{p}) = -\alpha(\mathbf{p}) < \mathbf{p}$$

Es decir, $\mathbf{p} > \mathbf{q}_0$ implica que $\mathbf{p} > \sigma(\mathbf{p}) > \mathbf{q}_0$. De aquí se deduce que $\{\sigma^n(\mathbf{p})\}$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente por \mathbf{q}_0 . Sea \mathbf{q}_1 su límite. Entonces, por la continuidad de σ , se tiene:

$$\sigma(\mathbf{q}_1) = \sigma\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(\mathbf{p})\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\sigma^n(\mathbf{p})) = \mathbf{q}_1$$

Como \mathbf{q}_0 es el único punto fijo de σ , se concluye que $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0$. Por tanto, la trayectoria de \mathbf{p} gira en forma de espiral alrededor de la trayectoria cerrada.

Si tomamos ahora $\mathbf{p} \in v^+$, $\mathbf{p} < \mathbf{q}_0$, se tendría similarmente que $\alpha(\mathbf{p}) > -\mathbf{q}_0$ y $\sigma(\mathbf{p}) < \mathbf{q}_0$, también $\delta(\mathbf{p}) > 0$ implica que $\alpha(\mathbf{p}) < -\mathbf{p}$, de donde

$$\sigma(\mathbf{p}) = \beta(\alpha(\mathbf{p})) > \beta(-\mathbf{p}) = -\alpha(\mathbf{p}) > \mathbf{p}$$

De la ecuación (4) se tiene que $x_0 = A \cos \tau$. Sustituyendo en (5) y efectuando operaciones algebraicas se llega a que:

$$x_1'' + x_1 = 2\omega_1 A \cos \tau + \left[-A + \frac{A^3}{4} \right] \sin \tau + \frac{A^3}{4} \sin 3\tau \quad (6)$$

Como $x_1(t)$ debe ser periódica, tenemos que los coeficientes de $\sin \tau$ y $\cos \tau$ en el miembro derecho de (6) deben ser nulos, ya que tales términos conducen a resonancia. De allí, se concluye que $A = 2$, y que $\omega \approx 1$.

Con el *método de las escalas de tiempo*, se puede calcular también la amplitud de la solución de la manera siguiente.

Definimos nuevas variables $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$ y supondremos que la variables T_i son independientes. Si F es una función de las variables T_0, T_1, T_2, \dots entonces por la regla de la cadena

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial F}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \dots$$

Si denotamos como D a $\frac{d}{dt}$ y a $\frac{\partial}{\partial T_n}$ como D_n , la igualdad anterior se puede escribir como

$$D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (7)$$

Sustituimos entonces (7) y el desarrollo $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots$ en la ecuación (1) escrita como

$$D^2 x + x = \varepsilon(1 - x^2)Dx$$

obteniendo

$$\begin{aligned} & (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^2 (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) + (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) \\ & = \varepsilon [1 - (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^2] (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots) (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) \end{aligned}$$

Igualando términos semejantes con respecto a ε hasta primer orden, tenemos:

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (8)$$

$$D_0^2 x_1 + x_1 = (1 - x_0^2) D_0 x_0 - 2D_0 D_1 x_0 \quad (9)$$

De (8) se concluye que $x_0 = A \cos(T_0 + \phi)$, donde A y ϕ son funciones de las escalas de tiempo posteriores a T_0 , es decir T_1, T_2, \dots . Entonces de (9)

se obtiene lo siguiente, en donde se representa con una prima a la derivada con respecto a T_1 .

$$D_0^2 x_1 + x_1 = [2A' - A + \frac{1}{4}A^3] \text{sen}(T_0 + \phi) \\ + 2A\phi' \cos(T_0 + \phi) + \frac{1}{4}A^3 \text{sen} 3(T_0 + \phi)$$

Para evitar los términos que conducen a resonancia tenemos que

$$2A' - A + \frac{1}{4}A^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{\sqrt{1 + c_1 e^{-T_1}}} \\ 2A\phi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = c_2$$

donde c_1 y c_2 dependen de T_2, T_3, \dots . Por tanto, se tiene que si ε es pequeño

$$x(t) \approx x_0(t) \approx \frac{2}{\sqrt{1 + c_1 e^{-\varepsilon t}}} \cos(t + c_2)$$

y se concluye que $|x(t)| \rightarrow 2$ cuando $t \rightarrow \infty$. La forma de la solución periódica cuando el parámetro ε es grande puede verse en *Guckenheimer*, [1983].

Una aplicación a la biología

Una aplicación importante de los *osciladores no lineales* se encuentra en la cronobiología, en los llamados ritmos circadianos.

En forma breve, diremos que los ritmos circadianos son fenómenos biológicos de tipo periódico que se presentan en todos los seres vivos. Se han definido como respuestas oscilatorias cuyas principales características son las de tener un periodo de oscilación cercano a 24 horas, ser susceptibles de ajustarse a señales periódicas externas como la luz o la temperatura, ser innatos, etcétera.

Ya desde los años 60, Kalmus y Wigglesworth (1960) y Klotter (1960) identificaron a los ritmos circadianos con la existencia de ciclos límite, lo cual empujó a los biomatemáticos a emplear en la simulación de tales sistemas osciladores no lineales, en particular, del tipo del oscilador de Van der Pol.

Ruetger A. Wever, en la década de los años 60, fue uno de los primeros investigadores en usar un Van der Pol forzado que ajustó a datos experimentales obteniendo buenos resultados.

De hecho, él usa un oscilador con parámetros fijos (obtenidos mediante experimentación) del tipo siguiente:

$$\ddot{y} + \frac{1}{2}(y^2 + y^{-2} - 3)\dot{y} + y + \frac{3}{5}y^2 = \ddot{z} + \dot{z} + z \quad (1)$$

donde el miembro de la derecha de la ecuación corresponde a una función forzadora, comúnmente de tipo periódico.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

En la figura 1, se muestran las soluciones obtenidas de la ecuación (1) cuando z es constante y por tanto \ddot{z} y \dot{z} son nulas.

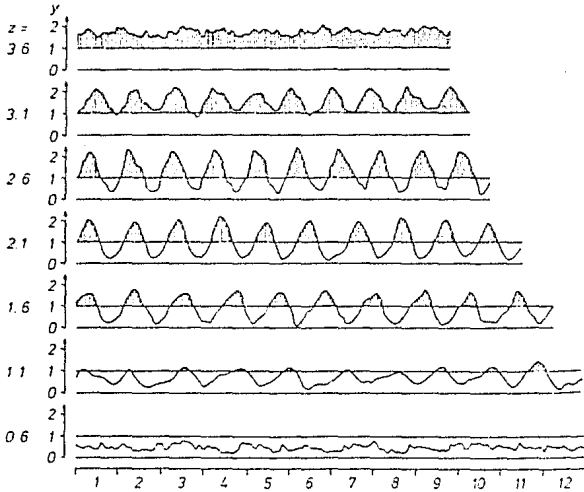


Figura 1. Se muestran 7 soluciones de la ecuación (1) con diferentes valores para la fuerza externa z que se sobrepone a la solución de la ecuación no forzada; los diagramas superior e inferior representan soluciones que se escapan del intervalo de oscilación. Se ha dibujado, de cada solución, 10 ciclos sucesivos. Las áreas sombreadas representan la "actividad" (arriba del umbral fijo en $y=1$).

Como se puede apreciar en este modelo, Wever usa un oscilador del tipo Van der Pol forzado, donde trata de estudiar las propiedades que interesan de los ritmos circadianos, como son: la sincronización¹, la estabilidad, el enfasamiento², etcétera.

Aparecen trabajos importantes en los años posteriores en los que se trabaja con osciladores no lineales y sus diversos tipos de acoplamiento

¹ Cuando las frecuencias de los osciladores forzador y forzado se parecen, la oscilación del forzado se hace igual a la del forzador

² Se refiere a la recuperación de la fase de un oscilador, en oscilación libre, después de una perturbación

para modelar los distintos aspectos de los ritmos circadianos. Destacan, principalmente, los trabajos de A. Winfree y de T. Pavlidis quienes incluso publican, por separado, libros al respecto; Pavlidis (1973), Winfree (1980).

Posteriormente, Eric L. Peterson (1980) trabaja con el ritmo circadiano de la actividad del vuelo de un mosquito y afirma que un oscilador Van der Pol del tipo

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) + x = 0 \quad (2)$$

simula, de manera razonable, el funcionamiento de un oscilador circadiano en la oscuridad.

Hace notar que como todos los sistemas con ciclo límite son topológicamente equivalentes (ya que, como vimos en el texto, un Van der Pol tiene un ciclo límite y éste es una curva cerrada, la cual es homeomorfa a cualquier otra curva cerrada), y el estudio que hace es topológico, trabajará con un sistema que tiene ciclo límite circular y que es del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \varepsilon x(a^2 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon y(a^2 - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Ambos sistemas, el (2) y el (3), tienen un ciclo límite estable y un punto crítico simple, dado que el sistema (3) proviene del sistema en coordenadas polares

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -1 \\ \dot{r} &= \varepsilon r(a^2 - r^2) \end{aligned}$$

donde se aprecia la afirmación, ya que $r = a$ es una trayectoria circular, si $r > a$ entonces \dot{r} es negativa, lo que implica que r decrece, y si $r < a$, se tiene que \dot{r} es positiva, por tanto r crece.

Resulta interesante observar que como cada punto, excepto el crítico, pertenece a una trayectoria que tiende asintóticamente al ciclo límite, el plano fase se "particiona" en **isocronas**, Winfree (1973), que son el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma fase cuando retornan al ciclo límite. Las isocronas de un sistema Van der Pol tienen una forma de "molinete" (ver la figura 2).

De esta figura podemos observar que las isocronas son líneas continuas que emergen del punto crítico y que cubren el plano. Guckenheimer (1975)

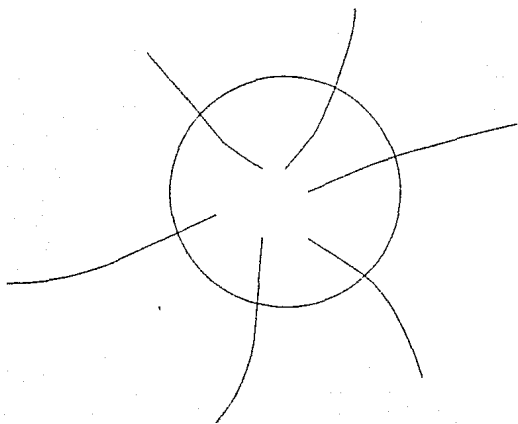


Figura 2

prueba que esta distribución existe para los sistemas bidimensionales que tienen un ciclo límite estable. En el caso que estudia Peterson en particular, ciclos límites circulares, las isocronas aparecen como los rayos de una rueda de bicicleta.

Peterson, en su artículo, estudia el efecto de la luz en el ritmo circadiano de un mosquito ya que la única predicción, hasta ese momento, del modelo con un simple ciclo límite era que un ritmo característico debería establecerse en la oscuridad dadas cualesquiera condiciones iniciales.

Con anterioridad, Bruce (1960) y Pittendrigh (1966), determinaron que en contraste con el efecto de la oscuridad, la luz brillante, a menudo, lleva a un oscilador circadiano a una posición de equilibrio, lo que sugiere efectuar una analogía matemática mediante un sistema con un solo punto de equilibrio asintóticamente estable. Puede conjeturarse que el efecto de las intensidades intermedias de la luz estarán suavemente graduadas entre dos extremos.

Pavlidis (1968) predijo que en condiciones de luz continua tenue existe un ciclo límite característico de tal intensidad, que la amplitud del ciclo límite es menor para intensidades luminosas mayores hasta llegar a un umbral de la intensidad luminosa en donde la dinámica cambia y el sistema tiene un punto crítico estable.

En el modelo que presenta Peterson se observan las siguientes características:

- a) En cada intensidad luminosa el sistema tiene la misma distribución de "molinete".
- b) En cualquier intensidad luminosa dada, si están definidas las isocronas, entonces las nuevas isocronas también serán rectilíneas y estarán uniformemente espaciadas.

Todo esto significa que al deformar y torcer el espacio de estados de manera adecuada tanto el sistema que representa la oscuridad como el de los sistemas que representan la luminosidad tienen aspecto simple. El sistema que trabaja Peterson es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (y - b) + \varepsilon x[a^2 - x^2 - (y - b)^2] \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon(y - b)[a^2 - x^2 - (y - b)^2] \end{aligned} \quad (4)$$

con

$$\begin{aligned} a &= \exp(-kI) \\ b &= y_\infty[1 - \exp(-kI)] \end{aligned}$$

donde y_∞ y k son constantes positivas, características de un oscilador e I es la intensidad luminosa. Para $I = 0$, tenemos simulado el oscilador en oscuridad y el sistema (4) se reduce al sistema (3) que es un sistema que tiene un ciclo límite cuyo radio es igual a a y su centro está en el origen. Cuando I tiende a infinito el ciclo límite del sistema (4) reduce su radio y su punto crítico tiende suavemente hacia el punto $(0, \infty)$, todo lo cual se puede observar en la figura 3.

En el artículo se presenta una discusión más amplia de las propiedades del modelo sobre todo en el manejo de las isocronas para modelar algunos aspectos circadianos, pero lo que hemos presentado muestra, de alguna manera, las amplias posibilidades de aplicación a otras ramas de la ciencia de los osciladores no lineales.

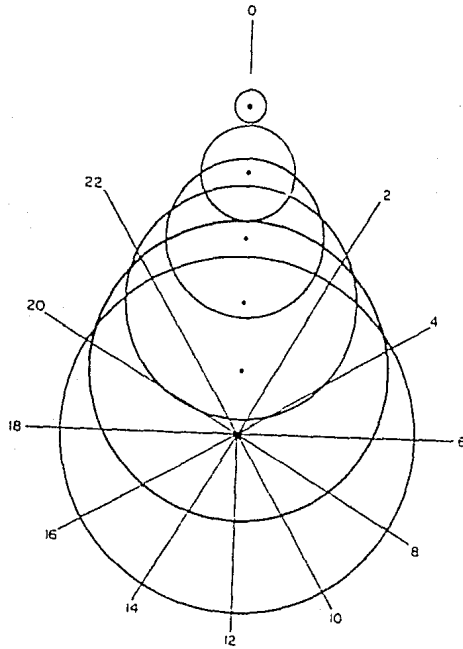


Figura 3. El círculo mayor corresponde al ciclo límite en oscuridad. La sucesión ascendente de ciclos límite, que tienden al punto superior, corresponde a las intensidades luminosas sucesivamente mayores, que tienden a infinito.

También es posible apreciar en el círculo máximo el sistema de isocronas para el oscilador en oscuridad. Como se podrá apreciar, las isocronas convergen al punto crítico. De acuerdo con lo que se menciona en el texto, el sistema (4) nos permite asegurar que el sistema de isocronas estará organizado de manera idéntica para cualquier intensidad luminosa.

En resumen, en cualquier tiempo determinado sólo habrá un ciclo límite y un sistema de isocronas los que serán determinados por la intensidad luminosa.

Bibliografía

Braun, M. (1984). *Differential Equations and Their Applications*. Springer-Verlag.

Guckenheimer, J. (1975). *J. Theor. Biol.* **11**, 297.

Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag.

Hirsch, M., Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press.

Hurewicz, W. (1958). *Lectures on Ordinary Differential Equations*. MIT Press.

Kalmus, H., Wigglesworth, L.A. (1960). *Shock excited systems as models for biological rhythms*. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. **25**, 211-216.

Klotter, K. (1960). *Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.* **36**, 185.

Pavlidis, T. (1973). *Biological Oscillators: Their Mathematical Analysis*. New York: Academic Press.

Perko, L. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag.

Peterson, E. (1980). *A Limit Cycle Interpretation of a Mosquito Circadian Oscillator*. *J. Theor. Biol.* **84**, 281-310.

Wever, R. (1987). *Mathematical models of circadian systems*. Some mathematical questions in biology-circadian rhythms, **19**, AMS. 205-265.

Glosario de símbolos

$A := B, B =: A$

$\mathbf{R}^{n \times n}$

\overline{A}

$d[A, B]$

$o(x)$

I, I_n

Se define A como B

El espacio de matrices $n \times n$ con entradas en \mathbf{R}

La cerradura del conjunto A

La distancia euclidiana entre los conjuntos A y B

Función que tiende a cero cuando x tiende a cero

La matriz identidad, la matriz identidad n por n