

96
2ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIFRACCION DE ONDAS SISMICAS POR DEPOSITOS
BIDIMENSIONALES ESTRATIFICADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A :
SAMUEL MILLER PEREZ

TEJIS CON
FALLA DE ORIGEN



MEXICO, D. F.

OCTUBRE DE 1991



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

I	INTRODUCCIÓN	1
II	FÍSICA DE LAS ONDAS	3
III	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	8
IV	SOLUCIÓN NUMÉRICA	11
V	RESULTADOS	13
VI	CONCLUSIONES	19

RECONOCIMIENTOS

FIGURAS

REFERENCIAS

APÉNDICE 1

APÉNDICE 2

1. INTRODUCCIÓN

Los sismos representan uno de los mayores peligros de origen natural para el hombre. Aun cuando existen otros fenómenos que causan más pérdidas humanas, los sismos de gran magnitud pueden causar destrucciones casi instantáneas; con profundas consecuencias.

Los daños a edificaciones humanas como consecuencia de temblores, pueden deberse, entre otras causas, a la calidad de las construcciones. Sin embargo, se sabe también que la amplificación local es causa de que estos daños se concentren en sitios específicos. Como lo señalan Bard y Bouchon (1980), en el fenómeno intervienen las irregularidades laterales, el contraste de propiedades de los estratos, resonancias en frecuencias críticas, y no linealidad en la respuesta del terreno. Evidencias de estos hechos se tuvieron con los temblores de septiembre de 1985 en la Ciudad de México. Dada su importancia se hace evidente la necesidad de continuar los estudios relacionados con el fenómeno, entre ellos el de propagación de ondas sísmicas.

Para reproducir algunas características del fenómeno de amplificación dinámica en el caso del valle de México, se ha utilizado el modelo escalar unidimensional de propagación de ondas de cortante en medios estratificados (Romo y Seed, 1986). Con él se han obtenido espectros de respuesta comparables con los calculados con registros de temblores en sitios de origen lacustre de la Ciudad de México. Sin embargo, este modelo no permite reproducir características como la duración y amplificación del movimiento debidos, entre otras causas, al arribo de fases tardías de ondas superficiales, cuando se considera como señal de excitación una registrada en terreno firme que tenga

poca influencia de la estratigrafía local (Pérez-Rocha, et al, 1987).

En el presente trabajo se estudia la respuesta sísmica de un depósito de suelo blando ante incidencia de ondas SH. El método utilizado para su estudio consiste en un método de frontera que permite obtener resultados confiables en el rango de las bajas frecuencias (0 - 3 Hz). Para mostrar el efecto de la irregularidad lateral en la generación local de ondas superficiales, se estudia la respuesta del depósito ante pulsos sencillos en una serie de estaciones localizadas en su superficie libre.

Debido a las actuales limitaciones en frecuencia de este método, no es posible obtener resultados en el rango de altas frecuencias, ni para medios estratificados con altos contrastes de impedancias. Sin embargo, con objeto de mostrar las aplicaciones de este tipo de estudios en aspectos prácticos de ingeniería sísmica, se combinan los resultados anteriores, obtenidos en el dominio de la frecuencia, con otros dos métodos. El primero de estos, basado en la teoría de rayos, permite obtener resultados confiables en el rango de altas frecuencias (3 Hz en adelante) para depósitos homogéneos bidimensionales de geometría sencilla (taludes a 45° y fondo horizontal). De esta forma se tienen resultados para valles homogéneos. El segundo método es el de Haskell unidimensional que permite incorporar de manera híbrida el efecto de amplificación del suelo producido por los estratos blandos más superficiales.

De esta manera se obtienen resultados en el dominio de la frecuencia en términos de funciones de transferencia. La multiplicación de estas funciones con espectros de Fourier de registros de temblores obtenidos en sitios en terreno firme, permitirían reproducir algunas de las características del efecto de la irregularidad lateral en sitios de origen lacustre. En particular, para el sencillo modelo de depósito aquí estudiado, similar al analizado por Kawase y Aki (1989) para reproducir algunas características observadas en el Valle de México durante el sismo del 19 de septiembre de 1985, se analizan tres estaciones acelerográficas.

2. FÍSICA DE LAS ONDAS

El movimiento ondulatorio aparece en muchos campos de la física. Todos estamos familiarizados con las ondas formadas en el agua. Hay también ondas sonoras, así como ondas luminosas, ondas de radio, y otras ondas electromagnéticas.

Las ondas que se propagan en un medio elástico se originan al desplazarse alguna porción de este poniéndolo a oscilar con respecto a su posición de equilibrio. Debido a las propiedades elásticas del mismo, la perturbación se transmite de una partícula a la siguiente. Es de esta forma como la perturbación u onda avanza a través del medio. El movimiento ondulatorio se caracteriza por transmitir energía a distancias considerables; un ejemplo de ello es el de la propagación de la energía sísmica a través de la estructura de la Tierra.

Es usual que para el estudio de la propagación de ondas en sismología, se parta de hipótesis basadas en la teoría de la elasticidad lineal. Antes de establecer las ecuaciones, que gobiernan el fenómeno de propagación de ondas en sólidos elásticos, se analizarán las condiciones de equilibrio que deben existir en una partícula dentro de un medio continuo.

Considérese un elemento diferencial de volumen de sólido elástico, como el mostrado en las figuras (1a y 1b). Despreciando las fuerzas de cuerpo, la ecuación de equilibrio dinámico en la dirección x es

$$\begin{aligned} \sum F_x = & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_x dy dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz \\ & - \tau_{xy} dx dz + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{xz} dx dy = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Al hacer lo mismo en las direcciones y y z y después de simplificar, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde σ_i = esfuerzo normal actuando en la dirección i , τ_{ij} = esfuerzo cortante, en donde el primer subíndice denota el plano normal a esa dirección y el segundo la dirección en la que actúa ese componente de esfuerzo, ρ = densidad de masa, t = tiempo y u, v, w , son los desplazamientos en las direcciones x, y, z , respectivamente.

De la teoría de deformaciones infinitesimales, se pueden establecer las relaciones entre los desplazamientos y las deformaciones longitudinales y angulares. Para el caso de deformaciones longitudinales, considérense dos puntos A y B separados una distancia Δx (ver figura 2a). Después de la deformación, tales puntos se desplazan a las posiciones A' y B' respectivamente. Así el punto A se desplaza una distancia u , en tanto que B lo hace $u + \Delta u$. Entonces, además del desplazamiento de cuerpo rígido u , común a todo el medio, se produce un alargamiento Δu entre las dos partículas consideradas. Con base en ello podemos definir la deformación lineal como sigue

$$e_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.a)$$

Al hacer lo mismo para segmentos de línea orientados en las direcciones y y z, respectivamente, se tiene

$$c_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.b)$$

Además de las deformaciones longitudinales, el elemento puede experimentar una deformación angular. Para el plano XY de la figura (2b), un segmento de línea orientado inicialmente en la dirección del eje x, sufre un cambio de orientación cuya pendiente es $\partial v/\partial x$. De manera similar, para uno orientado en la dirección y, el cambio de orientación está dado por la pendiente $\partial u/\partial y$. Se tiene por lo tanto que el ángulo recto CDE, se reduce en la cantidad $(\partial v/\partial x) + (\partial u/\partial y)$. Si hacemos la misma consideración para los planos XZ y YZ, tenemos expresadas las deformaciones angulares como sigue

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.c)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.a), (2.b) y (2c) en la ecuación (1), se obtiene

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

En notación vectorial, las ecuaciones (3) se escriben como

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} = \rho \ddot{\bar{u}} \quad (4)$$

conocidas como ecuaciones de Navier. En ellas $\bar{u} = (u, v, w)$ = vector de

desplazamiento, $\nabla^2 =$ operador laplaciano y $\nabla =$ operador nabla.

Consideremos algunas soluciones sencillas de la ecuación (3). Supongamos un primer caso en que $u \neq 0$, $v = w = 0$, y que u es solo función de x y del tiempo. El sistema se reduce a

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

Una solución de esta ecuación es

$$u = f(t - x/\alpha) + g(t + x/\alpha) \quad (6)$$

donde $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$; f y g son funciones de una sola variable que pueden describir una onda de forma arbitraria. Si el factor de propagación es de la forma $e^{i\omega t}$ en la solución dada por la ec.(6), f representa una onda que viaja en dirección positiva del eje x , en tanto que g describe una onda que viaja en dirección negativa, ambas con una velocidad α . Al ser u paralelo al avance de la onda, se tiene que (5) representa ondas longitudinales, que producen compresión o dilatación en las partículas (fig.3a).

Si ahora se hace $u = w = 0$, y $v = v(x, z, t)$, de las ecuaciones (3) se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (7)$$

La solución de la ecuación (7) es similar a la de la ecuación (5)

$$u = f(t - x/\beta) + g(t + x/\beta) \quad (8)$$

donde $\beta^2 = \mu/\rho$. En este caso, el desplazamiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de las ondas, denominadas de cortante, con velocidad β (fig.3b).

En el caso de reflexión de ondas SH sobre una frontera libre, la

onda reflejada estará dada por

$$v_i = f\left(t + \frac{x \cos \gamma - z \operatorname{sen} \gamma}{\beta}\right) \quad (9)$$

$$v_r = f\left(t + \frac{x \cos \gamma + z \operatorname{sen} \gamma}{\beta}\right) \quad (10)$$

donde γ = ángulo de incidencia. El desplazamiento total en la superficie está dado por la suma de (9) y (10). Por lo que el desplazamiento puede escribirse como:

$$v_x = 2f\left(t - \frac{z \operatorname{sen} \gamma}{\beta}\right) \quad (11)$$

La solución anterior como se menciona, corresponde a ondas SH, las cuales son motivo de estudio del presente trabajo. Existen otras soluciones para las ecuaciones de Navier, una de las cuales representa ondas de corte SV. Debido a que su interacción con la superficie libre es mas complicada, no se abordará su estudio.

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considérese un semiespacio elástico lineal, homogéneo e isótropo E y un depósito con estratificación horizontal de geometría arbitraria R, como se muestra en la figura (4). Sea $\partial R = \partial E$ la frontera común entre el depósito y el semiespacio. El problema consiste en encontrar el desplazamiento v en la dirección normal al plano de la frontera en la superficie libre del semiespacio, ante la incidencia de ondas armónicas SH provenientes del semiespacio con un ángulo θ medido a partir de la vertical. Como los desplazamientos producidos son independientes de la coordenada y , estos satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v = 0 \quad (12)$$

donde $k = \omega/\beta$, ω = frecuencia circular, $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ = velocidad de propagación de las ondas de cortante, μ = módulo de rigidez al cortante, y ρ = densidad de masa.

El desplazamiento v en el semiespacio (región E) se integra de la siguiente manera (fig 5)

$$v = v^0 + v^d$$

donde v^0 = desplazamiento de campo libre, o sea en ausencia de irregularidad y v^d = desplazamientos del campo difractado. El desplazamiento v^0 a su vez se compone de dos campos de ondas (fig.6)

$$v^0 = v^i + v^r$$

donde v^i = desplazamientos debido al campo de ondas incidentes, v^r = desplazamientos debido al campo de ondas reflejadas. Al imponer condiciones de frontera de tracción nula en la superficie libre del semiespacio, el campo libre queda expresado de la siguiente forma

$$v^0 = 2 \cos\left(\frac{\omega z}{\beta z}\right) \exp i \omega \left(t - \frac{x}{\beta x} \right) \quad (13)$$

donde $\beta_x = \beta/\sin\gamma$, y $\beta_z = \beta/\cos\gamma$.

Para el campo difractado, los desplazamientos pueden escribirse como una combinación lineal de soluciones elementales de la ec.(12), que cumplan con la condición de radiación de energía elástica al infinito

$$v^d = \sum_{n=1}^n A_n G_n \quad (14)$$

donde G_n es la función de Green para el semiespacio y representa ondas SH cilíndricas que se propagan hacia el infinito, expresadas de la siguiente manera

$$G_n = \frac{1}{4} \left(H_0^{(2)} \left(\frac{\omega}{\beta \epsilon} r_n \right) + H_0^{(2)} \left(\frac{\omega}{\beta \epsilon} r'_n \right) \right) \quad (15)$$

Aquí A_n = coeficientes complejos desconocidos. En la ec.(15) r_n y r'_n son distancias del punto de observación sobre la frontera $z = \beta z$ a la fuente y la fuente imaginaria respectivamente (ver Figura 7) , $\beta z = \beta$ en el semiespacio y $H_0^{(2)}$ = función de Hankel de segunda especie y de orden cero.

Para la región R el desplazamiento v es

$$v = v^t$$

donde v^t = campo de desplazamientos debido a las ondas refractadas. Esta solución para la región estratificada, se construye como una

combinación lineal de ondas planas propagándose en todas en todas direcciones. Todo ello en términos de la matriz propagadora de Haskell (ver Apéndice sobre el método de Haskell), con lo cual se satisfacen automáticamente las condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones entre los estratos, y de tracción nula en la superficie libre. De esta manera tenemos que el campo de desplazamientos para el medio estratificado está dado por

$$v_R = \sum_{n=-N}^N B_n l_1(k_n, z, \omega) e^{-ik_n x} \quad (16)$$

donde B_n = coeficientes complejos desconocidos y $l_1(k_n, z, \omega)$ = primer elemento del vector esfuerzo desplazamiento para ondas de Love, para el número de onda horizontal discreto k_n . El vector $(l_1, l_2)^T$, es solución de una ecuación vectorial de primer orden obtenida de la ecuación de movimiento (12), cuando se hace

$$v = l_1(k, z, \omega) e^{-ikx} \quad (17)$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = l_2(k, z, \omega) e^{-ikx} \quad (18)$$

Como se muestra en el Apéndice sobre el método de Haskell, para un medio compuesto de estratos homogéneos horizontales, el vector desplazamiento-esfuerzo definido a una cierta profundidad z , puede expresarse en términos de la matriz propagadora $P(z, z_0)$ y el vector desplazamiento-esfuerzo a la profundidad z_0 .

Los campos así contruidos satisfacen la ecuación (12), al igual que todas las condiciones de frontera, excepto en la frontera común a ambas regiones $\partial R = \partial E$. Debido a que éstas condiciones no pueden satisfacerse de manera analítica, ello se hará entonces de manera aproximada con una solución numérica. Esta aproximación consiste en forzar a que el error cuadrático medio sea mínimo en las condiciones de frontera. De esta forma, al integrar el error sobre la frontera y minimizarlo se obtendrán los coeficientes complejos de las ecuaciones (14) y (16).

4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Para determinar los coeficientes desconocidos A_n y B_n de las ecuaciones (14) y (16), se procede a satisfacer en el sentido de mínimos cuadrados las condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones en la frontera común a ambos medios $\partial R = \partial E$ dadas por

$$V_E = V_R$$

y

$$\mu_R \frac{\partial V_R}{\partial n} = \mu_E \frac{\partial V_E}{\partial n}$$

Esto es, se forzará a que el error cuadrático medio a lo largo de la frontera, definido en la siguiente expresión

$$c = \int_{\partial R = \partial E} \left(\left| v_R - v_E \right|^2 + c \left| \mu_E \frac{\partial v_E}{\partial n} - \mu_R \frac{\partial v_R}{\partial n} \right|^2 \right) ds$$

sea mínimo. En las anteriores expresiones n = vector normal interior a la frontera, y c = coeficiente de normalización. Para minimizar el error c se requiere que

$$\frac{\partial c}{\partial A_n} = 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{\partial c}{\partial B_n} = 0 \quad n = -M, -M+1, \dots, M$$

donde el asterisco significa conjugado. Esto conduce a un sistema de

ecuaciones lineales simultáneas. Sin embargo, para construir cada uno de los elementos de la matriz y el vector de términos independientes de este sistema de ecuaciones, es necesario evaluar una integral a lo largo de la frontera del producto de funciones que difícilmente puede resolverse en forma analítica (Bravo, 1988).

Un procedimiento alternativo para resolver este problema de mínimos cuadrados es evaluar en puntos discretos de la frontera las condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones de forma tal que se obtenga un sistema de ecuaciones sobredeterminado de la forma

$$[A] \{ X \} = \{ B \}$$

Entonces, de acuerdo con Noble y Daniel (1973), resolver por mínimos cuadrados este sistema, equivale a resolver el problema siguiente

$$[A]^* [A] \{ X \} = [A]^* \{ B \}$$

donde el asterisco denota transpuesta conjugada. Ello conduce finalmente a un sistema determinado de ecuaciones simultáneas que al resolverse, permite conocer los coeficientes de los desarrollos de los campos difractado y refractado. De esta forma se pueden evaluar los campos de desplazamientos en el semiespacio E y la region R.

5. RESULTADOS

La precisión de los resultados del método de frontera aquí usado para evaluar la respuesta en bajas frecuencias de depósitos de suelo blando, depende del número de parámetros de discretización asignados, es decir del número de fuentes consideradas para modelar el campo difractado, de la cantidad de números de onda discretos usados para modelar el campo refractado y del número de puntos de colocación en la interfaz depósito-semiespacio, usados para satisfacer las condiciones de frontera de continuidad de desplazamientos y tracciones. La cantidad adecuada de cada uno de estos parámetros depende a su vez de la geometría del depósito, del contraste de impedancias entre el depósito y el semiespacio y de la frecuencia de análisis. No existe una regla para determinar el número de parámetros, por lo que es necesario hacer pruebas, buscando que el error cometido en la solución del problema no exceda un cierto porcentaje. Para obtener los resultados del modelo estudiado en este trabajo se procuró que el error no excediera el 10%.

Para mostrar el efecto que puede causar la irregularidad lateral en la respuesta sísmica de depósitos de suelo blando, se estudia aquí el movimiento en la superficie libre del modelo mostrado en la figuras 8 y 10, ante incidencia de ondas planas SH. Este modelo es similar al utilizado por Kawase y Aki (1989) para interpretar la larga duración de los registros obtenidos en la Ciudad de México durante el sismo de Michocán en septiembre de 1985. El modelo consiste de un depósito bidimensional de 10 km de ancho, con taludes laterales con inclinación de 45° , profundidad de 1 km y fondo horizontal. Las propiedades del depósito son: velocidad de propagación de ondas de cortante de 1 km/s,

densidad de 1.8 g/cm^3 y factor de calidad $Q = 50$. Por razones de precisión numérica, en una primera etapa de resultados no se incluye en el modelo aquí estudiado la capa de estratos superficiales, caracterizados por velocidades de propagación de ondas de cortante menores a los 100 m/s . El semiespacio tiene una velocidad de propagación de ondas de cortante de 2.5 km/s y una densidad de 2.1 g/cm^3 .

Los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia para incidencia de ondas armónicas SH para este modelo de depósito homogéneo bidimensional con el método de frontera aquí considerado se encuentran en el rango de 0 a 3 Hz . Para obtener, a partir de los resultados en frecuencia, la respuesta en el dominio del tiempo para una señal incidente dada, se hace uso de la transformada de Fourier.

Si $f(\omega)$ = transformada de Fourier de una señal $f(t)$, entonces la historia de desplazamientos en la superficie para algún punto estará dado por

$$v(t) = 0.5 \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

donde $H(\omega)$ es la función de transferencia (esto es, la respuesta en frecuencia) para el punto de interés. Para mostrar el efecto de la generación y propagación de ondas superficiales en el depósito estudiado y en el rango de frecuencias considerado, se utilizaron como señales de tiempo $f(t)$ dos ondulaciones f_1 y f_2 , llamadas pulsos de Ricker, los cuales en sismología son usados con bastante frecuencia para la generación de señales sintéticas. Estas ondulaciones tienen la particularidad de que es posible identificar fácilmente el valor máximo de la amplitud de su transformada de Fourier, conocido como periodo característico (t_p) (figuras 12 y 13 respectivamente).

En cada una de las figuras (14) y (15) se presentan los resultados obtenidos en cien estaciones equidistantes localizadas sobre la superficie del depósito de la figura 8 para dos ángulos de incidencia

($\theta = 0^\circ$ y 30°), cuando se tiene como señal incidente un pulso de Ricker con periodos característicos de $t_p = 1$ y 0.75 s.

Los resultados muestran claramente dos tipos de respuesta del modelo debidos a causas diferentes: la respuesta unidimensional de los 8 km centrales que tienen un espesor uniforme de 1 km y la generación local de ondas superficiales debidas a la presencia de irregularidades laterales en el modelo; en este caso esas irregularidades son las propias fronteras del depósito. La respuesta unidimensional puede observarse en el primero y segundo rebotes de la onda plana incidente. El lapso comprendido entre una y otra rebote (2 s) coincide con el tiempo de viaje de las ondas dentro del depósito desde la superficie libre hasta su base y su regreso a la superficie libre. La respuesta del modelo debida a la presencia de irregularidades laterales consiste en la generación de ondas superficiales a partir de los bordes del depósito, las cuales producen un alargamiento, considerable en algunos casos, de la duración de la señal en una buena parte de las estaciones. Estas ondas superficiales viajan desde un extremo del depósito hasta el otro, distante 10 km, con una velocidad (1.1 km/s) ligeramente superior a la correspondiente al depósito. En el tiempo en el que las ondas superficiales provenientes de ambos extremos del depósito se intersectan en la parte media del depósito, se produce un movimiento continuo durante varios segundos y con amplitudes comparables, en algunos casos, a la amplitud de la onda incidente.

Con objeto de poder aplicar los resultados obtenidos con este tipo de modelos a problemas de interés práctico en ingeniería civil, es necesario abarcar un rango de frecuencias de 0 a 10 Hz. Desafortunadamente, los tiempos de cálculo para evaluar los resultados y la precisión en la solución de los sistemas de ecuaciones como los que surgen en este tipo de problemas, son las principales limitaciones para extender estos resultados a todo el rango de frecuencias de interés. Diversos investigadores han mostrado que por ahora no es posible obtener, con este tipo de métodos, resultados directamente aplicables a la solución de problemas prácticos de ingeniería sísmica.

Por otra parte, se han desarrollado algunos métodos de solución

de propagación de ondas basados en la teoría geométrica de rayos (Nowack y Aki 1984) cuyo rango de aplicación se encuentra en las altas frecuencias, esto es, arriba de los 3 Hz. Sánchez-Sesma y Velázquez (1987) , basados en estas soluciones, desarrollaron un método para determinar la respuesta sísmica en cierto tipo de cuñas las cuales no producen difracción. Sánchez-Sesma *et al.* (1988) extendieron este método para estudiar el movimiento en la superficie libre de cierto tipo de depósitos homogéneos sometidos a excitación sísmica. Usando esta misma técnica, Calderón y Sánchez-Sesma (1990) desarrollaron un algoritmo para estudiar la respuesta de depósitos con fronteras laterales en forma de cuña a 45° y una parte central en forma de estrato horizontal, semejantes al modelo de la figura 8 aquí estudiado. Con objeto de hacer una comparación de este tipo de soluciones adecuadas para alta frecuencia, con las obtenidas con el método aquí utilizado, en la figura 16 se presentan los resultados en las mismas cien estaciones equidistantes, localizadas en la superficie libre del depósito de la figura 8 para un pulso de Ricker incidente a un ángulo de 30° con periodo característico $t_p = 2$ s. Los resultados muestran buena concordancia en los rasgos fundamentales, esto es, amplitudes similares y generación y propagación de ondas superficiales semejantes.

Con objeto de extender los resultados hasta ahora obtenidos a ese rango de interés (0 a 10 Hz) fue necesario combinar los resultados anteriores con los obtenidos con la técnica de rayos aplicada por Calderón y Sánchez-Sesma (1990). Este método para combinar soluciones obtenidas para un solo modelo con dos técnicas diferentes (Bravo, 1988), consiste en mezclar los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia. Dicha mezcla se efectúa solamente en el rango para el cual ambas técnicas producen resultados similares fig(20). Fuera de dicho rango, los resultados en baja frecuencia corresponden a los obtenidos con el método de frontera, mientras que los correspondientes resultados para alta frecuencia son los calculados con la técnica de rayos.

Adicionalmente a esta técnica de mezcla de soluciones y con objeto de considerar también de manera aproximada el efecto de

estratos superficiales de suelo blando, la función de transferencia bidimensional se utiliza como señal de entrada, en el dominio de la frecuencia, a un modelo unidimensional de estratos horizontales para el cual se pueden obtener resultados confiables en todo el rango de frecuencias que aquí interesa. El método para obtener esta respuesta unidimensional es el de Haskell (1953) y se presenta en el Apéndice 1.

Con el propósito de mostrar la aplicabilidad de los conceptos de mezclado y combinación de métodos y técnicas arriba mencionados con rangos de aplicación restringidos, a continuación se presentan algunos resultados obtenidos de la simulación de dos eventos sísmicos registrados en algunas estaciones acelerográficas de la Ciudad de México. Asimismo, con objeto de comparación, se presentan las correspondientes simulaciones utilizando únicamente un modelo unidimensional.

Los resultados de los modelos 1D y 2D de las figuras 10, están acompañados de las funciones empíricas. Estas se obtuvieron para tres estaciones (8, 56 y 58) de la red acelerográfica del Valle de México (figs.8,10), como el cociente espectral entre la señal registrada en la estación de interés y una señal en terreno firme; en este caso Tacubaya, esto para los temblores del 8 de Febrero de 1988 y del 25 de Abril de 1989.

Se observa que ambos modelos para los dos temblores, simulan con una buena aproximación la amplitud máxima para la frecuencia correspondiente, siendo el modelo 2d el que se aproxima mejor, aun y cuando para el sismo del 25 de abril ésta es sobrestimada (figs 11b,11f). En el modelo 2d se da una respuesta más compleja en los picos registrados (resonancias) aun para valores mayores a 1 Hz., debidas principalmente al confinamiento lateral del depósito.

Con los resultados anteriores, para las mismas estaciones se simuló su respuesta ante la incidencia de las dos señales en terreno firme, correspondientes a los temblores ya mencionados.

En cada una de las figuras (17) se presenta la señal en terreno

firme (a), la señal registrada en la estación (b), la simulación de la señal con un modelo unidimensional (d), y la simulación con el modelo bidimensional (c), todos ellos para un ángulo de incidencia de cero grados (vertical). En términos generales el modelo 2D amplifica mas la señal registrada, aun en la fase final, que es donde el modelo 1D ya no reproduce igual debido a que no considera el confinamiento lateral y por ende la generación de ondas superficiales.

Finalmente con las señales registradas en el lugar y las generadas sintéticamente, se obtuvieron espectros de respuesta para un sistema de un grado de libertad (fig.18), con un amortiguamiento del 5%. La respuesta del sistema se estimó en el dominio de la frecuencia (ver apéndice sobre Espectros de Respuesta), la cual posteriormente se pasó al dominio del tiempo. Los resultados de las figuras 19, muestran que prácticamente para las tres estaciones con el modelo 2D se obtiene una configuración mas parecida a la obtenida con la señal en sitio que el modelo 1D, aun para periodos mayores a 2 s. En algunos casos ésta es sobreestimada, como lo fué en particular las estaciones 08 y 58

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se hizo uso de un método de frontera, en el que se satisfacen condiciones de continuidad de tracciones y desplazamientos en la interfaz del semiespacio y un depósito de suelo blando. Debido a las dificultades para manejar frecuencias mayores a tres Hz., se mezcló la solución de éste con uno basado en la teoría de rayos con el propósito de obtener soluciones en un rango de frecuencias más amplio. Además se analizó por separado una estratificación unidimensional, cuya solución combinada con la del modelo bidimensional, permitió simular la respuesta del depósito estratificado ante la incidencia de ondas SH.

En el dominio de la frecuencia los resultados para el modelo 2d exceden la respuesta de la función de transferencia empírica. Ello es debido entre muchas otras causas a la geometría simplificada del modelo utilizado, pero fundamentalmente a la forma gruesa en que se obtuvo la solución considerando el depósito estratificado.

Para mostrar los efectos del confinamiento lateral del depósito en el dominio del tiempo, se hizo uso de dos señales (Pulsos de Ricker) f_1 y f_2 cuyos resultados mostraron como la respuesta se prolonga en el tiempo, debido a las reflexiones generadas dentro del depósito y la emisión de ondas superficiales por los extremos del mismo.

Otro estudio hecho en el dominio del tiempo, fué a partir de registros de temblores en terreno firme. Ello se hizo tanto para el modelo bidimensional como el unidimensional. En el modelo 2D la

respuesta después de la fase intensa es un poco mas prolongada y amplificada, sin embargo no lo fué como se esperaba, debido fundamentalmente a las aproximaciones en términos generales que se hicieron para la solución del problema.

Los resultados sintéticos obtenidos en esta etapa del trabajo, se usaron para obtener la respuesta de un sistema de un grado de libertad, y compararlos con los que se obtienen con las señales registradas en sitio. Se encontró que las aproximaciones fueron razonables. Sin embargo se tienen diferencias significativas con respecto a resultados empíricos. Ello influyó en los resultados obtenidos con los espectros de respuesta para el sistema de un grado de libertad

Como comentario final, cabe mencionar que se considera importante el modelado en dos dimensiones y aun tres dimensiones, ya que con el unidimensional no se puede reproducir los efectos de los arribos tardíos producidos por las ondas superficiales generadas por el confinamiento lateral. Estos efectos pueden en algunos casos ser de importancia en la respuesta de edificaciones humanas. Por otra parte el considerar el efecto del confinamiento lateral permite estudiar con mayor precisión los efectos de sitio, cuya importancia se ha hecho evidente con los recientes sismos de 1985, además de entender mejor el fenómeno de amplificación dinámica.

RECONOCIMIENTOS

Agradezco el apoyo de mi director de tesis Dr. Miguel A. Bravo, el cual fué determinante para la realización del presente trabajo. De igual manera al Dr. Francisco J. Sánchez-Sesma, el que me haya permitido participar en su grupo de trabajo. A sus colaboradores, Martha Suárez, Carlos Calderón, David Alvarez, Jaime Ramos, José Luis Rodríguez, Jorge Aguirre, Guadalupe Padilla, y Miguel A. Santoyo, les agradezco su ayuda.

Mi gratitud a los investigadores del C.E.N.A.P.R.E.D, Dr. Roberto Meli P., Dr. Mario Ordaz S., y al M.C. Carlos Gutiérrez M., por las facilidades brindadas.

Un reconocimiento especial al personal del Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M. por facilitarme sus instalaciones.

FIGURAS

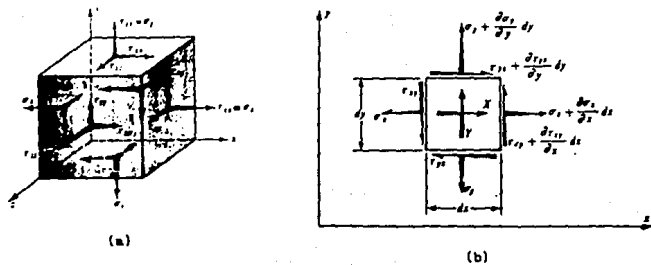


fig.1 Elemento infinitesimal sujeto a esfuerzos y fuerzas de cuerpo

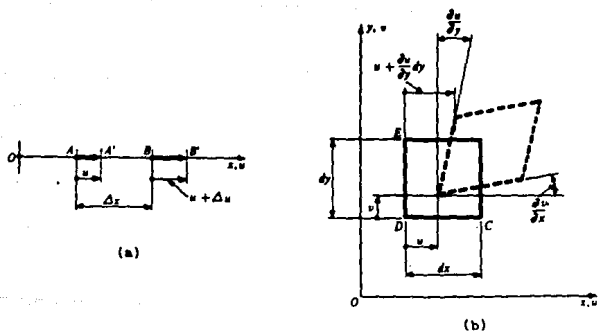
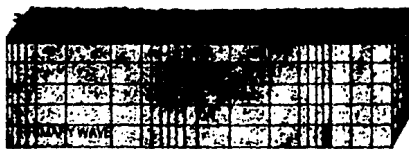


fig.2 Elementos deformados en sus posiciones inicial y final



(a)



(b)

fig.3 Representación esquemática del movimiento de partículas producido por ondas de cuerpo. a) Ondas primarias o de compresión (P). b) Ondas secundarias o de cortante (S)

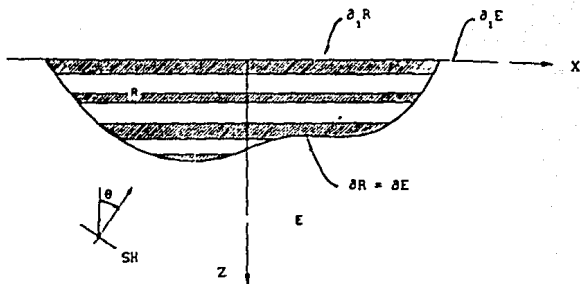


fig.4 Depósito de geometría arbitraria estratificado horizontalmente



fig.5 Campo de desplazamientos del semiespacio. Compuesto por el generado por la irregularidad (V_d), y la frontera libre (V_o)

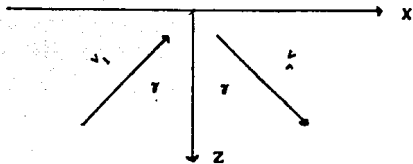


fig.6 Solución de campo libre como campo Incidente (V_i) mas campo reflejado (V_r)

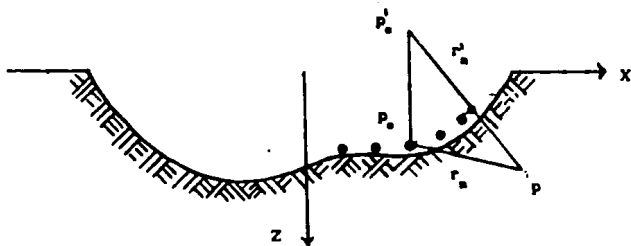


fig.7 Colocación de fuentes a lo largo de la irregularidad

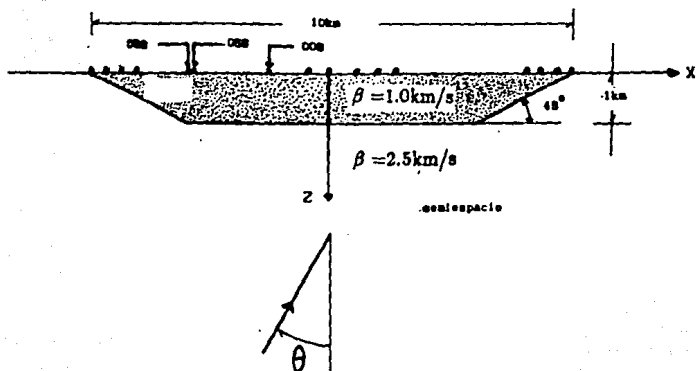


fig.8 Modelo bidimensional empleado para estudiar el efecto de la irregularidad lateral

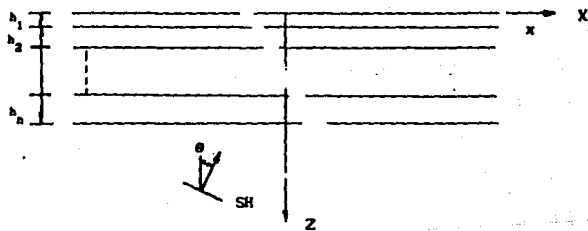


fig.9 Modelo unidimensional estratificado

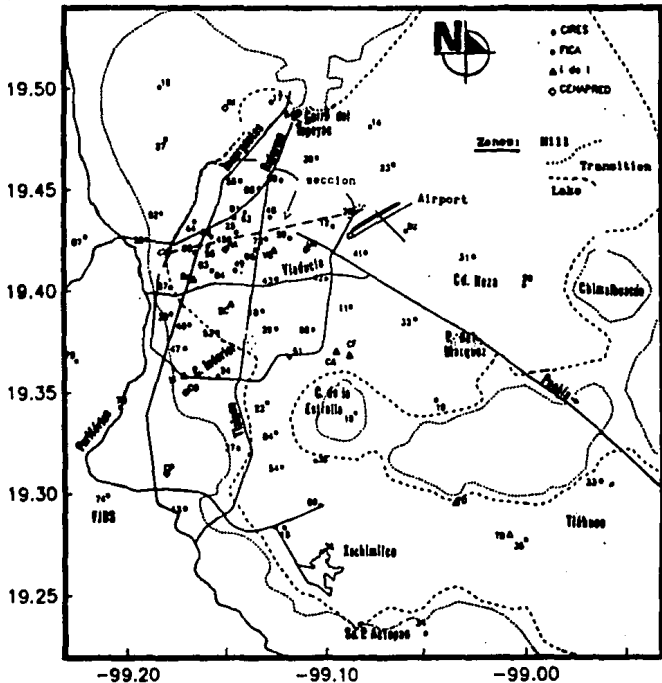


fig.10 Red acelerográfica del Valle de México. Las estaciones 08,56,58 fueron utilizadas para el presente trabajo. Con línea punteada se presenta la sección en planta estudiada.

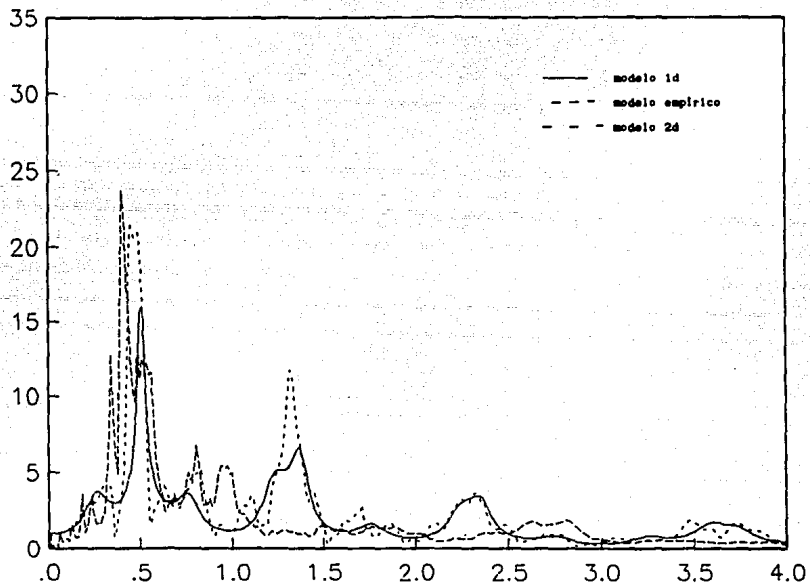


fig.11a Funciones de transferencia para la estación 008 (para del 08/Febrero)

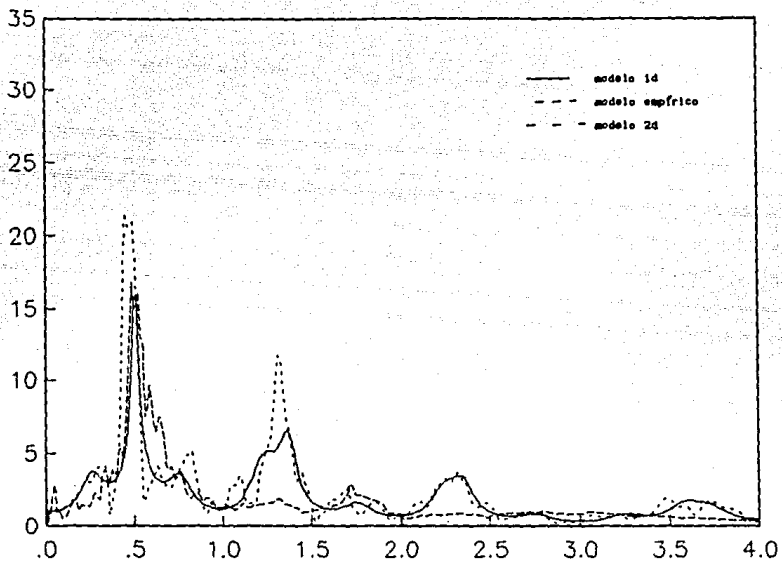


fig.11b Funciones de transferencia para la estación 008 (para el evento del 25/Abril).

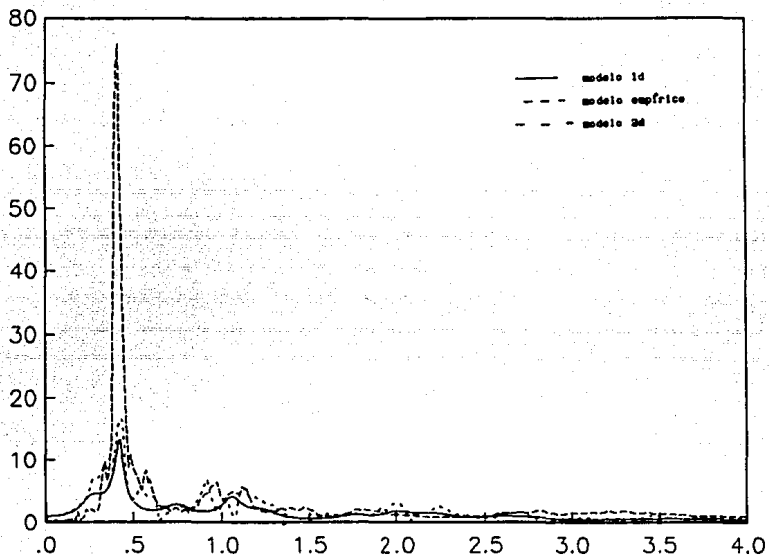


fig.11c Funciones de transferencia para la estación 056 (para el evento del 08/Febrero)

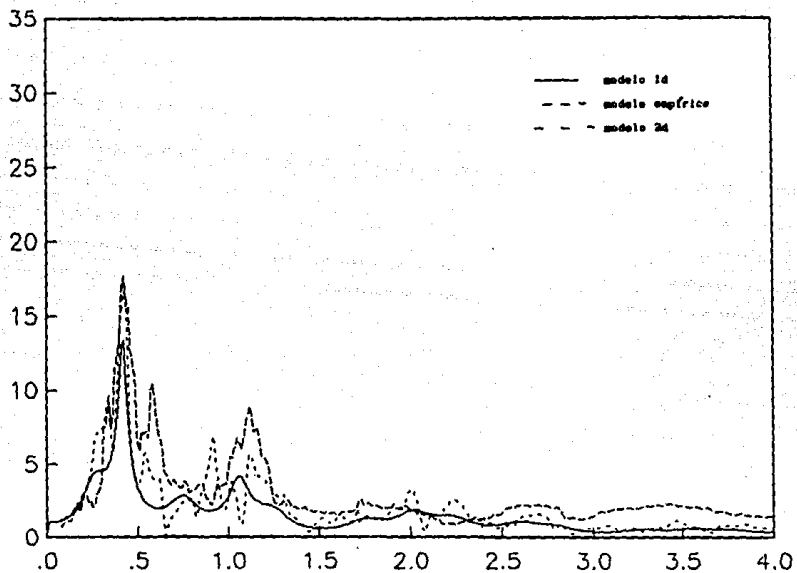


fig.11d Funciones de transferencia para la estación 056 (para el evento del 25/Abril)

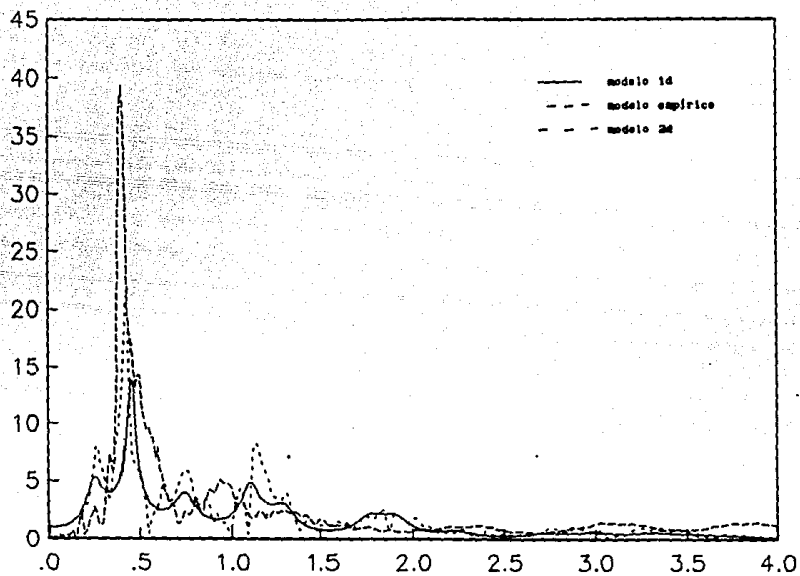


fig.11e Funciones de transferencia para la estación 058 (para el evento del 08/Febrero)

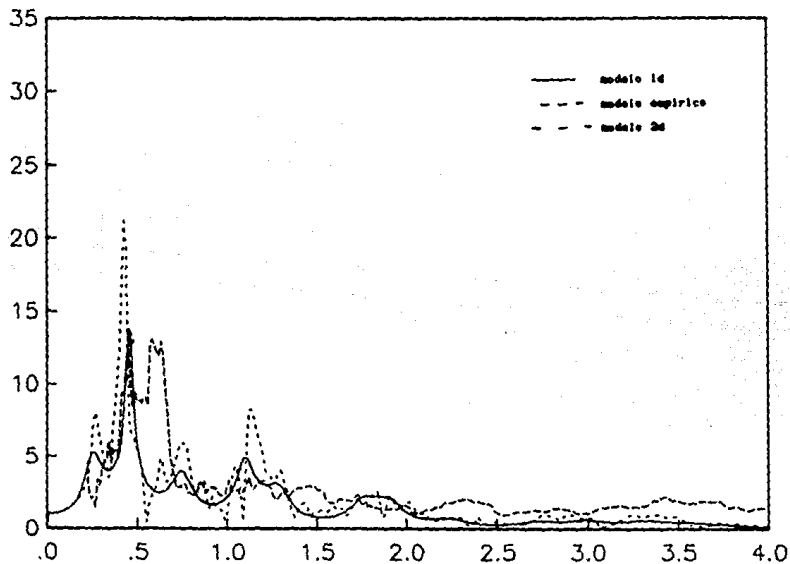
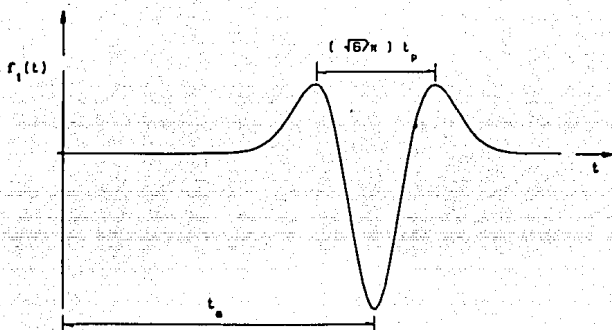
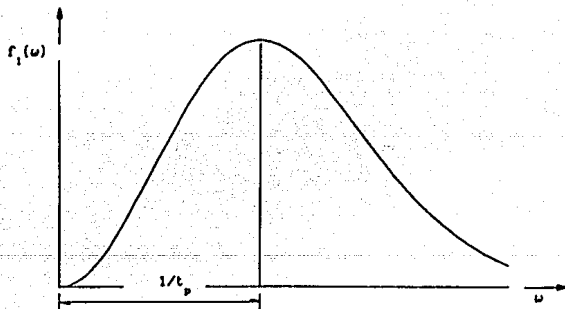


fig.11f Funciones de transferencia para la estación 058 (para el evento del 25/Abril)



a) Representación de la señal f_1 en el dominio del tiempo

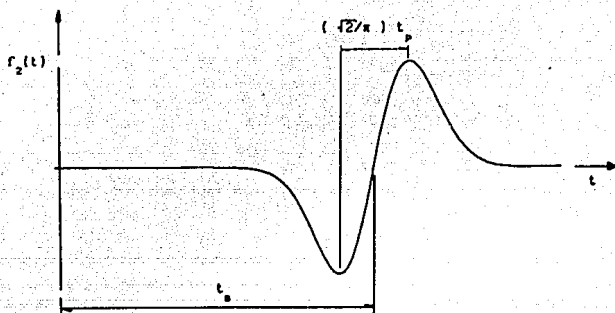
$$f_1(t) = c (a^2 - 0.5) e^{-a^2}$$



b) Representación de la señal f_1 en el dominio de la frecuencia

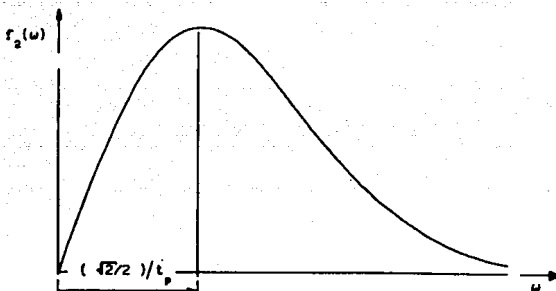
$$f_1(\omega) = -(c/\pi) t_p b^2 a^{-b^2} e^{-1/\omega t_p}$$

fig. 12



a) Representación de la señal f_2 en el dominio del tiempo

$$f_2(t) = c a e^{-a^2 t^2}$$



b) Representación de la señal f_2 en el dominio de la frecuencia

$$f_2(\omega) = -1 (c/\sqrt{\pi}) t_p b e^{-b^2 \omega^2} e^{-i\omega t_s}$$

fig. 13

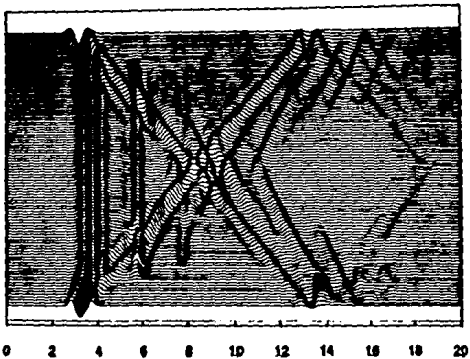


fig.14a Sintéticos para el pulso f_1 con $t_p=1$ seg. $\theta = 0^\circ$

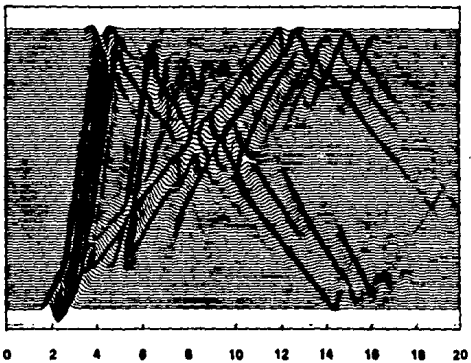


fig.14b Sintéticos para el pulso f_1 con $t_p=1$ seg $\theta = 30^\circ$

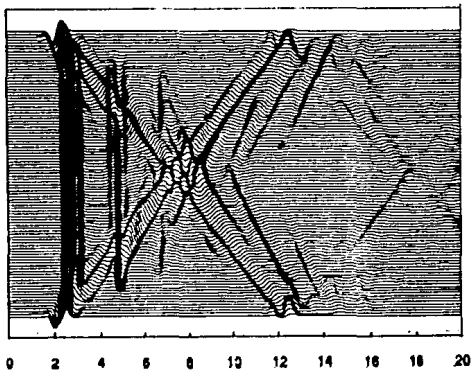


fig.15a Sintéticos para el pulso f_1 con $t_p=0.75$ seg $\theta = 0^\circ$

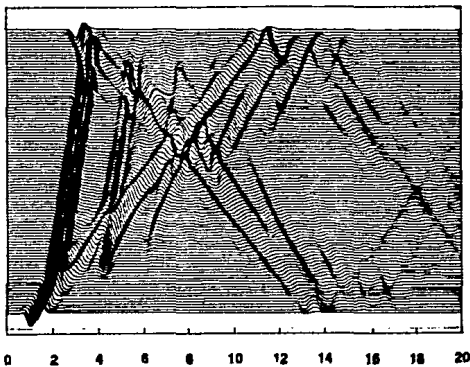


fig.15b Sintéticos para el pulso f_1 con $t_p=0.75$ seg $\theta = 30^\circ$

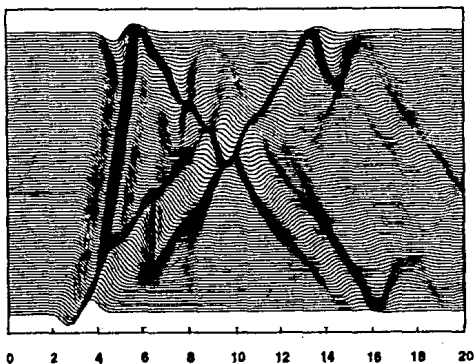


fig.16a Sintéticos para el pulso f2 con $t_p=2$ seg $\theta = 30^\circ$.
Obtenido con el método de frontera.

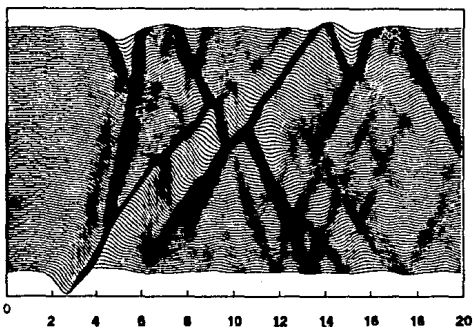


fig.16b Sintéticos para el pulso f2 con $t_p=2$ seg $\theta = 30^\circ$.
Obtenido con el método implementado por Carlos C.M.

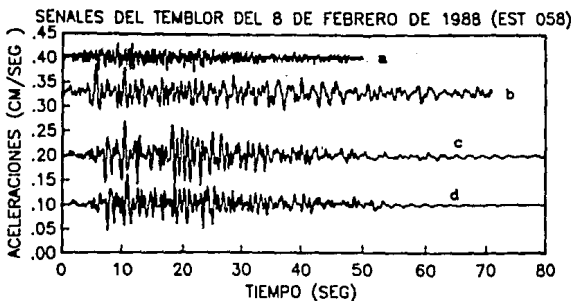


fig. 17a (a) Señal en terreno firme
 (b) Señal registrada en la estación
 (c) Señal generada con el modelo 2D
 (d) Señal generada con el modelo 1D

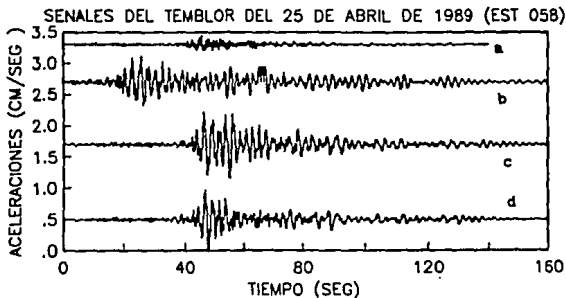


fig. 17b (a) Señal en terreno firme
 (b) Señal registrada en la estación
 (c) Señal generada con el modelo 2D
 (d) Señal generada con el modelo 1D

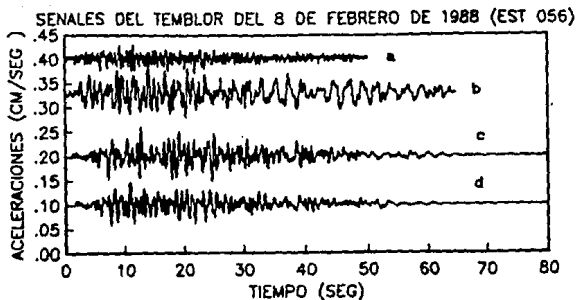


fig. 17c (a) Señal en terreno firme
 (b) Señal registrada en la estación
 (c) Señal generada con el modelo 2D
 (d) Señal generada con el modelo 1D

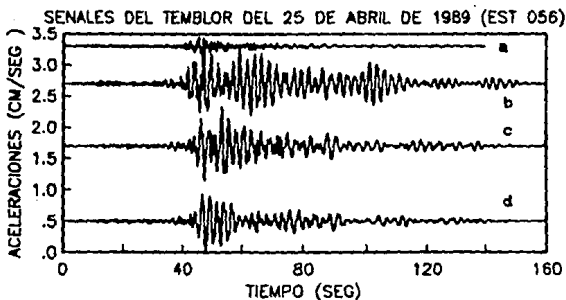


fig. 17d (a) Señal en terreno firme
 (b) Señal registrada en la estación
 (c) Señal generada con el modelo 2D
 (d) Señal generada con el modelo 1D

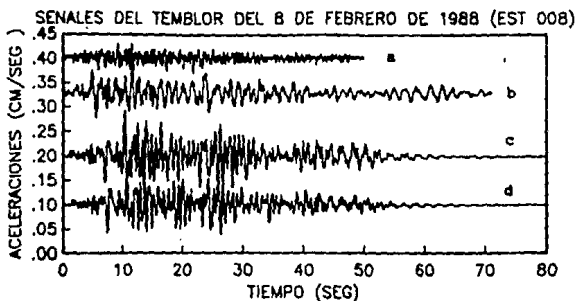


fig. 17e (a) Señal en terreno firme
 (b) Señal registrada en la estación
 (c) Señal generada con el modelo 2D
 (d) Señal generada con el modelo 1D

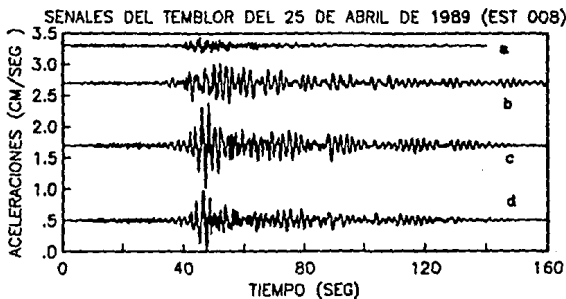
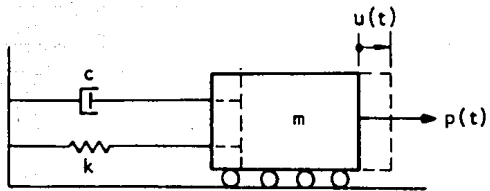
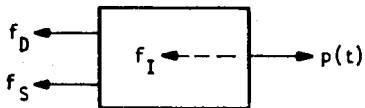


fig. 17f (a) Señal en terreno firme
 (b) Señal registrada en la estación
 (c) Señal generada con el modelo 2D
 (d) Señal generada con el modelo 1D



(a)



(b)

fig.18 Modelo de un grado de libertad empleado para obtener espectros de respuesta a partir de las señales de las figuras 17

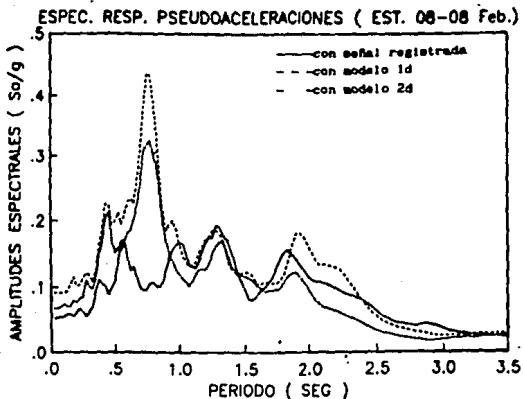


fig.19a Espectros de respuesta del modelo de la fig.18

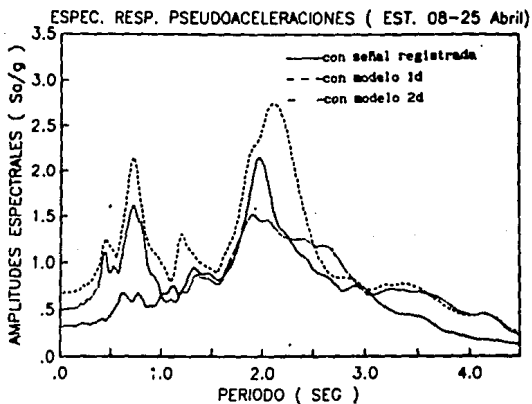


fig.19b Espectros de respuesta del modelo de la fig.18

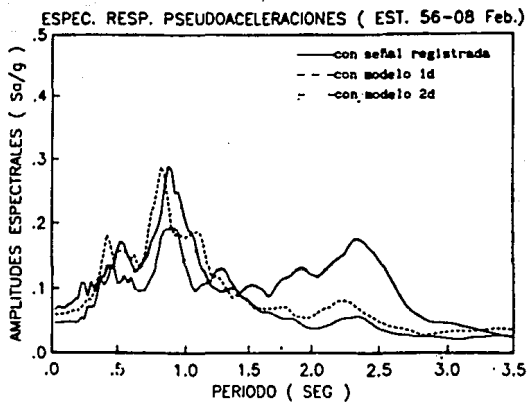


fig.19c Espectros de respuesta del modelo de la fig.18

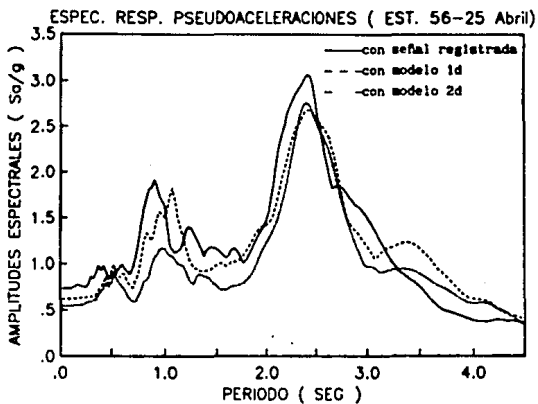


fig.19d Espectros de respuesta del modelo de la fig.18

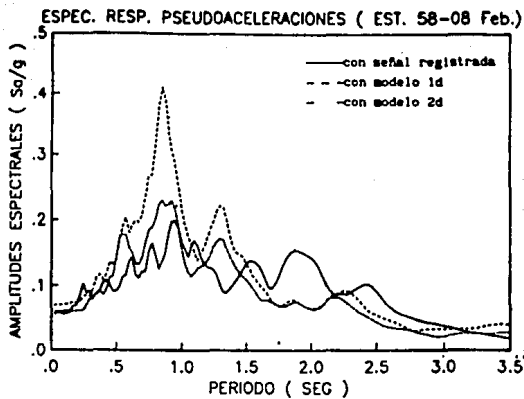


fig.19e Espectros de respuesta del modelo de la fig.18

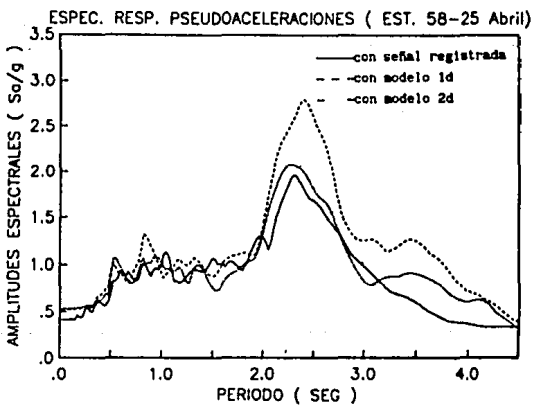


fig.19f Espectros de respuesta del modelo de la fig.18

REFERENCIAS

- Bard P.Y., Bouchon M. (1980). *The seismic response of sediment-filled valleys, part 1, The case of SH waves*, BSSA vol 70
- Berg G. V. (1989). *Elements of structural dynamics*, Prentice Hall
- Bravo M. A. (1988). *Respuesta sísmica en depósitos de suelo blando*, Tesis Doctoral División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería UNAM
- Bravo M. A., Sánchez-Sesma F.J., Pérez Rocha L.E. (1987). *Modelado matemático de la respuesta sísmica en depósitos de suelo blando*, Memorias VII Congreso de Ingeniería Sísmica Querétaro, Qro.
- Brigham E. O. (1974). *The fast Fourier transform*, Prentice Hall
- Calderón M. C. (1990). *Consulta personal*
- Chopra A. K. (1980). *Dynamics of structures*, Earthquake Research Institute
- Dowrick D.J. (1984). *Diseño de estructuras resistentes a sismos para Ingenieros y Arquitectos*, Limusa
- Haskell N.A. (1953). *The dispersion of surface waves in multilayered media*, Bull. Seismol. Soc. Am. 43, 17-34
- Kawase H., Aki K. (1989). *A study on the response of a soft basin for incident S,P and Rayleigh waves with special reference to long*

duration observed in Mexico City

Meirovitch L. (1975). *Elements of vibration analysis*, Mc Graw Hill Kogakusha Tokio Japan

Newland D.E.(1975). *An Introduction to random vibrations and spectral analysis*, Longman

Noble B. (1969). *Applied linear algebra*, edit Prentice Hall Inc.

Nowack R. and K. Aki (1984). *The two-dimensional Gaussian beam synthetic method: testing and applications*, J. Geophys. Res. 89, 7797-7819

Paz M. (1985). *Structural dynamics theory and computation*, Van Nostrand Reinhold Company second edition

Pérez Rocha L.E., Sánchez-Sesma F.J., Bravo M.A. (1987). *Influencia de las condiciones locales en la duración de los temblores y su importancia en ingeniería sísmica*, A50-A60 Querétaro, Qro. México

Popov E. (1978). *Introducción a la mecánica de sólidos*, edit Limusa

Ralston A., Rabinowitz P. (1984). *A first course in numerical analysis*, International Student second edition

Resnick, Halliday (1974). *Física*, edit. CECSA

Richart Jr F.E., Hall J.R., Woods R.D., (1970). *Vibrations of soils and foundations*, International Series in Theoretical and Applied Mechanics

Romo M.P., Seed B. (1986). *Analytical modelling of dynamic soil response in the Mexico earthquakes, factors involved and lessons learned*, sep 19-21 Mexico

Sánchez-Sesma F.J.(1982). *Propagación de ondas elásticas en un*

medio semiinfinito, Instituto de Ingeniería UNAM

Sánchez-Sesma F.J., Chávez García F.J., Bravo M.A. (1988). *Seismic response of a class of alluvial valleys for incident SH waves*, Bull. Seismol. Soc. Am. 78, 83-95

Sánchez-Sesma F.J. and Velázquez S.A. (1987). *On the seismic response of a dipping layer, wave motion* (in press).

Thomson W. T. (1983). *Teoría de vibraciones aplicaciones*, Prentice Hall International segunda edición

APÉNDICE 1

MÉTODO DE HASKELL

Cuando en un semiespacio se consideran estratos horizontales (fig 9), las ecuaciones de movimiento son distintas en cada uno de ellos, dado que sus propiedades mecánicas también lo son. Para resolver el sistema de ecuaciones involucrado y con ello satisfacer las condiciones de frontera en las interfases; así como conocer el movimiento en cualquier punto de la estratificación, se propone un método propuesto inicialmente por Thompson y corregido por Haskell.

El desarrollo del método se hace bajo la consideración de que solo se produce movimiento en la dirección Y, por lo que se tiene que $u = w = 0$. La ecuación de movimiento correspondiente estará dada por :

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

si hacemos

$$v = l_1(k, z, \omega) \exp \{i(-kx + \omega t)\} \quad (2)$$

donde $k = \omega/c =$ número de onda, con $\omega =$ frecuencia circular, tenemos que las componentes del tensor de deformaciones está dado por :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = l_1(-ik) \exp \{i(-kx + \omega t)\} \quad (3)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial l_1}{\partial z} \exp \{i(-kx + \omega t)\} \quad (4)$$

Sustituyendo este sistema en las siguientes relaciones de esfuerzo-deformación

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)c_x + \lambda c_y + \lambda c_z \quad (5a)$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu)c_y + \lambda c_x + \lambda c_z \quad (5b)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu)c_z + \lambda c_x + \lambda c_y \quad (5c)$$

$$\tau_{xy} = \mu \gamma_{xy} \quad (5d)$$

$$\tau_{xz} = \mu \gamma_{xz} \quad (5e)$$

$$\tau_{yz} = \mu \gamma_{yz} \quad (5f)$$

y considerando que

$$l_2(k, z, \omega) = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[l_1(k, z, \omega) \right] \quad (6)$$

se tiene

$$\tau_{xy} = -ik\mu l_1 \exp \{i(-kx + \omega t)\} \quad (7)$$

$$\tau_{yz} = l_2(k, z, \omega) \exp \{i(-kx + \omega t)\} \quad (8)$$

Sustituyendo (2), (7) y (8) en la ecuación (1), esta queda expresada de la siguiente forma

$$\frac{dl_2}{dz} = k^2 \mu l_1 - \omega^2 \rho l_1 \quad (9)$$

con $l_2 = -\mu \frac{dl_1}{dz} \quad (10)$

$$v = l_1 \exp \{i(-kx + \omega t)\} \quad (11)$$

$$l_1 = l_1(k, z, \omega), \quad l_2 = l_2(k, z, \omega)$$

Dado que l_1 es solo función de z en la ecuación (9), solo aparecen derivadas totales. Resolver (9) equivale a resolver la ecuación de movimiento (1).

En forma matricial las ecuaciones (9) y (10) se pueden expresar de la siguiente forma

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\mu \\ k^2 \mu - \omega^2 \rho & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

o

$$\frac{d}{dz} \bar{f} = \bar{A} \bar{f} \quad (12a)$$

Al vector $\{l_1, l_2\}^T$ se le conoce como vector desplazamiento-esfuerzo, el cual debe ser continuo a lo largo de las interfases.

Una solución de la ecuación (12a) está dada por

$$\bar{f}_j = \bar{v}_j \exp \left[\lambda_j (z - z_0) \right] \quad (13)$$

donde z_0 = profundidad de referencia, λ_j = eigenvalor de la matriz A, \bar{v}_j = eigenvector de A correspondiente a λ_j .

Las raíces de la ecuación característica; correspondiente a la matriz A, son :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\eta \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13)

$$\bar{f}_1 = \bar{v}_1 \exp \left[\lambda_1 (z - z_0) \right] \quad (15a)$$

$$\bar{f}_2 = \bar{v}_2 \exp \left[\lambda_2 (z - z_0) \right] \quad (15b)$$

\bar{v}_1 y \bar{v}_2 se obtienen a partir de la ecuación $A \bar{v}_j = \lambda_j \bar{v}_j$.

De este sistema, para cada uno de los eigenvalores resultan dos ecuaciones linealmente dependientes, para los cuales haciendo : $v_1^{(1)} = 1$ y $v_2^{(1)} = i$ se llega a

$$\bar{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ i\mu\eta \end{Bmatrix} \quad (16a)$$

$$\bar{v}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -i\mu\eta \end{Bmatrix} \quad (16b)$$

Estas son soluciones particulares linealmente independientes, de la ecuación (12). Una solución general, estaría formada como una

combinación lineal de todas sus soluciones particulares, la cual puede expresarse como sigue

$$\bar{f} = F \bar{W} \quad (17)$$

donde : $F = (\bar{f}_1 | \bar{f}_2)$ y \bar{W} = vector de pesos. Este vector de pesos, está dado por las amplitudes que viajan hacia arriba (en dirección negativa de z); denominadas como s' , y ondas que viajan hacia abajo; denominadas s'' .

La solución general de la ecuación (12) resulta

$$\begin{Bmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(i\eta(z-z_0)) & \exp(-i\eta(z-z_0)) \\ i\mu\eta \exp(i\eta(z-z_0)) & -i\mu\eta \exp(i\eta(z-z_0)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |s'\rangle \\ |s''\rangle \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Definamos la matriz propagadora entre z y z_0 como sigue

$$p(z, z_0) = I + \int_{z_0}^z A(\xi_1) d\xi_1 + \int_{z_0}^z A(\xi_1) \int_{z_0}^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \dots \quad (19)$$

donde I = matriz unitaria de orden n . Esta matriz así definida satisface la ecuación diferencial (12a).

De la ecuación (19) para $z = z_0$ se tiene que

$$p(z_0, z_0) = I \quad (20)$$

De aquí se obtiene la siguiente propiedad de la matriz propagadora

$$\bar{f}(z) = p(z, z_0) \bar{f}(z_0) \quad (21)$$

El término del lado derecho satisface la ecuación (12a), y da $f(z_0)$ en $z = z_0$. Por lo tanto $p(z, z_0)$ genera el vector movimiento-esfuerzo al operar sobre el vector z_0 .

Una propiedad de $p(z, z_0)$ se encuentra al observar

$$\begin{aligned}\bar{f}(z_2) &= p(z_2, z_1) f(z_1) \\ \bar{f}(z_2) &= p(z_2, z_1) p(z_1, z_0) f(z_0)\end{aligned}$$

si se hace $z_2 = z_0$ y se aplica la regla anterior se tiene

$$\bar{f}(z_0) = p(z_0, z_1) p(z_1, z_0) \bar{f}(z_0)$$

de donde :

$$p(z_0, z) p(z_1, z_0) = I$$

lo cual implica que $p(z, z_0)$ es la inversa de $p(z_0, z_1)$.

Dentro de un estrato la matriz A es constante, por lo que la matriz propagadora toma la siguiente forma

$$p(z, z_0) = I + (z-z_0)A + \frac{1}{2!} (z-z_0)^2 A^2 + \frac{1}{3!} (z-z_0)^3 A^3 + \dots \quad (22)$$

lo cual puede escribirse como

$$p(z, z_0) = \exp((z-z_0)A)$$

Para no expresar la matriz propagadora en términos de la exponencial de una matriz, se recurre a la fórmula de Sylvester, la cual establece que para una matriz cuadrada A con eigenvalores distintos λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$), puede expandirse como sigue

$$F(A) = \sum_{j=1}^n F(\lambda_j) \frac{\prod_{m \neq j} (A - \lambda_m I)}{\prod_{m \neq j} (\lambda_j - \lambda_m)} \quad (23)$$

Para ondas de Love se tiene

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1/\mu \\ \hline k^2 \mu - \omega^2 \rho & 0 \end{array} \right]$$

cuyos valores característicos son $\lambda_{1,2} = \pm i\eta_n$, de donde

$$\eta_n^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2, \quad \text{con : } k^2 = \frac{\omega^2}{\beta_E^2} \sin^2 \theta$$

Aplicando Sylvester a la matriz A del n-ésimo estrato entre las profundidades z y z_0 ; desarrollando y haciendo algunas consideraciones, se obtiene la expresión de la matriz propagadora para ondas SH

$$p(z, z_0) = \left[\begin{array}{c|c} \cos((z-z_0)\eta_n) & \frac{1}{\mu_n \eta_n} \sin((z-z_0)\eta_n) \\ \hline -\mu_n \eta_n \sin((z-z_0)\eta_n) & \cos((z-z_0)\eta_n) \end{array} \right] \quad (24)$$

donde

$$\eta_n = \left[\frac{\omega^2}{\beta_n^2} - \frac{\omega^2}{\beta_E^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2} = \omega \left[\frac{1}{\beta_n^2} - \frac{1}{\beta_E^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

Esta matriz está en función del espesor del estrato, las propiedades mecánicas del mismo, de la frecuencia de excitación y el ángulo de incidencia.

De la ecuación (18) se puede despejar $\left\{ \begin{array}{c} s' \\ s'' \end{array} \right\}$ y evaluar z en z_0 con lo cual se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{c} s' \\ s'' \end{array} \right\} = F^{-1} \left\{ \begin{array}{c} 1_1 \\ 1_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} 1/2 & -1/2\mu\eta \\ \hline 1/2 & 1/2\mu\eta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1_1 \\ 1_2 \end{array} \right\} \quad (25)$$

combinando (22), (24) y (25) se obtiene el vector desplazamiento en la superficie libre de un medio estratificado

$$\left\{ \begin{array}{c} s' \\ s'' \end{array} \right\} = F^{-1} p(z_n, z_{n-1}) p(z_{n-1}, z_{n-2}) \dots p(z_1, z_0) \left\{ \begin{array}{c} 1_1 \\ 1_2 \end{array} \right\}$$

ó bien

$$\left\{ \begin{array}{c} s' \\ s'' \end{array} \right\} = R \left\{ \begin{array}{c} 1_1 \\ 1_2 \end{array} \right\}$$

Como en la superficie libre $l_2 = 0$ y lo que interesa conocer es el desplazamiento l_1 se tiene

$$s'' = R_{11} v \quad , \quad v = \frac{s''}{R_{11}} \quad \text{ó} \quad \frac{v}{s''} = \frac{1}{R_{11}}$$

De esta forma se tiene que la amplitud del desplazamiento en la superficie, queda expresado en términos de la amplitud del desplazamiento en la base de la formación estratificada y de un factor de amplificación $1/R_{11}$. El cual es el primer elemento de la matriz resultante del producto de la inversa de la matriz del semiespacio con las matrices de transferencia de cada uno de los estratos.

APÉNDICE 2

ESPECTROS DE RESPUESTA

La forma mas común para estudiar las frecuencias contenidas en temblores es a través del espectro de respuesta. Este método puede ser definido como la variación de la respuesta dinámica pico de un sistema de un grado de libertad, para diferentes valores de su frecuencia natural, dada una excitación específica. En otras palabras un espectro de respuesta es una gráfica de máximas respuestas (desplazamientos, velocidades, aceleraciones u otras cantidades de interés) para una función de carga, para todo tipo de sistemas de un grado de libertad (Paz, M. 1985).

La obtención del espectro implica la solución de la ecuación diferencial de movimiento .

Consideremos el sistema lineal de segundo orden amortiguado de la fig(18). La ecuación diferencial de movimiento del sistema es

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = F(t) \quad (1)$$

La solución particular de (1) mas simple es cuando el sistema está sujeto a una excitación armónica, definida como sigue

$$F(t) = k f(t) = k A \cos \omega t \quad (2)$$

De donde $f(t)$ y A tienen unidades de desplazamiento.

Sustituyendo (2) en (1) y dividiendo entre m , obtenemos

$$u(t) + 2\xi\omega_n \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \frac{k}{m} f(t) = \omega_n^2 A \cos\omega t \quad (3)$$

La solución homogénea de (3); para $\lambda = 0$, con $\xi > 0$ decrece con el tiempo, por lo que se le llama solución transitoria. La solución particular no se desvanece para valores de t grandes y se le conoce como la solución estacionaria para una cierta excitación armónica.

Debido a que la excitación es armónica, se puede verificar que la respuesta estable $u(t)$ también lo es y tiene la misma frecuencia ω .

Se propone una solución como la que sigue (Meirovitch 1975)

$$u(t) = X(t) \cos(\omega t - \phi) \quad (4)$$

siendo X y ϕ la amplitud y ángulo de fase de la respuesta respectivamente.

Sustituyendo (4) en (3) se llega a establecer

$$X [(\omega_n^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \phi) - 2\xi\omega_n \omega \sin(\omega t - \phi)] = \omega_n^2 A \cos\omega t \quad (5)$$

Partiendo de algunas identidades trigonométricas se pueden establecer dos ecuaciones a partir de (5), cuya solución es

$$X = \frac{A}{\left[\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 \right]^{0.5}} \quad (6)$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2} \quad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (4) se completa la solución particular de la ecuación (3).

A continuación se presenta la excitación armónica a través de un vector complejo, debido a que representa ventajas en la obtención de la respuesta.

Considérese de nuevo el sistema lineal de segundo orden descrito por la ecuación (1) y representemos la excitación de la siguiente forma compleja

$$f(t) = A e^{i\omega t} \quad (8)$$

en donde $e^{i\omega t}$ se toma como un vector complejo de magnitud unitaria rotando en un plano complejo con velocidad angular ω (ref), entendiéndose que la excitación estará solo dada por la parte real de $x(t)$. A es en general un número complejo.

Con base a lo anterior la respuesta estará dada por la parte real de $x(t)$, donde $x(t)$ es una cantidad compleja que satisface la siguiente ecuación diferencial.

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \omega_n^2 f(t) = \omega_n^2 A e^{i\omega t} \quad (9)$$

Tomando en cuenta que la solución transitoria se atenúa con el tiempo, se tomará en cuenta solo la solución estable, que tiene la siguiente forma

$$x(t) = \text{Re} \left[\frac{\omega_n^2 A e^{i\omega t}}{\omega_n^2 - \omega^2 + 12\xi\omega\omega_n} \right] = \text{Re} \left[\frac{A e^{i\omega t}}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 12\xi\omega/\omega_n} \right] \quad (10)$$

Re designa la parte real del paréntesis. Analizando (10) se ve que $x(t)$ es proporcional a la fuerza: $f(t) = F(t)/k$, siendo el factor de proporcionalidad

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 12\xi\omega/\omega_n} \quad (11)$$

El cual establece la respuesta compleja en el dominio de la

frecuencia. Recordando que la fuerza en el resorte es : $F_s(t) = k x(t)$ se concluye de (10) y (11) que

$$H(\omega) = \frac{x(t)}{f(t)} = \frac{kx(t)}{F(t)} = \frac{F_s(t)}{F(t)} \quad (12)$$

De la ecuación (12) se tiene que la respuesta del sistema se puede obtener en el dominio de las frecuencias, como el producto de una señal de entrada $f(t)$ y $H(\omega)$. La señal $f(t)$ puede ser de cualquier tipo , y una vez que se tiene la solución en el dominio de la frecuencia, aplicando la antitransformada de Fourier se pasa al tiempo.