2

29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEBILIDAD Y CUASINUCLEOS DE DIGRAFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICA

P R E S E N T A :

ISABEL MARIA AGUILAR ORTIZ

FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F. 1991

INDICE

pag.

INTRODUCCION

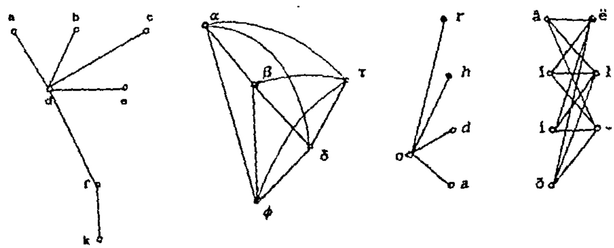
En el presente trabajo se estudian los núcleos y los cuasinúcleos. A través de la tesis, casi cada concepto o teorema se ilustra con diagramas de manera que se pueda obtener una comprensión intuitiva del concepto. En particular se exponen algunos teoremas básicos relacionados con la existencia de núcleos y cuasinúcleos.
La tesis se ha dividido en temas. Después de presentar una serie de definiciones básicas y de teoremas auxiliares de la Teoria de Digráficas, se exponen una serie de aplicaciones del tema mensionado.
En el tema de debilidad de cuasinúcleos se expone un teorema que proporciona una cota superior para la debilidad de cualquier cuasinúcleo.
También se presentan los conceptos de subdigráficas acíclicas absorbentes y subdigráficas acíclicas mínimas, mostrando algunas inclusiones entre ellas y relacionandolas con los conjuntos de núcleos y cuasinúcleos de una digráfica.
Para concluir se exponen algunos aspectos de las digráficas núcleo perfectas, analizando propiedades de las digráficas núcleo perfectas absorbentes y de las digráficas núcleo perfectas múnimas.

Al final del trabajo se encuentra una lista de la notación empleada junto con la localización de los teoremas más importantes.

Deseo agradecer a todas las personas que, de una u otra forma, desempeñaron un papel directo o indirecto para que esta tesis fuese posible, en particular a la Dra. Hortensia Galeana Sánchez y al Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, pues con su apoyo y sus críticas contribuyeron de manera muy significativa en la elaboración del presente trabajo, proporcionandome sugerencias muy útiles durante todas las etapas del desarrollo del manuscrito.

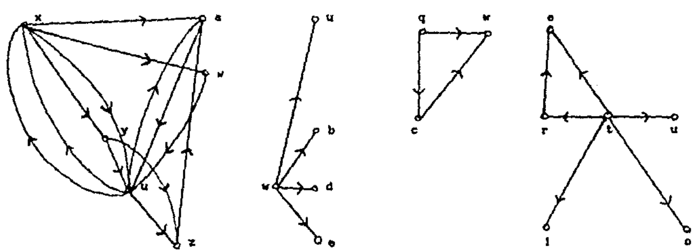
DEFINICIONES BASICAS

Definición 1.1. Una gráfica G es una pareja (V(G),E(G)) donde V(G) es un conjunto no vacío (en el presente trabajo se considerará el caso en el que el conjunto V(G) es finito) de elementos llamados vértices y E(G) es un conjunto finito (posiblemente vacío) de parejas de elementos dis distintos de V(D) llamados aristas.
Como ejemplo de gráficas tenemos las siguientes.

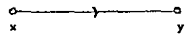


Definición 1.2. Una digráfica D consta es una pareja (V(D),E(D)) donde V(D) es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices y E(D) es un conjunto de parejas ordenadas de distintos vértices de D llamadas - flechas.

Los siguientes son ejemplos de digráficas.



Cuando se describe una digráfica por medio de un diagrama cada flecha es indicada de la siguiente manera.



Definición 1.3. El número de vértices de D será llamado el orden de D y será denotado por "p" y el número de aristas de D se denotaran por - "q" y será llamado el tamaño de D .

$p=|V(D)|$ y $q=|E(D)|$.

Observacion. Generalmente se denotará una flecha "a" como $a=xy$ donde x,y son elementos de V(D). De esta manera se dirá que - "a" es una flecha incidente de x a y. También se dice - que dos vértices "x","y" no son adyacentes si no hay -- una flecha $a=xy$ ó una flecha $b=yx$, donde x, y son llamados los extremos de xy ó de yx.

Definición 1.4. Dos flechas de D incidentes al mismo vértice serán llamadas flechas adyacentes.

Definición 1.5. Un conjunto independiente de vértices de D, es un conjunto de vértices tales que para cualesquiera dos elementos de ese conjunto no existe flecha que los conecte.

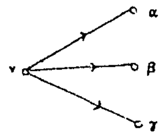
Definición 1.6. La vecindad exterior de un vértice x es el número de flechas que tienen como extremo inicial al vértice x, y será denotado por $\Gamma^+(x)$.

Definición 1.7. La vecindad interior de un vértice x es el número de - flechas que tienen como extremo final al vértice x, y será denotado -- por $\Gamma^-(x)$.

Definición 1.8. Un conjunto $S\subseteq V(D)$ se dice que es absorbente si todo vértice x que no está en S es el origen de una arista que tiene como extremo final a un elemento de S, es decir si

$x\notin S \Rightarrow S\cap\Gamma^+(x)\neq\emptyset$

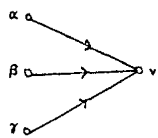
Definición 1.9. El grado exterior de un vértice v de una digráfica D es el número de vértices de D que son adyacentes de v.



(fig. 1)

y será denotado por $gr^{+}(v)$. Para la figura 1 $gr^{+}(v)=3$.

Definición 1.10. El ingrado de un vértice v es el número de vértices de D adyacentes a v y será denotado por $gr^{-}(v)$.



(fig.2)

Para el ejemplo $gr^{-}(v)=3$.

Definición 1.11. El grado de un vértice v para una digráfica D es definido como sigue:

$$gr(v)=gr^{+}(v)+gr^{-}(v)$$

TIPOS PARTICULARES DE DIGRAFICAS

Definición 2.1. Una digráfica D_1 es una subdigráfica de una digráfica D si $V(D_1)\subseteq V(D)$ y $E(D_1)\subseteq E(D)$.

Definición 2.2. Una subdigráfica D_1 de D es una subdigráfica generadora si D_1 tiene el mismo orden de D.

Definición 2.3. Si D es una digráfica no trivial y v es un elemento de los vértices de D, entonces la digráfica $D-\{v\}$ es aquella cuyo conjunto de vértices es $V(D)-\{v\}$ y cuyas flechas son todas las de D que tienen ambos extremos en $V(D)-\{v\}$.
Si a es un elemento de las flechas de D entonces $D-\{a\}$ es la subdigráfica con conjunto de vértices V(D) y con conjunto de flechas $E(D)-\{a\}$.

Definición 2.4. Si D es una digráfica tal que para x, $y \in V(D)$ xy no es flecha de D, entonces la digráfica $D \cup \{a\}$ donde $a=xy$, tiene a V(D) como conjunto de vértices y $E(D) \cup \{a\}$ como conjunto de flechas.

Definición 2.5. Si U es un subconjunto no vacío del conjunto de vértices de una digráfica D, entonces la subdigráfica de D inducida por U es aquella digráfica que tiene como conjunto de vértices U y cuyo conjunto de flechas consiste de todas las aristas de D que tienen ambos extremos en U .

Definición 2.6. Una digráfica D es simétrica si siempre que xy es una flecha de D, entonces también yx es una flecha de D.

Definición 2.7. Una digráfica D es completa si para cada pareja de vértices distintos x y y de D, al menos una de las flechas xy ó yx están en D.

Definición 2.8. Una digráfica D es llamada regular de grado "r" si

$gr^{+}(v)=gr^{-}(v)= r$ para todo vértice v de D.

Definición 2.9. Una digráfica D es bipartita si el conjunto de vértices de D puede ser partido en dos conjuntos ajenos no vacios $V_1(D)$ y $V_2(D)$ tales que $V(D)=V_1(D)\cup V_2(D)$ y donde para cada arista de D con $a=xy$, entonces "x" será un elemento de los vértices de $V_i(D)$ y "y" será un elemento de los vértices de $V_j(D)$, $i,j \in\{1,2\}$ con $i\neq j$.

Definición 2.10. Una digráfica D es transitiva si $\forall$ ($xy\in E(D)$, y $yz\in E(D)$ $\Rightarrow$ $xz\in E(D)$).

Definición 2.11. Una sucesión de aristas de la forma $\overrightarrow{v_0v_1}, \overrightarrow{v_1v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{r-1}v_r}$ (donde $v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r$ son vértices de D) es llamado un camino dirigido.
La longitud del camino será "r" y v_0 será llamado el vértice inicial del camino y v_r el vértice terminal.
Si estas aristas cumplen con que todas son distintas, entonces el camino es llamado un paseo dirigido y si los vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r$ son todos distintos, entonces el camino es llamado una trayectoria dirigida.

Definición 2.12. Dos trayectorias en una digráfica son llamadas ajenas por aristas si no tienen flechas en común y son llamadas ajenas en vértices si no tienen ningun vértice en común.

Definición 2.13. Un camino ó paseo se dice que es cerrado si $v_0=v_r$, y un camino cerrado en el que los vertices $v_0, v_1, \ldots, v_r$ son todos distintos excepto por $v_0=v_r$ (los cuales coinciden) es llamado un ciclo.

Definición 2.14. Si v y w son vértices de la digráfica D la longitud de una trayectoria más pequeña de v a w es llamada la distancia entre v y w y se denotará $d(v,w)$.
Si no hay trayectorias de v a w, $d(v,w)=\infty$.

Definición 2.15. Una digráfica D es debilmente conexa si para cada

$(x,y) \in V(D) \times V(D)$, existe en D una trayectoria dirigida de x a y ó una trayectoria dirigida de y a x.

Definición 2.16. Una digráfica es fuertemente conexa si para cada pareja de vértices x y y si existen trayectorias dirigidas en D de x a y y una trayectoria dirigida de x a y.

APLICACIONES

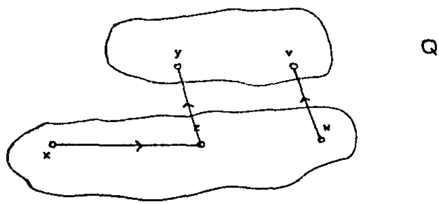
Definición 3.1. $Q \subset V(D)$ es un cuasinúcleo si:

i) $\forall\ x, y \in Q,\ xy \notin E(D)$ y $yx \notin E(D)$ (propiedad de independencia)

ii) $\forall\ x \notin Q\ \exists\ y \in Q$ tal que

ii1) $xy \in E(D)$ ó

ii2) $\exists\ z \in V(D) - Q,\ xz,\ zy \in E(D)$ (propiedad de cuasiabsorbencia)



Definición 3.2. $N \subset V(D)$ es un núcleo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\forall\ x,\ y \in N\ xy,\ yx \notin E(D)$ (se dice entonces que N es independiente)

ii) $\forall\ z \notin N\ \exists\ x \in N$ tal que $zx \in E(D)$ (se dice que el conjunto es absorbente)

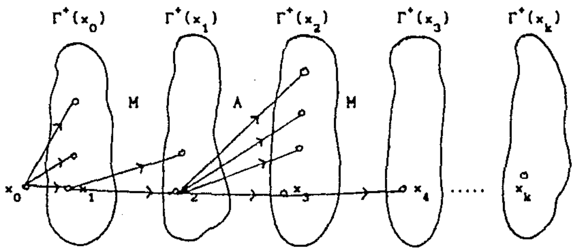
A continuación se daran ejemplos donde los núcleos y cuasinúcleos tienen aplicación práctica.

JUEGO DE NIM [1]

En este juego van á participar dos jugadores M y A. La posición de cada jugador será representado por un vértice y la dirección hacia donde se desplace por medio de una flecha. Para iniciar el juego se partirá de un vértice x_0.

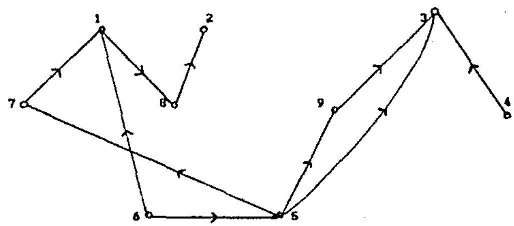
Fijémonos en $\Gamma^{+}(x_0)$. Suponiendo que este conjunto es distinto del vacío, es decir que por lo menos tiene un elemento, el jugador M escoje-

rá un vértice x_1 de este primer conjunto, A escojerá un segundo vértice x2 de los vecinos de x_1, M escojerá un tercer vértice x_3 de los vecinos de x_2, y asi sucesivamente hasta que para alguno de los dos jugadores el x_k que escoja cumpla con la propiedad de que los vecinos de x_k sea un conjunto vacio y entonces el juego se habrá acabado.
Gráficamente lo que tendremos será lo siguiente.



(fig.3)

El jugador que escoja el último vértice ganará .
Veamos que pasa en la siguiente digráfica.



(fig.4)

Para iniciar esta partida M y A escogerán quién comienza. Digamos que tenemos la siguiente situación:

Se inicia con el vértice 5 $\Gamma^{+}(5)=\{3,7,9\}$ *

M inicia el juego

si M escoge 7 $\Gamma^{+}(7)=\{1\}$

si A escoge 1 $\Gamma^{+}(1)=\{8\}$

si M escoge 8 $\Gamma^+(8)=\{2\}$ caso a)
si A escoge 2 $\Gamma^+(8)=\emptyset$

Por lo tanto A habría ganado.

-Si ahora M elige 9 en * se tendría lo siguiente:

si M elige 9 $\Gamma^+(9)=\{3\}$ caso b)
A escoge 3 $\Gamma^+(3)=\emptyset$

y A ganá.

-Si ahora M elige 3 en * se tendría lo siguiente:

si M elige 3 $\Gamma^+(3)=\emptyset$ caso c)

por lo tanto M ganaría.

-Supongamos que ahora se comienza en el vértice 6 $\Gamma^+(6)=\{1,5\}$ **

si M elige 1 $\Gamma^+(1)=\{8\}$
si A elige 8 $\Gamma^+(8)=\{2\}$ caso d)
M elige 2 $\Gamma^+(2)=\emptyset$

entonces M habría ganado.

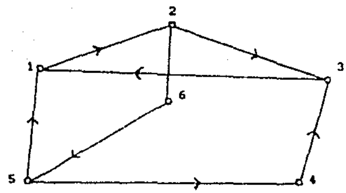
-Si ahora M elige 5 de ** se tendría que:

si M elige 5 $\Gamma^+(5)=\{3,7,9\}$ caso e)

que ser a la misma situación que en el caso a), por lo tanto, A ganaría.

Para este juego hay algún ganador.

Consideremos la siguiente digráfica.



(fig.5)

-Digamos que se inicia con el vértice 6 $\Gamma^{+}(6)=\{2,5\}$
A inicia el juego.

A elige 2	$\Gamma^{+}(2)=\{3\}$		
M elige 3	$\Gamma^{+}(3)=\{1\}$		
A elige 1	$\Gamma^{+}(1)=\{2\}$	caso a1)
M elige 2	$\Gamma^{+}(2)=\{3\}$	
A elige 3	$\Gamma^{+}(3)=\{1\}$	

.
.
.

y podrían seguir jugando por tiempo indefinido sin que ninguno de los dos jugadores ganara.
Si nuevamente se parte del vértice 6 pero ahora A elige el vértice 5, entonces:

si	A elige 5	$\Gamma^{+}(5)=\{1,4\}$	
	M elige 1	$\Gamma^{+}(1)=\{2\}$	
	A elige 2	$\Gamma^{+}(2)=\{3\}$	caso a2)
	M elige 3	$\Gamma^{+}(3)=\{1\}$	
	A elige 1	$\Gamma^{+}(1)=\{2\}$	

.
.
.

y tampoco terminaría el juego. Si continuáramos haciendo más intentos terminaríamos por darnos cuenta de que nunca se acabaría este juego.
En este caso se ha visto que no hay solución para esta digráfica, sin

embargo ésto no sucede siempre (se acaba de ver lo contrario en la -- (fig.4)).

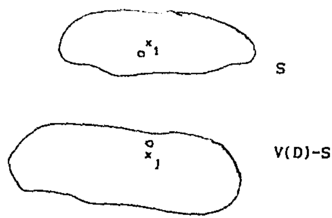
De los ejemplos anteriores se concluye que la estrategia que se debe de emplear para poder ganar consiste en localizar ciertos vértices de un subconjunto muy particular S con S⊂V(D) tal que satisfaga las si -- guientes condiciones:

i) que para todos dos vértices x, y de S xy y yx no sean aristas de - la digráfica.

ii) que para todo vértice z que se encuentre en el complemento de S, exista un vértice $y \in S$ tal que zy sea una arista de la digráfica.

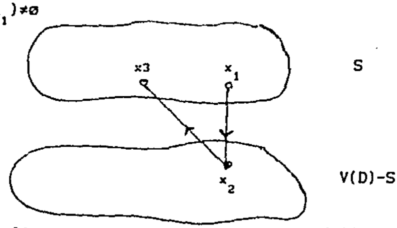
De esta manera si el jugador M elige un vértice x_1 de S entonces pue - den darse dos casos:

a) $\Gamma^+(x_1)=\emptyset$



es decir que no existe arista de x_1 a x_j cualquier otro vértice del complemento de S en cuyo caso M gana.

b) $\Gamma^+(x_1)\neq\emptyset$



Esto implica que existe por lo menos un vértice x_2 elemento del com - plemento de S el cual tiene la propiedad de que existe una flecha $\overrightarrow{x_1x_2}$

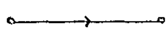
En este caso A tendria que elegir al vértice x_2 (pudiendo existir más de un vértice) y como M tiene que elegir un elemento de los vecinos de x_2, este podria elegir aquel vértice que tiene como extremo a un vértice x_3 que se encuentra en S y nuevamente se dan dos casos:

- si $\Gamma^+(x_3)=\emptyset$ M ya ganó .
- si $\Gamma^+(x_3)\neq\emptyset$ se vuelve a repetir este proceso y como la digráfica es finita esto nos garantizar que si el juego termina entonces M será el ganador.

Podemos observar que una notable diferencia entre las dos digráficas vistas anteriormente consiste en que la (fig.5) contiene ciclos y los vértices que se tomaron como punto de partida caen en alguno de ellos ocasionando que el juego se prolongue indefinidamente, mientras que la digráfica de la (fig.4) no contiene ciclos dirigidos y por esa razón - existe una garantia de que alguno de los jugadores ganará. Entonces la estrategia que se propone consiste en que una vez que el jugador M tenga la oportunidad de elegir un vértice, considere aquel que sea un elemento de S⊂V(D) siempre y cuando tal conjunto verifique las propiedades antes descritas.
Más adelante se verá que cuando una digráfica no posee circuitos siempre habrá un ganador, porque siempre existirá un núcleo.

PROPOSICIONES DE UNA TEORIA [1]

Consideremos una teoria, es decir, un conjunto de proposiciones que la forman, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ .A esta teoria se le asociará una digráfica de la siguiente manera:
Por cada proposición p_i tomaremos un vértice x_i y se dirá que dos vértices x_i y x_{i+1} son adyacentes si la proposición p_i puede deducirse -- logicamente de la proposición p_{i+1}.



x_i x_{i+1}

De esta manera si p_i puede deducirse logicamente de p_{i+1} y a su vez -- p_{i+1} puede deducirse logicamente de p_{i+2} , entonces p_i podrá deducirse logicamente de p_{i+2}, equivalentemente:

si $\begin{tikzcd} x_i \arrow[r] & x_{i+1} \arrow[r] & x_{i+2} \end{tikzcd}$ entonces $\begin{tikzcd} x_i \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & x_{i+1} \arrow[r] & x_{i+2} \end{tikzcd}$

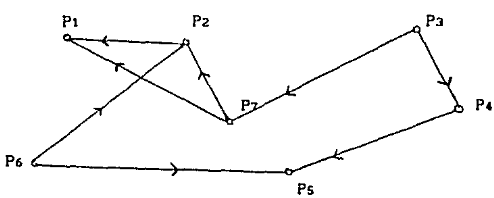
En otras palabras la digráfica resulta ser transitiva y más adelante se verá que toda digráfica transitiva posee un subconjunto muy especial de vértices que verificará dos condiciones, que traducidas al contexto presente son:

1) Toda proposición de una teoría puede deducirse de los axiomas.
2) Ningún axioma puede deducirse de otro axioma.

Dicho conjunto se llamará una base de axiomas.
Por lo tanto una base de axiomas forman un conjunto independiente tal que cualquier proposición puede deducirse lógicamente de un axioma.

RUTAS DE UNA LINEA AEREA

La siguiente digráfica D representará el mapa de las rutas de una pequeña línea aérea que da servicio a siete ciudades $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ y P_7. Se representa las ciudades por vértices y se dirá que una flecha va de P_i a P_j si el vuelo inicia en la ciudad P_i y tiene como destino la ciudad P_j y por lo tanto tiene sentido hablar de la digráfica asociada a esos vuelos.



En esta representación las ciudades P_7 y P_5 tienen la propiedad de que no hay un vuelo directo entre ellas y que para el resto de las ciuda - des tienen un vuelo que se inicia en ellas y que termina en P_7 ó en P_5 en un solo viaje, o bien emplean a otra ciudad como paso para poder -- llegar a P_7 ó a P_5.

Se puede garantizar que siempre existirá un subconjunto *U* que cumpla - las condiciones que acontinuación se dan:

i) *U* es un conjunto independiente de ciudades(para cualesquera dos ciu des P_i y P_j de *U* no existe un vuelo de P_i a P_j de P_j a P_i).

ii) Para cualquier ciudad P_r elemento de $V(D)-U$ existe una ciudad P_s - elemento de *U* para la cual existe un vuelo directo de P_r a P_s bien, existe otra ciudad P_t que está en $V(D)-U$ que satisface que hay un vue- lo de P_r a P_t y de P_t a P_s $V(D)-U$.

RELACIONES DE UNA FAMILIA

Una familia ests formada por el padre, la madre una hija y dos hijos. El dominio que cada uno de los miembros de la familia ejerce sobre los -- otros se describe a continuación.

La madre sobre la hija y el hijo mayor, el padre sobre los dos hijos, la hija sobre el padre, el hijo mayor sobre el hijo menor y el hijo - menor sobre la madre.

Un modelo del patrón de dominio en esta familia se obtiene con una di- gráfica cuyos vértices son los cinco miembros de la familia. Si el -- miembro A domina al miembro B se describirá como:

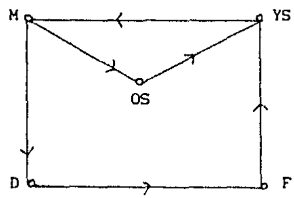
$$A \longrightarrow B$$

donde a cada miembro de la familia se representará de la siguiente ma- nera:

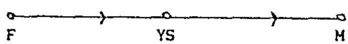
M = madre

F = padre
D = hija
OS = hijo mayor
YS = hijo menor

y dicha situación de deminio se representará por medio de una digráfica:



El diagrama muestra que el padre no domina a la madre. Sin embargo, domina al hijo menor, quien a su vez domina a la madre.



Se afirma que en la familia siempre habrá por lo menos un individuo - al cual todos los miembros de la familia podrán dominar directamente (es decir que no tienen que recurrir a otro integrante de la familia) o de manera indirecta(es decir que necesitan recurrir a otro miembro de la familia), y en caso de existir un conjunto con más de un individuo que cumpla tal condición entre ellos no podrán dominarse.

TEOREMAS Y PROPOSICIONES AUXILIARES

PROPOSICION 4.1. Si S es un núcleo, entonces S es un conjunto independiente máximo* y un conjunto absorbente mínimo.

Dem.

Sea S un núcleo de una digráfica $D=(V(D).E(D))$. Si $x\notin S$, el conjunto $S\cup\{x\}$ no puede ser independiente porque $\Gamma(x)\cap S\neq\emptyset$. Si $y\in S$, el conjunto $T=S-\{y\}$ no puede ser absorbente porque $y\notin T$ y $\Gamma(y)\cap T=\emptyset$.

TEOREMA 4.2. Si $D=(V,E)$ es una digráfica simétrica, entonces D tiene un núcleo. Más aún, un conjunto $S\subset V(D)$ es un núcleo, si y sólo si, S es un conjunto independiente máximo.

Dem.

Obviamente, un conjunto independiente máximo S de la digráfica D es absorbente, de otra manera, existiría un vértice $x\notin S$ no adyacente a S, lo cual resulta ser una contradicción. Entonces S es un núcleo.

Inversamente, si S es un núcleo de una digráfica simétrica D, entonces S es un conjunto independiente máximo(porque, de otra manera, S no sería absorbente).

Notacion. $\mathcal{A}$ es la familia de todos los conjuntos absorbentes de una digrafica.

A es un conjunto absorbente.

TEOREMA 4.3. Si $D=(V,E)$ es una digráfica transitiva, entonces posee un núcleo.

Dem.

Sea D una digráfica transitiva.

Fijémonos en las componentes fuertemente conexas de D. Si C es una componente tal que no salen flechas de C, se llamará una componente terminal.

Como la digráfica obtenida de D al contraer cada una de las

---

* Sea $(X,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado decimos que $a\in X$ es un elemento máximo si:

$$a\leq x\ ,\ x\in X \Rightarrow a=x$$

Dualmente, $b\in X$ es un elemento mínimo si:
$y\leq b\ ,\ y\in X \Rightarrow y=b.$

componentes fuertemente conexas no contiene ciclos, D tiene componentes terminales. Digamos que tales componentes son: $C_1, C_2, \ldots, C_r$.

- Si A es un conjunto absorbente mínimo, A contiene al menos un vértice de cada componente. Si no fuera así, $A \cap C_i = \emptyset$ y cada $x \in C_i$ cumple que

  $$x \notin A \ , \qquad \Gamma^{+}(x) \cap A = \emptyset$$

  que contradice la suposición de que A es absorbente.

  Sea $a_i \in A \cap C_i$ para cada i. Fijémonos en el conjunto

  $$A' = a_1, a_2, \ldots, a_r$$

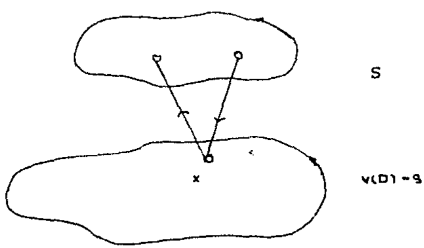
  A' es un conjunto absorbente y también es un conjunto independiente.

COROLARIO 4.4. Una digráfica transitiva tiene un núcleo, y todos sus núcleos tienen la misma cardinalidad.

<u>*Definición* 4.1.</u> Sea $D=(V(D),E(D))$ una digráfica. Diremos que $S \subseteq V(D)$ es un seminúcleo de D, si:

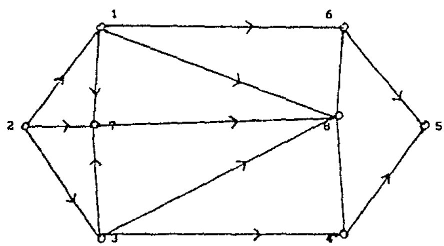
1) S es independiente
2) Para cada flecha f que va de S a x $(x \in V(D)-S)$, existe una flecha f' que va de x a S.

De la definición se obtiene que claramente $\emptyset$ es un seminúcleo.
Gráficamente esto se representa de la siguiente manera.



.En el tema de aplicaciones se definió núcleo y cuasinúcleo, ahora se demostrará que toda digráfica posee al menos un cuasinúcleo.

Por ejemplo para la siguiente digráfica un cuasinúcleo es {5,7}.



TEOREMA 5.1Toda digráfica admite un cuasinúcleo. [2]

Dem.

La demostración se hará por inducción sobre el número de -- vértices.

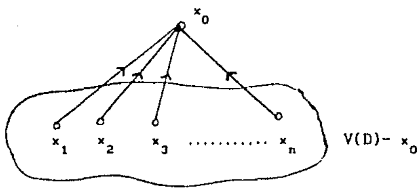
- Para digráficas de orden 1, 2 3 el resultado es inmediato.

- Supongamos que para digráficas con menos de n vértices se cumple tal afirmación.

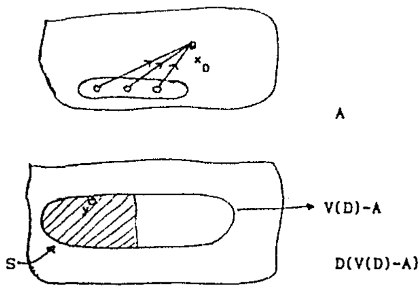
- Tomemos una digráfica con n vértices, por demostrar que tal digráfica tiene un cuasinúcleo.

Sea $x_0 \in V(D)$ y sea $A=\{x \in V(D) | x=x_0$ ó $x_0 \in \Gamma^+(x)\}$, entonces tenemos dos casos:

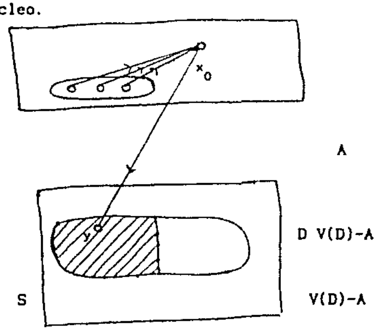
a) Si $A=V(D)$, entonces la digráfica D tiene al vértice x_0 como cuasinúcleo.



b) Si $A \neq V(D)$, entonces la subdigráfica generada por V(D)-A es no vacia y por hipótesis de inducción posee un cuasinú -- cleo S.



- Si existe una flecha x_0y, con $y \in S$, entonces S en un cua̲ sinúcleo.



- Si x_0 no es adyacente a ningún elemento de S, entonces $S\cup\{x_0\}$ es un cuasinúcleo de D. ///

COROLARIO 5.2. (Teorema de Tournois).

Si D=(V(D),E(D)) es completa, existe un punto x_0 tal que para todo vértice x existe un camino de longitud menor ó igual que dos de x a x_0.

Dem.

Por el teorema anterior sea S el cuasinúcleo de la digráfica. Como S es independiente y D es completa entonces $|S|=1$ y el vértice que nos sirve es precisamente el que esta en S . ///

LEMA 5.3. Sea S un seminúcleo de D, $B=\{v\in V(D)\,|\,$no existe flecha de v a $S\}$ y S_1 un seminúcleo de D[B]. Entonces $S\cup S_1$ es un seminúcleo de D. [5]

Dem.

Sea f una flecha de u a v. Consideremos los siguientes casos

i) $u\in S$, $v\in S$

ii) $u\in S_1$, $v\in S_1$

iii) $u\in S_1$, $v\in S$

iv) $u\in S$, $v\in S_1$

i) y ii) no pueden cumplirse por ser S y S_1 independientes iii) es imposible ya que $S_1\subseteq B$. Si iv) se cumpliera existiría otra flecha de S_1 a S, por ser S seminúcleo, lo cual contradice iii). Luego $S\cup S_1$ es independiente, pongamos

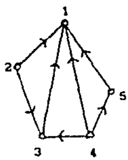
Sean $A=V-(S\cup B)$ y f una flecha de $S\cup S_1$ a x.

-si $x\in A$ obviamente existe una flecha de x a S y por consiguiente a $S\cup S_1$.

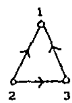
-si $x\notin A$, f necesariamente sale de S_1 y llega a $B-S_1$ y por ser S_1 seminúcleo de D B , existe f_1 de x a S_1 y por consiguiente a $S\cup S_1$. ///

Ya se ha definido el concepto de núcleo, ahora se verán algunas condiciones para que una digráfica tenga un núcleo.

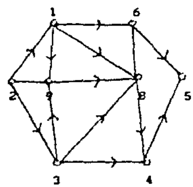
Fijémonos en las siguientes digráficas



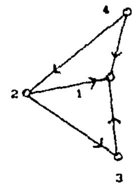
(fig.1)
{1}es núcleo



(fig.2)
{1}es núcleo



(fig.3)
no tiene núcleo

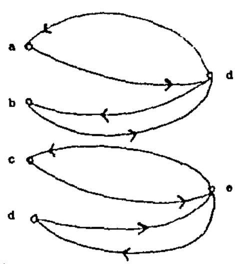


(fig.4)
{1}es el núcleo

Como podemos observar en las digráficas anteriores algunas de ellas - podrán tener un núcleo, varios núcleos ó ningún núcleo.

Definición 5.1. Se dice que D=(V(D),E(D)) es una R-digráfica, si toda subdigráfica inducida de D posee un seminúcleo no vacio.

Por ejemplo la siguiente digráfica es R-digráfica.

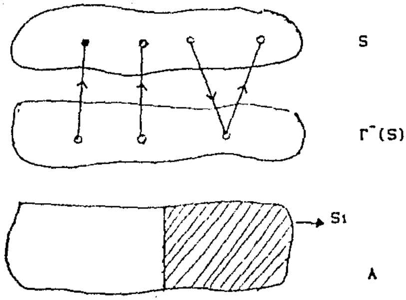


TEOREMA 5.4. Toda R-digráfica posee al menos un núcleo.

Dem.

Sea D una R-digráfica y S un seminúcleo máximo de D. Consideremos el siguiente conjunto.

$$A=\{ V(D)-(S\cup\Gamma^{-}(S)) \}$$



- si $A=\emptyset \Rightarrow V(D)=S\cup\Gamma^{-}(S)$ esto implica que S es un núcleo.
- si $A\neq\emptyset$ por hipótesis $D[A]$ tiene un seminúcleo $S_1\neq\emptyset$, entonces $S \cup S_1$ por el **LEMA** 1 es un seminúcleo de D que contiene propiamente a S, lo cual es una contradicción, por lo tanto $A=\emptyset$. ∎

TEOREMA 5.5. Si D es finita y no posee ciclos impares, entonces D contiene un seminúcleo. [5]

Dem.

A continuación se definirá en V(D) las relaciones $\perp$ y $\succ$ de la siguiente manera:

a) $v_1 \succ v \Leftrightarrow$ existe en D un camino dirigido de v a v_1

b) $v \perp v_1 \Leftrightarrow v \succ v_1$ y $v_1 \succ v$.

Donde $\succ$ es una relación binaria transitiva y reflexiva (un preorden) y $\perp$ es una relación de equivalencia.

Sea $m_0 \in V(D)$ un elemento mínimo con respecto a $\succ$ y (es decir, tal que $m \succ m_0$ implique $m \perp m_0$) y

$M=\{m\in V(D) \mid m \perp m_0 \}$

Si se toma $S=\{m\in M \mid$ existe un camino de longitud par de m_0 a $m\}$

$I=\{m\in M \mid$ existe un camino de longitud impar de m_0

a $\ast$)

se tiene:

i) $\ast_0 \in S$

ii) $S \cap I = \emptyset$, en caso contrario existiría $\ast \in S \cap I$, para el cual habría un camino de $\ast_0$ a $\ast$ de longitud par y otro de longitud impar y además otro de $\ast$ a $\ast_0$ por -- ser $\ast_0 \perp \ast$. Por tanto existiría en D un camino cerrado de longitud impar y, por lo tanto, un ciclo impar, lo que contradice la hipótesis.

Entonces todas las flechas de D que salen de elementos de S llegan a I y de cada vértice de I sale alguna flecha -- hacia S. Por lo tanto S es un seminúcleo.

COROLARIO 5.6.(Teorema de Richardson). Si D es finita y no posee ci - clos de longitud impar, entonces D es R-digráfica y, por -- conguiente, posee un núcleo.

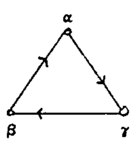
TEOREMA 5.7.Las digráficas bipartitas son R-digráficas.[5]

Dem.

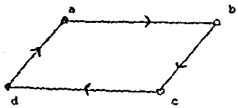
Puesto que toda subdigráfica de una digráfica bipartita es - bipartita, bastará con probar que cada digráfica bipartita - contiene al menos un seminúcleo no vacío.

Si existe algún vértice v del cual no salen flechas, {v} es un seminúcleo. Si no se tiene el caso anterior, sea (V_1,V_2) una partición de V(D) en conjuntos independientes ajenos. V_1 y V_2 resultan ser núcleos de D.

Fijémonos en los siguientes ejemplos:



Esta digráfica tiene un ciclo de longitud impar, por lo tanto, no tiene núcleos .



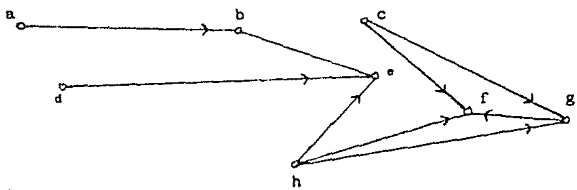
Esta digráfica contiene dos núcleos.

DEBILIDAD DE CUASINUCLEOS

Definición 6.1. La debilidad de un cuasinúcleo Q en D(V,E) se define como la cardinalidad del conjunto de elementos x de V(D)-Q para los cuales no existe $y \in Q$ tal que xy sea una flecha de la digráfica.

$f_D(Q) = |\{x \in V(D)-Q \mid \text{no existe } y \in Q \text{ tal que } xy \text{ sea una flecha de } D\}|$.

Por ejemplo en la siguiente digráfica



Para el cuasinúcleo $Q=\{e,f\}$, $f_D(Q)=1$

Observacion. $f_D(Q)=0 \Leftrightarrow Q$ **es un nucleo.**

Dem.

$\Rightarrow$)

si $f_D(Q)=0 \Rightarrow$ **no existe** $x \in X-Q$ **para el cual no exista** y **tal que** $xy \in E(D)$ $\therefore$ **Q es un nucleo.**

$\Leftarrow$)

si Q es un nucleo entonces todos los $x \in X-Q$ **estan conectados con un** $y \in Q$**, es decir** $f_D(Q)=0$

Definición 6.2. Una tripleta (x,y,z) con $x, y, z \in V(D)$ es no transitiva si $xy \in E(D)$, $yz \in E(D)$ pero xz no es una flecha de D.

Definición 6.3. Un triángulo intransitivo es una tripleta de vértices x, y, z, tales que $xy \in E(D)$, $yz \in E(D)$, $zx \in E(D)$ pero $yx \notin E(D)$, $zy \notin E(D)$, $xz \notin E(D)$, tal triángulo contiene tres tripletas no transitivas: $(x,y,z), (y,z,x)$, y (z,x,y).

Definición 6.4. El grado interior para $x\in V(D)$ ($d^{-}(x)$) es la cardinalidad del siguiente conjunto.

$d^{-}(x)=|\{y|yx\in E(D)\}|$

TEOREMA 6.1. Si Q es un cuasinúcleo de debilidad mínima para D y si p es el número de tripletas no transitivas contenidas en D - entonces $f_D(Q) \leq \left[\frac{p}{3}\right]$. [6]

Dem.

La demostración se hará por inducción sobre el número de -- vértices de D.

- Para cuando $|V(D)|=1$ el resultado es inmediato.

- Supongamos que el resultado se cumple para toda digráfica que tienen menos de n vértices.

- Sea $D=(V(D),E(D))$ una digráfica con n vértices y con p tripletas no transitivas.

A continuación tendremos dos casos.

a) Supongamos que existiera un $x\in V(D)$ tal que no hay una tripleta no transitiva de la cual x es el vértice tármi- nal, es decir que x es el último en ser recorrido. Consideremos $(V(D)-\{x\})$ y la subdigráfica generada por - tales vértices, digamos que tal digráfica es D_x. Sea Q_1 un cuasinúcleo de D_x el cual lo podemos tomar de debilidad mínima.

Por hipótesis de inducción, para D_x se cumple

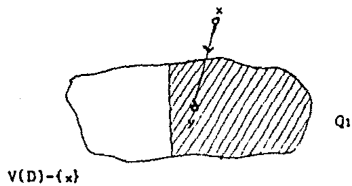
$$f_D(Q_1)\leq\left[\frac{p_1}{3}\right]$$

donde p_1 es en número de tripletas no transitivas en $V(D)-\{x\}$

Ahora tendremos tres subcasos.

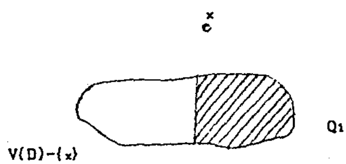
1₁) Digamos que $\exists y \in Q_1$ tal que $xy \in E(D)$, entonces Q_1 re - sultar a ser un cuasinúcleo de D y por lo tanto

$$f_D(Q_1)=f_{D_x}(Q_1) \leq \left[\frac{p_1}{3}\right] \leq \left[\frac{p}{3}\right]$$



1₂) Supongamos que no existe $y \in Q_1$ tal que $xy \in E(D)$ $yx \in E(D)$, en este caso tomemos $Q_1 \cup \{x\}$ como cuasinú - cleo de D y por lo tanto

$$f_D(Q_1 \cup \{x\}) \leq f_{D_x}(Q_1) \leq \left[\frac{p_1}{3}\right] \leq \left[\frac{p}{3}\right]$$



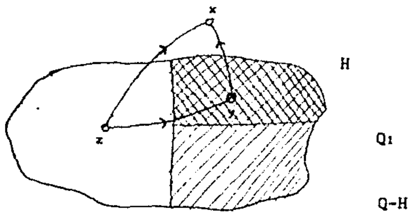
1₃) Si ahora no se tiene ni 1₁) ni 1₂), fijémonos en el siguiente conjunto.

$$H=\{y \in Q_1 \mid yx \in E(D)\}$$

Como el vértice x cumple la condición de que no hay una tripleta no transitiva de la cual x sea vértice terminal, se tiene que

$\forall y\in H,\ zy\in E(D)\ \Rightarrow\ zx\in E(D)$ y tomando $(Q_1-H)\cup\{x\}$ este conjunto resulta ser un cuasinúcleo de D y

$$f_D[(Q_1-H)\cup\{x\}] \le f_{D_x}(Q_1) \le \left[\frac{p1}{3}\right] \le \left[\frac{p}{3}\right]$$



b) Supongamos ahora que $\forall x\in V(D)$, x es el vértice términal - de una tripleta no transitiva .
Consideremos un cuasinúcleo Q de la digráfica y tomemos

$D\sim=\{y\in V(D)-Q\,|\,\exists z\in Q,\ yz\in E(D)\}$

Fijemonos en $A=V(D)-(Q\cup D\sim)$ y sea Q_1 un cuasinúcleo de debilidad minima para $D_A(V(D).E(D))$.
Consideremos ahora los siguientes conjuntos.

$E=\{y\in Q\,|\,\exists z\in Q_1,\ yz\in E(D)\}$

$F=\{y\in D\sim\,|\,\exists z\in(Q-E)\cup Q_1,\ yz\in E(D)$

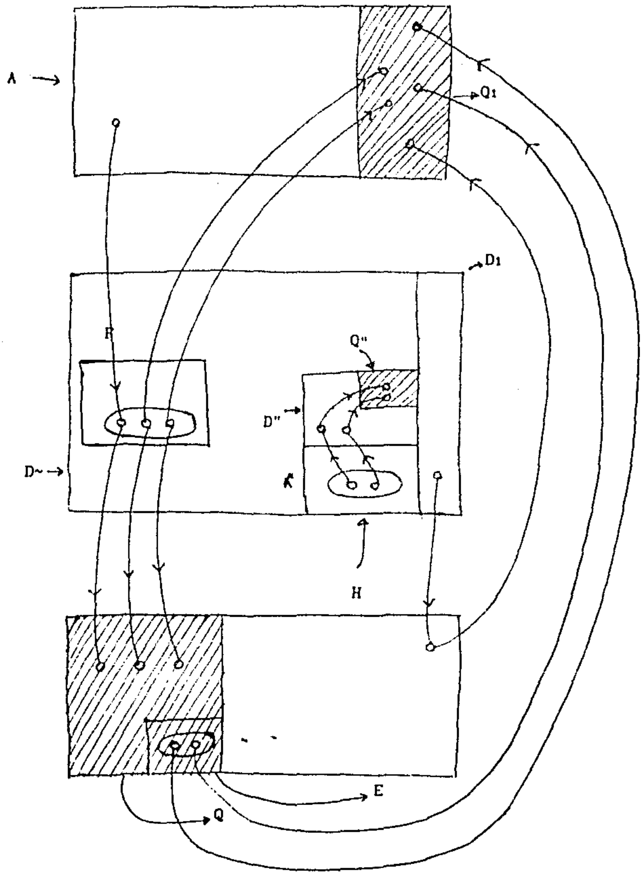
$H=\{y\in D\sim\,|$no existe $z\in(Q-E)\cup Q_1,\ yz\in E(D)$ ó $zy\in E(D)\}$

Q''cuasinúcleo de $G_H(V(D),E(D))$

$D''=\{y\in H-Q''\,|\,\exists z\in Q'',\ yz\in E(D)\}$

$A'' = H - (Q'' \cup D'')$

$D_1 = D^{\sim} - (F \cup H)$



Fijémonos en el siguiente conjunto de vértices.

$Q^{\wedge}=(Q-E)\cup Q_1\cup Q''$ este conjunto resulta ser un cuasinúcleo de D.

Para $f_D(Q^{\wedge})$ tenemos que

$f_D(Q^{\wedge}) \leq f_A(Q_1)+|A''|+|D_1|$ puesto que A" y D_1 contribuyen a la debilidad del cuasinúcleo, y donde $f_A(Q_1)$ es la debilidad de Q_1 en la subdigráfica de D generada por A.

Por hipótesis de inducción, para $D_A(x,y)$

$$f_A(Q_1)\leq \left[\frac{p_1}{3}\right] \leq \left[\frac{p}{3}\right] \leq \left[\frac{t}{3}\right]$$

con p_1= número de tripletas no transitivas en D_A

t= número de tripletas no transitivas que tienen al menos un vértice fuera de A

El teorema ya habrá sido probado si comprobamos que $t\geq 3(|A''|+|D_1|)$, puesto que si esto se cumple entonces

$$\frac{t}{3}\geq(|A''|+|D_1|) \qquad \therefore \qquad \left[|A''|+|D_1|\right] \leq \left[\frac{t}{3}\right]$$

$$\therefore\ f_D(Q^{\wedge}) \leq \left[\frac{p}{3}\right] - \left[\frac{t}{3}\right] + \left[\frac{t}{3}\right] \quad \therefore\ f_D(Q^{\wedge}) \leq \left[\frac{p}{3}\right]$$

Para ello veremos que para $x\in A''\cup D_1$, x está en al menos tres tripletas no transitivas.

Sea $x\in A''\cup D_1 \Rightarrow$

i) si $x\in A''$, $\exists\ y_1\in D''$ y $z_1\in Q''$ tal que $xy_1\in E(D)$, $y_1z_1\in E(D)$ y $xz_1\notin E(D)$, ademas $\exists\ y_2\in E$ y $z_2\in Q_1$ tal que $xy_2\in E(D)$ $x_2y_2\in E(D)$ y $xz_2\notin E(D)$.

$\therefore$ x es el vértice terminal de una tripleta no transitiva (y_3,z_3,x) (esto es por hipótesis) y podemos tomar

(x,y_1,z_1), (x,y_2,z_2) y (y_3,z_3,x)

ii) si $y\in D_1$, $\exists\ y_4\in E$ y $z_4\in Q_1$ tal que $yy_4\in E(D)$, $y_4z_4\in E(D)$ y $yz_4\notin E(D)$. También $\exists\ y_5\in(Q-E)\cup Q_1$ tal que $y_5y\in E(D)$ y

$y_5 y_4 \notin E(D)$, y es el vértice terminal de una tripleta no transitiva (y_6, z_6, y) y podemos tomar $(y, y_4, z_4), (y_5, y, y_4)$ y (y_6, z_6, y) son las tres tripletas asociadas a x. Tales tripletas son distintas por la manera en que se eligieron.

Ahora $\forall$ p existe una digráfica D tal que si Q es un cuasinúcleo de debilidad mínima de, se tiene:

$$f_D(Q) \leq \left[\frac{p}{3}\right]$$

Donde la digráfica está compuesta de $\left[\frac{p}{3}\right]$ triángulos intransitivos aislados y de $p - 3\left[\frac{p}{3}\right]$ tripletas no transitivas aisladas. $_{m}$

Observacion. Si una digrafica contiene 0,1 o 2 tripletas no transitivas, entonces esta tiene un nucleo.

TEOREMA 6.2. Si Q y Q1 son cuasinúcleos de $D=(V(D),E(D))$ y $Q \subseteq Q_1$, entonces $f_D(Q_1) < f_D(Q)$. [6]

Dem.

Si $Q = Q_1$ tenemos que $f_D(Q_1) = f_D(Q)$. Si no, tomemos $z \in Q_1 - Q$ entonces se tiene que no existe $y \in Q$ tal que $zy \in E(D)$. Como Q_1 es independiente se se tiene que

$$z \in x \notin Q \mid \exists\ y \in Q, . xy \in E(D) \quad \subset \quad x \notin Q_1 \mid \exists\ y \in Q_1,\ xy \in E(D)$$

$$\therefore\ f_D(Q_1) < f_D(Q)\ _{m}$$

TEOREMA 6.3. Si Q es un cuasinúcleo de debilidad mínima, entonces Q es un conjunto independiente máximo. [6]

Dem.

Supongamos que Q no es un conjunto independiente máximo, en-

tonces existe un subconjunto independiente S tal que $Q\subseteq S$. Por hipótesis Q es cuasiabsorbente por lo tanto S también lo será y como S es también independiente, entonces S es un cuasinúcleo y por el teorema anterior se tiene que
$f_D(S)<f_D(Q)$ lo cual es una contradicción.

$\therefore$ Q es un conjunto independiente máximo. ∎

TEOREMA 6.4. En una digráfica completa, un vértice de grado interior máximo es un cuasinúcleo de debilidad mínima. [6]

Dem.

Tomemos el vértice x para el cual $d^-(x)=\max\{d^-(y),\ y\in V(D)\}$

Se demostrará que $\{x\}$ es cuasiabsorbente.

Supongamos que no lo es, entonces $\exists\ y\in V(D)$ tal que $yx\notin E(D)$ y no existe $z\in V(D)$ para el cual $yz\in E(D)$ y $zx\in E(D)$

$\therefore\ \forall\ z\in V(D),\ zx\in E(D) \Rightarrow yz\notin E(D) \Rightarrow zy\in E(D)$

$\therefore\ d^-(y) \leq d^-(x)$

por otra parte $yx\notin E(D) \Rightarrow xy\in E(D)$

$\therefore\ d^-(y)>d^-(x)$ que es una contradicción $\therefore$ x es un cuasinúcleo. Falta ver que $\{x\}$ es de debilidad mínima, para ello tomemos y cuasinúcleo, entonces

$$f_D(\ x\ )=|V(D)| - 1+d^-(x) \leq |V(D)| - 1+d^-(y) = f_D(\ y\ ).$$ ∎

Definición 6.5. Se dice que una digráfica es progresivamente finita si ningún vértice es el origen de un camino infinito.

Definición 6.6. Cuando todo vértice de una digráfica tiene un número finito de sucesores, se dice que la digráfica es localmente finita a la derecha.

Definición 6.7. Cuando todo vértice tiene un número finito de predecesores, se dice que la digráfica es localmente finita a la izquierda.

Definición. 6.8. La función característica $\phi_s(x)$ de un conjunto S es definida como:

$$\phi_s(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in S \\ 0 & \text{si} \quad x\notin S \end{cases}$$

PROPOSICION 6.5. Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $S\subset V(D)$ sea un núcleo de la digráfica es que su función característica verifique la siguiente condición.

$$\phi_s(x)=1-\max_{y\in\Gamma^+(x)}\phi_s(y)$$

Dem.

Si $\Gamma^+(x)=\emptyset$, se define

$$\max_{y\in\Gamma^+(x)}\phi_s(y)=0$$

Sea S un núcleo. Como S es independiente, entonces se tiene

$$\phi_s(x)=1 \Rightarrow x\in S \Rightarrow \max_{y\in\Gamma^+(x)=0}\phi_s(y)=0$$

Por ser S absorbente, se tiene

$$\phi_s(x)=0 \Rightarrow x\notin S \Rightarrow \max_{y\in\Gamma^+(x)}\phi_s(y)=1$$

Por lo tanto su función característica verifica la con - condición antes mencionada.

Sea $\phi_s(x)$ la función característica de el conjunto S que satisface la condición, entonces:

$$x \in S \Rightarrow \phi_s(x)=1 \Rightarrow \max_{y \in \Gamma^+(x)} \phi_s(y)=0 \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap S=\emptyset$$

$$x \notin S \Rightarrow \phi_s(x)=0 \Rightarrow \max_{y \in \Gamma^+(x)} \phi_s(y)=1 \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap S\neq\emptyset .$$

Por lo tanto S es un núcleo. $\mathcal{M}$

TEOREMA 6.6. Toda digráfica sin ciclos posee un núcleo, y su núcleo es único.

Dem.

Consideremos los siguientes conjuntos

$X(0)=\{x \mid x \in V(D),\ \Gamma^+(x)=\emptyset\}$

$X(1)=\{x \mid x \notin X(0),\ \Gamma^+(x) \subset X(0)\}$

$X(2)=\{x \mid x \notin X(0) \cup X(1),\ \Gamma^+(x) \subset X(0) \cup X(1)\}$

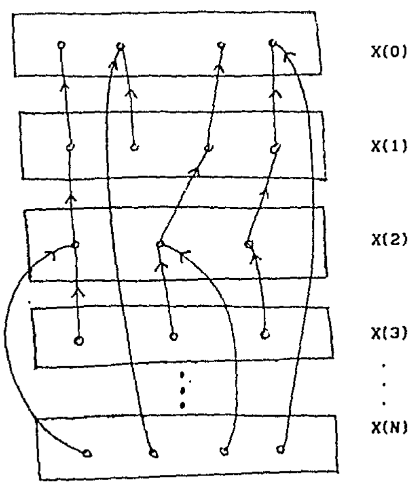
$X(3)=\{x \mid x \notin X(0) \cup X(1) \cup X(2),\ \Gamma^+(x) \subset X(0) \cup X(1) \cup X(2)\}$

.

.

$X(N)=\{x \mid x \notin X(0) \cup X(1) \cup .. \cup X(n-1),\ \Gamma^+(x) \subset X(0) \cup X(1) \cup .. \cup X(n-1)\}$

Gráficamente tenemos lo siguiente:



Estos conjuntos cumplen con la propiedad de ser ajenos dos a dos y que $x \in X(k) \Rightarrow$ la longitud de la mayor trayectoria des- de x tendrá longitud k , pero como hipótesis D no tiene ci - clos entonces X(k) para K=1, 2,......, n forman una partición de V(D). Entonces el núcleo será

$$S = X(0) \cup X(2) \cup X(4) \cup \ldots \cup X(i)$$
$$\text{con } i \in \mathbb{Z}_2$$

Una función característica ϕ_s de un núcleo S puede ser defi- nida sucesivamente sobre cada uno de los conjuntos X(0),X(1) X(2),...., X(n) de acuerdo a la proposición 2 .
Demostraremos que hay una única función

$$\phi_s : \cup X(i) \longrightarrow 0,1$$

tal que $\phi_s(x) = 1 - \max\limits_{y \in \Gamma^+(x)} \phi_s(y)$

Esta función es la función característica de
$S \subseteq \cup X(i)$, por la proposición 2 S será el núcleo de D .
Para definir ϕ_s, basta definir

$\phi_s|_{X(i)}$ dado que X(i) es una familia ajena de sub - conjuntos.

Definimos $\phi_s|_{X(i)}$ $\forall\ i \in N$, por inducción.

- Para i=0

$\phi_s|_{X(0)}$ y $x \in X(0)$

$\phi_s|_{X(0)}$ es

$$\phi_s(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \{\phi_s(y)\}$$

$$= 1 - \max \emptyset$$
$$= 1 - 0 = 1$$

$$\therefore\ \phi_s(x) = 1 \quad \forall\ x \in X(0)$$

que es equivalente a $X(0) \subseteq S$.

- Supongamos que hemos definido

$$\phi_s|_{X(0)} : X(0) \longrightarrow \{0,1\}$$

$$\vdots$$

$$\phi_s|_{X(k)} : X(k) \longrightarrow \{0,1\}$$

Sea $x \in X(k+1)$

$$\phi_s(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \{\phi_s(y)\}\ .$$

De esta manera queda definida

$$\phi_s : X(0) \cup X(1) \cup \ldots X(k) \longrightarrow \{0,1\}$$

Como $X(0) \subseteq S$ y como la unicidad de la definición de ϕ_s en $X(0) \cup X(1) \cup \ldots \cup X(k)$ determina de manera única la de - finición de $\phi_s|_{X(k+1)}$ se puede concluir la unicidad de - ϕ_s.

$\therefore$ S es el núleo de la digráfica.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &X(0) \subseteq S \\ &X(1) \subseteq S^c \\ &X(2) \cap S = \{x \in X(2) \mid \Gamma^+(x) \subseteq X(1)\} \\ &X(2) \cap S^c = \{x \in X(2) \mid \Gamma^+(x) \cap X(0) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$ m

COROLARIO 6.7. Toda digráfica progresivamente finita y sin ciclos po see un núcleo y solo uno.

COROLARIO 6.8. Toda digráfica localmente finita a la derecha y sin -- ciclos tiene un núcleo.

Notacion: $\mathcal{N}(D)$={núcleos de $D=(V(D),E(D))$}

$\vartheta(D)$={cuasinúcleos de $D=(V(D),E(D))$}

$\mathcal{P}(D)$={(U_1,U_2) de particiónes del conjunto de aristas de D tales que, (V,U_1) y (V,U_2) son digráficas sin ciclos}

Observacion. $\mathcal{P}(D)\neq\emptyset$

Notacion. $\forall\ \pi=(U1,U2)\in P(D)$ si $D1=(V,U1)$ y $D2=(V,U2)$ entonces, $\mathcal{A}(D,\pi)=\bigcup_{A\in N(D1)} N(D2\ A\ )$

LEMA 6.9. Para todo $\pi\in\mathcal{P}(D)$, se tiene que $\mathcal{A}(D,\pi)\subseteq\vartheta(D)$. [7]

<u>*Dem.*</u>

$\mathcal{A}(D,\pi)=\bigcup_{A\in N(D_1)}\mathcal{N}(D_2\ A\ )$

Dem.

Sea $H\in A(D,\pi)$ es decir $H\in\bigcup\mathcal{N}(D_2\ A\ )$ y sea A tal que $A\in\mathcal{N}(D_1)$.

Por demostrar que H es un cuasinúcleo

i) H es independiente, pués de otra forma existirian dos vértices x, $y\in H$ tales que $xy\in E(D)$, pero como H es el núcleo de $D_2[A]$ esto implica que dos elementos de A son adyacentes, lo cual contradicé la hipótesis .

ii) Sea $x\in V(D)-H$, entonces

ia) si $x\in V(D)$ es tal que $x\in A$ $\Rightarrow$ $\exists$ $y\in H$ tal que $xy\in E(D)$ puesto que $H=\mathcal{N}(D_2[A])$

ib) si $x\in V(D)-H$ es tal que $x\in X-A$, entonces existe $y\in A$ con $xy\in E(D)$ puesto que $A=\mathcal{N}(D_1(V,U_1))$, además se tiene $z\in H$ tal que $yz\in E(D)$ porque $H=\mathcal{N}(D_2[A])$, es decir para cuando $x\notin A$ se podrán encontrar dos vértices a través de los cuales a partir de x llegamos a H.

$\therefore$ H es cuasiabsorbente

$\therefore$ $\mathcal{A}(D,\pi)\subseteq\vartheta(D)$.

TEOREMA 6.10. Sea D una digráfica progresivamente finita. Entonces D tiene un cuasinúcleo. [7]

Dem.

Es suficiente con demostrar que $A(D,\pi)\neq\emptyset$, para toda partición $\pi\in P(D)$.

Observacion. Toda subdigrafica de una digrafica progresivamente finita es progresivamente finita.

Anteriormente se vio que toda digráfica progresivamente - finita y sin ciclos posee un núcleo y solo uno.
Entonces aplicando dos veces este teoema, implica la existencia de un núcleo A para D_1, y de un núcleo Q para $D_2[A]$. ▮

TEOREMA 6.11. Sea D una digráfica localmente finita a la derecha. Entonces D tiene un cuasinúcleo. [7]

Dem.

Sea $D=(V,E)$ la digráfica localmente finita a la derecha.
Por demostrar que $A(D,\pi)\neq\emptyset$.
Para ello tomemos $\pi=(U_1,U_2)\in P(D)$ y fijémonos en $D_1(V,U_1)$, por el **COROLARIO** 4 , D_1 posee un núcleo H_1 y para $D_2[H_1]$ -- también tiene un núcleo I_1, ésto lo pudimos hacer porque $D_1(V,U_1)$ y $D_2[H_1]$ también resultan ser localmente finitas a a. la. derecha

$\therefore\ A(D,\pi)\neq\emptyset \quad \therefore\ \emptyset\neq A(D,\pi)\subseteq\theta(D)$ ▮

R - DIGRAFICAS

Definición 7.1. Sea $D=(V,E)$. $A\subseteq V(D)$ es acíclico si $D[A]$ es una digráfica sin ciclos.

Definición 7.2. Un subconjunto $A\subseteq V(D)$ se dice que es absorbente si todo vértice que esta en el complemento de A se une por medio de una flecha a A.

Definición 7.3. Un subconjunto $A\subseteq V(D)$ es acíclico absorbente si $D[A]$ es una digráfica sin ciclos y si además todo vértice que esté en el complemento de A se une por medio de una flecha a A.

Notacion. $\mathcal{B}(D)=\{Q \mid \exists\ A,$ A acíclico absorbente tal que Q es núcleo de $D[A]\}$

$\mathcal{C}(D)=\{Q \mid \exists\ A,$ A acíclico máximo tal que Q es un núcleo de $D[A]\}$

$$\mathcal{A}(D)=\bigcup_{\pi\in P(D)} \mathcal{A}(D,\pi)$$

Observacion. $\mathcal{C}(D)\subseteq\mathcal{B}(D)$

TEOREMA 7.1. Sea D una digráfica. Entonces las inclusiones siguientes se dan. [7]

$$\mathcal{C}(D)\underset{1}{\subseteq}\mathcal{B}(D)\underset{2}{\subseteq}\mathcal{A}(D)\underset{3}{\subseteq}\theta(D)$$

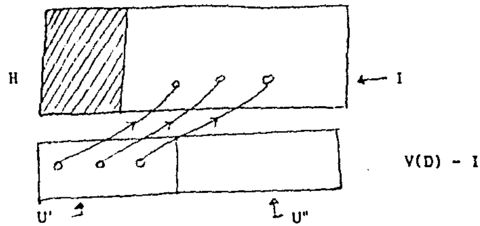
Dem.

Bastará con probar la segunda inclusión.

Sea $H\in\mathcal{B}(D)$, entonces por definición de $\mathcal{B}(D)$, para este H existirá un conjunto I acíclico absorbente tal que $D[I]$ tiene como núcleo a H.

Sea $(U',U'')\in P(D[V(D)-I])$

Consideremos los siguientes conjuntos



$U_1 = U' \cup \{xy \in E \mid x \in V(D)-I \ , \ y \in I\}$

$U_2 = U'' \cup \{xy \in E \mid x \in I\}$

$(U_1, U_2) \in P(D)$.

Por demostrar que I es un núcleo de $D_1 = (V(D), U_1)$.

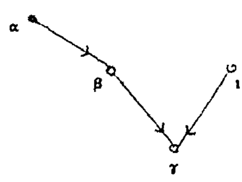
i) I es independiente en D_1.

ii) I es absorbente en D_1.

Por hipótesis I es acíclico absorbente en D, por otra parte, por construcción $D_1(V, U_1)$ contiene a todas las flechas que van de $V(D)-I$ a I por lo tanto I es absorbente en D_1 $\therefore$ $Q \in A(D, \pi) \subseteq A(D)$ con (U_1, U_2)

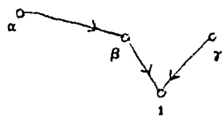
$\therefore$ $B(D) \subseteq A(D)_{\pi}$

Las inclusiones del teorema anterior pueden ser estrictas, por ejemplo analicemos la siguiente digráfica.



$\{\imath\} \in B(D) - C(D)$, pues existe A acíclico absorbente tal que $\imath \in N(D[A])$ pero $\imath \notin C(D)$. Supongamos que $\{\imath\} \in C(D)$ entonces existe A_1 --

acíclico máximo para el cual $\iota \in N(D[A])$, con A_1 como se muestra a continuación.



Pero se observa que ι no es el núcleo de $D[A_1]$ ∴ $\mathcal{C}(D) \subsetneq \mathcal{B}(D)$.

TEOREMA 7.2 Las digráficas finitas acíclicas son R - digráficas . [7]

Dem.

Sea D digráfica finita acíclica y consideremos $H \subset D$, una subdigráfica por demostrar que H tiene un núcleo.

H resulta ser una digráfica finita y D[H] no tiene ciclos pero sabemos que D[H] tiene un núcleo I" y como H es arbitraria el resultado se sigue de manera inmediata.

En un teorema 14 se demostraron las siguientes inclusiones

$\mathcal{C}(D) \subseteq \mathcal{B}(D) \subseteq \mathcal{A}(D) \subseteq \vartheta(D)$

Si ahora nosotros sustituimos la palabra "acíclico " por "núcleo perfecta" y denotamos como sigue a los siguientes conjuntos

.Observacion. $\pi=(U1,U2)$ es una particion de las aristas de la digrafica

$\mathcal{A}^{*}(D,\pi)=\bigcup_{\pi \in P(D)} \mathcal{A}(D,\pi)$ donde si $\pi=(U_1,U_2)$, $D_1=(V,U_1)$ y $D_2=(V,U_2)$ son digráficas núcleo perfectas.

$\vartheta(D)$={El conjunto de los cuasinúcleos de D }

$\mathcal{C}^{*}(D)$={Q|∃ A tal que A es núcleo perfecta máxima y Q es un núcleo que D[A]}

$\mathcal{B}^{*}(D)$={Q|∃ A tal que A es núcleo perfecta absorbente y Q es un núcleo de D[A]}

Entonces tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 7.3 Las siguientes relaciones se cumplen. [7]

$A'' \subseteq B'' \subseteq C'' \subseteq \theta$

Dem.

Observacion. Toda nucleo perfecta maximal es absorbente.

Por demostrar que $C'' \subseteq \theta$

Sea $Q \in C''$, por demostrar que $Q \subseteq \theta(D)$

Si $Q \in C''$ $\Rightarrow$ $\exists$ A núcleo perfecta máxima tal que $Q \in N(D\ A$,
entonces Q es un conjunto independiente de puntos en D puesto que A es núcleo perfecta absorbente.

Ahora falta ver que $\forall$ $x \in (V(D)-Q)$ entra con una flecha a Q ó a lo más con dos flechas.

Veamos el siguiente diagrama

Sea $x \in V(D)-Q$.

Si $x \in A$ entonces $\exists$ $y \in Q$ tal que $xy \in E(D)$, pues Q es núcleo de $D[A]$.

Si $x \notin A$ entonces $\exists$ x_1 tal que $xx_1 \in E(D)$, debido a que A es absorbente.

Si $x_1 \in Q$ ya acabamos y si $x_1 \in A-Q$ entonces existe $y_1 \in Q$ tal que $x_1 y_1 \in E(D)$

$\therefore$ xx_1 , $x_1 y_1 \in E(D)$.

Y también se verifica esta contención $A'' \subseteq B''$ ///

LEMA 7.4. Son equivalentes:

a) Para que una digráfica sea núcleo perfecta es necesario y suficiente que toda subdigráfica fuertemente conexa de D sea núcleo perfecta.

b) Una digráfica mínima sin núcleo es fuertemente conexa.

Dem.

a) $\Rightarrow$ b)

Sea D una digráfica mínima sin núcleo y supongamos que no es fuertemente conexa. Esto implica que existen componentes fuertemente conexas que por hipótesis tienen un núcleo. Tomemos la mi nima de estas componentes la cual por hipótesis tiene un núcleo pero esto es una contradicción.

∴ Una digráfica mínima sin núcleo es fuertemente conexa.

Como en una digráfica núcleo perfecta toda subdigráfica inducida tiene núcleo en particular las subdigráficas fuertemente conexas tendran un núcleo, por lo tanto bastará ver la siguiente implicación.

b)⇐ a)⇐

Supongamos que D no es núcleo perfecta, esto implica que existe una subdigráfica que no tiene núcleo. Tomemos la subdigráfica mínima que cumpla tal condición. Por hipótesis esta subdigráfica es fuertemente conexa. Ademas se cumple que toda subdigráfica fuertemente conexa en D tiene un núcleo, en particular una mínima. Esto resulta ser una contradicción.

∴ D es núcleo perfecta.

TEOREMA 7.4 a) Para que una digráfica sea núcleo perfecta es necesario y suficiente que toda subdigráfica fuertemente conexa de D tenga un núcleo.

b) Una digráfica minimal sin núcleo es fuertemente conexa.

<u>*Dem.*</u>

Los incisos a) y b) por el lema 3 son equivalentes, por lo tanto bastará con demostrar b).

La demostración se hará por contradicción.

Sea D una digráfica no fuertemente conexa mínima sin núcleo y tomemos una componente fuertemente conexa B terminal, es decir:

$$\Gamma_D^+(B) \cap (V(D)-B)=\emptyset$$

Si toda subdigráfica de D distinta de D tiene un núcleo, la subdigráfica D[B] tiene un núcleo N y la subdigráfica inducida por $(V(D)-B)-\Gamma_D^-(N)$ tiene un núcleo N", entonces N∪N" es un núcleo de D, contradiciendo la hipótesis de que D no tiene núcleo. η

TEOREMA 7.5. Sea D una digráfica D=(V(D),E(D)). Escojamos de V(D) un - subconjunto máximo A con la propiedad siguiente: D_A es núcleo perfecta. Entonces, todo núcleo de D_A es un cuasinúcleo de D.

Dem.

Sea A subconjunto máximo con la propiedad anterior.

- Si A=V(D) entonces todo núcleo de D[A] es cuasinúcleo de D.
- Supongamos que A≠V(D) y sea x∈V(D)-A. Para este vértice - existe y∈A tal que xy∈E(D). Si no fuera así por el teorema 17 se tendría que D[AU{x}] sería una digráfica núcleo perfecta, lo que contradice la maximalidad de A. Por lo tanto todo núcleo de D_A es un cuasinúcleo de D. η

Definición 7.4. Una clase *C* de digráficas núcleo perfectas verifican la condición de la cadena si una digráfica está en *C* si y solo si sus -- subdigráficas fuertemente conexas estan en la clase *C*.

TEOREMA 7.6. Sea D=(V(D),E(D)) una digráfica y sea *C* una clase de di - gráficas núcleo perfectas que verifican la condición de la cadena.

Escojamos un subconjunto A⊂V(D), máximo con la propiedad de de que D[A] es una digráfica de la clase *C*. Entonces todo núcleo de D_A es un cuasinúcleo de D.

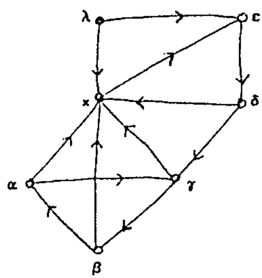
Este resultado es evidentemente una generalización del teorema 18.

COROLARIO 7.7. (H. Meyniel). Todo núcleo de una subdigráfica máxima sin ciclos (respectivamente sin ciclos de longitud impar) de - de una digráfica D es un cuasinúcleo de D.

CONJETURA (Hansen). Toda digráfica fuertemente conaxa con n vérti - ces posee un cuasinúcleo de debilidad al menos

$\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Si en el teorema • se cambia la condición de que D_A sea núcleo-perfecta por la de que D[A] sea máxima con núcleo, entonces no se cumplirá que todo núcleo de D[A] será un cuasinúcleo de D. Para ver ésto fijémonos en la siguiente digráfica que se muestra como contraejemplo.



Consideremos $A=\{x,\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, que es un subconjunto máximo con la propiedad de tener núcleo ($\{x\}$ es un núcleo) entonces veremos que $\{x\}$ no es un cuasinúcleo para toda la digráfica. De la figura observamos que para λ, $\lambda x \notin E(D)$ y $c\lambda \notin E(D)$.

$\therefore$ $\{x\}$ no es un cuasinúcleo para D.

NOTACION

G	Gráfica
$V(G)$	Conjunto de vértices de G
$E(G)$	Conjunto de aristas de G
$\|V(G)\|$	Cardinalidad del conjunto V(G)
$\|E(G)\|$	Cardinalidad del conjunto E(G)
D	Digráfica
$V(D)$	Conjunto de vértices de D
$E(D)$	Conjunto de aristas de D
$\|V(D)\|$	Cardinalidad del conjunto V(D)
$\|E(D)\|$	Cardinalidad del conjunto E(D)
$\Gamma^{+}(x)$	Vecinos exteriores del vértice x
$\Gamma^{-}(x)$	Vecinos interiores del vértice x
$gr^{+}(x)$	Grado exterior del vértice x
$gr^{-}(x)$	Grado interior del vértice x
$gr(x)$	Grado del vértice x
$D[V(D)-\{x\}]$	Subdigráfica cuyo conjunto de vérti-

x vertice	ces es $V(D)-\{x\}$ y cuyas flechas son todas las de D que tienen ambos extremos en $V(D)-\{x\}$
$D[V(D)-\{a\}]$ a arista	Es la digráfica con conjunto de vértices $V(D)$ y con conjunto de flechas $E(D)-\{a\}$
$D[A]$ ó D_A	Digráfica generada por el conjunto A, con A conjunto de vértices o aristas.
Q	Cuasinúcleo
$f_D(Q)$	Debilidad del cuasinúcleo Q
$d^-(x)=gr^-(x)$	Grado interior
Z	Conjunto de enteros
Z_2^+	Conjunto de enteros positivos pares
S^c	Complemento del conjunto S
$\phi_s(x)$	Función caracteristica del conjunto S
$\phi_s\|_{X(i)}$	Función caracteristica definida para el conjunto S restringida al conjunto $X(i)$, con $i\in Z^+$
$N(D)$	Conjunto de núcleos de D
$\Theta(D)$	Conjunto de cuasinúcleos de D

$P(D)$	Conjunto de particiones (U_1, U_2) de - las aristas de la digráfica D tales - que $D_1=D[(V,D_1)]$ y $D_2=D[(V,U_2)]$ son digráficas sin ciclos

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1 Behzad Mehdi, Gary Chartrand, Graphs and Digraphs.
Belmont, California - Wadswoth 1979 .

2 Bella Bollobás, Graph Theory An Introductory Course.
New York, Springer, 1979.

3 Berge, Claude, Graph Theory
Amsterdam, Netherlands North - Holland 1985.

4 Bondy, J.A, Graph Theory with applications.
London: Macmillan, 1976.

ARTICULOS CONSULTADOS

[1] C.Berge (Paris). Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications en Theorie des Jeus.Publications Econom tri - ques.Publications Econom triques vol. VI fasc.1, 1973.

[2] V.Chávatal and L.Lovász. Every directed grahp has a semi-kernel. In Hypergraph Seminar, Lect.Notes in Math., 411, Springer,Berlin 1974 p.p.175.

[3] P.Duchet. A sufficient condition for a digraph to be kernel-perfect. Journal of Graph Theory,11,No.1, 1978, p.p 81-85.

[4] H.Galeana-Sánchez and V.Neuman-Lara. On kernel and semikernels of digraphs. Discrete Math., 48, 1984,p.p 67-76.

[5] V.Neumann Lara. Seminúcleos de una digráfica.Anales del Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M., México, V.11, 1971, p.p 55-62.

[6] P.Vinche. Quasi-kernels of minimum weakness in a graph. Institut de Statistique, Universit Libre de Bruxelles, Bruxelles, - Belgique.

[7] P. Duchet, Yahya Ould HAMIDOUNE, Henry MEYNIEL Departement de Mathématiques, C.N.R.S., Université P. et M Curie, U.E.R. 48, 75005 Paris, France

PRINCIPALES TEOREMAS