

01170

2

2ej

REDUCCION DE LAS TRAYECTORIAS DE SENSIBILIDAD

MEDIANTE LOS VECTORES DE PARAMETROS INVARIANTES.

Maestro en Ingeniería eléctrica

ALFREDO ORTIZ MARTELO.

1991

ESTADO C-11
FALLA DE CREEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Resumen	1
Capitulo I. Introducción	3
I.1 Introducción	3
I.2 Antecedentes	3
I.3 Justificación del presente trabajo de investigación	6
Capitulo II. Presentación del problema y antecedentes	8
II.1 Introducción	8
II.2 Antecedentes	8
II.2.A Parametrización de Roppenecker	8
II.2.B Trayectorias de sensibilidad	11
II.2.C Importancia de las trayectorias de sensibilidad	12
II.3 Presentación del problema	14
II.4 Criterio de diseño alternativo	17
II.5 Solución del problema	18
Capitulo III. Algoritmos numéricos y ejemplos	21
III.1 Introducción	21
III.2 Algoritmo para la parametrización de Roppenecker	21
III.3 Algoritmo para determinar R^*	22
III.4 Ejemplos	24
III.4.A Ejemplo uno	24
III.4.B Ejemplo dos	31
Capitulo IV. Conclusiones	38
Bibliografía	41
Anexo I	43
Anexo II	47

RESUMEN

En el presente trabajo se trata el problema de reducir la sensibilidad de sistemas dinámicos, lineales e invariantes en el tiempo frente a variaciones paramétricas, tomando en cuenta el esfuerzo de control en el sistema retroalimentado. Se propone un criterio de optimización para reducir la sensibilidad y el esfuerzo de control. Esta investigación se circunscribe al estudio de sistemas controlables, con más de una entrada, restringidos por una ubicación dada de valores característicos en lazo cerrado predeterminados.

La sensibilidad se mide con la norma L_2 de las trayectorias de las funciones de sensibilidad; el esfuerzo de control, mediante la norma de Frobenius de la matriz de retroalimentación del estado (esta última se diseña haciendo uso de formas paramétricas). Para robustecer el sistema retroalimentado frente a variaciones paramétricas, se propone un procedimiento original, basado en la modificación de los vectores propios. Se construye un criterio de optimización con base en las normas anteriores.

El criterio de optimización se expresa matemáticamente como una funcional sujeta a restricciones, después se reexpresa como un Hamiltoniano; de este último se derivan las condiciones necesarias de existencia del controlador óptimo para el criterio propuesto. Una de las condiciones resultantes es una ecuación implícita que, por tanto, obliga a emplear un esquema de cómputo iterativo con el fin de alcanzar el mínimo del criterio.

Para mostrar la bondad del método se presentan algunos ejemplos numéricos, cuyos resultados se comparan con los obtenidos por Kautsky et al [8]. Asimismo, se muestran los diagramas de flujo y los programas involucrados en la generación de resultados.

Se concluye que este nuevo enfoque permite reducir el efecto de las variaciones paramétricas sobre la trayectoria del estado y

definir el control más pequeño que logra lo anterior; la reducción del criterio obtenida es mayor que la del método de Kautsky, pero requiere más esfuerzo computacional. Por otra parte, se queda como problema abierto la determinación de las condiciones suficientes para la existencia del mínimo del criterio.

I. INTRODUCCION

I.1 Introducci3n

En este capitulo, se presenta una revisi3n del estado del arte alrededor de dos t3picos:

a) Asignaci3n de valores caracteristicos para sistemas dinamicos lineales con m3s de una entrada.

b) M3todos para reducir la sensibilidad de estos sistemas.

Posteriormente, se justifica la necesidad de estudiar la reducci3n de trayectorias de sensibilidad frente a variaciones param3tricas para dichos sistemas empleando formas param3tricas de la matriz de retroalimentaci3n del estado.

I.2 Antecedentes

Consid3rese un sistema dinámico que se representa matemáticamente por medio de variables de estado. Se presupone que dicha representaci3n cumple las siguientes propiedades: linealidad, invariancia en el tiempo y controlabilidad:

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $m > 1$, $A(\alpha)$ y $B(\alpha)$ matrices con coeficientes reales y de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente, α es un parámetro independiente con valor nominal conocido α_0 .

Se propone asignarle un conjunto de valores propios en lazo cerrado a trav3s del empleo de retroalimentaci3n del estado; si este sistema tiene m3s de una entrada, la soluci3n resultante no es única, estas soluciones generan diferentes conjuntos de vectores propios en lazo cerrado. Ante este hecho se han planteado varias alternativas como las de Moore, en 1976 [11]; Roppenecker,

en 1986 [17]; Fahmy y O'Reilly, en 1988 [2]; Roppenecker y O'Reilly, en 1989 [18].

Moore [11] deriva condiciones necesarias y suficientes para la asignación de valores y vectores característicos en el caso de que los espectros de lazo abierto y cerrado no coincidan, y condiciones necesarias en el caso de espectros con elementos en común. Propone un método que asigna vectores propios y con esto diseña la forma de la respuesta transitoria.

Roppenecker [17] propone una expresión paramétrica de la matriz de retroalimentación del estado, que cumple con la asignación de valores característicos en función de los llamados "vectores de parámetros invariantes" o "vectores de parámetros libres," los cuales son invariantes ante transformaciones no singulares y quedan libres para el diseñador; esta parametrización es útil aún en el caso de espectros de lazo abierto y cerrado coincidentes.

Fahmy y O'Reilly [2] y O'Reilly y Roppenecker [18] publican parametrizaciones similares a la anterior para el caso de retroalimentación del vector de salida.

Algunos investigadores, haciendo uso de la libertad de localizar los vectores característicos, han sugerido -junto con la asignación de valores característicos- métodos de diseño que robustifican frente a variaciones paramétricas el sistema retroalimentado.

Cabe mencionar, por ejemplo, el trabajo de Gopal y Pratapachandran en 1984 [6], en el cual se propone minimizar el criterio cuadrático conocido como LQR (Linear Quadratic Regulator, ver [10]), modificado para incluir además las trayectorias de las funciones de sensibilidad en la función de costo; es importante mencionar que dichos autores no permiten variaciones en la matriz de entrada B y emplean formas paramétricas de la matriz de retroalimentación del estado.

Posteriormente Kautsky, Nichols y Van Dooren, en 1985 [8], publican un trabajo donde proponen un método de diseño de la matriz de retroalimentación del estado que hace uso de dichos grados de libertad para optimizar un índice. Este índice busca minimizar la sensibilidad de los valores característicos de lazo cerrado frente a variaciones paramétricas en las matrices del sistema y de ganancia de lazo; se logra reducir el valor cuadrático del transitorio en lazo cerrado y disminuir una norma de la matriz de retroalimentación. El efecto obtenido es aumentar el margen de estabilidad del sistema frente a variaciones paramétricas, el paquete de cómputo Matlab incluye una versión de este trabajo [16].

Owens y O'Reilly en 1987 [14] proponen, apoyados en formas paramétricas de la retroalimentación [2], un método para hacer insensibles a variaciones paramétricas los valores y vectores propios, lo cual es posible para algunos valores característicos previamente asignados, los valores característicos que no pueden hacerse insensibles se ubican nuevamente tan lejanos como sea posible. Los valores característicos se tornan insensibles porque al efectuar una retroalimentación del estado, las perturbaciones de las matrices del estado, llamada comúnmente A, y de entrada B, denotadas ΔA y ΔB , se cancelan mutuamente.

Mudge y Patton en 1987 [12] diseñan un esquema que permite asignar valores característicos tan insensibles frente a variaciones paramétricas como permita el rango de la matriz de entrada; además, procuran que la ubicación de los vectores propios ayude a desacoplar el sistema. Con ello aseguran que el sistema retroalimentado sea más robusto a estas variaciones paramétricas.

Recientemente Owens y O'Reilly en 1989 [15] presentan un método numérico capaz de optimar la sensibilidad ponderada de los valores propios frente a variaciones paramétricas de algunos, pero no de todos, los elementos de las matrices del sistema en lazo abierto, empleando formas parametrizadas de retroalimentación del estado [2]. Este trabajo es similar al de 1987 [14], pero los autores

ahora buscan reducir la sensibilidad ponderada de los valores característicos de lazo cerrado alterando únicamente los vectores propios. Se garantiza así que los valores característicos permanecerán dentro de un círculo de radio conocido cuando ocurran variaciones paramétricas.

1.3 Justificación del presente trabajo de investigación

El objetivo de este trabajo es aportar un nuevo método de diseño robusto, frente a variaciones paramétricas, empleando retroalimentación del vector de estado. Para hacerlo se propone emplear la libertad ofrecida en la asignación de vectores propios caracterizada con la parametrización propuesta por Roppenecker [17] para la matriz de retroalimentación del estado, minimizando un criterio basado tanto en la norma L_2 de las trayectorias de las funciones de sensibilidad como en la norma de Frobenius de la matriz de retroalimentación del estado. Esta optimización puede llevarse a cabo a costa de sacrificar desempeño a cambio de robustez paramétrica. Un trabajo con una metodología similar a éste fue escrito por Subbayan y Vaithilingan en 1979 [20], pero no hicieron uso de formas paramétricas de la matriz de retroalimentación del estado y derivan su criterio como un LQR más una norma de las trayectorias de sensibilidad.

Se tomaron en cuenta las siguientes razones para elegir las trayectorias de las funciones de sensibilidad como indicador de la sensibilidad:

- A pesar de que la sensibilidad de los valores propios de lazo cerrado sea cero, variaciones en los vectores característicos pueden provocar grandes desviaciones de la respuesta requerida, Frank P. [4].

- Por otro lado, las trayectorias de sensibilidad dependen de variaciones de valores y vectores propios, que es una forma más general de considerar la sensibilidad, pues se estima cuánto se está apartando el vector de estado de su movimiento nominal en

todo tiempo .

- Además, Kreindler [9] demostró que la norma L_2 de estas trayectorias está relacionada directamente con la inversa de la matriz de diferencia de retorno $\underline{S}(s)$ (ver definición y notación en [9]), lo cual implica que reducir la norma L_2 de las trayectorias de sensibilidad en el dominio del tiempo equivale a disminuir la norma L_2 de la matriz $\underline{S}(s)$ en el dominio de la frecuencia. Este autor también mostró la relación que permite comparar la sensibilidad de de lazo abierto y la de lazo cerrado a través de la mencionada matriz $\underline{S}(s)$.

Por tanto, resulta muy interesante estudiar el problema de minimizar las trayectorias de sensibilidad a variaciones paramétricas con una asignación de valores característicos dada sin usar un LQR y reducir el esfuerzo de control mediante el diseño de una retroalimentación del vector del estado, la cual se basa en los vectores de parámetros invariantes propuestos por Roppenecker [17] para sistemas dinámicos lineales, invariantes en el tiempo, controlables, con más de una entrada. Esta optimización se lleva a cabo reubicando convenientemente los vectores propios, lo cual, modifica el acoplamiento sistema dinámico.

II. PRESENTACION DEL PROBLEMA Y ANTECEDENTES

II.1 Introducción

En este capítulo se presenta la parametrización de la matriz de retroalimentación del estado propuesta por Roppenecker y se definen las trayectorias de sensibilidad. También se mencionan brevemente las relaciones existentes entre la sensibilidad del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado y la de las expresiones de la sensibilidad en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Posteriormente se presenta el problema de optimización y se introducen cambios para hacerlo más accesible matemáticamente. Finalmente se derivan las condiciones necesarias para la existencia de la solución óptima y se hace notar la necesidad de construir un esquema iterativo para dar solución al problema propuesto.

II.2 Antecedentes

II.2.A Parametrización de Roppenecker

Se supone la existencia de un sistema dinámico cuyo modelo matemático se considera lineal, invariante en el tiempo, controlable y con más de una entrada, como el dado en (1). Si la ley de control es definida por la siguiente ecuación:

$$u(t) = -R\alpha(t, \alpha) \quad (2)$$

y se aplica a la ecuación (1); el sistema retroalimentado resultante es:

$$\dot{x}(t, \alpha) = \{A(\alpha) - B(\alpha)R\}x(t, \alpha) \quad x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

Considere el siguiente teorema propuesto por Roppenecker en [17]:

Teorema.— Sea Π_0 el conjunto de los valores propios de la matriz A de la ecuación (1) $\Pi_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ y Π_c el conjunto de valores

propios deseados del sistema retroalimentado descrito en (3) $\Pi_c = \{\lambda_{R1} \lambda_{R2} \dots \lambda_{Rn}\}$. Se supone que dichos conjuntos no tienen elementos en común. Entonces los vectores propios del sistema descrito en (3) se expresan como:

$$V_{Ri} = [A(\alpha) - \lambda_{Ri} I]^{-1} B(\alpha) p_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Donde $p_i \in \mathbb{R}^m$ son los vectores de parámetros invariantes y λ_{Ri} son los valores característicos asociados. Los vectores p_i se escriben en forma compacta:

$$P = [p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_n] \quad (5)$$

La matriz de retroalimentación de estados para el sistema en lazo cerrado [14] adquiere la siguiente forma:

$$R = [P \{ (A(\alpha) - \lambda_{R1} I)^{-1} B(\alpha) p_1 \dots (A(\alpha) - \lambda_{Rn} I)^{-1} B(\alpha) p_n \}^{-1}] \quad (6)$$

Las dimensiones de P y R son $m \times n$.

Para el manejo algebraico de los vectores característicos asociados a valores propios complejos conjugados se formulan las siguientes ecuaciones para los vectores propios:

Sea λ_{R1} algún valor propio deseado en lazo cerrado:

$$\lambda_{R1} = \alpha_1 + j\omega_1 \quad (7)$$

definiendo:

$$\delta_1 = A(\alpha) - \alpha_1 I + \omega_1^2 [A(\alpha) - \alpha_1 I]^{-1} \quad (8)$$

los vectores característicos en lazo cerrado se reducen a:

$$V_{R1} = \delta_1^{-1} [B(\alpha) p_1 + \omega_1 [A(\alpha) - \alpha_1 I]^{-1} B(\alpha) p_{1+1}] \quad (9)$$

$$V_{R_{1+1}} = \delta_1^{-1} [B(\alpha) p_{1+1} - \omega_1 [A(\alpha) - \alpha_1 I]^{-1} B(\alpha) p_1] \quad (10)$$

La expresión (6) representa la forma genérica de todos los

posibles compensadores que cumplen con el espectro deseado en lazo cerrado. Los p_i son los vectores de parámetros libres o invariantes [17] que quedan libres para el diseño; la única restricción es que la inversa de V_R en la ecuación (6) exista, lo cual se garantiza si los vectores propios de lazo cerrado son linealmente independientes y los valores propios de lazo cerrado no coinciden con los de lazo abierto.

Se hace notar que la parametrización de Roppenecker posee las siguientes dos propiedades:

i). $R(\underline{P}) = R(\varphi \underline{P})$, donde $\varphi \in \mathbb{R}$ y $\varphi \neq 0$.

ii). $R(\underline{P}) = R(\varphi_1 p_1, \varphi_2 p_2, \dots, \varphi_n p_n)$, donde los $\varphi_i \in \mathbb{R}$ y $\varphi_i \neq 0$.

Es decir se puede multiplicar por escalares los vectores p_i y no se altera la matriz de retroalimentación. La propiedad i está contenida en ii, pero se encontró primero i y de ésta ii.

Prueba de ii.

Si se define \bar{A}_i como:

$$\bar{A}_i = [A(\alpha) - \lambda_{R1} I]^{-1} B(\alpha) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

La expresión (6) se reescribe de la siguiente forma:

$$R = [\underline{P} (\bar{A}_1 p_1, \dots, \bar{A}_n p_n)^{-1}] \quad (12)$$

multiplicando cada uno de los p_i por un escalar φ_i tenemos:

$$R = [\varphi_1 p_1, \dots, \varphi_n p_n] [\bar{A}_1 \varphi_1 p_1, \dots, \bar{A}_n \varphi_n p_n]^{-1} \quad (13)$$

empleando $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ y además que:

$$[\varphi_1 p_1, \dots, \varphi_n p_n] = [p_1, p_2, \dots, p_n] \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \varphi_n & \end{bmatrix} \quad (14)$$

la ecuación (13) se transforma en (12). Con lo cual termina la prueba. ■

Estas propiedades son útiles para las pruebas numéricas ya que se puede restringir el dominio de los vectores de parámetros invariantes a hiperesferas de radio uno.

II.2.B Trayectorias de sensibilidad

Considere un sistema dinámico, continuo y autónomo descrito por la siguiente ecuación diferencial ordinaria (Frank [4]):

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(x^n, \dots, x, \alpha_0) \quad \underline{x}(t_0) = x_0 \quad (15)$$

donde \underline{x} es el vector de estado con dimensión n , x_0 es el vector de condiciones iniciales, α_0 es el valor nominal del parámetro α , el cual es invariante en el tiempo o varía lentamente. Suponga que la ecuación diferencial (15) tiene la siguiente solución única:

$$\underline{x}_{\alpha_0} = x(t, \alpha_0) \quad (16)$$

La ec. (16) es llamada la solución nominal. Se supone que el parámetro varía de valor, de $\alpha = \alpha_0$ a $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, de este modo la solución a la ecuación (15) se modifica y puede expresarse como:

$$\underline{x}_{\alpha} = x(t, \alpha) \quad (17)$$

Esto es la ecuación (17) corresponde a la solución del sistema perturbado dado por la ecuación (15). Suponiendo que x sea una función continua de α y \underline{f} , la solución real puede ser expandida en una serie de Taylor alrededor de α_0 ; además si $\Delta\alpha \ll \alpha_0$, la serie puede ser truncada en el término de primer orden obteniendo una solución aproximada a la perturbada. Por tanto la solución perturbada aproximada de la ecuación (15) se reduce a:

$$\underline{x}_{\alpha} \cong x(t, \alpha_0) + \left. \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha \quad (18)$$

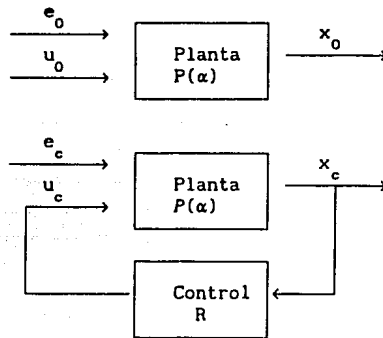
Definición. Vector de la trayectoria de sensibilidad. Se define como la derivada parcial del vector de estado con respecto al parámetro α evaluada en el valor nominal α_0 (Frank [4]), para el cual se adopta la siguiente notación:

$$\sigma(t, \alpha_0) \equiv \left. \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \quad (19)$$

De (18) se observa que σ corresponde al término que se adiciona a la evolución aproximada de $x_\alpha(t)$ cuando $\alpha \neq \alpha_0$.

II.2.C Importancia de las trayectorias de sensibilidad

Definición. Dos sistemas dinámicos son equivalentes nominalmente si cuando $\alpha = \alpha_0$, $e_1 = \text{exitación}$, $u_1 = \text{control}$, $x_1 = \text{estado}$:



$e_0(t) = e_c(t)$, $u_0(t) = u_c(t)$, $x_0(t) = x_c(t)$, $P(\alpha)$ definida por (1).

figura (1)

Considere la transformada de Laplace de la función de la trayectoria de sensibilidad dada en la ecuación (19):

$$\Sigma(s) = \mathcal{L} \{ \sigma(t) \} \quad (20)$$

En seguida se presentan dos teoremas, tomados de Kreindler [9], suponiendo para el control R una retroalimentación de estado y adecuando la notación a la del presente escrito:

Teorema: La sensibilidad en lazo abierto denotada $\Sigma_0(s)$ y la de lazo cerrado denominada $\Sigma_c(s)$, para dos sistemas dinámicos

equivalentes, están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$\Sigma_c(s) = \underline{S}(s) \Sigma_0(s) \quad (21)$$

Donde $\underline{S}(s)$ se conoce como la inversa de la matriz de diferencia de retorno y está descrita por:

$$\underline{S}(s) = \left[I + (sI - A(\alpha))^{-1} B(\alpha) R \right]^{-1} \quad (22)$$

$A(\alpha)$ es la matriz del estado, $B(\alpha)$ es la matriz de entrada y R es la matriz de retroalimentación del estado, α es un parámetro invariante con valor nominal conocido.

Definición: El sistema dinámico retroalimentado (3) tendrá una reducción en la sensibilidad si, para alguna norma convenientemente seleccionada, se cumple [9]:

$$\|\sigma_c(t)\| < \|\sigma_0(t)\| \quad (23)$$

En este caso una norma adecuada puede ser la norma L_2 , entonces la ecuación anterior se convierte en:

$$\int_0^t \sigma_c^t(t) Q \sigma_c(t) dt < \int_0^t \sigma_0^t(t) Q \sigma_0(t) dt \quad (24)$$

Donde Q es positiva definida para todo $t > 0$.

Teorema: Si $\underline{S}(s)$ (dada por (22)), es causal, entonces una condición suficiente para que se cumpla la desigualdad (24), es que para toda ω :

$$\underline{S}^t(-j\omega) Q \underline{S}(j\omega) \leq Q \quad (25)$$

Donde la igualdad se puede cumplir para algunos valores de ω , pero no para toda ω .

De estos dos teoremas se infiere que una reducción en la norma L_2 de las trayectorias de sensibilidad, en el dominio del tiempo, equivale a disminuir, en la frecuencia, la norma L_2 de la matriz $\underline{S}(s)$. Pero no sólo esto, una reducción en la norma L_2 de esta matriz es equivalente a que el sistema en lazo cerrado sea menos

sensible frente a variaciones paramétricas que el sistema equivalente en lazo abierto, excepto quizá para algunos valores de ω .

II.3 Presentación del problema

Sea un sistema dinámico con más de una entrada, cuya representación matemática se considera lineal alrededor de un punto de operación, invariante en el tiempo y controlable. Sean algunos de sus elementos, posiblemente todos, funciones conocidas de un parámetro invariante en el tiempo llamado α . Es decir [13]:

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t, \alpha) + B(\alpha)u(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (26)$$

Se propone efectuar una retroalimentación del vector del estado para realizar una asignación de valores característicos en lazo cerrado $\Pi_c = \{\lambda_{c1}, \lambda_{c2}, \dots, \lambda_{cn}\}$. Esta asignación debe cumplir con requerimientos como índices de estabilidad o ancho de banda no contemplados en este trabajo, la única restricción que se le impone es que los valores característicos de lazo cerrado Π_c , sean diferentes a los del sistema sin retroalimentar $\Pi_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Esta restricción se le impone únicamente para simplificar los desarrollos matemáticos, sin embargo puede ser removida, ver [17].

Para diseñar la retroalimentación del vector de estado se emplea la parametrización de Roppenecker [17], descrita previamente, la ecuación (26) se reduce en:

$$\dot{x}(t, \alpha) = \{A(\alpha) - B(\alpha)R\} x(t, \alpha) \quad x(t_0) = x_0 \quad (27)$$

Donde $u(t) = -R x(t, \alpha)$ y las dimensiones de las matrices son: A de $n \times n$, B de $n \times m$ y R de $m \times n$.

Como ya fue mencionado la solución no es única [11], por lo que se propone emplear los grados de libertad existentes en los vectores propios, que a su vez definen la matriz de retroalimentación del estado, para minimizar el vector de las trayectorias del

sensibilidad, que es función del parámetro α .

Así el vector de las trayectorias de sensibilidad para el sistema en lazo cerrado se escribe:

$$\dot{\sigma}(t, \alpha) = \{A(\alpha_0) - B(\alpha_0)R\}\sigma(t, \alpha) + \left[\frac{\partial(A(\alpha))}{\partial\alpha} \Big|_{\alpha_0} - \frac{\partial(B(\alpha))}{\partial\alpha} \Big|_{\alpha_0} \right] x(t, \alpha)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \sigma(t_0) = 0 \quad (28)$$

La ecuación (28) se obtiene al tomar la derivada parcial de (27) respecto a el parámetro α , evaluada en α_0 y como las condiciones iniciales de $x(t)$ no dependen de α , las condiciones iniciales de σ son nulas [4]. Ahora si se define:

$$A_\alpha = \frac{\partial(A(\alpha))}{\partial\alpha} \Big|_{\alpha_0} \quad \text{y} \quad B_\alpha = \frac{\partial(B(\alpha))}{\partial\alpha} \Big|_{\alpha_0} \quad (29)$$

y se toma en cuenta la siguiente notación:

$$T(\alpha) = A(\alpha) - B(\alpha)R \quad \text{y} \quad T_\alpha = A_\alpha - B_\alpha R \quad (30)$$

El sistema (27) y el (28) pueden ser definidos como un solo sistema dinámico aumentado [4]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t, \alpha) \\ \dot{\sigma}(t, \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(\alpha) & 0 \\ T_\alpha & T(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t, \alpha) \\ \sigma(t, \alpha) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x(t_0) = x_0 \\ \sigma(t_0) = 0 \end{matrix} \quad (31)$$

Se propone reducir la norma L_2 de las trayectorias de sensibilidad de lazo cerrado del sistema dinámico dado en (31), lo cual se expresa como la siguiente función cuadrática:

$$J_\sigma(P) = \int_0^\infty \sigma(t, \alpha)^t Q \sigma(t, \alpha) dt \quad (32)$$

donde la matriz Q es positiva definida de dimensión $n \times n$.

Por otra parte es conocido, que en general, una reducción en la sensibilidad va acompañada de un aumento de la ganancia de retroalimentación, lo cual obliga a pensar en un criterio que

permita considerar la magnitud del control, esto es una norma sobre la matriz de retroalimentación del estado. Como medida de esta matriz se formula la norma de Frobenius [13]:

$$J_R(\underline{P}) = \text{traza} [R^t G R] \quad (33)$$

Donde G es una matriz positiva, definida y diagonal.

Así el criterio tiene como objetivo determinar un mínimo para la siguiente funcional (Ortiz-Verde):

$$J(\underline{P}) = \int_0^{\infty} \sigma(t, \alpha)^t Q \sigma(t, \alpha) dt + \text{traza} [R^t G R] \quad (34)$$

de tal manera que el sistema dado por la ecuación (27) satisfaga una asignación de valores característicos Π_c . Para el cálculo del mínimo se aprovechan los grados de libertad ofrecidos en seleccionar los vectores propios a través de la parametrización de Roppenecker [17], o ver ecuaciones 4 a 6 de este escrito.

De este modo se presenta un problema de diseño de control óptimo, que permite por un lado garantizar la estabilidad por cumplir con la asignación de valores característicos Π_c , y por otro robustecer el sistema reduciendo las trayectorias de sensibilidad del mismo frente a variaciones paramétricas.

Con la finalidad de resolver el problema de control óptimo (34), se realizan algunos cambios en este criterio. Primero considere el siguiente corolario sobre la ecuación de Lyapunov recopilado de Chen [1]:

Corolario: Todos los valores característicos de A tienen parte real negativa o equivalentemente el estado con entrada cero ($\dot{x}=Ax$) es asintóticamente estable si y sólo si para cualquier matriz N hermitiana positiva definida, la ecuación matricial:

$$A^t M + MA = -N \quad (35)$$

tiene una solución única M, donde M es positiva definida. Además M se puede expresar así:

$$M = \int_0^{\infty} e^{A^t \tau} N e^{A \tau} d\tau \quad (36)$$

Bajo el supuesto de que el sistema en lazo cerrado definido en la ecuación (27) es estable y, por tanto, también el sistema aumentado dado en (31), se aplica el anterior corolario al criterio J_{α} definido en la ecuación (32), el cual se convierte:

$$J_{\alpha}(P) = \int_0^{\infty} \sigma(t, \alpha)^t Q \sigma(t, \alpha) dt = x_0^t S_{11} x_0 \quad (37)$$

y S_{11} se obtiene al resolver la siguiente ecuación de Liapunov de dimensión $2 \times n$:

$$\begin{bmatrix} T(\alpha) & 0 \\ T_{\alpha} & T(\alpha) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\alpha) & 0 \\ T_{\alpha} & T(\alpha) \end{bmatrix} = -Q_1 \quad (38)$$

$$\text{Donde: } Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (39)$$

II.4 Criterio de diseño alternativo.

Un criterio alternativo consiste en incorporar el vector de entrada directamente en la integral (32). En particular se propone:

$$J'(P) = \int_0^{\infty} [\sigma(t, \alpha)^t Q \sigma(t, \alpha) + x^t(t) R^t G R x(t)] dt \quad (40)$$

Por tanto el nuevo criterio $J'(P)$ dado en (40) se puede expresar:

$$J'(P) = x_0^t S'_{11} x_0 = \text{traza} \left[S'_{11} x_0 x_0^t \right] \quad (41)$$

donde S'_{11} es solución de la ecuación (38) y la matriz Q_1 toma la forma:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} R^t G R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (42)$$

En ambos casos es deseable eliminar la dependencia de las condiciones iniciales de las funcionales que describen los criterios (38 y (41)). Por ejemplo Gopal y Pratapachandran Nair [6] proponen que x_0 sea considerado como un vector aleatorio, donde la matriz formada por su segundo momento es conocida:

$$E \{x_0 x_0^t\} = I \quad (43)$$

y el criterio de optimización (32) se reduce a:

$$E \{J'(P)\} = J = \text{traza} \left[\hat{S}_{11} \right] \quad (44)$$

Con $\hat{S}_{11} = S_{11}$ o $\hat{S}_{11} = S_{11}'$ según sea el caso.

Esta última versión del criterio a optimizar tiene la ventaja de ser más compacto que el descrito en (34) y no depender de las condiciones iniciales como el dado en (41).

II.5 Solución del problema

Para determinar las condiciones necesarias para la existencia de un valor mínimo para la ecuación (44) sujeto a las restricciones dadas por (6) y (31) se emplea el Hamiltoniano (ver Kwakernaak [10]), dicho Hamiltoniano se forma por la funcional (44) y se incorporan las restricciones antes mencionadas, (6) y (31), afectadas por sus correspondientes multiplicadores de Lagrange llamados L_1 y L_2 (ver Sage [19]). Para simplificar la notación se define:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} T(\alpha) & 0 \\ T_\alpha & T(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} \quad (45)$$

por tanto el Hamiltoniano se puede escribir (ver por ejemplo Kwakernaak [10]):

$$H(P, \underline{S}, L_1, L_2) = \text{traza} \left[\hat{S}_{11} \right] + \text{traza} \left[\left[\underline{I}^t \underline{S} + \underline{S} \underline{I} + Q_1 \right] L_1 \right]$$

$$+ \text{traza} \left[\left[R - P V_R^{-1} \right] L_2 \right] \quad (46)$$

Derivando la ecuación (46) respecto de las matrices \underline{S} , L_1 , L_2 y P se obtienen las condiciones necesarias para existencia de un mínimo, ver Subbayan [20]. (Para mayor información de la deducción de las siguientes expresiones ver anexo I):

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{S}} = \underline{I}^t L_1 + L_1 \underline{I} + \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_1} = \underline{I}^t \underline{S} + \underline{S} \underline{I} + Q_1 = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_2} = R - P V_R^{-1} = 0 \quad (49)$$

Para valores propios reales:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = 2 \left[R \delta_1^{-1} - B(\alpha) I_m \right]^t E^t (V_R^{-1})^t e_1 = 0 \quad (50)$$

y para complejos conjugados:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = X p_1 e_1 + Y p_1 e_{1+1} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = X p_1 e_{1+1} - Y p_1 e_1 = 0 \quad (52)$$

Donde las matrices $X p_1$ y $Y p_1$ están dadas por:

$$E = \underline{I} \underline{I}^* \left[L_1 \underline{S} \begin{bmatrix} B(\alpha) & 0 \\ B(\alpha) & B(\alpha) \end{bmatrix} \right] \quad (53)$$

$$X p_1 = -2 \left[E^t - \left[E R \delta_1^{-1} B(\alpha) \right]^t \right] (V_R^{-1})^{-1} \quad (54)$$

$$Y p_1 = -2 \omega \left[E R \delta_1^{-1} \left[A(\alpha) - \alpha_1 I \right]^{-1} B(\alpha) \right]^t (V_R^{-1})^{-1} \quad (55)$$

e_1 = vector columna unitario de dimensión $m \times 1$.

(56)

Se observa que las dos primeras ecuaciones, (47) y (48), tienen solución algebraica única si el sistema es estable, sin embargo surge un nuevo problema: la matriz P obtenida como solución de la ecuación matricial (49) es no lineal en P y está implícita en las ecuaciones (47) y (48). Por lo cual se tiene que proponer una solución numérica recursiva que satisfaga todas las condiciones simultáneamente, lo cual es desarrollado en el siguiente capítulo.

III. ALGORITMOS NUMERICOS Y EJEMPLOS

III.1 Introducción

Se presentan los dos algoritmos numéricos propuestos que conjuntamente resuelven el problema de la búsqueda del valor óptimo del criterio. El primero, la parametrización de Roppenecker, está basado en las ecuaciones (6) a (10), y se usa como subrutina del algoritmo principal. El segundo es un algoritmo tipo gradiente para el cálculo del mínimo del mencionado criterio, definido por la ecuación (44) y las condiciones necesarias de existencia de dicho mínimo dadas por las ecuaciones (47), (48), (49), (50), (51) y (52). En el anexo II se incluyen los diagramas de flujo correspondientes [5] y los listados de los programas efectuados con paquete "Matlab" [16].

Posteriormente se muestran algunos ejemplos ilustrativos de la bondad de este algoritmo. Además en el primer ejemplo se aprovecha para hacer énfasis de las ventajas del método propuesto respecto al de Kautsky y en el segundo se resalta el problema de que se obtienen mínimos locales con este procedimiento de cómputo.

III.2 Algoritmo para la parametrización de Roppenecker

Se propone el siguiente algoritmo, nombrado "ROPP", que se emplea para determinar la matriz de retroalimentación del estado llamada R, definida por la ecuación (6) (ver [17]), para cualquier sistema que cumple con las ecuaciones (1) a (3).

1.- Se proporcionan los siguientes datos: las matrices del sistema, definidas en la expresión (1), llamadas A, B, y los n valores propios de lazo cerrado deseados Π_c , acomodados en una matriz llamada POLOS. Se indica una matriz de vectores de parámetros libres o invariantes llamada P, definida en la ecuación (5).

2.- Se Resuelven las n ecuaciones de los vectores propios, indicados en las ecuaciones (9) y (10).

3.- Se calcula la matriz de retroalimentación del estado llamada R , dada por la ecuación (6).

Comentarios. La subrutina "ROPP" emite un mensaje de error en los siguientes casos:

i.- Alguno de los valores propios de lazo cerrado propuesto coincide con cualquiera de los de lazo abierto.

ii.- Los vectores característicos de lazo cerrado descritos por (9) o (10) son linealmente dependientes o colineales.

III.3 Algoritmo para determinar R^*

Para determinar la matriz R^* que satisfaga las condiciones necesarias de existencia para un mínimo del criterio de optimización descrito por la funcional (44), dadas por las ecuaciones (47), (48), (49), (50) y (51), se propone el algoritmo llamado "ARBOL" (ver [13] o [20]).

En general cuando se diseñan algoritmos numéricos para la búsqueda de un mínimo se parte de que éste existe, es único y puede ser localizado por el método propuesto. Sin embargo estas suposiciones no siempre se cumplen y generalmente sólo es posible localizar mínimos locales. Es posible afirmar la existencia de un mínimo local si el gradiente en este punto vale cero y valor de la función alrededor del punto mínimo local es superior a éste. En la práctica se garantiza la convergencia a un mínimo si se cumplen (ver Fletcher [3]):

$$f(x_k) \leq f(x_{k-1}) + \alpha f'(x_{k-1})$$

$$f'(x_k) \geq \sigma f'(x_{k-1})$$

donde : $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in [0,1]$ y k es el número de iteración.

Algoritmo "ARBOL"

1.- Se leen los siguientes datos: las matrices del sistema A y B, definidas en la ecuación (1); un vector que contenga los valores de lazo cerrado propuestos acomodados en una matriz nombrada POLOS; las matrices $A\alpha$, $B\alpha$ que se forman con la derivadas parciales de las matrices A y B respecto al parámetro α , definidas en la ecuación (29) y nombradas A_v y B_v ; y las matrices de ponderación de los pesos relativos de la sensibilidad y el esfuerzo del control dadas en (32) y (33) denominadas G y Q. Recuérdese que $Q > 0$ y $G > 0$.

2.- Se proponen una matriz de vectores de parámetros invariantes P, que cumpla con la ecuación (5).

3.- Se encuentra la matriz de retroalimentación del estado R, empleando la función llamada "ROPP".

4.- Se calculan las matrices L_1 , L_2 , \underline{S} , X_{p1} , Y_{p1} dadas por las ecuaciones (47 a (52). Estas matrices forman parte de la solución necesaria al problema.

5.- Se evalúa la ecuación (50), si la norma euclídeana de $\frac{\partial H}{\partial P}$ es mayor que un error permisible definido de antemano (TOL), entonces:

$$\Delta p_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1 \dots n$$

y se prosigue al punto 6, de lo contrario termina el algoritmo, debido a que ya se encontró el mínimo.

6.- Se obtienen n nuevas direcciones a seguir, con lo cual se generan n nuevas matrices Px_i definidas por:

$$Px_i = P_i + (\text{beta})(I_i)(\Delta p_i) \quad i=1, \dots, n. \quad I_i = e_i e_i^t \text{ y } \text{beta} \in \mathbb{R}^+$$

7.- Se evalúa con las n nuevas matrices Px_i la ecuación del criterio a minimizar y se escoge como la nueva matriz P a la matriz Px_i que generó el menor valor del criterio.

8.- Regresar al punto 3 con este nuevo conjunto de vectores de parámetros invariantes P .

Comentarios:

i.- Se recomienda asignarle a beta un valor de uno, si se observa que de una iteración a otra existe un ascenso en el valor del criterio deberá reducir el valor de beta .

ii.- En general es necesario probar con varias matrices iniciales P debido a que el algoritmo localiza únicamente mínimos locales y tomar como solución el mejor resultado [3]. Recuerde las propiedades escalares de la parametrización de Roppenecker (capítulo II, inciso A.1).

iii.- Se propone emplear el método de Kautsky para cada problema en particular y con la matriz obtenida evaluar el criterio dado en (44). De este modo se tiene una cota mínima a exigir al resultado generado con el método aquí descrito.

III.4 Ejemplos

III.4.A Ejemplo uno

Considere un sistema dinámico con dos entradas, cuyo modelo matemático se considera lineal, invariante en el tiempo, controlable y sus elementos dependen en forma conocida de un parámetro llamado α :

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t, \alpha) + B(\alpha)u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

Donde en particular:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} .4\sqrt{\alpha} - 1.4 & .025\alpha^2 - 2.025 & -.4\sqrt{\alpha} - 1.6 \\ 0 & .4\sqrt{\alpha} - 1.4 & 0.1\alpha + .90 \\ 1.0 & 0 & .025\alpha^2 - .9750 \end{bmatrix}$$

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} -.1\sqrt{\alpha} + 2.1 & 0 \\ 0 & 0.1\alpha + .90 \\ -.01\alpha + .9 & 0 \end{bmatrix}$$

se conoce que α tiene como valor nominal $\alpha_0 = 1.0$, y por tanto, sus valores característicos nominales son $\Pi_0 = \{-1.177, -0.6145 \pm 1.56391\}$. Se desea que los valores característicos en lazo cerrado se ubiquen en $\Pi_c = \{-0.2, -0.35 \pm 0.21\}$ a través de una matriz de retroalimentación del vector de estado. Además se desea emplear los grados de libertad existentes de los vectores propios para reducir el criterio definido en la ecuación (44) con las matrices $G=I$ y $Q_1=50 \times I$

Se propone $\beta = 0.001$ y se emplea como condición inicial la matriz P para los vectores de parámetros invariantes, después de 40 iteraciones se obtienen los siguientes resultados:

Valor inicial

valor final

$$P = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$P^* = \begin{bmatrix} .8503 & -.6309 & 0.0 \\ -.6596 & .9363 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} .2771 & -.4970 & -.8778 \\ -1.338 & -1.776 & .7816 \end{bmatrix}$$

$$R^* = \begin{bmatrix} -.0763 & -.7326 & -.9059 \\ -.2611 & -1.041 & .8903 \end{bmatrix}$$

$$\underline{J} = 3 \ 135.10$$

$$\underline{J}^* = 639.23$$

$$|\Delta P| = 1.4184 \times 10^{15}$$

$$|\Delta P|^* = 1.40 \times 10^6$$

Se observa una reducción de aproximadamente cinco veces en el criterio, nótese que el vector p_3 inicial y final es el mismo.

Se considera útil efectuar la comparación de este método contra el de Kautsky [8], incorporado en el paquete "Matlab" [16]. Este método requiere como datos únicamente las matrices A y B, evaluadas en los valores nominales y el conjunto de valores característicos de lazo cerrado deseados. Se obtiene en este caso:

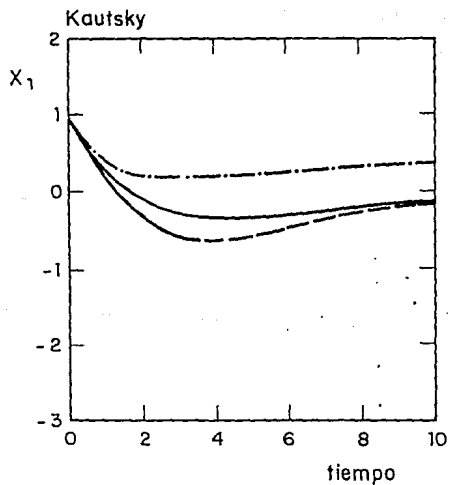
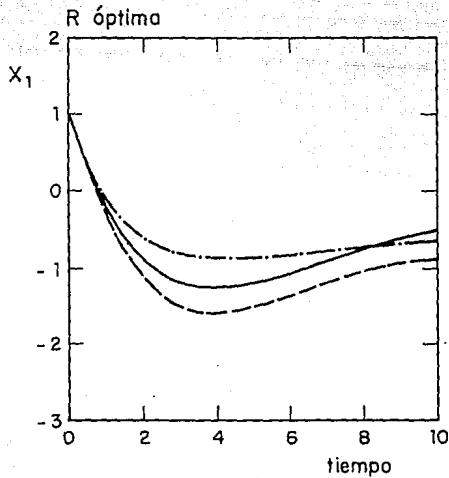
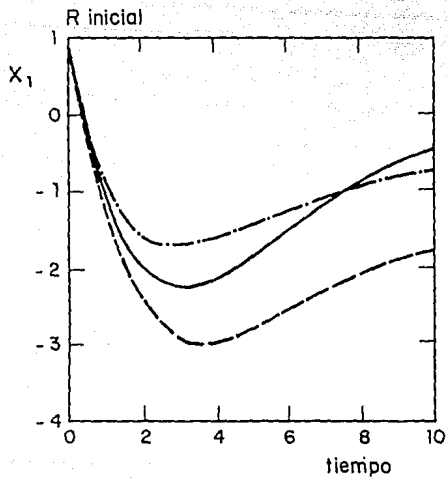
$$K = \begin{bmatrix} -.22831 & -.87678 & -.95921 \\ .16131 & -.68475 & 1.0404 \end{bmatrix}$$

y la evaluación del criterio dado por la ecuación (44), con el compensador construido con el método de Kautsky es: $\underline{J} = 1037.26$. Como se observa este valor es cuarenta por ciento mayor al obtenido con el método aquí presentado. Con la finalidad de brindar una mejor visión de la robustez del método, se comparan los efectos que se obtienen en la ubicación de valores característicos en lazo cerrado y la evolución del transitorio del estado a partir de condiciones iniciales dadas para las tres retroalimentaciones, cuando el parámetro α varía dentro de un cuarenta por ciento y la entrada es cero.

Se define la siguiente notación: R_0 es la matriz generada por la matriz P inicial, R^* es la resultante de la minimización y K es la producida por el método de Kautsky. Entonces se tienen los siguientes conjuntos de valores característicos de lazo cerrado:

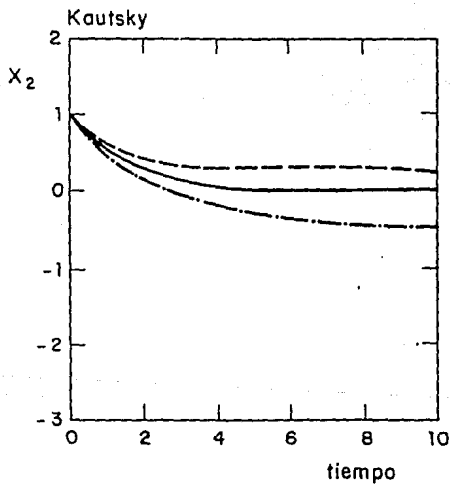
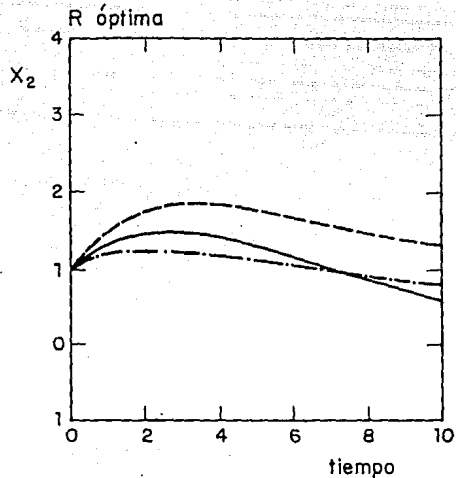
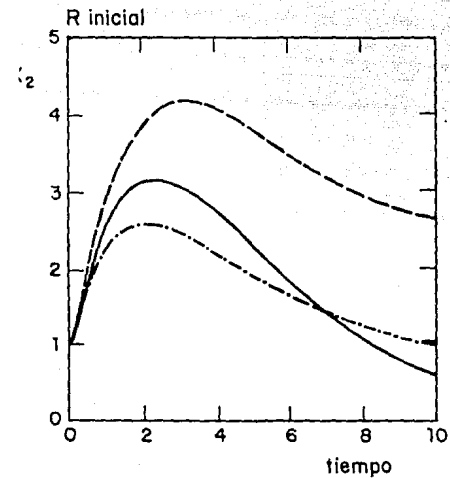
	R_0 valores característicos	R^* valores característicos	K valores característicos
$\Delta\alpha=-40\%$ $\alpha=0.60$	-0.582 -0.436 -0.088	-0.742 -0.104 -0.221	-0.748 +0.019 -0.319
$\Delta\alpha=+40\%$ $\alpha=1.40$	-0.358 + j0.3381 -0.358 - j0.3381 -0.021	-0.368 + j0.4141 -0.368 - j0.4141 -0.038	-0.344 + j0.4341 -0.344 - j0.4341 -0.1035

figura (2).



- $\alpha = 1.0$
- · - $\alpha = 0.6$
- - - $\alpha = 1.4$

Figura (3). Respuesta transitoria del estado x_1 para los tres métodos, con el parámetro α tomando su valor nominal y variando este un $\pm 40\%$.



- $\alpha = 1.0$
- - - $\alpha = 0.6$
- · - $\alpha = 1.4$

Figura (4). Respuesta transitoria del estado x_2 para los tres métodos, con el parámetro α tomando su valor nominal y variando este un $\pm 40\%$

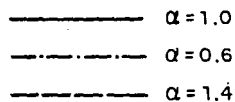
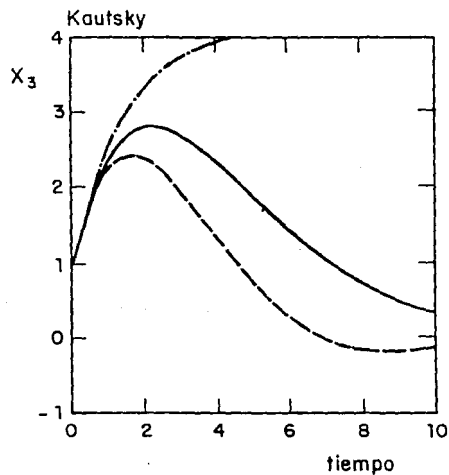
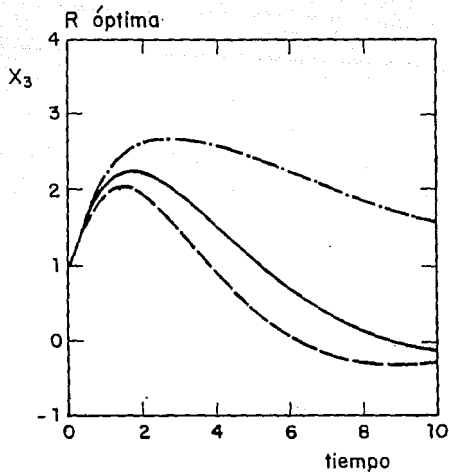
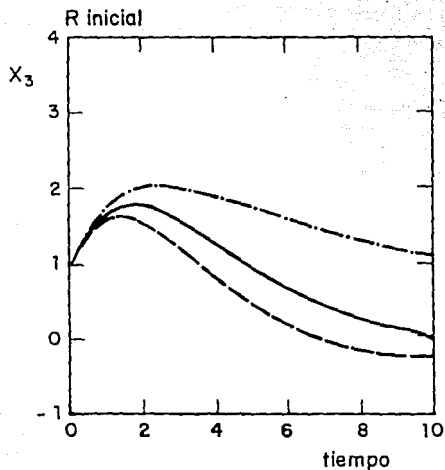


Figura (5). Respuesta transitoria del estado x_3 para los tres métodos, con el parámetro α tomando su valor nominal y variando este un $\pm 40\%$

De las figuras 3, 4 y 5 se concluye que las trayectorias del vector de estado, (cuando α varía $\pm 40\%$) varían menos si la retroalimentación se lleva a cabo con R óptima respecto de R inicial. De lo anterior se concluye que para este caso el sistema retroalimentado con R óptima es efectivamente menos sensible a variaciones paramétricas.

Por otra parte con el método de Kautsky se observa poca variación en las trayectorias de las variables X1 y X2 (respecto de la nominal) pero la variable X3 tiende a infinito cuando alfa se reduce un cuarenta por ciento, lo cual implica que el sistema con $\alpha=.6$ es inestable.

III.4.2 Ejemplo dos

Sea un sistema dinámico lineal, invariante en el tiempo, controlable, con vector de estado de cinco variables y tres entradas, y con algunos de sus elementos que dependen de forma conocida de un parámetro α :

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t, \alpha) + B(\alpha)u(t) \quad x(0) = x_0$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} .05\alpha^2 - 1.05 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & .05\alpha^2 - 1.05 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .05\alpha^2 - 1.05 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .05\alpha^2 - 1.05 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .05\alpha^2 - 1.05 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} .05\alpha^2 - 1.05 & 1 & .002\sqrt{\alpha} + 4.998 \\ 0 & -.03\alpha - 2.97 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si α tiene como valor nominal $\alpha = 1.0$ este sistema tiene sus valores propios en: $\Pi_0 = \{ -1, -1, -1, -1, -1 \}$, y se propone ubicarlos en lazo cerrado en: $\Pi_c = \{ -2, -2.5, -2 \pm i, -3 \}$. Se emplea el mismo método para el diseño de la retroalimentación del estado que en el ejemplo anterior y se proponen las mismas matrices de ponderación: $Q1=50 \times I$ y $G=I$ para el criterio (44).

Considere los siguientes resultados generados con $P1(0)$ como matriz inicial para los vectores de parámetros invariantes:

$$P1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R1(0) = \begin{bmatrix} -.468 & .038 & -.677 & -1.682 & -8.429 \\ -.229 & -.306 & -.419 & -.867 & -2.843 \\ -.468 & .038 & -.677 & -1.682 & -8.429 \end{bmatrix}$$

$$J1(0) = 39.1572 \quad \text{y} \quad \Delta P1(0) = 1.9595 \times 10^5$$

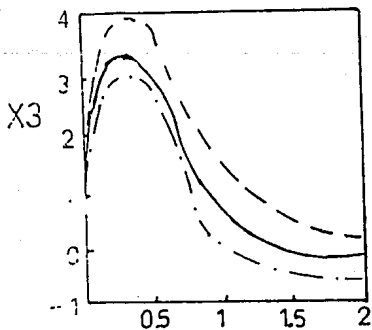
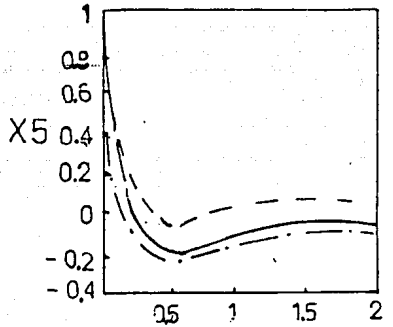
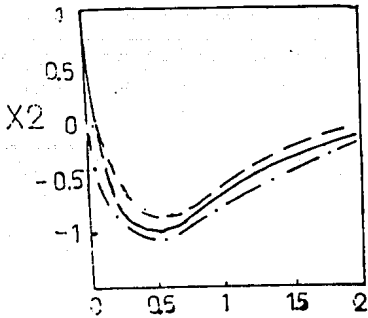
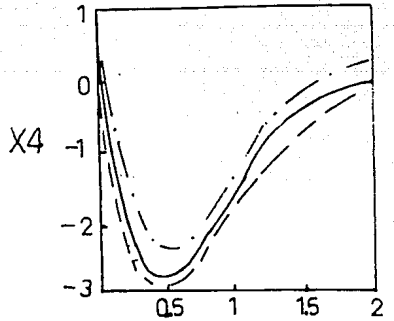
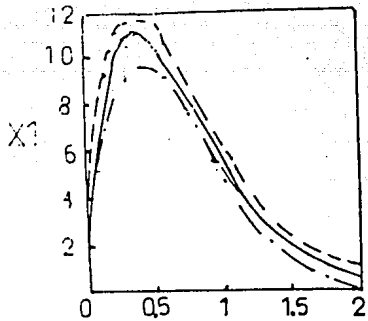
al emplearse el algoritmo de minimización, con $\beta = .1$ se obtiene:

$$P1^* = \begin{bmatrix} 2.309 & .097 & 1 & -.082 & 1.186 \\ -.266 & .969 & 0 & 1.034 & .028 \\ -.309 & -.266 & 1 & .062 & .773 \end{bmatrix}$$

$$R1^{\bullet} = \begin{bmatrix} .430 & -.102 & -.233 & -.105 & -.577 \\ .114 & -.336 & -.236 & -.234 & .281 \\ .515 & .036 & -.101 & .211 & .842 \end{bmatrix}$$

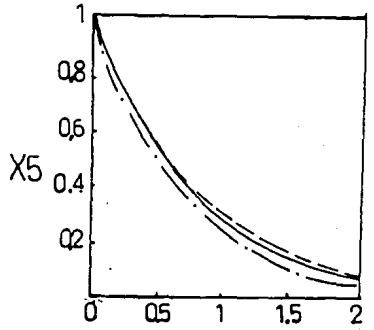
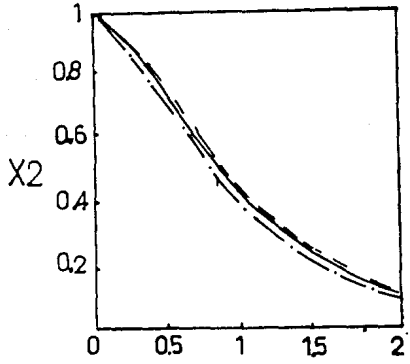
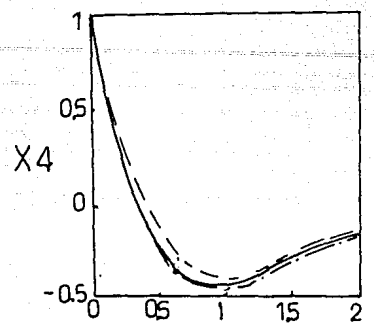
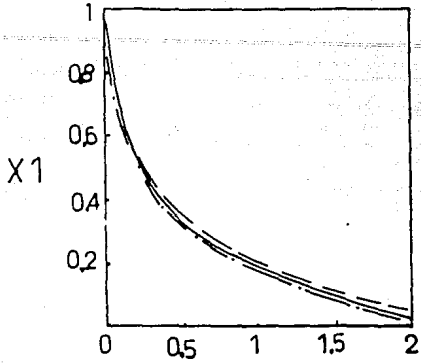
$$J1^{\bullet} = .74327 \quad \text{y} \quad \Delta P1^{\bullet} = 0.5376.$$

Se anexan en las figuras 6 y 7 la evolución del estado a partir de condiciones iniciales $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^t$ y entrada cero. Al igual que en el ejemplo anterior el parámetro α varía un cuarenta por ciento respecto a su valor nominal.



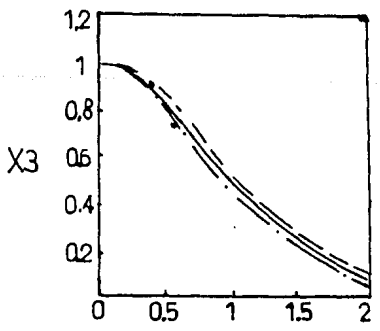
————— $\alpha=1.0$
 - · - · - $\alpha=0.6$
 - - - - $\alpha=1.4$

Figura (6). Respuesta transitoria del sistema retroalimentado con $R1(0)$ α toma su valor nominal y además varía un $\pm 40\%$



————— $\alpha=1.0$
 - · - · - $\alpha=0.6$
 - - - - $\alpha=1.4$

Figura (7). Respuesta transitoria del sistema retroalimentado con $R1^*$ α toma su valor nominal y además varía un $\pm 40\%$



Nótese que el efecto producido por variar $\alpha \pm 40\%$ es inapreciable en las trayectorias del vector de estado para los casos de retroalimentación presentados. Por otra parte de las figuras 6 y 7 se observa una notable reducción en la amplitud con $R1^*$ respecto de $R1(0)$, en especial en las variables $X1$ y $X3$. También se puede apreciar el cambio en la forma de la respuesta, lo cual alterará el desempeño que se pudiera haber propuesto originalmente.

Por otro lado si se propone $P2(0)$ como condición inicial:

$$P2(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1.0 & 1.00 & -1.00 & 0 \\ -.5 & 0.50 & -.50 & 0.50 & -.50 \\ .5 & 0 & -.50 & -1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Se tienen los siguientes resultados:

$$R2(0) = \begin{bmatrix} .490 & .801 & -.090 & -.648 & -3.419 \\ -.479 & -.749 & -.067 & .214 & 1.693 \\ -.156 & -.243 & .591 & .910 & 2.500 \end{bmatrix}$$

$$J2(0) = 4.4674 \text{ y } \Delta P2(0) = 120.102.$$

Después de 80 iteraciones se obtiene con $\beta = .01$:

$$P2^* = \begin{bmatrix} 0 & -1.577 & 1.00 & -.814 & .143 \\ -.5 & -.287 & -.50 & 1.402 & -.789 \\ .5 & -.266 & -.50 & -.767 & .798 \end{bmatrix}$$

$$R2^* = \begin{bmatrix} .143 & .216 & .060 & -.178 & -1.519 \\ -.092 & -.280 & -.358 & -.418 & -.717 \\ .221 & .017 & .313 & .402 & .889 \end{bmatrix}$$

$$J2^* = 1.0192 \text{ y } \Delta P2^* = 0.3767.$$

Para efectos de comparación, considerese que se diseña la matriz de retroalimentación del estado con el método de Kautsky [7], se evalúa el criterio de minimización ec. (44) obteniéndose el valor: $J_k = 1.558$, que es mayor a los obtenidos en $J1$ y en $J2$.

Se observa que los valores mínimos del criterio difieren en treinta por ciento aproximadamente y las matrices $R1$ y $R2$ son notablemente diferentes, además en el primer caso el vector $p1_3$ no se altera en el proceso de minimización del criterio y en el otro caso $p2_1$ y $p2_3$ no se modifican. Por tanto, en este caso, no fue posible obtener un mínimo global, se calculan únicamente mínimos locales. Esto ocurre a pesar de que el efecto de la variación de $\pm 40\%$ de α es inapreciable en las trayectorias del vector de estado, como se observa en las figuras 6 y 7

Conclusiones

Se propuso un nuevo método de diseño para la retroalimentación del vector de estado, el cual permite que el sistema dinámico resultante en lazo cerrado sea robusto frente a variaciones paramétricas. Se estudiaron en particular sistemas dinámicos lineales, invariantes en el tiempo, controlables, con más de una entrada y con una asignación de valores característicos deseados en lazo cerrado previamente determinada. Este método cumple dicha asignación y con ello satisface la estabilidad del sistema retroalimentado. Se aprovechó la libertad para escoger los vectores propios de lazo cerrado minimizando un criterio de optimización formado por la norma L_2 de la trayectoria del vector de sensibilidad y por la norma de Frobenius de la matriz de retroalimentación del estado.

Matemáticamente el criterio se planteó como una funcional sujeta a restricciones y posteriormente se hizo uso del Hamiltoniano que incorpora al criterio las restricciones mediante los multiplicadores de Lagrange; las condiciones necesarias para la existencia del mínimo se derivaron del Hamiltoniano. Sin embargo, la solución de una de éstas resultó implícita; por tanto, se requirió un algoritmo numérico que diera solución al problema planteado.

Se desarrolló dicho esquema de cómputo utilizando el paquete "Matlab" y se presentó un par de ejemplos para mostrar los alcances del método. En estos ejemplos se incluyeron, además, comparaciones con el método de Kautsky [8]. De tales comparaciones se observó que el método aquí propuesto logra una mayor insensibilidad frente a variaciones paramétricas, pero requiere más información y esfuerzo computacional. También se hizo notar que se calculan mínimos locales; no obstante, en todos los casos el algoritmo fue capaz de reducir notablemente el criterio de optimización, incluso más que con el de Kautsky; por tanto, se recomienda su uso.

El presente trabajo hasta aquí delimitado por razones de tiempo, deja pendientes los siguientes puntos de investigación, los cuales son alcanzables a corto plazo:

- Eliminar la restricción de no tener valores propios comunes entre el sistema en lazo cerrado y el lazo abierto. La parametrización de Roppenecker [17] permite que coincidan algunos o todos los valores propios.
- Incluir la opción de efectuar retroalimentación del vector de salida. También existe trabajo previo de Roppenecker en este sentido [18].
- Conseguir que el sistema dinámico sea desensibilizado, no sólo respecto a un parámetro α sino también respecto a un conjunto de estos parámetros.

La investigación realizada hace notar nuevas interrogantes, que plantean futuras actividades tales como:

- Investigar el posible efecto, en el criterio de optimización, de tratar con sistemas que sean controlables por una sola entrada y no lo sean por otra.
- Definir cotas de variación del parámetro α que garanticen conservar al menos la estabilidad del sistema.
- Desarrollar alguna alternativa de cómputo más apropiada para dar solución a este problema tan complejo.

Finalmente queda como un problema abierto la prueba de las condiciones suficientes del controlador óptimo. Según se mencionó, la ecuación (50) es implícita en términos de los vectores de parámetros invariantes o libres y no fue posible darle una expresión algebraica a \underline{P} y con ésta calcular el controlador óptimo. Se trabajó en el criterio de la segunda derivada, pero

tampoco se logró manejarla de manera tal que se pueda afirmar que es positiva definida. Mediante pruebas numéricas se logró verificar la existencia de un mínimo global para un sistema de segundo orden en particular, pero ni en este caso se pudo demostrar matemáticamente dicha existencia.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CHEN Chi-Tsong, 1984. *Linear System Theory and Design Hold*, Rinehatand Wiston.
- [2] FAHMY, M M and O'REILLY, J, 1988. "Parametric eigenstructure assignment by output-feedback control: the case of multiple eigenvalues". *International Journal of Control*, Vol 43, No 3.
- [3] FLETCHER R, 1987. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and Sons.
- [4] FRANK, Paul M, 1978. *Introduccion to System Sensitivity Theory*. Academic Press.
- [5] GLEIM, G A, 1970. *Program Flowcharting* . Academic Press.
- [6] GOPAL, M and PRATAPACHANDRAN NAIR, 1984. "Sensitivity reduced optimal linear regulator with prescribed closed-loop eigenvalues". *IEEE. Trans on Automatic Control*, Vol. 29, No 7.
- [7] GRAHAM, Alexander, 1981. *Kronecker Products and Matrix Calculus: with Applications*. Ellis Horwood.
- [8] KAUTSKY, J, NICHOLS, N K and VAN DOOREN, P, 1985. "Robust pole assignment in linear state feedback". *International Journal of Control*, Vol 41, No 5.
- [9] KREINDLER, E, 1968. " Closed-lopp sensitivity reduction of linear optimal control systems ". *IEEE. Trans. on Automatic Control*, Vol 13, No 3 .
- [10] KWAKERNAAK, H and SIVAN, R, 1972. *Linear Optimal Control Sytems*. John Wiley and Sons Inc.

- [11] MOORE, B C, 1976. "On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment ". IEEE. Trans on Automatic Control, October.
- [12] MUDGE, S K and PATTON, R J, 1988. "Analysis of the technique of robust eigenstructure assignment with application to aircraft control ". IEE Proceedings, Vol 135, No 4.
- [13] ORTIZ, M A y VERDE, R M C, 1989. "Reducción en las trayectorias de sensibilidad mediante los vectores de parámetros invariantes ". Memorias del VIII Coloquio de Control Automático, Asociación de México de Control Automático.
- [14] OWENS, T J and O'REILLY, J, 1987. "Parametric state-feedback control with response insensitivity". International Journal of Control, Vol 41, No 3.
- [15] OWENS, T J and O'REILLY, J, 1989. "Parametric state-feedback control for arbitrary eigenvalue assignment with minimum sensitivity". IEE Proceedings, Vol 136, No 6.
- [16] *Pc-Matlab User's Guide*. The MathWorks Inc. June 1987,
- [17] ROPPENECKER, G, 1986. "On parametric state feedback design". International Journal of Control, Vol 43, No 3.
- [18] ROPPENECKER, G and O'REILLY, J, 1989. "Parametric Output Feedback desig ". Automatica, Vol 25, No 2.
- [19] SAGE, A and WHITE, Ch, 1977. *Optimum Systems Control*. Prentice Hall.
- [20] SUBBAYAN, R and VAITHILINGAM, M C 1979. "Sensitivity-reduced design of linear regulators". International Journal of Control, Vol 29, No 3. 3.

ANEXO I.

El objetivo de este anexo es demostrar las expresiones : (43), (44), (45) , (46) y (47), presentadas en el capítulo II.

Considere las subsiguientes expresiones recopiladas de [7]:

$$\text{tr}(AB^t) = \text{tr}(A^tB) \quad (\text{a.1})$$

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB) \quad (\text{a.2})$$

$$\frac{\partial \text{tr}(AX)}{\partial X} = A^t \quad (\text{a.3})$$

$$e_i = [0 \dots 1 \dots 0]^t \quad (\text{a.4})$$

$$\frac{\partial P}{\partial p_{j1}} = e_j e_i^t = E_{j1} \quad \begin{matrix} j=1 \dots m \\ i=1 \dots n \end{matrix} \quad (\text{a.5})$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_{j1}} = E_{j1} \quad (\text{a.6})$$

$$\frac{\partial (AXB)}{\partial x_{j1}} = A E_{j1} B \quad (\text{a.7})$$

$$\frac{\partial (AX^{-1}B)}{\partial x_{j1}} = -AX^{-1}E_{j1}X^{-1}B \quad (\text{a.8})$$

Si se aplican (a.1), (a.2) y (a.3) a la ecuación (42) se obtienen las derivadas parciales de "H" respecto a \underline{S} , L_1 , L_2 :

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{S}} = \underline{I}^t L_1 + L_1 \underline{I} + \begin{bmatrix} In & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{a.9})$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_1} = \underline{I}^t \underline{S} + \underline{S} \underline{I} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{a.10})$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_2} = R - P V_R^{-1} = 0 \quad (\text{a.11})$$

Por lo que respecta a las expresiones (46) y (47) se requiere determinar primero la parcial de R respecto a algún parámetro invariante, llamado p_{j1} .

Si las fórmulas (a.4) a (a.7) son aplicadas a la expresión de los vectores característicos especificados en (9) y (10) se obtiene: (Se recuerda que $i=1, \dots, m$ y $j=1, \dots, n$ donde m es el número de entradas y n el número de estados.)

$$\frac{\partial V_{R1}}{\partial p_{j1}} = \delta_1^{-1} \left[B(\alpha) e_j e_1^t + \omega_1 \{A(\alpha) - \alpha_1 I\}^{-1} B(\alpha) e_j e_{1+1}^t \right] \quad (\text{a.12})$$

$$\frac{\partial V_{R1+1}}{\partial p_{j1+1}} = \delta_1^{-1} \left[B(\alpha) e_j e_{1+1}^t - \omega_1 \{A(\alpha) - \alpha_1 I\}^{-1} B(\alpha) e_j e_1^t \right] \quad (\text{a.13})$$

Se emplea la expresión (a.8) en la ecuación (6) y resulta :

$$\frac{\partial R}{\partial p_{j1}} = e_j e_1^t (V_R)^{-1} - R \frac{\partial V_{R1}}{\partial p_{j1}} (V_R)^{-1} \quad (\text{a.14})$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_{1j+1}} = e_j e_{1+1}^t (V_R)^{-1} - R \frac{\partial V_{R1+1}}{\partial p_{1j+1}} (V_R)^{-1} \quad (\text{a.15})$$

Se efectúan las sustituciones correspondientes de (a.12) y (a.13) en las dos últimas expresiones y se obtiene :

$$\frac{\partial R}{\partial p_{j1}} = \left[I - R \delta^{-1} B(\alpha) \right] e_j e_1^t V_R^{-1} - \omega_j R \delta^{-1} \left[A(\alpha) - \alpha_j I \right]^{-1} B(\alpha) e_j e_{1+1}^t V_R^{-1} \quad (\text{a.16})$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_{j1+1}} = \left[I - R\delta^{-1}B(\alpha) \right] e_j e_{i+1}^t V_R^{-1} + \omega_j R\delta^{-1} \left[A(\alpha) - \alpha_j I \right]^{-1} B(\alpha) e_j e_i^t V_R^{-1} \quad (\text{a.17})$$

Por otro lado si se considera la expresión (42) y si se hace uso de (a.1), (a.2) y (a.3) se genera este resultado:

$$\frac{\partial H}{\partial p_{j1}} = -2 \frac{\partial \text{tr}(L_1 \underline{\Sigma} T)}{\partial p_{j1}} = 0 \quad (\text{a.18})$$

Se propone la siguiente función :

$$\text{Tr}^* (A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_{i,j} + a_{i+n, j+m}) \quad (\text{a.19})$$

donde A tiene dimensión $2n \times 2m$

Esta función genera el siguiente resultado:

$$E = \text{Tr}^* \left[L_1 \underline{\Sigma} \begin{bmatrix} B(\alpha) & 0 \\ B_\alpha & B(\alpha) \end{bmatrix} \right] \quad (\text{a.20})$$

y de esta se genera :

$$\frac{\partial H}{\partial p_{j1}} = -2 \text{tr} \left[E \frac{\partial R}{\partial p_{j1}} \right] = 0 \quad (\text{a.21})$$

Si se efectúa la sustitución de (a.16) en (a.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{j1}} = & -2 \text{tr} \left[\left[E - E R \delta^{-1} B(\alpha) \right] e_j e_i^t V_R^{-1} \right] \\ & + 2 \omega_j \text{tr} \left[E R \delta^{-1} [A(\alpha) - \alpha_j I]^{-1} B(\alpha) e_j e_{i+1}^t V_R^{-1} \right] = 0 \quad (\text{a.22}) \end{aligned}$$

Se emplean propiedades (a.1) y (a.2) y se logra cambiar esta última expresión en :

$$\frac{\partial H}{\partial p_{j1}} = -2 e_j^t \left[E - E R \delta^{-1} B(\alpha) \right]^t (V_R^{-1})^t e_i$$

$$+ 2 \omega_1 e_j^t \left[E R \delta^{-1} [A(\alpha) - \alpha_1]^{-1} B(\alpha) \right]^t (V_R^{-1})^t e_{i+1} = 0 \quad (\text{a.23})$$

Se observa que si la anterior ecuación se evalúa para toda j se reduce en :

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = -2 \left[E - E R \delta^{-1} B(\alpha) \right]^t (V_R^{-1})^t e_i$$

$$+ 2 \omega_1 \left[E R \delta^{-1} [A(\alpha) - \alpha_1]^{-1} B(\alpha) \right]^t (V_R^{-1})^t e_{i+1} = 0 \quad (\text{a.24})$$

Para simplificar la notación se define :

$$Xp_1 = -2 \left[E - E R \delta^{-1} B(\alpha) \right]^t (V_R^{-1})^t \quad (\text{a.25})$$

$$Yp_1 = -2 \omega_1 \left[E R \delta^{-1} [A(\alpha) - \alpha_1]^{-1} B(\alpha) \right]^t (V_R^{-1})^t \quad (\text{a.26})$$

Con lo cual la ecuación (a.24) y su correspondiente compleja conjugada se expresan :

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = Xp_1 e_i + Yp_1 e_{i+1} = 0 \quad (\text{a.27})$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{1+1}} = Xp_1 e_{i+1} - Yp_1 e_i = 0 \quad (\text{a.28})$$

ANEXO II

En este anexo se presentan los diagramas de flujo [5] correspondientes al algoritmo de diseño de la retroalimentación de estado empleando la parametrización de Roppenecker, este algoritmo se llama "ROPP", y el algoritmo para calcular el mínimo del criterio de optimización desarrollado en este trabajo, se denomina algoritmo "ARBOL".

Posteriormente se incluyen los listados de los programas correspondientes, realizados en la sintaxis del paquete MATLAB.

Nota:

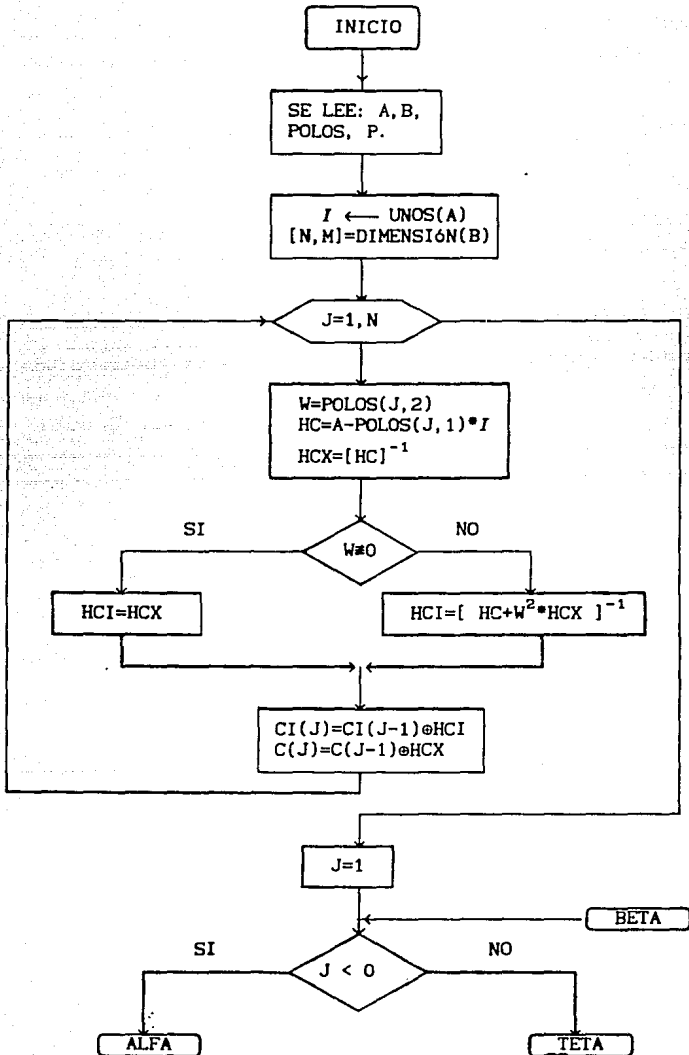
En los diagramas de flujo se emplea la siguiente notación :

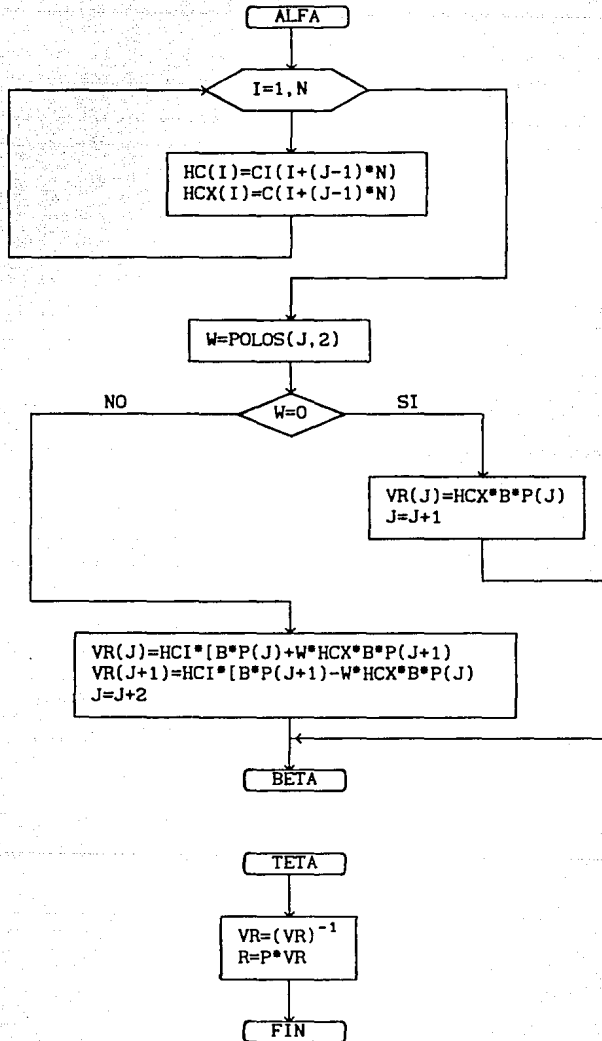
$I \leftarrow \text{UNOS}(X)$, se entiende que forma una matriz identidad, I , de las dimensiones de la matriz X .

$ZN \leftarrow \text{CEROS}(X)$, crea una matriz de ceros, ZN , de la misma dimensión que la matriz X .

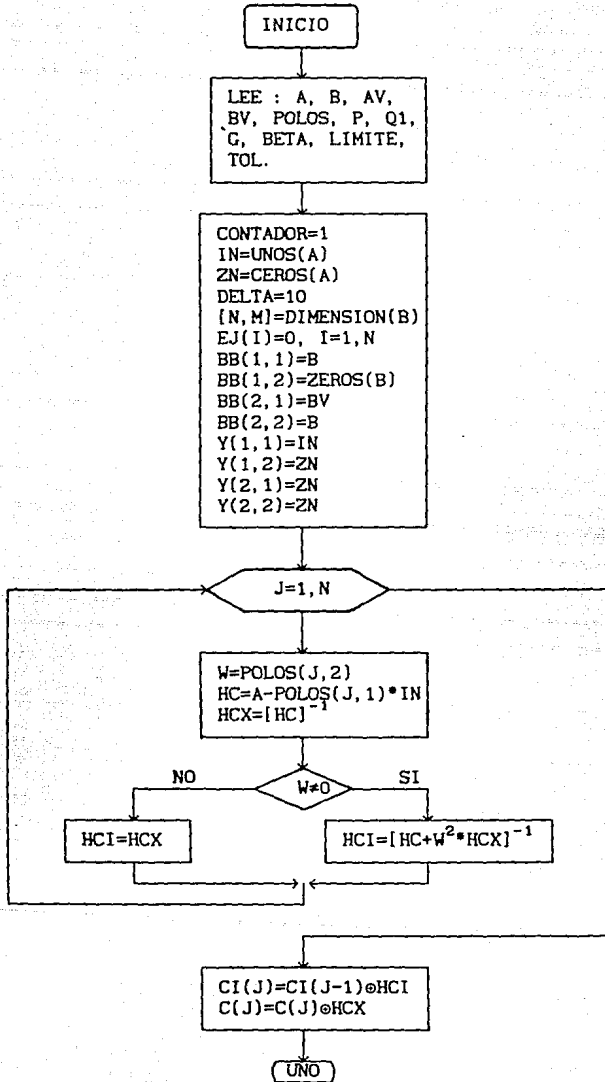
$C=C \oplus A$, a la matriz C se le añade la matriz A para formar una matriz más 'alta', es decir con mayor número de filas.

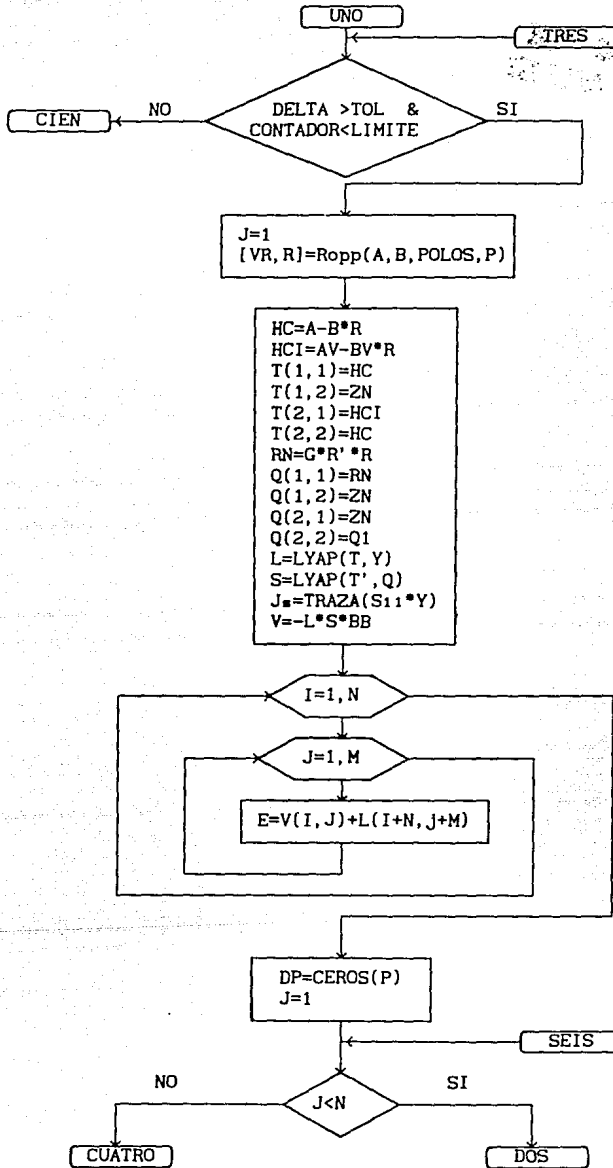
Funcion Roppenecker.

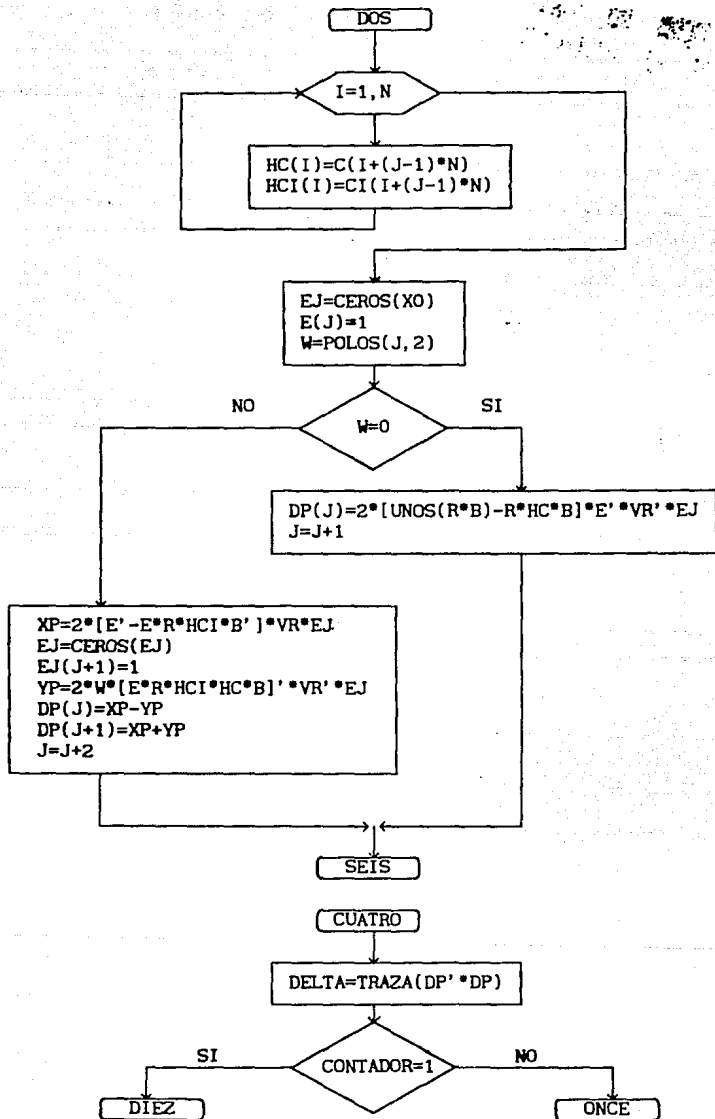


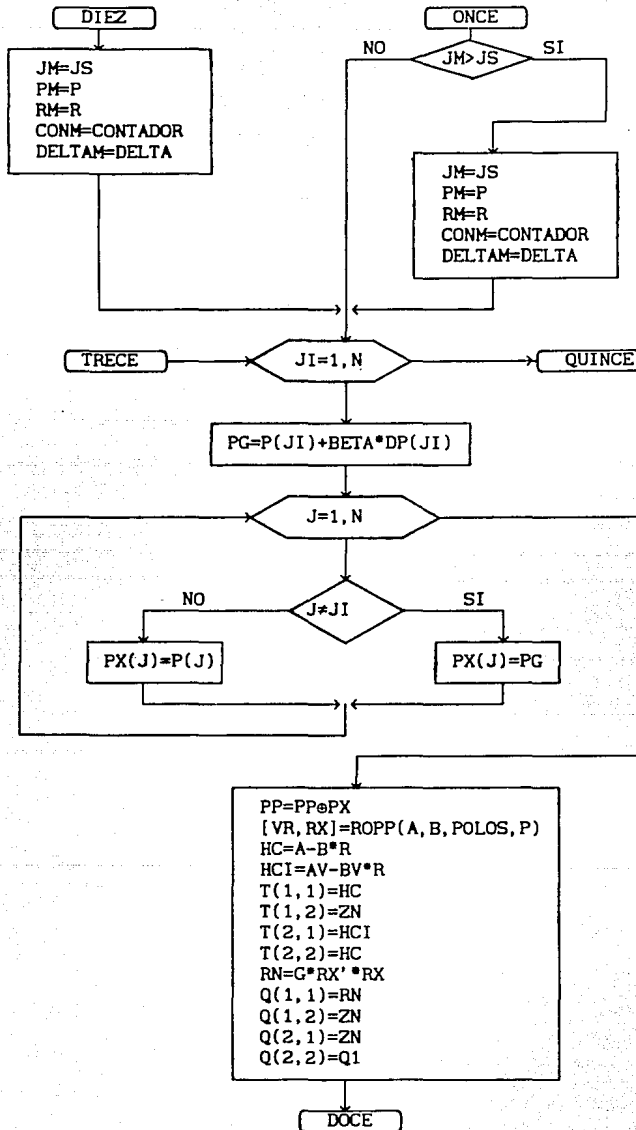


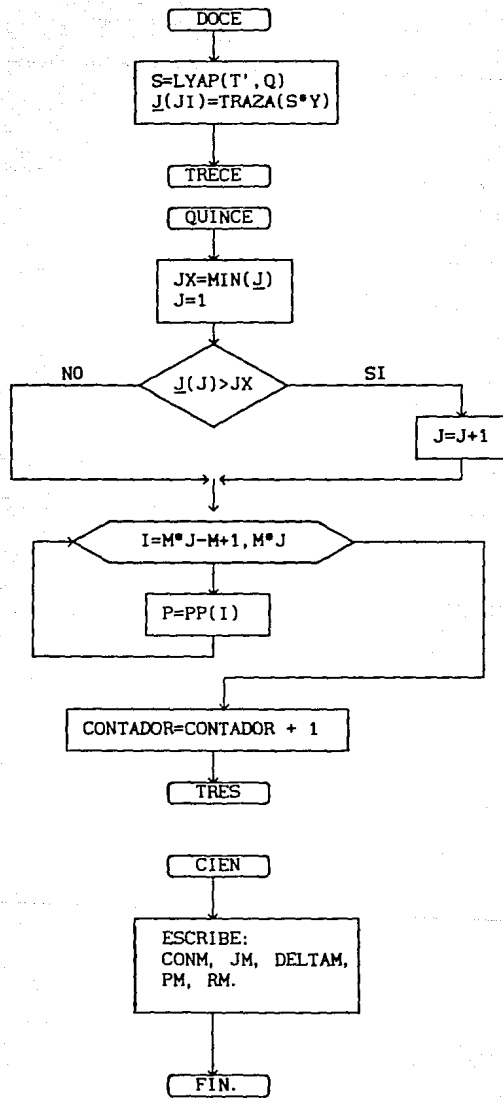
FUNCION ARBOL.











```

function [VR,R]=Ropp( A,B,POLOS,P)
%function [VR,R]=Ropp( A,B,POLOS,P)
%
% Cálculo de la retroalimentación de estado para sistemas
% lineales, invariantes en el tiempo, controlables y con más
% de una entrada .Se usa la parametrización de Roppenecker.
%
% Sea  $dx/dt=Ax+Bu$ , con n estados y m>1 entradas,
% Los valores característicos deseados en lazo cerrado se
% acomodan en un vector llamado "POLOS" con el sig. formato:
% POLOS=[a b;a -b;c 0], a es la parte real y b la imaginaria,
% si es real, la parte imaginaria tiene que tener un cero,
% dimensión n*2
% P=matriz de parámetros invariantes, con dimensión m*n.
% R=matriz de retroalimentación de estado, con dimensión m*n.
% VR=matriz formada con la inversa de los vectores propios.
% Si el polo es real el vector carc. es:vr3=inv(A-c*I)*B*P3.
% Si es complejo vr1=inv(A-a*I)*B*P1+b*inv(A-a*I)*B*P2.
% VR=inv(vr1....vrn) P=[P1 P2..Pn] R=P*VR
% R=P*VR
%
% Ver "On parametric state feedback design", Int. J. Control, 86,
% vol, 43, No, 3. Roppenecker.
%
% Nota importante: la función esta restringida a que los espectros
% de lazo abierto y cerrado no se intersecten.
% A. Ortiz Marttelo, I.I. U.N.A.M, abril 90.
%
% function [VR,R]=Ropp( A,B,POLOS,P)
IN=eye(A); [n,m]=size(B);
for j=1:n
w=POLOS(j,2);
HC=A-POLOS(j,1)*IN; HCX=inv(HC);
if w~=0
HCI=inv(HC+w*w*HCX);
else
HCI=HCX;

```

```

        end % end if
        CI=[CI;HCI];
        C=[C;HCX];
    end %end for
    j=1;
    % CALCULO DE LOS VECTORES PROPIOS.
    while j<=n
        for i=1:n
            HCI(i,:)=CI(i+(j-1)*n,:);
            HCX(i,:)=C(i+(j-1)*n,:);
        end %end for
        w=POLOS(j,2);
        if w==0,
            VR(:,j)=HCX*B*P(:,j);
            j=j+1;
        else
            VR(:,j)=HCI*(B*P(:,j)+w*HCX*B*P(:,j+1));
            VR(:,j+1)=HCI*(B*P(:,j+1)-w*HCX*B*P(:,j));
            j=j+2;
        end %end if
    end %end while
    % CALCULO DE LA MATRIZ DE RETRO.
    VR=inv(VR);
    R=P*VR ;
    clear HC HCI CI C ;
    end %end function

```

```

function [conm, Jm, deltam, Pm, Rm]=arbol(A, B, AV, BV, POLOS, P, Q1, G, beta, limite, tol)
%function[conm, Jm, deltam, Pm, Rm]=arbol(A, B, AV, BV, POLOS, P, Q1, G, beta, llmite, tol)
% Minimiza la norma L2 de las trayectorias de las funciones de
% sensibilidad para sistemas lineales, controlables, con más de
% una entrada y dada una asignación de polos.
% La asignación se hace con la parametrización de Roppenecker.
% Ver function ropp, [VR, R]=ropp(A, B, POLOS, P)
%
% CRITERIO: J=integral (Z'*Q*Z)=traza(S11);
% RESTRICCIONES: H=tr(S11)+tr([ T' *S+S*T+Q]*L1')+tr(R-P*VR)*L2'
% T=[A-B*R  0; AV-BV*R  A-B*R];    S=[S11 S12; S21 S22];
% Q=[G*R'*R  0; 0 Q1];    Y=[IN 0; 0 0];
% El sistema aumentado será:
% DX/DT=[ A-B*R      0][ X ]      X(0)=X0
% DZ/DT=[ A-B*R  AV-BV*R][ Z ]      Z(0)=0.
% AV=dA/Dalfa, cada A(i, j) es función de alfa con valor nominal conocido.
% Q1>0, G>0 ponderan el control y la sensibilidad respectivamente.
%
% Beta es la ponderación de la derivada en la ec. recursiva.
% Limite es el num máximo de iteraciones deseadas, útil en caso de que no
% logre llegar la tolerencia de error al mínimo con la beta dada.
% Tol es valor a comparar con la norma de la derivada en P
% a partir del cual se considera cero numericamente
% S es solución a la ec. de Liapunov: T'*S + S*T=-Q
% L1 y L2 son multiplicadores de Lagrange.
% P, R, VR, POLOS igual que en la función Ropp.
% Dimensiones: A de n*n, B de n*m, POLOS de n*2, P de m*n,
% Q1 de n*n, G de n*n, AV de n*n, BV de n*n, Rm y Pm de m*n, T de 2n*2n,
% L1 de 2n*2n y L2 de m*n.
%
% Jm es el valor mínimo del criterio encontrado en la corrida.
% conm= valor del contador donde ocurrió Jm.
% deltam= norma del incremento en la derivada de P en Jm.
% Pm= es la P correspondiente al Jm.
% Rm= es la R correspondiente al Jm.
%
% function [conm, Jm, deltam, Pm, Rm]=Arbol(A, B, AV, BV, POLOS, P, Q1, G,

```

```

%                                     beta, limite, tol)
%calculos
contador=1;
IN=eye(A);   ZN=zeros(A);   [n,m]=size(B);   ej=zeros(A(1:n,1)) ;
BB=[B zeros(B);BV B];   Y=[IN ZN; ZN ZN];   delta=10;
W=setstr('c:atlabom2');
fprintf(W,'resultados con: beta= %e limite= %e',beta,limite)
for j=1:n
    w=POLOS(j,2);
    HC=A-POLOS(j,1)*IN;           HCX=inv(HC);
    if w~=0
        HCI=inv(HC+w*w*HCX);
    else
        HCI=HCX;
    end % end if
    CI=[CI;HCI];           C=[C;HCX];
end; % END FOR
while((delta>.005)&(contador<limite))
    j=1;
    % CALCULO DE LA RETRO DE EDO VIA ROPPENECKER
    [VR,R]=Ropp(A,B,POLOS,P);
    % CALCULO DE dh/ds
    % [T][L]+[L][T]'+[Y]=[O]
    HC=A-B*R;           HCI=AV-BV*R;
    T=[HC ZN;HCI HC];   L=lyap(T,Y);
    %CALCULO DE dh/dL   T'S+ST ==-Q
    RN=G*R'*R;           Q=[RN ZN; ZN Q1];
    S=lyap(T',Q);       S11=S(1:n,1:n);
    Js=trace(S11);
    %CALCULO DE 'E'.
    L=-L*S*BB;
    clear S Q T RN;
    E=L(1:n,1:m)+L(n+1:2*n,m+1:2*m);
    %CALCULO DE dh/dPj
    DP=zeros(P);
    j=1;
    while j<=n

```

```

for i=1:n
    HC(1,:) = C{(1+(j-1)*n, :)};
    HCI(1,:) = CI{(1+(j-1)*n, :)};
end ; % END FOR
ej=zeros(ej);
ej(j)=1;
w=POLOS(j,2);
if w==0
    DP(:,j)=2*(eye(R*B)-R*HCI*B)'*E'*VR'*ej;
    j=j+1;
else
    XP=2*(E'-(E*R*HCI*B))*VR'*ej;
    ej=zeros(ej);          ej(j+1)=1;
    YP=2*w*(E*R*HCI*HC*B)'*VR'*ej;
    DP(:,j)=XP-YP;        DP(:,j+1)=XP+YP;
    j=j+2;
end ; % end if
end ; % end while
delta=trace(DP'*DP);
if contador==1
    Jm=js;   Pm=P;   Rm=R;   conm=contador;   deltam=delta;
elseif Jm>Js
    Jm=js;   Pm=P;   Rm=R;   conm=contador;   deltam=delta;
end; %end if
for ji=1:n
    Pg=P(:,ji)+beta*DP(:,ji);
    for j=1:n
        if j==ji ;
            PX(:,j)=Pg ;
        else
            PX(:,j)=P(:,j);
        end; % end if
    end ; % end for
    PP=[PP;PX];
j=1;
% CALCULO DE LA RETRO DE EDO VIA ROPPENECKER
[VR, RX]=Ropp(A, B, POLOS, PX);

```

```

% CALCULO DE dH/dS
      HC=A-B*RX;          HCI=AV-BV*RX;
      T=[HC ZN;HCI HC];
%CALCULO DE dH/dL T'S+ST =-Q
      RN=G*RX'*RX;       Q=[RN ZN; ZN Q1];
      S=lyap(T',Q);      S11=S(1:n,1:n);

      j=trace(S11);
      J=[J;j];
      clear S Q T RN RX;
end; % end for j1
fprintf(W,'contador= %e  criterio= %e  delta= %e',contador,js,delta);
fprintf('contador=%g  criterio= %e  norma de DP/DPIj =%e',contador,js,de
Jx=min(J);
j=1;
while J(j)>Jx
      J=J+1;
end ; % end while
P=PP(m*(j-1)+1:m*j,1:n);      clear PP J;
PT=[PT;P];                    contador=contador+1;
end ; % end while
if contador~=llimite
      disp('valores optimos')
      fprintf(W,'valores optimos,');
      fprintf(W,'Llego al fin delta=,%e,,',delta);
      fprintf(W,'criterio optimo=,%e,',js);
      fprintf('criterio optimo=,%e,',js);
else
      disp(' valores minimos')
      fprintf(W,',valores minimos,');
      fprintf(W,'Llego al fin. contador=,%e,',conn);
      fprintf(W,',jmin= ,deltam= ,%e,%e,,',Jm,deltam);
end; %end if
disp(' f i n ')
end %end function

```