21
22

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA INVERSO EN TEORIA DE LA DISPERSION MULTIDIMENSIONAL.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

JOSE LUIS MARTINEZ MORALES

MEXICO, D. F. 1991

Esta tesis está dedicada a:

Mi mamá,

mi abuelita,

mi tía Mati,

mi tía Chela, mi tío Enrique, mi tío Nalo,
mi tía Olga y mi primo Luis,

mis amigos Sergio, Fluvio, Jaico, Martha,
Mercedes y Arnulfo.

Contenido

Introducción

Uno de los temas de mayor actualidad en la física matemática moderna es el problema inverso en teoría de la dispersión.

Quizás nos hemos preguntado alguna vez cómo hace un geofísico para encontrar un yacimiento de petróleo bajo la tierra, quien por no tener una imagen real del subsuelo, se enfrenta a un problema más complicado al de querer encontrar nuestros zapatos en algún lugar de nuestro cuarto con la luz apagada.

Bueno, hay quien podría responder que buscando los manantiales en la superficie habremos resuelto el problema. Sin embargo, no todos los yacimientos se encuentran de esta manera; además, aunque hubiera localizado un manantial, la posición exacta, la profundidad y el tamaño del yacimiento son datos que seguiría desconociendo; datos que son relevantes si mi interés es invertir en la construcción de un pozo.

Afortunadamente el geofísico cuenta con un sofisticado instrumental, y una serie de técnicas matemáticas y métodos numéricos para resolver el problema exitosamente: detonando una carga explosiva a cierta profundidad bajo la tierra, el geofísico va a medir en la superficie las ondas de impacto producidas por la explosión. Entonces, las ondas que hayan atravesado por un medio diferente al del subsuelo natural (digamos un yacimiento) serán diferentes a las ondas que sólo atravesaron el subsuelo, y tales diferencias son detectadas por los aparatos. Este método (escuetamente esbozado) permite al geofísico obtener la imagen deseada del subsuelo y localizar más fácilmente el yacimiento. Como cuando buscamos primero el apagador y luego los zapatos.

En la tomografía hay otro buen ejemplo para ilustrar las ideas detrás del problema de la dispersión inversa. A un paciente con afecciones cerebrales se le inyecta una solución a base de minerales de elementos radioactivos (como el gluconato de potasio en alguna variedad isotópica), la cual una vez en el torrente sanguíneo es absorbida rápidamente por el cerebro. Lógicamente estas soluciones son de muy baja intensidad radioactiva. En el cerebro, la sustancia se encuentra emitiendo radiación, la cual puede imaginarse como ondas que parten de una fuente y que se van transmitiendo en el interior del cerebro, chocando con las diferentes estructuras internas, deformándose, emergiendo de la cabeza del paciente, y finalmente siendo captadas por el tomógrafo, el cual se encarga ahora de decodificar toda la información contenida en estas ondas, convirtiéndola en imágenes en pantalla. Podemos ahora ver el interior del cerebro vivo y funcionando, y localizar posibles tumores o afecciones sin el empleo del bisturí.

El mismo desarrollo de la física moderna está basado en el fenómeno de la dispersión. Desde que Rutherford bombardeó átomos de carbono con partículas alfa, hasta el desarrollo del ciclotrón; todas las investigaciones realizadas en los campos de física molecular, atómica, nuclear y de partículas, están fundamentalmente basadas en los procesos de dispersión de haces por núcleos dispersores. Todo cuanto se sabe acerca del átomo, de las partículas elementales y en general de la estructura del submicrocosmos es gracias a los experimentos de dispersión. Podemos afirmar que gran parte de los conocimientos obtenidos acerca de la naturaleza de las cosas y de la concepción moderna del universo (no sólo el cuántico), se deben a esta poderosa herramienta que permite al ser humano ir más allá de sus límites sensoriales y de su escala física para escudriñar en los resquicios de la naturaleza donde sólo está permitido el acceso a las ondas (sean cuánticas, electromagnéticas, sísmicas o de cualquier especie); y es a través del desarrollo de teorías físicas y métodos matemáticos, como es posible conocer a partir de las alteraciones que se producen en una onda propagándose en un medio determinado y que eventualmente es captada, todas las anomalías, perturbaciones o accidentes que ocasionaron que esta onda tuviera una tal deformación.

Estos métodos matemáticos son particularmente arduos, siendo ésta la razón por la cual su desarrollo ha sido lento y que hubo permanecido en letargo durante algunos años. Actualmente la dispersión inversa es tema de investigación en muchas universidades del mundo y tiene aplicación en diversos campos.

Esta tesis va a estar enfocada hacia el terreno de la mecánica cuántica, estudiaremos el caso de un potencial dispersor. Específicamente consideraremos la teoría de la dispersión para la ecuación de Schrödinger

$$\imath \frac{\partial}{\partial t}\varphi = H\varphi, \tag{1}$$

donde el Hamiltoniano $H = H_0 + V(x)$, H_0 es el operador de energía cinética y $V(x)$ es el potencial.

El elemento clave en la teoría de la dispersión por un potencial es la matriz de dispersión. La matriz de dispersión da cuenta de la deflexión de un haz cuando es proyectado sobre un potencial dispersor y depende tanto de la energía de las partículas en el haz como de dicho potencial. O sea, si el potencial ejerce una fuerza de atracción muy tenue sobre las partículas del haz, y éstas son proyectadas a una gran velocidad sobre él (dentro del límite no relativista), las partículas casi no se desviarán de su trayectoria recta y pasarán insensibles por el potencial dispersor. En cambio, si la fuerza de atracción del potencial es muy intensa y la velocidad de las partículas es relativamente baja, al pasar por éste sufrirán una importante desviación de su trayectoria inicial, e incluso pueden quedar atrapadas dentro de su campo.

La matriz de dispersión, denotada por $S(k)$, encierra toda la información dinámica del sistema (o cuando menos eso se intenta probar) y determina cuantitativamente la evolución del mismo. En el lema 2.4 de su artículo de 1990, Weder estableció rigurosamente qué tanto difiere la matriz de dispersión de la matriz identidad en función de la energía. Esta relación también considera las posibles singularidades del potencial y las liga a la rapidez de decaimiento de la norma de $S(k) - I$ con respecto de una topología particular (ver Lema 4 en el Capítulo 3). En otras palabras, este lema da un sentido formal a la medida en que es desviado el haz, en consideración a su energía y a la intensidad del potencial.

En una teoría causal, las causas preceden a los efectos. En la teoría de un problema inverso, a partir de los efectos se intenta conocer las causas. En el problema inverso en teoría de la dispersión, a partir de los datos de dispersión se trata de reconstruir el potencial. En 1980, Roger Newton dio una fórmula para reconstruir el potencial a partir del conocimiento de la matriz de dispersión, basada en la teoría de Marchenko. Sin embargo, el marco matemático en el que desarrolló su artículo no era el apropiado, y su resultado fue muy controvertido dentro de la comunidad. En 1990, Weder construyó una teoría de Marchenko Newton generalizada en todas las dimensiones n, $n \geq 3$. El potencial es reconstruido a partir de la solución a la ecuación de Marchenko Newton por medio de la identidad el milagro de Newton. Su método permite dar un tratamiento unificado para todas las dimensiones y también dar pruebas completas que parecen ser más simples.

Denotamos por

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{2}$$

a la realización autoadjunta de menos el Laplaciano en $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 3$, con dominio el espacio de Sobolev $H_2(\mathbf{R}^n)$ (ver capítulo 1 para las definiciones).

Usaremos la notación estandar de multiíndices

$$D^\gamma = \frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial x_1^{\gamma_1}} \frac{\partial^{\gamma_2}}{\partial x_2^{\gamma_2}} \cdots \frac{\partial^{\gamma_n}}{\partial x_n^{\gamma_n}}, \tag{3}$$

$|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$, donde las derivadas son tomadas en sentido de distribuciones.

El potencial, $V(x)$, es una función real valuada continua sobre $\mathbf{R}^n$ tal que todas sus derivadas de orden hasta α_0 son funciones acotadas, donde α_0 es el entero más pequeño tal que $\alpha_0 > \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$. Más aún, suponemos que

$$|D^\gamma V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\frac{n}{2}-1-\delta}, \tag{4}$$

para algunas constantes $C, \delta > 0$, y toda γ, $0 \leq |\gamma| \leq \alpha_0$.

Denotamos por

$$H = H_0 + V(x), \tag{5}$$

al Hamiltoniano, con dominio $D(H) = D(H_0)$. H es un operador autoadjunto en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

En el estudio dependiente del tiempo de la dispersión los operadores de onda están definidos como los siguientes límites fuertes

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\imath tH} e^{-\imath tH_0} \tag{6}$$

Bajo la condición (3) éstos existen y son completos (esto está probado por ejemplo en Agmon 1975. Ver capítulo 3 para los detalles en donde consideramos condiciones más generales).

El operador de dispersión está definido como

$$S = W_+^* W_-. \tag{7}$$

Este es un operador unitario sobre $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Denotamos por F a la transformada de Fourier la cual es un operador unitario sobre $L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$(Ff)(\xi) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|x|\le N} e^{-\imath\xi\cdot x} f(x)dx, \tag{8}$$

para $f(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, y donde el límite es en la topología fuerte.

Definimos

$$\hat{S} = FSF^*. \tag{9}$$

Denotamos por S^{n-1} a la esfera unitaria $|\omega| = 1$, en $\mathbf{R}^n$, y por $L^2(S^{n-1})$ al espacio de funciones sobre S^{n-1} cuadrado integrables con respecto de la medida sobre S^{n-1} inducida por la medida de Lebesgue sobre $\mathbf{R}^n$.

Es bien conocido (ver por ejemplo Agmon 1975, Teorema 7.2) que hay una función operador valuada $S(k)$ definida para $k \in \mathbf{R}^+ \equiv (0, \infty)$, y que toma valores en la clase de operadores unitarios sobre $L^2(S^{n-1})$ tal que para cada función $f(k,\omega) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, donde $k > 0$, $\omega \in S^{n-1}$ son coordenadas polares en $\mathbf{R}^n$:

$$(\hat{S}f)(k,\omega) = (S(k)f(k,\cdot))(\omega), \tag{10}$$

donde la igualdad en (10) vale en $L^2(S^{n-1})$ para casi toda k. $S(k)$ es la matriz de dispersión. Note que bajo la condición (4) $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores positivos (ver Eastham y Kalf 1982). En el capítulo 3 damos una fórmula explícita para $S(k)$.

Encontramos conveniente definir $S(k)$ también para $k < 0$ por

$$S(k) = TS(-k)T, \tag{11}$$

donde T es el operador de conjugación compleja actuando sobre $L^2(S^{n-1})$ como $(Tf)(\omega) = \bar{f}(\omega)$.

Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, denotamos por $S_y(k)$ a la matriz de dispersión correspondiente al par H_0, $H_y = H_0 + V_y(x)$, donde $V_y(x) = V(x+y)$.

Se sigue del Lema 4.2 en capítulo 4 que

$$S_y(k) = e^{\imath k\omega\cdot y} S(k) e^{-\imath k\omega\cdot y}, \tag{12}$$

donde en (12), $e^{\pm\imath k\omega\cdot y}$ denota al correspondiente operador de multiplicación por una función sobre $L^2(S^{n-1})$. Denotamos por $S_x^T(k)$ al operador transpuesto de $S_x(k)$, o sea

$$S_x^T(k) = TS_x^*(k)T. \tag{13}$$

Se sigue del Lema 3.4 en el capítulo 3 que

$$\|(S_x^T(k) - I)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq \frac{C}{|k|}, \tag{14}$$

para una constante fija C, y todo $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$ denota al espacio de Banach de todos los operadores acotados sobre $L^2(S^{n-1})$. Esta estimación juega un importante papel en la teoría generalizada de Marchenko Newton.

Se sigue de (14) que $S_x^T(k) - I \in L^2(\mathbb{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$, el espacio de Banach de funciones Lebesgue cuadrado integrables sobre $\mathbb{R}$ con valores en $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$ (ver capítulo 4 para la definición). Entonces podemos definir para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo

$$m_x(t) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} (S_x^T(k) - I) P_\omega e^{-\imath kt} dk, \tag{15}$$

donde la transformada de Fourier en (15) converge en la topología fuerte de $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{B}(L^2 (S^{n-1})))$ y donde P_ω denota al operador pariedad sobre $L^2(S^{n-1})$: $(P_\omega f)(\omega) = f(-\omega)$, para $f(\omega) \in L^2(S^{n-1})$.

Por $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ denotamos al espacio de funciones Lebesgue cuadrado integrables sobre $\mathbb{R}^+$ con valores en $L^2(S^{n-1})$.

Si (3) es satisfecha, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo el operador generalizado de Marchenko Newton es sobre $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ un operador con kernel:

$$(M_x f)(t) = \int_0^\infty m_x(t+s) f(s) ds, \tag{16}$$

$t \geq 0$, $f(s) \in L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ (ver Teorema 4.3, capítulo 4).

Denotamos por $L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}))$ al espacio de Hilbert de funciones Lebesgue cuadrado integrables sobre $\mathbf{R}$ con valores en $L^2(S^{n-1})$.

Definimos para cada $x \in \mathbf{R}^n$ fijo

$$f_x(t,\omega) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ikt}[(I - S_x^T(k))1(\omega)]dk, \tag{17}$$

donde $1(\omega)$ es la función sobre $L^2(S^{n-1})$ idénticamente igual a uno. La transformada de Fourier unidimensional en (17) converge en la topología fuerte de $L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}))$. Note que por (14) $[(I - S_x^T(k))1(\omega)] \in L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}))$. También denotaremos por $f_x(t,\omega)$ a la restricción a $\mathbf{R}^+$ de (17) la cual es una función en $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$.

Para $x \in \mathbf{R}^n$, $k > 0$, y $\omega \in S^{n-1}$ definimos (ver capítulo 3)

$$\phi_\pm(x,k,\omega) = e^{ik\omega\cdot x} - R^\mp(k^2)[Ve^{ik\omega\cdot x}], \tag{18}$$

donde $R^\pm(k^2)$ son los resolventes extendidos al eje real por el principio del límite absorbente (ver capítulo 3). $\phi_\pm(x,k,\omega)$ son las autofunciones generalizadas de $H = H_0 + V(x)$:

$$(H_0 + V(x))\phi_\pm(x,k,\omega) = k^2\phi_\pm(x,k,\omega), \tag{19}$$

que satisfacen la condición de radiación incidente (emergente) de Somerfeld.

Definimos

$$\phi(x,k,\omega) = \begin{cases} \phi_-(x,k,\omega) & , \quad k \in (0,\infty), \\ \phi_+(x,-k,-\omega) & , \quad k \in (-\infty,0), \end{cases} \tag{20}$$

y

$$\psi(x,k,\omega) = 1 - e^{-ik\omega\cdot x}\phi(x,k,\omega). \tag{21}$$

Probamos en el capítulo 4 que si $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores no positivos y si cero no es una resonancia (ver Definición 3.3; las terminologías de energía cero o estado semiacotado son también usadas en la literatura) entonces para cada $x \in \mathbf{R}^n$ fijo, $\psi(x,k,\omega)$ pertenece a la clase Hardy Lebesgue, H_+, de funciones sobre $\mathbf{R}$ con valores en $L^2(S^{n-1})$; o sea, el espacio de Hilbert de funciones en $L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}))$ que son valores frontera en sentido L^2 de funciones $f(z)$, $z = k + iq \in \mathbf{C}^+$, con valores en $L^2(S^{n-1})$ que son analíticas sobre $\mathbf{C}^+$ y tales que

$$\sup_{q>0} \int \|f(k+iq)\|_{L^2(S^{n-1})} dk < \infty. \tag{22}$$

Definimos

$$\chi_x(t,\omega) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ikt}\psi(x,k,\omega)dk, \tag{23}$$

donde la transformada de Fourier unidimensional en (23) converge en la topología fuerte de $L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}))$. Dado que $\psi(x,k,\omega) \in H_+$ es un resultado clásico (ver Reed y Simon 1975, página 109) que $\chi_x(t,\omega) = 0$ para $t < 0$. También denotaremos por $\chi_x(t,\omega) \in L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ a la restricción a $t > 0$ de (23).

Nuestro principal resultado es (Weder 1990)

<u>Teorema 1</u>

Suponga que $n \geq 3$, que $V(x)$ es una función real valuada continua sobre $\mathbf{R}^n$ tal que todas sus derivadas de orden hasta α_0 son funciones acotadas, donde α_0 es el entero más pequeño tal que $\alpha_0 > \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$, y que (4) es satisfecha. Además, suponga que $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores no positivos y que cero no es una resonancia. Entonces para cada x fijo, M_x es un operador autoadjunto compacto en $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ y su norma de operador es menor o igual que uno. Además, la función $x \to M_x$ es continua de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{B}(L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1})))$, el espacio de Banach de operadores acotados sobre $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$.

Más aún, la función $\chi_x(t,\omega)$ definida en (23) es para cada $x \in \mathbf{R}^n$ fijo una solución a la ecuación generalizada de Marchenko Newton

$$\chi_x(t,\omega) = M_x\chi_x(t,\omega) + f_x(t,\omega), \tag{24}$$

en $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$, donde $f_x(t,\omega)$ está definida en (17). Además, la función $x \to \chi_x(t,\omega)$ es continua de $\mathbf{R}^n$ en $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$. La función $x \to \omega \cdot \nabla_x\chi_x(t,\omega)$ es también continua de $\mathbf{R}^n$ en $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$, donde por ∇_x denotamos al operador gradiente $\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

Para cada $x \in \mathbf{R}^n$ fijo, $\omega \cdot \nabla_x\chi_x(t,\omega)$ es una función continua de $t \in [0,\infty)$ en $L^2(S^{n-1})$ y satisface la identidad generalizada el milagro de Newton

$$V(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t\downarrow 0} \omega \cdot \nabla_x\chi_x(t,\omega). \tag{25}$$

Si +1 no es un autovalor de M_x la ecuación generalizada de Marchenko Newton (24) tiene una única solución en $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$. Si tampoco -1 es un autovalor de M_x

entonces la norma de operador de M_x es estrictamente menor que uno y la única solución a (24) está dada por

$$\chi_x(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} M_x^n f_x(t,\omega), \tag{26}$$

donde la serie de Neumann en (26) converge absolutamente en $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1}))$, uniformemente para x en cualquier conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, y donde ± 1 no son autovalores de M_x. En particular si para alguna $\delta > 0$

$$\|(1+|x|)^{2+\delta} V(x)\|_\infty \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{2+\delta} |V(x)| \leq \Delta, \tag{27}$$

para $\Delta > 0$ suficientemente pequeña, ± 1 no son autovalores de M_x y la norma de operador de M_x es estrictamente menor que uno, y la serie de Neumann (26) es uniformemente convergente en conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Más aún, si por ejemplo $V(x) \geq 0$, entonces obviamente $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores no positivos, y tampoco cero es una resonancia (ver las observaciones después de la Definición 3.3).

La reconstrucción de $V(x)$ va como sigue (ver Newton 1980): de la matriz de dispersión $S(k)$ obtenemos el operador generalizado de Marchenko Newton M_x. Entonces resolvemos la ecuación generalizada de Marchenko Newton (24). Si $+1$ no es un autovalor de M_x la solución es única y obtenemos el potencial a partir de la identidad generalizada de Newton (25). Si -1 tampoco es un autovalor de M_x la serie de Neumann (26) es convergente. Sabemos en particular que ± 1 no son autovalores de M_x para toda $x \in \mathbb{R}^n$ si Δ en (27) es suficientemente pequeña.

Note que por (20), (21) y (23) tomando la transformada de Fourier inversa en t de $\chi_x(t,\omega)$ obtenemos las autofunciones generalizadas $\phi_\pm(x,k,\omega)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in S^{n-1}$.

La tesis está organizada como sigue: En el capítulo 1 damos las definiciones básicas tales como espacios de Banach, espacios $H^{s,p}$, y nociones sobre integración vectorial; además, citamos algunos resultados explicitando la fuente. En el capítulo 2 damos una introducción a la teoría de la dispersión. En los capítulos 3 y 4 consideramos el caso de dimensiones epaciales n, $n \geq 2$ (cuando un resultado sea sólo válido para $n \geq 3$ será explícitamente mencionado).

En el capítulo 3 primero enunciamos algunos resultados clásicos sobre el principio del límite absorbente y de la teoría de dispersión estacionaria que usaremos más tarde. Aquí seguimos a Agmon 1975. La teoría es extensiva a potenciales con singularidades.

En el Lema 3.4 probamos el resultado sobre el decaimiento de la norma de operador de la matriz de dispersión menos la identidad que usamos en el capítulo 4. Directamente ligamos la taza de decaimiento de $S(k) - I$ a las singularidades del potencial. Obtenemos la mejor taza de decaimiento cuando $V(x)$ no tiene singularidades.

En el Lema 3.5 damos una simple prueba de la relación de reciprocidad de la matriz de dispersión basada en la invariancia de reversión temporal.

Entonces estudiamos las propiedades de analiticidad de las autofunciones generalizadas de $H = H_0 + V(x)$. Aquí seguimos el método introducido por Balslev 1988 en el caso $n = 3$. Generalizamos sus resultados y probamos que para $n \geq 3$ las autofunciones generalizadas tienen para $x \in \mathbb{R}^n$ y $\omega \in S^{n-1}$ fijas una extensión meromórfica a $k \in \mathbf{C}^+$ con polos en $k_j = -iq_j$ donde $-q_j^2$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, son los autovalores negativos de $H = H_0 + V(x)$. También estudiamos el comportamiento en $k = 0$.

En el capítulo 4 estudiamos la ecuación generalizada de Marchenko Newton. En el Teorema 4.3 obtenemos nuestros principales resultados sobre las propiedades del operador generalizado de Marchenko Newton. Este teorema vale para potenciales $V(x)$ con singularidades.

En el Teorema 4.6 obtenemos las propiedades de $\chi_x(t, \omega)$. En particular probamos que la identidad generalizada el milagro de Newton es cierta. Entonces completamos la prueba del Teorema 1.

Esta tesis consiste en el estudio del artículo de Weder 1990 y de los métodos matemáticos utilizados en él.

Como en todos los artículos de investigación, el nivel tanto de los conceptos como de las técnicas matemáticas rebasa los conocimientos de un estudiante ordinario de licenciatura. Por lo que uno de los objetivos de esta tesis es explicar de una manera detallada el artículo en estudio. Para ello; daremos todas las definiciones básicas y elementos necesarios (capítulos 1 y 2), además desarrollaremos con mayor extensión las demostraciones en el artículo (apéndices).

La componente original de este trabajo está en los apéndices, ya que casi todos los resultados ahí fueron probados por el autor de la tesis.

En el Apéndice A nos enfocamos hacia los espacios de Banach. Damos primero algunas reglas de manipulación formal de operadores lineales en espacios vectoriales. Después estudiamos funciones que toman valores en espacios de Banach definidas en espacios topológicos arbitrarios. Algunas reglas sobre la continuidad débil, fuerte o uniforme de tales funciones son consideradas. También estudiamos operadores en espacios de Banach, álgebras de Banach y espacios de Hilbert. Concluimos este apéndice con una prueba generalizada sobre el cálculo del espacio dual de un espacio de Sobolev con peso, $H_{\alpha,s}$.

En el Apéndice B realizamos un estudio basado en el Capítulo 3 del libro de Hille y Phillips 1957, sobre funciones que toman valores operacionales definidas sobre espacios de medida. Se define el concepto de función medible para esta clase de funciones y se define su integral (integral de Bochner).

En el Apéndice C estudiamos los espacios de Sobolev con peso $H_{\alpha,s}$ y los operadores de multiplicación que aquí se pueden definir. El cálculo de la familia espectral del operador H_0 se basa en los resultados de este apéndice. Algunas fórmulas de interpolación son deducidas basadas en el teorema de tres líneas de Hadamard.

En el Apéndice D estudiamos tres tipos de operadores definidos en espacios de funciones complejo valuadas definidas en $\mathbf{R}^n$. Tales operadores son: la multiplicación del argumento de la función por una matriz, la translación del argumento de la función, y los operadores multiplicación por una función cuyo argumento es el producto de la variable x por un vector complejo $c \in \mathbf{C}^n$.

En el Apéndice E estudiamos las principales propiedades del operador de Schrödinger H (que es autoadjunto, acotado por debajo,etc.), y a su resolvente extendido, $R^{\pm}(z)$, mediante el principio del límite absorbente.

El Apéndice E está avocado a detallar las demostraciones en los Capítulos 3 y 4 en relación a la matriz de dispersión.

El Capítulo 3 de esta tesis utiliza algunos resultados de Balslev 1988 relacionados con una generalización del principio del límite absorbente. Los Apéndices G y H detallan algunos puntos al respecto. Propiedades de analiticidad de las autofunciones generalizadas $\phi_{\pm}$ son probadas utilizando resultados de Agmon 1975.

Por último, las demostraciones en el Apéndice I hacen explicativos los resultados sobre el operador de Marchenko Newton generalizado del Capítulo 4.

En relación a las convenciones sobre la notación, las siglas d.e.e.c. denotarán "donde en este caso". Cuando se cite algún resultado se hará primero indicando la naturaleza del mismo (lema, teorema), después indicando el número del capítulo o nombre del apéndice, y por último el número de dicho resultado. Por ejemplo, (L.A.27) denota al lema 27 en el apéndice A.

Cuando escribamos $\{\pm, \mp\} = \{-, +\}$ significaremos que se establece la siguiente igualdad entre símbolos formales:

$$\pm = - \mp \,. \tag{28}$$

Algunos símbolos que emplearemos son:

$\wedge$	Símbolo de conjunción, "*y*".
$\vee$	Símbolo de disyunción, "*ó* ".
$\mathbf{P}(C)$	Conjunto potencia correspondiente al conjunto C.
$B_r(x)$	Bola de radio r y centro en x en el espacio métrico en consideración.
χ_C	Función característica correspondiente al conjunto C.
$D'(\mathbf{R}^n)$	Espacio de distribuciones en $\mathbf{R}^n$.

$\rho_s(x) = (1 + |x|^2)^{s/2}$.

Capítulo 1

Nociones preliminares

Espacios de Banach.

1. Espacios normados. Un espacio vectorial X se llama *espacio normado* cuando a cada $x \in X$ está asignado un número real no negativo $\|x\|$, llamado *norma* de x, de manera que

(a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera x e y de X,

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ si $x \in X$ y α es un escalar,

(c) $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Todo espacio normado puede considerarse como un espacio métrico, en el que la distancia $d(x, y)$ entre x e y es $\|x - y\|$. Las propiedades características de d son:

(i) $0 \leq d(x, y) < \infty$ para cualesquiera x e y,

(ii) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera x e y,

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cualesquiera x, y, z.

Un *espacio de Banach* es un espacio normado que es *completo* en la métrica definida por su norma; es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente hacia un elemento del espacio.

Se dice que un subconjunto $Y \subset X$ es un *subespacio* de X, si Y es también un espacio vectorial (respecto de las mismas operaciones de X). Se comprueba fácilmente que esto ocurre, si y sólo si, $0 \in Y$ y

$$\alpha Y + \beta Y \subset Y$$

para todo par de escalares α y β.

2. Espacios vectoriales topológicos. Sea τ una topología sobre un espacio vectorial X tal que

(a) *cada punto de X es un conjunto cerrado, y*

(b) *las operaciones de espacio vectorial son continuas respecto de τ.*

Diremos que una métrica d sobre un espacio vectorial X es *invariante*, si

$$d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

X es *localmente convexo* si existe una base topológica local B cuyos elementos son convexos.

X es un *espacio de Fréchet* si su topología τ está inducida por una métrica d invariante y completa, y es localmente convexo.

3. Aplicaciones lineales acotadas. Sean X e Y espacios vectoriales topológicos y $\Lambda: X \to Y$ una aplicación lineal. Se dice que Λ es *acotada* si transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados, es decir, si $\Lambda(E)$ es un subconjunto acotado de Y para cada conjunto acotado $E \subset X$.

4. Definición. El *espacio dual* de un espacio vectorial topológico X es el espacio vectorial X^* cuyos elementos son las formas lineales *continuas* en X.

5. Definición. Sean Ω un abierto de $\mathbf{C}$, y X un espacio vectorial topológico complejo.

(a) Una función $f: \Omega \to X$ es *débilmente holomorfa en* Ω si para toda $\Lambda \in X^*$ la función Λf es holomorfa en sentido ordinario.

(b) Una función $f: \Omega \to X$ es *fuertemente holomorfa en* Ω cuando existe

$\lim_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$

(en la topología de X) para todo $z \in \Omega$.

6. Notación. Si X e Y son espacios vectoriales topológicos, se denota $\mathrm{B}(X,Y)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales acotadas (u *operadores*) de X en Y. Por brevedad, $\mathrm{B}(X,X)$ se representa por $\mathrm{B}(X)$. Con las definiciones habituales de suma y multiplicación de funciones por escalares, cada $\mathrm{B}(X,Y)$ es un espacio vectorial. En general, $\mathrm{B}(X,Y)$ puede dotarse de estructura de espacio vectorial *topológico* de muchos modos.

7. Notación. Si T aplica X en Y, el núcleo y la imagen de T se denotarán, respectivamente, $N(T)$ y $R(T)$. Explícitamente,

$$N(T) = \{x \in X: Tx = 0\},$$

$$R(T) = \{y \in Y: Tx = y \text{ para algún } x \in X\}.$$

8. Definición. Sean X e Y espacios de Banach, y U la bola abierta unitaria de X. Se dice que un operador $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ es *compacto* cuando la adherencia de $T(U)$ es compacta en Y. Denotamos por $\mathrm{B}_0(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores compactos de $\mathrm{B}(X,Y)$.

9. Proyecciones. Sea X un espacio vectorial. Se dice que una aplicación lineal $P: X \to X$ es una *proyección* cuando

$$P^2 = P,$$

es decir, si $P(Px) = Px$ para todo $x \in X$.

10. Definición. Un *álgebra compleja* es un espacio vectorial A sobre el cuerpo complejo $\mathbf{C}$ en el que está definida una multiplicación que satisface

$$x(yz) = (xy)z, \tag{1}$$

$$(x+y)z = xz + yz, \qquad x(y+z) = xy + xz, \tag{2}$$

y

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \tag{3}$$

para cualesquiera x, y y z de A y para todo escalar α.

Si, además, A es un *espacio de Banach* respecto de una norma que satisface la *desigualdad multiplicativa*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x \in A,\ y \in A) \tag{4}$$

y si A contiene un *elemento unidad* e tal que

$$xe = ex = x \qquad (x \in A) \tag{5}$$

y

$$\|e\| = 1, \tag{6}$$

entonces A se llama *álgebra de Banach.*

Si $x \in A$, el *espectro* $\sigma(x)$ de x es el conjunto de todos los números complejos λ tales que $\lambda e - x$ *no* es invertible. El complementario de $\sigma(x)$ es el *conjunto resolvente* de x; está formado por todos los $\lambda \in \mathbf{C}$ para los cuales $(\lambda e - x)^{-1}$ existe.

El *radio espectral* de x es el número

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}. \tag{7}$$

Es el radio del menor disco circular en $\mathbf{C}$ centrado en 0, que contiene $\sigma(x)$. Naturalmente, (7) no tiene sentido cuando $\sigma(x)$ es vacío.

La función operador-valuada

$$R(\xi) = R(\xi, T) = (T - \xi)^{-1} \tag{8}$$

es llamada el *resolvente* de T.

Encontramos necesario considerar operadores T no necesariamente definidos para todos los vectores del espacio dominio. Por tanto definimos un *operador T de X a Y* como una función que manda a cada vector u en una cierta variedad lineal D de X a un vector $v = Tu$ y que satisface la condición de linealidad para todo $u_1, u_2 \in D$. D es llamado el *dominio de definición*, o simplemente el *dominio*, de T y es denotado por $D(T)$. Si $D(T)$ es denso en X, T se dice que es *densamente definido.* Si $D(T) = X$, T se dice que está definido *sobre* X. Si $Y = X$, diremos que T es un operador *en* X.

Sea T un operador de X a Y. Una sucesión $u_n \in D(T)$ se dice que es *T-convergente* (a $u \in X$) si tanto $\{u_n\}$ como $\{Tu_n\}$ son sucesiones de Cauchy (y $u_n \to u$). Escribiremos

$u_n \underset{T}{\to} u$ para denotar que $\{u_n\}$ es T-convergente a u. T se dice que es *cerrado* si $u_n \underset{T}{\to} u$ implica que $u \in D(T)$ y $Tu = \lim Tu_n$; en otras palabras, si para cualquier sucesión $u_n \in D(T)$ tal que $u_n \to u$ y $Tu_n \to v$, u pertenece a $D(T)$ y $Tu = v$. En apariencia la cerradura recuerda a la continuidad, pero en realidad las dos nociones son muy diferentes.

El conjunto de todos los operadores cerrados de X a Y será denotado por $\mathbf{C}(X,Y)$. También escribimos $\mathbf{C}(X,X) = \mathbf{C}(X)$.

Un operador T de X a Y se dice que es *cerrable* si tiene una extensión cerrada. Es equivalente a la condición de que el grafo $G(T)$ sea una subvariedad de una variedad lineal cerrada la cual es al mismo tiempo un grafo. Se sigue que T *es cerrable si y sólo si* la cerradura $\overline{G(T)}$ de $G(T)$ es un grafo. Somos por tanto conducidos al criterio: T es cerrable si y sólo si ningún elemento de la forma $\{0, v\}$, $v \neq 0$, es el límite de elementos de la forma $\{u, Tu\}$. En otras palabras, T *es cerrable si y sólo si*

$$u_n \in D(T), \; u_n \to 0 \quad \text{y} \quad Tu_n \to v \quad \text{implican} \quad v = 0 \tag{9}$$

Considere un operador T de X a Y y un operador S de Y^* en X^*. T y S se dice que son *adjuntos* entre sí si

$$(g, Tu) = (Sg, u), \quad u \in D(T), \quad g \in D(S). \tag{10}$$

Sean T y A operadores con el mismo espacio dominio X (pero no necesariamente con el mismo espacio rango). Suponga que $D(T) \subset D(A)$ y, para cualquier sucesión $u_n \in D(T)$ con ambas $\{u_n\}$ y $\{Tu_n\}$ acotadas, $\{Au_n\}$ contiene una subsucesión convergente. Entonces A se dice que es *relativamente compacto con respecto de* T o simplemente *T-compacto.*

Diremos que un escalar λ pertenece al *espectro esencial* $\sigma_e(A)$ de A si $\lambda \in \sigma(A+K)$ para cada operador K compacto sobre X. Por tanto

$$\sigma_e(A) = \bigcap_{K \in \mathbf{B}_0(X)} \sigma(A+K). \tag{11}$$

11. Definición. Un álgebra de Banach con una involución $x \to x^*$ que satisface

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \tag{12}$$

para cada $x \in A$ se llama una B^*-álgebra.

12. Definiciones. Un espacio vectorial complejo H se llama un *espacio con producto interior* (o *espacio unitario*) si a cada par ordenado de vectores x e y de H está asociado un número complejo (x, y), llamado *producto interior* o *producto escalar* de x e y, de manera que se verifican las siguientes reglas:

(a) $(y,x) = \overline{(x,y)}$. (La barra denota conjugación compleja).

(b) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.

(c) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ si $x \in H$, $y \in H$, $\alpha \in \mathbf{C}$.

(d) $(x,x) \geq 0$ para todo $x \in H$.

(e) $(x,x) = 0$ solamente cuando $x = 0$.

Todo espacio con producto interior puede normarse definiendo

$\|x\| = (x,x)^{1/2}$.

Cuando el espacio normado que resulta es completo, se dice que es un *espacio de Hilbert.*

13. Teorema. Si M es un subespacio cerrado de H, entonces

$H = M \oplus M^{\perp}$.

La conclusión es, de manera más explícita, que M y $M^{\perp}$ son subespacios cerrados de H cuya intersección es $\{0\}$ y cuya suma es H. El espacio $M^{\perp}$ se llama *complemento ortogonal* de M.

Considere dos espacios unitarios H y H'. Una función complejo-valuada $t[u,u']$ definida para $u \in H$ y $u' \in H'$ es llamada una *forma sesquilinear* sobre $H \times H'$ si es lineal en u y semilineal en u'. Si en particular $H' = H$, hablamos de una forma sesquilineal sobre H. El producto interior en H es un caso especial de forma sesquilineal sobre H. Para una forma sesquilineal general $t[u,v]$ sobre H, no hay relación entre $t[u,v]$ y $t[v,u]$ de tal forma que la *forma cuadrática* $t[u] \equiv t[u,u]$ no necesita ser real-valuada. En cualquier caso, sin embargo, tenemos la relación (*principio de polarización*)

$$t[u,v] = \frac{1}{4}(t[u+v] - t[u-v] + \imath t[u+\imath v] - \imath t[u-\imath v]) \tag{13}$$

Por tanto la forma sesquilineal de $t[u,v]$ está determinada por la forma cuadrática asociada $t[u]$. En particular $t[u,v] = 0$ idénticamente si $t[u] = 0$ idénticamente. $t[u,v]$ es llamada la *forma polar* de $t[u]$.

14. Familias ortonormales completas. No definimos la noción de base en un espacio de Banach general. En un espacio de Hilbert, una *familia ortogonal completa* juega el papel de una base.

Vamos a considerar un operador compacto arbitrario $T \in \mathrm{B}_0(H,H')$ donde H' es otro espacio de Hilbert. Dado que T^*T es un operador compacto simétrico no negativo en H, tenemos la expresión espectral (note que los autovalores de T^*T son no negativos)

$$T^*T = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2(\ ,\varphi_k)\varphi_k, \quad (\varphi_j,\varphi_k) = \delta_{jk}, \tag{14}$$

donde $T^*T\varphi_k = \alpha_k^2\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ y $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots > 0$. Sea

$$\varphi'_k = \alpha_k^{-1} T\varphi_k \in H', \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Los φ'_k forman una familia ortonormal en H', pues $(\varphi'_j, \varphi'_k) = (\alpha_j\alpha_k)^{-1}(T\varphi_j, T\varphi_k) = (\alpha_j\alpha_k)^{-1}(T^*T\varphi_j, \varphi_k) = \alpha_j\alpha_k^{-1}(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$. Ahora afirmamos que

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\ , \varphi_k)\varphi'_k. \tag{16}$$

Sea $T \in \mathrm{B}(H, H')$ y definamos

$$\|T\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|T\varphi_k\|^2\Big)^{1/2}, \tag{17}$$

donde $\{\varphi_k\}$ es una familia ortonormal completa en H. Si la serie al lado derecho de (17) no converge, hacemos $\|T\|_2 = \infty$. $\|T\|_2$ es llamada la *norma Schmidt* de T.

La norma Schmidt es independiente de la elección de la familia $\{\varphi_k\}$ empleada en la definición. Para ver esto notamos que

$$\sum_k \|T\varphi_k\|^2 = \sum_k \sum_j |(T\varphi_k, \varphi'_j)|^2 = \sum_j \sum_k |(\varphi_k, T^*\varphi'_j)|^2 =$$

$$= \sum_j \|T\varphi'_j\|^2 \tag{18}$$

donde $\{\varphi'_j\}$ es una familia ortonormal completa en H'; el cambio de orden de suma en (18) está permitido porque todos los términos involucrados son no negativos. El miembro izquierdo de (18) es independiente de la particular familia $\{\varphi'_j\}$, mientras que el miembro derecho es independiente de la particular familia $\{\varphi_k\}$. Por lo tanto ambos miembros son independientes de la elección de $\{\varphi_k\}$ o $\{\varphi'_j\}$.

El subconjunto de $\mathrm{B}(H, H')$ consistente en todo T con $\|T\|_2 < \infty$ es llamado la clase de Schmidt; y será denotada por $\mathrm{B}_2(H, H')$.

Si $T = T^*$, entonces T se llama *autoadjunto.*

15. Operadores normales. Se dice que un operador lineal (no necesariamente acotado) T en H es *normal* cuando T es cerrado, densamente definido y

$$T^*T = TT^*.$$

Los siguientes resultados están en Rudin 1979.

Teorema 1.10. Sean K y C dos subconjuntos de un espacio vectorial topológico X tales que K es compacto, C es cerrado y $K \cap C = \phi$. Entonces 0 tiene un entorno V tal que

$$(K + V) \cap (C + V) = \phi.$$

Teorema 1.15. Todo subconjunto compacto K de X es acotado.

Teorema 3.17. Sea V un entorno de 0 en un espacio vectorial topológico separable X, y sea $\{\Lambda_n\}$ una sucesión en X^* tal que

$$|\Lambda_n x| \leq 1 \qquad (x \in V, \, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Entonces existe una subsucesión $\{\Lambda_{n_i}\}$ y un $\Lambda \in X^*$ tales que

$$\Lambda x = \lim_{i \to \infty} \Lambda_{n_i} x \qquad (x \in X).$$

Teorema 3.31. Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbf{C}$ y X un espacio de Fréchet complejo, y supongamos que

$$f : \Omega \to X$$

es una función holomorfa débilmente. Entonces f es fuertemente holomorfa en Ω.

Teorema 4.10. Sean X e Y espacios normados. A cada $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ le corresponde un único $T^* \in \mathrm{B}(Y^*, X^*)$ que verifica

$$< Tx, y^* > = < x, T^* y^* >$$

cualesquiera que sean $x \in X$ e $y^* \in Y^*$. Además, se verifica

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Teorema 4.18. Sean X e Y espacios de Banach. Entonces los operadores compactos forman un subespacio cerrado de $\mathrm{B}(X, Y)$ en la topología nórmica.

Teorema 4.25. Sea X un espacio de Banach, $T \in \mathrm{B}(X)$, y supongamos que T sea compacto. Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma(T)$ entonces λ es un valor propio de T y $\bar{\lambda}$ es un valor propio de T^* con la misma multiplicidad.

Sea A un álgebra de Banach; sea $G = G(A)$ el conjunto de todos los elementos invertibles de A

Teorema 10.12. Si A es un álgebra de Banach, entonces $G(A)$ es un subconjunto abierto de A, y la aplicación $x \to x^{-1}$ es un homeomorfismo de $G(A)$ en $G(A)$.

Teorema 11.28. Toda B^*-álgebra A es tal que si $x \in A$ es normal, entonces $\rho(x) = \|x\|$.

Teorema 12.7. Si $T \in \mathrm{B}(H)$ y $(Tx, x) = 0$ para todo $x \in H$, entonces $T = 0$.

Teorema 12.14. Cada una de las tres propiedades siguientes de una proyección $P \in \mathrm{B}(H)$ implica las otras dos:

(a) P es autoadjunta.

(b) $R(P) = N(P)^{\perp}$.

(c) $(Px, x) = \|Px\|^2$ para todo $x \in H$.

Teorema 13.31. Sea A un operador autoadjunto en H. $(Ax, x) \geq 0$ para todo $x \in D(A)$ (brevemente: $A \geq 0$) si y sólo si $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

El siguiente resultado está en <u>Royden 1969</u>.

Proposición 6.4. Un espacio lineal normado X es completo si y sólo si cada serie absolutamente sumable es sumable.

Los siguientes resultados están en <u>Kato 1976</u>.

Teorema III.4.8. El producto de un operador compacto con un operador acotado es compacto. Más precisamente, sean $T \in \mathrm{B}_0(X, Y)$ y $A \in \mathrm{B}(Y, Z)$, $B \in \mathrm{B}(W, X)$, W, X, Y, Z siendo espacios de Banach. Entonces $AT \in \mathrm{B}_0(X, Z)$ y $TB \in \mathrm{B}_0(W, Y)$.

Teorema III.5.20. Un operador cerrado T de X a Y con dominio X es acotado. En otras palabras, $T \in \mathrm{C}(X, Y)$ y $D(T) = X$ implican que $T \in \mathrm{B}(X, Y)$.

Teorema III.5.28. Sean T de X a Y y S de Y^* a X^* adjuntos entre sí. Si uno de T o S es densamente definido, el otro es cerrable.

Teorema III.6.7. $\rho(T)$ es un conjunto abierto en el plano complejo, y $R(\xi)$ es (puntualmente) holomórfica para $\xi \in \rho(T)$. ("Puntualmente" toma en cuenta que $\rho(T)$ no necesita ser conexo.) Cada componente de $\rho(T)$ es el dominio natural de $R(\xi)$ ($R(\xi)$ no puede ser continuada analíticamente más allá de $\rho(T)$).

Teorema IV.5.35. El espectro esencial es conservado bajo una perturbación relativamente compacta. Más precisamente, sea $T \in \mathrm{C}(X)$ y sea A T-compacto. Entonces T y $T + A$ tienen el mismo espectro esencial.

Ejemplo IX.1.6. Si X =H es un espacio de Hilbert y $T = \imath H$ con H un operador autoadjunto, tanto T como $-T$ satisfacen las condiciones

i) $T \in \mathbf{C}(X)$ con dominio $D(T)$ denso en X.

ii) El eje real negativo pertenece al conjunto resolvente de T, y el resolvente $(T+\xi)^{-1}$ satisface la desigualdad

$$\|(T+\xi)^{-1}\| \leq 1/\xi, \quad \xi > 0.$$

Por tanto $U(t) = e^{-T}$ está definido para $-\infty < t < +\infty$ y satisface

$$\frac{d}{dt}U(t)u = -U(t)Tu = -TU(t)u, \quad t \geq 0, \quad u \in D(T).$$

Se sigue que

$$U(t+s) = U(t)U(s), \quad s, t \geq 0.$$

se satisface para s, t reales, positivos, negativos o cero. En particular $U(t)U(-t) = U(0) = 1$, así que $\|U(t)u\| = \|u\|$ y $U(t)$ es isométrico. Dado que $U(t)^{-1} = U(-t) \in \mathrm{B}(H)$, $U(t)$ es incluso unitario: $U(t) = e^{-\imath t H}$ forman un *grupo unitario*.

Integración vectorial.

Nos concernerán funciones vector-valuadas $x(\sigma)$ definidas en algún conjunto abstracto C a un espacio de Banach X. Por tanto a cada punto $\sigma \in C$ corresponde un único vector $x(\sigma)$ perteneciente a X. En el caso en que el espacio de Banach sea el espacio de operadores lineales acotados de X a Y, esto es $\mathrm{B}(X,Y)$, hablaremos de la función como una *función operador-valuada* y la denotaremos por $U(\sigma)$.

La siguiente definición está en Hille 1948.

Definición 3.2.3. $x(\alpha)$ se dice que es separablemente-valuada si su rango $R = x(S)$ es separable. Es casi separablemente-valuada si existe un conjunto nulo S_0 en S tal que $x(S - S_0)$ es separable.

Las siguientes definiciones están en Hille y Phillips 1957.

Definición 3.5.4. (1) $x(\sigma)$ se dice que es débilmente medible en C si las funciones numéricamente-valuadas $x^*[x(\sigma)]$ son medibles para cada $x^* \in X^*$. (2) $x(\sigma)$ es fuertemente medible si existe una sucesión de funciones numerablemente-valuadas convergente en casi todo punto en C a $x(\sigma)$.

Definición 3.5.5. (1) La función operador-valuada $U(\sigma)$ se dice que es uniformemente medible en C si existe una sucesión de funciones operador-numerablemente-valuadas en $\mathrm{B}(X,Y)$ convergente casi dondequiera a $U(\sigma)$ en la topología uniforme de operadores. (2) $U(\sigma)$ es fuertemente medible en C si la función vector-valuada $U(\sigma)[x]$ es fuertemente medible en el sentido de la Definición 3.5.4 (2) para todo $x \in X$. (3) $U(\sigma)$ es débilmente medible en C si $y^*\{U(\sigma)[x]\}$ es medible para toda $x \in X$, $y^* \in Y^*$.

Definición 3.7.2. Una función numerablemente-valuada $x(\sigma)$ sobre C a X es integrable (Bochner) si y sólo si $\|x(\sigma)\|$ es integrable (Lebesgue). Por definición

$$(B)\int_E x(\sigma)dm = \sum_{k=1}^{\infty} x_k m(E_k \cap E)$$

donde $x(\sigma) = x_k$ sobre $E_k \subset C$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Definición 3.7.3. Una función $x(\sigma)$ sobre C a X es integrable (Bochner) si y sólo si existe una sucesión de funciones numerablemente-valuadas integrables $\{x_n(\sigma)\}$ convergente casi dondequiera a $x(\sigma)$ y tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_C \|x(\sigma) - x_n(\sigma)\|dm = 0.$$

Por definición

$$(B)\int_E x(\sigma)dm = \lim_{n\to\infty}(B)\int_E x_n(\sigma)dm.$$

para cada E en la σ-álgebra de C.

Los siguientes resultados están en Hille 1948.

Teorema 3.2.2. $x(\alpha)$ es fuertemente medible en C si y sólo si es débilmente medible y casi separablemente-valuada.

Teorema 3.2.3. (1) Si $x(\alpha)$ e $y(\alpha)$ son fuertemente medibles en C y γ_1, γ_2 son constantes, entonces $\gamma_1 x(\alpha) + \gamma_2 y(\alpha)$ es fuertemente medible. (2) Si $f(\alpha)$ es una función numéricamente-valuada finita que es medible (Lebesgue), entonces $f(\alpha)x(\alpha)$ es fuertemente medible si $x(\alpha)$ tiene esta propiedad.

Teorema 3.3.1. Una condición necesaria y suficiente para que $U(\alpha)$ sea (1) fuertemente medible es que $U(\alpha)$ sea débilmente medible y que $U(\alpha)[x]$ sea casi separablemente-valuada en X para toda $x \in X$; (2) uniformemente medible es que $U(\alpha)$ sea débilmente medible y casi separablemente-valuada en $\mathbf{B}(X)$.

El siguiente resultado aparece en Hille y Phillips 1957.

Teorema 3.7.4. Una condición necesaria y suficiente para que $x(\sigma)$ de C a X sea integrable (Bochner) es que $x(\sigma)$ sea fuertemente medible y que $\int_C \|x(\sigma)\| dm < \infty$.

Espacios $H^{s,p}$.

Los siguientes resultados están en Royden 1969.

Proposición 2.8 Cada conjunto abierto de números reales es la unión de una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos.

Teorema 3.20 Sea $< f_n >$ una sucesión de funciones medibles (con el mismo dominio de definición). Entonces la funciones $\sup\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\inf\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim} f_n$ y $\underline{\lim} f_n$ son todas medibles.

16. Ejemplo. Cuando los espacios dominio y rango X, Y son espacios de funciones tales como $C(E)$, $L^p(E)$, un operador T definido por la multiplicación por una función fija es llamado un *operador multiplicación*. Por ejemplo, sea $X = L^p(E)$, $Y = L^q(E)$ y defina T por $Tu(x) = f(x)u(x)$, donde $f(x)$ es una función complejo-valuada medible fija definida sobre E. $D(T)$ debe ser tal que $u \in D(T)$ implique $fu \in L^q(E)$. Si $D(T)$ es maximal con esta propiedad [esto es, $D(T)$ consiste en todas las $u \in L^p(E)$ tales que $fu \in L^q(E)$], T es llamado el operador multiplicación *maximal* por $f(x)$. T es invertible si y sólo si $f(x) \neq 0$ casi dondequiera en E. Si en particular $p = q$, el operador multiplicación maximal T está definido sobre la totalidad de $L^p(E)$ si y sólo si $f(x)$ es esencialmente acotada sobre E.

17. Ejemplo. Un operador de la forma

$$Tu(y) = v(y) = \int_E t(y,x)u(x)dx, \quad y \in F, \tag{19}$$

es llamado *operador integral* con *kernel* $t(y,x)$. $t(y,x)$ es una función complejo-valuada definida para $x \in E$, $y \in F$ (E, F son, por ejemplo, subconjuntos de espacios euclideanos, no necesariamente de la misma dimensión). Si X e Y son espacios de funciones definidas sobre E y F respectivamente, digamos $X = L^p(E)$ e $Y = L^q(F)$, entonces (19) define un operador T de X a Y con una apropiada especificación de $D(T)$. $D(T)$ debe ser tal que para $u \in D(T)$, la integral a la derecha de (19) exista (en un sentido apropiado) para casi toda y y el resultado $v(y)$ pertenezca a Y. Si $D(T)$ consiste exactamente de todas esas u, T es llamado operador integral *maximal* definido por el kernel dado.

18. El símbolo Ω denota un conjunto abierto en un espacio Euclidiano n-dimensional real, $\mathbf{R}^n$.

Si $0 < \lambda \leq 1$, definimos $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ como el subespacio de $C^m(\overline{\Omega})$ consistente en aquellas funciones ϕ para las cuales, para $0 \leq |\alpha| \leq m$, $D^\alpha\phi$ satisface en Ω una condición de Hölder de exponente λ, esto es, existe una constante K tal que

$$|D^\alpha\phi(x) - D^\alpha\phi(y)| \leq K|x-y|^\lambda, \qquad x, y \in \Omega$$

$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|\phi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha\phi(x)| + \max_{0 \leq \alpha \leq m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha\phi(x) - D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Es claro que $C^{m,1}(\overline{\Omega}) \not\subset C^{m+1}(\overline{\Omega})$.

Para una función $\phi(x)$ la cerradura del conjunto de puntos para los cuales $\phi(x) \neq 0$ es llamado el *soporte* de ϕ y denotado por supp ϕ. $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ denota al conjunto de funciones que son infinitamente diferenciables en $\mathbf{R}^n$. Por $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ denotaremos al conjunto de funciones $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ tales que supp ϕ es acotado. Si u es una función definida en $\mathbf{R}^n$, y si $x \in \mathbf{R}^n$, $T_x u$ es la función definida por

$$(T_x u)(y) = u(y+x), \tag{20}$$

Dado un $t \in \mathbf{R}^n$, el *carácter* e_t es la función definida

$$e_t(x) = e^{\imath t \cdot x} = \exp\{\imath(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n)\} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Todo e_t verifica la ecuación funcional

$$e_t(x+y) = e_t(x)e_t(y).$$

Así pues, e_t es un homomorfismo del grupo aditivo $\mathbf{R}^n$ sobre el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1.

La *transformada de Fourier* de una función $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ es la función $\hat{f}$ definida mediante

$$\hat{f}(t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} f e_{-t} \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

La aplicación que lleva f a $\hat{f}$ se denomina *transformación de Fourier.*

19. Funciones de decrecimiento rápido (espacio de Schwartz). Consiste en las funciones $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ que verifican la condición

$$\sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D^\alpha f)(x)| < \infty \tag{21}$$

para todo $N = 0, 1, 2, \ldots$. (Recordemos que $|x|^2 = \sum x_i^2$.) Dicho de otra forma, se exige que $P \cdot D^\alpha f$ sea una función acotada sobre $\mathbf{R}^n$, cualesquiera que sean el polinomio P y el multi-índice α. Puesto que esta condición se cumple con $(1 + |x|^{n+\epsilon})P(x)$, $\epsilon > 0$, en lugar de $P(x)$, resulta que toda $P \cdot D^\alpha f$ pertenece a $L^1(\mathbf{R}^n)$.

Las funciones de decrecimiento rápido forman un espacio vectorial que se denota $\mathcal{S}$; en el cual la colección numerable de seminormas (21) define una topología localmente convexa.

20. Los espacios $H^{s,p}$. En esta sección definiremos clases de funciones que son importantes en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. Para $v \in \mathcal{S}$; s real y $1 \leq p \leq \infty$ definimos

$$\|v\|_{s,p} = \|\bar{F}[(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}s} F v]\|_p. \tag{22}$$

Uno checa fácilmente que ésta es una norma sobre $\mathcal{S}$ y que $\|v\|_{0,p}$ es meramente la norma L^p de v. Por tanto para cada s y p, $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial normado bajo la norma (22). $H^{s,p}$ denota la completación de $\mathcal{S}$ bajo la norma (22).

$C_B^\infty(\mathbf{R}^n)$ denota al conjunto de funciones en $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ tales que todas sus derivadas están acotadas en $\mathbf{R}^n$.

Sea

$$P(\xi) = \sum_{|\mu| \leq m} a_\mu \xi^\mu \tag{23}$$

un polinomio de grado m. (Recuerde la notación: $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ es un multi-índice de enteros no-negativos, $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y $\xi^\mu = \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}$.)

Los coeficientes de $P(\xi)$ pueden ser números complejos. Correspondiendo al polinomio $P(\xi)$ podemos formar un operador diferencial como sigue. Sea

$$D_k = -\imath \partial / \partial x_k, \qquad 1 \leq k \leq n, \tag{24}$$

$D = (D_1, \ldots, D_n)$ y

$$D^\mu = D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}. \tag{25}$$

Entonces definimos al operador diferencial parcial de orden m

$$P(D) = \sum_{|\mu| \leq m} a_\mu D^\mu. \tag{26}$$

$P(\xi)$ es llamado el polinomio correspondiente al operador diferencial $P(D)$.

21. Operadores elípticos. Una muy importante clase de operadores diferenciales es el conjunto de operadores *elípticos*. El operador $P(D)$ dado por (26) es llamado elíptico si la única solución real de

$$P_m(\xi) = \sum_{|\mu| = m} a_\mu \xi^\mu = 0 \tag{27}$$

es $\xi = 0$. El operador $P(x, D)$ dado por

$$P(x, D) = \sum_{|\mu| \leq m} a_\mu(x) D^\mu, \tag{28}$$

es llamado elíptico en un punto x si la única solución real de $P_m(x, \xi) = 0$ es $\xi = 0$. El operador $P(x, D)$ es llamado elíptico en una región $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ si es elíptico y de orden m en cada punto $x \in \Omega$

Sea $P(D) = P(D_1, \ldots, D_n)$ un operador diferencial parcial con coeficientes constantes de orden m, actuando sobre funciones sobre $\mathbf{R}^n$. Denotamos su parte principal por $P_m(D)$. El operador P se dice que es de tipo principal si

$$\text{grad } P_m(\xi) \neq 0 \qquad \text{para } \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \tag{29}$$

Claramente un operador elíptico es también un operador del tipo principal.

Diremos que un número $z \in \mathbf{C}$ es un *valor crítico* de P si existe un $\xi_0 \in \mathbf{R}^n$ tal que $P(\xi_0) = z$, grad $P(\xi_0) = 0$.

Denotaremos al conjunto de todos los valores críticos de P por $\Lambda_c(P)$. Si $P(\xi)$ es un polinomio homogéneo de grado ≥ 2 entonces $\Lambda_c(P)$ consiste de un único punto $\{0\}$.

Los siguientes resultados están en Kato 1976.

Ejemplo III.2.11 El operador multiplicación maximal del ejemplo 16 para $q = p$ es acotado si y sólo si $f(x)$ es esencialmente acotada sobre E; tenemos que $\|T\| = \|f\|_\infty$.

Ejemplo V.2.19 Operadores integrales del tipo Schmidt. Sea $t(y,x)$ un kernel definido para $x \in E$, $y \in F$, donde E, F son conjuntos medibles de espacios euclideanos, y sea

$$\|t\|^2 = \iint_{E \times F} |t(y,x)|^2 dx dy < \infty.$$

Entonces el operador integral con kernel $t(y,x)$ define un operador $T \in \mathbf{B}_2(H, H')$ donde $H = L^2(E)$ y $H' = L^2(F)$.

Para ver esto primero notemos que la expresión formal (19) para Tu define un operador $T \in \mathbf{B}(H, H')$. Para mostrar que $T \in \mathbf{B}_2(H, H')$, consideramos $\{\varphi_k(x)\}$ y $\{\varphi'_j(y)\}$ dos familias ortonormales completas en H y H', respectivamente. Tenemos por (17) y (18)

$$\|T\|_2^2 = \sum_{j,k} |(T\varphi_k, \varphi'_j)|^2 = \sum_{j,k} \left| \iint_{E \times F} t(y,x)\varphi_k(x)\overline{\varphi'_j(y)} dx dy \right|^2$$

$$= \iint_{E \times F} |t(y,x)|^2 dx dy = \|t\|^2, \tag{a}$$

donde hemos usado el hecho de que las funciones $\overline{\varphi_k(x)}\varphi'_j(y)$ forman una familia ortonormal completa en el espacio de Hilbert $L^2(E \times F)$.

Sean $s(y,x), t(y,x) \in L^2(E \times F)$ y definamos los operadores integrales asociados $S, T \in \mathbf{B}_2(H, H')$ como arriba. Entonces

$$(S,T) = \iint_{E \times F} s(y,x)\overline{t(y,x)} dx dy; \tag{b}$$

esto se sigue de (a) por polarización. (b) muestra que $t \to T$ es una transformación isométrica de $L^2(E \times F)$ en $\mathrm{B}_2(H, H')$. Realmente esta transformación es unitaria: cada $T \in \mathrm{B}_2(H, H')$ es obtenido de este modo por un kernel $t \in L^2(E \times F)$. Para ver esto es suficiente recordar la expansión canónica (16) de T, la cual converge en norma $\| \;\|_2$. Dado que la suma parcial de esta expansión es un operador integral con kernel

$$t_n(y,x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi'_k(y) \overline{\varphi_k(x)} \quad \text{con} \quad \|t_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2,$$

se sigue que T es un operador integral con el kernel $t(y,x)$ el cual es el límite en $L^2(E \times F)$ de $t_n(y,x)$.

Los siguientes resultados están en Rudin 1979.

Teorema 7.2 Sean $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Entonces

(a) $(T_x f)^\wedge = e_x \hat{f}$;

(b) $(e_x f)^\wedge = T_{-x} \hat{f}$.

Teorema 7.9 Existe una isometría lineal F de $L^2(\mathbf{R}^n)$ sobre $L^2(\mathbf{R}^n)$, unívocamente determinada por la condición de que

$$Ff = \hat{f} \qquad \text{para todo } f \in \mathcal{S}.$$

Los siguientes resultados están en Schechter 1971.

Para $1 < p < \infty$ hacemos que p' denote $p/(p-1)$, para $p = 1$ hacemos $p' = \infty$ y para $p = \infty$ hacemos $p' = 1$.

Teorema 2.2.3 Si $u \in L^p$ para $1 \le p \le 2$, entonces

$$\int_{|x|<R} e^{-i\xi \cdot x} u(x)\, dx$$

converge en $L^{p'}$ cuando $R \to \infty$. Si hacemos que Fu denote el límite, entonces

$$\|Fu\|_{p'} \le \|u\|_p$$

y

$$(Fu, v) = (u, \bar{F}v), \qquad v \in \mathcal{S}.$$

Teorema 2.4.1 Si $1 \leq p < \infty$ y si F es un funcional lineal acotado sobre $H^{s,p}$, entonces hay un $v \in H^{-s,p'}$ tal que

$$Fu = (u, v), \qquad u \in H^{s,p},$$

$$\|v\|_{-s,p'} = \|F\|.$$

Teorema 2.4.6 Si $1 < p < \infty$, $u \in H^{s,p}$ y $v \in C_B^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, entonces $uv \in H^{s,p}$ y

$$\|uv\|_{s,p} \leq C\|u\|_{s,p},$$

donde la constante C no depende de u.

Teorema 2.4.11 Para cada s y $1 < p < \infty$, $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ es denso en $H^{s,p}$.

Teorema 3.1.2 Si $u \in H^{s,p}$ entonces

$$F[P(D)u] = P(\xi)Fu$$

Corolario 4.2.2 Para $1 < p < \infty$

$$(P_{0p})^* = \bar{P}_{0p'}.$$

Corolario 4.2.3 P_{02} es un operador normal. Si los coeficientes de $P(\xi)$ son reales, entonces P_{02} es autoadjunto.

Corolario 4.3.3 $\sigma_e(P_{02}) = \sigma(P_{02})$ y consiste en la cerradura del conjunto de valores asumidos por $P(\xi)$ para ξ real.

Ejemplo 4.5.3 El operador de Laplace $P(\xi) = -(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)$. Éste es elíptico y $\sigma(P_0)$ consiste en el eje real negativo.

Lema 6.4.3 Si $P(D)$ es un operador elíptico de orden m, entonces

$$D(P) = H^{m,p}$$

El siguiente resultado está en Adams 1975.

Un dominio abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ tiene la *propiedad de cono* si existe un cono finito C tal que cada punto $x \in \Omega$ es el vértice de un cono finito C_x contenido en Ω y congruente con C. (Note que C_x no necesita ser obtenido de C por translación paralela, sólo por movimiento rígido).

Teorema 5.4 (El teorema de inclusión de Sobolev). Sean j y m enteros no negativos y sea p tal que $1 \leq p < \infty$. Suponga que $mp > n$. Entonces

$$H^{j+m,p}(\mathbf{R}^n) \to C_B^j(\mathbf{R}^n).$$

Los siguientes resultados están en Agmon 1975.

Teorema A.1 Sea $P(D)$ un operador diferencial con coeficientes constantes de orden m y del tipo principal. Haga $m' = m$ si P es elíptico, y $m' = m - 1$ en otro caso. Sea K un conjunto compacto en $\mathbf{C} \setminus \Lambda_c(P)$ y sea $s > 1/2$. La siguiente estimación vale

$$\|u\|_{m',-s} \leq C\|(P(D) - z)u\|_{0,s}, \quad z \in K$$

$\forall u \in H_m(\mathbf{R}^n)$ donde C es alguna constante que no depende de z ni de u.

Observación A.2 Uno puede probar la siguiente forma más brillante del Teorema A.1. Sea $\Lambda_c(P)_\delta = \{z \in \mathbf{C}\text{:dist}(z, \Lambda_c(P)) < \delta\}$. Entonces para cualquier $s > 1/2$ y $\delta > 0$ existe una constante $C = C_{s,\delta}$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (|z| + 1)^{(m-1-|\alpha|)/m} \|D^\alpha u\|_{0,-s} \leq C\|(P(D) - z)u\|_{0,s}$$

$\forall u \in H_m(\mathbf{R}^n)$ y $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \Lambda_c(P)_\delta$.

Sea $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n\text{: } |x| < r\}$.

Teorema C.1 Sea $u(x)$ una función en $H_2(B_1)$. Suponga que u verifica la ecuación diferencial

$$-\Delta u + q(x)u = f(x) \qquad \text{en } B_1$$

donde q y f pertenecen a $L^2(B_1)$.

Suponga también que existe un número θ, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, y constantes positivas Q y F tales que

$$\sup_{x \in B_1} \int_{B_1} |q(y)|^2 |y - x|^{-n-2\theta+4} dy \leq Q^2,$$

y

$$\sup_{x \in B_1} \int_{B_1} |f(y)|^2 |y - x|^{-n-2\theta+4} dy \leq F^2.$$

Entonces u es una función Hölder continua en B_1. Para cada $0 < r < 1$ la siguiente estimación vale

$$\|u\|_{C^\theta(B_1)} \leq C_r(Q+1)^\nu(\|u\|_{L^2(B_1)} + F)$$

donde ν es una constante positiva dependiendo sólo de θ y n, y C_r es una constante dependiendo sólo de θ, n y r. Aquí

$$\|u\|_{C^\theta(B_r)} = \sup_{|x|<r} |u(x)| + \sup_{\substack{|x|<r \\ |y|<r}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\theta}.$$

También tenemos

$$\|u\|_{H_2(B_r)} \leq C_r(Q+1)^\nu(\|u\|_{L^2(B_1)} + F).$$

Capítulo 2

Introducción a la teoría de la dispersión

Descripción de los experimentos de dispersión.

En este capítulo daremos una breve descripción de los principales experimentos de dispersión con el objeto de obtener una noción de las cantidades que íntimamente ligan las observaciones con la parte formal de la teoría.

Hay muchas variedades diferentes de experimentos de dispersión. Todos tienen ciertos elementos en común los cuales exhibiré en un caso simple ilustrado esquemáticamente en la Figura 1. Esta representación exhibe las cuatro partes esenciales que pueden ser identificadas en casi todo experimento de dispersión. Estos cuatro ingredientes son la fuente S, el aparato preparatorio P, el blanco T y el detector D.

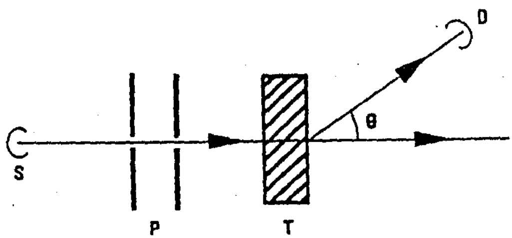

Figura 1.*Representación esquemática de un experimento típico de dispersión.*

La fuente S produce partículas que van a interactuar con las partículas en el blanco T. Es importante que la fuente pueda producir partículas bajo condiciones prácticamente idénticas y bien definidas, porque todos los experimentos de dispersión involucran mediciones repetidas sobre sistemas idénticamente preparados. El aparato preparatorio P (e.g. un colimador, un espectrómetro de haz o un polarizador) sirve para definir las condiciones iniciales de las partículas incidentes, en particular su momenta, con una precisión tal que sea compatible con una intensidad suficiente para dar una razonable taza de conteo.

El blanco T contiene las partículas que se supone interactuarán con las partículas incidentes. Las condiciones del blanco pueden tener efectos muy importantes sobre la taza de conteo y deben ser conocidas y consideradas con el objeto de relacionar las observaciones y las interacciones individuales.

El detector D está localizado de tal modo que detecta sólo partículas que son dispersadas por el blanco. Esto es, el detector no debe responder si el blanco es retirado. Esto no siempre es posible en la práctica, ya sea porque el haz incidente no está suficientemente bien colimado o porque hay dispersión residual en el material circundante. Tales efectos dan lugar a correcciones que pueden ser determinadas por calibración cuidadosa del detector.

Es también importante que el detector esté localizado suficientemente lejos del blanco de tal manera que la interacción entre las partículas dispersadas y el blanco sea despreciable cuando las partículas son detectadas. El detector tendrá en todos los casos un ángulo finito de resolución. Para un análisis detallado del experimento es deseable tener este ángulo tan pequeño como sea posible. Hay límites prácticos a esto pues un muy pequeño ángulo de resolución puede ser incompatible con una exactitud estadística suficiente. Las mismas consideraciones limitan la precisión del aparato preparatorio.

Las características físicas de los sistemas de dispersión.

La descripción precedente de experimentos típicos de dispersión muestra que las características esenciales de un sistema de dispersión pueden ser expresadas como sigue:

En un proceso de dispersión podemos distinguir tres estados en la evolución temporal del sistema. En el primer estado el sistema es preparado en el pasado remoto. Durante este estado la partícula incidente y la partícula blanco son supuestas tan alejadas la una de la otra que su interacción mutua es despreciable y por tanto no tiene prácticamente efecto sobre la evolución de cada partícula. Esta suposición es siempre hecha en la interpretación de experimentos típicos de dispersión donde las condiciones iniciales son los valores de un conjunto de cantidades físicas que se supone caracterizan a las partículas libres (e.g. momenta, spins, masas). Por tanto uno espera que en el pasado remoto el estado del sistema evolucione de acuerdo a las leyes pertenecientes a las partículas libres.

Durante el segundo estado las partículas interactúan entre sí y la evolución está gobernada por una ecuación de movimiento para la cual el término de interacción juega un papel esencial. Es de hecho esta interacción la que produce la dispersión.

Durante el tercer estado uno encuentra la misma situación que en el primero. De hecho, después de que la dispersión ha ocurrido, las partículas se separan la una de la otra de tal forma que de nuevo la interacción no tiene prácticamente efecto sobre la evolución futura de los estados. En el futuro distante el detector observa el nuevo estado de las partículas el cual fue producido por la dispersión.

La condición para que los estados que describen eventos de dispersión puedan ser caracterizables a grandes tiempos positivos y grandes tiempos negativos por cantidades pertenecientes a partículas libres o fragmentos de dispersión es llamada la condición asintótica. Con el objeto de expresar esta condición en un lenguaje matemático, necesitamos estudiar la descripción de la evolución temporal de sistemas mecano-cuánticos e introducir una topología (o una noción de convergencia) la cual servirá para expresar la diferencia entre el sistema real y un sistema libre en el pasado remoto y en el futuro distante. Esto será hecho en el curso de la siguiente sección.

La condición asintótica.

El objetivo de esta sección es presentar una formulación matemática precisa de la condición asintótica de la teoría de la dispersión. Consideramos aquí el caso más simple posible, i.e. cuando un sistema de dispersión está completamente descrito por dos grupos uni-paramétricos unitarios continuos $\{U_t\}$ y $\{V_t\}$ actuando en un espacio de Hilbert H formado por todos los estados (puros) posibles del sistema físico bajo consideración. El grupo $\{U_t\}$ es interpretado como el que describe la evolución temporal de los estados de un sistema en la ausencia de una perturbación o de una interacción entre sus constituyentes y será llamado el grupo de evolución no perturbado. El grupo $\{V_t\}$ se supone representa la evolución con la interacción activa y será llamado el grupo de evolución total.

La condición asintótica será matemáticamente formulada abajo en términos de un par abstracto de grupos uni-paramétricos unitarios. Físicamente estos dos grupos no están por supuesto relacionados, y de la interpretación dada arriba uno ve que la relación entre $\{U_t\}$ y $\{V_t\}$ usualmente será dada en términos de los generadores infinitesimales de estos dos grupos los cuales son unívocamente determinados. Estos dos operadores autoadjuntos serán de aquí en adelante denotados por H_0 y H respectivamente, i.e. escribimos

$$U_t = \exp(-\imath \mathrm{H}_0 t) \qquad \text{y} \qquad V_t = \exp(-\imath \mathrm{H} t).$$

H_0 es interpretado como el operador de energía en ausencia de interacción y será llamado el Hamiltoniano no perturbado. H (llamado el Hamiltoniano total) es la suma de H_0 y de la interacción Hamiltoniana V, i.e. $H=H_0+V$. En muchos casos tanto H_0 como V son operadores autoadjuntos no acotados, y entonces la suma H_0+V definida sobre $D \equiv D(H_0) \cap D(V)$ no necesita ser un operador autoadjunto. El Hamiltoniano total H será entonces una extensión autoadjunta de H_0+V. Uno ve que, si H_0+V es esencialmente autoadjunto, entonces la evolución total del grupo es unívocamente determinada dando H_0 y V. Por otro lado, si H_0+V no es esencialmente autoadjunto, H_0+V tendrá más de una extensión autoadjunta, y en ese caso una condición adicional será necesaria con el objeto de definir la evolución total.

Como un ejemplo que podemos llevar en mente mencionamos aquí el potencial dispersor. El sistema físico es una partícula no-relativista sin spin la cual es dispersada por un potencial $V(x)$. El espacio de Hilbert es $L^2(\mathbf{R}^3)$, el Hamiltoniano no perturbado es el operador de energía cinética $H_0 = p^2$ (hacemos $\hbar = 2m = 1$), y el Hamiltoniano total es $H= p^2+V$, donde V denota al operador maximal de multiplicación en $L^2(\mathbf{R}^3)$ determinado de acuerdo al ejemplo 1.16 por la función real-valuada $V(x)$ llamada potencial. Cuando hablemos de un potencial dispersor usaremos los términos Hamiltoniano libre para H_0 y grupo de evolución libre para $\{U_t\}$. (Debe tenerse en mente que en ciertas situaciones físicas la evolución no perturbada no describe partículas libres; como un ejemplo mencionamos la dispersión por impuresas en cristales en donde $\{U_t\}$ describe la evolución de una partícula en un potencial periódico.)

En la presencia de la interacción la evolución temporal de un vector de estado $g \in H$ está gobernada por el grupo $\{V_t\}$, i.e. el vector de estado correspondiente al tiempo t es $V_t g$. Como ya remarcamos en las secciones anteriores, en una típica situación de dispersión uno quiere aproximar la evolución total en algún sentido por la evolución libre conforme $t \to \pm\infty$. Esto es fácilmente logrado suponiendo que, dado el vector $g \in H$, existen dos vectores de estado $f_\pm$ tales que $V_t g$ converge fuertemente a $U_t f_\pm$ conforme $t \to \pm\infty$ respectivamente, i.e. tales que

$$\lim_{t\to-\infty} \|V_t g - U_t f_-\| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \|V_t g - U_t f_+\| = 0. \tag{1}$$

Esto significa que $V_t g$ es prácticamente indistinguible de $U_t f_-$ en el pasado remoto y de $U_t f_+$ en el futuro distante. El requerimiento de la existencia de vectores $f_\pm$ verificando (1) es por supuesto una severa restricción sobre el par de grupos $\{U_t\}, \{V_t\}$ y corresponde esencialmente a imponer la condición asintótica para el sistema de dispersión dado.

(1) implica en particular que para cualquier proyección P

$$\lim_{t\to-\infty} \{\|PV_t g\|^2 - \|PU_t f_-\|^2\} = 0, \tag{2}$$

y similarmente cuando $t \to +\infty$. Considerando por ejemplo la dispersión por un potencial y tomando por P el operador multiplicación en $L^2(\mathbf{R}^3)$ por la función característica de una región Δ, uno ve que la diferencia entre las mediciones de probabilidad de la posición sobre cualquier subconjunto medible Δ de $\mathbf{R}^3$ para los estados $V_t g$ y $U_t f_\pm$ converge a cero conforme $t \to \pm\infty$ respectivamente. Un resultado similar vale para las mediciones de probabilidad de momentum.

Unos cuantos puntos necesitan mayor especificación en la precedente descripción de la condición asintótica. Uno tendrá qué indicar para que conjunto de vectores g en H (de aquí en adelante los llamaremos estados de dispersión de H) las consideraciones de arriba son cubiertas. En muchas situaciones prácticas esto podría ser el conjunto de vectores que describen a las partículas incidentes a grandes tiempos negativos y a las partículas emergentes a grandes tiempos positivos. Por ejemplo en la dispersión por un potencial cada vector evolucionando bajo la evolución libre $\{U_t\}$ está localizado lejos del centro dispersor a grandes tiempos, y entonces es claro que (1) puede ser verificada sólo si $V_t g$ tiene la misma propiedad.

Más comprensión puede obtenerse si consideramos un estado acotado de H . Si g es un autovector de H, i.e. si $\mathrm{H}g = \mu g$ para alguna $\mu \in \mathbf{R}$, entonces el estado $V_t g = \exp(-\imath\mu t)g$ es simplemente un múltiplo de g y por tanto no describirá una situación de dispersión. Por esta razón se espera que los estados de dispersión estén asociados con el espectro continuo de H.

Aquí no deseamos usar ninguna especificación particular de los estados de dispersión. Simplemente suponemos que a cada Hamiltoniano H uno puede asociar un conjunto de estados de dispersión $M_\infty(\mathrm{H})$ teniendo las siguientes dos propiedades:

(i) $M_\infty(\mathrm{H})$ es un subespacio cerrado de H.

(ii) $M_\infty(\mathrm{H})$ es invariante bajo el grupo $\{\exp(-\imath\mathrm{H}t)\}$, i.e. si $g \in M_\infty(\mathrm{H})$, entonces $\exp(-\imath\mathrm{H}t)g \in M_\infty(\mathrm{H})$ para toda $t \in \mathbf{R}$.

(i) significa que $M_\infty(\mathrm{H})$ debe ser un conjunto lineal el cual es también fuertemente cerrado. El atributo "estado de dispersión" entonces corresponde a una observable, la cual es representada por el operador autoadjunto $E_\infty(\mathrm{H})$ definido como la proyección ortogonal con rango $M_\infty(\mathrm{H})$. (ii) es una expresión de la homogeneidad en el tiempo de los estados de dispersión considerados aquí: la definición de los estados de dispersión no debería depender del tiempo (esto no necesita verificarse para los Hamiltonianos dependientes del tiempo). La condición (ii) puede ser reescrita como:

$$E_\infty(\mathrm{H})\exp(-\imath\mathrm{H}t) = \exp(-\imath\mathrm{H}t)E_\infty(\mathrm{H}). \tag{3}$$

Ahora formulamos la condición asintótica más precisamente y de un modo más cercano al retrato físico. En una situación práctica de dispersión uno parte a grandes tiempos negativos preparando un estado. Esto corresponde a dar el estado f_- en (1).

Note que en (1) f_- es interpretada como el estado inicial <u>al tiempo $t = 0$</u>, i.e. el estado preparado a un tiempo negativo t podría ser $U_t f_-$. f_- debe pertenecer a $M_\infty(\mathrm{H_0})$. La primera parte de la condición asintótica entonces requiere de la existencia de un vector $g \in M_\infty(\mathrm{H})$ tal que la primera parte de la ecuación (1) sea verificada. La segunda parte de la condición asintótica ahora demanda la existencia de un vector f_+ en $M_\infty(\mathrm{H_0})$ verificando la segunda ecuación en (2), donde g es el vector obtenido de la f_- dada por la primera ecuación en (1).

Por lo que el efecto de la dispersión en este retrato es asociar a cada vector de estado inicial f_- en $M_\infty(\mathrm{H_0})$ un vector de estado final f_+ en $M_\infty(\mathrm{H_0})$, ambos siendo interpretados como estados al tiempo $t = 0$. Si no hay interacción, i.e. si $V_t = U_t$, uno claramente tiene que $f_+ = f_-$. Veremos después que la correspondencia $f_- \to f_+$ define un operador lineal sobre el subespacio $M_\infty(\mathrm{H_0})$ de estados de dispersión del Hamiltoniano no perturbado. Este operador es llamado el operador de dispersión S y es el objeto central de la teoría de dispersión. La diferencia entre S y el operador identidad será una expresión para el efecto de la interacción, si no hay interacción, ésta diferencia es cero.

Dado que V_t es unitario, uno puede reescribir la primera ecuación en (1) como

$$\lim_{t\to-\infty} \|V_t g - U_t f_-\| = \lim_{t\to-\infty} \|g - V_t^* U_t f_-\| = 0. \tag{4}$$

En la primera parte de la condición asintótica se supuso que para $f_- \in M_\infty(\mathrm{H_0})$ existía un vector g tal que (4) valía. Por lo que esta condición es equivalente al requerimiento de la existencia del límite fuerte de $V_t^* U_t$ cuando $t \to -\infty$ sobre el subespacio $M_\infty(\mathrm{H_0})$. Este límite fuerte será llamado el <u>operador de onda</u> Ω_-:

$$\Omega_- \equiv s - \lim_{t\to-\infty} V_t^* U_t E_\infty(\mathrm{H_0}). \tag{5}$$

Su interpretación es como sigue: cuando es aplicado a un vector f en $M_\infty(\mathrm{H_0})$, da el vector de estado actual g al tiempo $t = 0$ que evolucionará a partir del estado preparado f en el pasado remoto (en el sentido de la primera ecuación en (1)). Note que de acuerdo a (5) Ω_- está definido sobre todo H y no sólo sobre $M_\infty(\mathrm{H_0})$. Hemos simplemente definido $\Omega_- f = 0$ para todos los vectores f en el complemento ortogonal de $M_\infty(\mathrm{H_0})$.

Similarmente uno ve que la segunda parte de la condición asintótica es equivalente al requerimiento de la existencia del límite fuerte de $U_t^* V_t$ sobre el rango Ω_- cuando $t \to +\infty$. Por cuestión de conveniencia uno usualmente adopta un tratamiento más simétrico con respecto del signo del tiempo. Se define un segundo operador de onda similarmente a (5) por

$$\Omega_+ \equiv s - \lim_{t\to+\infty} V_t^* U_t E_\infty(\mathrm{H_0}), \tag{6}$$

si el límite existe. La condición asintótica es entonces expresada por el requerimiento de que ambos límites (5) y (6) existan. La interpretación de Ω_+ es la siguiente: cuando es aplicado a un vector f en $M_\infty(\mathrm{H}_0)$, da el vector de estado actual al tiempo $t = 0$ el cual convergerá a f en el futuro distante (en el sentido de la segunda ecuación en (1)).

Uno ve como en (4) que $g = s - \lim V_t^* U_t f$ cuando $t \to \infty$ si y sólo si $f = s - \lim U_t^* V_t g$ cuando $t \to \infty$. Por lo que la existencia de Ω_+ implica la existencia del límite fuerte de $U_t^* V_t$ sobre el rango de Ω_+. Por lo que la segunda parte de la condición asintótica se verifica suponiendo que el rango de Ω_- está contenido en el rango de Ω_+. Este postulado tiene que ser agregado a (5) y (6) con objeto de que la descripción matemática corresponda al retrato físico dado arriba. La situación es ilustrada en la figura de abajo.

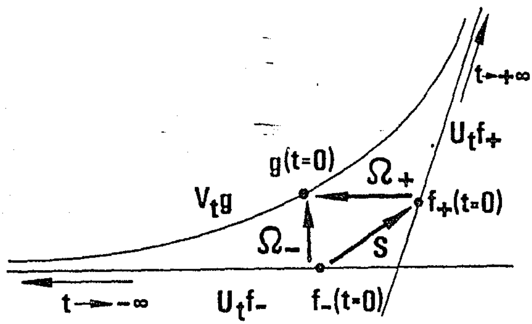

Figura 2. *Representación pictórica de la condición asintótica. Los puntos en el plano representan los vectores en el espacio de Hilbert. Una línea recta representa la trayectoria en H de una evolución no perturbada y una curva a la evolución total de un vector estado.*

Hemos por tanto llegado a la <u>formulación de la condición asintótica</u> final:

(A1) Existe $s - \lim_{t \to \pm\infty} V_t^* U_t E_\infty(\mathrm{H}_0) \equiv \Omega_\pm$,

(A2) $\Omega_- \Omega_-^* H \subseteq \Omega_+ \Omega_+^* H$.

Los subespacios $\Omega_\pm \Omega_\pm^* H$ estarán contenidos en el subespacio $M_\infty(\mathrm{H})$ de estados de dispersión del Hamiltoniano H. La situación más simple es aquella donde

(A3) $\Omega_+\Omega_+^* H = \Omega_-\Omega_-^* H = M_\infty(\mathrm{H})$.

Si (A3) se cumple, entonces la teoría puede ser llamada asintóticamente completa, dado que la evolución $V_t g$ de cualquier estado de dispersión g de H es asintóticamente descrita por la evolución libre como en (1). Por lo tanto el tipo más simple de sistema de dispersión es en el que ambos operadores de onda existen y tienen rango igual a M_∞(H), i.e. aquel en el que (A1) y (A3) son verificadas. En esta situación hablamos de un sistema de la dispersión simple.

Situaciones más generales pueden ser ahora imaginadas. Puede suceder que (A1) no sea satisfecha, como por ejemplo en dispersión por un potencial con un potencial Coulombiano. Uno tendrá entonces que buscar una formulación matemática más débil que la condición asintótica y que pueda aplicarse a tales situaciones. Puede suceder que los operadores de onda existan pero (A3) no valga. En tales casos uno tendrá que encontrar diferentes medios de dar una descripción asintótica de ciertos estados de dispersión de H (aquellos ortogonales a $\Omega_\pm\Omega_\pm^* H$). Esto puede involucrar por instancia grupos de evolución libre adicionales como en la dispersión multicanal o la noción de absorción de estados.

Autofunciones Impropias o Generalizadas.

Empezamos con una introducción al estudio tradicional de la descripción del fenómeno de dispersión, en el cual se consideran las llamadas autofunciones impropias del par dado de Hamiltonianos (H,H_0) y su comportamiento asintótico a grandes distancias del centro de dispersión. Para H_0, considere la correspondiente ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$(\Delta + \lambda)\psi(x) = 0, \tag{7}$$

donde el número positivo λ es la energía. Uno puede fácilmente encontrar soluciones de (7), e.g. las ondas planas $\exp(\pm \imath k \cdot x)$, etiquetadas por los vectores de onda k tales que $k^2 = \lambda$. Estas soluciones no pertenecen al espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^3)$ y esto es típico siempre que uno habla de un problema de autovalores derivados de un operador autoadjunto correspondientes a un punto en el espectro continuo. Por otro lado, un autovector asociado con un autovalor de un operador autoadjunto pertenece por definición al espacio de Hilbert. Los físicos suelen requerir normalización de función δ para las autofunciones impropias que no pertenecen al espacio de Hilbert. Por ejemplo, haciendo $\psi_k^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \cdot \exp(\imath k \cdot x)$, escribimos

$$\int \overline{\psi_k^0(x)}\psi_{k'}^0(x) d^3x = \delta(k - k'). \tag{8}$$

Debemos evitar tales ecuaciones que no tienen sentido en el lenguaje matemático que hemos introducido, o sea, el de un espacio de Hilbert. Adoptamos la convención de que una autofunción (impropia) no normalizable como ψ_k^0, corresponde a un punto en el espectro continuo.

Las autofunciones $\{\psi_k^0\}$ forman un conjunto completo conducente a una expansión por autofunciones.

Para el Hamiltoniano perturbado $H=H_0+V$, la ecuación de Scrödinger asociada independiente del tiempo es

$$(\Delta - V(x) + \lambda)\psi(x) = 0. \tag{9}$$

A pesar de que el número de potenciales para los cuales (9) es explícitamente soluble en términos de funciones elementales es pequeño, uno puede sin embargo hacer ciertos enunciados generales sobre la naturaleza de las soluciones. En la mayoría de los casos de interés, las soluciones de (9) que corresponden a la dispersión son aquellas con energía positiva $\lambda = k^2$. A éstas las denotamos por $\psi_k^{\pm}$. Más precisamente, para cada vector de onda k con $k^2 = \lambda$, se buscan soluciones $\psi_k^{\pm}$ de (9) teniendo el siguiente comportamiento asintótico cuando $|x| \equiv r \to \infty$:

$$\psi_k^{\pm}(x) \simeq \psi_k^0(x) + r^{-1}e^{\mp i|k|r}(2\pi)^{-3/2}f_{\pm}(\lambda;\omega_k,\omega_x), \tag{10}$$

donde hemos escrito $\omega_x = x/r$.

Para entender el comportamiento asintótico (10) en términos físicos imaginemos el retrato de la dispersión de una onda por un blanco fijo. Entonces el primer término a la derecha describe la onda incidente o la parte no dispersa y el segundo término corresponde a la parte dispersa de la onda. Si el potencial es de muy corto alcance, entonces a grandes distancias del blanco no se espera más influencia del blanco sobre la onda dispersada y por tanto el flujo total a través de cualquier esfera de radio R suficientemente grande debe ser independiente de R, conduciendo al comportamiento r^{-1} del segundo. En casos donde el comportamiento asintótico (10) pueda ser verificado, las funciones $f_{\pm}$ determinan la amplitud de dispersión. Las funciones $\psi_k^{\pm}$ una vez más no pertenecen al espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^3)$, y se suelen escribir condiciones de normalización de función δ como en (8).

En la discusión precedente las autofunciones de los Hamiltonianos podrían ser obtenidas como soluciones a las ecuaciones diferenciales parciales asociadas. Uno puede considerar la situación como un problema perturbado en el siguiente sentido. Suponiendo que la expansión por autofunciones de H_0 es conocida, uno puede construir un espacio de autofunciones para el operador perturbado $H=H_0+V$ usando la perturbación V en sí.

En el desarrollo de esta tesis daremos una fórmula explícita para tales autofunciones impropias o generalizadas.

Capítulo 3

La dispersión directa

El problema de la dispersión directa para la ecuación de Schrödinger ha sido extensivamente estudiado. Ver por ejemplo Kato 1976, y Reed y Simon 1979.

En esta sección enunciamos algunos resultados clásicos sobre el caso estacionario basados en el principio del límite absorbente y en las expansiones en autofunciones regresando al trabajo de Agmon 1975. También probamos el resultado sobre el decaimiento de la norma de operador de la matriz de dispersión menos la identidad, el cual necesitamos en el capítulo 4. Probamos que la matriz de dispersión satisface la relación de reciprocidad y construimos una extensión meromórfica de las autofunciones generalizadas.

Primero definimos algunos espacios e introducimos notaciones.

Por $L^2_s(\mathbf{R}^n)$, $s \in \mathbf{R}$, $n = 2, 3, \ldots$ denotamos los siguientes espacios pesados L^2 de funciones complejo valuadas medibles sobre $\mathbf{R}^n$,

$$L^2_s(\mathbf{R}^n) = \{f(x) : (1 + x^2)^{s/2} f(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)\}, \tag{1}$$

con norma

$$\|f\|_{0,s} = \|(1 + x^2)^{s/2} f(x)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \tag{2}$$

donde $L^2(\mathbf{R}^n)$ es el espacio de Hilbert de las funciones cuadrado integrables sobre $\mathbf{R}^n$.

Denotamos por F a la transformada de Fourier

$$(Ff)(\varsigma) = s - \lim_{N \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \leq N} e^{-i\varsigma \cdot x} f(x) dx \quad \text{(Schechter 1971, teorema 2.2.3)} \tag{3}$$

Como bien sabemos, F define un operador unitario sobre $L^2(\mathbf{R}^n)$ (Rudin 1979, teorema 7.9).

Por $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ denotamos al espacio de funciones complejo valuadas infinitamente diferenciables sobre $\mathbf{R}^n$ de soporte compacto.

Por $H_\alpha(\mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, denotamos al espacio de Sobolev de orden α que es la completación de $\mathcal{S}$ en la norma

$$\|f\|_{\alpha,0} = \|(1+\varsigma^2)^{\alpha/2}(Ff)(\varsigma)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \tag{4}$$

Para $\alpha, s \in \mathbf{R}$ denotamos al espacio de Sobolev pesado de orden α, s definido como sigue

$$H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n) = \{f(x): (1+x^2)^{s/2}f(x) \in H_\alpha(\mathbf{R}^n)\}, \tag{5}$$

con norma

$$\|f\|_{\alpha,s} = \|(1+x^2)^{s/2}f(x)\|_{\alpha,0}. \tag{6}$$

Note que $H_{0,s}(\mathbf{R}^n) = L_s^2(\mathbf{R}^n)$, $H_{\alpha,0}(\mathbf{R}^n) = H_\alpha(\mathbf{R}^n)$, y $H_{0,0}(\mathbf{R}^n) = L^2(\mathbf{R}^n)$.

Denotamos por H_0

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{7}$$

$$D(H_0) = H_2(\mathbf{R}^n), \tag{8}$$

a la realización autoadjunta de menos el Laplaciano en $L^2(\mathbf{R}^n)$ (Schechter 1971, corolario 4.2.3).

El espectro de H_0 consiste en $[0,\infty)$ (Schechter 1971, ejemplo 4.5.3).

Para $z \in \mathbf{C} \setminus [0,\infty)$ denotamos por $R_0(z)$ al resolvente de H_0

$$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}. \tag{9}$$

Denotamos

$$\mathbf{C}^\pm = \{z \in \mathbf{C}: \pm\mathrm{Im}\, z > 0\}, \tag{10}$$

y $\mathbf{R}^+ = (0,\infty)$. Por $\overline{\mathbf{C}^\pm}$ denotamos a la cerradura de $\mathbf{C}^\pm$. Para $z \in \mathbf{C}^\pm$, $R_0(z)$ puede ser considerada como una función analítica con valores en $\mathbf{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$, $s > 1/2$

(lemas E.4 y E.5), donde para un par de espacios de Banach X, Y denotamos por $\mathbf{B}(X,Y)$ al espacio de Banach de todos los operadores lineales acotados de X en Y.

Más aún, para $\lambda \in \mathbf{R}^+$ los siguientes límites existen (ver Agmon 1975)

$$R_0(\lambda \pm \imath o) = \lim_{\delta \downarrow 0} R_0(\lambda \pm \imath\delta), \tag{11}$$

en la topología uniforme de operadores de $\mathbf{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$, $s > 1/2$. Más aún, las funciones $R_0^{\pm}(z)$ definidas sobre $D^{\pm} = \mathbf{C}^{\pm} \cup (0,\infty)$ como

$$R_0^{\pm}(z) = \begin{cases} R_0(z) & , z \in \mathbf{C}^{\pm}, \quad (12) \\ R_0(z \pm \imath o) & , z \in \mathbf{R}^{+}, \quad (13) \end{cases}$$

son analíticas sobre $\mathbf{C}^{\pm}$ y continuas sobre $D^{\pm}$. Note que dado que el operador de inclusión de $H_{2,s}$ en $H_{\alpha,s}$, $s \in \mathbf{R}$, $0 \leq \alpha \leq 2$ es acotado (lema C.2), $R_0^{\pm}(z)$ es también acotado de $L^2_s(\mathbf{R}^n)$ en $H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n)$, $0 \leq \alpha \leq 2$ (lema C.3).

Tenemos que

$$\|R_0^{\pm}(z)\|_{\mathbf{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq C|z|^{\frac{\alpha-1}{2}}, \tag{14}$$

para $|z| \geq 1$ y alguna constante C, donde $0 \leq \alpha \leq 1$ (lema E.8).

Más aún, si $n \geq 3$ y $s > 1$ los límites en (11) existen también en $\lambda = 0$ y las funciónes $R_0^{\pm}(z)$ se extienden a funciones sobre $D_0^{\pm} = \mathbf{C}^{\pm} \cup [0,\infty)$, definidas por (12) para $z \in \mathbf{C}^{\pm}$, y por (13) para $z \in [0,\infty)$. Las funciones extendidas son analíticas en $\mathbf{C}^{\pm}$ y continuas en $D_0^{\pm}$.

Estos enunciados son conocidos como el principio del límite absorbente para H_0. Están probados por ejemplo en Agmon 1975.

El potencial, $V(x)$, es una función real valuada sobre $\mathbf{R}^n$. Introducimos las siguientes clases generales de potenciales.

Definición 1. Decimos que una función real valuada, $V(x)$, definida sobre $\mathbf{R}^n$ pertenece a la clase B_α para alguna $\alpha > 0$ si hay una $\epsilon > 0$ tal que el operador multiplicación

$$f(x) \to (1+x^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}} V(x) f(x), \tag{15}$$

define un operador acotado de $H_\alpha(\mathbf{R}^n)$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Definición 2. Decimos que una función real valuada, $V(x)$, definida sobre $\mathbf{R}^n$ pertenece a la clase K_2 si hay una $\epsilon > 0$ tal que el operador multiplicación (15) define un operador compacto de $H_2(\mathbf{R}^n)$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

La clase K_2 fue introducida en Agmon 1975.

Note que si $V(x) \in B_\alpha$ el operador multiplicación por $V(x)$ es acotado de $H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)$ en $L^2_{s+1+\epsilon}(\mathbf{R}^n)$ para toda $s > 0$ (lema E.23). También si $V(x) \in K_2$ el operador multiplicación por $V(x)$ es compacto de $H_{2,s}(\mathbf{R}^n)$ en $L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n)$, $s \in \mathbf{R}$ (lema E.24).

Se sigue de los resultados en el capítulo 6 de Schechter 1971 que si

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} (1+x^2)^{1+\epsilon} \int_{|x-y|\le 1} |V(y)|^2 |x-y|^{\beta-n} dy < \infty, \tag{16}$$

para alguna $\epsilon > 0$, y $0 < \beta < 2\alpha$, entonces $V(x) \in B_\alpha$, y que si (16) es satisfecha para aluna β, $0 < \beta < 4$, entonces $V(x) \in K_2$.

Note que en particular si $V(x)$ es acotado y

$$|V(x)| \le C(1+|x|)^{-1-\delta}, \tag{17}$$

para algunas constantes $C, \delta > 0$, entonces $V(x) \in B_\alpha \cap K_2$ para cualquier $\alpha \ge 0$ (lema E.22).

Note que si $V(x) \in B_\alpha$ para alguna α, $0 \le \alpha < 2$, entonces $V(x) \in B_\alpha \cap K_2$ (lema E.20).

Suponga que $V(x)$ pertenece a K_2, entonces

$$H = H_0 + V(x), \tag{18}$$

$$D(H) = D(H_0) = H_2(\mathbf{R}^n), \tag{19}$$

es autoadjunto, acotado por debajo (lema E.13), y su espectro esencial consiste de $[0,\infty)$ (lema H.1). Ver el capítulo 1 para las definiciones concernientes al espectro. En particular, el espectro puntual negativo de H es acotado por debajo y discreto (lema I.1), i.e. los autovalores negativos de H tienen multiplicidad finita y pueden sólo acumularse en cero. Más aún, los siguientes resultados son conocidos si $V(x) \in K_2$ (ver Agmon 1975).

1. El conjunto, $\sigma_+(H)$, de autovalores positivos es acotado y discreto, i.e. los autovalores positivos, tienen multiplicidad finita y pueden sólo acumularse en cero.

2. El principio del límite absorbente vale para H: para $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(H)$ denotamos por

$$R(z) = (H-z)^{-1}, \tag{20}$$

el resolvente de H, donde $\sigma(H)$ denota al espectro de H.

Como con $R_0(z)$, $R(z)$ puede ser considerada como una función con valores en $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$, $s > 1/2$ (lema E.16).

Entonces para $\lambda \in \mathbf{R}^+$ los siguientes límites existen

$$R(\lambda \pm \imath o) = \lim_{\delta \downarrow 0} R(\lambda \pm \imath\delta), \tag{21}$$

en la topología uniforme de operadores en $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$, $s > 1/2$.

Más aún, las funciones $R^\pm(z)$ definidas sobre $D^\pm \setminus \sigma_+(H)$ como

$$R^\pm(z) = \begin{cases} R(z) & , z \in \mathbf{C}^\pm, & (22) \\ R(z \pm \imath o) & , z \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H), & (23) \end{cases}$$

son analíticas sobre $\mathbf{C}^\pm$ y continuas sobre $D^\pm \setminus \sigma_+(H)$.

$V(x)R_0^\pm(z)$ es compacto en $L_s^2(\mathbf{R}^n)$ para $z \in D^\pm$ y $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, donde ϵ es como en (15) (lema E.32, donde en este caso $(s, E) = ((1+\epsilon)/2, L_s^2(\mathbf{R}^n)))$. Es también sabido (Agmon 1975) que

$$(I + V(x)R_0^\pm(z)), \tag{24}$$

es invertible en $L_s^2(\mathbf{R}^n)$ para $z \in D^\pm \setminus \sigma_+(H)$, y que

$$R^\pm(z) = R_0^\pm(z)(I + VR_0^\pm(z))^{-1}, \tag{25}$$

para $z \in D^\pm \setminus \sigma_+(H)$.

Más aún, se sigue de (14) y (25) que si $V(x) \in B_\alpha$ para alguna $0 \leq \alpha < 1$

$$\|R^\pm(z)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq C|z|^{\frac{\alpha-1}{2}}, \tag{26}$$

$z \in D^\pm$, $|z| \geq \max\{1, \sup \sigma_+(H)\}$, para alguna constante C (lema E.38).

Definición 8. Suponga que $n \geq 3$ y $\epsilon > 1$ en (15). Decimos que $H = H_0 + V(x)$ tiene una resonancia en cero (o estado semiacotado) si hay una $\varphi \neq 0$, $\varphi \in H_{2,-s}(\mathbf{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, $\varphi \notin H_2(\mathbf{R}^n)$ tal que

$$\varphi = -R_0^+(0)V\varphi. \tag{27}$$

Note que si (27) es cierta

$$(H_0 + V(x))\varphi = 0 \quad \text{(L.E.6)}. \tag{28}$$

Suponga que cero es una resonancia para $H = H_0 + V(x)$. Entonces con φ como en (27)

$$-(V\varphi,\varphi) = -\text{Re}\,(V\varphi,\varphi) = \text{Re}\,(V\varphi, R_0^+(0)V\varphi) =$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\text{Re}\,(V\varphi, R_0^+(\imath\delta)V\varphi) = \lim_{\delta\downarrow 0}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2+\delta^2}d(E_0(\lambda)V\varphi, V\varphi) \geq 0, \tag{29}$$

por el teorema espectral, donde $E_0(\lambda)$ denota-a la familia espectral de H_0. Suponga además que $V(x) \geq 0$. Entonces por (29) $V\varphi = 0$, y usando (27) $\varphi = 0$. Entonces si $V(x) \geq 0$, $H = H_0 + V(x)$ no tiene resonancia en cero.

If $n \geq 3$ y $\epsilon > 1$ en (15) y si cero no es ni un autovalor ni una resonancia para $H = H_0 + V(x)$, $(I + VR_0^+(0))$ es invertible sobre $L_s^2(\mathbf{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, porque de otra forma habría una $\psi \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$, $\psi \neq 0$, tal que

$$\psi = -VR_0^+(0)\psi. \tag{30}$$

Entonces denotando $\varphi = R_0^+(0)\psi \in H_{2,-s}(\mathbf{R}^n)$, tenemos

$$\varphi = -R_0^+(0)V\varphi, \tag{31}$$

$\varphi \neq 0$, porque de otra forma $\psi = 0$. Si $\varphi \notin H_2(\mathbf{R}^n)$, cero es una resonancia. Si $\varphi \in H_2(\mathbf{R}^n)$, cero es un autovalor.

Entonces $(I+VR_0^+(0))$ es invertible (lema E.34, donde en este caso $s = (1+\epsilon)/2$), y por continuidad $(I+VR_0^+(\lambda))$ es también invertible para $\lambda \in [0,\delta]$ para alguna $\delta > 0$ (lema A.24, donde en este caso $(E,A,f) = (D_0^+ \setminus \sigma_+(H), \mathbf{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n)), I + VR_0^+(\cdot)))$. Entonces cero no es un punto de acumulación de autovalores positivos de $H = H_0 + V(x)$, y los límites en (21) con el signo $+$ también existen en $\lambda = 0$ (lema E.33). Más aún, la función $R^+(z)$ se extiende a una función sobre $D_0^+ \setminus \sigma_+(H)$ definida por (22) para $z \in \mathbf{C}^+$ y por (23) para $z \in [0,\infty) \setminus \sigma_+(H)$. La función extendida es analítica sobre $\mathbf{C}^+$ y continua sobre $D_0^+ \setminus \sigma_+(H)$. La fórmula (25) con el signo $+$ es también cierta en $z = 0$ (lema E.33).

Los operadores de onda para la ecuación de Schrödinger son definidos como los siguientes límites

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\imath tH}e^{-\imath tH_0}. \tag{32}$$

Si $V(x) \in K_2$ existen y son parcialmente isométricos (ver Agmon 1975) con rango: $R(W_+) = R(W_-) = \mathrm{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, y kernel trivial, donde $\mathrm{H}_{\mathrm{ac}}(H)$ es el subespacio de continuidad absoluta de H. El operador de dispersión está definido como

$$S = W_+^* W_-, \tag{33}$$

y es unitario para $V(x) \in K_2$ (Pearson 1989, lema 4.1). Definimos

$$\hat{S} = FSF^{-1} \tag{34}$$

Entonces (ver Agmon 1975, teorema 7.2), para $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2}$, la matriz de dispersión, denotada por $S(k)$, es el operador unitario sobre $L^2(S^{n-1})$ tal que

$$(\hat{S}f)(k,\omega) = (\underset{\sim}{S}(k)f(k,\cdot))(\omega), \tag{35}$$

para toda $f(k,\omega) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, donde $k > 0$, $\omega \in S^{n-1}$ son coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$.

Es un resultado clásico que si $V(x)$ decrece suficientemente rápido al infinito (por ejemplo si $V(x)$ es acotado y de soporte compacto, o si $V(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2_{s_0}(\mathbb{R}^n)$, para alguna $s_0 > 1/2$), entonces $S(k) = I + T(k)$, donde $T(k)$ es para $k > 0$, $k^2 \notin \sigma_+(H)$ un operador integral con kernel:

$$(T(k)f)(\omega) = \int T(k,\omega,\omega')f(\omega')d\omega', \tag{36}$$

para toda $f(\omega) \in L^2(S^{n-1})$, donde

$$T(k,\omega,\omega') = -\frac{i}{2}\frac{k^{n-2}}{(2\pi)^{n-1}}\int e^{-ik\omega\cdot x}V(x)\phi_-(x,k,\omega')dx, \tag{37}$$

donde $\phi_-(x,k,\omega)$ está definida en (0.18) (ver Agmon 1975).

Procedemos a introducir una representación de la matriz de dispersión que es válida para todo $V(x) \in K_2$. Primero consideramos los mapeos de traza apropiados (ver por ejemplo Reed y Simon 1975). Para cualquier $s > 1/2$, $k > 0$, hay un operador de traza acotado, $\gamma(k)$,de $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(S^{n-1})$ tal que

$$(\gamma(k)f)(\omega) = \int e^{-ik\omega\cdot x}f(x)dx, \tag{38}$$

para cada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Más aún, la función $k \to \gamma(k)$ es localmente Hölder continua y

$$\|\gamma(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n),L^2(S^{n-1}))} \leq \frac{C}{|k|^{\frac{n-1}{2}}}\min\{1,|k|^{s-\frac{1}{2}}\}, \tag{39}$$

para $\frac{1}{2} < s < 1$, cuando $n = 2$, y $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, cuando $n \geq 3$, y donde $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), L^2(S^{n-1}))$ denota al espacio de Banach de los operadores lineales acotados de $L_s^2(\mathbf{R}^n)$ a $L^2(S^{n-1})$.

Más aún, para $k > 0$, $k^2 \notin \sigma_+(H)$, $S(k)$ está dado para $V(x) \in K_2$, por

$$S(k) = I - \frac{\imath}{2(2\pi)^{n-1}} k^{n-2} \gamma(k) Q_+(k^2) V \gamma^*(k), \tag{40}$$

donde

$$Q_+(k^2) = I - V(x) R^+(k^2). \tag{41}$$

En el caso en que $V(x)$ tenga soporte compacto (40) es justamente un modo de escribir que $S(k) = I + T(k)$ con $T(k)$ como en (36), (37). Entonces (40) se sigue para $V(x) \in K_2$ aproximando $V(x)$ por $V_n(x)$ de soporte compacto (ver lema E.25).

Lema 4. Considerar a los elementos $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times [0, 1)$ y $V \in B_\alpha$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces:

$\forall (\epsilon', \rho) \in (0, \min\{1, \epsilon\}) \times (\sup \sigma_+(H)^{1/2}, \infty) : \exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall k \in [\rho, \infty)$:

$$\|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq r k^{-1} (1 + k^2)^{\alpha/2} \min\{1, k^{\epsilon'}\}$$

Demostración.

Por el lema E.19, todo $\epsilon' \in (0, \min\{1, \epsilon\})$ es tal que $V \in B_\alpha$ con ϵ' correspondiente. Sea:

$$s = (1 + \epsilon')/2$$

Por lo tanto:

$\forall \rho \in (\sup \sigma_+(H)^{1/2}, \infty) : \exists (r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ : \forall k \in [\rho, \infty)$:

$$\|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|I - (I - \imath 2^{-n} \pi^{1-n} k^{n-2} \gamma(k)(I - V R^+(k^2)) V \gamma^*(k))\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq$$

(Por (40) y (41))

$$\leq 2^{-n} \pi^{1-n} k^{n-2} \|\gamma(k)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), L^2(S^{n-1}))} \cdot$$

$$\cdot (1 + \|V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), L_s^2(\mathbf{R}^n))} \|R^+(k^2)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}) \|V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), L_s^2(\mathbf{R}^n))} \cdot$$

$$\cdot \|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} \leq \quad \text{(L.F.6)}$$

$$\leq 2^{-n}\pi^{1-n}k^{n-2}r_1 k^{(1-n)/2}\min\{1,k^{(2s-1)/2}\}(1 \quad V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n),L^2_s(\mathrm{R}^n))}r_2)\cdot$$

$$\cdot \|V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n),L^2_s(\mathrm{R}^n))}r_3 k^{(1-n)/2}(1+k^2)^{\alpha/2}\min\{1,k^{(2s-1)/2}\} =$$
$$\text{(Por(39), L.E.38 y L.F.25)}$$

$$= 2^{-n}\pi^{1-n}\|V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n),L^2_s(\mathrm{R}^n))}r_1 r_3(1+\|V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n),L^2_s(\mathrm{R}^n))}r_2)\cdot$$

$$\cdot k^{-1}(1+k^2)^{\alpha/2}\min\{1,k^{\epsilon'}\}$$

Q.E.D.

Este simple lema jugará un papel importante más tarde en el procedimiento de inversión. Note que directamente ligamos las singularidades del potencial ($V(x) \in B_\alpha$) con la taza de decaimiento de la norma de $S(k) - I$ como un operador sobre $L^2(S^{n-1})$. Cuando $V(x)$ no tiene singularidades ($\alpha = 0$, Kato 1976, ejemplo III.2.11) obtenemos la mejor taza de decaimiento.

Denotamos por T al operador antilineal de reversión temporal sobre $L^2(\mathrm{R}^n)$ definido como

$$(Tf)(x) = \bar{f}(x), \tag{42}$$

donde $\bar{f}(x)$ es el complejo conjugado de $f(x)$. Denotamos también por T al operador de conjugación compleja actuando sobre $L^2(S^{n-1})$:

$$(Tf)(\omega) = \bar{f}(\omega), \tag{43}$$

$f(\omega) \in L^2(S^{n-1})$.

Por P_x denotamos al operador de paridad actuando sobre $L^2(\mathrm{R}^n)$ como

$$(P_x f)(x) = f(-x), \tag{44}$$

$f(x) \in L^2(\mathrm{R}^n)$. Usaremos el símbolo P_ω para el operador de paridad actuando sobre $L^2(S^{n-1})$.

$$(P_\omega f)(\omega) = f(-\omega), \tag{45}$$

$f(\omega) \in L^2(S^{n-1})$.

Denotamos por $S^T(k)$ a la transpuesta de $S(k)$, donde

$$S^T(k) = TS^*(k)T, \tag{46}$$

Lema 5. (Relación de reciprocidad). Para $k > 0$

$$S^T(k) = P_\omega S(k) P_\omega. \tag{47}$$

Demostración.

Note que para $t \in \mathbb{R}$, $e^{itH_0}T = Te^{-itH_0}$, $e^{itH}T = Te^{-itH}$ (lema E.18).

Se sigue que

$$TW_\pm = W_\mp T \quad \text{(L.F.10)}, \tag{48}$$

$$TST = S^* \quad \text{(L.F.11)} \tag{49}$$

Dado que $TF = F^*T$ (lema C.9) tenemos

$$S^*(k) = [FS^*F^*](k) = F^2TS(k)TF^2 = P_\omega TS(k)TP_\omega, \tag{50}$$

donde usamos $F^2 = F^{*2} = P_x$. Note que en coordenadas polares $(P_x f)(k,\omega) = f(k,-\omega)$. Dado que $T^2 = I$ se sigue de (50) que

$$TS^*(k)T = P_\omega S(k) P_\omega \text{ (L.C.8)}. \tag{51}$$

Q.E.D.

Note que si $S(k)$ es un operador integral con kernel $S(k,\omega,\omega')$, (47) es equivalente a

$$S(k,\omega,\omega') = S(k,-\omega',-\omega) \text{ (L.F.12)}. \tag{52}$$

Esta es la forma usual en la cual la relación de reciprocidad es enunciada.

Procedemos ahora a estudiar las autofunciones generalizadas de $H = H_0 + V(x)$. En particular probaremos que tienen para cada x fija una continuación meromórfica en $\mathbf{C}^+$ con polos a lo más en los autovalores de H. En el caso $n = 3$ esto ha sido probado recientemente en Balslev 1988. Aquí seguimos ese método.

Para $x \in \mathbf{R}^n$, $k \in \mathbf{R}^+$, $k^2 \notin \sigma_+(H)$, $\omega \in S^{n-1}$, definimos las siguientes autofunciones generalizadas de H como en (0.18)

$$\phi_\pm(x,k,\omega) = e^{ik\omega\cdot x} - R^\mp(k^2)[Ve^{ik\omega\cdot x}], \tag{53}$$

donde suponemos que $V(x) \in K_2 \cap L^2_s(\mathbf{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, donde $\epsilon > 0$ como en (15). Las funciones $\phi_\pm(x,k,\omega)$ son juntamente continuas en x, k, ω (ver Agmon 1975), y satisfacen la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$H\phi_\pm(x,k,\omega) = k^2\phi_\pm(x,k,\omega) \quad \text{(L.H.3)} \tag{54}$$

Definimos

$$\phi(x,k,\omega) = \begin{cases} \phi_-(x,k,\omega) & , k \in (0,\infty) \qquad 55) \\ \phi_+(x,-k,-\omega) & , k \in (-\infty,0). \qquad (56) \end{cases}$$

Queremos probar que $\phi(x,k,\omega)$ tiene una extensión meromórfica a $\mathbf{C}^+$.
Equivalentemente consideramos la función

$$\psi(x,k,\omega) = 1 - e^{-ik\omega\cdot x}\phi(x,k,\omega) \tag{57}$$

Se sigue de (54) que $\psi(x,k,\omega)$ satisface la ecuación

$$(-\Delta - 2ik\omega\cdot\nabla + V(x))\psi(x,k,\omega) = V(x), \tag{58}$$

donde ∇ denota al operador gradiente $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

Definamos para $k \in \overline{\mathbf{C}^+}$, $\omega \in S^{n-1}$, al operador

$$H_0^\omega(k) = -\Delta - 2ik\omega\cdot\nabla + k^2, \tag{59}$$

con dominio $H_2(\mathbf{R}^n)$.

Denotamos por T_ω al operador unitario en $L^2(\mathbf{R}^n)$ (lemas D.5 y D.12) dado por

$$(T_\omega f)(x) = f(t_\omega^{-1}x), \tag{60}$$

donde t_ω es la matriz de rotacion que lleva al $(1,0,0,\ldots,0)$ en ω. Entonces para $k = p + iq$

$$H_0^\omega(k) = T_\omega e^{-\imath p x_1} H_0(q) e^{\imath p x_1} T_\omega^{-1} \quad \text{(L.G.12)} \tag{61}$$

donde (Balslev 1988)

$$H_0(q) = -\Delta + 2q\frac{\partial}{\partial x_1} - q^2. \tag{62}$$

El espectro de $H_0(q)$, $q \geq 0$, está dado por

$$\sigma(H_0(q)) = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq q\} \quad \text{(L.G.3)}, \tag{63}$$

coincidiendo con $[0, \infty)$ para $q = 0$.

Por (61), el espectro de $H_0^\omega(k)$ está también dado por (63) (lema G.13). Escribimos (58)como

$$(H^\omega - k^2)\psi(x, k, \omega) = V(x), \tag{64}$$

donde

$$H^\omega = H_0^\omega + V(x), \tag{65}$$

con dominio $H_2(\mathbf{R}^n)$. Entonces es natural tratar de obtener una solución de (64) para $k \in \overline{\mathbf{C}^+}$ como

$$\psi(x, k, \omega) = \lim_{\delta \downarrow 0}(H^\omega - (k + \imath\delta)^2)^{-1} V(x), \tag{66}$$

donde el límite es tomado en una apropiada topología. Note que si $\delta > 0$, $k + \imath\delta \in \rho(H_0^\omega(k))$, el conjunto resolvente de $H_0^\omega(k)$. Esto definirá una continuación meromórfica de (57). Éste es el método de Balslev el que seguimos aquí

Denotamos

$$R_0(q, k + \imath\delta) = (H_0(q) - (k + \imath\delta)^2)^{-1}, \tag{67}$$

donde $k = p + \imath q \in \overline{\mathbf{C}^+}$, y $\delta > 0$.

Considere a $R_0(q, k + \imath\delta)$, $k \in \overline{\mathbf{C}^+}$, como una función con valores en $\mathbf{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$, $s > 1/2$ (lema E.3). Entonces los límites

$$R_{0_+}(q, k) = \lim_{\delta \downarrow 0} R_0(q, k + \imath\delta), \tag{68}$$

existen en la topología uniforme de operadores en $B(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{\cdot,-s}(\mathbf{R}^n))$, $s > 1/2$ (teorema G.7).

Más aún, la función

$$e^{-ipx_1} R_{0+}(q,k) e^{ipx_1}, \tag{69}$$

es analítica sobre $\mathbf{C}^+$ y continua sobre $\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$. Esto está probado en Balslev para $n = 3$. Él usa como espacio inicial un espacio pesado con peso dependiendo sólo de x_1.

Más aún

$$\|R_{0+}(q,k)\|_{B(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq C|k|^{\alpha-1} \text{ (L.G.8)} \tag{70}$$

para $k \in \overline{\mathbf{C}^+}$, $|k| \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ y alguna constante C.

Esto se sigue del teorema A.1, y de la observación 2 del apéndice A de Agmon 1975.

Denotamos para $\omega \in S^{n-1}$, $k = p + iq \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$

$$R_0^\omega(k) = T_\omega e^{-ipx_1} R_{0+}(q,k) e^{ipx_1} T_\omega^{-1}. \tag{71}$$

Note que para ω fija, $R_0^\omega(k)$ es analítica para $k \in \mathbf{C}^+$ y continua para $k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$ como una función con valores en $B(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$ (lemas G.20 y G.21). Y también para k fija es uniformemente acotada en ω (lema G.19). Más aún, por (70), ésta satisface:

$$\|R_0^\omega(k)\|_{B(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq C|k|^{\alpha-1} \text{ (L.G.19)}, \tag{72}$$

$s > 1/2$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $k \in \overline{\mathbf{C}^+}$, $|k| \geq 1$, $\omega \in S^{n-1}$, donde C es independiente de ω.

Lema 6. Si $n \geq 3$, y $s > 1$ la función $R_0^\omega(k)$ definida en (71) se extiende a una función definida sobre $\overline{\mathbf{C}^+}$, i.e. también en $k = 0$. La función extendida es analítica en $\mathbf{C}^+$ y continua en $\overline{\mathbf{C}^+}$.

Demostración.

Es suficiente probar que bajo las condiciones del Lema los límites en (68) existen también en $k = 0$ y que la función definida por (68) es continua en $k = 0$.

Para $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, denotamos por $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, y $x_\perp = (x_4, x_5, \ldots, x_n)$, y por $F_\perp$ a la transformada de Fourier en las variables $x_\perp$. Uno checa que para $f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\delta > 0$

$$(f, R_0(q, k + \imath\delta)g) = (f, e^{qx_1} R_0((k + \imath\delta)^2) e^{-qx_1} g) \quad \text{(L.G.4)} \tag{73}$$

Se sigue que para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $s > 1$

$$(F_\perp (1 + |\bar{x}|^2)^{-s/2} R_0(q, k + \imath\delta)(1 + |\bar{x}|^2)^{-s/2} f)(\bar{x}, \xi_\perp) =$$

$$= \int K(\bar{x}, \bar{y}, k + \imath\delta, \xi_\perp) \hat{f}(\bar{y}, \xi_\perp) d^3 y, \tag{74}$$

donde $\hat{f}(\bar{y}, \xi_\perp) = (F_\perp f)(\bar{y}, \xi_\perp)$, $\xi_\perp \in \mathbb{R}^{n-3}$, y

$$K(\bar{x}, \bar{y}, k + \imath\delta, \xi_\perp) = (1 + |\bar{x}|^2)^{-s/2} \frac{e^{\imath\left(\sqrt{(k+\imath\delta)^2 + |\xi_\perp|^2}|\bar{x}-\bar{y}| - \imath q(x_1 - y_1)\right)}}{4\pi|\bar{x} - \bar{y}|} \cdot$$

$$(1 + |\bar{y}|^2)^{-s/2}, \tag{75}$$

donde usamos la bien conocida expresión para el kernel de $R_0((k + \imath\delta)^2)$ para $n = 3$, y que $\operatorname{Im}\sqrt{(k + \imath\delta)^2 - |\xi_\perp|^2} \geq 0$.

Note que

$$\operatorname{Im}[\sqrt{(k + \imath\delta)^2 - |\xi_\perp|^2}|\bar{x} - \bar{y}| - \imath q(x_1 - y_1)] \geq 0. \tag{76}$$

Entonces

$$|K(\bar{x}, \bar{y}, k + \imath\delta, \xi_\perp)| \leq (1 + |\bar{x}|^2)^{-s/2} \frac{1}{4\pi|\bar{x} - \bar{y}|}(1 + |\bar{y}|^2)^{-s/2}, \tag{77}$$

y

$$\|K(\bar{x}, \bar{y}, k + \imath\delta, \xi_\perp)\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} \leq C \quad \text{(L.I.5)} \tag{78}$$

para una constante C independiente de k, δ, y $\xi_\perp$.

Entonces

$$(1 + |x|^2)^{-s/2} R_0(q, k + \imath\delta)(1 + |x|^2)^{-s/2} =$$

$$= \frac{(1 + |\bar{x}|^2)^{s/2}}{(1 + |x|^2)^{s/2}} F_\perp^{-1} K(k + \imath\delta, \xi_\perp) F_\perp \frac{(1 + |\bar{x}|^2)^{s/2}}{(1 + |x|^2)^{s/2}}, \tag{79}$$

donde $K(k+\imath\delta, \xi_\perp)$ denota al operador de Hilbert Schmidt sobre $L^2(\mathbf{R}^3)$ con kernel $K(\bar{x}, \bar{y}, k+\imath\delta, \xi_\perp)$ (Kato 1976, ejemplo V.2.19).

El lema ahora se sigue de (79), la fórmula explícita para $K(\bar{x}, \bar{y}, k+\imath\delta, \xi_\perp)$ en (75), (77) y (78).

Q.E.D.

Observación 7. Note que

$$R_0^\omega(k) = \lim_{\delta\downarrow 0} T_\omega e^{-\imath p x_1} R_0(q, k+\imath\delta) e^{\imath p x_1} T_\omega^{-1} = \quad (\text{L.G.18})$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0} (H_0^\omega(k) - (k+\imath\delta)^2)^{-1} \quad (\text{L.G.14}), \tag{80}$$

en la topología uniforme de operadores de $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$.

Dado que $V(x)$ es compacto de $H_2(\mathbf{R}^n)$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$ (lema E.31), el espectro esencial de $H^\omega(k)$ coincide con el de $H_0^\omega(k)$ (lema H.1):

$$\sigma_e(H^\omega(k)) = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq \mathrm{Im}\ k\}, \tag{81}$$

coincidiendo con $\overline{\mathbf{R}^+}$ para $\mathrm{Im}\ k = 0$.

Denotemos

$$\Delta_0 = \{\imath q \in \mathbf{C}^+ : -q^2 \in \sigma_d(H)\} \cup \{0\} \cup \{p \in \mathbf{R}^+ : p^2 \in \sigma_+(H)\}, \tag{82}$$

donde $\sigma_d(H)$ denota al conjunto de autovalores negativos de H, y $\sigma_+(H)$ al conjunto de autovalores positivos. Suponga que $k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0$.

Entonces para $\delta >$ suficientemente pequeña $(k+\imath\delta)^2 \in \rho(H^\omega(k))$, el conjunto resolvente de $H^\omega(k)$, y

$$(H^\omega(k) - (k+\imath\delta)^2)^{-1} = R_0^\omega(k+\imath\delta)(I + V R_0^\omega(k+\imath\delta))^{-1}$$
$$(\text{L.A.11, d.e.e.c. } (O_1, O_2) = (H_0^\omega(k) - (k+\imath\delta)^2, V)). \tag{83}$$

$V R_0^\omega(k+\imath\delta)$ es un operador compacto en $L_s^2(\mathbf{R}^n)$ (lemas E.. y E.32 donde en este caso $(s, E) = ((1+\epsilon)/2, L_s^2(\mathbf{R}^n)))$. Más aún, los siguientes límites existen

$$R^\omega(k) = \lim_{\delta\downarrow 0} (H^\omega(k) - (k+\imath\delta)^2)^{-1} = R_0^\omega(k)(I + V R_0^\omega(k))^{-1}, \tag{84}$$

en la topología uniforme de operadores en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, donde $\epsilon > 0$ como en (15) (lema H.8). Más aún, $R^\omega(k)$ es una función analítica de k para $k \in \mathrm{C}^+ \setminus \Delta_0$ (lema H.11) y es continua para $k \in \overline{\mathrm{C}^+} \setminus \Delta_0$ (lema H.10). Note que por (71) para $k \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$

$$R_0^\omega(k) = e^{-\imath k\omega\cdot x} R_0^\pm(k^2) e^{\imath k\omega\cdot x}, \tag{85}$$

para $\pm k > 0$, (lema G.16), el hecho de que $I + VR_0^\omega(k)$ sea invertible para $k^2 \notin \sigma_+(H)$ es un bien conocido resultado de Agmon 1975 (lema H.7).

Se sigue de (72) y (84) que si $V(x) \in B_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$

$$\|R^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} \leq C|k|^{\alpha-1}, \tag{86}$$

para $k \in \overline{\mathrm{C}^+}$, $|k| \geq 1 + k_M$ (lema H.9), donde

$$k_M = \sup_{k\in\Delta_0} |k|. \tag{87}$$

Note que dado que H es acotado por debajo (lema E.13) y $\sigma_+(H)$ es acotado por arriba, k_M es finita.

Lema 8. Suponga que $n \geq 3$, y que $V(x) \in K_2$ con $\epsilon > 1$ en (15). Tome $s = \frac{1+\epsilon}{2}$. Suponga que H no tiene ni autovalor ni resonancia en cero.

Entonces el límite en (84) existe también en $k = 0$. La función $R^\omega(k)$ se extiende a una función definida en $k = 0$ por (84). La función extendida es analítica en $\mathrm{C}^+ \setminus \Delta$ y continua en $\overline{\mathrm{C}^+} \setminus \Delta$, con valores en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$, donde

$$\Delta = \{\imath q \in \mathrm{C}^+ : -q^2 \in \sigma_d(H)\} \cup \{p \in \mathrm{R}^+ : p^2 \in \sigma_+(H)\}. \tag{88}$$

Demostración.

Se sigue de (85) que

$$I + VR_0^\omega(0) = I + VR_0^+(0) \quad \text{(L.G.17)} \tag{89}$$

es invertible (lema E.34). Entonces $I + VR_0^\omega(k)$ es invertible en una vecindad de cero en $\overline{\mathrm{C}^+}$ (lema A.24, donde en este caso $(E, A, f) = (\overline{\mathrm{C}^+} \setminus \Delta, \mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n)), I + VR_0^\omega(\cdot)))$, los autovalores de $H = H_0 + V(x)$ no se acumulan en cero (lemas H.2 y A.10, donde en este caso $O_2 = V$), y (84) vale en una vecindad de cero.

Q.E.D.

Sea $V(x) \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$. Definimos para $k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0$

$$\psi(x,k,\omega) = R^{\omega}(k)V(x). \tag{90}$$

Denotamos

$$\Delta_d = \{\imath q \in \mathbf{C}^+ : -q^2 \in \sigma_d(H)\}. \tag{91}$$

Se sigue de las propiedades de $R^{\omega}(k)$ que hemos establecido que si $V(x) \in K_2 \cap L_s^2(\mathbf{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$:

1. Para ω fija, $\psi(x,k,\omega)$ es una función de k con valores en $H_{2,-s}(\mathbf{R}^n)$ meromórfica en $\mathbf{C}^+$ con polos a lo más en Δ_d (lema H.11), y es continua en $\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0$ (lema H.10).

2. Si $n \geq 3$ y cero no es ni un autovalor ni una resonancia de $H = H_0 + V(x)$, $V(x) \in K_2$ con $\epsilon > 1$ en (15), y $V(x) \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$, entonces $\psi(x,k,\omega)$ definida por (90) en $\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta$ es también continua en $k = 0$ para ω fija con valores en $H_{2,-s}(\mathbf{R}^n)$ (lema 8).

3. Note que $R^{\omega}(k)$ es uniformemente acotada en ω. Entonces (1) y (2) también valen cuando $\psi(x,k,\omega)$ es considerada como una función de k con valores en $H_{2,-s}(\mathbf{R}^n) \times L^2(S^{n-1})$.

Balslev 1988 probó que $\psi(x,k,\omega)$ es continua en x y que (1) vale para x y ω fijas para $n = 3$ usando el teorema de Sobolev.

Damos abajo una prueba de que $\psi(x,k,\omega)$ es juntamente continua sobre (x,k,ω) para $n \geq 2$ basada en un teorema de Agmon 1975.

Observación 9. Note que $R^{\omega}(k)$ es una función juntamente continua de $(k,\omega) \in (\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 \times S^{n-1})$ en $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$. Por (84), para ver esto es suficiente probar que $R_0^{\omega}(k)$ es juntamente continua en $(k,\omega) \in (\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\} \times S^{n-1})$ con valores en $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$ (lema H.12).

Suponga que esto no es cierto. Esto implicaría la existencia de sucesiones $k_j \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$, $\omega_j \in S^{n-1}$, $f_j \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$ con

$$\|f_j\|_{0,s} = 1, \tag{92}$$

$k_j \to k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$, $\omega_j \to \omega \in S^{n-1}$, tal que

$$\lim_{j\to\infty} \|(R_0^{\omega_j}(k_j) - R_0^{\omega}(k))f_j\|_{2,-s} > 0 \quad (\text{L.A.18, d.e.e.c. } (E_1, E_2) = (L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))), \tag{93}$$

donde también podemos suponer que f_j converge débilmente en $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ a alguna $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ (Rudin 1979, teorema 3.17).

Note que se sigue de (71) que $R_0^{\omega}(k)$ y $(R_0^{\omega}(k))^*$ son juntamente continuas en (k,ω) en la topología fuerte (lemas G.22 y G.23). Entonces para cada $g \in H_{-2,s}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{j\to\infty}(R_0^{\omega_j}(k_j)f_j, g) = \lim_{j\to\infty}(f_j, (R_0^{\omega_j}(k_j))^* g) =$$

$$= (f, (R_0^{\omega}(k))^* g) = \quad (\text{L.A.15, d.e.e.c. } E = L^2_s(\mathbb{R}^n))$$

$$= (R_0^{\omega}(k)f, g). \tag{94}$$

Entonces $R_0^{\omega_j}(k_j)f_j$ converge a $R_0^{\omega}f$ débilmente en $H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$. Pero la sucesión $R_0^{\omega_j}(k_j)f_j$ está uniformemente acotada en la norma de $H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $s' > 1/2$ (lema G.25), y dado que la inclusión de $H_{2,-s'}(\mathbb{R}^n)$ en $L^2_s(\mathbb{R}^n)$, $s' < s$ es compacta (lema C.17), tenemos que

$$s - \lim_{j\to\infty} R^{\omega_j}(k_j)f_j = R^{\omega}(k)f, \tag{95}$$

en la topología fuerte de $H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$. Esto es una contradicción con (93).

Q.E.D.

Note que se sigue del Lema 8 y de (84) que si $n \geq 3$, $V(x) \in K_2$ con $\epsilon > 1$ en (15) y cero no es ni un autovalor ni una resonancia de H entonces para $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, $R^{\omega}(k)$ es juntamente continua también en $k = 0$ i.e. es una función juntamente continua de $(k,\omega) \in (\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \Delta \times S^{n-1})$ con valores en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n), H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))$.

Definimos para $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \Delta_0$

$$\phi(x,k,\omega) = e^{ik\omega\cdot x} - e^{ik\omega\cdot x}\psi(x,k,\omega). \tag{96}$$

Por (84) y (85)

$$R^{\omega}(k) = e^{-ik\omega\cdot x}R^{\pm}(k^2)e^{ik\omega\cdot x} \qquad \text{para } \pm k > 0 \quad (\text{L.H.4}) \tag{97}$$

Se sigue de (90), (97) y (53) que

$$\phi(x,k,\omega) = \begin{cases} \phi_-(x,k,\omega) & , \quad k \in (0,\infty), \quad k^2 \notin \sigma_+(H) & (98) \\ \phi_+(x,-k,-\omega) & , \quad k \in (-\infty,0), \quad k^2 \notin \sigma_+(H). & (99) \end{cases}$$

Lema 10. Suponga que $V(x)$ satisface (16) para alguna $\epsilon > 0$ y alguna $0 < \beta < 4$ y $V(x) \in L^2_s(\mathbf{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$. Entonces $\phi(x,k,\omega)$ y $\psi(x,k,\omega)$ son funciones complejo valuadas de (x,k,ω) juntamente continuas en $(x,k,\omega) \in (\mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 \times S^{n-1})$. Para $(x,\omega) \in (\mathbf{R}^n \times S^{n-1})$ fijos son meromórficas en k para $k \in \mathbf{C}^+$ con polos a los más en Δ_d.

Si $n \geq 3$ y $V(x)$ satisface (16) con $\epsilon > 1$, $0 < \beta < 4$, $V(x) \in L^2_s(\mathbf{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, y cero no es ni un autovalor ni una resonancia de H, entonces son juntamente continuas también en $k = 0$ i.e. para $(x,k,\omega) \in (\mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta \times S^{n-1})$.

Demostración.

$\phi(x,k,\omega)$ satisface

$$(-\Delta + V - k^2)\phi(x,k,\omega) = 0 \quad (\text{L.H.3}), \tag{100}$$

y pertenece a $H_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ (lema H.17). Entonces por el Teorema C.1 de Agmon 1975 y la Observación 9 $\phi(x,k,\omega)$ es localmente Hölder continua en x uniformemente en (k,ω) en conjuntos compactos de $(\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 \times S^{n-1})$ (lema H.20).

Denotemos

$$g = \phi(x,k_1,\omega_1) - \phi(x,k_2,\omega_2), \tag{101}$$

donde $(x,k_i,\omega_i) \in (\mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 \times S^{n-1})$. Entonces g satisface

$$(-\Delta + V(x) - k_1^2)g(x) = (k_1^2 - k_2^2)\phi(x,k_2,\omega_2) \tag{102}$$

Aplicando otra vez la Observación 9 y el Teorema C.1 de Agmon 1975 probamos que $\phi(x,k,\omega)$ es juntamente continua (lema H.23).

Una vez que la continuidad está probada el hecho de que $\phi(x,k,\omega)$ es meromórfica en $\mathbf{C}^+$ con polos a lo más en Δ_d para x,ω fijas, se sigue de la propiedad (1) arriba (lemas H.23 y H.24).

Si $n \geq 3$, $V(x)$ satisface (16) con $\epsilon > 1$, $V(x) \in L^2_s(\mathbf{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, y cero no es ni un autovalor ni una resonancia de H, el argumento dado para la continuidad de $\phi(x,k,\omega)$ se aplica también cuando $k = 0$ (ver lemas 8 y H.23).

Q.E.D.

Capítulo 4

La dispersión inversa

Encontramos conveniente definir a $S(k)$ también para $k < 0$ como sigue:

$$S(k) = TS(-k)T, \tag{1}$$

donde T está definido en (3.43).

Note que con esta definición (1) es también válida para $k > 0$.

Lema 1. Suponga que $V(x) \in K_2 \cap L_s^2(\mathbb{R}^n)$, $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, donde ϵ es como en (3.15). Entonces

$$S(k)\phi(x, -k, \omega) = \phi(x, k, -\omega), \tag{2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fija, y $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k^2 \notin \sigma_+(H)$.

Demostración.

Para $k > 0$ (2) es equivalente a (ver (3.53), (55) y (56))

$$S(k)\phi_+(x, k, -\omega) = \phi_-(x, k, -\omega). \tag{3}$$

Para $k < 0$, (2) es equivalente a (ver (1))

$$TS(-k)T\phi_-(x, -k, \omega) = \phi_+(x, -k, \omega) \tag{4}$$

o equivalentemente

$$S(-k)T\phi_-(x,-k,\omega) = T\phi_+(x,-k,\omega), \tag{5}$$

$$S(-k)\phi_+(x,-k,-\omega) = \phi_-(x,-k,-\omega), \tag{6}$$

donde usamos $T\phi_\pm(x,-k,\omega) = \phi_\mp(x,-k,-\omega)$ (lema F.14). Esta última propiedad es inmediata de (3.53). Pero (6) se sigue de (5). Así que necesitamos probar sólo (3). Esta última ecuación es equivalente a

$$[R^+(k^2) - R^-(k^2)]Ve^{-ik\omega\cdot x} = -(S(k)-I)\phi_+(x,k,-\omega) \quad \text{(L.F.13)} \tag{7}$$

Como es bien sabido (Agmon 1975) a partir de un cálculo, que para $k>0$, $k^2 \notin \sigma_+(H)$

$$[R^+(k^2) - R^-(k^2)] = \frac{i}{2(2\pi)^{n-1}}k^{n-2}Q_+^*(k^2)\gamma^*(k)\gamma(k)Q_+(k^2) \quad \text{(L.F.8)} \tag{8}$$

donde Q_+ está definido en (3.41). Entonces

$$[R^+(k^2) - R^-(k^2)]V(x)e^{-ik\omega\cdot x} = \frac{i}{2(2\pi)^{n-1}}k^{n-2}(I - R^-(k^2)V)\gamma^*(k)\gamma(k)\cdot$$

$$Q_+(k^2)Ve^{-ik\omega\cdot x} = \frac{i}{2(2\pi)^{n-1}}k^{n-2}(\phi_+(x,k,-\cdot),\gamma(k)TQ_+(k^2)Ve^{-ik\omega\cdot x})_{L^2(S^{n-1})}$$

$$= \frac{i}{2(2\pi)^{n-1}}k^{n-2}(\gamma^*(k)\phi_+(x,k,-\omega), V(I-R^-(k^2)V)e^{ik\omega\cdot x})_{L^2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \frac{i}{2(2\pi)^{n-1}}k^{n-2}\gamma(k)Q_+(k^2)V\gamma^*(k)\phi_+(x,k,-\omega) =$$

$$= -(S(k)-I)\phi_+(x,k,-\omega), \tag{9}$$

Q.E.D.

Para $y \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. denotamos por $S_y(k)$ a la matriz de dispersión para el par H_0, $H_y = H_0 + V_y(x)$ donde $V_y(x) = V(x+y)$.

Lema 2. Suponga que $V(x) \in K_2$. Entonces para $y \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k^2 \notin \sigma_+(H)$:

$$S_y(k) = e^{ik\omega\cdot x} S(k) e^{-ik\omega\cdot x}. \tag{10}$$

Más aún, si $V(x)$ es continua y

$$|V(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\delta}, \tag{11}$$

para algunas constantes $C, \delta > 0$,

$$\lim_{y\to y_0} S_y(k) = S_{y_0}(k), \tag{12}$$

en la topología uniforme de operadores en $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$, y uniformemente para $k \in \{k \in \mathbb{R}: |k| > \Delta\}$, para cualquier $\Delta > 0$. Más aún, si $n \geq 3$ y $V(x)$ satisface (11) con $\delta > 1$, y cero no es ni un autovalor ni una resonancia de H, (12) vale también en $k = 0$, i.e. vale uniformemente para $k \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Denote por T_y, $y \in \mathbb{R}^n$, al operador unitario de translación sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ (lema D.23 y D.27): $(T_y f)(x) = f(x+y)$, y por $H_y = H_0 + V_y$, donde $V_y(x) = V(x+y)$. Entonces

$$H_y = T_y H T_y^* \quad \text{(L.D.27 y L.H.5)}. \tag{13}$$

Se sigue que H y H_y tienen el mismo espectro puntual (lema A.20, donde en este caso $(E_1, E_2) = (L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$.

Denotamos por $W_\pm^y$ y S_y a los operadores de onda y de dispersión para el par H_y, H_0. Entonces

$$W_\pm^y = s-\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_y} e^{-itH_0} = T_y s-\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} T_y^* = \text{(L.A.36, d.e.e.c. } H = L^2(\mathbb{R}^n))$$

$$= T_y W_\pm T_y^*, \tag{14}$$

donde usamos el hecho de que $T_y e^{-itH_0} = e^{-itH_0} T_y$ (lema A.36, donde en este caso $H = L^2(\mathbb{R}^n)$).

Se sigue que

$$S_y = W_+^{y*} W_-^y = T_y S T_y^*, \tag{15}$$

y tomando la transformada de Fourier: $S_y(k) = FS_yF^* = FT_ySТ_y^*F^* = e^{\imath k\omega\cdot y}\hat{S}(k)e^{-\imath k\omega\cdot y}$ (Rudin 1979, teorema 7.2, y lema D.42), donde usamos el hecho de que para $f \in L^2(\mathrm{R}^n)$

$$(FT_yf)(k\omega) = e^{\imath k\omega\cdot y}(Ff)(k\omega) \quad \text{(Rudin 1979, teorema 7.2)}, \tag{16}$$

en coordenadas polares $k \in \mathrm{R}^+$, $\omega \in S^{n-1}$. Entonces (10) está establecida para $k > 0$. El resultado para $k < 0$ se sigue de (1) (lema F.19).

Si (11) es satisfecha, $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores positivos (ver Eastham y Kalf 1982). Más aún, dado que $V(x)$ es uniformemente continua sobre subconjuntos compactos de R^n, para $s = \frac{1+\epsilon}{2}$, $\epsilon < \delta$,

$$\lim_{y\to y_0} \|V(x+y) - V(x+y_0)\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{y\to y_0} \sup_{x\in\mathrm{R}^n} |V(x+y) - V(x+y_0)| = \quad \text{(L.D.35)}$$

$$= 0 \quad \text{(L.D.36)}, \tag{17}$$

para todo $y_0 \in \mathrm{R}^n$. Se sigue que $V_y(x)R_0^+(k^2)$ es una función continua de $y \in \mathrm{R}^n$ en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))$ uniformemente para $k \in \{k \in \mathrm{R}: |k| > \Delta\}$, para cualquier $\Delta > 0$ (lemas E.8 y A.13, donde en este caso $(C_1, E_2, B_1, B_2, B_3, f_1, f_2) = (\mathrm{R} \setminus B_\Delta(0), \mathrm{R}^n, L^2_s(\mathrm{R}^n), L^2_{-s}(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n), R_0^+(\cdot^2), V)$). (12) se sigue de (3.25), (3.40) y las correspondientes fórmulas para H_y (lemas F.30 y F.32). Si $n \geq 3$, $\delta > 1$, y cero no es ni un autovalor ni una resonancia el argumento arriba se aplica también en $k = 0$, y (12) vale uniformemente sobre k, para $k \in \mathrm{R}$ (lemas F.31 y F.32).

Q.E.D.

Para O cualquier conjunto abierto, $O \subset \mathrm{R}$, denotamos por $L^2(O, L^2(S^{n-1}))$ al espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables de O en $L^2(S^{n-1})$ con la norma

$$\|f\|_{L^2(O,L^2(S^{n-1}))} = \left[\int_O \|f\|^2_{L^2(S^{n-1})} dt\right]^{1/2}. \tag{18}$$

Identificaremos a $L^2(\mathrm{R}^\pm, L^2(S^{n-1}))$ (donde $\mathrm{R}^- \equiv (-\infty, 0)$) con el subespacio de $L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$ consistente en aquellas funciones que son cero para $\pm t < 0$.

Denotamos pc $H_\pm$ al los espacios Hardy-Lebesgue de funciones con valores en $L^2(S^{n-1})$. Es decir, al espacio de Hilbert de funciones de R en $L^2(S^{n-1})$ que son valores frontera de funciones $f(k)$, $k = p + \imath q \in \mathrm{C}^\pm$, en $L^2(S^{n-1})$ que son analíticas sobre $\mathrm{C}^\pm$ y

$$\sup_{\pm q>0}\int \|f(p+\imath q)\|_{L^2(S^{n-1})}dp < \infty, \tag{19}$$

$$\lim_{q\to 0}\int \|f(p+\imath q) - f(p)\|_{L^2(S^{n-1})}dp = 0. \tag{20}$$

Como sabemos

$$H_\pm = F_1^* L^2(\mathrm{R}^\pm, L^2(S^{n-1})) \quad \text{(Lax y Phillips 1976, teorema 2.5)} \tag{21}$$

donde F_1 denota a la transformada de Fourier unidimensional

$$(F_1 f)(t) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-\imath kt} f(k)dk, \tag{22}$$

donde el límite está en la toplogía fuerte de $L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$.

Definimos al operador generalizado de Marchenko Newton para $x \in \mathrm{R}^n$ como

$$M_x = \chi_+(t) F_1 S_x^T(k) P_\omega P_k F_1^* \chi_+(t), \tag{23}$$

donde $\chi_+(t)$ denota a la función característica de R^+, y $S_x^T(k)$ denota a la transpuesta de $S_x(k)$, o sea $S_x^T(k) = T S_x^*(k) T$. P_k denota al operador paridad sobre k: $(P_k f)(k,\omega) = f(-k,\omega)$. Recuerde que $(P_\omega f)(k,\omega) = f(k,-\omega)$.

Note que M_x manda a $L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$ en $L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ (lema B.9, donde en este caso $(E,B,F) = (\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}), S_x^T(\cdot)P_\omega)$).

Usaremos el mismo símbolo, M_x, para denotar al operador actuando sobre $L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$ como a su restricción a $L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1}))$.

Denotamos por $L^2(\mathrm{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$ al espacio de Banach de todas las funciones, $f(k)$, de R en $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$ que son uniformemente medibles con respecto de la medida de Lebesgue (ver Hille y Phillips 1957, definiciones 3.5.4 y 3.5.5) tales que $\|f(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \in L^2(\mathrm{R})$, el espacio de Hilbert de funciones real valuadas Lebesgue cuadrado integrables sobre R. La norma en $L^2(\mathrm{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$ está dada por

$$\|f\|_{L^2(\mathrm{R},\mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))} = \left[\int_{\mathrm{R}} \|f(k)\|^2_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} dk\right]^{1/2}. \tag{24}$$

Note que si $f(k) \in L^2(\mathrm{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$ entonces $f^2(k)$ es Bochner integrable sobre R (ver Hille y Phillips 1957, teorema 3.7.4). El hecho de que $L^2(\mathrm{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$ sea un espacio de Banach se sigue fácilmente sobre la línea de la prueba clásica en el caso de funciones complejo valuadas (lema B.6, donde en este caso $(E,B) = (\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$).

Supongamos que $V(x) \in B_\alpha$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Se sigue de Froese et al 1982 que $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores positivos. Más aún, por (3.40) $S(k)$ es continua de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ en $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$ en la norma de operadores (lema F.23). Se sigue que $S_x^T(k) - I$ es una función uniformemente medible (lemas F.24 y B.3, donde en este caso $(E, F, S) = (L^2(S^{n-1}), I - S_x^T(\cdot), -\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}))$, y por el Lema 3.4 $(S_x^T(k) - I) \in L^2(\mathbf{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$ (lema F.23) (recuerde que $\|S_x^T(k)\| = 1$). Entonces definimos

$$m_x(t) = s - \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} (S_x^T(k) - I) P_\omega e^{-ikt} dk, \tag{25}$$

donde la integral al lado derecho de (25) es una integral Bochner y el límite que define la transformada de Fourier unidimensional existe en la topología fuerte en $L^2(\mathbf{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$. En particular

$$m_x(t) \in L^2(\mathbf{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))) \quad . \tag{26}$$

Teorema 8.

1. Suponga que $V(x) \in K_2$. Entonces para toda $x \in \mathbf{R}^n$, M_x es un operador acotado autoadjunto sobre $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$. Su norma de operador es menor o igual que uno.

2. Si $V(x) \in B_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1/2$, entonces M_x es sobre $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ un operador con kernel

$$(M_x f)(t) = \int_0^\infty m_x(t + s) f(s) ds, \tag{27}$$

para $t \geq 0$, $f(s) \in L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$, donde $m_x(t) \in L^2(\mathbf{R}^+, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$ es la restricción a $t \geq 0$ de (25).

Más aún, M_x es un operador acotado de $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ en $C_0([0, \infty), L^2(S^{n-1}))$, donde $C_0([0, \infty), L^2(S^{n-1}))$ es el espacio de Banach de funciones continuas de $[0, \infty)$ en $L^2(S^{n-1})$ que tienden a cero cuando $t \to \infty$.

3. Suponga que $n \geq 3$, que $V(x) \in B_\alpha$, para alguna $0 \leq \alpha < 1/2$, donde en (3.15) $\epsilon > 1$, y que cero no sea ni un autovalor ni una resonancia de H. Entonces M_x es un operador compacto sobre $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$. Si además $V(x)$ es continua y satisface (11) con $\delta > 1$, la función $x \to M_x$ es continua de $\mathbf{R}^n$ en $\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1})))$, el espacio de Banach de todos los operadores acotados sobre $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$.

Demostración.

1. Denotamos por $P_\pm$ a los proyectores de $L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}))$ sobre $H_\pm$. Definimos

$$\hat{M}_x = P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k P_+. \tag{28}$$

Por (23)

$$M_x = F_1 \hat{M}_x F_1^* \quad \text{(L.I.16)} \tag{29}$$

Pero por (3.47) y (1) $\hat{M}_x^* = \hat{M}_x$ (lema I.15). Entonces por (29) M_x es autoadjunto. Que M_x es acotado con cota menor o igual que uno es inmediato de (23) y del hecho de que $S(k)$ es unitario (lema I.19).

2. Si $V(x) \in B_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1/2$, se sigue del Lema 3.4 que la transformada de Fourier en (25) está bien definida. Note que

$$P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k P_+ = P_+(S_x^T(k) - I) P_\omega P_k P_+ \quad \text{(L.I.18)} \tag{30}$$

porque $P_+ P_k P_- = P_k P_- P_+ = 0$ (lemas I.8 e I.9). Entonces (27) se sigue del teorema de convolución de la transformada de Fourier. El hecho de que M_x es acotado de $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ en $C_0([0,\infty), L^2(S^{n-1}))$ se sigue del lema de Riemann-Lebesgue.

3. Recuerde que se sigue de Froese *et al* 1982, que si $V(x) \in B_\alpha$, $\alpha < 1/2$, $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores positivos.

Tomar $\varphi(k) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi(k) = 1$, $|k| \leq 1$, $\varphi(k) = 0$, $|k| \geq 2$, y definir $\varphi_m(k) = \varphi(\frac{k}{m})$. Entonces por (30)

$$M_x = M_m^1 + M_m^2, \tag{31}$$

donde

$$M_m^1 = F_1 P_+(S_x^T(k) - I)\varphi_m(k) P_\omega P_k P_+ F_1^*, \tag{32}$$

y

$$M_m^2 = F_1 P_+(S_x^T(k) - I)(1 - \varphi_m(k)) P_\omega P_k P_+ F_1^*. \tag{33}$$

Por el Lema 3.4, y (1)

$$\lim_{m \to \infty} \|M_m^2\|_{\mathbf{B}(L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1})))} = 0 \quad \text{(L.I.20)}. \tag{34}$$

Entonces es suficiente probar que el operador

$$M_\varphi = F_1 P_+(S_x^T(k) - I)\varphi(k) P_\omega P_k P_+ F_1^*, \tag{35}$$

es compacto para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ (Rudin 1979, teorema 4.18).

Denotamos para $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$V_m(x) = V(x)\chi_m(x), \tag{36}$$

donde $\chi_m(x)$ es la función característica de la bola $|x| \leq m$, y

$$M_\varphi^m = F_1 P_+ (S_{x,m}^T(k) - I)\varphi(k) P_\omega P_k P_+ F_1^*, \tag{37}$$

donde $S_{x,m}^T(k) = T S_{x,m}^*(k) T$, $S_{x,m}(k) = e^{ik\omega\cdot x} S_m(k) e^{-ik\omega\cdot x}$, y $S_m(k)$ es la matriz de dispersión para el par H_0, $H_m = H_0 + V_m(x)$. Tenemos (ver Agmon 1975)

$$\lim_{m\to\infty} \|V_m(x) - V(x)\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathrm{R}^n), L_s^2(\mathrm{R}^n))} = 0 \quad \text{(L.E.25)} \tag{38}$$

$s = \frac{1+\epsilon}{2}$, con ϵ como en (3.15). Dado que cero no es ni un autovalor ni una resonancia de H y dado que $\sigma_+(H)$ es vacío

$$I + V R_0^+(k^2), \tag{39}$$

es invertible para $k \in [0, \infty)$ (esto está probado para $k = 0$ a continuación de la Definición 3.3, y en Agmon 1975 para $k > 0$). Se sigue de (3.14) y (38) que existe una M tal que para $m \geq M$

$$I + V_m R_0^+(k^2), \tag{40}$$

es invertible para $k \in [0, \infty)$ (lema E.41, donde en este caso $(\pm, r) = (+, 0)$). Entonces para $m \geq M$, cero no es ni un autovalor ni una resonancia de H_m, y $\sigma_+(H_m)$ es vacío.

Más aún, por (3.39), (3.40), (1) y las correspondientes fórmulas para $S_{x,m}(k)$,

$$\lim_{m\to\infty} S_{x,m}(k) = S_x(k), \tag{41}$$

en la topología uniforme de operadores en $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$ uniformemente para k en el soporte de $\varphi(k)$ (lemas F.30 y F.32).

Entonces

$$\lim_{m\to\infty} M_\varphi^m = M_\varphi, \tag{42}$$

en la topología uniforme de operadores en $\mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1})))$ (lema I.21). Se sigue que es suficiente probar que M_φ es compacto en el caso en que $V(x)$ tenga soporte compacto. Pero se sigue de (3.36-37), (3.55), (3.56) y (1) que en este caso $T(k) = S(k) - I$ es un operador integral con kernel $T(k, \omega, \omega')$, donde

$$T(k,\omega,\omega') = \frac{-\imath(\text{sign } k)^{n-1}}{2(2\pi)^{n-1}} k^{n-2} \int e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k,\omega')dx, \tag{43}$$

para $k \in \mathbf{R}$ (lema F.16), donde usamos $T\phi_{\pm}(x,k,\omega) = \phi_{\mp}(x,k,-\omega)$ (lema F.14). Para $k \in \mathbf{R}$, $\epsilon \geq 0$, denotamos por $T(k,\epsilon)$ al operador con kernel $T(k,\epsilon,\omega,\omega')$, donde

$$T(k,\epsilon,\omega,\omega') = \frac{-\imath(\text{sign } k)^{n-1}}{2(2\pi)^{n-1}} k^{n-2} \int e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k+\imath\epsilon,\omega')dx. \tag{44}$$

Note que por las propiedades (1-3) de $\psi(x,k,\omega)$ enunciadas antes de la Observación 3.9 y (3.97), $T(k,\epsilon)$ es un operador Hilbert-Schmidt sobre $L^2(S^{n-1})$ (lema H.25) y que

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} T(k,\epsilon) = T(k), \tag{45}$$

en la norma Hilbert-Schimdt, uniformemente para k en conjuntos compactos de $\mathbf{R}$ (lema I.22). Definimos

$$M_\varphi^\epsilon = F_1 P_+ T_x^T(k,\epsilon)\varphi(k) P_\omega P_k P_+ F_1^*, \tag{46}$$

donde para $k \in \mathbf{R}$, $\epsilon > 0$

$$T_x(k,\epsilon) = e^{\imath k\omega\cdot x} T(k,\epsilon) e^{-\imath k\omega\cdot x}, \tag{47}$$

y donde $T_x^T(k,\epsilon)$ es el traspuesto de $T_x(k,\epsilon)$: $T_x^T(k,\epsilon) = TT_x^*(k,\epsilon)T$.

Entonces por la uniformidad del límite en (45) para k en el soporte de $\varphi(k)$

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} M_\varphi^\epsilon = M_\varphi, \tag{48}$$

en la topología uniforme de operadores en $\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1})))$ (lema I.24). Se sigue que es suficiente probar que M_φ^ϵ es compacto para $\epsilon > 0$. Sin embargo M_φ^ϵ es un operador integral con kernel

$$(M_\varphi^\epsilon f)(t) = \int_0^\infty m_\varphi^\epsilon(s+t) f(s)ds, \tag{49}$$

donde

$$m_\varphi^\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty T_x^T(k,\epsilon)\varphi(k) P_\omega e^{-\imath kt} dk. \tag{50}$$

El cuadrado de la norma de Hilbert-Schmidt de M_φ^ϵ está dado por

$$\|M_\varphi^\epsilon\|_2^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty dsdt\|m_\varphi^\epsilon(s+t)\|_2^2 = \int_0^\infty t\|m_\varphi^\epsilon(t)\|_2^2 dt \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|m_\varphi^\epsilon(t)\|_2^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} t^2\|m_\varphi^\epsilon(t)\|_2^2 dt, \tag{51}$$

donde $\|m_\varphi^\epsilon(t)\|_2^2$ denota el cuadrado de la norma Hilbert-Schmidt de $m_\varphi^\epsilon(t)$ como operador sobre $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$.

Entonces

$$\|M_\varphi^\epsilon\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int d\omega d\omega' \int_{-\infty}^{\infty}\Big[|T_x^T(k,\epsilon,\omega,\omega')\varphi(k)|^2 +$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial k}T_x^T(k,\epsilon,\omega,\omega')\varphi(k)\right|^2\Big]dk < \infty, \tag{52}$$

por (44), (47), la analiticidad de $\phi(x,k+\imath\epsilon,\omega)$, y dado que $\varphi(k) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Entonces M_φ^ϵ es compacto como un operador de Hilbert-Schmidt.

Finalmente suponga que $V(x)$ es continuo y satisface (11) con $\delta > 0$, y que cero no es ni un autovalor ni una resonancia. Entonces por el Lema 2

$$\lim_{x\to x_0} S_x(k) = S_{x_0}(k), \tag{53}$$

en la topología uniforme de operadores en $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$, uniformemente para $k \in \mathbf{R}$. Entonces por (23), la función $x \to M_x$ es continua de $\mathbf{R}^n$ en $\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1})))$ en la topología uniforme de operadores (lema I.25).

Q.E.D.

ema 4. Suponga que $n \geq 3$, que $V(x) \in B_\alpha$, para iguna $0 \leq \alpha \leq 1/2$, donde en (3.15, $\epsilon > 1$, y que cero no es ni un autovalor ni una resonancia para $H = H_0 + V(x)$. Entonces hay una $\Delta > 0$ tal que si

$$\|(1+|x|^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}V(x)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))} \leq \Delta, \tag{54}$$

± 1 no son autovalores de M_x, $x \in \mathbf{R}^n$, y

$$\|M_x\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^+,L^2(S^{n-1})))} < 1, \tag{55}$$

para toda $x \in \mathbf{R}^n$.

Demostración.

Suponga que $f_\pm$ son autovectores de M_x con autovalores ± 1. Entonces $\hat{f}_\pm(k) = F_1^* f_\pm(t)$ satisface

$$\pm \hat{f}_\pm = P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k \hat{f}_\pm(k) \quad \text{(L.I.17)}; \tag{56}$$

donde usamos $P_+ \hat{f}_\pm = \hat{f}_\pm$. Más aún

$$P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k \hat{f}_\pm = S_x^T(k) P_\omega P_k \hat{f}_\pm, \tag{57}$$

porque de otra manera (por $\|\cdot\|$ denotamos la norma en $L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}))$)

$$\|\hat{f}_\pm\| = \|P_- S_x^T(k) P_\omega P_k \hat{f}_\pm\| < \|S_x^T(k) P_\omega P_k \hat{f}_\pm\| \leq$$

$$\leq \|\hat{f}_\pm\|, \tag{58}$$

y se seguiría que $\hat{f}_\pm(k) = 0$.

Entonces

$$\pm \hat{f}_\pm = S_x^T(k) P_\omega P_k \hat{f}_\pm = P_\omega P_k \hat{f}_\pm +$$

$$+ (S_x^T(k) - I) P_\omega P_k \hat{f}_\pm, \tag{59}$$

y dado que $\hat{f}_\pm$ y $P_\omega P_k \hat{f}_\pm$ son ortogonales entre sí (lema I.13)

$$2\|\hat{f}_\pm\|^2 = \int dk \|(S_x^T(k) - I) P_\omega P_k \hat{f}_\pm\|^2_{L^2(S^{n-1})}. \tag{60}$$

Pero se sigue de (3.39), (3.40) y (1) que

$$\|S_x^T(k) - I\|_{\mathbf{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|(S(k) - I)\|_{\mathbf{B}(L^2(S^{n-1}))} < \quad \text{(L.F.27)}$$

$$< \sqrt{2}, \tag{61}$$

para todo $k \in \mathbf{R}$, si Δ en (54) es suficientemente pequeña (lemas F.9, F.31 y F.32).

Entonces por (60)

$$2\|\hat{f}_\pm\|^2 < 2\|\hat{f}_\pm\|^2, \tag{62}$$

y $\hat{f}_\pm = 0$. Se sigue que ± 1 no son autovalores de M_x, $x \in \mathbb{R}^n$.

Dado que por el Teorema 3, M_x es autoadjunto, compacto, y su norma de operador es menor o igual que 1, (55) se sigue por que ± 1 no son autovalores de M_x (Rudin 79, teoremas 4.25 y 11.28).

Q.E.D.

Observación 5. Definimos para $\delta > 0$

$$\|(1+|x|)^{2+\delta}V(x)\|_\infty \equiv \operatorname{ess}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{2+\delta}|V(x)|. \tag{63}$$

Note que para $0 < \epsilon \leq 1 + \delta$

$$\|(1+x^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}V(x)\|_{\mathcal{B}(H_\alpha(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \|(1+|x|)^{2+\delta}V(x)\|_\infty \quad (\text{L.C.15}) \tag{64}$$

Entonces (54) será satisfecha si

$$\|(1+|x|)^{2+\delta}V(x)\|_\infty \leq \Delta. \tag{65}$$

Para $m \geq 0$ denotamos por $C_B^m(\mathbb{R}^n)$ al espacio de funciones real valuadas continuas y acotadas sobre $\mathbb{R}^n$ cuyas derivadas hasta orden m son funciones acotadas.

Teorema 6. Suponga que $n \geq 3$, que $V(x) \in C_B^{\alpha_0}(\mathbb{R}^n)$, donde α_0 es el entero no negativo más pequeño tal que $\alpha_0 > n/2 + 3/2$, y que para $0 \leq |\gamma| \leq \alpha_0$

$$|D_x^\gamma V(x)| \leq C(1+|x|)^{-\frac{n}{2}-1-\delta}, \tag{66}$$

para algunas $C, \delta > 0$. Más aún, suponga que $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores no positivos y que cero no es una resonancia.

Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fija, $D_x^\gamma \psi(x,k,\omega) \in \mathrm{H}_+$, donde $0 \leq |\gamma| \leq 2$, y la función $x \to D_x^\gamma \psi(x,k,\omega)$ es continua de $\mathbb{R}^n$ en H_+. Denotamos por

$$\chi_x(t,\omega) = s - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} e^{-ikt}\psi(x,k,\omega)\,dk, \tag{67}$$

a la transformada de Fourier en k de $\psi(x,k,\omega)$ para x fija. Entonces $\chi_x(t,\omega) \in L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ y $\chi_x(t,\omega) = 0$ para $t < 0$. Más aún, para $0 \le |\gamma| \le 2$

$$D_x^\gamma \chi_x(t,\omega) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ikt}\psi(x,k,\omega)dk, \tag{68}$$

estan también en $L^2(\mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1}))$, $D_x^\gamma \chi_x(t,\omega) = 0$, para $t < 0$, y las funciones $x \to D_x^\gamma \chi_x(t,\omega)$ son continuas de $\mathbf{R}^n$ en $L^2(\mathbf{R}^n, L^2(S^{n-1}))$.

Para cada $x \in \mathbf{R}^n$ fija, $\omega \cdot \nabla_x \chi_x(t,\omega)$ es una función continua de $t \in [0,\infty)$ en $L^2(S^{n-1})$ y satisface la identidad generalizada el milagro de Newton

$$V(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t\downarrow 0} \omega \cdot \nabla_x \chi_x(t,\omega). \tag{69}$$

Demostración.

Note que como $H_0^\omega(k)$ es un operador con coeficientes constantes, conmuta con derivadas. Entonces todos los resultados que hemos obtenido para $R_0^\omega(k)$ como un operador en $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))$, $0 \le \alpha \le 2$, en realidad son ciertos para $R_0^\omega(k)$ como un operador en $\mathrm{B}(H_{\beta,s}(\mathbf{R}^n), H_{\beta+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))$, para $\beta \ge 0$, y $0 \le \alpha \le 2$. Por (66), $V(x)$ es un operador compacto de $H_{\alpha_0+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n)$ en $H_{\alpha_0,s}(\mathbf{R}^n)$ para cualquier s, $1/2 < s < \frac{n}{4} + \frac{1+\delta}{2}$ (lema H.14, donde en este caso $(n', c) = (\alpha_0, V)$). Entonces por (3.85) todos los resultados que obtuvimos para $R^\omega(k)$ como un operador en $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))$ realmente valen para $R^\omega(k)$ como operador en $\mathrm{B}(H_{\alpha_0,s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha_0+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))$, para $0 \le \alpha \le 2$. En particular (3.87) vale en la norma de operadores en $\mathrm{B}(H_{\alpha_0,s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha+\alpha_0,-s}(\mathbf{R}^n))$, $0 \le \alpha < 1$ (lema H.16, donde en este caso $n' = \alpha_0$).

Note que por (66) para $\gamma = 0$, $H = H_0 + V(x)$ no tiene autovalores positivos (ver Eastham y Kalf 1982). Se sigue de (66) que $V(x) \in H_{\alpha_0,s}(\mathbf{R}^n)$ para $0 < s < 1 + \delta$ (lema C.31, donde en este caso $(n', c) = (\alpha_0, V)$). Entonces por el teorema de Sobolev, para x y ω fijas, $D_x^\gamma \psi(x,k,\omega)$, $0 \le |\gamma| \le 2$, es analítica sobre $\mathbf{C}^+$, continua sobre $\overline{\mathbf{C}^+}$, y para cualquier $0 < \rho < \alpha_0 - |\gamma| + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$, $\rho \le 1/2$,

$$|D_x^\gamma \psi(x,k,\omega)| \le C \|D_x^\gamma \psi(\cdot,k,\omega)\|_{\alpha_0 - |\gamma| + 1/2 - \rho, -s} \le$$

$$\le C \|\psi(\cdot,k,\omega)\|_{\alpha_0 + 1/2 - \rho, -s} \le$$

$$\le \frac{C}{(1+|k|)^{1/2+\rho}} \|V\|_{\alpha_0,s} \quad (\text{L.H.27, d.e.e.c. } n' = \alpha_0), \tag{70}$$

para alguna constante C, $k \in \overline{\mathbf{C}^+}$ y uniformemente para x en conjuntos compactos de $\mathbf{R}^n$ y $\omega \in S^{n-1}$. Entonces para x fija, $D_x^\gamma \psi(x,k,\omega) \in \mathbf{H}_+$ (lemas B.11, donde en este caso $(E_1, E_2, f) = (\mathbb{R}, S^{n-1}, D_x^\gamma \psi(x,k,\omega))$; B.12, donde en este caso $(E, S, f) = (S^{n-1}, \mathbb{C}^+, \psi(x,k,\omega))$, e I.26, donde en este caso $(E, f) = (S^{n-1}, \psi(x,k,\omega)))$. Más aún, por el teorema de Sobolev para k y ω fijas, $D_x^\gamma \psi(x,k,\omega)$ es una función continua de x y dado que la constante C en (70) es uniforme para x en conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ y en $\omega \in S^{n-1}$, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k_0 > 0$

$$\lim_{x \to x_0} \int_{-k_0}^{+k_0} |D_x^\gamma \psi(x,k,\omega) - D_{x_0}^\gamma \psi(x_0,k,\omega)|^2 dk d\omega = 0. \tag{71}$$

Más aún, por (70)

$$\lim_{k_0 \to \infty} \int_{|k| \geq k_0} |\psi(x,k,\omega) - \psi(x_0,k,\omega)|^2 dk d\omega \leq$$

$$\leq C \lim_{k_0 \to \infty} \int_{|k| \geq k_0} \frac{dk}{(1+|k|)^{1+2\delta}} = 0, \tag{72}$$

uniformemente en x para todo $|x - x_0| < \mu$ y para cualquier $\mu > 0$. Se sigue de (71), (72) que para toda $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \to x_0} \|D_x^\gamma \psi(x,k,\omega) - D_{x_0}^\gamma \psi(x_0,k,\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}))} = 0. \tag{73}$$

Entonces la función $x \to D_x^\gamma \psi(x,k,\omega)$ es continua de $\mathbb{R}^n$ en $L^2(\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}))$.

Los hechos de que $D_x^\gamma \chi_x(t,\omega) \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1}))$, $D_x^\gamma \chi_x(t,\omega) = 0$ para $t < 0$ y que las funciones $x \to D_x^\gamma \chi_x(t,\omega)$ son continuas de $\mathbb{R}^n$ en $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ se siguen ahora de la transformada de Fourier en k.

Más aún, tenemos que

$$\chi_x(t,\omega) = F_1 \psi^B(x,k,\omega) + F_1 \psi^{NB}(x,k,\omega), \tag{74}$$

$$\psi^B(x,k,\omega) = R_0^\omega(k) V(x), \tag{75}$$

$$\psi^{NB}(x,k,\omega) = -R_0^\omega(k)(I + V R_0^\omega(k))^{-1} V R_0^\omega(k) V(x). \tag{76}$$

Se sigue del teorema de Sobolev que para cualquier $0 < \rho < \alpha_0 - |\gamma| + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$, $0 \leq |\gamma| \leq 2$, $0 < \rho < 1/2$

$$|D_x^\gamma \psi^{NB}(x,k,\omega)| \leq \frac{C}{(1+|k|)^{3/2+\rho}} \|V\|_{\alpha_0,\delta}, \tag{77}$$

y como antes, que $D_x^\gamma\psi^{NB}(x,k,\omega) \in \mathrm{H}_+$ y que la función $x \to D_x^\gamma\psi^{NB}(x,k,\omega)$ es continua de R^n en $L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$. Entonces

$$\chi_x^{NB}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt}\psi^{NB}(x,k,\omega)dk. \tag{78}$$

es una función continua de $x \in \mathrm{R}^n$ en $L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1}))$. Más aún, por (77) para cada x fija, $D_x^\gamma\chi_x^{NB}(t)$ es una función continua de $t \in \mathrm{R}$ en $L^2(S^{n-1})$. Dado que $D_x^\gamma\chi_x^{NB}(t) = 0$ para $t < 0$ debemos tener que

$$D_x^\gamma\chi_x^{NB}(0) = 0. \tag{79}$$

Denotemos

$$\chi_x^B(t) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-ikt}\psi^B(x,k,\omega)dk. \tag{80}$$

Note que para $0 \le |\gamma| \le 2$

$$D_x^\gamma\chi_x^B(t) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} dk\; e^{-ikt} R_0^\omega(k) D_x^\gamma V(x). \tag{81}$$

Como arriba, para cualquier $0 < \rho < \alpha_0 - |\gamma| + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$, $\rho < 1/2$

$$|R_0^\omega(k) D_x^\gamma V| \le C\|R_0^\omega(k)V(x)\|_{\alpha_0-|\gamma|+1/2-\rho,-s} \le$$

$$\le \frac{C}{(1+|k|)^{1/2+\rho}}\|V(x)\|_{\alpha_0,s}, \tag{82}$$

para $k \in \overline{\mathrm{C}^+}$, uniformemente para x en conjuntos compactos de R^n y $\omega \in S^{n-1}$. Más aún, como antes, para x fija, $R_0^\omega(k)D_x^\gamma V(x) \in \mathrm{H}_+$ y la función $x \to (R_0^\omega(k)D_x^\gamma V)(x)$ es continua de R^n en H_+. Entonces $D_x^\gamma\chi_x^B(t,\omega) \in L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1}))$, $D_x^\gamma\chi_x^B(t,\omega) = 0$ para $t < 0$, y la función $x \to D_x^\gamma\chi_x^B(t,\omega)$ es continua de R^n en $L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1}))$.

Más aún, por (3.59) y Observación 3.7

$$(-\Delta - 2ik\omega\cdot\nabla)R_0^\omega(k)V(x) = (H_0^\omega(k) - k^2)R_0^\omega(k)V(x) = V(x) \quad \text{(L.H.3)}. \tag{83}$$

Tomando la transformada de Fourier en k en sentido de distribuciones obtenemos de (83) que

$$-\Delta_x \chi_x^B(t,\omega) + 2\frac{\partial}{\partial t}\omega \cdot \nabla_x \chi_x^B(t,\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(t)V(x). \tag{84}$$

Entonces para $t > 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega \cdot \nabla_x \chi_x^B(t,\omega) = -\frac{\Delta_x}{2}\chi_x^B(t,\omega) \in L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1})). \tag{85}$$

Se sigue que para x fija, $\omega \cdot \nabla_x \chi_x^B(t,\omega)$ es una función continua de $t \in [0,\infty)$ en $L^2(S^{n-1})$.

Dado que $\omega \cdot \nabla_x \chi_x^B(t,\omega) = 0$, se sigue de (84) que la discontinuidad de salto de $2\omega \cdot \nabla_x \chi_x^B(t,\omega)$ en $t = 0$ tiene que ser $\sqrt{2\pi}V(x)$. Entonces

$$\lim_{t \downarrow 0} \omega \cdot \nabla_x \chi_x^B(t,\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}V(x). \tag{86}$$

La identidad generalizada el milagro de Newton (69) se sigue de (79) y (86).

Q.E.D.

Suponga que $V(x) \in B_\alpha$, $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$. Definimos para cada $x \in \mathrm{R}^n$ fija

$$f_x(t,\omega) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ikt}[(I - S_x^T(k))1(\omega)]dk, \tag{87}$$

donde $1(\omega)$ es la función sobre S^{n-1} identicamente igual a uno. La transformada de Fourier unidimensional (87) converge en la topología fuerte en $L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$ (ver lema 3.4).

Note que se sigue de los Lemas 3.4 y 2 que la función $x \to f_x(t,\omega)$ es continua de R^n en $L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$. También denotaremos por $f_x(t,\omega)$ a la restricción a $t > 0$ de (87) como una función en $L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1}))$.

Lema 7. Suponga que las condiciones del Teorema 6 son satisfechas. Entonces $\chi_x(t,\omega)$ (ver (67)) es una solución a la ecuación generalizada de Marchenko Newton para cualquier $x \in \mathrm{R}^n$

$$\chi_x(t,\omega) = M_x\chi_x(t,\omega) + f_x(t,\omega), \tag{88}$$

sobre $L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1}))$ donde $f_x(t,\omega)$ está definida en (87).

Demostración.

Se sigue de (3.97) y (2) que

$$\psi(x,k,\omega) = P_\omega S_x(k) P_k \psi(x,k,\omega) + (I - P_\omega S_x(k))1(\omega) \quad \text{(L.H.28)}. \tag{89}$$

Entonces (88) se sigue de (89) y el Lema 3.5 por la transformada de Fourier en k (lema I.27).

Q.E.D.

<u>Demostración del Teorema 0.1</u>

El Teorema 0.1 se sigue del Teorema 3, el Lema 4, la Observación 5, el Teorema 6, y el Lema 7. Los hechos de que si $+1$ no es un autovalor de M_x la solución a la ecuación generalizada de Marchenko es única y que si la norma de operador de M_x es menor o igual que uno la solución está dada por una serie de Neumann están demostrados respectivamente en los lemas I.28 y A.30, donde en este caso $A = \mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}^+, L^2(S^{n-1})))$.

Q.E.D.

Apéndice A. Espacios de Banach

Espacios topológicos.

A continuación daré un par de lemas sobre espacios topológicos.

Lema 1. Considerar a dos espacios topológicos E_1, E_2; a un subconjunto cerrado $C \subset E_2$ y a una función continua $f: E_1 \to E_2$. Entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado.

Demostración.

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(C^c)^c \tag{1}$$

Dado que C es cerrado, C^c es abierto; por ser f continua, $f^{-1}(C^c)$ es abierto; luego, $f^{-1}(C^c)^c$ es cerrado; por (1), $f^{-1}(\mathrm{C})$ es cerrado.

Q.E.D.

Lema 2. Considerar a un elemento $n \in \mathrm{N}$, a un subconjunto cerrado no acotado $S \subset \mathrm{C}^n$, a un espacio topológico E y a una función continua $f: S \to E$ tal que $\lim_{|s|\to\infty} f(s) \in E$. Entonces $\{\lim_{|s|\to\infty} f(s)\} \cup f(S)$ es compacto.

Demostración.

Considerar a una cubierta $\{C\} \subset \mathrm{P}(E)$ correspondiente a $\{\lim_{|s|\to\infty} f(s)\} \cup f(S)$. Entonces:

$$\exists C_0 \in \{C\}: \lim_{|s|\to\infty} f(s) \in C_0 \tag{1}$$

Por lo tanto:

$$\exists r \in \mathrm{R}^+: f(S \cap B_r(0)^c) \in C_0$$

Por lo tanto:

$$S \cap B_r(0)^c \subset f^{-1}(f(S \cap B_r(0)^c)) \subset f^{-1}(C_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(C_0^c) = f^{-1}(C_0)^c \subset (S \cap B_r(0)^c)^c = S^c \cup B_r(0) \Rightarrow f^{-1}(C_0^c) \subset B_r(0) \qquad (2)$$

Por el lema 1, donde en este caso $(E_1, E_2, C) = (S, E, C_0^c)$, se concluye que $f^{-1}(C_0^c)$ es cerrado, y por (2), es compacto. Dado que f es continua y:

$$f(f^{-1}(C_0^c)) = f(S) \cap C_0^c$$

se concluye que $f(S) \cap C_0^c$ es compacto; por lo que existe una subcubierta finita $\{C_i\} \subset \{C\}$ tal que $f(S) \cap C_0^c \subset \bigcup C_i$. Entonces:

$$\left\{\lim_{|s|\to\infty} f(s)\right\} \cup f(S) = \left\{\lim_{|s|\to\infty} f(s)\right\} \cup [(f(S) \cap C_0) \cup (f(S) \cap C_0^c)] \subset$$

$$\subset C_0 \cup C_0 \cup \bigcup C_i \quad \text{(Por (1).)}$$

Por lo que $\{\lim_{|s|\to\infty} f(s)\} \cup f(S)$ es compacto.

Q.E.D.

Espacios vectoriales.

Los siguientes lemas versan sobre operadores definidos en espacios vectoriales arbitrarios, lo único que supondremos es que tales operadores son lineales. No necesitan estar definidos en todo el espacio. Recordemos que para un operador inyectivo el dominio de su inverso es el rango del directo. En el lema 11 derivaremos una fórmula operacional útil para el desarrollo de la tesis.

Notación 3. Considerar a dos espacios vectoriales E_1, E_2. $\mathrm{L}(E_1, E_2)$ denota al conjunto de los operadores lineales definidos en E_1 con imagen en E_2.

Lema 4. Considerar a dos espacios vectoriales E_1, E_2 y a un operador lineal O definido en E_2. Entonces:

$$\mathcal{N}(O) = \{0\} \Longrightarrow \forall L \in \mathrm{L}(E_1, E_2): \mathcal{N}(L) = \{0\} \Rightarrow D((OL)^{-1}) = D(L^{-1}O^{-1})$$

Demostración.

$$D(L^{-1}O^{-1}) = (O^{-1})^{-1}D(L^{-1}) = OR(L) = R(OL) = D((OL)^{-1})$$

Q.E.D.

Lema 5. Mismas hipótesis que en lema 4. Entonces:

$$N(O) = \{0\} \Longrightarrow \forall L \in \mathrm{L}(E_1, E_2): N(L) = \{0\} \Rightarrow (OL)^{-1} = L^{-1}O^{-1}$$

Demostración.

$$\forall d \in D((OL)^{-1}): \exists d' \in D(OL): (OL)^{-1}d = (OL)^{-1}OLd' = d' = L^{-1}O^{-1}OLd' = L^{-1}O^{-1}d$$

Por lo tanto

$$(OL)^{-1} = L^{-1}O^{-1} \quad \text{(L.4)}$$

Q.E.D.

Lema 6. Considerar a dos operadores lineales O_1, O_2, definidos en espacios vectoriales, tales que:

$$N(O_2) = \{0\} \quad \wedge \quad D(O_1) \subset R(O_2) \tag{1}$$

Entonces:

$$N(O_1O_2) = \{0\} \Leftrightarrow N(O_1) = \{0\}$$

Demostración.

$$\Rightarrow .)\forall n \in N(O_1): \exists d \in D(O_2): n = O_2d \Rightarrow \quad (\text{Por}(1).)$$

$$\Rightarrow O_1O_2d = O_1n = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \quad (\text{Pues } N(O_1O_2) = \{0\}.)$$

$$\Rightarrow n = 0$$

Por lo tanto:

$$N(O_1) = \{0\}$$

Q.E.D.

Lema 7. Considerar a dos operadores lineales O_1, O_2 definidos en espacios vectoriales tales que:

$$N(O_1) = \{0\} \quad \wedge \quad R(O_2) \subset D(O_1) \tag{1}$$

Entonces:

$$N(O_1 O_2) = \{0\} \Leftrightarrow N(O_2) = \{0\} \quad .$$

Demostración.

$$\Rightarrow .)\forall n \in N(O_2) \colon O_2 n = 0$$

$$\Rightarrow O_1 O_2 n = 0 \Rightarrow \quad (\text{Por } (1))$$

$$\Rightarrow n = 0$$

Por lo tanto:

$$N(O_2) = \{0\}$$

Q.E.D.

Lema 8. Considerar a dos operadores lineales O_1, O_2, definidos en un espacio vectorial, tales que:

$$N(O_1) = \{0\}$$

Entonces:

$$D(O_1 + O_2) = D((I + O_2 O_1^{-1})O_1)$$

Demostración.

$$D((I+O_2O_1^{-1})O_1)=O_1^{-1}D(I+O_2O_1^{-1})=O_1^{-1}D(O_2O_1^{-1})=$$

$$=O_1^{-1}(O_1^{-1})^{-1}D(O_2)=R(O_1^{-1})\cap D(O_2)=D(O_1)\cap D(O_2)=D(O_1+O_2)$$

Q.E.D.

Lema 9. Mismas hipótesis que en el lema 8. Entonces:

$$O_1+O_2=(I+O_2O_1^{-1})O_1$$

Demostración.

$$\forall d\in D(O_1+O_2):(O_1+O_2)d=O_1d+O_2O_1^{-1}O_1d=(I+O_2O_1^{-1})O_1d$$

Por lo tanto:

$$O_1+O_2=(I+O_2O_1^{-1})O_1\quad (\text{L.8})$$

Q.E.D.

Lema 10. Mismas hipótesis que en el lema 8. Entonces:

$$N(O_1+O_2)=\{0\}\Leftrightarrow N(I+O_2O_1^{-1})=\{0\}$$

Demostración.

$$D(I+O_2O_1^{-1})=D(O_2O_1^{-1})=(O_1^{-1})^{-1}D(O_2)=O_1\bigcap_{i=1}^{2}D(O_i)\subset R(O_1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(O_1+O_2)=N((I+O_2O_1^{-1})O_1)=\ (\text{L.9})$$

$$=\{0\}\Leftrightarrow N(I+O_2O_1^{-1})=\{0\}\quad (\text{L.6, d.e.e.c. } (\text{“}O_1\text{”},\text{“}O_2\text{”})=(I+O_2O_1^{-1},O_1))$$

Q.E.D.

Lema 11. Mismas hipótesis que en el lema 8. Entonces:

$$N(O_1 + O_2) = \{0\} \Rightarrow (O_1 + O_2)^{-1} = O_1^{-1}(I + O_2O_1^{-1})^{-1}$$

Demostración.

$$N(O_1 + O_2) = \{0\} \Rightarrow N(I + O_2O_1^{-1}) = \{0\} \quad \wedge \quad \text{(L.10)}$$

$$\wedge \quad (O_1 + O_2)^{-1} = [(I + O_2O_1^{-1})O_1]^{-1} = \quad \text{(L.9)}$$

$$= O_1^{-1}(I + O_2O_1^{-1})^{-1} \quad \text{(L.5, d.e.e.c. } O = I + O_2O_1^{-1}\text{)}$$

Q.E.D.

Lema 12. Considerar a un espacio vectorial topológico E y a dos subconjuntos acotados $S_1, S_2 \subset E$. Entonces $S_1 + S_2$ es acotado.

Demostración.

Todo entorno V correspondiente a 0 es tal que existe un entorno V' correspondiente a 0 tal que $V' + V' \subset V$. Además:

$$\forall i \in \{1,2\}: \exists r_i \in \mathbb{R}^+: \forall r \in (r_i, \infty): S_i \subset rV'$$

Por lo tanto:

$$\forall r \in (\max\{r_1, r_2\}, \infty): S_1 + S_2 \subset rV' + rV' = r(V' + V') \subset rV$$

Por lo que $S_1 + S_2$ es acotado.

Q.E.D.

Espacios de Banach.

Los siguientes seis lemas tratarán sobre funciones con valòres en espacios de Banach definidas en espacios topológicos. En los primeros tres se estudiará, bajo ciertas condiciones, la continuidad del producto de dos de tales funciones, en sentido uniforme, fuerte y débil. El lema 17 da condiciones para la analiticidad del producto de dos funciones definidas en $\mathbf{C}$.

Lema 13. Considerar a un elemento $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}$, a un conjunto C_i, a un espacio topológico E_i, a un espacio de Banach B_j, y a una función $f_i: C_i \times E_i \to \mathrm{B}(B_i, B_{1+i})$. Entonces:

$\forall (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 : \forall i \in \{1,2\}$:

$$\sup_{c \in C_i} \|f_i(c, e_i)\| < \infty \quad \wedge \quad \lim_{e \to e_i} \sup_{c \in C_i} \|f_i(c, e_i) - f_i(c, e)\| = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{(e_1', e_2') \to (e_1, e_2)} \sup_{(c_1, c_2) \in C_1 \times C_2} \|f_2(c_2, e_2) f_1(c_1, e_1) - f_2(c_2, e_2') f_1(c_1, e_1')\| = 0$$

Demostración.

$$\forall (c_1, c_2, e_1', e_2') \in C_1 \times C_2 \times E_1 \times E_2 : \|f_2(c_2, e_2) f_1(c_1, e_1) - f_2(c_2, e_2') f_1(c_1, e_1')\| =$$

$$= \|f_2(c_2, e_2)(f_1(c_1, e_1) - f_1(c_1, e_1')) - (f_2(c_2, e_2) - f_2(c_2, e_2')) f_1(c_1, e_1')\| \leq$$

$$\leq \|f_2(c_2, e_2)\| \|f_1(c_1, e_1) - f_1(c_1, e_1')\| + \|f_2(c_2, e_2) - f_2(c_2, e_2')\| \|f_1(c_1, e_1')\|$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(e_1', e_2') \to (e_1, e_2)} \sup_{(c_1, c_2) \in C_1 \times C_2} \|f_2(c_2, e_2) f_1(c_1, e_1) - f_2(c_2, e_2') f_1(c_1, e_1')\| \leq$$

$$\leq \lim_{(e_1', e_2') \to (e_1, e_2)} \left(\sup_{c \in C_2} \|f_2(c, e_2)\| \sup_{c \in C_1} \|f_1(c, e_1) - f_1(c, e_1')\| + \right.$$

$$\left. + \sup_{c \in C_2} \|f_2(c, e_2) - f_2(c, e_2')\| \sup_{c \in C_1} \|f_1(c, e_1')\| \right) = 0$$

Q.E.D.

Lema 14. Considerar a un elemento $i \in \{1,2\}$, a un espacio topológico E_i, a un espacio vectorial E, a un espacio de Banach B_i y a dos funciones, $f_1: E_1 \to \mathrm{L}(E, B_1)$ (notación 3), $f_2: E_2 \to \mathrm{B}(B_1, B_2)$. Entonces:

$$\sup_{e \in E_2} \|f_2(e)\| < \infty \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall i \in \{1,2\}: \forall e \in E_i: \forall x \in \bigcap_{e \in E_i} D(f_i(e)): \lim_{e' \to e} \|(f_i(e) - f_i(e'))x\| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in \bigcap_{e \in E_1} D(f_1(e)): \lim_{(e'_1, e'_2) \to (e_1, e_2)} \|(f_2(e_2) f_1(e_1) - f_2(e'_2) f_1(e'_1))x\| = 0$$

Demostración.

$$\forall x \in \bigcap_{e \in E_1} D(f_1(e)): \lim_{(e'_1, e'_2) \to (e_1, e_2)} \|(f_2(e_2) f_1(e_1) - f_2(e'_2) f_1(e'_1))x\| =$$

$$= \lim_{(e'_1, e'_2) \to (e_1, e_2)} \|(f_2(e_2) - f_2(e'_2)) f_1(e_1)x + f_2(e'_2)(f_1(e_1) - f_1(e'_1))x\| \leq$$

$$\leq \lim_{(e'_1, e'_2) \to (e_1, e_2)} \left(\|(f_2(e_2) - f_2(e'_2)) f_1(e_1)x\| + \sup_{e \in E_2} \|f_2(e)\| \|(f_1(e_1) - f_1(e'_1))x\| \right) = 0$$

Q.E.D.

Lema 15. Considerar a dos espacios topológicos E_1, E_2; a un espacio de Banach E y a dos funciones $f_1: E_1 \to E$, $f_2: E_2 \to E^*$. Entonces:

$$\sup_{e \in E_1} \|f_1(e)\| < \infty \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2: \lim_{e \to e_1} (f_1(e_1) - f_1(e), f_2(e_2)) = \lim_{e \to e_2} \|f_2(e_2) - f_2(e)\| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(e_1',e_2')\to(e_1,e_2)} \mid (f_1(e_1), f_2(e_2)) - (f_1(e_1'), f_2(e_2')) \mid = 0$$

Demostración.

$$\lim_{(e_1',e_2')\to(e_1,e_2)} \mid (f_1(e_1), f_2(e_2)) - (f_1(e_1'), f_2(e_2')) \mid =$$

$$= \lim_{(e_1',e_2')\to(e_1,e_2)} \mid (f_1(e_1) - f_1(e_1'), f_2(e_2)) + (f_1(e_1'), f_2(e_2) - f_2(e_2')) \mid \leq$$

$$\leq \lim_{(e_1',e_2')\to(e_1,e_2)} \Big(\mid (f_1(e_1) - f_1(e_1'), f_2(e_2)) \mid + \sup_{e\in E_1} \|f_1(e)\| \|f_2(e_2) - f_2(e_2')\| \Big) = 0$$

Q.E.D.

Lema 16. Considerar a un espacio topológico E, a dos espacios de Banach E_1, E_2; a un subconjunto $S \subset E_1$ y a una función $f: E \to \mathrm{B}(E_1, E_2)$. Entonces:

$$E_1 = \bar{S} \quad \wedge \quad \sup_{e\in E} \|f(e)\| < \infty \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall e \in E: \forall s \in S: \lim_{e'\to e} \|(f(e) - f(e'))s\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall e_1 \in E_1: \lim_{e'\to e} \|(f(e) - f(e'))e_1\| = 0$$

Demostración.

$$\forall e_1 \in E_1: \forall s \in S: \lim_{e'\to e} \|(f(e) - f(e'))e_1\| = \lim_{e'\to e} \|(f(e) - f(e'))(e_1 - s) + (f(e) - f(e'))s\| \leq$$

$$\leq \lim_{e'\to e} \Big(2 \sup_{e\in E} \|f(e)\| \|e_1 - s\| + \|(f(e) - f(e'))s\| \Big) = 2 \sup_{e\in E} \|f(e)\| \|e_1 - s\|$$

Por lo tanto:

$$\lim_{e'\to e} \|(f(e) - f(e'))e_1\| = 0$$

Q.E.D.

Lema 17. Considerar a un elemento $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}$, a un subconjunto abierto $S \subset \mathbf{C}$, a un espacio de Banach E_j y a una función analítica $f_i: S \to \mathrm{B}(E_i, E_{1+i})$. Entonces:

$$\forall s \in S: \lim_{h\to 0} \|h^{-1}\{(f_2 f_1)(s+h) - [(f_2 f_1)(s) + h(f_2 f_1' + f_2' f_1)(s)]\}\| = 0$$

Demostración.

$$\forall s \in S: \lim_{h\to 0} \|h^{-1}\{(f_2 f_1)(s+h) - [(f_2 f_1)(s) + h(f_2 f_1' + f_2' f_1)(s)]\}\| =$$

$$= \lim_{h\to 0} \|f_2(s+h)h^{-1}[f_1(s+h) - (f_1(s) + hf_1'(s))] +$$

$$+ h^{-1}[f_2(s+h) - (f_2(s) + hf_2'(s))]f_1(s) + (f_2(s+h) - f_2(s))f_1'(s)\| \leq$$

$$\leq \lim_{h\to 0}\{\|f_2(s+h)\|\|h^{-1}[f_1(s+h) - (f_1(s) + hf_1'(s))]\| +$$

$$+ \|h^{-1}[f_2(s+h) - (f_2(s) + hf_2'(s))]\|\|f_1(s)\| + \|f_2(s+h) - f_2(s)\|\|f_1'(s)\|\} = 0$$

(Pues f_i es analítica.)

Q.E.D.

Lema 18. Considerar a dos espacios de Banach E_1, E_2, y a una función $f: \mathbf{N} \to \mathrm{B}(E_1, E_2)$ tal que $\inf_{n\in\mathbf{N}} \|f(n)\| > 0$. Entonces existe una función $f': \mathbf{N} \to \{e \in E_1: \|e\| = 1\}$ tal que $\inf_{n\in\mathbf{N}} \|f(n)f'(n)\| > 0$.

Demostración.

$$\forall n \in \mathbf{N}: \exists e_n \in \{e \in E_1: \|e\| = 1\}: \left(\inf_{n\in\mathbf{N}} \|f(n)\|\right)/2 + \|f(n)e_n\| \geq \|f(n)\| \geq \inf_{n\in\mathbf{N}} \|f(n)\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f(n)e_n\| \geq \left(\inf_{n\in\mathbf{N}} \|f(n)\|\right)/2 \tag{1}$$

Sea f' tal que:

$$\forall n \in \mathbf{N}: f'(n) = e_n$$

Por lo tanto:

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} \|f(n)f'(n)\| = \inf_{n\in\mathbf{N}} \|f(n)e_n\| \geq \left(\inf_{n\in\mathbf{N}} \|f(n)\|\right)/2 > \quad (\text{Por}(1))$$

$$> 0$$

Q.E.D.

El tema que abordaremos ahora es el de operadores en espacios de Banach. En el lema 20 establecemos que el espectro puntual de un operador es invariante bajo equivalencia unitaria; en el lema 21 se prueba un resultado para operadores isométricos los cuales no alteran la norma en el producto con otro operador acotado; en el lema 22 probaremos que el producto de un operador cerrable por un acotado es cerrable.

Lema 19. Considerar a dos espacios de Banach E_1, E_2. Entonces:

$$\forall L \in \mathrm{L}(E_1, E_2): N(L) = \{0\} \quad \wedge \quad LL^{-1} = I \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall L' \in \mathrm{L}(E_1) \cap \mathrm{L}(D(L)): \forall c \in \mathbf{C}: N(L' - c) = \{0\} \Leftrightarrow N(LL'L^{-1} - c) = \{0\} \quad (\text{N.3})$$

Demostración.

$$R((L' - c)L^{-1}) \subset R(L' - c) = (L' - c)D(L' - c) = (L' - c)D(L') \subset$$

$$\subset L'D(L') - cD(L') = R(L') + D(L') \subset D(L) + D(L) = D(L) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad D(L' - c) = D(L') \subset D(L) = R(L^{-1})$$

Por lo tanto:

$$N(LL'L^{-1} - c) = N(L(L' - c)L^{-1}) = \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N((L' - c)L^{-1}) = \{0\} \Leftrightarrow \quad (\text{L.7, d.e.e.c. } (O_1, O_2) = (L, (L' - c)L^{-1}))$$

$$\Leftrightarrow N(L' - c) = \{0\} \quad (\text{L.6, d.e.e.c. } (O_1, O_2) = L' - c, L^{-1}))$$

Q.E.D.

Lema 20. Mismas hipótesis que en el lema 19. Entonces:
$\forall L \in \mathbf{L}(E_1, E_2)$:

$$N(L) = \{0\} \quad \wedge \quad LL^{-1} = I \Longrightarrow \forall L' \in \mathbf{L}(E_1) \cap \mathbf{L}(D(L)) \colon \sigma_p(L') = \sigma_p(LL'L^{-1})$$

Demostración.

$$\sigma \in \sigma_p(L') \Leftrightarrow N(L' - \sigma) \neq \{0\} \Leftrightarrow N(LL'L^{-1} - \sigma) \neq \{0\} \Leftrightarrow \ (\text{L.19})$$

$$\Leftrightarrow \sigma \in \sigma_p(LL'L^{-1})$$

Por lo tanto:

$$\sigma_p(L') = \sigma_p(LL'L^{-1})$$

Q.E.D.

Lema 21. Considerar a cuatro espacios de Banach $E_1, \ldots, E_4$, y a dos operadores isométricos $O_1 \colon E_1 \to E_2$, $O_2 \colon E_3 \to E_4$. Entonces:

$$\forall i \in \{1, 2\} \colon R(O_i) = E_{2i} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall B \in \mathbf{B}(E_2, E_3) \colon O_2BO_1 \in \mathbf{L}(E_1, E_4) \quad \Rightarrow \quad O_2BO_1 \in \mathbf{B}(E_1, E_4) \wedge \|B\| = \|O_2BO_1\| \tag{N.3}$$

Demostración.

$$\forall e \in E_1 \colon \|O_2BO_1e\| = \|BO_1e\| \leq \quad (\text{Pues } O_2 \text{ es isometría.})$$

$$\leq \|B\|\|O_1 e\| = \|B\|\|e\| \quad \text{(Pues } O_1 \text{ es isometría.)}$$

Por lo tanto:

$$O_2 B O_1 \in \mathrm{B}(E_1, E_4) \wedge \|O_2 B O_1\| \leq \|B\|$$

Por lo tanto:

$$\|B\| = \|O_2^{-1} O_2 B O_1 O_1^{-1}\| \leq \|O_2 B O_1\| \Rightarrow$$

(Donde ahora "E_1","E_2","E_3","E_4","O_1","O_2") $= (E_2, E_1, E_4, E_3, O_1^{-1}, O_2^{-1})$.)

$$\Rightarrow \|B\| = \|O_2 B O_1\|$$

Q.E.D.

Lema 22. Considerar a tres espacios de Banach E_1, E_2, E_3; y a dos elementos $B \in \mathrm{B}(E_1, E_2)$ y $L \in \mathrm{L}(E_2, E_3)$ (notación 3), este último tal que sea cerrable. Entonces LB es cerrable.

Demostración.

Considerar a una función $f: \mathrm{N} \to D(LB)$ tal que:

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n \to \infty} LBf(n) \in E_3$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n \to \infty} Bf(n) = 0 \Rightarrow \quad \text{(Pues } B \in \mathrm{B}(E_1, E_2).)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} LBf(n) = 0 \quad \text{(Pues } L \text{ es cerrable)}$$

Dado que f es arbitraria se concluye que LB es cerrable.

Q.E.D.

Lema 23. Considerar a dos espacios de Banach E_1, E_2, y a dos subconjuntos acotados $S_1 \subset E_1$ y $S_2 \subset \mathrm{B}(E_1, E_2)$. Entonces $\bigcup_{s \in S_2} sS_1$ es acotado.

Demostración.

$$\forall y \in \bigcup_{s \in S_2} sS_1 : \exists s \in S_2 : y \in sS_1$$

Por lo tanto:

$$\exists s_1 \in S_1 : y = ss_1 \Rightarrow \|y\| = \|ss_1\| \leq \|s\|\|s_1\| \leq \sup_{s \in S_2} \|s\| \sup_{s \in S_1} \|s\|$$

Por lo tanto:

$$\bigcup_{s \in S_2} sS_1 \subset \{e \in E_2 : \|e\| \leq \prod_{i=1}^{2} \sup_{s \in S_i} \|s\|\} \quad \text{(Pues } S_1, S_2 \text{ son acotados.)}$$

Por lo que $\bigcup_{s \in S_2} sS_1$ es acotado.

Q.E.D.

En esta ocasión trabajaremos con álgebras de Banach, o más bien con funciones que toman valores en estos espacios. En el lema 25 demostraremos que una función de dos variables, uniformemente continua en una de ellas, conserva esta propiedad bajo la inversión algebraica, suponiendo que la función toma valores en el grupo de los elementos invertibles. En el lema 27 probamos un resultado análogo para la analiticidad de una de tales funciones.

Lema 24. Considerar a un espacio topológico E, a un elemento $e \in E$, a un álgebra de Banach A, al conjunto consistente en los elementos invertibles en A, $G \subset A$, y a una función $f : E \to A$ tal que:

$$f(e) \in G \quad \wedge \quad \lim_{e' \to e} \|f(e) - f(e')\| = 0 \tag{1}$$

Entonces existe una vecindad correspondiente a e, $V \subset E$ tal que $f(V) \subset G$.

Demostración.

Por Rudin 1979, teorema 10.12, existe una vecindad correspondiente a 0, $V \subset A$, tal que $f(e) + V \subset G$; por (1), existe una vecindad correspondiente a e, $V' \subset E$, tal que $f(V') \subset f(e) + V$; luego, $f(V') \subset G$.

Q.E.D.

Lema 25. Considerar a un conjunto C, a un espacio topológico E, a un álgebra de Banach A, al conjunto consistente en los elementos invertibles en A, $G \subset A$, y a una función $f: C \times E \to A$. Entonces:

$$\forall e \in E: \sup_{c \in C} \|f(c,e)^{-1}\| < \infty \quad \wedge \quad \lim_{e' \to e} \sup_{c \in C} \|f(c,e) - f(c,e')\| = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{e' \to e} \sup_{c \in C} \|f(c,e)^{-1} - f(c,e')^{-1}\| = 0$$

Demostración.

$$\forall (c,e') \in C \times E: \|f(c,e)^{-1} - f(c,e')^{-1}\| = \|f(c,e)^{-1}(f(c,e') - f(c,e))f(c,e')^{-1}\| \leq$$

$$\leq \|f(c,e)^{-1}\|\|f(c,e') - f(c,e)\|\|f(c,e')^{-1}\|$$

Por lo tanto:

$$\lim_{e' \to e} \sup_{c \in C} \|f(c,e)^{-1} - f(c,e')^{-1}\| \leq$$

$$\leq \lim_{e' \to e} \sup_{c \in C} \|f(c,e)^{-1}\| \sup_{c \in C} \|f(c,e) - f(c,e')\| \sup_{c \in C} \|f(c,e')^{-1}\| = 0$$

Q.E.D.

Lema 26. Considerar a un subconjunto cerrado no acotado $S \subset \mathbb{C}$, a un álgebra de Banach A, al grupo consistente en los elementos invertibles en A, $G \subset A$, y a una función $f: S \to G$. Entonces:

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) \in G \ \wedge \ \forall s \in S: \lim_{s' \to s} \|f(s) - f(s')\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{s \in S} \|f(s)^{-1}\| < \infty$$

Demostración.

Por el lema 2, donde en este caso $(n, E) = (1, G)$, $\{\lim_{|z| \to \infty} f(z)\} \cup f(S)$ es compacto; por Rudin 1979, teorema 10.12, $(\{\lim_{|z| \to \infty} f(z)\} \cup f(S))^{-1}$ es compacto; por Rudin 1979, teorema 1.15, y dado que $f(S)^{-1} \subset (\{\lim_{|z| \to \infty} f(z)\} \cup f(S))^{-1}$, se concluye que $\sup_{s \in S} \|f(s)^{-1}\| < \infty$.

Q.E.D.

Lema 27. Considerar a un subconjunto abierto $S \subset \mathbf{C}$, a un álgebra de Banach A, al conjunto consistente en los elementos invertibles en A, $G \subset A$, y a una función analítica $f\colon S \to G$. Entonces:

$$\forall s \in S\colon \lim_{h\to 0} \|h^{-1}(f(s+h)^{-1} - f(s)^{-1} + hf(s)^{-1}f'(s)f(s)^{-1})\| = 0$$

Demostración.

$$\forall s \in S\colon \lim_{s'\to s} \|f(s)^{-1} - f(s')^{-1}\| = 0 \quad \text{(Pues } f \text{ es analítica y por Rudin 1979, teorema 10.12)}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \|h^{-1}(f(s+h)^{-1} - f(s)^{-1} + hf(s)^{-1}f'(s)f(s)^{-1})\| =$$

$$= \lim_{h\to 0} \|f(s+h)^{-1}h^{-1}[f(s+h) - (f(s) + hf'(s))]f(s)^{-1} + (f(s+h)^{-1} - f(s)^{-1})f'(s)f(s)^{-1}\| \le$$

$$\le \lim_{h\to 0} \{\|f(s+h)^{-1}\|\|h^{-1}[f(s+h) - (f(s) + hf'(s))]\|\|f(s)^{-1}\| +$$

$$+ \|f(s+h)^{-1} - f(s)^{-1}\|\|f'(s)f(s)^{-1}\|\} = 0 \quad \text{(Pues } f \text{ es analítica.)}$$

Q.E.D.

Lema 28. Considerar a un álgebra de Banach. Entonces:

$$\forall B \in B_1(0)\colon \lim_{n\to\infty} \|B^n\| = 0$$

Demostración.

$$\forall B \in B_1(0)\colon \lim_{n\to\infty} \|B^n\| \le \lim_{n\to\infty} \|B\|^n = 0$$

Q.E.D.

Lema 29. Mismas hipótesis que en el lema 28. Entonces:

$$\forall B \in B_1(0)\colon \sum_{n=0}^{\infty} B^n \in A$$

Demostración.

$$\forall B \in B_1(0)\colon \forall n \in \mathbf{N}\colon \forall n' \in \mathbf{N} \setminus \{1, \ldots, n\}\colon \left\| \sum_{k=0}^{n} B^k - \sum_{k=0}^{n'} B^k \right\| = \left\| \sum_{k=1+n}^{n'} B^k \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1+n}^{n'} \|B\|^k = \|B\|^{1+n}(1 - \|B\|)^{-1}(1 - \|B\|^{n'-n}) \leq \|B\|^{1+n}(1 - \|B\|)^{-1}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(n,n')\to(\infty,\infty)} \left\| \sum_{k=0}^{n} B^k - \sum_{k=0}^{n'} B^k \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \|B\|^{1+n}(1 - \|B\|)^{-1} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} B^n \in A$$

Q.E.D.

Lema 30. Mismas hipótesis que en el lema 28. Entonces:

$$\forall B \in B_1(0)\colon (I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$$

Demostración.

$$\forall B \in B_1(0)\colon (I - B) \sum_{n=0}^{\infty} B^n = (I - B) \lim_{n\to\infty} \sum_{n'=0}^{n} B^{n'} = \lim_{n\to\infty} (I - B) \sum_{n'=0}^{n} B^{n'} = \text{(L.29)}$$

$$\lim_{n\to\infty} (I - B^{1+n}) = I = \text{(L.28)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (I - B^{1+n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n'=0}^{n} B^{n'}(I - B) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n(I - B)$$

Por lo tanto:

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$$

Q.E.D.

Ahora le toca el turno a los operadores en espacios de Hilbert. En el lema 33 probaremos que el espectro de un operador es invariante ante equivalencias unitarias. En el lema 37 demostraremos que si dos operadores acotados conmutan, entonces ocurre lo mismo entre funciones operacionales de tales operadores; para lo cual echaremos mano del cálculo funcional.

Lema 31. Considerar a un espacio de Banach E. Entonces:

$$\forall L \in \mathbf{L}(E) \colon \varsigma \in \sigma(L) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(L - \varsigma) \quad \text{(N.3)}$$

Demostración.

$$\forall L \in \mathbf{L}(E) \colon \varrho \in \rho(L) \Leftrightarrow \exists B \in \mathbf{B}(E) \colon B(L - \varrho) \subset (L - \varrho)B = I \Leftrightarrow 0 \in \rho(L - \varrho)$$

Por lo tanto:

$$\varsigma \in \sigma(L) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(L - \varsigma)$$

Q.E.D.

Lema 32. Considerar a un espacio de Hilbert H y a un operador unitario $B \in \mathbf{B}(H)$. Entonces:

$$\forall L \in \mathbf{L}(H) \colon 0 \in \sigma(L) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(BLB^*)$$

Demostración.

$$\forall L \in \mathbf{L}(H) \colon 0 \in \rho(L) \Leftrightarrow \exists B' \in \mathbf{B}(H) \colon B'L \subset LB' = I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BB'B^*BLB^* \subset BLB^*BB'B^* = I \Leftrightarrow 0 \in \rho(BLB^*)$$

Por lo tanto:

$$0 \in \sigma(L) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(BLB^*)$$

Q.E.D.

Lema 33. Mismas hipótesis que en el lema 32. Entonces:

$$\forall L \in \mathrm{L}(H): \sigma(L) = \sigma(BLB^*)$$

Demostración.

$$\forall L \in \mathrm{L}(H): \varsigma \in \sigma(BLB^*) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(BLB^* - \varsigma) = \quad (\text{L.31, d.e.e.c. } E = H)$$

$$= \sigma(B(L - \varsigma)B^*) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(L - \varsigma) \Leftrightarrow \quad (\text{L.32})$$

$$\Leftrightarrow \varsigma \in \sigma(L) \quad (\text{L.31, d.e.e.c. } E = H)$$

Por lo tanto:

$$\sigma(BLB^*) = \sigma(L)$$

Q.E.D.

Lema 34. Todo espacio de Banach E es tal que:
$\forall (B, L_1, L_2) \in \mathrm{B}(E) \times \mathrm{L}(E) \times \mathrm{L}(E)$:

$$BL_1 \subset L_2B \quad \Rightarrow \quad \forall \varrho \in \rho(L_1) \cap \rho(L_2): B(L_1 - \varrho)^{-1} = (L_2 - \varrho)^{-1}B \quad (\text{N.3})$$

Demostración.

$$(L_2-\varrho)^{-1}B = (L_2-\varrho)^{-1}B(L_1-\varrho)(L_1-\varrho)^{-1} \subset (L_2-\varrho)^{-1}(L_2-\varrho)B(L_1-\varrho)^{-1} \subset B(L_1-\varrho)^{-1}$$

$$\Rightarrow (L_2 - \varrho)^{-1}B = B(L_1 - \varrho)^{-1}$$

Q.E.D.

Notación 35. Considerar a un espacio de Hilbert y a un operador normal O definido en él. $E(O)$ denota a la resolución de la identidad correspondiente a O.

Lema 36. Considerar a un espacio de Hilbert H y a dos operadores autoadjuntos O_1, O_2 definidos en él. Entonces:

$$\forall B \in \mathrm{B}(H): BO_1 \subset O_2B \Rightarrow BE(O_1) = E(O_2)B$$

Demostración.

$$\forall a \in \mathbf{R}: \forall b \in (a, \infty): \forall h \in H: (BE(O_1)((a,b])h, h) = (E(O_1)((a,b])h, B^*h) =$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} -i(2\pi)^{-1} \int_a^b (\{[O_1 - (\lambda + i\epsilon)]^{-1} - [O_1 - (\lambda - i\epsilon)]^{-1}\}h, B^*h)d\lambda =$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} -i(2\pi)^{-1} \int_a^b (B\{[O_1 - (\lambda + i\epsilon)]^{-1} - [O_1 - (\lambda - i\epsilon)]^{-1}\}h, h)d\lambda =$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} -i(2\pi)^{-1} \int_a^b (\{[O_2 - (\lambda + i\epsilon)]^{-1} - [O_2 - (\lambda - i\epsilon)]^{-1}\}Bh, h)d\lambda = \qquad \text{(L.34)}$$

$$= (E(O_2)((a,b])Bh, h)$$

Por lo tanto:

$$BE(O_1)((a,b]) = E(O_2)((a,b])B \quad \text{(Rudin 1979, teorema 12.7)}$$

Por lo tanto:

$$BE(O_1) = E(O_2)B$$

Q.E.D.

Lema 37. Mismas hipótesis que en el lema 36. Entonces:

$$\forall B \in \mathrm{B}(H): BO_1 \subset O_2 B \Rightarrow \forall l \in L^{\infty}(\mathrm{R}): Bl(O_1) = l(O_2)B$$

Demostración.

$$\forall h \in H: (Bl(O_1)h, h) = (l(O_1)h, B^*h) = \int l d(E(O_1)h, B^*h) = \int l d(E(O_2)Bh, h) = \quad \text{(L.36)}$$

$$= (l(O_2)Bh, h)$$

Por lo tanto:

$$Bl(O_1) = l(O_2)B \quad \text{(Rudin 1979, teorema 12.7)}$$

Q.E.D.

Lema 38. Considerar a un espacio de Hilbert y a dos operadores unitarios O_1, O_2 definidos en él. Entonces $O_1 O_2$ es unitario.

Demostración.

$$(O_1 O_2)^{-1} = O_2^{-1} O_1^{-1} = O_2^* O_1^* = (O_1 O_2)^*$$

Por lo que $O_1 O_2$ es unitario.

Q.E.D.

El lema a continuación es una generalización al hecho de que el espacio dual de un $H_{\alpha,s}$ es $H_{-\alpha,-s}$. Para ello tomaremos un espacio de Banach arbitrario E y a un operador lineal T inyectivo y densamente definido en E; definiremos una nueva norma, la cual es simplemente la aplicación de T a un vector y luego tomar la norma inicial, y denotaremos por E_T al espacio de Banach obtenido mediante la completación del dominio de T bajo la nueva norma. El resultado que demostramos en el lema es que el espacio dual de este E_T es $E^*_{(T^{-1})^*}$, en la misma notación.

Para aplicar este lema al caso de los $H_{\alpha,s}$ tomaremos $E = H_\alpha$ y como operador T al operador multiplicación por ρ_s definido densamente en $H_{\alpha,s}$. Todos los detalles se dan en la siguiente definición.

Definición 39. Considerar a un espacio de Banach E y a un elemento $L \in \mathrm{L}(E)$ (notación 3), tal que:

$$N(L) = \{0\}$$

Considerar a la norma $\|L \cdot\|$ definida en $D(L)$ tal que:

$$\forall d \in D(L): \|L \cdot\|(d) = \|Ld\|$$

$(E_L, \|\cdot\|_L)$ denota a la completación de $D(L)$ relativa a $\|L \cdot\|$.

Lema 40. Considerar a un espacio de Banach E y a un elemento $L \in \mathrm{L}(E)$ tal que:

$$(N(L), \overline{R(L)}) = (\{0\}, E) \quad \wedge \quad (N((L^{-1})^*), \overline{R((L^{-1})^*)}) = (\{0\}, E^*) \tag{1}$$

Entonces $(E_L)^*$ es isométricamente isomorfo a $(E^*)_{(L^{-1})^*}$.

Demostración.

Dado que:

$$\overline{D(L^{-1})} = \overline{R(L)} = E \quad \text{(Por (1))} \tag{2}$$

$(L^{-1})^*$ está definido. Por (1), $(E^*)_{(L^{-1})^*}$ está definido.

Considerar al operador lineal F definido sobre $(E^*)_{(L^{-1})^*}$ tal que:

$$\forall d \in D((L^{-1})^*): \forall d' \in D(L): (Fd)d' = (Ld', (L^{-1})^* d) \tag{3}$$

Por lo tanto:

$$|(Fd)d'| = |(Ld', (L^{-1})^* d)| \leq \|Ld'\| \|(L^{-1})^* d\| = \|d'\|_L \|d\|_{(L^{-1})^*}$$

Por lo tanto:

$$Fd \in (E_L)^* \wedge \|Fd\|_{(E_L)^*} \leq \|d\|_{(L^{-1})^*} \text{ (Pues } D(L) \text{ es denso en } E_L.) \tag{4}$$

Por lo tanto:

$$F \in \mathrm{B}((E^*)_{(L^{-1})^*}, (E_L)^*) \quad \text{(Pues } D((L^{-1})^*) \text{ es denso en } (E^*)_{(L^{-1})^*}.)$$

Además:

$$\forall d \in D((L^{-1})^*) : \forall \epsilon \in \mathbf{R}^+ : \exists d' \in D(L) \setminus \{0\}:$$

$$\|d\|_{(L^{-1})^*} = \|(L^{-1})^* d\| < \epsilon + \|Ld'\|^{-1} |(Ld', (L^{-1})^* d)| = \quad (\text{Por}(1))$$

$$= \epsilon + \|d'\|_L^{-1} |(Fd)d'| \leq \quad (\text{Por } (3))$$

$$\leq \epsilon + \|d'\|_L^{-1} \|Fd\|_{(E_L)^*} \|d'\|_L = \quad (\text{Por } (4))$$

$$= \epsilon + \|Fd\|_{(E_L)^*}$$

Por lo tanto:

$$\|d\|_{(L^{-1})^*} \leq \|Fd\|_{(E_L)^*} \Rightarrow \|d\|_{(L^{-1})^*} = \|Fd\|_{(E_L)^*} \quad (\text{Por } (4))$$

Por lo tanto:

$$\forall e \in (E^*)_{(L^{-1})^*} : \|Fe\|_{(E_L)^*} = \|e\|_{(L^{-1})^*} \quad (\text{Pues } D((L^{-1})^*) \text{ es denso en } (E^*)_{(L_1)^{**}}) \quad (5)$$

Considerar a los elementos $e \in (E_L)^*$ y $l \in \mathbf{L}(E, \mathbf{C})$ (notación 3), este último tal que:

$$\forall d \in D(L) : lLd = ed \quad (6)$$

Por lo tanto:

$$|lLd| = |ed| \leq \|e\|_{(E_L)^*} \|d\|_L = \|e\|_{(E_L)^*} \|Ld\|$$

Por lo tanto:

$$l \in E^* \quad (\text{Por } (1))$$

Por lo tanto:

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}+ : \exists d \in D((L^{-1})^*) : \forall d' \in D(L) : |(e - Fd)d'| = |ed' - (Fd)d'| = |lLd' - (Ld', (L^{-1})^* d)| = \quad (\text{Por } (6) \text{ y } (3))$$

$$= |(l - (\cdot\ ,(L^{-1})^* d))Ld'| \leq \|l - (\cdot\ ,(L^{-1})^* d)\| \|Ld'\| < \epsilon \|d'\|_L \quad \text{(Por (1))}$$

Por lo tanto:

$$\|e - Fd\|_{(E_L)^*} \leq \epsilon$$

Dado que e es un elemento arbitrario, se concluye que:

$$\overline{F\ \ )} = (E_L)^* \Rightarrow R(F) = (E_L)^* \quad \text{(Por (5))}$$

Por lo que $(E_L)^*$ es isom ricamente isomorfo a $(E^*)_{(L^{-1})^*}$.

Q.E.D.

Apéndice B. Integración Vectorial

El actual es un apéndice en el que estudiaremos con detalle ciertas propiedades de las funciones definidas en algún dominio de $\mathbf{R}^n$ con valores en espacios de Banach, desde la óptica de la teoría de la medida e integración vetorial. De entre los lemas más relevantes están el 6, en el que probamos que $L^2(\mathbf{R}^n, \mathrm{B}(B))$, con B un espacio de Banach, es un espacio de Hilbert. Además en los lemas 9 y 10 estudiamos a los operadores multiplicación por una función con valores en $\mathrm{B}(B)$ definidos en $L^2(\mathbf{R}^n, B)$; estos son los operadores análogos a los conocidos operadores multiplicación por una función en los tradicionales espacios $L^2(\mathbf{R}^n)$, y son de vital importancia en la definición de la matriz de dispersión $S(k)$ como operador en $L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}))$.

Notación 1. Considerar a dos conjuntos C_1, C_2. $\mathrm{F}(C_1, C_2)$ denota al conjunto de las funciones C_2-valuadas definidas en C_1.

Lema 2. Considerar a una función $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y la medida de Lebesgue correspondiente a $\mathbf{R}$, m. Suponer que existe un subconjunto cerrado $S \subset \mathbf{R}$, tal que:

$$m(S) = 0 \quad \wedge \quad \forall s \in S^c\colon \lim_{s' \to s} |f(s) - f(s')| = 0 \tag{1}$$

Entonces f es medible.

Demostración.

S es cerrado, luego S^c es abierto; por Royden 1968, proposición 2.8, existe una sucesión de intervalos abiertos disjuntos $\{I_n\}$ tal que:

$$S^c = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n$$

Por lo tanto:

$$f = \chi_S f + \chi_{S^c} f = \chi_S f + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{I_n} f \Rightarrow f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{I_n} f \text{ (c.t.p.)} \quad \text{(Por (1))} \tag{2}$$

Por (1), todo $n \in \mathbf{N}$ es tal que f es continua en I_n, por tanto medible; por (2) y por Royden 1968, teorema 3.20, f es medible.

Q.E.D.

Lema 3. Considerar a un espacio de Banach E, a un elemento $F \in \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathbf{B}(E))$ (notación 1) tal que sea casi separablemente valuado y a la medida de Lebesgue correspondiente a $\mathbf{R}$, m. Suponer que existe un subconjunto cerrado $S \subset \mathbf{R}$, tal que:

$$m(S) = 0 \quad \wedge \quad \forall s \in S^c\colon \lim_{s' \to s} \|F(s) - F(s')\| = 0 \tag{1}$$

Entonces F es uniformemente medible.

Demostración.

Considerar a un elemento $(e, e^*) \in E \times E^*$. Entonces:

$$\forall s \in S^c\colon \lim_{s' \to s} |e^* F(s) e - e^* F(s') e| \leq \lim_{s' \to s} \|e^*\| \|F(s) - F(s')\| \|e\| = 0 \quad \text{(Por (1))}$$

Entonces, por lema el 2, donde en este caso $f = e^* F e$, $e^* F e$ es medible; por Hille 1948, teorema 3.3.1, se concluye que F es uniformemente medible.

Q.E.D.

[Not]ación 4. Considerar a un espacio de medida E. $M(E)$ denota al conjunto de funcione[s c]omplejo valuadas medibles definidas en E.

Le[m]a 5. Considerar a un espacio de medida E, a un espacio de Banach B y a un elemento $F \in \mathbf{F}(E, \mathbf{B}(B))$ (notación 1), tal que sea casi separablemente valuado. Suponer que existe una sucesión de funciones uniformemente medibles $\{F_n\} \in \mathbf{F}(E, \mathbf{B}(B))$ tal que:

$$\lim_{n \to \infty} \|F - F_n\|_{\mathbf{B}(B)} = 0 \quad \text{(c.t.p.)} \tag{1}$$

Entonces F es uniformemente medible.

Demostración.

$$\forall (b, b^*) \in B \times B^*\colon \qquad \mathbf{N}\colon b^* F_n b \in M(E) \quad \wedge \quad \text{(Hille 1948,teorema 3.3.1)}$$

$$\wedge \quad \lim_{n\to\infty} |b^* F b - b^* F_n b| \leq \lim_{n\to\infty} \|b^*\| \|F - F_n\|_{\mathrm{B}(B)} \|b\| = 0 \text{ (c.t.p.)} \quad \text{(Por (1))}$$

Por lo tanto:

$$b^* F b \in M(E)$$

Entonces, por Hille 1948, teorema 3.3.1, F es uniformemente medible.

Q.E.D.

Lema 6. Considerar a un espacio de medida E y a un espacio de Banach separable B. Entonces $L^2(E, \mathrm{B}(B))$ es un espacio de Banach.

Demostración.

Considerar a una función $f\colon \mathbf{N} \to L^2(E, \mathrm{B}(B))$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\|_{L^2(E,\mathrm{B}(B))} < \infty$$

Por lo tanto:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(i)\|_{\mathrm{B}(B)} \right)^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \|f(i)\|_{\mathrm{B}(B)} \right\|_{L^2(E)}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \| \|f(i)\|_{\mathrm{B}(B)} \|_{L^2(E)} \right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(i)\|_{L^2(E,\mathrm{B}(B))} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\|_{L^2(E,\mathrm{B}(B))} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\|_{\mathrm{B}(B)} \right)^2 < \infty \Rightarrow \text{ (Lema de Fatou)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\|_{\mathrm{B}(B)} < \infty \text{ (c.t.p.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \in \mathrm{B}(B) \text{ (c.t.p.)}$$

(Pues $\mathrm{B}(B)$ es un espacio de Banach y por Royden 1968, proposición 6.4)

Además, por lema 5, donde en este caso $(F, F_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \sum_{i=1}^{n} f(i))$; $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es uniformemente medible. Además:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \right\|_{\mathrm{B}(B)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\|_{\mathrm{B}(B)} \text{ (c.t.p.)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \in L^2(E, \mathrm{B}(B)) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall n \in \mathbf{N}: \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{i=1}^{n} f(i) \right\|_{\mathrm{B}(B)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\|_{\mathrm{B}(B)} \in L^2(E)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{i=1}^{n} f(i) \right\|_{L^2(E, \mathrm{B}(B))} = \lim_{n \to \infty} \left(\int \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{i=1}^{n} f(i) \right\|_{\mathrm{B}(B)}^2 \right)^{1/2} = 0$$

(Teorema de convergencia dominada.)

Por Royden 1968, proposición 6.4, $L^2(E, \mathrm{B}(B))$ es un espacio de Banach.

Q.E.D.

Definición 7. Considerar a un espacio de medida E, a dos espacios vectoriales E_1, E_2, y a la función Φ definida en $\mathbf{F}(E, \mathrm{L}(E_1, E_2))$ (notación A.3 y notación 1), tal que:

$$\forall F \in \mathbf{F}(E, \mathrm{L}(E_1, E_2)) : D(\Phi(F)) = \{ f \in \mathbf{F}(E, E_1) : (\text{c.t.p.}) e \in E : f(e) \in D(F(e)) \} \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall d \in D(\Phi(F)) : (\text{c.t.p.}) e \in E : (\Phi(F)d)(e) = F(e)d(e)$$

Lema 8. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$, a un espacio de medida (E, μ), a n subconjuntos disjuntos medibles $S_1, \ldots, S_n$; a un espacio de Banach B, a un elemento $F \in \mathbf{F}(E, \mathrm{B}(B))$ tal que sea fuertemente medible, y a una función $f: \{1, \ldots, n\} \to B$. Entonces:

$$\max\left\{ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i \right), \sup_{e \in E} \|F(e)\| \right\} < \infty \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \chi_{S_i} f(i) \in L^2(E, B) \quad \wedge \left\| F \sum_{i=1}^{n} \chi_{S_i} f(i) \right\|_{L^2(E,B)} \leq \sup_{e \in E} \|F(e)\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \chi_{S_i} f(i) \right\|_{L^2(E,B)}$$

Demostración.

Por Hille 1948, teorema 3.2.3, $F\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i)$ es fuertemente medible. Además:

$$\left\|F\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i)\right\| \leq \|F\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i)\right\| \leq \sup_{e\in E}\|F(e)\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i)\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|F\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i)\right\|_{L^2(E,B)} = \left(\int\left\|F\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i)\right\|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\int\left(\sup_{e\in E}\|F(e)\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i)\right\|\right)^2\right]^{1/2} = \sup_{e\in E}\|F(e)\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i)\right\|_{L^2(E,B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\sum_{i=1}^{n}\chi_{S_i}f(i) \in L^2(E,B)$$

Q.E.D.

Lema 9. Considerar a un espacio de medida E, a un espacio de Banach B y a un elemento $F\in \mathbf{F}(E,\mathrm{B}(B))$ tal que sea uniformemente medible.Entonces:

$$\sup_{e\in E}\|F(e)\| < \infty \Longrightarrow \Phi(F)\in \mathrm{B}(L^2(E,B)) \quad \wedge \quad \|\Phi(F)\|_{\mathrm{B}(L^2(E,B))} \leq \sup_{e\in E}\|F(e)\|$$

Demostración.

Por el lema 8, $\Phi(F)$ se extiende a $L^2(E,B)$ de tal forma que $\Phi(F)\in \mathrm{B}(L^2(E,B))$ y $\|\Phi(F)\|_{\mathrm{B}(L^2(E,B))} \leq \sup_{e\in E}\|F(e)\|$. Verificaré que $\Phi(F)$ satisface la fórmula de evaluación en la definición 7.Todo $l\in L^2(E,B)$ es tal que existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}\subset \mathbf{F}(E,B)$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\|l-f_n\|^2\right)^{1/2} = \lim_{n\to\infty}\|l-f_n\|_{L^2(E,B)} = 0$$

por lo que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty}\|l-f_{n_k}\| = 0 \text{ (c.t.p.)} \tag{1}$$

Además:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int \|\Phi(F)l - \Phi(F)f_{n_k}\|^2\right)^{1/2} = \lim_{k\to\infty}\|\Phi(F)(l - f_{n_k})\|_{L^2(E,B)} = 0$$

por lo que existe una subsucesión $\{f_{n_{kl}}\}$ tal que:

$$(\text{c.t.p.})e \in E\colon (\Phi(F)l)(e) = \lim_{l\to\infty}(\Phi(F)f_{n_{kl}})(e) = \lim_{l\to\infty} F(e)f_{n_{kl}}(e) =$$

$$= F(e)l(e) \quad (\text{Por } (1) \text{ y por que } F(e) \in \mathrm{B}(B))$$

Q.E.D.

Lema 10. Considerar a un espacio de medida E, a un espacio de Banach B y a un elemento $F \in \mathrm{F}(E, \mathrm{B}(B))$ tal que sea fuertemente medible, al igual que F^*. Entonces:

$$\sup_{e\in E}\|F(e)\| < \infty \Rightarrow \Phi(F^*) = \Phi(F)^*$$

Demostración.

$$\forall (l_1, l_2) \in L^2(E,B) \times L^2(E,B)\colon (l_1, \Phi(F^*)l_2) = \int (l_1, \Phi(F^*)l_2)_B =$$

$$= \int (l_1, F^*l_2)_B = \quad (\text{L.9, d.e.e.c. "}F\text{"}= F^*)$$

$$= \int (Fl_1, l_2)_B = (\Phi(F)l_1, l_2)$$

Por lo tanto:

$$\Phi(F^*) = \Phi(F)^* \quad (\text{L.9})$$

Q.E.D.

Lema 11. Considerar a dos espacios de medida E_1, E_2, y a una función $f\colon E_1 \times E_2 \to$ **C**. Entonces:

$$f \in \mathbf{F}(E_1, L^2(E_2)) \quad \wedge \quad \text{(N.1)}$$

$$\wedge \quad \exists (l, l') \in L^2(E_2) \times L^2(E_1 \times E_2): \sup_{e \in E_1} |f(e, \cdot)| \leq l \quad \wedge |f| \leq l' \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall e \in E_1: \lim_{e' \to e} |f(e, \cdot) - f(e', \cdot)| = 0 \text{ (c.t.p.)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \in L^2(E_1, L^2(E_2))$$

Demostración.

$$\forall l' \in L^2(E_2): \forall e \in E_1: \forall e' \in E_1: |l'(f(e, \cdot) - f(e', \cdot))| \leq |l' 2l| \in L^1(E_2)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{e' \to e} |(f(e, \cdot) - f(e', \cdot), l')| =$$

$$= \lim_{e' \to e} \int_{E_2} (f(e, \cdot) - f(e', \cdot))\overline{l'} = 0 \quad \text{(Teorema de convergencia dominada.)}$$

Por lo tanto:

$$(f, l') \in C(E_1) \Rightarrow (f, l') \in M(E_1) \quad \text{(N.4)}$$

Entonces, por Hille 1948, teorema 3.2.2, f es fuertemente medible. Además:

$$\int_{E_1} \|f\|^2_{L^2(E_2)} = \int_{E_1} \int_{E_2} |f|^2 \leq \int_{E_1} \int_{E_2} l' = \|l'\|_{L^2(E_1 \times E_2)} < \infty \Rightarrow f \in L^2(E_1, L^2(E_2))$$

Q.E.D.

Lema 12. Considerar a un espacio de medida (E, μ), a un subconjunto abierto $S \subset \mathbf{C}$, y a una función $f: E \times S \to \mathbf{C}$ tal que $f \in \mathbf{F}(S, L^2(E))$ (notación 1), $\sup_{s \in S} \|f(\cdot, s)\|_{L^2(E)} < \infty$ y que casi todo $e \in E$ sea tal que $f(e, \cdot)$ sea analítica. Entonces $f \in \mathbf{F}(S, L^2(E))$ es analítica.

Demostración.

Considerar a un elemento $l \in L^2(E)$.Entonces todo contorno cerrado $C \subset S$ interior a S es tal que:

$$\int_C |(f(\cdot,s),l)|d|s| \leq \int_C \|f(\cdot,s)\|_{L^2(E)}\|l\|_{L^2(E)}d|s| \leq \int_C \sup_{s\in S}\|f(\cdot,s)\|_{L^2(E)}\|l\|_{L^2(E)}d|s| <$$

$$< \infty \quad (\text{Pues } \sup_{s\in S}\|f(\cdot,s)\|_{L^2(E)} < \infty)$$

Por lo tanto:

$$\int_C (f(\cdot,s),l)ds = \int_C \int_E \quad (e,s)l(e)d\mu(e)ds = \int_E \int_C f(e,s)dsl(e)d\mu(e) =$$

(Teorema de Fubin

$$= 0 \quad (\text{Teorema de Cauchy.})$$

Entonces, por el teorema de Morera, (f,l) es analítica; dado que l es un elemento arbitrario, por Rudin 1979, teorema 3.31; $f \in \mathrm{F}(S, L^2(E))$ es analítica.

Q.E.D.

Lema13. Considerar a un espacio de medida (E,μ), a dos subconjuntos medibles S_1, S_2, y a un espacio de Banach B. Entonces:

$$\mu(S_1 \quad {}_2) = 0 \Rightarrow L^2(S_1,B)\perp L^2(S_2,B)$$

Demostración.

$$\forall i \in \{1,2\}: \forall l_i \in L^2(S_i,B): (l_1,l_2) = \int (l_1,l_2)_B = \int \chi_{S_1\cap S_2}(l_1,l_2) = 0$$

Por lo tanto:

$$L^2(S_1,B)\perp L^2(S_2,B)$$

Q.E.D.

Lema 14. Mismas hipótesis que en lema 13. Entonces:

$$\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_1^c \cap S_2^c) = 0 \Rightarrow L^2(S_1, B) = L^2(S_2, B)^{\perp}$$

Demostración.

$$\chi_{S_2^c} = \chi_{(S_2^c \cap S_1) \cup (S_2^c \cap S_1^c)} = \chi_{S_2^c \cap S_1} = \chi_{(S_2^c \cap S_1) \cup (S_2 \cap S_1)} = \chi_{S_1} \text{ (c.t.p.)}$$

Por lo tanto:

$$\forall l \in L^2(S_2, B)^{\perp}: \int \chi_{S_2} \|l\|_B^2 = \int (l, \chi_{S_2} l)_B = (l, \chi_{S_2} l) = 0$$

Por lo tanto:

$$\|\chi_{S_2} l\|_B = \chi_{S_2} \|l\|_B = 0 \text{ (c.t.p.)} \Rightarrow l = \chi_{S_2^c} l = \chi_{S_1} l \in L^2(S_1, B)$$

Por lo tanto:

$$L^2(S_2, B)^{\perp} \subset L^2(S_1, B) \subset L^2(S_2, B)^{\perp} \Rightarrow \text{ (L.13)}$$

$$\Rightarrow L^2(S_1, B) = L^2(S_2, B)^{\perp}$$

Q.E.D.

Apéndice C. Espacios $H_{\alpha,s}$

Comenzaremos este capítulo con una serie de propiedades de los espacios $H_{\alpha,s}$, los cuales fueron definidos en al capítulo 3, como espacios de Banach. En el lema 1 probaremos que todos los $H_{\alpha,s}$'s son isométricamente isomorfos entre sí y daremos la regla de isometría. En el lema 2 demostraremos la conocida regla de contención de los espacios $H_{\alpha,s}$'s. En el lema 3 estudiaremos una propiedad que existe entre los operadores acotados de estos espacios.

Lema 1. Considerar a un elemento $(n,(s_1,s_2,\alpha_1,\alpha_2)) \in \mathrm{N} \times \mathrm{R}^4$ y al operador lineal O definido sobre $H_{\alpha_1,s_1}(\mathrm{R}^n)$ tal que:

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathrm{R}^n): Oc = \rho_{-s_2} F^* \rho_{\alpha_1-\alpha_2} F \rho_{s_1} c \tag{1}$$

Entonces $O \in \mathrm{B}(H_{\alpha_1,s_1}(\mathrm{R}^n), H_{\alpha_2,s_2}(\mathrm{R}^n))$ y es isometría.

Demostración.

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathrm{R}^n): \|Oc\|_{\alpha_2,s_2} = \|\rho_{\alpha_2} F \rho_{s_2} \rho_{-s_2} F^* \rho_{\alpha_1-\alpha_2} F \rho_{s_1} c\|_{0,0} = \text{ (Por (1).)}$$

$$= \|\rho_{\alpha_1} F \rho_{s_1} c\|_{0,0} = \|c\|_{\alpha_1,s_1}$$

Por lo tanto:

$$O \in \quad H_{\alpha_1,s_1}(\mathrm{R}^n), H_{\alpha_2,s_2}(\mathrm{R}^n)) \quad \wedge \quad \forall h \in H_{\alpha_1,s_1}(\mathrm{R}^n): \|Oh\|_{\alpha_2,s_2} = \|h\|_{\alpha_1,s_1} \tag{2}$$

Además:

$$\forall (\epsilon, h) \in \mathrm{R}^+ \times H_{\alpha_2,s_2}: \exists c \in \quad {}^{\infty}(\mathrm{R}^n): \|h - O\rho_{-s_1} F^* \rho_{\alpha_2-\alpha_1} F \rho_{s_2} c\|_{\alpha_2,s_2} =$$

$$= \|h - \rho_{-s_2} F^* \rho_{\alpha_1-\alpha_2} F \rho_{s_1} \rho_{-s_1} F^* \rho_{\alpha_2-\alpha_1} F \rho_{s_2} c\|_{\alpha_2,s_2} = \|h - c\|_{\alpha_2,s_2} < \epsilon$$

Por lo tanto:

$$\overline{R(O)} = H_{\alpha_2,s_2}(\mathbf{R}^n) \Rightarrow R(O) = H_{\alpha_2,s_2}(\mathbf{R}^n) \quad \text{(Por (2).)}$$

Por lo que O es isometría.

Q.E.D.

Lema 2.

$$\forall(n(s,\alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 : I \in \bigcap_{(s',\alpha') \in (-\infty,s] \times (-\infty,\alpha]} \mathbf{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha',s'}(\mathbf{R}^n))$$

Demostración.
$\forall(n,(s,\alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 : \forall(s',\alpha') \in (-\infty, s] \times (-\infty, \alpha] : \exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$\|Ic\|_{\alpha',s'} = \|c\|_{\alpha',s'} = \|\rho_{\alpha'} F \rho s' c\|_{0,0} \leq \|\rho_\alpha F \rho_{s'} c\|_{0,0} = \|\rho_{s'-s} \rho_s c\|_{\alpha,0} \leq r \|\rho_s c\|_{\alpha,0} =$$
(Schechter 1971, teorema 2.4.6)

$$= r\|c\|_{\alpha,s}$$

Por lo tanto:

$$I \in \mathbf{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha',s'}(\mathbf{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$I \in \bigcap_{(s',\alpha') \in (-\infty,s] \times (-\infty,\alpha]} \mathbf{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha',s'}(\mathbf{R}^n))$$

Q.E.D

Lema 3.

$$\forall(n,(s_1,s_2,\alpha_1,\alpha_2)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^4 : \forall(s'_1,s'_2,\alpha'_1,\alpha'_2) \in [s_1,\infty) \times (-\infty,s_2] \times [\alpha_1,\infty) \times (-\infty,\alpha_2]:$$

$$\exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall B \in \mathbf{B}(H_{\alpha_1,s_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha_2,s_2}(\mathbf{R}^n)):$$

$$B \in \mathbf{B}(H_{\alpha'_1,s'_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha'_2,s'_2}(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \|B\|_{\mathbf{B}(H_{\alpha'_1,s'_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha'_2,s'_2}(\mathbf{R}^n))} \leq r\|B\|_{\mathbf{B}(H_{\alpha_1,s_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha_2,s_2}(\mathbf{R}^n))}$$

Demostración.

$\exists (r_1, r_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ : \forall B \in \mathbf{B}(H_{\alpha_1,s_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha_2,s_2}(\mathbf{R}^n)) : \forall h \in H_{\alpha'_1,s'_1}(\mathbf{R}^n)$:

$$\|Bh\|_{\alpha'_2,s'_2} \leq r_1 \|Bh\|_{\alpha_2,s_2} \leq \quad (\mathrm{L.2})$$

$$\leq r_1 \|B\|_{\mathbf{B}(H_{\alpha_1,s_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha_2,s_2}(\mathbf{R}^n))} \|h\|_{\alpha_1,s_1} \leq r_1 \|B\|_{\mathbf{B}(H_{\alpha_1,s_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha_2,s_2}(\mathbf{R}^n))} r_2 \|h\|_{\alpha'_1,s'_1} \quad (\mathrm{L.2})$$

Por lo tanto:

$$B \in \mathbf{B}(H_{\alpha'_1,s'_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha'_2,s'_2}(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \|B\|_{\mathbf{B}(H_{\alpha'_1,s'_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha'_2,s'_2}(\mathbf{R}^n))} \leq r_1 r_2 \|B\|_{\mathbf{B}(H_{\alpha_1,s_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha_2,s_2}(\mathbf{R}^n))}$$

Q.E.D.

Los siguientes lemas versan sobre los operadores de reversibilidad temporal T y de paridad P cuyas definiciones se extienden a espacios de Banach más amplios en donde se estudian ciertas propiedades generales.

Definición 4. Considerar a un conjunto C y al operador $T : \mathbf{F}(C, \mathbf{C}) \to \mathbf{F}(C, \mathbf{C})$ (notación B.1), tal que:

$$\forall f \in \mathbf{F}(C, \mathbf{C}) : Tf = \overline{f}$$

Lema 5. Considerar a un espacio de medida E. Entonces:

$$\forall B \in \mathbf{B}(L^2(E)) : (TBT)^* = TB^*T$$

Demostraci

$$\forall B \in \mathrm{B}(L^2(E)): TBT \in \mathrm{B}(L^2(E)) \text{ (L.A.21, d.e.e.c. ("}E\text{",}O_i\text{)=}(L^2(E),T)\text{)}$$

Por lo tanto:

$$\forall (l_1,l_2) \in L^2(E) \times L^2(E): (l_1,(TBT)^* l_2) = (TBTl_1,l_2) = \int TBTl_1\overline{l_2} = \overline{\int B\overline{l_1}l_2} =$$

$$= \overline{(B\overline{l_1},l_2)} = \overline{(\overline{l_1},B^*\overline{l_2})} = \overline{\int \overline{l_1}\,\overline{B^*\overline{l_2}}} = \int l_1 B^*\overline{l_2} = (l_1,\overline{B^*\overline{l_2}}) = (l_1,TB^*Tl_2)$$

Por lo tanto:

$$(TBT)^* = TB^*T$$

Q.E.D.

Definición 6. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$ y a un subconjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ tal que:

$$S = -S$$

Considerar al operador P definido sobre $\mathbf{F}(S,\mathbf{C})$ (notación B.1), tal que:

$$\forall f \in \mathbf{F}(S,\mathbf{C}): \forall s \in S: (Pf)(s) = f(-s)$$

Lema 7. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$ y a un subconjunto medible $S \subset \mathbf{R}^n$ tal que:

$$S = -S$$

Entonces:

$$P \in \mathrm{B}(L^2(S)) \quad \wedge \quad P = P^* \quad \wedge \quad \forall l \in L^2(S): \|Pl\| = \|l\|$$

Demostración.

$$\|Pl\| = \left(\int_S |(Pl)(s)|^2 ds\right)^{1/2} = \left(\int_S |l(-s)|^2 ds\right)^{1/2} = \left(\int_{-S} |l(s)|^2 |\det -I| ds\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_S |l(s)|^2 ds \right)^{1/2} = \|l\|$$

Por lo tanto:

$$P \in \mathrm{B}(L^2(S))$$

Además:
$\forall (l_1, l_2) \in L^2(S) \times L^2(S)$:

$$(Pl_1, l_2) = \int_S (Pl_1)(s) \overline{l_2}(s) ds = \int_S l_1(-s) \overline{l_2}(s) ds = \int_{-S} l_1(s) \overline{l_2}(-s) |\det -I| ds =$$

$$= \int l_1 \overline{Pl_2} = (l_1, Pl_2)$$

Por lo tanto:

$$P = P^*$$

Q.E.D.

Lema 8. $P = TPT$

Demostración.
Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$ y a un subconjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ tal que:

$$S = -S$$

Entonces:

$$\forall f \in \mathbf{F}(S, \mathbf{C}) : \forall s \in S : (TPTf)(s) = \overline{(P\overline{f})(s)} = f(-s) = (Pf)(s)$$

Por lo tanto:

$$TPTf = Pf$$

Por lo tanto:

$$P = TPT$$

Q.E.D.

Lema 9. $TFT = F^*$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N}: \forall c \in C_0^\infty(\mathrm{R}^n): \forall r \in \mathrm{R}^n:$

$$(TFTc)(r) = \overline{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathrm{R}^n} e^{-ir\cdot r'} \overline{c}(r')dr'} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathrm{R}^n} e^{ir\cdot r'} c(r')dr' = (F^*c)(r)$$

Por lo tanto:

$$TFTc = F^*c$$

Por lo tanto:

$$TFT = F^*$$

Q.E.D.

Lema 10. $\forall (n, (s, \alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathrm{R}^2: \forall h \in H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n): \|Th\|_{\alpha,s} = \|h\|_{\alpha,s}$

Demostración.
$\forall (n, (s, \alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathrm{R}^2: \forall c \in C_0^\infty(\mathrm{R}^n):$

$$\|Tc\|_{\alpha,s} = \|\rho_\alpha F \rho_s Tc\|_{0,0} = \|\rho_\alpha FT \rho_s c\|_{0,0} = \|\rho_\alpha TF^* \rho_s c\|_{0,0} = \quad \text{(L.9)}$$

$$= \|T\rho_\alpha F^* F^* F \rho_s c\|_{0,0} = \|\rho_\alpha P_x F \rho_s c\|_{0,0} = \|P_x \rho_\alpha F \rho_s c\|_{0,0} = \|\rho_\alpha F \rho_s c\|_{0,0} =$$
$$\text{(L.7, d.c.e.c. } S = \mathrm{R}^n)$$

$$= \|c\|_{\alpha,s}$$

Por lo tanto:

$$\forall h \in H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n): \|Th\|_{\alpha,s} = \|h\|_{\alpha,s}$$

Q.E.D.

A continuación pasamos a estudiar a los operadores multiplicación por una función. Estos operadores, tan conocidos en $L^2(\mathbf{R}^n)$, juegan un papel muy importante en el fundamento matemático de la teoría de la dispersión. De entre los teoremas importantes en esta sección tenemos al lema 17, el cual es una generalización del teorema de Rellich aplicada a los espacios $H_{\alpha,s}$, y el lema 22, en el que calculamos el espacio dual de un $H_{\alpha,s}$.

Definición 11. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$ y a la función ψ definida en $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ tal que:

$$\forall c \in C^\infty(\mathbf{R}^n): \forall d \in D'(\mathbf{R}^n): \psi(c)d = cd$$

Lema 12. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (c_1, c_2) \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \times C^\infty(\mathbf{R}^n): \psi(c_1 c_2) = \psi(c_1)\psi(c_2)$

Demostración.

$$\forall d \in D'(\mathbf{R}^n): \psi(c_1 c_2)d = c_1 c_2 d = \psi(c_1)c_2 d = \psi(c_1)\psi(c_2)d$$

Por lo tanto:

$$\psi(c_1 c_2) = \psi(c_1)\psi(c_2)$$

Q.E.D.

Lema 13. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall c \in C^\infty(\mathbf{R}^n): c^{-1}(\{0\}) = \phi \Rightarrow \forall d \in D'(\mathbf{R}^n): \psi(c)\psi(c^{-1})d = d$

Demostración.

$$\forall d \in D'(\mathbf{R}^n): \psi(c)\psi(c^{-1})d = \psi(cc^{-1})d = \text{(L.12)}$$

$$\psi(1)d = 1d = d$$

Q.E.D.

Lema 14.

$$\forall(n,(s,\alpha))\in \mathbf{N}\times\mathbf{R}^2{:}\,\psi(C^\infty(\mathbf{R}^n))\subset \bigcap_{(\alpha',s')\in(-\infty,\alpha]\times\mathbf{R}} \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n),H_{\alpha',s'}\ {}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n))$$

Demostración.

$$\forall c\in C^\infty(\mathbf{R}^n)\forall(\alpha',s')\in(-\infty,\alpha]\times\mathbf{R}{:}\,\forall c'\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n){:}\,\exists r\in\mathbf{R}^+{:}\,\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n){:}$$

$$\|c'\psi(c)\varphi\|_{\alpha',s'}=\|\rho_{\alpha'}F\rho_{s'}c'c\varphi\|_{0,0}\le\|\rho_\alpha F\rho_{s'}c'c\varphi\|_{0,0}=\|\rho_{s'-s}c'c\rho_s\varphi\|_{\alpha,0}\le r\|\rho_s\varphi\|_{\alpha,0}=$$

(Schechter 1976, teorema 2.4.6)

$$r\|\varphi\|_{\alpha,s}$$

Por lo tanto:

$$\psi(c)\in\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n),H_{\alpha',s'}\ {}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$\psi(c)\in\bigcap_{(\alpha',s')\in(-\infty,\alpha]\times\mathbf{R}}\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n),H_{\alpha',s'}\ {}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$\psi(C^\infty(\mathbf{R}^n))\subset\bigcap_{(\alpha',s')\in(-\infty,\alpha]\times\mathbf{R}}\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n),H_{\alpha',s'}\ {}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 15. $\forall(n,\alpha,s)\in\mathbf{N}\times\overline{\mathbf{R}^+}\times\mathbf{R}{:}\,\forall(s',c)\in[s,\infty)\times C^\infty(\mathbf{R}^n)\cap L^\infty(\mathbf{R}^n){:}$

$$\psi(c)\in\mathrm{B}(H_{\alpha,s'}(\mathbf{R}^n),L_s^2(\mathbf{R}^n))\quad\wedge\quad\|\psi(c)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,s'}(\mathbf{R}^n),L_s^2(\mathbf{R}^n))}\le\|c\|_\infty$$

Demostración.
$\forall c'\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$\|\psi(c)c'\|_{0,s} \quad \rho_s cc'\|_{0,0} \leq \|\rho_{s'} cc'\|_{0,0} \leq \|c\|_\infty \|\rho_{s'} c'\|_{0,0} \leq \|c\|_\infty \|\rho_\alpha F \rho_{s'} c'\|_{0,0} = \|c\|_\infty \|c'\|_{\alpha,s'}$$

Por lo tanto:

$$\psi(c) \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s'}(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n)) \quad \wedge \quad \|\psi(c)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,s'}(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n))} \leq \|c\|_\infty$$

Q.E.D.

Lema 16.

$$\forall (n,(s_1,s_2)) \in \mathrm{N} \times \mathrm{R}^2 : \forall m \in M(\mathrm{R}^n) : \rho_{s_1+s_2} m \in L^\infty(\mathrm{R}^n) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \psi(m) \in \mathrm{B}(L^2_{-s_1}(\mathrm{R}^n), L^2_{s_2}(\mathrm{R}^n)) \quad \wedge \quad \|\psi(m)\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s_1}(\mathrm{R}^n), L^2_{s_2}(\mathrm{R}^n))} \leq \|\rho_{s_1+s_2} m\|_\infty$$

Demostración.

$\forall c \in C_0^\infty(\mathrm{R}^n)$:

$$\|\psi(m)c\|_{0,s_2} = \|\rho_{s_1+s_2} m \rho_{-s_1} c\|_{0,0} \leq \|\rho_{s_1+s_2} m\|_\infty \|\rho_{-s_1} c\|_{0,0} = \|\rho_{s_1+s_2} m\|_\infty \|c\|_{0,-s_1}$$

Por lo tanto:

$$\psi(m) \in \mathrm{B}(L^2_{-s_1}(\mathrm{R}^n), L^2_{s_2}(\mathrm{R}^n)) \quad \wedge \quad \|\psi(m)\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s_1}(\mathrm{R}^n), L^2_{s_2}(\mathrm{R}^n))} \leq \|\rho_{s_1+s_2} m\|_\infty$$

Q.E.D.

Lema 17. Considerar a los elementos $(n,(s_1,s_2,\alpha)) \in \mathrm{N} \times \mathrm{R}^3$ y $(\alpha', c) \in (-\infty,\alpha) \times C_0^\infty(\mathrm{R}^n)$. Entonces $\psi(\rho_{s_1+s_2} c) \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s_1}(\mathrm{R}^n), H_{\alpha',-s_2}(\mathrm{R}^n))$ y es compacto.

Demostración.

Por el teorema de Rellich, $\psi(c) \in \mathrm{B}(H_\alpha(\mathrm{R}^n), H_{\alpha'}(\mathrm{R}^n))$ y es compacto. Además:

$$\forall h \in H_{\alpha,s_1}(\mathrm{R}^n) : \psi(\rho_{s_1+s_2} c)h = \rho_{s_1+s_2} ch = \rho_{s_2} c \rho_{s_1} h = O_{(0,\alpha')\to(-s_2,\alpha')} \psi(c) O_{(s_1,\alpha)\to(0,}$$
(I

Por lo tanto:

$$\psi(\rho_{s_1+s_2}c) = O_{(0,\alpha')\to(-s_2,\alpha')}\psi(c)O_{(s_1,\alpha)\to(0,\alpha)} \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha',-s_2}(\mathbf{R}^n)) \quad \text{(L.1)}$$

Por Kato 1976, teorema III.4.8, $O_{(0,\alpha')\to(-s_2,\alpha')}\psi(c)O_{(s_1,\alpha)\to(0,\alpha)}$ es compacto; luego ψ $(\rho_{s_1+s_2}c)$ es compacto.

Q.E.D.

Lema 18. Considerar a los elementos $(n, n', s) \in \mathbf{N}\times \{0\} \cup \mathbf{N} \times \mathbf{R}$ y $c \in C_B^{n'}(\mathbf{R}^n)$, este último tal que:

$$\exists (r, r') \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}: \forall \alpha \in \{\alpha \in (\{0\} \cup \mathbf{N})^n: |\alpha| \leq n'\}: |D^\alpha c| \leq r\rho_{r'} \quad (1)$$

Entonces $\psi(c) \in \bigcap_{s'\in(-\infty,s-r']} \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n), H_{n',s'}(\mathbf{R}^n))$.

Demostración.

$\forall s' \in (-\infty, s-r']: \exists (r_1, r_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+: \forall c' \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$\|\psi(c)c'\|_{n',s'} = \|cc'\|_{n',s'} \leq r_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \|D^\alpha cc'\|_{0,s'} =$$

$$= r_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \left\| \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i![\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!]^{-1} \right) D^{\alpha-\beta}cD^\beta c' \right\|_{0,s'} \leq$$

$$\leq r_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i![\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!]^{-1} \right) \|D^{\alpha-\beta}cD^\beta c'\|_{0,s'} \leq$$

$$\leq r_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i![\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!]^{-1} \right) \|r\rho_{r'}D^\beta c'\|_{0,s'} = \quad \text{(Por (1))}$$

$$= rr_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i![\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!]^{-1} \right) \|\rho_{r'+s'-s}D^\beta c'\|_{0,s} \leq$$

$$\leq rr_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i![\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!]^{-1} \right) \|D^\beta c'\|_{0,s} \leq r_2\|c'\|_{n',s}$$

Por lo tanto:

$$\psi(c) \in \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbb{R}^n), H_{n',s'}(\mathbb{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$\psi(c) \in \bigcap_{s' \in (-\infty, s-r']} \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbb{R}^n), H_{n',s'}(\mathbb{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 19.

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ : \forall b \in (a, \infty) : E(\psi(|\xi|^2))((a, b]) = (\psi(\chi_{B_{b^{1/2}}(0) \setminus B_{a^{1/2}}(0)}) \quad \text{(N.A.35)}$$

Demostración.
$\forall (n, a) \in \mathbf{N} \times \mathbb{R}^+ : \forall b \in (a, \infty) : \forall l \in L^2(\mathbb{R}^n) : \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ :$

$$|l|^2[\arctan \epsilon^{-1}(b - |\cdot|^2) - \arctan \epsilon^{-1}(a - |\cdot|^2)] \leq \pi |l|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \int_a^b ([\psi(|\xi|^2 - (\lambda + \imath\epsilon))^{-1} - \psi(|\xi|^2 - (\lambda - \imath\epsilon))^{-1}]l, l) d\lambda =$$

$$\int_a^b (\{\psi([|\xi|^2 - (\lambda + \imath\epsilon)]^{-1} - \psi([|\xi|^2 - (\lambda - \imath\epsilon)]^{-1})\}l, l) d\lambda = \quad \text{(L.13)}$$

$$= \int_a^b \int_{\mathbb{R}^n} 2\imath\epsilon[\epsilon^2 + (\lambda - |\xi|^2)^2]^{-1} |l(\xi)|^2 d\xi d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_a^b 2\imath\epsilon[\epsilon^2 + (\lambda - |\xi|^2)^2]^{-1} |l(\xi)|^2 d\lambda d\xi = \quad \text{(Teorema de Fubini.)}$$

$$= 2\imath \int_{\mathbb{R}^n} |l(\xi)|^2 [\arctan \epsilon^{-1}(b - |\xi|^2) - \arctan \epsilon^{-1}(a - |\xi|^2)] d\xi$$

Por lo tanto:

$$(E(\psi(|\xi|^2))((a,b])l,l) =$$

$$= -\imath(2\pi)^{-1}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_a^b ([\psi(|\xi|^2-(\lambda+\imath\epsilon))^{-1}-\psi(|\xi|^2-(\lambda-\imath\epsilon))^{-1}]l,l)d\lambda =$$

$$= -\imath(2\pi)^{-1}\lim_{\epsilon\downarrow 0} 2\imath\int_{\mathbf{R}^n}|l(\xi)|^2[\arctan\epsilon^{-1}(b-|\xi|^2)-\arctan\epsilon^{-1}(a-|\xi|^2)]d\xi =$$

$$= \pi^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}\lim_{\epsilon\downarrow 0}|l(\xi)|^2[\arctan\epsilon^{-1}(b-|\xi|^2)-\arctan\epsilon^{-1}(a-|\xi|^2)]d\xi =$$

(Teorema de convergencia dominada.)

$$= \pi^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}|l(\xi)|^2\pi\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)}(\xi)d\xi = (\psi(\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)})l,l)$$

Por lo tanto:

$$E(\psi(|\xi|^2))((a,b]) = \psi(\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)}) \quad \text{(Rudin 1979, teorema 12.7)}$$

Q.E.D.

Definición 20. Considerar a un elemento $(n,\alpha)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}$ y a la función ψ_α definida sobre $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ tal que:

$$\forall c\in C^\infty(\mathbf{R}^n): D(\psi_\alpha(c)) = \{h\in H_\alpha(\mathbf{R}^n): ch\in H_\alpha(\mathbf{R}^n)\} \quad\wedge\quad \forall d\in D(\psi_\alpha(c)): \psi_\alpha(c)d = cd$$

Lema 21. $\forall(n,\alpha)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}: \forall c\in C^\infty(\mathbf{R}^n): c^{-1}(\{0\}) = \phi \Rightarrow H_\alpha(\mathbf{R}^n) = \overline{R(\psi_\alpha(c))}$

Demostración.

$$H_\alpha(\mathbf{R}^n) = \overline{C_0^\infty(\mathbf{R}^n)} = \text{(Schechter 1971, teorema 2.4.11)}$$

$$= \overline{\psi_\alpha(c)C_0^\infty(\mathbf{R}^n)} \subset \text{(L.13)}$$

$$\subset \overline{R(\psi_\alpha(c))} \Rightarrow H_\alpha(\mathbf{R}^n) = \overline{R(\psi_\alpha(c))}$$

Q.E.D.

Lema 22. $\forall(n,(s,\alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 \colon H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)^* \cong H_{-\alpha,-s}(\mathbf{R}^n)$

Demostración.

$$\forall(n,(s,\alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 \colon (\psi_\alpha(\rho_s)^{-1})^* = \psi_\alpha(-\rho_s)^* \Rightarrow \quad \text{(L.13)}$$

$$\Rightarrow (N(\psi_\alpha(\rho_s)), N((\psi_\alpha(\rho_s)^{-1})^*), \overline{R(\psi_\alpha(\rho_s))}, \overline{R((\psi_\alpha(\rho_s)^{-1})^*)}) =$$

$$= (N(\psi_\alpha(\rho_s)), N(\psi_{-\alpha}(\rho_{-s})), \overline{R(\psi_\alpha(\rho_s))}, \overline{R(\psi_{-\alpha}(\rho_{-s}))}) =$$

$$= (\{0\}, \{0\}, H_\alpha(\mathbf{R}^n), H_{-\alpha}(\mathbf{R}^n)) = \quad \text{(L.13 y L.21)}$$

$$= (\{0\}, \{0\}, H_\alpha(\mathbf{R}^n), H_\alpha(\mathbf{R}^n)^*) \Rightarrow \quad \text{(Schechter 1971, teorema 2.4.1)}$$

$$\Rightarrow H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)^* \cong H_{-\alpha,-s}(\mathbf{R}^n) \quad \text{(L.A.40, d.e.e.c. } (E,L) = (H_\alpha(\mathbf{R}^n), \psi_\alpha(\rho_s))\text{)}$$

Q.E.D.

Ahora demostraremos, mediante técnicas de interpolación, una útil relación entre las normas de los espacios $H_{\alpha,s}$. Para ello habremos de emplear como argumento principal el teorema de tres líneas de Hadamard.

Lema 23. $\forall r \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \colon 1 + e^r(r-1) > 0$

Demostración.

Considerar a la función $(\cdot + e^{-\cdot} - 1) \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que:

$$\forall r \in \mathbf{R} \colon (\cdot + e^{-\cdot} - 1)(r) = r + e^{-r} - 1$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dr}(\cdot + e^{-\cdot} - 1)(r) = 1 - e^{-r} = 0 \Leftrightarrow r = 0$$

Además:

$$\frac{d^2}{dr^2}(\cdot + e^{-\cdot} - 1)(r) = e^{-r} > 0$$

Por lo tanto:

$$\inf_{r \in \mathbb{R}}(r + e^{-r} - 1) \in \{(\cdot + e^{-\cdot} - 1)(0), \lim_{r \to -\infty}(r + e^{-r} - 1), \lim_{r \to \infty}(r + e^{-r} - 1)\} = \{0, \infty, \infty\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf_{r \in \mathbb{R}}(r + e^{-r} - 1) = 0$$

Por lo tanto:

$$\forall r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}: r + e^{-r} - 1 > 0 \Rightarrow 1 + e^{r}(r - 1) > 0$$

Q.E.D.

Lema 24. $\forall r \in \mathbf{R}^+ : \sup_{x \in (-\infty, r]} x^{-1}(e^x - 1) = r^{-1}(e^r - 1)$

Demostración.
Considerar a un elemento $r \in \mathbf{R}^+$ y a la función $\cdot^{-1}(e^{\cdot} - 1): (-\infty, r] \to \mathbf{R}$ tal que:

$$\cdot^{-1}(e^{\cdot} - 1)(0) = 1 \quad \wedge \quad \forall x \in (-\infty, r] \setminus \{0\}: \cdot^{-1}(e^{\cdot} - 1)(x) = x^{-1}(e^x - 1)$$

Por lo tanto:

$$\forall x \in (-\infty, r) \setminus \{0\}: \frac{d}{dx} \cdot^{-1}(e^{\cdot} - 1)(x) = x^{-2}[1 + e^x(x - 1)] > 0 \quad \text{(L.23)}$$

Por lo tanto:

$$\sup_{x \in (-\infty, r]} x^{-1}(e^x - 1) = r^{-1}(e^r - 1) \quad \text{(Pues la función es creciente.)}$$

Q.E.D.

Lema 25. $\forall r \in \mathbf{R}^+ \colon \sup_{c \in \{c \in \mathbf{C} \colon \mathrm{Re}\ c \leq r\}} |c^{-1}(1 - e^c)| \leq r^{-1}(e^r - 1)$

Demostración.

$$\forall r \in \mathbf{R}^+ \colon \forall c \in \mathbf{C} \colon |c^{-1}(1 - e^c)| \leq (\mathrm{Re}\ c)^{-1}(e^{\mathrm{Re}\ c} - 1)$$

Por lo tanto:

$$\sup_{c \in \{c \in \mathbf{C} \colon \mathrm{Re}\ c \leq r\}} |c^{-1}(1 - e^c)| \leq \sup_{c \in \{c \in \mathbf{C} \colon \mathrm{Re}\ c \leq r\}} (\mathrm{Re}\ c)^{-1}(e^{\mathrm{Re}\ c} - 1) = r^{-1}(e^r - 1) \quad \text{(L.24)}$$

Q.E.D.

Lema 26. Considerar a un elemento $(i, n) \in \{1, 2\} \times \mathbf{N}$, a una función medible $f_i \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que:

$$f_1 \geq 1 \quad \wedge \quad \forall r \in \mathbf{R} \colon f_i^r f_2 \in L^2(\mathbf{R}^n) \tag{1}$$

Considerar a la función $f_1^{\cdot} f_2 \colon \mathbf{C} \to L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que:

$$\forall c \in \mathbf{C} \colon f_1^{\cdot} f_2(c) = f_1^c f_2$$

Entonces $f_1^{\cdot} f_2$ es an[illegible]ica.

Demostración.

$$\forall c \in \mathbf{C} \colon \lim_{h \to 0} h^{-1} |f_1^{c+h} f_2 - (f_1^c f_2 + h f_1^c f_2 \ln f_1)| = 0 \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall c' \in \{c \in \mathbf{C} \colon |c| \leq 1\} \colon |(c')^{-1} [f_1^{c+c'} f_2 - (f_1^c f_2 + c' f_1^c f_2 \ln f_1)]| \leq$$

$$\leq |(c' \ln f_1)^{-1} (e^{c' \ln f_1} - 1) f_1^c f_2 \ln f_1| + |f_1^c f_2 \ln f_1| \leq$$

$\leq |(\ln$ [illegible] $^{1}(e^{\ln f_1} - 1) f_1^c f_2 \ln f_1| + |f_1^c f_2 \ln f_1| =$ (Por (1) y L.25)

$$= (f_1 - 1 + \ln f_1) f_1^{\mathrm{Re}\ c} |f_2| \leq (f_1 - 1 + f_1) f_1^{\mathrm{Re}\ c} |f_2| \in L^2(\mathbf{R}^n) \quad \text{(Por (1).)}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h \to 0} \| h^{-1} [f_1^{c+h} f_2 - (f_1^c f_2 + h f_1^c f_2 \ln f_1)] \|_{0,0} = 0 \quad \text{(Teorema de convergencia dominada.)}$$

Por lo que $f_1^{\cdot} f_2$ es analítica.

Q.E.D.

Lema 27. $\forall (n, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R} : \forall (\alpha', l) \in (\alpha, \infty) \times \mathcal{J} : \forall \beta \in [\alpha, \alpha']$:

$$\| \rho_\beta l \|_{0,0} \leq (\| \rho_\alpha l \|_{0,0}^{\alpha' - \beta} \| \rho_{\alpha'} l \|_{0,0}^{\beta - \alpha})^{(\alpha' - \alpha)^{-1}}$$

Demostración.

Considerar a los elementos $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$ y $(\alpha', l) \in (\alpha, \infty) \times \mathcal{J}$. Entonces:

$$\forall r \in \mathbf{R} : \rho_{\alpha' - \alpha}^r \rho_\alpha l \in L^2(\mathbf{R}^n)$$

Considerar a la función $\rho_{\alpha' - \alpha}^{\cdot} \rho_\alpha l : \mathbf{C} \to L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que:

$$\forall c \in \mathbf{C} : \rho_{\alpha' - \alpha}^{\cdot} \rho_\alpha l (c) = \rho_{\alpha' - \alpha}^c \rho_\alpha l$$

Por lema el 26, donde en este caso $(f_1, f_2) = (\rho_{\alpha' - \alpha}, \rho_\alpha l)$, $\rho_{\alpha' - \alpha}^{\cdot} \rho_\alpha l$ es analítica. Entonces:

$$\forall c \in \{ c \in \mathbf{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\ c \leq 1 \} : \| \rho_{(\alpha' - \alpha) \mathrm{Re}\ c + \alpha} l \|_{0,0} = \| \rho_{\alpha' - \alpha}^c \rho_\alpha l \|_{0,0} \leq$$

$$\leq \| \rho_\alpha l \|_{0,0}^{1 - \mathrm{Re}\ c} \| \rho_{\alpha' - \alpha} \rho_\alpha l \|_{0,0}^{\mathrm{Re}\ c} = \quad \text{(Teorema de tres líneas de Hadamard.)}$$

$$= \| \rho_\alpha l \|_{0,0}^{1 - \mathrm{Re}\ c} \| \rho_{\alpha'} l \|_{0,0}^{\mathrm{Re}\ c}$$

Por lo tanto:

$[\alpha,\alpha']$:

$$\|\rho_\beta l\|_{0,0} \le \|\rho_\alpha l\|_{0,0}^{1-(\alpha'-\alpha)^{-1}(\beta-\alpha)} \|\rho_{\alpha'} l\|_{0,0}^{(\alpha'-\alpha)^{-1}(\beta-\alpha)} = (\|\rho_\alpha l\|_{0,0}^{\alpha'-\beta} \|\rho_{\alpha'} l\|_{0,0}^{\beta-\alpha})^{(\alpha'-\alpha)^{-1}}$$

Q.E.D.

Lema 28. $\forall (n,(s,\alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 : \forall (\alpha', h) \in (-\infty,\alpha) \times H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n) : \forall \beta \in [\alpha',\alpha]$:

$$\|h\|_{\beta,s} \le (\|h\|_{\alpha',s}^{\alpha-\beta} \|h\|_{\alpha,s}^{\beta-\alpha'})^{(\alpha-\alpha')^{-1}}$$

Demostración.

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) : \|h\|_{\beta,s} \le \|h-c\|_{\beta,s} + \|c\|_{\beta,s} = \|h-c\|_{\beta,s} + \|\rho_\beta F \rho_s c\|_{0,0} \le$$

$$\le \|h-c\|_{\beta,s} + (\|\rho_{\alpha'} F \rho_s c\|_{0,0}^{\alpha-\beta} \|\rho_\alpha F \rho_s c\|_{0,0}^{\beta-\alpha'})^{(\alpha-\alpha')^{-1}} = \text{(L.27)}$$

$$= \|h-c\|_{\beta,s} + (\|c\|_{\alpha',s}^{\alpha-\beta} \|c\|_{\alpha,s}^{\beta-\alpha'})^{(\alpha-\alpha')^{-1}}$$

Por lo tanto:

$$\|h\|_{\beta,s} \le (\|h\|_{\alpha',s}^{\alpha-\beta} \|h\|_{\alpha,s}^{\beta-\alpha'})^{(\alpha-\alpha')^{-1}}$$

Q.E.D.

Los tres últimos lemas de este apéndice son resultados misceláneos de importante utilidad.

Lema 29. $\forall n \in \mathbf{N} : C^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \bigcap_{(s,\alpha)\in\mathbf{R}^2} H_{\alpha,s\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$

Demostración.

$\forall n \in \mathbf{N} : \forall c \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : \forall (s,\alpha) \in \mathbf{R}^2 : \forall c' \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) : c'c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)$

Por lo tanto:

$$c \in \quad {}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n$$

Por lo tanto:

$$c \in \bigcap_{(s,\alpha)\in\mathbf{R}^2} H_{\alpha,s\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$$

Por lo tanto:

$$C^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \bigcap_{(s,\alpha)\in\mathbf{R}^2} H_{\alpha,s\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$$

Q.E.D.

Lema 30. $\forall (n,r) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \mathbf{R}\colon \rho_r \in \bigcap_{s\in(-\infty,-(n+2r)/2)} L^2_s(\mathbf{R}^n)$

Demostración.
$\forall (n,r) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \mathbf{R}\colon \forall s \in (-\infty, -(n+2r)/2)$:

$$\|\rho_r\|_{0,s} = \left(\int \rho_{2(r+s)}\right)^{1/2} = \left(\int_{S^{n-1}} d\omega \int_0^\infty (1+|x|^2)^{r+s}|x|^{n-1}d|x|\right)^{1/2} =$$

$$= \|1\|_{L^2(S^{n-1})}\left(\int_0^1 (1+|x|^2)^{r+s}|x|^{n-1}d|x| + \int_1^\infty (1+|x|^2)^{r+s}|x|^{n-1}d|x|\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|1\|_{L^2(S^{n-1})}\left(\int_0^1 |x|^{n-1}d|x| + \int_1^\infty |x|^{n+2(r+s)-1}d|x|\right)^{1/2} < \infty$$

Por lo tanto:

$$\rho_r \in L^2_s(\mathbf{R}^n)$$

Por lo tanto:

$$\rho_r \in \bigcap_{s\in(-\infty,-(n+2r)/2)} L^2_s(\mathbf{R}^n)$$

Q.E.D.

Lema 31. Considerar a los elementos $(n,n') \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \{0\}\cup\mathbf{N}$ y $c \in C^{n'}_B(\mathbf{R}^n)$, este último tal que:

$$\exists (r, r') \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}: \forall \alpha \in \{\alpha \in (\{0\} \cup \mathbf{N})^n : |\alpha| \leq n'\} : |D^\alpha c| \leq r\rho_{r'} \qquad (1)$$

Entonces $c \in \bigcap_{(s,\alpha)\in(-\infty,-(n+2r')/2)\times(-\infty,n']} H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)$.

Demostración.

$\exists \text{cte} \in \mathbf{R}^+ : \forall (s, \alpha) \in (-\infty, -(n + 2r')/2) \times (-\infty, n']$:

$$\|c\|_{\alpha,s} \leq \|c\|_{n',s} \leq \text{cte} \sum_{|\alpha|\leq n'} \|D^\alpha c\|_{0,s} \leq \text{cte} \sum_{|\alpha|\leq n'} \|r\rho_{r'}\|_{0,s} < \ (\text{Por } (1))$$

$$< \qquad (\text{L.30})$$

Por lo tanto:

$$c \in H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)$$

Por lo tanto:

$$c \in \bigcap_{(s,\alpha)\in(-\infty,-(n+2r')/2)\times(-\infty,n']} H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)$$

Q.E.D.

Apéndice D. Operadores T(M), T(r), e(r)

Este apéndice está avocado al estudio de tres tipos de operadores lineales definidos en espacios de funciones en $\mathbf{R}^n$. Tales son las rotaciones del argumento de la función, las translaciones del argumento de la función y la multiplicación por una exponencial imaginaria. Estudiemos pues cada uno de ellos.

Operadores T(M).

Notación 1. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ denota al conjunto de las matrices de $n \times n$ con coeficientes reales.

Definición 2. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$ y a la función T definida sobre $\mathbf{M}$ tal que:

$$\forall M \in \mathbf{M}: \forall f \in \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}): \forall r \in \mathbf{R}^n: (T(M)f)(r) = f(Mr) \quad \text{(N.B.1)}$$

Lema 3. $\forall (M_1, M_2) \in \mathbf{M} \times \mathbf{M}: T(M_1 M_2) = T(M_2) T(M_1)$

Demostración.
$\forall (M_1, M_2) \in \mathbf{M} \times \mathbf{M}: \forall f \in \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}): \forall r \in \mathbf{R}^n$:

$$(T(M_1 M_2) f)(r) = f(M_1 M_2 r) = (T(M_1) f)(M_2 r) = (T(M_2) T(M_1) f)(r)$$

Por lo tanto:

$$T(M_1 M_2) f = T(M_2) T(M_1) f$$

Por lo tanto:

$$T(M_1M_2) = T(M_2)T(M_1)$$

Q.E.D.

Notación 4. $\mathbf{I} \subset \mathbf{M}$ denota al subconjunto consistente en todas las matrices invertibles.

Lema 5. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (M, f) \in \mathbf{I} \times \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}): T(M)T(M^{-1})f = f$

Demostración.

$$\forall n \in \mathbf{N}: \forall (M, f) \in \mathbf{I} \times \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}): T(M)T(M^{-1})f = T(M^{-1}M)f = \quad (\mathrm{L}.3)$$

$$= T(I)f = f$$

Q.E.D.

Lema 6. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (M, l) \in \mathbf{M} \times L^1(\mathbf{R}^n): \int T(M)l = |\det M^{-1}| \int l$

Demostración.

$$\int T(M)l = \int_{\mathbf{R}^n} l(Mr)dr = \int_{M\mathbf{R}^n} l(r)|\det M^{-1}|dr = |\det M^{-1}| \int l$$

Q.E.D.

Lema 7. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (M, l) \in \mathbf{M} \times L^1(\mathbf{R}^n): FT(M)l = |\det M^{-1}|T((M^{-1})^t)Fl$

Demostración.

$$\forall r \in \mathbf{R}^n: (FT(M)l)(r) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath r \cdot r'} l(Mr')dr' =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{M\mathbf{R}^n} e^{-\imath r \cdot M^{-1}r'} l(r')|\det M^{-1}|dr' =$$

$$= |\det M^{-1}|(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath (M^{-1})^t r \cdot r'} l(r')dr' = |\det M^{-1}|(Fl)((M^{-1})^t r) =$$

$$= |\det M^{-1}|(T((M^{-1})^t)Fl)(r)$$

Por lo tanto:

$$FT(M)l = |\det M^{-1}|T((M^{-1})^t)Fl$$

Q.E.D.

Lema 8.

$$\forall(n,s) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}: \forall M \in \mathbf{I}: \rho_{-s}T(M)\rho_s \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \quad \wedge \quad \|\rho_{-s}T(M)\rho_s\|_\infty \leq (1+\|M^{\operatorname{sgn} s}\|)^{|s|/2}$$

Demostración.

$$\forall(n,s) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}: \forall M \in \mathbf{I}: (1 + \|M^{-1}\|)^{-1} \leq \rho_{-2}T(M)\rho_2 \leq 1 + \|M\|$$

Por lo tanto:

$$\rho_{-s}T(M)\rho_s = (\rho_{-2}T(M)\rho_2)^{s/2} \leq (1 + \|M^{\operatorname{sgn} s}\|)^{|s|/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{-s}T(M)\rho_s \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \quad \wedge \quad \|\rho_{-s}T(M)\rho_s\|_\infty \leq (1 + \|M^{\operatorname{sgn} s}\|)^{|s|/2}$$

Q.E.D.

Lema 9. $\forall(n,s) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}: \forall M \in \mathbf{I}$:

$$T(M) \in \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge \quad \|T(M)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} \leq [|\det M^{-1}|(1 + \|M^{\operatorname{sgn} s}\|)^{|s|}]^{1/2}$$

Demostración.

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \|T(M)c\|_{0,s} = \|\rho_s T(M)c\|_{0,0} = \|T(M)T(M^{-1})\rho_s T(M)c\|_{0,0} = \quad \text{(L.5)}$$

$$= \|T(M)(T(M^{-1})\rho_s)c\|_{0,0} = |\det M^{-1}|^{1/2}\|(T(M^{-1})\rho_s)c\|_{0,0} = \quad \text{(L.6)}$$

$$= |\det M^{-1}|^{1/2} \|(T(M^{-1})\rho_s)\rho_{-s}\rho_s c\|_{0,0} \leq |\det M^{-1}|^{1/2} \|(T(M^{-1})\rho_s)\rho_{-s}\|_\infty \|\rho_s c\|_{0,0} \leq$$

$$\leq |\det M^{-1}|^{1/2}(1 + \|M^{\mathrm{sgn}\ s}\|)^{|s|/2} \|\rho_s c\|_{0,0} = \ \text{(L.8)}$$

$$= |\det M^{-1}|^{1/2}(1 + \|M^{\mathrm{sgn}\ s}\|)^{|s|/2} \|c\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$T(M) \in \mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge \quad \|T(M)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))} \leq [|\det M^{-1}|(1 + \|M^{\mathrm{sgn}\ s}\|)^{|s|}]^{1/2}$$

Q.E.D.

Notación 10. $\mathbf{U} \subset \mathbf{I}$ denota al subconjunto consistente en todas las matrices unitarias.

Lema 11. $\forall (n, (s, \alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 : \forall U \in \mathbf{U}$:

$$T(U) \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge \quad \forall h \in H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n) : \|T(U)h\|_{\alpha,s} = \|h\|_{\alpha,s}$$

Demostración.

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) : \|T(U)c\|_{\alpha,s} = \|\rho_\alpha F \rho_s T(U)c\|_{0,0} = \|\rho_\alpha F T(U)\rho_s c\|_{0,0} = \|\rho_\alpha T(U) F \rho_s c\|_{0,0} = \ \text{(L.7)}$$

$$= \|T(U)\rho_\alpha F \rho_s c\|_{0,0} = \|\rho_\alpha F \rho_s c\|_{0,0} = \ \text{(L.6)}$$

$$= \|c\|_{\alpha,s}$$

Por lo tanto:

$$T(U) \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge \quad \forall h \in H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n) : \|T(U)h\|_{\alpha,s} = \|h\|_{\alpha,s}$$

Q.E.D.

Lema 12. $\forall U \in \mathbf{U}: T(U)^* = T(U^{-1})$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N}: \forall U \in \mathbf{U}: \forall (c_1, c_2) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$(T(U)c_1, c_2) = \int_{\mathbf{R}^n} c_1(Ur)\overline{c_2}(r)dr = \int_{U\mathbf{R}^n} c_1(r)\overline{c_2}(U^{-1}r)|\det U^{-1}|dr = (c_1, T(U^{-1})c_2)$$

Por lo tanto:

$$T(U)^* = T(U^{-1}) \quad \text{(L.11)}$$

Q.E.D.

Lema 13. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (M, c) \in \mathbf{I} \times C(\mathbf{R}^n): \|c\|_\infty = \|T(M)c\|_\infty$

Demostración.

$$\forall n \in \mathbf{N}: \forall (M, c) \in \mathbf{I} \times C(\mathbf{R}^n): \|T(M)c\|_\infty = \sup \overline{T(M)c(\mathbf{R}^n)} = \sup \overline{c(\mathbf{R}^n)} = \|c\|_\infty$$

Q.E.D.

Lema 14. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (M, f) \in \mathbf{M} \times \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}): \operatorname{supp} T(M)f \subset M^{-1}\operatorname{supp} f \quad$ (N.B.1)

Demostración.

$$\operatorname{supp} T(M)f = \overline{(T(M)f)^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})} = \overline{M^{-1}(f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\}))} \subset \overline{M^{-1}(\overline{f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})})} =$$

$$= M^{-1}(\overline{f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})}) = \text{ (L.A.1, d.e.e.c. } (E_1, E_2, C, f) = (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \overline{f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})}, M))$$

$$= M^{-1}\operatorname{supp} f$$

Q.E.D.

Lema 15. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$ y a un subconjunto $S \subset \mathbf{I}$ tal que S^{-1} sea acotado. Entonces:

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \sup_{M \in S} |T(M)c| \in \bigcap_{s \in \mathbf{R}} L_s^2(\mathbf{R}^n)$$

Demostración.

$$\forall s \in \mathbf{R}: \forall M \in S: |T(M)c| \leq \|T(M)c\|_\infty \chi_{\text{supp } T(M)c} = \|c\|_\infty \chi_{\text{supp } T(M)c} \leq \quad \text{(L.13)}$$

$$\leq \|c\|_\infty \chi_{M^{-1}\text{supp } c} \leq \quad \text{(L.14)}$$

$$\leq \|c\|_\infty \chi_{\bigcup_{M \in S} M^{-1}\text{supp } c}$$

Por lo tanto:

$$\sup_{M \in S} |T(M)c| \leq \|c\|_\infty \chi_{\bigcup_{M \in S} M^{-1}\text{supp } c} \Rightarrow \sup_{M \in S} |T(M)c| \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$$

(L.A.23, d.e.e.c. $(E_1, E_2, S_1, S_2) = (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \text{supp } c, S^{-1})$)

Por lo tanto:

$$\sup_{M \in S} |T(M)c| \in \bigcap_{s \in \mathbf{R}} L_s^2(\mathbf{R}^n)$$

Q.E.D.

Lema 16.

$$\forall (n,s) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}: \forall (M,c) \in \mathbf{I} \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \lim_{M' \to M} \|(T(M) - T(M'))c\|_{0,s} = 0$$

Demostración.

$$\forall (n,s) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}: \forall (M,c) \in \mathbf{I} \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \lim_{M' \to M} |(T(M) - T(M'))c| = 0 \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall B \in B_1(M): |(T(M) - T(B))c| \leq 2 \sup_{B \in B_1(M)} |T(B)c| \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$$

(L.15, d.e.e.c. $S = B_1(M)$)

Por lo tanto:

$$\lim_{M'\to M} \|(T(M)-T(M'))c\|_{0,s} = 0 \quad \text{(Teorema de convergencia dominada.)}$$

Q.E.D.

Lema 17.

$$\forall(n,s) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}: \forall(M,l) \in \mathbf{I}\times L^2_s(\mathbf{R}^n): \lim_{M'\to M} \|(T(M)-T(M'))l\|_{0,s} = 0$$

Demostración.

$$\sup_{B\in B_1(M)} \|T(M)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} \leq \sup_{B\in B_1(M)} [|\det M^{-1}|(1+\|M^{\operatorname{sgn} s}\|)^{|s|}]^{1/2} < \quad \text{(L.9)}$$

$$< \infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{M'\to M} \|(T(M)-T(M'))l\|_{0,s} = 0$$

(L.16 y L.A.16, d.e.e.c. $(E, E_1, E_2, S, f) = (B_1(M), L^2_s(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n), C_0^\infty(\mathbf{R}^n), T)$)

Q.E.D.

Lema 18.

$$\forall(n,(s,\alpha)) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}^2: \forall(U,h) \in \mathbf{U}\times H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n): \lim_{U'\to U} \|(T(U)-T(U'))h\|_{\alpha,s} = 0$$

Demostración.

$$\forall(n,(s,\alpha)) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}^2: \sup_{U\in\mathbf{U}} \|T(U)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n))} = 1 \quad \text{(L.11)}$$

Por lo tanto:

$$\forall(U,h) \in \mathbf{U}\times H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n): \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \forall U' \in \mathbf{U}:$$

$$\|(T(U)-T(U'))c\|_{\alpha,s} = \|\rho_\alpha F \rho_s (T(U)-T(U'))c\|_{0,0} = \|FT(U)\rho_s c - FT(U')\rho_s c\|_{0,\alpha} =$$

$$= \|T(U)F\rho_s c - T(U')F\rho_s c\|_{0,\alpha} = \quad (\text{L}.7)$$

$$= \|(T(U)-T(U'))F\rho_s c\|_{0,\alpha}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{U'\to U} \|(T(U)-T(U'))c\|_{\alpha,s} = \lim_{U'\to U} \|(T(U)-T(U'))F\rho_s c\|_{0,\alpha} = 0 \quad (\text{L}.17)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{U'\to U} \|(T(U)-T(U'))h\|_{\alpha,s} = 0$$
$$(\text{L.A.16, d.e.e.c. } (E, E_1, E_2, S, f) = (\mathbf{U}, H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n), C_0^\infty(\mathbf{R}^n), T))$$

Q.E.D.

Operadores T(r).

Lema 19.

$$\forall r \in \overline{\mathbf{R}^+}: \left(\inf_{r'\in\overline{\mathbf{R}^+}} (1+(r')^2)^{-1}[1+(r-r')^2], \ \sup_{r'\in\overline{\mathbf{R}^+}} (1+(r')^2)^{-1}[1+(r+r')^2] \right) =$$

$$= \left(\{[(4+r^2)^{1/2} - r]/2\}^2, \{[r+(4+r^2)^{1/2}]/2\}^2 \right)$$

Demostración.

Considerar a un elemento $(\pm, r) \in \{-,+\} \times \overline{\mathbf{R}^+}$ y a la función $(1+\cdot^2)^{-1}[1+(r\pm\cdot)^2]: \overline{\mathbf{R}^+} \to \mathbf{R}$ tal que:

$$\forall r' \in \overline{\mathbf{R}^+}: (1+\cdot^2)^{-1}[1+(r\pm\cdot)^2](r') = (1+(r')^2)^{-1}[1+(r\pm r')^2]$$

Por lo tanto:

$$\forall r' \in \mathbf{R}^+ : \left(\frac{d}{dr'}(1+\cdot^2)^{-1}[1+(r\pm\cdot)^2]\right)(r') = \pm 2r(1+(r')^2)^{-2}[1-r'(r'\pm r)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \quad \vee \quad r_\pm = [(4+r^2)^{1/2} \mp r]/2$$

Además:

$$\forall r' \in \mathbf{R}^+ : \left(\frac{d^2}{d(r')^2}(1+\cdot^2)[1+(r\pm\cdot)^2]\right)(r') = \pm 2r(1+(r')^2)^{-3}\{r'[r'(2r'\pm 3r)-6]\mp r\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{d(r')^2}(1+\cdot^2)^{-1}[1+(r\pm\cdot)^2]\right)(r_\pm) = \mp 2r[r_\pm(1+r_\pm^2)]^{-1}$$

Por lo tanto:

$$\left(\inf_{r'\in\overline{\mathbf{R}^+}}(1+(r')^2)^{-1}[1+(r-r')^2],\ \sup_{r'\in\overline{\mathbf{R}^+}}(1+(r')^2)^{-1}[1+(r+r')^2]\right) \in$$

$$\in (1+\cdot^2)^{-1}[1+(r-\cdot)^2](\{0,r_-\}) \cup \left\{\lim_{r'\to\infty}(1+(r')^2)^{-1}[1+(r-r')^2] Bigr\right\} \times$$

$$\times (1+\cdot^2)^{-1}[1+(r+\cdot)^2](\{0,r_+\} \cup \left\{\lim_{r'\to\infty}(1+(r')^2)^{-1}[1+(r+r')^2]\right\} =$$

$$= \left\{1+r^2, \{[(4+r^2)^{1/2}-r]/2\}^2, 1\right\} \times \left\{1+r^2, \{[r+(4+r^2)^{1/2}]/2\}^2, 1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\inf_{r'\in\overline{\mathbf{R}^+}}(1+(r')^2)^{-1}[1+(r-r')^2],\ \sup_{r'\in\overline{\mathbf{R}^+}}(1+(r')^2)^{-1}[1+(r+r')^2]\right) =$$

$$= \left(\{[(4+r^2)^{1/2}-r]/2\}^2, \{[r+(4+r^2)^{1/2}]/2\}^2\right)$$

Q.E.D.

Lema 20.

$$\forall n\in\mathbf{N}:\forall r\in\mathbf{R}^n:\left(\inf_{r'\in\mathbf{R}^n}(1+|r'|^2)^{-1}(1+|r-r'|^2),\ \sup_{r'\in\mathbf{R}^n}(1+|r'|^2)^{-1}(1+|r-r'|^2)\right)=$$

$$=\left(\{[(4+|r|^2)^{1/2}-|r|]/2\}^2,\{[|r|+(4+|r|^2)^{1/2}]/2\}^2\right)$$

Demostración.

Considerar a los elementos $n\in\mathbf{N}$, $r\in\mathbf{R}^n$ y a la función $(1+|\cdot|^2)^{-1}(1+|r-\cdot|^2):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ tal que:

$$\forall x\in\mathbf{R}^n:(1+|\cdot|^2)^{-1}(1+|r-\cdot|^2)(x)=(1+|x|^2)^{-1}(1+|r-x|^2)$$

Por lo tanto:

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\}:\forall x\in\mathbf{R}^n:$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(1+|\cdot|^2)^{-1}(1+|r-\cdot|^2)\right)(x)=2(1+|x|^2)^{-2}[(x_i-r_i)(1+|x|^2)-x_i(1+|r-x|^2)]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (1+|x_o|^2)(x_o-r)=(1+|r-x_o|^2)x_o\Leftrightarrow(|x_o|^2-|r-x_o|^2)x_o=(1+|x_o|^2)r\Rightarrow x_o\|r$$

Por lo tanto:

$$\left(\inf_{r'\in\mathbf{R}^n}(1+|r'|^2)^{-1}(1+|r-r'|^2),\ \sup_{r'\in\mathbf{R}^n}(1+|r'|^2)^{-1}(1+|r-r'|^2)\right)\in$$

$$\in\left\{\inf_{r'\in\overline{\mathbf{R}^+}}(1+(r')^2)^{-1}[1+(|r|-r')^2],\ \lim_{|r'|\to\infty}(1+|r'|^2)^{-1}(1+|r-r'|^2)\right\}\times$$

$$\times\left\{\sup_{r'\in\overline{\mathbf{R}^+}}(1+(r')^2)^{-1}[1+(|r|+r')^2],\ \lim_{|r'|\to\infty}(1+|r'|^2)^{-1}(1+|r-r'|^2)\right\}=$$

$$= \left\{\{[(4+|r|^2)^{1/2} - |r|]/2\}^2, 1\right\} \times \left\{\{[|r| + (4+|r|^2)^{1/2}]/2\}^2, 1\right\} \Rightarrow \quad (L.19)$$

$$\Rightarrow \left(\inf_{r'\in\mathbf{R}^n}(1+|r'|^2)^{-1}(1+|r-r'|^2), \sup_{r'\in\mathbf{R}^n}(1+|r'|^2)^{-1}(1+|r-r'|^2)\right) =$$

$$= \left(\{[(4+|r|^2)^{1/2} - |r|]/2\}^2, \{[|r| + (4+|r|^2)^{1/2}]/2\}^2\right)$$

Q.E.D.

Definición 21. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$ y a la función T definida en $\mathbf{R}^n$ tal que:

$$\forall r \in \mathbf{R}^n : \forall f \in \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) : \forall r' \in \mathbf{R}^n : (T(r)f)(r') = f(r + r') \quad (N.B.1)$$

Lema 22. $\forall n \in \mathbf{N} : \forall (r_1, r_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : T(r_1 + r_2) = T(r_1)T(r_2)$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N} : \forall (r_1, r_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \forall f \in \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) : \forall r \in \mathbf{R}^n :$

$$(T(r_1)T(r_2)f)(r) = (T(r_2)f)(r_1 + r) = f(r_2 + r_1 + r) = f(r_1 + r_2 + r) = (T(r_1 + r_2)f)(r)$$

Por lo tanto:

$$T(r_1)T(r_2)f = T(r_1 + r_2)f$$

Por lo tanto:

$$T(r_1 + r_2) = T(r_1)T(r_2)$$

Q.E.D.

Lema 23. $\forall n \in \mathbf{N} : \forall (r, f) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) : T(r)T(-r)f = f$

Demostración.

$$\forall n \in \mathbf{N}: \forall (r,f) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}): T(r)T(-r)f = T(r-r)f = \quad \text{(L.22)}$$

$$= T(0)f = f$$

Q.E.D.

Lema 24. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (r,l) \in \mathbf{R}^n \times L^1(\mathbf{R}^n): \int T(r)l = \int l$

Demostración.

$$\forall n \in \mathbf{N}: \forall (r,l) \in \mathbf{R}^n \times L^1(\mathbf{R}^n): \int T(r)l = \int_{\mathbf{R}^n} l(r+r')dr' = \int_{\mathbf{R}^n} l(r)dr$$

Q.E.D.

Lema 25.

$$\forall (n,s) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}: \forall r \in \mathbf{R}^n: T(r) \in \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n)) \wedge \|T(r)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} \leq \{[|r| + (4+|r|^2)^{1/2}]/2\}^{|s|}$$

Demostración.
$\forall (n,s) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}: \forall r \in \mathbf{R}^n: \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n):$

$$\|T(r)c\|_{0,s} = \|\rho_s T(r)c\|_{0,0} = \|(T(r)T(-r)\rho_s)T(r)c\|_{0,0} = \quad \text{(L.23)}$$

$$= \|T(r)(T(-r)\rho_s)c\|_{0,0} = \|(T(-r)\rho_s)c\|_{0,0} = \quad \text{(L.24)}$$

$$= \|\rho_{-s}(T(-r)\rho_s)\rho_s c\|_{0,0} \leq \|\rho_{-s}T(-r)\rho_s\|_\infty \|\rho_s c\|_{0,0} = \{[|r| + (4+|r|^2)^{1/2}]/2\}^{|s|}\|c\|_{0,s} \quad \text{(L.20)}$$

Por lo tanto:

$$T(r) \in \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge \quad \|T(r)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} \leq \{[|r| + (4+|r|^2)^{1/2}]/2\}^{|s|}$$

Q.E.D.

Lema 26. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall r \in \mathbf{R}^n: T(r) \in \bigcap_{(n',s)\in\{0\}\cup\mathbf{N}\ \times\mathbf{R}} \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n))$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N}: \forall r \in \mathbf{R}^n: \forall (n', s) \in \{0\} \cup \mathbf{N}\ \times \mathbf{R}: \exists (r_1, r_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+: \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n):$

$$\|T(r)c\|_{n',s} \leq r_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \|D^\alpha T(r)c\|_{0,s} = r_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \|T(r)D^\alpha c\|_{0,s} \leq$$

$$\leq r_1 \sum_{|\alpha|\leq n'} \|T(r)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))} \|D^\alpha c\|_{0,s} \leq r_1 \|T(r)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))} r_2 \|c\|_{n',s}$$

Por lo tanto:

$$T(r) \in \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$T(r) \in \bigcap_{(n',s)\in\{0\}\cup\mathbf{N}\ \times\mathbf{R}} \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 27. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall r \in \mathbf{R}^n: T(r)^* = T(-r)$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N}: \forall r \in \mathbf{R}^n: \forall (c_1, c_2) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n):$

$$(T(r)c_1, c_2) = \int_{\mathbf{R}^n} c_1(r + r')\overline{c_2}(r')dr' = \int_{\mathbf{R}^n} c_1(r')\overline{c_2}(r' - r)dr' = (c_1, T(-r)c_2)$$

Por lo tanto:

$$T(r)^* = T(-r) \quad (\mathrm{L}.26)$$

Q.E.D.

Lema 28.

$$\forall(n,(n_1,n_2),(s_1,s_2)) \in \mathbf{N} \times (\{0\} \cup \mathbf{N})^2 \times \mathbf{R}^2:$$

$$\forall(x,L) \in \mathbf{R}^n \cup \mathbf{U} \ \times \mathbf{L}(H_{n_1,s_1}(\mathbf{R}^n), H_{n_2,s_2}(\mathbf{R}^n)): \text{ (D.2, N.10 y N.A.3)}$$

$$D(L) = H_{n_1,s_1}(\mathbf{R}^n) \Rightarrow D(T(x)LT(x)^{-1}) = H_{n_1,s_1}(\mathbf{R}^n)$$

Demostración.

$$D(L) = H_{n_1,s_1}(\mathbf{R}^n) \Rightarrow D(T(x)LT(x)^{-1}) = D(LT(x)^{-1}) = \text{ (L.26 y L.11)}$$

$$= (T(x)^{-1})^{-1}D(L) = T(x)H_{n_1,s_1}(\mathbf{R}^n) = H_{n_1,s_1}(\mathbf{R}^n) \text{ (L.23 y L.5)}$$

Q.E.D.

Lema 29. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall(r,c) \in \mathbf{R}^n \times C(\mathbf{R}^n): \|T(r)c\|_\infty = \|c\|_\infty$

Demostración.

$$\forall n \in \mathbf{N}: \forall(r,c) \in \mathbf{R}^n \times C(\mathbf{R}^n): \|T(r)c\|_\infty = \sup \overline{T(r)c(\mathbf{R}^n)} = \sup \overline{c(\mathbf{R}^n)} = \|c\|_\infty$$

Q.E.D.

Lema 30. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall(r,f) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{F}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}): \text{supp } T(r)f \subset \text{supp } f - r$ (N.B.1)

Demostración.

$$\text{supp } T(r)f = \overline{(T(r)f)^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})} = \overline{f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\}) - r} \subset \overline{\overline{f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})} - r} =$$

$$= \overline{f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})} - r = \text{supp } f - r$$

Q.E.D.

Lema 31. Todo $n \in \mathbf{N}$ es tal que todo subconjunto acotado $S \subset \mathbf{R}^n$ es tal que:

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \sup_{s\in S} |T(s)c| \in \bigcap_{s\in\mathbf{R}} L_s^2(\mathbf{R}^n)$$

Demostración.

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \forall s \in \mathbf{R}: \forall s' \in S: |T(s')c| \leq \|T(s')c\|_\infty \chi_{\mathrm{supp}\ T(s')c} = \|c\|_\infty \chi_{\mathrm{supp}\ T(s')c} \leq \quad \text{(L.29)}$$

$$\leq \|c\|_\infty \chi_{\mathrm{supp}\ c-s'} \leq \quad \text{(L.30)}$$

$$\leq \|c\|_\infty \chi_{\bigcup_{s'\in S}(\mathrm{supp}\ c-s')} = \|c\|_\infty \chi_{\mathrm{supp}\ c-S}$$

Por lo tanto:

$$\sup_{s'\in S} |T(s')c| \leq \|c\|_\infty \chi_{\mathrm{supp}\ c-S} \Rightarrow \sup_{s'\in S} |T(s')c| \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$$
$$\text{(L.A.12, d.e.e.c. } (E, S_1, S_2) = (\mathbf{R}^n, \mathrm{supp}\ c, -S))$$

Por lo tanto:

$$\sup_{s\in S} |T(s)c| \in \bigcap_{s\in\mathbf{R}} L_s^2(\mathbf{R}^n)$$

Q.E.D.

Lema 32. $\forall (n,s) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}: \forall (r,c) \in \mathbf{R}^n \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \lim_{r'\to r} \|(T(r)-T(r'))c\|_{0,s} = 0$

Demostración.

$$\forall (n,s) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}: \forall (r,c) \in \mathbf{R}^n \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \lim_{r'\to r} |(T(r)-T(r'))c| = 0 \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall b \in B_1(r): |(T(r)-T(b))c| \leq 2 \sup_{b\in B_1(r)} |T(b)c| \in L_s^2(\mathbf{R}^n) \quad \text{(L.31)}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r'\to r} \|(T(r)-T(r'))c\|_{0,s} = 0 \quad \text{(Teorema de convergencia dominada.)}$$

Q.E.D.

Lema 33. $\forall(n,s)\in \mathrm{N}\times\mathrm{R}: \forall(r,l)\in \mathrm{R}^n\times L^2_s(\mathrm{R}^n): \lim_{r'\to r}\|(T(r)-T(r'))l\|_{0,s}=0$

Demostración.

$$\sup_{b\in B_1(r)} \|T(b)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} \leq \sup_{b\in B_1(r)} \{[|b|+(4+|b|^2)^{1/2}]/2\}^{|s|} < \quad \text{(L.25)}$$

$$< \infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r'\to r} \|(T(r)-T(r'))l\|_{0,s} = 0$$
$$\text{(L.32 y L.A.16, d.c.e.c. } (E,E_1,E_2,S,f) = (B_1(r), L^2_s(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n), C_0^\infty(\mathrm{R}^n), T))$$

Q.E.D.

Lema 34. $\forall(n,r)\in \mathrm{N}\times\mathrm{R}: \forall(r',x)\in(-\infty,-r]\times\mathrm{R}^n: \rho_r T(x)\rho_{r'}\in L^\infty(\mathrm{R}^n)$

Demostración.

$$1 = \lim_{|x'|\to\infty} \rho_{-2}(x')[1+(|x|-|x'|)^2] \leq \lim_{|x'|\to\infty} \rho_{-2}(x')\rho_2(x+x') \leq$$

$$\leq \lim_{|x'|\to\infty} \rho_{-2}(x')[1+(|x|+|x'|)^2] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{|x'|\to\infty} (\rho_{r'}T(x)\rho_{r'})(x') = \lim_{|x'|\to\infty} (\rho_{-2}(x')\rho_2(x+x'))^{r'/2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{|x'|\to\infty} (\rho_r T(x)\rho_{r'})(x') = \lim_{|x'|\to\infty} \rho_{r+r'}(x')(\rho_{-r'}T(x)\rho_{-r'})(x') = \chi_{\{-r\}}(r')$$

Por lo tanto:

$$\sup \overline{\rho_r T(x)\rho_{r'}(\mathbf{R}^n)} < \infty \Rightarrow \text{ (L.A.2, d.e.e.c. } (K,S,E,f) = (\mathbf{R},\mathbf{R}^n,\mathbf{R},\rho_r T(x)\rho_{r'}))$$

$$\Rightarrow \rho_r T(x)\rho_{r'} \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$$

Q.E.D.

Lema 35. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (r_1.r_2,m) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times M(\mathbf{R}^n)$:

$$\exists (r,r') \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}: |m| \le r\rho_{r'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall s \in (-\infty, -r'/2]: \psi((T(r_1)-T(r_2))m) \in \mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \|\psi((T(r_1)-T(r_2))m)\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathbf{R}^n),L^2_s(\mathbf{R}^n))} \le \|(T(r_1)-T(r_2))m\|_\infty \quad \text{(N.B.4 y D.C.11)}$$

Demostración.

$$|m| \le r\rho_{r'} \Rightarrow \forall s \in (-\infty,-r'/2]: \rho_{2s}|(T(r_1)-T(r_2))m| \le \rho_{2s}\sum_{i=1}^{2}|T(r_i)m| \le \rho_{2s}\sum_{i=1}^{2} rT(r_i)\rho_{r'}$$

Por lo tanto:

$$\rho_{2s}|(T(r_1)-T(r_2))m| \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \Rightarrow \text{ (L.34)}$$

$$\Rightarrow \psi((T(r_1)-T(r_2))m) \in \mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \|\psi((T(r_1)-T(r_2))m)\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathbf{R}^n),L^2_s(\mathbf{R}^n))} \le \|(T(r_1)-T(r_2))m\|_\infty \quad \text{(L.C.16)}$$

Q.E.D.

Lema 36. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (x,c) \in \mathbf{R}^n \times C(\mathbf{R}^n)$:

$$\exists(r,r')\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\colon |c|\le r\rho_{r'}\Longrightarrow \forall s\in(-\infty,-r'/2)\colon \lim_{x'\to x}\|\rho_{2s}(T(x)-T(x'))c\|_\infty=0$$

Demostración.

$$\forall k\in\mathbf{N}\colon\forall x'\in\mathbf{R}^n\colon \rho_{2s}|(T(x)-T(x'))c|\le\rho_{2s}(|T(x)c|+|T(x')c|)\le\rho_{2s}(rT(x)\rho_{r'}+rT(x')\rho_{r'})=$$

$$=r\rho_{r'+2s}(\rho_{-r'}T(x)\rho_{r'}+\rho_{-r'}T(x')\rho_{r'})\le$$

$$\le r\rho_{r'+2s}\Big(\{[|x|+(4+|x|^2)^{1/2}]/2\}^{|r'|}+\{[|x'|+(4+|x'|^2)^{1/2}]/2\}^{|r'|}\Big)\Rightarrow \quad (L.20)$$

$$\Rightarrow \rho_{2s}|(T(x)-T(x'))c|=\chi_{B_k(0)}\rho_{2s}|(T(x)-T(x'))c|+\chi_{B_k(0)^c}\rho_{2s}|(T(x)-T(x'))c|\le$$

$$\le\chi_{B_k(0)}\rho_{2s}|(T(x)-T(x'))c|+$$

$$+\chi_{B_k(0)^c}r\rho_{r'+2s}\Big(\{[|x|+(4+|x|^2)^{1/2}]/2\}^{|r'|}+\{[|x'|+(4+|x'|^2)^{1/2}]/2\}^{|r'|}\Big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\|\rho_{2s}(T(x)-T(x'))c\|_\infty\le\|\chi_{B_k(0)}\rho_{2s}\|_\infty\|\chi_{B_k(0)}(T(x)-T(x'))c\|_\infty+$$

$$+r(1+k^2)^{(r'+2s)/2}\Big(\{[|x|+(4+|x|^2)^{1/2}]/2\}^{|r'|}+\{[|x'|+(4+|x'|^2)^{1/2}]/2\}^{|r'|}\Big)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x'\to x}\|(T(x)-T(x'))c\|_\infty\le 2r(1+k^2)^{(r'+2s)/2}\{[|x|+(4+|x|^2)^{1/2}]/2\}^{|r'|}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x' \to x} \|(T(x) - T(x'))c\|_\infty = 0$$

Q.E.D.

Operadores e(r).

Definición 97. Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N}$, a un subconjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ y a la función e definida en $\mathbf{C}^n$ tal que:

$$\forall c \in \mathbf{C}^n : \forall f \in \mathbf{F}(S, \mathbf{C}) : \forall s \in S : (e(c)f)(s) = e^{ic\cdot s} f(s) \quad \text{(N.B.1)}$$

Lema 98. $\forall n \in \mathbf{N} : \forall (c_1, c_2) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n : e(c_1 + c_2) = e(c_1)e(c_2)$

Demostración.

$\forall n \in \mathbf{N} : \forall (c_1, c_2) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n : \forall f \in \mathbf{F}(S, \mathbf{C}) : \forall s \in S$:

$$(e(c_1)e(c_2)f)(s) = e^{ic_1\cdot s}(e(c_2)f)(s) = e^{ic_1\cdot s} e^{ic_2\cdot s} f(s) = e^{i(c_1+c_2)\cdot s} f(s) = (e(c_1 + c_2)f)(s)$$

Por lo tanto:

$$e(c_1)e(c_2)f = e(c_1 + c_2)f$$

Por lo tanto:

$$e(c_1 + c_2) = e(c_1)e(c_2)$$

Q.E.D.

Lema 99. $\forall (c, f) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{F}(S, \mathbf{C}) : e(c)e(-c)f = f$

Demostración.

$$\forall (c, f) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{F}(S, \mathbf{C}) : e(c)e(-c)f = e(c - c)f = \quad \text{(L.38)}$$

$$= e(0)f = f$$

Q.E.D.

Lema 40. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall (c, M) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{M}: T(M)e(c) = e(M^t c)T(M) \quad (D.2)$

Demostración.

$$\forall f \in \mathbf{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}): \forall r \in \mathbf{R}^n: (T(M)e(c)f)(r) = (e(c)f)(Mr) = e^{\imath c \cdot Mr} f(Mr) = e^{\imath M^t c \cdot r} f(Mr) =$$

$$= e^{\imath M^t c \cdot r}(T(M)f)(r) = (e(M^t c)T(M)f)(r)$$

Por lo tanto:

$$T(M)e(c)f = e(M^t c)T(M)f$$

Por lo tanto:

$$T(M)e(c) = e(M^t c)T(M)$$

Q.E.D.

Lema 41. $\forall (n, (s, \alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2: \forall r \in \mathbf{R}^n:$

$$e(r) \in \mathbf{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge \quad \|e(r)\|_{\mathbf{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n))} \leq \{[|r| + (4 + |r|^2)^{1/2}]/2\}^{|\alpha|}$$

Demostración.
$\forall (n, (s, \alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2: \forall r \in \mathbf{R}^n: \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n):$

$$\|e(r)c\|_{\alpha,s} = \|\rho_\alpha F \rho_s e(r)c\|_{0,0} = \|Fe(r)\rho_s c\|_{0,\alpha} = \|T(-r)F\rho_s c\|_{0,\alpha} \leq$$
(D.21 y Rudin 1979, teorema 7.2)

$$\leq \|T(-r)\|_{\mathbf{B}(L^2_\alpha(\mathbf{R}^n))} \|F\rho_s c\|_{0,\alpha} = \quad (L.25)$$

$$= \|T(-r)\|_{\mathrm{B}(L^2_\alpha(\mathbf{R}^n))}\|c\|_{\alpha,s}$$

Por lo tanto:

$$e(r) \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge \quad \|e(r)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n))} \leq \|T(-r)\|_{\mathrm{B}(L^2_\alpha(\mathbf{R}^n))} \leq \{[|r|+(4+|r|^2)^{1/2}]/2\}^{|\alpha|} \quad \text{(L.25)}$$

Q.E.D.

Lema 42. $\forall n \in \mathbf{N}: \forall r \in \mathbf{R}^n: e(r)^* = e(-r)$

Demostración.

$$\forall (c_1, c_2) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n): (e(r)c_1, c_2) = \int e(r)c_1\overline{c_2} = \int_{\mathbf{R}^n} e^{ir\cdot r'}c_1(r')\overline{c_2}(r')dr' =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} c_1(r')\overline{e^{-ir\cdot r'}c_2(r')}dr' = (c_1, e(-r)c_2)$$

Por lo tanto:

$$e(r)^* = e(-r) \quad \text{(L.41)}$$

Q.E.D.

Lema 43.

$$\forall (n, (s, \alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2: \forall (r, c) \in \mathbf{R}^n \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n): \lim_{r' \to r} \|(e(r) - e(r'))c\|_{\alpha,s} = 0$$

Demostración.

$$\forall r' \in \mathbf{R}^n: \|(e(r) - e(r'))c\|_{\alpha,s} = \|\rho_\alpha F \rho_s (e(r) - e(r'))c\|_{0,0} = \|(Fe(r) - Fe(r'))\rho_s c\|_{0,\alpha} =$$

$$= \|(T(-r)F - T(-r')F)\rho_s c\|_{0,\alpha} = \text{(D.21 y Rudin 1979,teorema 7.2)}$$

$$= \|(T(-r) - T(-r'))F\rho_s c\|_{0,\alpha}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r' \to r} \|(e(r) - e(r'))c\|_{\alpha,s} = \lim_{r' \to r} \|(T(-r) - T(-r'))F\rho_s c\|_{0,\alpha} = 0 \quad \text{(L.33)}$$

Q.E.D.

Lema 44.

$$\forall (n,(s,\alpha)) \in \mathbf{N} \times \mathrm{R}^2 : \forall (r,h) \in \mathrm{R}^n \times H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n) : \lim_{r' \to r} \|(e(r) - e(r'))h\|_{\alpha,s} = 0$$

Demostración.

$$\sup_{b \in B_1(r)} \|e(b)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n))} \leq \sup_{b \in B_1(r)} \{[|r| + (4 + |r|^2)^{1/2}]/2\}^{|\alpha|} < \quad \text{(L.41)}$$

$$< \infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r' \to r} \|(e(r) - e(r'))h\|_{\alpha,s} = 0$$

(L.43 y L.A.16, d.e.e.c. $(E, E_1, E_2, S, f) = (B_1(r), H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n), H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n), C_0^\infty(\mathrm{R}^n), e)$)

Q.E.D.

Lema 45.

$$\forall (n,\alpha,(s,s')) \in \mathbf{N} \times \overline{\mathrm{R}^+} \times \mathrm{R}^2 : \forall (c,h) \in \mathbf{C}^n \times H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n) : \lim_{c' \to c} \|(e(c) - e(c'))h\|_{0,s' \text{ loc}} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{c' \to c} |(e(c) - e(c'))h| = 0 \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall c' \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) : \forall b \in B_1(c) : \forall r \in \mathbf{R}^n :$$

$$|c'(e(c) - e(b))h|(r) \leq |c'(r)| \Big(|e(c)h|(r) + \sup_{(b,x) \in B_1(c) \times \text{supp } c'} e^{-\mathrm{Im} b \cdot x} |h(r)| \Big) \in L^2_{s'}(\mathbf{R}^n) \tag{L.C.14}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{b \to c} \|c'(e(c) - e(b))h\|_{0,s'} = 0 \quad \text{(Teorema de convergencia dominada.)}$$

Q.E.D.

Apéndice E. El operador de Schrödinger H

Iniciamos este apéndice con algunas propiedades del Hamiltoniano libre H_0. En el lema 2 calculamos su familia espectral, y en los lemas del 3 al 5 veremos cómo su resolvente puede extenderse como operador acotado a $\mathbf{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$ conservando su propiedad de analiticidad.

Lema 1. $\forall z \in \rho(H_0)$: $R_0(z) = F^*\psi((|\xi|^2 - z)^{-1})F$ (D.C.11)

Demostración.

$\forall n \in \mathbf{N}: \forall z \in \rho(H_0): \forall l \in L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$F^*\psi((|\xi|^2 - z)^{-1})Fl = F^*(|\xi|^2 - z)^{-1}F(H_0 - z)R_0(z)l =$$

$$= F^*(|\xi|^2 - z)^{-1}(|\xi|^2 - z)FR_0(z)l = \text{(Schechter 1971, teorema 3.1.2)}$$

$$= R_0(z)l$$

Por lo tanto:

$$R_0(z) = F^*\psi((|\xi|^2 - z)^{-1})F$$

Q.E.D.

Lema 2. $\forall a \in \overline{\mathbf{R}^+}: \forall b \in (a,\infty): E(H_0)((a,b]) = F^*\psi(\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)})F$ (N.A.35)

Demostración.

$\forall (n,a) \in \mathbf{N} \times \overline{\mathbf{R}^+}: \forall b \in (a,\infty): \forall l \in L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$(E(H_0)((a,b])l,l) = -\imath(2\pi)^{-1}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_a^b((R_0(\lambda+\imath\epsilon) - R_0(\lambda-\imath\epsilon)l,l)d\lambda =$$

$$= -\imath(2\pi)^{-1}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_a^b (F^*\{\psi \qquad ^2 - (\lambda + \imath\epsilon)]^{-1}) - \psi([|\xi|^2 - (\lambda - \imath\epsilon)]^{-1})\}Fl, l)d\lambda = \quad \text{(L.1)}$$

$$= -\imath(2\pi)^{-1}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_a^b ([\psi(|\xi|^2 - (\lambda + \imath\epsilon))^{-1} - \psi(|\xi|^2 - (\lambda - \imath\epsilon))^{-1}]Fl, Fl)d\lambda = \quad \text{(L.C.13)}$$

$$= (E(\psi(|\xi|^2))((a,b])Fl, Fl) = (F^*\psi(\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)})Fl, l) \quad \text{(L.C.19)}$$

Por lo tanto:

$$E(H_0)((a,b]) = F^*\psi(\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)})F \quad \text{(Rudin 1979, teorema 12.7)}$$

Q.E.D.

Lema 3. Considerar a un elemento $(n,s) \in \mathbf{N} \times \overline{\mathbf{R}^+}$ y a un polinomio de primer orden $P: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$. Entonces:

$$\forall z \in \rho(H_0 + P(D)): (H_0 + P(D) - z)^{-1} \in \mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$$

Demostración.

$$\forall z \in \rho(H_0 + P(D)): (|\cdot|^2 + P - z)^{-1}(\{0\}) = \phi \Longrightarrow \text{(Schechter 1971, corolario 4.3.3)}$$

$$\Longrightarrow \rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1} \in C(\mathbf{R}^n) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1}(\xi) = \lim_{|\xi|\to\infty}(1 + |\xi|^2)(|\xi|^2 + P(\xi) - z)^{-1} = 1 \qquad (1)$$

Considerar a un elemento $z \in \rho(H_0 + P(D))$. Por (1) y por el lema A.2, donde en este caso $(S, E, f) = (\mathbf{R}^n, \mathbf{C}, \rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1})$, $\overline{\rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1}(\mathbf{R}^n)}$ es compacto; luego $\rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1} \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$. Además:

$\exists r \in \mathrm{R}^{+} : \forall l \in L^2_s(\mathrm{R}^n)$:

$$\|(H_0 + P(D) - z)^{-1} l\|_{2,-s} = \|\rho_{-s}(H_0 + P(D) - z)^{-1} l\|_{2,0} \leq r\|(H_0 + P(D) - z)^{-1} l\|_{2,0} =$$

(Schechter 1971, teorema 2.4.6)

$$= r\|\rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1}(|\cdot|^2 + P - z)F(H_0 + P(D) - z)^{-1} l\|_{0,0} \leq$$

$$\leq r\|\rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1}\|_\infty \|(H_0 + P(D) - z)(H_0 + P(D) - z)^{-1} l\|_{0,0} =$$

(Schechter 1971, lema 6.4.3 y teorema 3.1.2)

$$= r\|\rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1}\|_\infty \|l\|_{0,0} \leq r\|\rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1}\|_\infty \|\rho_s l\|_{0,0} = r\|\rho_2(|\cdot|^2 + P - z)^{-1}\|_\infty \|l\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$(H_0 + P(D) - z)^{-1} \in \mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 4. $\forall((n, n'), s, z) \in \mathrm{N}^2 \times \overline{\mathrm{R}^{+}} \times \mathrm{C} \setminus \overline{\mathrm{R}^{+}} : R_0(z)^{n'} \in \mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$

Demostración.

$$\exists r \in \mathrm{R}^{+} : \forall l \in L^2_s(\mathrm{R}^n) : \|R_0(z)^{n'} l\|_{2,-s} = \|\rho_{-s} R_0(z)^{n'} l\|_{2,0} \leq r\|R_0(z)^{n'} l\|_{2,0} =$$

(Schechter 1971,teorema 2.4.6)

$$= r\|(I - \Delta) R_0(z)^{n'} l\|_{0,0} = r\|[I + (1 + z) R_0(z)] R_0(z)^{n'-1} l\|_{0,0} \leq$$

$$\leq r\|[I + (1 + z) R_0(z)] R_0(z)^{n'-1}\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}^n))} \|l\|_{0,0} \leq$$

$$\leq r\|[I + (1 + z) R_0(z)] R_0(z)^{n'-1}\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}^n))} \|\rho_s l\|_{0,0} =$$

$$= r\|[I + (1 + z) R_0(z)] R_0(z)^{n'-1}\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}^n))} \|l\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$R_0(z)^{n'} \in \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 5.

$$\forall (n,s,z) \in \mathbf{N}\times\overline{\mathbf{R}^+}\times\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{R}^+}: \lim_{h\to 0} \|h^{-1}[R_0(z+h)-(R_0(z)+hR_0(z)^2)]\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0$$

Demostración.
$\exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall h \in (\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{R}^+} - z)\setminus\{0\} : \forall l \in L^2_s(\mathbf{R}^n)$:

$$\|h^{-1}[R_0(z+h)-(R_0(z)+hR_0(z)^2)]l\|_{2,-s} = \|\rho_{-s}h^{-1}[R_0(z+h)-(R_0(z)+hR_0(z)^2)]l\|_{2,0} \leq$$

$$\leq r\|h^{-1}[R_0(z+h)-(R_0(z)+hR_0(z)^2)]l\|_{2,0} = \text{ (Schechter 1971, teorema 2.4.6)}$$

$$= r\|(I-\Delta)h^{-1}(hR_0(z)R_0(z+h)-hR_0(z)^2)l\|_{0,0} =$$

$$= r\|[I+(1+z)R_0(z)](R_0(z+h)-R_0(z))l\|_{0,0} \leq$$

$$\leq r\|[I+(1+z)R_0(z)](R_0(z+h)-R_0(z))\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}\|l\|_{0,0} \leq$$

$$\leq r\|[I+(1+z)R_0(z)](R_0(z+h)-R_0(z))\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}\|\rho_s l\|_{0,0} =$$

$$= r\|[I+(1+z)R_0(z)](R_0(z+h)-R_0(z))\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}\|l\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$\|h^{-1}[R_0(z+h)-(R_0(z)+R_0(z)^2)]\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq r\|[I+(1+z)R_0(z)](R_0(z+h)-R_0(z))\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq r\|I + (1+z)R_0(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^n))}\|R_0(z+h) - R_0(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^n))}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0}\|h^{-1}[R_0(z+h) - (R_0(z) + hR_0(z)^2)]\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n)H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{h\to 0} r\|I + (1+z)R_0(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^n))}\|R_0(z+h) - R_0(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0$$

(Kato 1976, teorema III.6.7)

Q.E.D.

Aplicaremos ahora el principio del límite absorbente al resolvente de H_0. En el siguiente lema probaremos que existen dos soluciones para la ecuación diferencial $(H_0 - \lambda)f = u$ para λ real positivo y daremos una fórmula. En el lema 8 daremos una estimación importante para la norma de $R_0^{\pm}(z)$ en la topología $\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n), H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))$.

Lema 6. $\forall(\pm, n, s) \in \{-,+\} \times \mathbf{N}\setminus\{1\} \times (1/2,\infty): \forall z \in D_0^{\pm}$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\|R_0^{\pm}(z) - R_0(z \pm \imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n), H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))} = 0 \Rightarrow \forall l \in L^2_s(\mathbb{R}^n): (H_0 - z)R_0^{\pm}(z)l = l$$

Demostración.

$$\forall c \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n): ((H_0 - z)R_0^{\pm}(z)l, c) = (R_0^{\pm}(z)l, (H_0 - \bar{z})c) = \lim_{\delta\downarrow 0}(R_0(z \pm \imath\delta)l, (H_0 - \bar{z})c) =$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0}((H_0 - z)R_0(z \pm \imath\delta)l, c) = (l, c) \pm \imath\lim_{\delta\downarrow 0}(R_0(z \pm \imath\delta)l, \delta c) = (l, c)$$

(L.A.15, d.e.e.c. $E = H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$)

Por lo tanto:

$$(H_0 - z)R_0^{\pm}(z)l = l$$

Q.E.D.

Lema 7.

$$\forall(\pm,n,\alpha,s)\in\{-,+\}\times\mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times(-\infty,2]\times(1/2,\infty):\forall(s',z)\in(-\infty,-s]\times D_0^{\pm}:$$

$$\lim_{z'\to z}\|R_0^{\pm}(z)-R_0^{\pm}(z')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n),H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{z'\to z}\|R_0^{\pm}(z)-R_0^{\pm}(z')\|_{\mathrm{B}(L_s^2\mathrm{R}^n,H_{\alpha,s'}(\mathrm{R}^n))}=0$$

Demostración.

$$\forall s'\in(-\infty,-s]:\exists r\in\mathbf{R}^+:\forall z\in D_0^{\pm}:\lim_{z'\to z}\|R_0^{\pm}(z)-R_0^{\pm}(z')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n),H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{z'\to z}\|R_0^{\pm}(z)-R_0^{\pm}(z')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,s'}(\mathrm{R}^n))}\le$$

$$\le r\lim_{z'\to z}\|R_0^{\pm}(z)-R_0^{\pm}(z')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n),H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))}=\ \text{(L.C.3)}$$

$$=0$$

Q.E.D.

Lema 8.

$$\forall(\pm,n,s,r)\in\{-,+\}\times\mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times(1/2,\infty)\times\mathbf{R}^+:\exists r'\in\mathbf{R}^+:\forall(\alpha,z)\in[0,2]\times D^{\pm}\setminus B_r(0):$$

$$\|R_0^{\pm}(z)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))}\le r'(1+|z|)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.

$$\forall l\in L_s^2(\mathrm{R}^n):\|R_0^{\pm}(z)l\|_{\alpha,-s}\le(\|R_0^{\pm}(z)l\|_{0,-s}^{2-\alpha}\|R_0^{\pm}(z)l\|_{2,-s}^{\alpha})^{1/2}\le\ \text{(L.C.28)}$$

$$\le\{[r'(1+|z|)^{-1/2}\|l\|_{0,s}]^{2-\alpha}[r'(1+|z|)^{1/2}\|l\|_{0,s}]^{\alpha}\}^{1/2}=\ \text{(L.6 y Agmon 1975, remark A.2)}$$

$$=r'(1+|z|)^{(\alpha-1)/2}\|l\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$\|R_0^{\pm}(z)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq r'(1+|z|)^{(\alpha-1)/2}$$

Q.E.D.

Lema 9. $\forall(z,U) \in \rho(H_0) \times \mathbf{U}: R_0(z)T(U) = T(U)R_0(z)$ (N.D.10 y D.D.2)

Demostración.

$$\forall n \in \mathbf{N}: \forall(z,U) \in \rho(H_0) \times \mathbf{U}: \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n): R_0(z)T(U)c = F^*\psi((|\xi|^2 - z)^{-1})FT(U)c = \quad \text{(L.1)}$$

$$= F^*(|\xi|^2 - z)^{-1}T(U)Fc = \quad \text{(L.D.7)}$$

$$= F^3T(U)(|\xi|^2 - z)^{-1}Fc = T(U)F^*\psi((|\xi|^2 - z)^{-1})Fc = \quad \text{(L.D.7)}$$

$$= T(U)R_0(z)c \quad \text{(L.1)}$$

Por lo tanto:

$$R_0(z)T(U) = T(U)R_0(z) \quad \text{(L.D.9)}$$

Q.E.D.

Lema 10. $\forall(\pm,r,U) \in \{-,+\} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{U}: R_0^{\pm}(r)T(U) = T(U)R_0^{\pm}(r)$

Demostración.
$\forall(\pm,n,s,r) \in \{-,+\} \times \mathbf{N}\setminus\{1\} \times (1/2,\infty) \times \mathbf{R}^+: \forall U \in \mathbf{U}: \forall\delta \in \mathbf{R}^+:$

$$\|R_0^{\pm}(r)T(U) - T(U)R_0^{\pm}(r)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} =$$

$$= \|(R_0^{\pm}(r) - R_0(r \pm i\delta))T(U) - T(U)(R_0^{\pm}(r) - R_0(r \pm i\delta))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq \quad \text{(L.9)}$$

$$\leq \|R_0^{\pm}(r) - R_0(r \pm \imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \|T(U)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))} +$$

$$+\|T(U)\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \|R_0^{\pm}(r) - R_0(r \pm \imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \quad \text{(L.D.11)}$$

Por lo tanto:

$$R_0^{\pm}(r)T(U) = T(U)R_0^{\pm}(r)$$

Q.E.D.

A continuación estudiaremos algunas de las propiedades fundamentales del operador de Schrödinger H bajo las condiciones impuestas en la teoría. En el lema 13 probamos que H es autoadjunto y acotado por debajo.En el lema 15 veremos que es posible extender el resolvente de este operador de manera acotada según la topología $\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$.

Lema 11. $\forall d \in D(H_0): (H_0 d, d) \in \overline{\mathbf{R}^+}$

Demostración.

$$\sigma(H_0) = \overline{\mathbf{R}^+} \Rightarrow \forall d \in D(H_0): (H_0 d, d) \in \overline{\mathbf{R}^+} \quad \text{(Rudin 1979,teorema 13.31)}$$

Q.E.D.

Lema 12.

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall (h_1, h_2, V) \in H_2(\mathbf{R}^n) \times H_2(\mathbf{R}^n) \times K_2: (V h_1, h_2) = (h_1, V h_2)$$

Demostración.

$$(V h_1, h_2) = \int V h_1 \overline{h_2} = \int h_1 \overline{V h_2} = (h_1, V h_2)$$

Q.E.D.

Lema 13. Todo $V \in K_2$ es tal que H es autoadjunto y acotado por debajo.

Demostración.

Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Entonces:

$$\exists \epsilon \in \mathbf{R}^+ : \forall h \in H_2(\mathbf{R}^n) : \|Vh\|_{0,0} \leq \|\rho_{1+\epsilon} Vh\|_{0,0} = \|\psi(\rho_{1+\epsilon} V)h\|_{0,0} \leq \quad \text{(D.C.11)}$$

$$\leq \|\psi(\rho_{1+\epsilon} V)\|_{\mathrm{B}(H_2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))} \|h\|_{2,0}$$

Entonces, por los lemas 11 y 12, y Kato 1976, teorema V.4.11, se concluye que H es autoadjunto y acotado por debajo.

Q.E.D.

Lema 14. Todo $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ es tal que todo $V \in K_2$ es tal que $\psi(V) \in \mathrm{L}(L^2(\mathbf{R}^n))$ es cerrable (definición C.11 y notación A.3).

Demostración.

$$\forall (h_1, h_2) \in H_2(\mathbf{R}^n) \times H_2(\mathbf{R}^n) : (Vh_1, h_2) = (h_1, Vh_2) \quad \text{(L.12)}$$

Por lo tanto:

$$H_2(\mathbf{R}^n) = D(\psi(V)) \subset D(\psi(V)^*)$$

Por lo tanto, por Kato 1976, teorema III.5.28, se concluye que $\psi(V)$ es cerrable.

Q.E.D.

Lema 15. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} : \forall V \in K_2 : \forall z \in \rho(H) : \psi(V)R(z) \in \mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))$

Demostración.

Por los lemas 14 y A.22, todo $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ es tal que todo $V \in K_2$ es tal que todo $z \in \rho(H)$ es tal que $\psi(V)R(z)$ es cerrable. Dado que:

$$D(\psi(V)R(z)) = L^2(\mathbf{R}^n)$$

se concluye que $\psi(V)R(z)$ es cerrado; por Kato 1976, teorema III.5.20, $\psi(V)R(z) \in \mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))$.

Q.E.D.

Lema 16.

$$\forall(n,s)\in \mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times\overline{\mathbf{R}^{+}}\colon \forall V\in K_2\colon \forall z\in\rho(H)\colon R(z)\in \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$$

Demostración.
$\forall(n,s)\in \mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times\overline{\mathbf{R}^{+}}\colon \exists r\in\mathbf{R}^{+}\colon \forall V\in K_2\colon \forall z\in\rho(H)\colon \forall l\in L^2_s(\mathbf{R}^n)$:

$$\|R(z)l\|_{2,-s}=\|\rho_{-s}R(z)l\|_{2,0}\leq r\|R(z)l\|_{2,0}= \text{ (Schechter 1971, teorema 2.4.6)}$$

$$= r\|(I-\Delta)R(z)l\|_{0,0}=r\|[(1+z-V)+(-\Delta+V-z)]R(z)l\|_{0,0}=r\|(1+z-V)R(z)l+l\|_{0,0}\leq$$

$$\leq r(|1+z|\|R(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}+\|VR(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}+1)\|l\|_{0,0}\leq \text{ (L.15)}$$

$$\leq r(|1+z|\|R(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}+\|VR(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}+1)\|\rho_s l\|_{0,0}=$$

$$= r(|1+z|\|R(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}+\|VR(z)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))}+1)\|l\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$R(z)\in \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 17. $\forall V\in K_2\colon \forall z\in\rho(H)\colon R(z)=R_0(z)(I-VR(z))=(I-R(z)V)R_0(z)$

Demostración.

$$R_0(z)=R_0(z)(H-z)R(z)=R_0(z)(H_0+V-z)R(z)\subset(I+R_0(z)V)R(z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_0(z)=(I+R_0(z)V)R(z)\Rightarrow R(z)=R_0(z)(I-VR(z))\quad\wedge$$

$$\wedge \quad I \supset R(z)(H-z) \Rightarrow R_0(z) \supset R(z)(H_0+V-z)R_0(z) = R(z)(I+VR_0(z)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(z) \subset (I-R(z)V)R_0(z) \Rightarrow R(z) = (I-R(z)V)R_0(z)$$

Q.E.D.

Lema 18. $\forall(t,V) \in \mathbf{R} \times K_2: e^{-\imath tH} = Te^{\imath tH}T$

Demostración.

$$\forall(n,t) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \mathbf{R}: TH_2(\mathbf{R}^n) \subset H_2(\mathbf{R}^n) \Rightarrow \text{(L.C.10)}$$

$$\Rightarrow \forall V \in K_2: \forall h \in H_2(\mathbf{R}^n): \frac{d}{dt}Te^{\imath tH}Th = T\frac{d}{dt}e^{\imath tH}Th = T\imath He^{\imath tH}Th =$$
(Kato 1976, ejemplo IX.1.6)

$$= -\imath HTe^{\imath tH}Th \Rightarrow Te^{\imath tH}Th = e^{-\imath tH}h \quad \text{(Kato 1976, ejemplo IX.1.6 y sección IX.1.3)}$$

Por lo tanto:

$$e^{-\imath tH} = Te^{\imath tH}T$$

Q.E.D.

En el capítulo 3 se definieron las clases B_α de potenciales, aquí demostraremos los detalles que se aplican en la teoría de manera formal. En el lema 20 veremos que un potencial V en B_α es compacto en $B_{\alpha'}$ para α' mayor que α, para ello utilizaremos el teorema de Rellich.

También dotaremos de una topología a los espacios B_α y en el lema 25 probaremos que los potenciales truncados convergen al potencial en esta topología. Otro hecho interesante es que si un potencial está en K_2 no importa que se le rote o se le translade, seguirá estando en K_2.

Lema 19. Considerar a los elementos $(n,\alpha) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \overline{\mathbf{R}^+}$ y $V \in B_\alpha$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces:

$$\forall \epsilon' \in (0,\epsilon]: \psi(\rho_{1+\epsilon'}V) \in \mathbf{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n)) \quad \text{(D.C.11)}$$

Demostración.

$\forall \epsilon' \in (0,\epsilon]: \forall h \in H_\alpha(\mathbf{R}^n)$:

$$\|\psi(\rho_{1+\epsilon'}V)h\|_{0,0} = \|\rho_{1+\epsilon'}Vh\|_{0,0} \leq \|\rho_{1+\epsilon}Vh\|_{0,0} = \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)h\|_{0,0} \leq$$

$$\leq \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathbf{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))}\|h\|_{\alpha,0}$$

Por lo tanto:

$$\psi(\rho_{1+\epsilon'}V) \in \mathbf{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 20. Considerar a los elementos $(n,\alpha) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \overline{\mathbf{R}^+}$, $\alpha' \in (\alpha,\infty)$ y $V \in B_\alpha$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces todo $\epsilon' \in (0,\epsilon)$ es tal que $\psi(\rho_{1+\epsilon'}V) \in \mathbf{B}(H_{\alpha'}(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ y es compacto.

Demostración.

$$\psi(\rho_{1+\epsilon'}V) \in \mathbf{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n)) \Rightarrow \quad \text{(L.19)}$$

$$\Rightarrow \psi(\rho_{1+\epsilon'}V) \in \mathbf{B}(H_{\alpha'}(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n)) \quad \text{(L.C.3)} \qquad (1)$$

Considerar a un elemento $c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tal que:

$$\forall (b_1,b_2) \in B_1(0) \times B_2(0)^c: (c(b_1), c(b_2)) = (1,0)$$

Por el teorema de Rellich, todo $n' \in \mathbf{N}$ es tal que $\psi(T((n')^{-1}I)c) \in \mathbf{B}(H_{\alpha'}(\mathbf{R}^n), H_\alpha(\mathbf{R}^n))$ (definición D.2) y es compacto; por (1) y por Kato 1976, teorema III.4.8, $\psi(\rho_{1+\epsilon'}V)\psi(T((n')^{-1}I)c) \in \mathbf{B}(H_{\alpha'}(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ es compacto. Además:

$\forall c' \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$\|(\psi(\rho_{1+\epsilon'}V) - \psi(\rho_{1+\epsilon'}V)\psi(T((n')^{-1}I)c))c'\|_{0,0} = \|(\rho_{1+\epsilon'}V - \rho_{1+\epsilon'}VT((n')^{-1}I)c)c'\|_{0,0} =$$

$$= \|\rho_{\epsilon'-\epsilon}\chi_{B_{n'}(0)^c} T((n')^{-1}I)(1-c)\psi(\rho_{1+\epsilon}V)c'\|_{0,0} \leq$$

$$\leq \|\rho_{\epsilon'-\epsilon}\chi_{B_{n'}(0)^c}\|_\infty \|T((n')^{-1}I)(1-c)\|_\infty \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))}\|c'\|_{\alpha,0} =$$

$$= (1+(n')^2)^{(\epsilon'-\epsilon)/2}\|1-c\|_\infty \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))}\|c'\|_{\alpha,0} \leq \quad \text{(L.D.13)}$$

$$\leq (1+(n')^2)^{(\epsilon'-\epsilon)/2}\|1-c\|_\infty \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))}\|c'\|_{\alpha',0}$$

Por lo tanto:

$$\|\psi(\rho_{1+\epsilon'}V) - \psi(\rho_{1+\epsilon'}V)\psi(T((n')^{-1}I)c)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha'}(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq (1+(n')^2)^{(\epsilon'-\epsilon)/2}\|1-c\|_\infty \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n'\to\infty} \|\psi(\rho_{1+\epsilon'}V) - \psi(\rho_{1+\epsilon'}V)\psi(T((n')^{-1}I)c)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha'}(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{n'\to\infty}(1+(n')^2)^{(\epsilon'-\epsilon)/2}\|1-c\|_\infty \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))} = 0$$

Entonces, por Rudin 1979, teorema 4.18, $\psi(\rho_{1+\epsilon'}V)$ es compacto.

Q.E.D.

Lema 21. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$ y $V \in M(\mathbf{R}^n)$ (notación B.4) tal que:

$$\exists (s,r) \in (-\infty,-1)\times\mathbf{R}^+ : |V| \leq r\rho_s \quad (1)$$

Entonces todo $\epsilon \in (0, -(1+s)]$ es tal que $V \in B_0$ con ϵ correspondiente.

Demostración.

$$\forall \epsilon \in (0, -(1+s)] \colon \|\rho_{1+\epsilon} V\|_\infty \le \|\rho_{1+\epsilon} r \rho_s\|_\infty \le \quad \text{(Por (1))}$$

$$\le r \Rightarrow \psi(\rho_{1+\epsilon} V) \in \mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}^n)) \quad \text{(D.C.11 y Kato 1976, ejemplo III.2.11)}$$

Q.E.D.

Lema 22. Mismas hipótesis que en el lema 21. Entonces todo $(\epsilon, \alpha) \in (0, -(1+s)) \times \mathrm{R}^+$ es tal que $V \in B_\alpha$ con ϵ correspondiente y es compacto.

Demostración.

Por el lema 21, $V \in B_0$ con $\epsilon = -(1+s)$ correspondiente. Por el lema 20, todo $(\epsilon, \alpha) \in (0, -(1+s)) \times \mathrm{R}^+$ es tal que $V \in B_\alpha$ con ϵ correspondiente y es compacto.

Q.E.D.

Lema 23. Considerar a los elementos $(n, \alpha, s) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times \overline{\mathrm{R}^+} \times \mathrm{R}$ y $V \in B_\alpha$, este último con elemento $\epsilon \in \mathrm{R}^+$ correspondiente. Entonces:

$$\psi(V) \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n), L^2_{1+s+\epsilon}(\mathrm{R}^n)) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \psi(V) = O_{(0,0)\to(1+s+\epsilon,0)} \psi(\rho_{1+\epsilon} V) O_{(s,\alpha)\to(0,\alpha)} \quad \text{(D.C.11 y L.C.1)}$$

Demostración.

$$(O_{(s,\alpha)\to(0,\alpha)}, O_{(0,0)\to(1+s+\epsilon,0)}) \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n), H_\alpha(\mathrm{R}^n)) \times \mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}^n), L^2_{1+s+\epsilon}(\mathrm{R}^n)) \Rightarrow \quad \text{(L.C.1)}$$

$$\Rightarrow \forall h \in H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n) \colon O_{(0,0)\to(1+s+\epsilon,0)} \psi(\rho_{1+\epsilon} V) O_{(s,\alpha)\to(0,\alpha)} h = \rho_{-(1+s+\epsilon)} \rho_{1+\epsilon} V \rho_s h = \quad \text{(Ver L.C.1)}$$

$$= \psi(V) h$$

Por lo tanto:

$$\psi(V) = O_{(0,0)\to(1+s+\epsilon,0)}\psi(\rho_{1+\epsilon}V)O_{(s,\alpha)\to(0,\alpha)} \in \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n), L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 24. Considerar a los elementos $(n,s) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \mathbf{R}$ y $V \in K_2$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces $\psi(V) \in \mathrm{B}(H_{2,s}(\mathbf{R}^n), L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$ y es compacto.

Demostración.

$$\psi(V) \in \mathrm{B}(H_{2,s}(\mathbf{R}^n), L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n)) \quad \wedge \quad \underset{\text{(L.23)}}{\psi(V) = O_{(0,0)\to(1+s+\epsilon,0)}\psi(\rho_{1+\epsilon}V)O_{(s,2)\to(0,2)}} \qquad (1)$$

Dado que $\psi(\rho_{1+\epsilon}V) \in \mathrm{B}(H_2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ es compacto, por (1) y por Kato 1976,teorema III.4.8, se concluye que $\psi(V)$ es compacto.

Q.E.D.

Lema 25. Considerar a los elementos $(n,\alpha,s) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \overline{\mathbf{R}^+} \times \mathbf{R}$ y $V \in B_\alpha$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces:

$$\forall\epsilon' \in (0,\epsilon): \lim_{r\to\infty} \|V - \chi_{B_r(0)}V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n), L^2_{1+s+\epsilon'}(\mathbf{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$\forall\epsilon' \in (0,\epsilon): \forall r \in \mathbf{R}^+: \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$\|(V - \chi_{B_r(0)}V)c\|_{0,1+s+\epsilon'} = \|\rho_{1+s+\epsilon'}(1-\chi_{B_r(0)})Vc\|_{0,0} = \|\rho_{\epsilon'-\epsilon}\chi_{B_r(0)^c}\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\rho_s c\|_{0,0} \leq$$

$$\leq \|\rho_{\epsilon'-\epsilon}\chi_{B_r(0)^c}\|_\infty \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))} \|\rho_s c\|_{\alpha,0} =$$

$$= (1+r^2)^{(\epsilon'-\epsilon)/2} \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))} \|c\|_{\alpha,s}$$

Por lo tanto:

$$\|V - \chi_{B_r(0)}V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n), L^2_{1+s+\epsilon'}(\mathbf{R}^n))} \leq (1+r^2)^{(\epsilon'-\epsilon)/2} \|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r\to\infty}\|V-\chi_{B_r(0)}V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n),L^2_{1+s+\epsilon'}(\mathbf{R}^n))}\leq$$

$$\leq\lim_{r\to\infty}(1+r^2)^{(\epsilon'-\epsilon)/2}\|\psi(\rho_{1+\epsilon}V)\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))}=0$$

Q.E.D.

Lema 26. Considerar a los elementos $n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$ y $V\in K_2$, este último con elemento $\epsilon\in\mathbf{R}^+$ correspondiente. Considerar a un operador lineal O definido sobre $\mathbf{F}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})$ (notación B.1) tal que:

$$N(O)=\{0\}\quad\wedge\quad(\rho_{1+\epsilon}(O\rho_{1+\epsilon})^{-1},O,O^{-1})\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\times\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))\times\mathrm{B}(H_2(\mathbf{R}^n))\quad\wedge$$

$$\wedge\quad\forall(f_1,f_2)\in\mathbf{F}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})\times\mathbf{F}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}):O(f_1f_2)=(Of_1)(Of_2)\tag{1}$$

Entonces $OV\in K_2$ con ϵ correspondiente.

Demostración.

$$\psi(\rho_{1+\epsilon}(O\rho_{1+\epsilon})^{-1})\in\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}^n))\quad\text{(D.C.11 y Kato 1976, ejemplo III.2.11)}\tag{2}$$

Además:

$$\forall h\in H_2(\mathbf{R}^n):\psi(\rho_{1+\epsilon}OV)h=\rho_{1+\epsilon}(OV)h=\rho_{1+\epsilon}(O\rho_{1+\epsilon})^{-1}(O\rho_{1+\epsilon})(OV)O(O^{-1}h)=$$
$$\text{(Por (1))}$$

$$=\rho_{1+\epsilon}(O\rho_{1+\epsilon})^{-1}O(\rho_{1+\epsilon}VO^{-1}h)=\ \text{(Por (1))}$$

$$=\psi(\rho_{1+\epsilon}(O\rho_{1+\epsilon})^{-1})O\psi(\rho_{1+\epsilon}V)O^{-1}h$$

Por lo tanto:

$$\psi(\rho_{1+\epsilon}OV)=\psi(\rho_{1+\epsilon}(O\rho_{1+\epsilon})^{-1})O\psi(\rho_{1+\epsilon}V)O^{-1}\in\mathrm{B}(H_2(\mathbf{R}^n),L^2(\mathbf{R}^n))$$
$$\text{(Por (2), (1) y por que } V\in K_2.)$$

Entonces, por Kato 1976, teorema III.4.8, $OV \in K_2$ con ϵ correspondiente.

Q.E.D.

Lema 27. $\forall (U, V) \in \mathbf{U} \times K_2 : T(U)V \in K_2$ (N.D.10 y D.D.2)

Demostración.

Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $U \in \mathbf{U}$ y $V \in K_2$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces:

$$(\rho_{1+\epsilon}(T(U)\rho_{1+\epsilon})^{-1}, T(U), T(U)^{-1}) = (1, T(U), T(U^{-1}) \in \quad \text{(L.D.5)}$$

$$\in L^\infty(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{B}(L^2(\mathbf{R}^n)) \times \mathbf{B}(H_2(\mathbf{R}^n)) \quad \text{(L.D.11)}$$

Por lo tanto:

$$T(U)V \in K_2 \quad \text{(L.26, d.e.c.c. } O = T(U))$$

Q.E.D.

Lema 28. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $r \in \mathbf{R}^n$ y $V \in K_2$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces $T(r)V \in K_2$ con ϵ correspondiente.

Demostración.

$$\|\rho_{1+\epsilon}(T(r)\rho_{1+\epsilon})^{-1}\|_\infty = \sup_{r' \in \mathbf{R}^n} (1 + |r'|^2)^{(1+\epsilon)/2}(1 + |r + r'|^2)^{-(1+\epsilon)/2} < \infty \quad \wedge \quad \text{(L.D.20)}$$

$$\wedge \quad N(T(r)) = \{0\} \quad \text{(L.D.23)}$$

Por lo tanto:

$$(\rho_{1+\epsilon}(T(r)\rho_{1+\epsilon})^{-1}, T(r), T(r)^{-1}) = (\rho_{1+\epsilon}(T(r)\rho_{1+\epsilon})^{-1}, T(r), T(-r)) \in \quad \text{(L.D.23)}$$

$$\in L^\infty(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{B}(L^2(\mathbf{R}^n)) \times \mathbf{B}(H_2(\mathbf{R}^n)) \quad \text{(L.D.26)}$$

Entonces, por el lema 26, donde en este caso $O = T(r)$, $T(r)V \in K_2$ con ϵ correspondiente.

Q.E.D.

Lema 29. $\forall V \in K_2 : \forall z \in \rho(H) : R(z) = TR(\overline{z})T$.

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} : \forall V \in K_2 : \forall z \in \rho(H) : \forall l \in L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$TR(\overline{z})Tl = TR(\overline{z})T(H-z)R(z)l = TR(\overline{z})(H-\overline{z})TR(z)l = TTR(z)l = \quad \text{(L.C.10)}$$

$$= R(z)l$$

Por lo tanto:

$$R(z) = TR(\overline{z})T$$

Q.E.D.

Lema 30. $\forall V \in K_2 : \forall \lambda \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H) : R^-(\lambda) = TR^+(\lambda)T$

Demostración.
$\forall (n,s) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times (1/2, \infty) : \forall V \in K_2 : \forall \lambda \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H) : \forall \delta \in \mathbf{R}^+$:

$$\|R^-(\lambda) - TR^+(\lambda)T\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} =$$

$$= \|R^-(\lambda) - R(\lambda - \imath\delta) + TR(\lambda + \imath\delta)T - TR^+(\lambda)T\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq \quad \text{(L.29)}$$

$$\leq \|R^-(\lambda) - R(\lambda - \imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} + \|T(R^+(\lambda) - R(\lambda + \imath\delta))T\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} =$$

$$= \|R^-(\lambda) - R(\lambda - \imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} + \|R^+(\lambda) - R(\lambda + \imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))}$$

(L.C.10 y L.A.21, d.e.e.c. $(E_1, E_2, E_3, E_4, O_1, O_2) = (L_s^2(\mathbf{R}^n), L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n), T, T)$)
Por lo tanto:

$$R^-(\lambda) = TR^+(\lambda)T$$

Q.E.D.

Lema 31. Todo $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ es tal que todo $V \in K_2$ es tal que $\psi(V) \in \mathrm{B}(H_2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ (definición C.11), es compacto.

Demostración.

Sea $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente a V. Considerar a la inclusión $I \in \mathrm{B}(L^2_{1+\epsilon}(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ (lema C.2). Por el lema 24, donde en este caso $s = 0$, $\psi(V) \in \mathrm{B}(H_2(\mathbf{R}^n), L^2_{1+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$ y es compacto; por Kato 1976, teorema III.4.8, $I\psi(V) \in \mathrm{B}(H_2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ y es compacto.

Q.E.D.

Lema 32. Considerar a los elementos $(n, s) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{R}$ y $V \in K_2$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Considerar a un espacio de Banach E. Entonces todo $B \in \mathrm{B}(E, H_{2,s}(\mathbf{R}^n))$ es tal que $\psi(V)B \in \mathrm{B}(E, L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$ (definición C.11) y es compacto.

Demostración.

Por el lema 24, $\psi(V) \in \mathrm{B}(H_{2,s}(\mathbf{R}^n), L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$ y es compacto; por Kato 1976, teorema III.4.8, $\psi(V)B \in \mathrm{B}(E, L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$ es compacto.

Q.E.D.

Lema 33. Considerar a los elementos $(\pm, n) \in \{-,+\} \times \mathbf{N} \setminus \{1\}$ y $V \in K_2$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Considerar al conjunto consistente en los elementos inversibles en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))$, $G \subset \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))$. Entonces:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \|R_0^\pm(0) - R_0(\pm\imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \quad \wedge \quad I + VR_0^\pm(0) \in G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \downarrow 0} \|R_0^\pm(0)(I + VR_0^\pm(0))^{-1} - R(\pm\imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\|(I+VR_0^{\pm}(0))-(I+VR_0(\pm\imath\delta))\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))}\leq$$

$$\leq \lim_{\delta\downarrow 0}\|V\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathbf{R}^n),L_s^2(\mathbf{R}^n))}\|R_0^{\pm}(0)-R_0(\pm\imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta\downarrow 0}\|(I+VR_0^{\pm}(0))^{-1}-(I+VR_0(\pm\imath\delta))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))}=0\Rightarrow \quad \text{(Rudin 1979, teorema 10.12)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta\downarrow 0}\|R_0^{\pm}(0)(I+VR_0^{\pm}(0))^{-1}-R(\pm\imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))}=$$

$$=\lim_{\delta\downarrow 0}\|R_0^{\pm}(0)(I+VR_0^{\pm}(0))^{-1}-R_0(\pm\imath\delta)(I+VR_0(\pm\imath\delta))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))}= \quad \text{(Por (3.25))}$$

$$=0 \quad (\text{L.A.13, d.e.e.c. } (B_1,B_2,B_3)=(L_s^2(\mathbf{R}^n),L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n)))$$

Q.E.D.

Lema 34. Considerar a los elementos $(n,s)\in\mathbf{N}\setminus\{1\}\times\mathbf{R}$ y $V\in K_2$, este último con elemento $\epsilon\in\mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces:
$\forall(c,B)\in\mathbf{C}\times\mathrm{B}(L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n),H_{2,s}(\mathbf{R}^n))$:

$$N(\psi(V)B-c)=\{0\}\Rightarrow(\psi(V)B-c)^{-1}\in\mathrm{B}(L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$$

Demostración.

Por el lema 32, donde en este caso $E=L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n)$, $\psi(V)B\in\mathrm{B}(L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$ es compacto; por Rudin 1979, teorema 4.25, $c\in\rho(\psi(V)B)$; luego, $(\psi(V)B-c)^{-1}\in\mathrm{B}(L^2_{1+s+\epsilon}(\mathbf{R}^n))$.

Q.E.D.

Lema 35. Considerar a los elementos $(\pm,n,\alpha)\in\{-,+\}\times\mathbf{N}\setminus\{1\}\times[0,2]$ y $V\in B_\alpha$, este último con elemento $\epsilon\in\mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

Entonces:

$\forall z \in D_0^{\pm}$:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \| R_0^{\pm}(z) - R_0(z \pm \imath\delta) \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{z' \to z} \| (I + V R_0^{\pm}(z)) - (I + V R_0^{\pm}(z')) \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{z' \to z} \| (I + V R_0^{\pm}(z)) - (I + V R_0^{\pm}(z')) \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{z' \to z} \| \psi(V) \|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n), L_s^2(\mathrm{R}^n))} \| R_0^{\pm}(z) - R_0^{\pm}(z') \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} = \quad (\mathrm{L}.23)$$

$$= 0 \quad (\mathrm{L}.7)$$

Q.E.D.

Lema 86. Considerar a los elementos $(\pm, n, \alpha) \in \{-, +\} \times \mathrm{N} \setminus \{1\} \times [0, 1)$ y $V \in B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathrm{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1 + \epsilon)/2$$

Entonces:

$$\lim_{|z| \to \infty} \| I - (I + V R_0^{\pm}(z)) \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\exists r \in \mathrm{R}^+ : \lim_{|z| \to \infty} \| I - (I + V R_0^{\pm}(z)) \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{|z| \to \infty} \| \psi(V) \|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n), L_s^2(\mathrm{R}^n))} \| R_0^{\pm}(z) \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} \leq \quad (\mathrm{L}.23)$$

$$\leq \lim_{|z| \to \infty} \| \psi(V) \|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n), L_s^2(\mathrm{R}^n))} r (1 + |z|)^{(\alpha - 1)/2} = \quad (\mathrm{L}.8)$$

$$= 0$$

Q.E.D.

Lema 37. Considerar a los elementos $(\pm, n, \alpha, r) \in \{-,+\} \times \mathbf{N} \setminus \{1\} \times [0,1) \times \overline{\mathbf{R}^+}$ y $V \in B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Considerar al conjunto consistente en los elementos inversibles en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))$, $G \subset \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))$. Entonces:

$$\forall z \in D_0^\pm \setminus B_r(0) \colon I + V R_0^\pm(z) \in G \quad \Longrightarrow \sup_{z \in D_0^\pm \setminus B_r(0)} \|(I + V R_0^\pm(z))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} < \infty$$

Demostración.

$$\lim_{|z| \to \infty} \|I - (I + V R_0^\pm(z))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} = 0 \quad \wedge \quad \text{(L.36)}$$

$$\wedge \quad \forall z \in D_0^\pm \setminus B_r(0) \colon \lim_{z' \to z} \|(I + V R_0^\pm(z)) - (I + V R_0^\pm(z'))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} = 0 \quad \text{(L.35)}$$

Por lo tanto:

$$\sup_{z \in D_0^\pm \setminus B_r(0)} \|(I + V R_0^\pm(z))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} < \infty$$

(L.A.26, d.e.e.c. $(S, A, f) = (D_0^\pm \setminus B_r(0), \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n)), I + V R_0^\pm(\cdot))$)

Q.E.D.

Lema 38. Mismas hipótesis que en lema 36. Entonces:
$\forall \rho \in (\sup \sigma_+(H), \infty) \colon \exists r \in \mathbf{R}^+ \colon \forall z \in D^\pm \setminus B_\rho(0)$:

$$\|R^\pm(z)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq r(1 + |z|)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.
$\forall \rho \in (\sup \sigma_+(H), \infty) \colon \exists r \in \mathbf{R}^+ \colon \forall z \in D^\pm \setminus B_\rho(0)$:

$$\|R^{\pm}(z)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} = \|R_0^{\pm}(z)(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} \leq \text{ (Por (3.25))}$$

$$\leq \|R_0^{\pm}(z)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))}\|(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq r(1+|z|)^{(\alpha-1)/2} \sup_{z\in D^{\pm}\setminus B_\rho(0)} \|(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} \quad \text{(L.8 y L.37)}$$

Q.E.D.

Lema 39. Considerar a los elementos $(\pm, n, \alpha, r) \in \{-,+\} \times \mathbf{N}\setminus\{1\} \times [0,1] \times \mathrm{R}^+$ y $V \in B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathrm{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Entonces:

$$\lim_{V'\to V} \sup_{z\in D^{\pm}\setminus B_r(0)} \|(I+VR_0^{\pm}(z)) - (I+V'R_0^{\pm}(z))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\exists r' \in \mathrm{R}^+ : \forall V' \in B_\alpha : \forall z \in D^{\pm}\setminus B_r(0) : \|(I+VR_0^{\pm}(z)) - (I+V'R_0^{\pm}(z))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \|V-V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n),L^2_s(\mathrm{R}^n))}\|R_0^{\pm}(z)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \|V-V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n),L^2_s(\mathrm{R}^n))} r' = \text{ (L.8)}$$

$$= \|\rho_{1+\epsilon}(V-V')\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathrm{R}^n),L^2(\mathrm{R}^n))} r'$$

(L.23 y L.A.21 d.e.e.c. $(E_1,E_2,E_3,E_4,O_1,O_2) = (H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n), H_\alpha(\mathrm{R}^n), L^2(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n), O_{(-s,\alpha)\to(0,\alpha)}, O_{(0,0)\to(s,0)})$)
Por lo tanto:

$$\lim_{V'\to V} \sup_{z\in D^{\pm}\setminus B_r(0)} \|(I+VR_0^{\pm}(z)) - (I+V'R_0^{\pm}(z))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{V'\to V} \|\rho_{1+\epsilon}(V - V')\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))} r' = 0$$

Q.E.D.

Lema 40. Considerar a los elementos $(\pm, n, \alpha) \in \{-,+\} \times \mathbb{N}\setminus\{1\} \times [0,1]$ y $V \in B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon \in (1,\infty)$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Entonces:

$$\lim_{V'\to V} \sup_{z\in\overline{\mathbb{R}^+}} \|(I + VR_0^\pm(z)) - (I + V'R_0^\pm(z))\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : \forall V' \in B_\alpha : \forall z \in \overline{\mathbb{R}^+} : \|(I + VR_0^\pm(z)) - (I + V'R_0^\pm(z))\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n))} \leq$$

$$\leq \|V - V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n),L_s^2(\mathbb{R}^n))} \|R_0^\pm(z)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n))} =$$

$$= \|\rho_{1+\epsilon}(V - V')\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))} \|R_0^\pm(z)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n))} \leq$$

(L.23 y L.A.21, d.e.e.c. $(E_1, E_2, E_3, E_4, O_1, O_2) = (H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n), H_\alpha(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n), L_s^2(\mathbb{R}^n), O_{(-s,\alpha)\to(0,\alpha)}, O_{(0,0)\to(s,0)})$)

$$\leq \|\rho_{1+\epsilon}(V - V')\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))} \Big(\sup_{z'\in[0,1]} \|R_0^\pm(z')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n))} \chi_{[0,1]}(z) +$$

$$+ r\chi_{(1,\infty)}(z) \Big) \quad \text{(L.7 y L.8)}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{V'\to V} \sup_{z\in\overline{\mathbb{R}^+}} \|(I + VR_0^\pm(z)) - (I + V'R_0^\pm(z))\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{V'\to V} \|\rho_{1+\epsilon}(V - V')\|_{\mathrm{B}(H_\alpha(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))} \max\left\{ \sup_{z\in[0,1]} \|R_0^\pm(z)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n))}, r \right\} = 0$$

Q.E.D.

Lema 41. Considerar a los elementos $(\pm, n, \alpha, r) \in \{-,+\} \times \mathbf{N} \setminus \{1\} \times [0,1) \times \overline{\mathbf{R}^+}$ y $V \in B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Considerar al conjunto consistente en los elementos inversibles en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))$, $G \subset \mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))$, y suponer que:

$$\forall z \in [r, \infty): I + V R_0^{\pm}(z) \in G$$

Entonces existe una vecindad correspondiente a V, $W \subset B_\alpha$, tal que:

$$\forall (z, V') \in [r, \infty) \times W: I + V' R_0^{\pm}(z) \in G$$

Demostración.

$$\lim_{|z| \to \infty} \|I - (I + V R_0^{\pm}(z))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} = 0 \quad \wedge \quad \text{(L.36)}$$

$$\wedge \quad \forall z \in [r, \infty): \lim_{z' \to z} \|(I + V R_0^{\pm}(z)) - (I + V R_0^{\pm}(z'))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} = 0 \quad \text{(L.35)}$$

Entonces, por el lema A.2, donde en este caso $(n, S, E, F) = (1, [r, \infty), \mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n)), I + V R_0^{\pm}(\cdot))$, $\{I\} \cup (I + V R_0^{\pm}(\cdot))([r, \infty))$ es compacto; por Rudin 1979, teorema 1.10, existe una vecindad correspondiente a 0, $W \subset \mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))$, tal que $(I + V R_0^{\pm}(\cdot))([r, \infty)) + W \subset G$; por los lemas 39 y 40, existe una vecindad correspondiente a V, $W' \subset B_\alpha$ tal que:

$$\forall (z, V') \in [r, \infty) \times W': I + V' R_0^{\pm}(z) \in (I + V R_0^{\pm}(\cdot))([r, \infty)) + W \subset G$$

Q.E.D.

Lema 42. Mismas hipótesis que en lema 37. Entonces:

$$\forall z \in [r, \infty): I + V R_0^{\pm}(z) \in G \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{V' \to V} \sup_{z \in [r, \infty)} \|(I + V R_0^{\pm}(z))^{-1} - (I + V' R_0^{\pm}(z))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\sup_{z\in[r,\infty)} \|(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n))} < \infty \quad \wedge \quad (\text{L.37})$$

$$\wedge \quad \lim_{V'\to V} \sup_{z\in[r,\infty)} \|(I+VR_0^{\pm}(z)) - (I+V'R_0^{\pm}(z))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n))} = 0 \quad (\text{L.39 y L.40})$$

Por lo tanto:

$$\lim_{V'\to V} \sup_{z\in[r,\infty)} \|(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1} - (I+V'R_0^{\pm}(z))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n))} = 0$$

$$(\text{L.41 y L.A.25, d.e.e.c. } (C,A) = ([r,\infty), \mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n))))$$

Q.E.D.

Lema 43. Considerar a los elementos $(\pm, n) \in \{-,+\} \times \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $V \in K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Entonces:

$\forall z \in D_0^{\pm} \setminus \sigma_+(H)$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R_0^{\pm}(z) - R_0(z \pm \imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n), H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))} = 0 \Rightarrow I - VR^{\pm}(z) = (I+VR_0^{\pm}(z))^{-1}$$

Demostración.

$$I - VR^{\pm}(z) = (I+VR_0^{\pm}(z))(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1} - VR_0^{\pm}(z)(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1} = (I+VR_0^{\pm}(z))^{-1}$$

Q.E.D.

Lema 44. Mismas hipótesis que en lema 37. Entonces:

$$\forall z \in [r,\infty) : I+VR_0^{\pm}(z) \in G \Longrightarrow \lim_{V'\to V} \sup_{z\in[r,\infty)} \|Q_{\pm}(z)V - Q'_{\pm}(z)V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n), L^2_s(\mathbb{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\sup_{z\in[r,\infty)} \|(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1}\|_{B(L_s^2(\mathbb{R}^n))} < \infty \quad (L.37)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{V'\to V} \sup_{z\in[r,\infty)} \|Q_{\pm}(z)V - Q'_{\pm}(z)V'\|_{B(H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n),L_s^2(\mathbb{R}^n))} =$$

$$= \lim_{V'\to V} \sup_{z\in[r,\infty)} \|(I - VR^{\pm}(z))V - (I - V'(R^{\pm})'(z))V'\|_{B(H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n),L_s^2(\mathbb{R}^n))} =$$

$$= \lim_{V'\to V} \sup_{z\in[r,\infty)} \|(I+VR_0^{\pm}(z))^{-1}V - (I+V'R_0^{\pm}(z))^{-1}V'\|_{B(H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n),L_s^2(\mathbb{R}^n))} = \quad (L.43)$$

$$= 0 \text{ (L.42 y L.A.13, d.e.e.c. } (C_2,B_1,B_2,B_3) = ([r,\infty), H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n), L_s^2(\mathbb{R}^n), L_s^2(\mathbb{R}^n)))$$

Q.E.D.

Apéndice F. La matriz de dispersión S(k)

Iniciaremos este apéndice con algunos resultados sobre los operadores de traza $\gamma(k)$ los cuales serán la base para ulteriores teoremas sobre la matriz de dispersión.

Lema 1.

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{R}^+ : \forall (r,l) \in \mathbf{R}^n \times L^2(S^{n-1}) : (\gamma^*(k)l)(r) = \int_{S^{n-1}} e^{\imath k\omega \cdot r} l(\omega) d\omega$$

Demostración.

$\forall (n,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{R}^+ : \forall l \in L^2(S^{n-1}) : \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{S^{n-1}} |e^{-\imath k\omega \cdot x} c(x) \bar{l}(\omega)| d\omega dx = \|c\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \|l\|_{L^2(S^{n-1})} < \infty$$

Por lo tanto:

$$(c, \gamma^*(k)l) = (\gamma(k)c, l)_{L^2(S^{n-1})} = \int_{S^{n-1}} \gamma(k) c\bar{l} = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath k\omega \cdot x} c(x) dx \bar{l}(\omega) d\omega = \quad \text{(Por (3.38).)}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{S^{n-1}} e^{-\imath k\omega \cdot x} c(x) \bar{l}(\omega) d\omega dx = \quad \text{(Teorema de Fubini.)}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} c(x) \overline{\int_{S^{n-1}} e^{\imath k\omega \cdot x} l(\omega) d\omega} dx$$

Por lo tanto:

$$\forall r \in \mathbf{R}^n : (\gamma^*(k)l)(r) = \int_{S^{n-1}} e^{\imath k\omega \cdot r} l(\omega) d\omega$$

Q.E.D.

Lema 2.

$$\forall(n,k)\in\mathbf{N}\setminus\{1\}\times\mathbf{R}^{+}:\forall(j,l)\in\{1,\ldots,n\}\times L^2(S^{n-1}):\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma^*(k)l=\imath k\gamma^*(k)\omega_j l$$

Demostración.

$\forall x\in\mathbf{R}^n$: (c.t.p.)$\omega\in S^{n-1}$:

$$\lim_{\epsilon\to 0}|\imath k e^{\imath k\omega\cdot x}\omega_j l(\omega)-(\imath k\omega_j\epsilon)^{-1}(e^{\imath k\omega_j\epsilon}-1)\imath k\omega_j e^{\imath k\omega\cdot x}l(\omega)|=0\quad\wedge$$

$$\wedge\quad\forall\epsilon\in B_1(0):|\imath k e^{\imath k\omega\cdot x}\omega_j l(\omega)-(\imath k\omega_j\epsilon)^{-1}(e^{\imath k\omega_j\epsilon}-1)\imath k\omega_j e^{\imath k\omega\cdot x}l(\omega)|\leq$$

$$\leq k|l(\omega)|+k|(\imath k\omega_j\epsilon)^{-1}(e^{\imath k\omega_j\epsilon}-1)||l(\omega)|\leq k|l(\omega)|+kk^{-1}(e^k-1)|l(\omega)|=\text{ (L.C.25)}$$

$$=(k+e^k-1)|l(\omega)|\in L^2(S^{n-1})$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma^*(k)l\right)(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-1}((\gamma^*(k)l)(x+\epsilon e_j)-(\gamma^*(k)l)(x))=$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{S^{n-1}}e^{\imath k\omega\cdot(x+\epsilon e_j)}l(\omega)d\omega-\int_{S^{n-1}}e^{\imath k\omega\cdot x}l(\omega)d\omega\right)=\text{ (L.1)}$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}(\imath k\omega_j\epsilon)^{-1}(e^{\imath k\omega_j\epsilon}-1)e^{\imath k\omega\cdot x}\imath k\omega_j l(\omega)d\omega=$$

$$=\int_{S^{n-1}}e^{\imath k\omega\cdot x}\imath k\omega_j l(\omega)d\omega=\text{ (Teorema de convergencia dominada.)}$$

$$=(\gamma^*(k)\imath k\omega_j l)(x)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma^*(k)l=\imath k\gamma^*(k)\omega_j l$$

Q.E.D.

Lema 3.

$$\forall(n,k)\in \mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times\mathbf{R}^{+}:\forall(\alpha,l)\in(\{0\}\cup\mathbf{N})^{n}\times L^{2}(S^{n-1}): D^{\alpha}\gamma^{*}(k)l=(\imath k)^{|\alpha|}\gamma^{*}(k)\omega^{\alpha}l$$

Demostración.

Considerar a los elementos $(n,k)\in\mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times\mathbf{R}^{+}$ y $l\in L^{2}(S^{n-1})$. Suponer que el lema es valido para:

$$\alpha=(\alpha_{1},\ldots,\alpha_{n-1},0)\in(\{0\}\cup\mathbf{N})^{n}$$

Por lo tanto:

$\forall\alpha\in(\{0\}\cup\mathbf{N})^{n}$:

$$D^{\alpha}\gamma^{*}(k)l=\frac{\partial^{\alpha_{n}}}{\partial x_{n}^{\alpha_{n}}}\frac{\partial^{\alpha_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_{1}}}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}}}\gamma^{*}(k)l=\frac{\partial^{\alpha_{n}}}{\partial x_{n}^{\alpha_{n}}}(\imath k)^{\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{j}}\gamma^{*}(k)l\prod_{j=1}^{n-1}\omega_{j}^{\alpha_{j}}=$$

$$=(\imath k)^{|\alpha|}\gamma^{*}(k)\omega_{n}^{\alpha_{n}}l\prod_{j=1}^{n-1}\omega_{j}^{\alpha_{j}}=\ \text{(L.2)}$$

$$=(\imath k)^{|\alpha|}\gamma^{*}(k)\omega^{\alpha}l$$

Q.E.D.

Lema 4. Todo $(n,k)\in\mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times\mathbf{R}^{+}$ es tal que todo polinomio $p:\mathbf{R}^{n}\to\mathbf{C}$ es tal que todo $l\in L^{2}(S^{n-1})$ es tal que:

$$p(\nabla)\gamma^{*}(k)l=\gamma^{*}(k)p(\imath k\omega)l$$

Demostración.

Considerar al grado correspondiente al polinomio $n'\in\{0\}\cup\mathbf{N}$.Existe una función $f:\{\alpha\in(\{0\}\cup\mathbf{N})^{n}:|\alpha|\leq n'\}\to\mathbf{C}$ tal que:

$$\forall x\in\mathbf{R}^{n}:p(x)=\sum_{|\alpha|\leq n'}f(\alpha)x^{\alpha}$$

Por lo tanto:

$$p(\nabla)\gamma^*(k)l = \sum_{|\alpha|\leq n'} f(\alpha)D^\alpha\gamma^*(k)l = \sum_{|\alpha|\leq n'} f(\alpha)\gamma^*(k)(\imath k)^{|\alpha|}\omega^\alpha l = \quad \text{(L.3)}$$

$$= \gamma^*(k) \sum_{|\alpha|\leq n'} f(\alpha)(\imath k)^{|\alpha|}\omega^\alpha l = \gamma^*(k)p(\imath k\omega)l$$

Q.E.D.

Lema 5. $\forall(n,n',s) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times\{0\} \cup \mathrm{N} \times(-\infty,-1/2)\colon \exists r \in \mathrm{R}^+\colon \forall k \in \mathrm{R}^+\colon$

$$\gamma^*(k) \in \mathrm{B}(L^2(S^{n-1}), H_{2n',s}(\mathrm{R}^n)) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),H_{2n',s}(\mathrm{R}^n))} \leq r(1+k^2)^{n'}\|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),L^2_s(\mathrm{R}^n))}$$

Demostración.

$$\forall l \in L^2(S^{n-1})\colon \|\gamma^*(k)l\|_{2n',s} \leq r\|(I-\Delta)^{n'}\gamma^*(k)l\|_{0,s} = r\|\gamma^*(k)(1-(\imath k)^2\omega^2)^{n'}l\|_{0,s} = \quad \text{(L.4)}$$

$$= r(1+k^2)^{n'}\|\gamma^*(k)l\|_{0,s} \leq r(1+k^2)^{n'}\|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),L^2_s(\mathrm{R}^n))}\|l\|_{L^2(S^{n-1})}$$

Por lo tanto:

$$\gamma^*(k) \in \mathrm{B}(L^2(S^{n-1}), H_{2n',s}(\mathrm{R}^n)) \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),H_{2n',s}(\mathrm{R}^n))} \leq r(1+k^2)^{n'}\|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),L^2_s(\mathrm{R}^n))}$$

Q.E.D.

Lema 6.

$$\forall (n,k)\in \mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times \mathbf{R}^+ : \gamma^*(k)\in \bigcap_{(s,\alpha)\in(-\infty,-1/2)\times\mathbf{R}} \mathbf{B}(L^2(S^{n-1}),H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n))$$

Demostración.
$\forall (s,\alpha)\in(-\infty,-1/2)\times\mathbf{R}:\forall n'\in\mathbf{N}\setminus(-\infty,\alpha/2):\exists r\in\mathbf{R}^+:\forall l\in L^2(S^{n-1}):$

$$\|\gamma^*(k)l\|_{\alpha,s}\le\|\gamma^*(k)l\|_{2n',s}\le r\|\gamma^*(k)\|_{\mathbf{B}(L^2(S^{n-1}),H_{2n',s}(\mathbf{R}^n))}\|l\|_{L^2(S^{n-1})}\quad \text{(L.5)}$$

Por lo tanto:

$$\gamma^*(k)\in\mathbf{B}(L^2(S^{n-1}),H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$\gamma^*(k)\in\bigcap_{(s,\alpha)\in(-\infty,-1/2)\times\mathbf{R}}\mathbf{B}(L^2(S^{n-1}),H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n))$$

Q.E.D.

Lema 7. $\forall(n,\lambda)\in\mathbf{N}\setminus\{1\}\times\mathbf{R}^+: R_0^+(\lambda)-R_0^-(\lambda)=\imath 2^{-n}\pi^{1-n}\lambda^{(n-2)/2}\gamma^*(\lambda^{1/2})\gamma(\lambda^{1/2})$

Demostración.
$\forall n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}:\forall c\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n):\forall c'\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n):\forall a\in\mathbf{R}^+:\forall b\in(a,\infty):$

$$(E(H_0)((a,b])c,c')=(F^*\psi(\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)})Fc,c')=\ \text{(L.E.2)}$$

$$=(\psi(\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)})Fc,Fc')=\int\chi_{B_{b^{1/2}}(0)\setminus B_{a^{1/2}}(0)}Fc\overline{Fc'}=$$

$$=\int_{a^{1/2}}^{b^{1/2}}\int_{S^{n-1}}(Fc)(k\omega)\overline{Fc'}(k\omega)k^{n-1}d\omega dk=$$

$$=\int_{a^{1/2}}^{b^{1/2}}\int_{S^{n-1}}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}e^{-\imath k\omega\cdot x}c(x)dx\ (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}e^{\imath k\omega\cdot y}\overline{c'}(y)dy\ k^{n-1}d\omega dk=$$

$$=\int_{a^{1/2}}^{b^{1/2}}\int_{S^{n-1}}(2\pi)^{-n/2}(\gamma(k)c)(\omega)(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}e^{\imath k\omega\cdot y}\overline{c'}(y)dy\ k^{n-1}d\omega dk=\ \text{(Por (3.38).)}$$

$$= \int_{a^{1/2}}^{b^{1/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{S^{n-1}} (2\pi)^{-n/2} (\gamma(k)c)(\omega) (2\pi)^{-n/2} e^{\imath k\omega \cdot y} \overline{c'}(y) d\omega dy \; k^{n-1} dk =$$

(Teorema de Fubini.)

$$= \int_{a^{1/2}}^{b^{1/2}} \int_{\mathbf{R}^n} (2\pi)^{-n} (\gamma^*(k)\gamma(k)c)(y) \overline{c'}(y) dy \; k^{n-1} dk = \text{ (L.1)}$$

$$= \int_a^b ((2\pi)^{-n} \gamma^*(\lambda^{1/2})\gamma(\lambda^{1/2})c, c') \lambda^{(n-1)/2} (2\lambda^{1/2})^{-1} d\lambda$$

Por lo tanto:

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^+ : (-\imath(2\pi)^{-1}(R_0^+(\lambda) - R_0^-(\lambda))c, c') = \frac{d}{d\lambda}(E(H_0)_\lambda c, c') =$$

$$= (2^{-(1+n)} \pi^{-n} \lambda^{(n-2)/2} \gamma^*(\lambda^{1/2})\gamma(\lambda^{1/2})c, c') \quad \text{(Teorema de Radon-Nikodym.)}$$

Por lo tanto:

$$(R_0^+(\lambda) - R_0^-(\lambda))c = \imath 2^{-n} \pi^{1-n} \lambda^{(n-2)/2} \gamma^*(\lambda^{1/2})\gamma(\lambda^{1/2})c$$

Por lo tanto:

$$R_0^+(\lambda) - R_0^-(\lambda) = \imath 2^{-n} \pi^{1-n} \lambda^{(n-2)/2} \gamma^*(\lambda^{1/2})\gamma(\lambda^{1/2})$$

Q.E.D.

Lema 8. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} : \forall V \in K_2 : \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2}$:

$$R^+(k^2) - R^-(k^2) = \imath 2^{-n} \pi^{1-n} k^{n-2} (I - R^-(k^2)V) \gamma^*(k)\gamma(k)(I - VR^+(k^2))$$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} : \forall V \in K_2 : \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2} : \forall \epsilon \in \mathbf{R}^+$:

$$R(k^2 + \imath\epsilon) - R(k^2 - \imath\epsilon) = 2\imath\epsilon R(k^2 - \imath\epsilon) R(k^2 + \imath\epsilon) =$$

$$= 2\imath\epsilon(I - R(k^2 - \imath\epsilon)V) R_0(k^2 - \imath\epsilon) R_0(k^2 + \imath\epsilon)(I - VR(k^2 + \imath\epsilon)) = \text{ (L.E.17)}$$

$$= (I - R(k^2 - \imath\epsilon)V)(R_0(k^2 + \imath\epsilon) - R_0(k^2 - \imath\epsilon))(I - VR(k^2 + \imath\epsilon))$$

Por lo tanto:

$$R^+(k^2) - R^-(k^2) = \lim_{\epsilon \downarrow 0}(R(k^2 + \imath\epsilon) - R(k^2 - \imath\epsilon)) =$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0}(I - R(k^2 - \imath\epsilon)V)(R_0(k^2 + \imath\epsilon) - R_0(k^2 - \imath\epsilon))(I - VR(k^2 + \imath\epsilon)) =$$

$$= (I - R^-(k^2)V)(R_0^+(k^2) - R_0^-(k^2))(I - VR^+(k^2)) = \quad \text{(L.A.13)}$$

$$= (I - R^-(k^2)V)\imath 2^{-n}\pi^{1-n}k^{n-2}\gamma^*(k)\gamma(k)(I - VR^+(k^2)) \quad \text{(L.7)}$$

Q.E.D.

Ahora es el momento de verificar algunas propiedades de la matriz S. Iniciaremos con una relación entre el operador de reversibilidad temporal T y la adjunta de la matriz S (lema 11).

Lema 9. $V = 0 \Rightarrow S = I$

Demostración.

$\forall(\pm, n) \in \{-,+\} \times \mathrm{N} \setminus \{1\}$:

$$V = 0 \Longrightarrow \forall l \in L^2(\mathrm{R}^n): W_\pm l = \lim_{t\to\pm\infty} e^{\imath tH}e^{-\imath tH_0}l = \lim_{t\to\pm\infty} e^{\imath tH_0}e^{-\imath tH_0}l = l$$

Por lo tanto:

$$W_\pm = I \Rightarrow S = W_+^* W_- = I$$

Q.E.D.

Lema 10. $\forall(\pm, V) \in \{-,+\} \times K_2: W_\pm = TW_\mp T$

Demostración.

$$\forall(\pm, n) \in \{-,+\} \times \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2: \forall l \in L^2(\mathbf{R}^n):$$

$$TW_{\mp}Tl = T \lim_{t \to \mp\infty} e^{itH} e^{-itH_0} Tl = \lim_{t \to \mp\infty} T^2 e^{-itH} e^{itH_0} l = \quad \text{(L.C.10 y L.E.18)}$$

$$= W_{\pm} l$$

Por lo tanto:

$$W_{\pm} = TW_{\mp}T$$

Q.E.D

Lema 11. $\forall V \in K_2: TST = S^*$

Demostración.

$$\forall V \in K_2: W_-^* = TW_+^*T \text{ (L.10 y L.C.5, d.e.e.c. } E = \mathbf{R}^n)$$

Por lo tanto:

$$TST = TW_+^* W_- T = W_-^* W_+ T^2 = \quad \text{(L.10)}$$

$$(W_+^* W_-)^* = S^*$$

Q.E.D

Una vez definida la matriz $S(k)$ sobre $L^2(S^{n-1})$, en el lema 12 probamos la relación de reciprocidad para el caso en que la matriz sea un operador con kernel integral; en los lemas 17 y 19 generalizamos un par de lemas de representación de la matriz para el caso $k < 0$.

Lema 12. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ y $V \in K_2$, y suponer que existe una función $f: \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2} \times S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathbf{C}$ tal que:

$$\forall(k, l) \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2} \times L^2(S^{n-1}): S(k)l = \int_{S^{n-1}} S(k, \cdot, \omega) l(\omega) d\omega \qquad (1)$$

Entonces:

$$\forall (k,l) \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2} \times L^2(S^{n-1}) \colon P_\omega T S^*(k) T P_\omega l = \int_{S^{n-1}} S(k,-\omega,-\cdot) l(\omega) d\omega$$

Demostración.
$\forall (k,l) \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2} \times L^2(S^{n-1}) \colon \forall \omega \in S^{n-1}$:

$$(P_\omega T S^*(k) T P_\omega l)(\omega) = \overline{(S^*(k) T P_\omega l)(-\omega)} =$$

$$= \overline{\int_{S^{n-1}} \overline{S(k,\omega',-\omega)} (T P_\omega l)(\omega') d\omega'} = \text{ (Por (1).)}$$

$$\int_{S^{n-1}} S(k,\omega',-\omega) \overline{\overline{l(-\omega')}} d\omega' = \int_{S^{n-1}} S(k,-\omega',-\omega) l(\omega') d\omega'$$

Por lo tanto:

$$P_\omega T S^*(k) T P_\omega l = \int_{S^{n-1}} S(k,-\omega',-\cdot) l(\omega') d\omega'$$

Q.E.D.

Lema 13. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $(\omega, V) \in S^{n-1} \times K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Entonces:
$V \in L^2_s(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow$
$\forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2}$:

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \colon \phi(x,k,\cdot) \in L^2(S^{n-1}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S(k)\phi_+(\cdot,k,\omega) = \phi_-(\cdot,k,\omega) \iff (I - S(k))\phi_+(\cdot,k,\omega) = (R^+(k^2) - R^-(k^2)) e^{ik\omega \cdot \cdot} V$$

Demostración.

$$S(k)\phi_+(\cdot,k,\omega) = \phi_-(\cdot,k,\omega) \iff$$

$$\iff (I - S(k))\phi_+(\cdot,k,\omega) = \phi_+(\cdot,k,\omega) - \phi_-(\cdot,k,\omega) =$$

$$= e^{\imath k\omega\cdot\cdot} - R^-(k^2)e^{\imath k\omega\cdot\cdot}V - (e^{\imath k\omega\cdot\cdot} - R^+(k^2)e^{\imath k\omega\cdot\cdot}V) = (R^+(k^2) - R^-(k^2))e^{\imath k\omega\cdot\cdot}V$$

Q.E.D.

Lema 14. Considerar al conjunto:

$$\{\pm, \mp\} = \{-, +\}$$

Entonces:

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} : \forall(\omega, V) \in S^{n-1} \times K_2 : T\phi_\pm(\cdot,\cdot,\omega) = \phi_\mp(\cdot,\cdot,-\omega)$$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} : \forall(\omega, V) \in S^{n-1} \times K_2 : \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2}$:

$$T\phi_\pm(\cdot,k,\omega) = T(e^{\imath k\omega\cdot\cdot} - R^\mp(k^2)e^{\imath k\omega\cdot\cdot}V) = e^{-\imath k\omega\cdot\cdot} - R^\pm(k^2)e^{-\imath k\omega\cdot\cdot}V = \quad \text{(L.E.30)}$$

$$= \phi_\mp(\cdot,k,-\omega)$$

Por lo tanto:

$$T\phi_\pm(\cdot,\cdot,\omega) = \phi_\mp(\cdot,\cdot,-\omega)$$

Q.E.D.

Lema 15. $\forall V \in K_2 : \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2} : S(k) = I + T(k) \Rightarrow T(-k) = TT(k)T$

Demostración.

$$S(k) = I + T(k) \Rightarrow T(-k) = S(-k) - I = TS(k)T - I = T(S(k) - I)T = TT(k)T$$

Q.E.D.

Lema 16. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2$:

$$\forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2}: S(k) = I + T(k) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall (k,\omega,l) \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}) \times S^{n-1} \times L^2(S^{n-1}):$$

$$(T(k)l)(\omega) = \int_{S^{n-1}} -\imath 2^{-n}(\pi \mathrm{sgn}\ k)^{1-n} k^{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k,\omega')dx\ l(\omega')d\omega'$$

Demostración.

$$\forall(\omega,l) \in S^{n-1} \times L^2(S^{n-1}): \forall k \in \mathbf{R}^- \setminus -\sigma_+(H)^{1/2}: (T(k)l)(\omega) = (TT(-k)Tl)(\omega) = \quad \text{(L.15)}$$

$$= T\int_{S^{n-1}} -\imath 2^{-n}\pi^{1-n}(-k)^{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi_-(x,-k,\omega')dx(Tl)(\omega')d\omega' =$$

(Por (3.36) y (3.37).)

$$= \int_{S^{n-1}} \imath 2^{-n}\pi^{1-n}(-k)^{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)(T\phi_-)(x,-k,\omega')dx\ l(\omega')d\omega' =$$

$$= \int_{S^{n-1}} \imath 2^{-n}\pi^{1-n}(-k)^{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi_+(x,-k,-\omega')dx\ l(\omega')d\omega' = \quad \text{(L.14)}$$

$$= \int_{S^{n-1}} -\imath 2^{-n}(\pi \mathrm{sgn}\ k)^{n-1} k^{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k,\omega')dx\ l(\omega')d\omega'$$

Por lo tanto:

$\forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2})$:

$$(T(k)l)(\omega) = \int_{S^{n-1}} -\imath 2^{-n}(\pi \mathrm{sgn}\ k)^{1-n} k^{n-2} \int e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k,\omega')dx\ l(\omega')d\omega'$$

Q.E.D.

Lema 17.

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2: \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}): S^T(k) = P_\omega S(k) P_\omega$$

Demostración.

$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2: \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus -\sigma_+(H)^{1/2}$:

$$S^T(k) = TS^*(k)T = T(TS(-k)T)^*T = TTS^*(-k)TT = \quad (\text{L.C.5, d.e.e.c. } E = S^{n-1})$$

$$= TS^T(-k)T = TP_\omega S(-k)P_\omega T = \quad (\text{L.3.5})$$

$$= P_\omega TS(-k)TP_\omega = \quad (\text{L.C.8})$$

$$= P_\omega S(k) P_\omega$$

Por lo tanto:

$$\forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}): S^T(k) = P_\omega S(k) P_\omega \quad (\text{L.3.5.})$$

Q.E.D.

Lema 18.

$$\forall V \in K_2: \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}): (S^T(k)P_\omega)^* = S^T(-k)P_\omega$$

Demostración.

$$(S^T(k)P_\omega)^* = P_\omega^*(TS^*(k)T)^* = P_\omega TS(k)T =$$
$$(\text{L.C.7, d.e.e.c. "}S\text{"} = S^{n-1}, \text{ y L.C.5, d.e.e.c. } E = S^{n-1})$$

$$= P_\omega S(-k)P_\omega P_\omega = S^T(-k)P_\omega \quad (\text{L.17})$$

Q.E.D.

Lema 19. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall (x,V) \in \mathbf{R}^n \times K_2: \forall k \in \mathbf{R}^- \setminus -\sigma_+(H)^{1/2}$:

$$S_x(k) = e^{\imath k\omega\cdot x} S(k) e^{-\imath k\omega\cdot x}$$

Demostración.

$$S_x(k) = TS_x(-k)T = Te^{-\imath k\omega\cdot x}S(-k)e^{\imath k\omega\cdot x}T = e^{\imath k\omega\cdot x}TS(-k)Te^{-\imath k\omega\cdot x} = e^{\imath k\omega\cdot x}S(k)e^{-\imath k\omega\cdot x}$$

Q.E.D.

Pasaremos a estudiar ahora algunas propiedades topológicas de la matriz $S(k)$. En el lema 23 probaremos la continuidad de esta matriz como función de k con respecto de la topología $\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))$, mientras que en el lema 28 extenderemos a esta matriz como operador en $\mathrm{B}(\mathbf{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$, para ello nos apoyaremos en el apéndice de integración vectorial. Los lemas 30, 31 y 32 estarán avocados a un resultado ambicioso el cual establece la continuidad de la matriz con respecto del potencial V variando éste último de acuerdo a la topología de B_α introducida en el apéndice anterior.

Lema 20.

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2: \forall k \in \mathbf{R} \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}): \|S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 1$$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2: \forall k \in \mathbf{R}^- \setminus -\sigma_+(H)^{1/2}$:

$$\|S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|TS(-k)T\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|S(-k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$
$$(\text{L.A.21, d.e.e.c. } (E_i, O_i) = (L^2(S^{n-1}), T))$$

$$= 1$$

Por lo tanto:

$$\forall k \in \mathbf{R} \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}): \|S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 1$$

Q.E.D.

Lema 21. $\forall (n,s,k,\alpha) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times (-\infty, -1/2) \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$:

$$\lim_{k' \to k} \|\gamma^*(k) - \gamma^*(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1})),H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$\forall n' \in \mathbf{N} \setminus (-\infty, \alpha/2) \colon \exists r \in \mathrm{R}^+ \colon \forall k' \in \mathrm{R}^+ \colon \forall l \in L^2(S^{n-1})$:

$$\|(\gamma^*(k) - \gamma^*(k'))l\|_{\alpha,s} \leq \|(\gamma^*(k) - \gamma^*(k'))l\|_{2n',s} \leq r\|(I - \Delta)^{n'}(\gamma^*(k) - \gamma^*(k'))l\|_{0,s} =$$

$$= r\|\gamma^*(k)[1 - (\imath k\omega)^2]^{n'} l - \gamma^*(k')[1 - (\imath k'\omega)^2]^{n'} l\|_{0,s} = \quad (\text{L.4})$$

$$= r\|[(1 + k^2)^{n'}\gamma^*(k) - (1 + (k')^2)^{n'}\gamma^*(k')]l\|_{0,s} \leq$$

$$\leq r\|(1 + k^2)^{n'}\gamma^*(k) - (1 + (k')^2)^{n'}\gamma^*(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1})),L^2_s(\mathrm{R}^n))}\|l\|_{L^2(S^{n-1})}$$

Por lo tanto:

$$\|\gamma^*(k) - \gamma^*(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq r\|(1 + k^2)^{n'}\gamma^*(k) - (1 + (k')^2)^{n'}\gamma^*(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),L^2_s(\mathrm{R}^n))} =$$

$$= r\|(1 + k^2)^{n'}\gamma(k) - (1 + (k')^2)^{n'}\gamma(k')\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathrm{R}^n),L^2(S^{n-1}))}$$

(L.C.22 y Rudin 1979, teorema 4.10)

Por lo tanto:

$$\lim_{k' \to k} \|\gamma^*(k) - \gamma^*(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{k' \to k} r\|(1 + k^2)^{n'}\gamma(k) - (1 + (k')^2)^{n'}\gamma(k')\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathrm{R}^n),L^2(S^{n-1}))} = 0$$

(L.A.13, d.e.e.c. $(E_i, B_1, B_2, B_3, f) = (\mathrm{R}^+, L^2_{-s}(\mathrm{R}^n), L^2(S^{n-1}), L^2(S^{n-1}), \gamma(\cdot)))$

Q.E.D.

Lema 22.

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2: \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus \sigma_+(H)^{1/2}: \lim_{k' \to k} \|S(k) - S(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{k' \to k} \|S(k) - S(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= \lim_{k' \to k} \|(I - \imath 2^{-n} \pi^{1-n} k^{n-2} \gamma(k)(I - VR^+(k^2))V\gamma^*(k)) -$$

$$-(I - \imath 2^{-n} \pi^{1-n} (k')^{n-2} \gamma(k')(I - VR^+((k')^2))V\gamma^*(k'))\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \quad \text{(Por (3.40).)}$$

$$= 0 \quad \text{(L.21 y L.A.13)}$$

Q.E.D.

Lema 29. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2: \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2})$:

$$\lim_{k' \to k} \|S(k) - S(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0$$

Demostración.
$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in K_2: \forall k \in \mathbf{R}^- \setminus -\sigma_+(H)^{1/2}$:

$$\lim_{k' \to k} \|S(k) - S(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \lim_{k' \to k} \|TS(-k)T - TS(-k')T\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= \lim_{k' \to k} \|S(-k) - S(-k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \quad \text{(L.A.21, d.e.e.c. } (E_i, O_i) = (L^2(S^{n-1}), T))$$

$$= 0 \quad \text{(L.22)}$$

Por lo tanto:

$$\forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}): \lim_{k' \to k} \|S(k) - S(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0$$

Q.E.D.

Lema 24.

$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times K_2: \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2})$:

$$\lim_{k' \to k} \|(I - S_x^T(k)) - (I - S_x^T(k'))\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{k' \to k} \|(I - S_x^T(k)) - (I - S_x^T(k'))\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= \lim_{k' \to k} \|P_\omega S_x(k) P_\omega - P_\omega S_x(k') P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \text{ (L.17)}$$

$$= \lim_{k' \to k} \|S_x(k) - S_x(k')\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \text{ (L.A.21, d.e.e.c. } (E_i, O_i) = (L^2(S^{n-1}), P_\omega))$$

$$= 0 \quad \text{(L.E.28 y L.23)}$$

Q.E.D.

Lema 25.

$\forall (n, \alpha) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \overline{\mathbf{R}^+}: \forall s \in (-(2 + \chi_{[3,\infty)}(n))/2, -1/2): \exists r \in \mathbf{R}^+: \forall k \in \mathbf{R}^+$:

$$\|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}), H_{\alpha,s}(\mathbf{R}^n))} \leq r k^{(1-n)/2}(1 + k^2)^{\alpha/2} \min\{1, k^{-(1+2s)/2}\}$$

Demostración.

$\exists r \in \mathbf{R}^+: \forall n' \in \mathbf{N} \setminus [0, \alpha/2): \exists r' \in \mathbf{R}^+: \forall k \in \mathbf{R}^+: \forall l \in L^2(S^{n-1})$:

$$\|\gamma^*(k) l\|_{\alpha,s} \leq (\|\gamma^*(k) l\|_{0,s}^{2n'-\alpha} \|\gamma^*(k) l\|_{2n',s}^{\alpha})^{(2n')^{-1}} \leq \text{ (L.C.28)}$$

$$\leq (\|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}), L_s^2(\mathbf{R}^n))}^{2n'-\alpha} \|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}), H_{2n',s}(\mathbf{R}^n))}^{\alpha})^{(2n')^{-1}} \|l\|_{L^2(S^{n-1})} \leq$$

$$\leq \{\|\gamma^*(k)\|^{2n'-\alpha}_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),L^2_s(\mathrm{R}^n))}[r'(1+k^2)^{n'}\|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),L^2_s(\mathrm{R}^n))}]^{\alpha}\}^{(2n')^{-1}}\|l\|_{L^2(S^{n-1})} = \qquad \text{(L.5)}$$

$$= (r')^{\alpha(2n')^{-1}}(1+k^2)^{\alpha/2}\|\gamma(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathrm{R}^n),L^2(S^{n-1}))}\|l\|_{L^2(S^{n-1})} \leq \qquad \text{(L.C.22 y Rudin 1979,teorema 4.10)}$$

$$\leq (r')^{\alpha(2n')^{-1}}(1+k^2)^{\alpha/2} r k^{(1-n)/2}\min\{1,k^{-(1+2s)/2}\}\|l\|_{L^2(S^{n-1})} \quad \text{(Por (3.39).)}$$

Por lo tanto:

$$\|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}),H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n))} \leq r(r')^{\alpha(2n')^{-1}}k^{(1-n)/2}(1+k^2)^{\alpha/2}\min\{1,k^{-(1+2s)/2}\}$$

Q.E.D.

Lema 26. Mismas hipótesis que en lema 3.4. Entonces:
$\forall(\epsilon',\rho) \in (0,\min\{1,\epsilon\}) \times (\sup\sigma_+(H)^{1/2},\infty): \exists r \in \mathrm{R}^+: \forall k \in \mathrm{R}^+ \setminus B_\rho(0)$:

$$\|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq r|k|^{-1}(1+k^2)^{\alpha/2}\min\{1,|k|^{\epsilon'}\}$$

Demostración.
$\forall(\epsilon',\rho) \in (0,\min\{1,\epsilon\}) \times (\sup\sigma_+(H)^{1/2},\infty): \exists r \in \mathrm{R}^+: \forall k \in (-\infty,-\rho]$:

$$\|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|I - TS(-k)T\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|I - S(-k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq \qquad \text{(L.A.21, d.e.e.c. } (E_i,O_i) = (L^2(S^{n-1}),T))$$

$$\leq r(-k)^{-1}(1+k^2)^{\alpha/2}\min\{1,(-k)^{\epsilon'}\} \quad \text{(L.3.4)}$$

Por lo tanto:

$$\forall k \in \mathrm{R} \setminus B_\rho(0): \|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq r|k|^{-1}(1+k^2)^{\alpha/2}\min\{1,|k|^{\epsilon'}\} \text{ (L.3.4)}$$

Q.E.D.

Lema 27.
$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times K_2: \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2})$:

$$\|I - S_x^T(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}$$

Demostración.

$$\|I - S_x^T(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|I - P_\omega e^{ik\omega\cdot x} S(k) e^{-ik\omega\cdot x} P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \text{ (L.17 y L.4.2)}$$

$$= \|P_\omega e^{ik\omega\cdot x}(I - S(k))e^{-ik\omega\cdot x} P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}$$
$$\text{(L.A.21, d.e.e.c. } E_i = L^2(S^{n-1}))$$

Q.E.D.

Lema 28.

$$\forall (n, \alpha) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times [0, 1/2): \forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times B_\alpha: I - S_x^T(\cdot) \in L^2(\mathbf{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$$

Demostración.
$\forall \rho \in (\sup \sigma_+(H)^{1/2}, \infty): \exists r \in \mathbf{R}^+: \forall k \in \mathbf{R}^+ \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2})$:

$$\|I - S_x^T(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \text{ (L.27)}$$

$$= \chi_{B_\rho(0)}(k)\|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} + \chi_{B_\rho(0)^c}(k)\|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq$$

$$\leq \chi_{B_\rho(0)}(k)2 + \chi_{B_\rho(0)^c}(k) r |k|^{\alpha - 1} \in \text{ (L.20 y L.26)}$$

$$\in L^2(\mathbf{R})$$

Por lo tanto:

$$I - S_x^T(\cdot) \in L^2(\mathbf{R}, \mathrm{B}(L^2(S^{n-1})))$$
$$\text{(L.24 y L.B.3, d.e.e.c. } (E, F, S) = (L^2(S^{n-1}), I - S_x^T(\cdot), -\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}))$$

Q.E.D.

Lema 29. Considerar a los elementos $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \times [0,1)$ y $(x,c,V) \in \mathbb{R}^n \times C_B(\mathbb{R}) \times B_\alpha$, éste último tal que:

$$(c(B_1(0)), c(B_2(0)^c)) = (\{0\},\{1\})$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{R}} \|(T((n')^{-1}I)c)(k)(I - S_x^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0 \quad \text{(D.D.2)}$$

Demostración.
$\forall n' \in \mathbb{N}: \forall \rho \in (\sup \sigma_+(H)^{1/2}, \infty): \exists r \in \mathbb{R}^+: \forall k \in \mathbb{R}^+ \setminus B_\rho(0)$:

$$\|(T((n')^{-1}I)c)(k)(I - S_x^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= \chi_{B_{n'}(0)^c}(k)|T((n')^{-1}I)c|(k)\|I - S_x^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq$$

$$\leq \chi_{B_{n'}(0)^c}(k)\|T((n')^{-1}I)c\|_\infty \|I - S_x^T(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}\|P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= \chi_{B_{n'}(0)^c}(k)\|c\|_\infty \|I - S(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq \text{ (L.D.13, L.27 y L.C.7)}$$

$$\leq \chi_{B_{n'}(0)^c}(k)\|c\|_\infty r|k|^{-1}(1+k^2)^{\alpha/2} \leq \text{ (L.26)}$$

$$\leq \|c\|_\infty r(n')^{-1}(1-(n')^2)^{\alpha/2}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n'\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{R}} \|(T((n')^{-1}I)c)(k)(I - S_x^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq$$

$$\leq \lim_{n'\to\infty} \|c\|_\infty r(n')^{-1}(1+(n')^2)^{\alpha/2} = 0$$

Q.E.D.

Lema 80. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall V \in \bigcup_{\alpha \in [0,1)} B_\alpha: \forall \rho \in (\sup \sigma_+(H)^{1/2}, \infty)$:

$$\lim_{V' \to V} \sup_{k \in [\rho, \infty)} \|S_V(k) - S_{V'}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0$$

Demostración.

Considerar a los elementos $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times [0,1)$ y $V \in B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Entonces:
$\forall (s, \rho) \in (1/2, (1 + \min\{1, \epsilon\})/2) \times (\sup \sigma_+(H)^{1/2}, \infty): \exists (r_1, r_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+: \forall V' \in B_\alpha$:
$\forall k \in [\rho, \infty) \setminus \sigma_+(H')^{1/2}$:

$$\|S_V(k) - S_{V'}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= \|(I - \imath 2^{-n} \pi^{1-n} k^{n-2} \gamma(k) Q_+(k^2) V \gamma^*(k)) -$$

$$-(I - \imath 2^{-n} \pi^{1-n} k^{n-2} \gamma(k) Q'_+(k^2) V' \gamma^*(k))\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq \text{ (Por (3.40).)}$$

$$\leq 2^{-n} \pi^{1-n} k^{n-2} \|\gamma(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), L^2(S^{n-1}))} \|Q_+(k^2) V - Q'_+(k^2) V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n))} \cdot$$

$$\cdot \|\gamma^*(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1})), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq 2^{-n} \pi^{1-n} k^{n-2} r_1 k^{(1-n)/2} \min\{1, k^{(2s-1)/2}\} \|Q_+(k^2) V - Q'_+(k^2) V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n))} \cdot$$

$$\cdot r_2 k^{(1-n)/2} (1 + k^2)^{\alpha/2} \min\{1, k^{(2s-1)/2}\} \leq \text{ (Por (3.39) y L.25)}$$

$$\leq 2^{(\alpha-2n)/2} \pi^{1-n} r_1 r_2 (\rho^{2(s-1)} \chi_{[0,1]}(k) +$$

$$+ \chi_{(1,\infty)}(k)) \|Q_+(k^2) V - Q'_+(k^2) V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n))}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{V'\to V}\sup_{k\in[\rho,\infty)}\|S_V(k)-S_{V'}(k)\|_{B(L^2(S^{n-1}))}\leq$$

$$\leq\lim_{V'\to V}2^{(\alpha-2n)/2}\pi^{1-n}r_1r_2\max\{\rho^{2(s-1)},1\}\cdot$$

$$\cdot\sup_{k\in[\rho,\infty)}\|Q_+(k^2)V-Q'_+(k^2)V'\|_{B(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n),L^2_s(\mathbf{R}^n))}=$$

$$=0\quad(\text{L.E.44, d.e.e.c. }(\pm,r)=(+,\rho^2))$$

Q.E.D.

Lema 91. Considerar a los elementos $(n,\alpha)\in\mathbf{N}\setminus\{1,2\}\times[0,1)$ y $V\in B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon\in(1,\infty)$ correspondiente. Suponer que cero no es resonancia correspondiente a H. Entonces:

$$\overline{\mathbf{R}^+}\cap\sigma_p(H)=\phi\Rightarrow\lim_{V'\to V}\sup_{k\in\overline{\mathbf{R}^+}}\|S_V(k)-S_{V'}(k)\|_{B(L^2(S^{n-1}))}=0$$

Demostración.

$\forall s\in(1/2,(1+\min\{1,\epsilon\})/2):\exists(r_1,r_2)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+:\forall V'\in B_\alpha:\forall k\in\mathbf{R}^+\setminus\sigma_+(H')^{1/2}:$

$$\|S_V(k)-S_{V'}(k)\|_{B(L^2(S^{n-1}))}=$$

$$=\|(I-\imath 2^{-n}\pi^{1-n}k^{n-2}\gamma(k)Q_+(k^2)V\gamma^*(k))-$$

$$-(I-\imath 2^{-n}\pi^{1-n}k^{n-2}\gamma(k)Q'_+(k^2)V'\gamma^*(k))\|_{B(L^2(S^{n-1}))}\leq\ (\text{Por }(3.40).)$$

$$\leq 2^{-n}\pi^{1-n}k^{n-2}\|\gamma(k)\|_{B(L^2_s(\mathbf{R}^n),L^2(S^{n-1}))}\|Q_+(k^2)V-Q'_+(k^2)V'\|_{B(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n),L^2_s(\mathbf{R}^n))}\cdot$$

$$\cdot\|\gamma^*(k)\|_{B(L^2(S^{n-1}),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}\leq$$

$$\leq 2^{-n}\pi^{1-n}k^{n-2}r_1 k^{(1-n)/2}\min\{1,k^{(2s-1)/2}\}\|Q_+(k^2)V - Q'_+(k^2)V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n),L^2_s(\mathbb{R}^n))}\cdot$$

$$\cdot r_2 k^{(1-n)/2}(1+k^2)^{\alpha/2}\min\{1,k^{(2s-1)/2}\} \leq \text{ (Por (3.39) y L.25)}$$

$$\leq 2^{(\alpha-2n)/2}\pi^{1-n}r_1r_2\|Q_+(k^2)V - Q'_+(k^2)V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n),L^2_s(\mathbb{R}^n))}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{V'\to V}\sup_{k\in\overline{\mathbb{R}^+}}\|S_V(k) - S_{V'}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq$$

$$\leq \lim_{V'\to V}\sup_{k\in\overline{\mathbb{R}^+}} 2^{(\alpha-2n)/2}\pi^{1-n}r_1r_2\|Q_+(k^2)V - Q'_+(k^2)V'\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbb{R}^n),L^2_s(\mathbb{R}^n))} = 0$$

(L.E.44, d.e.c.c. $(\pm,r) = (+,0)$)

Q.E.D.

Lema 32. $\forall(n,r)\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\times\overline{\mathbb{R}^+}:\forall V\in K_2$:

$$\lim_{V'\to V}\sup_{k\in[r,\infty)}\|S_V(k) - S_{V'}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{V'\to V}\sup_{k\in\mathbb{R}\setminus(-r,r)}\|S_V(k) - S_{V'}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{V'\to V}\sup_{k\in(-\infty,-r]}\|S_V(k) - S_{V'}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= \lim_{V'\to V}\sup_{k\in(-\infty,-r]}\|TS_V(-k)T - TS_{V'}(-k)T\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= \lim_{V'\to V}\sup_{k\in(-\infty,-r]}\|S_V(-k) - S_{V'}(-k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

(L.A.21, d.e.c.c. $(E_i,O_i) = (L^2(S^{n-1}),T)$)

$$= 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{V'\to V}\sup_{k\in\mathbb{R}\setminus(-r,r)}\|S_V(k)-S_{V'}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}=0$$

Q.E.D.

Lema 33. Considerar a los elementos $n\in\mathbf{N}\setminus\{1,2\}$, $(x,c)\in\mathbf{R}^n\times C_B(\mathrm{R})$ y $V\in\bigcup_{\alpha\in[0,1)}B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon\in(1,\infty)$ correspondiente. Suponer que cero no es resonancia correspondiente a H. Entonces:

$$\overline{\mathrm{R}^+}\cap\sigma_p(H)=\phi\Rightarrow\lim_{r\to\infty}\sup_{k\in\mathrm{R}}\|c(k)(S_x^T(k)-S_{x,r}^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}=0$$

Demostración.

$$\forall r\in\mathbf{R}^+:\forall k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}:\|c(k)(S_x^T(k)-S_{x,r}^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}=$$

$$=\|c(k)(P_\omega S_x(k)P_\omega-P_\omega S_{x,r}(k)P_\omega)P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}=\ (\mathrm{L}.17)$$

$$=|c(k)|\|P_\omega(S_x(k)-S_{x,r}(k))\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}\leq$$

$$\leq\|c\|_\infty\|P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}\|S_x(k)-S_{x,r}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{k\in\mathrm{R}}\|c(k)(S_x^T(k)-S_{x,r}^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}\leq$$

$$\leq\lim_{r\to\infty}\sup_{k\in\mathrm{R}}\|c\|_\infty\|P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}\|S_x(k)-S_{x,r}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}=0\quad(\mathrm{L}.31\text{ y }\mathrm{L}.32)$$

Q.E.D.

Apéndice G. El método de Balslev. Parte I

Introduciremos ahora las ideas básicas desarrolladas por Balslev 1988 a partir de las cuales se permite extender el principio del límite absorbente para el operador $H_0^\omega(k)$, el cual ha sido definido en el texto. Comenzaremos por calcular el espectro del operador equivalente reducido $H_0(q)$; citaremos explícitamente el desarrollo de Balslev en este respecto (lema 5 y teorema 7), y daremos algunas estimaciones a la norma de $R_{0_+}(q)$ en los lemas del 8 al 10.

Lema 1. $\forall c \in \mathbf{C}: \{z \in \mathbf{C}: |z| - \mathrm{Re}\ z \leq 2|c|^2\} = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq |c|\}$

Demostración.

$$\forall c \in \mathbf{C}: \forall z^2 \in \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq |c|\}: \exists \theta \in [0, 2\pi): z = |z|e^{i\theta}$$

Por lo tanto:

$$|z^2| - \mathrm{Re}\ z^2 = |z|^2(1 - \cos 2\theta) = |z|^2 2\sin^2\theta = 2|\mathrm{Im}\ z|^2 \leq 2|c|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 \in \{z \in \mathbf{C}: |z| - \mathrm{Re}\ z \leq 2|c|^2\}$$

Por lo tanto:

$$\{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq |c|\} \subset \{z \in \mathbf{C}: |z| - \mathrm{Re}\ z \leq 2|c|^2\} \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall z \in \{z \in \mathbf{C}: |z| - \mathrm{Re}\ z \leq 2|c|^2\}: \exists \theta \in [0, 2\pi): z = |z|e^{i\theta}$$

Por lo tanto:

$$2|c|^2 \geq |z| - \mathrm{Re}\ z = |z|(1 - \cos\theta) = |z| 2\sin^2\theta/2 = 2||z|^{1/2}\sin\theta/2|^2 = 2|\mathrm{Im}\ |z|^{1/2}e^{i\theta/2}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\text{Im } |z|^{1/2}e^{\imath\theta/2}| \leq |c| \Rightarrow z = (|z|^{1/2}e^{\imath\theta/2})^2 \in \{z^2 \in \mathbf{C}: |\text{Im } z| \leq |c|\}$$

Por lo tanto:

$$\{z \in \mathbf{C}: |z| - \text{Re } z \leq 2|c|^2\} \subset \{z^2 \in \mathbf{C}: |\text{Im } z| \leq |c|\}$$

Por lo tanto:

$$\{z \in \mathbf{C}: |z| - \text{Re } z \leq 2|c|^2\} = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\text{Im } z| \leq |c|\}$$

Q.E.D.

Lema 2.

$$\forall (n,r) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{R}: \{|\xi|^2 + 2\imath r \xi_1 - r^2 \in \mathbf{C}: \xi \in \mathbf{R}^n\} = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\text{Im } z| \leq |r|\}$$

Demostración.
$\forall (n,r) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{R}: \forall z \in \{z \in \mathbf{C}: |z| - \text{Re } z \leq 2r^2\}$:

$$(2r)^2(r^2 + \text{Re } z) - (\text{Im } z)^2 \geq 2(|z| - \text{Re } z)[(|z| - \text{Re } z)/2 + \text{Re } z] - (\text{Im } z)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists(\xi_1, (\xi_2, \ldots, \xi_n)) \in$$

$$\in \{r' \in \mathbf{R}: 2rr' = \text{Im } z\} \times \{r' \in \mathbf{R}^{n-1}: (2r|r'|)^2 = (2r)^2(r^2 + \text{Re } z) - (\text{Im } z)^2\}$$

Por lo tanto:

$$(2r)^2(|\xi|^2 + 2\imath r\xi_1 - r^2) = (\text{Im } z)^2 + (2r)^2(r^2 + \text{Re } z) - (\text{Im } z)^2 + (2r)^2 \text{Im } z - (2r)^2 r^2 = (2r)^2 z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \in \{|\xi|^2 + 2\imath r\xi_1 - r^2 \in \mathbf{C}: \xi \in \mathbf{R}^n\}$$

Por lo tanto:

$$\{z \in \mathbf{C}: |z| - \mathrm{Re}\ z \leq 2|r|^2\} \subset \{|\xi|^2 + 2ir\xi_1 - r^2 \in \mathbf{C}: \xi \in \mathbf{R}^n\} \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall |\xi|^2 + 2ir\xi_1 - r^2 \in \{|\xi|^2 + 2ir\xi_1 - r^2 \in \mathbf{C}: \xi \in \mathbf{R}^n\}:$$

$$||\xi|^2 + 2ir\xi_1 - r^2| - \mathrm{Re}\ (|\xi|^2 + 2ir\xi_1 - r^2) = [(|\xi|^2 - r^2)^2 + (2r\xi_1)^2]^{1/2} - (|\xi|^2 - r^2) \leq$$

$$\leq [(|\xi|^2 - r^2)^2 + (2r|\xi|)^2]^{1/2} - (|\xi|^2 - r^2) = 2r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\xi|^2 + 2ir\xi_1 - r^2 \in \{z \in \mathbf{C}: |z| - \mathrm{Re}\ z \leq 2r^2\}$$

$$\{|\xi|^2 + 2ir\xi_1 - r^2 \in \mathbf{C}: \xi \in \mathbf{R}^n\} \subset \{z \in \mathbf{C}: |z| - \mathrm{Re}\ z \leq 2r^2\}$$

Por lo tanto:

$$\{|\xi|^2 + 2ir\xi_1 - r^2 \in \mathbf{C}: \xi \in \mathbf{R}^n\} = \{z \in \mathbf{C}: |z| - \mathrm{Re}\ z \leq 2r^2\} = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq |r|\} \quad \text{(L.1)}$$

Q.E.D.

Lema 3. $\forall q \in \mathbf{R}: \sigma(H_0(q)) = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq |q|\}$

Demostración.

$$\forall (n,q) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{R}: \sigma(H_0(q)) = \{|\xi|^2 + 2iq\xi_1 - q^2 \in \mathbf{C}: \xi \in \mathbf{R}^n\} =$$

(Schechter 1971, corolario 4.3.3)

$$= \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq |q|\} \quad \text{(L.2)}$$

Q.E.D.

Lema 4. $\forall (n,q) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{R}: \forall (z, c_1, c_2) \in \rho(H_0(q)) \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$((H_0(-q) - \bar{z})c_1, (H_0(q) - z)^{-1}c_2) = ((H_0(-q) - \bar{z})c_1, e^{qx_1}(H_0 - z)^{-1}e^{-qx_1}c_2)$$

Demostración.

$$((H_0(-q)-\bar{z})c_1,(H_0(q)-z)^{-1}c_2)=(c_1,(H_0(q)-z)(H_0(q)-z)^{-1}c_2)=$$
(Schechter 1971, corolario 4.2.2)

$$=(c_1,c_2)=(e^{qx_1}c_1,e^{-qx_1}c_2)=(e^{qx_1}c_1,(H_0-z)(H_0-z)^{-1}e^{-qx_1}c_2)=$$

$$=((H_0-\bar{z})e^{qx_1}c_1,(H_0-z)^{-1}e^{-qx_1}c_1)=\text{ (Schechter 1971, corolario 4.2.2)}$$

$$=(e^{-qx_1}(H_0-\bar{z})e^{qx_1}c_1,e^{qx_1}(H_0-z)^{-1}e^{-qx_1}c_2)=((H_0(-q)-\bar{z})c_1,e^{qx_1}(H_0-z)^{-1}e^{-qx_1}c_2)$$

Q.E.D.

Lema 5 (Balslev 1988, lema 1.2). K denota un subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}^+}\setminus\{0\}$. Tome $g\in L^2_s(\mathbb{R}^n)$, $s>1/2$. Para $k\in\overline{\mathbb{C}^+}\setminus\{0\}$ los siguientes límites débiles existen en $H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$, uniformemente para $k\in K$,

$$R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)g=w-\lim_{\epsilon\downarrow 0}R_0(\mathrm{Im}\ k,k+\imath\epsilon)g$$

Demostración.

Para f y g con soporte compacto

$$(f,R_0(\mathrm{Im}\ k,k+\imath\epsilon)g)=(e^{\mathrm{Im}kx_1}f,R_0(k+\imath\epsilon)e^{-\mathrm{Im}kx_1}g)\xrightarrow[\epsilon\downarrow 0]{}(e^{\mathrm{Im}kx_1}f,R_0(k)e^{-\mathrm{Im}kx_1}g),$$

uniformemente para $k\in K\subset\mathbb{C}^+$. Por Agmon 1975, lema A.1, esto también vale para $K\subset\overline{\mathbb{C}^+}\setminus\{0\}$. Entonces, por el mismo lema, lo mismo vale para $f,g\in L^2_s(\mathbb{R}^n)$.
Por tanto, para $g\in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ existe

$$w-\lim_{\epsilon\downarrow 0}R_0(\mathrm{Im}\ k,k+\imath\epsilon)g\quad\text{en}\quad L^2_{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Por Agmon 1975, lema A.1, $\{R_0(\mathrm{Im}\ k,k+\imath\epsilon)g\}$ está también acotado en $H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$ para $\epsilon>0$, uniformemente para $k\in K$. Por lo tanto, por la compacidad débil de la bola unitaria en $H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$, el límite débil es alcanzado también en $H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$, uniformemente para $k \in K$.

Q.E.D.

Lema 6. $\forall(n,s,k) \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \times (1/2,\infty) \times \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}: \forall l \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$:

$$(H_0(\mathrm{Im}\ k) - k^2)R_{0+}(\mathrm{Im}\ k,k)l = l$$

Demostración.
$\forall(n,s,l) \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \times (1/2,\infty) \times \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}: \forall l \in L^2_s(\mathbb{R}^n): \forall c \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$(H_0(\mathrm{Im}\ k) - k^2)R_{0+}(\mathrm{Im}\ k,k)l,c) = (R_{0+}(\mathrm{Im}\ k,k)l,(H_0(-\mathrm{Im}\ k) - \overline{k^2})c) =$$
(Schechter 1971, corolario 4.2.2)

$$= \lim_{\delta\downarrow 0}(R_0(\mathrm{Im}\ k,k+\imath\delta)l,(H_0(-\mathrm{Im}\ k) - \overline{k^2})c) =$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0}((H_0(\mathrm{Im}\ k) - k^2)R_0(\mathrm{Im}\ k,k+\imath\delta)l,c) = \text{(Schechter 1971, corolario 4.2.2)}$$

$$= (l,c)+\lim_{\delta\downarrow 0}(R_0(\mathrm{Im}\ k,k+\imath\delta)l,\overline{[(k+\imath\delta)^2 - k^2]}c) = (l,c) \quad \text{(L.A.15, d.c.e.c. } E = H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$(H_0(\mathrm{Im}\ k) - k^2)R_{0+}(\mathrm{Im}\ sk,k)l = l$$

Q.E.D.

Teorema 7 (Balslev 1988, teorema 1.3). $R_{0+}(\mathrm{Im}\ k,k) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} R_0(\mathrm{Im}\ k,k+\imath\epsilon)$ en la topología uniforme de operadores de $\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n),H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))$, uniformemente para $k \in K$.

Más aún, la función $\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n),H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))$-valuada de $k = \alpha + \imath\beta$

$$e^{-\imath\alpha x_1}R_{0+}(\beta,k)e^{\imath\alpha x_1}$$

es analítica en $\mathbb{C}^+$ y continua en $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$.

Demostración.

Por Balslev 1988, lema 1.2, $R_{0+}(\beta,k) := w - \lim_{\epsilon\downarrow 0} R_0(\beta, k+\imath\epsilon)$ está bién definido como un operador en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$. Note que para $u \in H_{2,-s}(\mathrm{R}^n)$ la norma $\|u\|_{2,-s}$ es equivalente a

$$\|u\| = \|u\|_{-s} + \left\|\left(-\Delta + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u\right\|_{-s}$$

uniformemente para $0 \leq \beta \leq \beta_0$, donde fijamos β_0 talque $K \subset \{k|0 \leq \operatorname{Im} k \leq \beta_0\}$. Por tanto es suficiente mostrar que en la topología uniforme de operadores de $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), L^2_{-s}(\mathrm{R}^n))$,

$$R_0(\beta, k+\imath\epsilon) \underset{\epsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} R_{0+}(\beta,k)$$

y

$$\left(-\Delta + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\right)R_0(\beta, k+\imath\epsilon) \underset{\epsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \left(-\Delta + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\right)R_{0+}(\beta,k)$$

uniformemente para $k \in K$.

Dado que

$$\left(-\Delta + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\right)R_0(\beta, k+\imath\epsilon) = 1 + (k+\imath\epsilon)^2 R_0(\beta, k+\imath\epsilon),$$

se sigue que es suficiente mostrar que

$$R_0(\beta, k+\imath\epsilon) \underset{\epsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} R_{0+}(\beta,k)$$

en la topología uniforme de operadores de $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), L^2_{-s}(\mathrm{R}^n))$, uniformemente para $k \in K$. Ahora procedemos a mostrar esto.

Primero que nada, el límite débil cuando $\epsilon \downarrow 0$ es de hecho un límite fuerte, lo cual puede ser visto como sigue. Tome a $g \in L^2_s(\mathrm{R}^n)$. Entonces $g \in L^2_{s'}(\mathrm{R}^n)$ para $1/2 < s' < s$. Por Balslev 1988, lema 1.2,

$$R_0(\beta, k+\imath\epsilon) \underset{\epsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} R_{0+}(\beta,k)$$

débilmente en $H_{2,-s'}(\mathrm{R}^n)$, uniformemente para $k \in K$. Dado que $H_{2,-s'}(\mathrm{R}^n)$ está compactamente inmerso en $L^2_{-s}(\mathrm{R}^n)$, concluimos que

$$R_0(\beta, k+\imath\epsilon) \underset{\epsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} R_{0+}(\beta, k),$$

fuertemente en $L^2_{-s}(\mathrm{R}^n)$, uniformemente para $k \in K$.

Resta probar la convergencia en la topología uniforme de operadores. Esto es probado en las mismas líneas que en la prueba del paso correspondiente en la prueba del teorema 4.1 de Agmon 1975, usando la compacidad de la inclusión de $H_{2,-s'}(\mathrm{R}^n)$ en $L^2_{-s}(\mathrm{R}^n)$ para $1/2 < s' < s$. Esto concluye la prueba de la primera parte del teorema.

Para $\epsilon > 0$ la función $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$-valuada $e^{-\imath\alpha x_1} R_0(\beta, k+\imath\epsilon)e^{\imath\alpha x_1}$ es analítica en $k \in \mathrm{C}^+$ y continua en $k \in \overline{\mathrm{C}^+} \setminus \{0\}$.

Entonces se sigue de la primera parte del teorema que $e^{-\imath\alpha x_1} R_{0_+}(\beta, k)e^{\imath\alpha x_1}$ es analítica en C^+ y continua en $\overline{\mathrm{C}^+} \setminus \{0\}$ como una función de k con valores en $\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$.

Q.E.D.

Lema 8.
$\forall (n, s, r) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times (1/2, \infty) \times \mathrm{R}^+ : \exists r' \in \mathrm{R}^+ : \forall (\alpha, k) \in [0, 2] \times \overline{\mathrm{C}^+} \setminus B_r(0)$:

$$\|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} \le r'(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.

$$\forall l \in L^2_s(\mathrm{R}^n): \|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)l\|_{\alpha,-s} \le (\|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)l\|^{2-\alpha}_{0,-s} \|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)l\|^{\alpha}_{2,-s})^{1/2} \le \quad \text{(L.C.28)}$$

$$\le \{[r'(1+|k|^2)^{-1/2}\|l\|_{0,s}]^{2-\alpha}[r'(1+|k|^2)^{1/2}\|l\|_{0,s}]^{\alpha}\}^{1/2} =$$
(L.6 y Agmon 1975, observación 2 en apéndice A.)

$$= r'(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}\|l\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$\|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} \le r'(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Q.E.D.

Lema 9. $\forall (n, s, r) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times (1/2, \infty) \times \mathrm{R}^+ : \exists r' \in \mathrm{R}^+ : \forall k \in \overline{\mathrm{C}^+} \setminus B_r(0)$:

$$\|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} \leq r'(1+|k|^2)^{1/2}$$

Demostración.
$\exists (r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ : \forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus B_r(0) : \forall l \in L^2_s(\mathbf{R}^n)$:

$$\|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l\|_{2,-s} \leq r_1 \|(I-\Delta) e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k) l\|_{0,-s} =$$

$$= r_1 \Big\| e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l - e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} \Delta R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l +$$

$$+ 2\imath \mathrm{Re}\ k\ e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l + (\mathrm{Re}\ k)^2 e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l \Big\|_{0,-s} \leq$$

$$\leq r_1 \Big(\|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l\|_{0,-s} + \|\Delta R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l\|_{0,-s} + 2|\mathrm{Re}\ k| \Big\| \frac{\partial}{\partial x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l \Big\|_{0,-s} +$$

$$+ |\mathrm{Re}\ k|^2 \|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l\|_{0,-s} \Big) \leq$$

$$\leq r_1 (\|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l\|_{2,-s} + 2|\mathrm{Re}\ k| r_2 \|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l\|_{1,-s} + |\mathrm{Re}\ k|^2 \|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) l\|_{0,-s}) \leq$$

$$\leq r_1 (\|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} + 2|\mathrm{Re}\ k| r_2 \|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{1,-s}(\mathrm{R}^n))} +$$

$$+ |\mathrm{Re}\ k|^2 \|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), L_{-s}(\mathrm{R}^n))}) \|l\|_{0,s} \leq$$

$$\leq r_1 [r_3 (1+|k|^2)^{1/2} + 2|\mathrm{Re}\ k| r_2 r_3 + |\mathrm{Re}\ k|^2 r_3 (1+|k|^2)^{-1/2}] \|l\|_{0,-s} \leq \quad \text{(L.8)}$$

$$\leq r_1 \max\{1, 2r_2\} r_3 (1+|k|^2)^{1/2} \|l\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$\|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq r_1 \max\{1,2r_2\} r_3 (1+|k|^2)^{1/2}$$

Q.E.D.

Lema 10.
$\forall (n,s,r) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times (1/2,\infty) \times \mathbf{R}^+ : \exists r' \in \mathbf{R}^+ : \forall (\alpha,k) \in [0,2] \times \overline{\mathbf{C}^+} \setminus B_r(0):$

$$\|e^{-\imath \mathrm{Re}\ k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq r'(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.
$\exists (r_1,r_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ : \forall (\alpha,k) \in [0,2] \times \overline{\mathbf{C}^+} \setminus B_r(0) : \forall l \in L^2_s(\mathbf{R}^n):$

$$\|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k) l\|_{\alpha,-s} \leq$$

$$(\|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k) l\|^{2-\alpha}_{0,-s} \|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k) l\|^{\alpha}_{2,-s})^{1/2} \leq \quad (\text{L.C.28})$$

$$\leq \Big[\Big(\|R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),L^2_{-s}(\mathbf{R}^n))} \|l\|_{0,s}\Big)^{2-\alpha} \cdot$$

$$\cdot \Big(\|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \|l\|_{0,s}\Big)^{\alpha}\Big]^{1/2} \leq$$

$$\leq \{[r_1(1+|k|^2)^{-1/2}]^{2-\alpha} [r_2(1+|k|^2)^{1/2}]^{\alpha}\}^{1/2} \|l\|_{0,s} \leq \quad (\text{L.8 y L.9})$$

$$\leq (r_1 r_2)^2 (1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2} \|l\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$\|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq (r_1 r_2)^2 (1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Q.E.D.

Pasemos ahora al estudio del operador $R_0^\omega(k)$ cuya continuidad y analiticidad podemos derivar a partir de $R_{0+}(\text{Im } k, k)$, (lemas 20 y 21). Los cuatro últimos lemas de este apéndice sirven de apoyo para la prueba de continuidad simultánea de $R_0^\omega(k)$ como función de (k,ω), la cual se da en el capítulo 3.

Lema 11.

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \mathbf{C}{:}\, \forall \omega \in S^{n-1}{:}\, D(T_\omega e^{-\imath \text{Re}kx_1} H_0(\text{Im } k) e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1}) = H_2(\mathbf{R}^n)$$

Demostración.

$$D(T_\omega e^{-\imath \text{Re}kx_1} H_0(\text{Im } k) e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1}) = D(H_0(\text{Im } k) e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1}) = \quad (\text{L.D.11 y L.D.41})$$

$$= (e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1})^{-1} D(H_0(\text{Im } k)) = T_\omega e^{-\imath \text{Re}kx_1} H_2(\mathbf{R}^n) = \quad (\text{L.D.39 y Schechter 1971, lema 6.4.3})$$

$$= H_2(\mathbf{R}^n) \quad (\text{L.D.41 y L.D.5})$$

Q.E.D.

Lema 12.

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \mathbf{C}{:}\, \forall \omega \in S^{n-1}{:}\, H_0^\omega(k) = T_\omega e^{-\imath \text{Re}kx_1} H_0(\text{Im } k) e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1}$$

Demostración.

$\forall (n,k) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times \mathbf{C}{:}\, \forall \omega \in S^{n-1}{:}\, \forall h \in H_2(\mathbf{R}^n){:}\, \forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n){:}$

$$(T_\omega e^{-\imath \text{Re}kx_1} H_0(\text{Im } k) e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1} h, c) = (H_0(\text{Im } k) e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1} h, e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1} c) = \quad (\text{L.D.12 y L.D.42})$$

$$= (e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1} h, H_0(-\text{Im } k) e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1} c) = \quad (\text{Schechter 1971, corolario 4.2.2})$$

$$= (h, T_\omega e^{-\imath \text{Re}kx_1} H_0(-\text{Im } k) e^{\imath \text{Re}kx_1} T_\omega^{-1} c) = \quad (\text{L.D.12 y L.D.42})$$

$$= (h, H_0^\omega(\bar{k})c) = (H_0^\omega(k)h, c) \quad \text{(Schechter 1971, corolario 4.2.2)}$$

Por lo tanto:

$$T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} H_0(\mathrm{Im}\ k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} T_\omega^{-1} h = H_0^\omega(k) h$$

Por lo tanto:

$$H_0^\omega(k) = T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} H_0(\mathrm{Im}\ k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} T_\omega^{-1} \quad \text{(L.11)}$$

Q.E.D.

Lema 13. $\forall (n,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{C}: \forall \omega \in S^{n-1}: \sigma(H_0^\omega(k)) = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \le |\mathrm{Im}\ k|\}$

Demostración.

Considerar a un elemento $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Por los lemas D.5 y D.12, todo $\omega \in S^{n-1}$ es tal que T_ω es unitario; por los lemas D.39 y D.42, todo $k \in \mathbf{C}$ es tal que $e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1}$ es unitario; por el lema A.38, donde en este caso $(H, B_1, B_2) = (L^2(\mathrm{R}^n), T_\omega, e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1})$; $T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1}$ es unitario. Además:

$$\sigma(H_0^\omega(k)) = \sigma(T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} H_0(\mathrm{Im}\ k) e^{\imath \mathrm{Re}\ x_1} T_\omega^{-1}) = \quad \text{(L.12)}$$

$$= \sigma(H_0(\mathrm{Im}\ k)) = \quad \text{(L.A.33, d.e.e.c. } (H, B) = (L^2(\mathrm{R}^n), T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1}))$$

$$= \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \le |\mathrm{Im}\ k|\} \quad \text{(L.3)}$$

Q.E.D.

Lema 14. $\forall (n,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{C}: \forall (z,\omega) \in \rho(H_0(\mathrm{Im}\ k)) \times S^{n-1}$:

$$(H_0^\omega(k) - z)^{-1} = T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} (H_0(\mathrm{Im}\ k) - z)^{-1} e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} T_\omega^{-1}$$

Demostración.

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{C}: \forall (z,\omega) \in \rho(H_0(\mathrm{Im}\ k)) \times S^{n-1}: z \in \rho(H_0^\omega(k)) \quad \text{(L.13)}$$

Por lo tanto:

$$(H_0^\omega(k)-z)^{-1}=[T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1}(H_0(\mathrm{Im}\ k)-z)^{-1}e^{\imath \mathrm{Re} k x_1}T_\omega^{-1}]^{-1}= \quad (\text{L.12})$$

$$=(T_\omega^{-1})^{-1}(e^{\imath \mathrm{Re} k x_1})^{-1}(H_0(\mathrm{Im}\ k)-z)^{-1}(e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1})^{-1}T_\omega^{-1}= \quad (\text{L.A.5})$$

$$=T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1}(H_0(\mathrm{Im}\ k)-z)^{-1}e^{\imath \mathrm{Re} k x_1}T_\omega^{-1} \quad (\text{L.D.39})$$

Q.E.D.

Lema 15. $\forall k\in \mathbf{R}\setminus\{0\}\colon R_{0_+}(0,k)=R_0^{\mathrm{sgn}\ k}(k^2)$
Demostración.

$$R_{0_+}(0,k)=\lim_{\delta\downarrow 0}R_0(0,k+\imath\delta)=\lim_{\delta\downarrow 0}R_0((k+\imath\delta)^2)=\lim_{\delta\downarrow 0}R_0(k^2-\delta^2+2\imath k\delta)=R_0^{\mathrm{sgn}\ k}(k^2)$$

Q.E.D.

Lema 16.

$$\forall (n,k)\in \mathbf{N}\setminus\{1\}\ \times \mathbf{R}\setminus\{0\}\colon \forall\omega\in S^{n-1}\colon R_0^\omega(k)=e^{-\imath k\omega\cdot x}R_0^{\mathrm{sgn}\ k}(k^2)e^{\imath k\omega\cdot x}$$

Demostración.

$$R_0^\omega(k)=T_\omega e^{-\imath k x_1}R_{0_+}(0,k)e^{\imath k x_1}T_\omega^{-1}=e^{-\imath k\omega\cdot x}T_\omega R_0^{\mathrm{sgn}\ k}(k^2)T_\omega^{-1}e^{\imath k\omega\cdot x}= \quad (\text{L.D.40 y L.15})$$

$$=e^{-\imath k\cdot x}R_0^{\mathrm{sgn}\ k}(k^2)e^{\imath k\omega\cdot x} \quad (\text{L.E.10})$$

Q.E.D.

Lema 17. $\forall(\pm,n)\in\{-,+\}\times \mathbf{N}\setminus\{1,2\}\colon\forall\omega\in S^{n-1}\colon R_0^\omega(0)=R_0^\pm(0)$

Demostración.

$\forall(\pm, n, s) \in \{-,+\} \times \mathbf{N} \setminus \{1,2\} \times (1,\infty)$: $\forall \omega \in S^{n-1}$:

$$\sup_{k\in[-1,1]} \|e^{-\imath k\omega\cdot x}\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} \leq \sup_{k\in[-1,1]} \{[|k| + (4+|k|^2)^{1/2}]/2\}^2 < \text{ (L.D.41)}$$

$$< \infty$$

Por lo tanto:

$$\forall l \in L^2_s(\mathrm{R}^n)\colon R^\omega_0(0)l = \lim_{\pm k\downarrow 0} R^\omega_0(k)l = \text{ (L.3.6)}$$

$$= \lim_{\pm k\downarrow 0} e^{-\imath k\omega\cdot x} R^\pm_0(k^2) e^{\imath k\omega\cdot x} l = \text{ (L.16)}$$

$$= R^\pm_0(0)l \quad \text{(L.D.44 y L.A.14, d.e.e.c. } (E_i, E, B_2) = ([-1,1], L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n)))$$

Por lo tanto:

$$R^\omega_0(0) = R^\pm_0(0)$$

Q.E.D.

Lema 18. $\forall(n,s,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times (1/2,\infty) \times \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$: $\forall \omega \in S^{n-1}$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R^\omega_0(k) - T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re}k x_1} R_0(\mathrm{Im}\, k, k+\imath\delta) e^{\imath \mathrm{Re}k x_1} T^{-1}_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R^\omega_0(k) - T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re}k x_1} R_0(\mathrm{Im}\, k, k+\imath\delta) e^{\imath \mathrm{Re}k x_1} T^{-1}_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} =$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0} \|T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re}k x_1} (R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k, k) - R_0(\mathrm{Im}\, k, k+\imath\delta)) e^{\imath \mathrm{Re}k x_1} T^{-1}_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0$$

(Por (3.72) y L.A.13, d.e.e.c. $(B_1, B_2) = (L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$)

Q.E.D.

Lema 19.
$\forall(n,s,r)\in \mathbf{N}\setminus\{1\}\times(1/2,\infty)\times\mathbf{R}^+ : \exists r'\in\mathbf{R}^+ : \forall(\alpha,k,\omega)\in[0,2]\times\overline{\mathbf{C}^+}\times S^{n-1}$:

$$\|R_0^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}\le r'(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.

$$\|R_0^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}=$$

$$=\|T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re}kx_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)e^{\imath\mathrm{Re}kx_1}T_\omega^{-1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}=$$

$$\|e^{-\imath \mathrm{Re}kx_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)e^{\imath\mathrm{Re}kx_1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}\le$$

(L.D.11 y L.A.21 d.c.e.c. $(E_1,E_2,E_3,E_4,O_1,O_2)=(L_s^2(\mathbf{R}^n),L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n),T_\omega^{-1},T_\omega))$

$$\le\|e^{-\imath \mathrm{Re}kx_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}\|e^{\imath\mathrm{Re}kx_1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))}\le$$

$$\le r'(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}\quad\text{(L.10 y L.D.41)}$$

Q.E.D.

Lema 20. $\forall(n,s)\in\mathbf{N}\setminus\{1\}\times(1/2,\infty):\forall(k,\omega)\in\overline{\mathbf{C}^+}\setminus\{0\}\times S^{n-1}$:

$$\lim_{k'\to k}\|R_0^\omega(k)-R_0^\omega(k')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))}=0$$

Demostración.

$$\lim_{k'\to k}\|R_0^\omega(k)-R_0^\omega(k')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))}=$$

$$=\lim_{k'\to k}\|T_\omega e^{-\imath\mathrm{Re}kx_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)e^{\imath\mathrm{Re}\ kx_1}T_\omega^{-1}-$$

$$-T_\omega e^{-\imath\mathrm{Re}k'x_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k',k')e^{\imath\mathrm{Re}k'x_1}T_\omega^{-1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))}=$$

$$= \lim_{k' \to k} \|T_\omega (e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} -$$

$$- e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1}) T_\omega^{-1} \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} =$$

$$= 0 \quad (\text{L.A.21, d.e.e.c. } (B_1, B_3) = (L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n)))$$

Q.E.D.

Lema 21. Todo $n \in \mathrm{N} \setminus \{1\}$ es tal que todo $\omega \in S^{n-1}$ es tal que $R_0^\omega(\cdot)$ es analítica en C^+.

Demostración.

Por el lema D.11, todo $s \in (1/2, \infty)$ es tal que $(T_\omega, T_\omega^{-1}) \in \mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n)) \times \mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$; por el lema A.17, donde en este caso $(S, E_1, E_2) = (\mathrm{C}^+, L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))$; $T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re}\cdot\, x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\cdot, \cdot) e^{\imath \mathrm{Re}\cdot\, x_1} T_\omega^{-1}$ es analítica en C^+; luego, $R_0^\omega(\cdot)$ es analítica en C^+.

Q.E.D.

Lema 22. $\forall (n,s) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times (1/2, \infty): \forall (k, \omega, l) \in \overline{\mathrm{C}^+} \setminus \{0\} \times S^{n-1} \times L_s^2(\mathrm{R}^n)$:

$$\lim_{(k',\omega') \to (k,\omega)} \|(R_0^\omega(k) - R_0^{\omega'}(k'))l\|_{2,-s} = 0$$

Demostración.

$$\forall (n,s) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times (1/2, \infty): \sup_{\omega \in S^{n-1}} \|T_\omega\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 1 \quad (\text{L.D.11})$$

Por lo tanto:

$$\forall (k, \omega) \in \overline{\mathrm{C}^+} \setminus \{0\} \times S^{n-1}: \exists r \in \mathrm{R}^+:$$

$$\sup_{k' \in B_r(k) \cap \overline{\mathrm{C}^+} \setminus \{0\}} \|e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} < \infty \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall l \in L_s^2(\mathrm{R}^n):$$

$$\lim_{k'\to k} \|(e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} - e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_-}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1}) l\|_{2,-s} \leq$$

$$\leq \lim_{k'\to k} \|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_-}(\mathrm{Im}\, k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} -$$

$$- e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1} \|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} \|l\|_{0,s} = 0$$

Por lo tanto:

$$\forall l \in L^2_s(\mathrm{R}^n): \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|(R_0^{\omega}(k) - R_0^{\omega'}(k'))l\|_{2,-s} =$$

$$= \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|(T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_-}(\mathrm{Im}\, k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} T_\omega^{-1} -$$

$$- T_{\omega'} e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1} T_{\omega'}^{-1}) l\|_{2,-s} =$$

$$= 0 \quad (\text{L.D.18 y L.A.14, d.e.e.c. } (E, B_2) = (L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n)))$$

Q.E.D.

Lema 23. $\forall (n,s) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times (1/2, \infty): \forall (k,\omega,h) \in \overline{\mathrm{C}^+} \setminus \{0\} \times S^{n-1} \times H_{-2,s}(\mathrm{R}^n)$:

$$\lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|(R_0^{\omega}(k)^* - R_0^{\omega'}(k')^*)h\|_{0,-s} = 0$$

Demostración.

$$\forall (n,s) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times (1/2, \infty): \sup_{\omega \in S^{n-1}} \|T_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2_{-s}(\mathrm{R}^n))} = 1 \quad (\text{L.D.11})$$

Por lo tanto:

$$\forall (k,\omega) \in \overline{\mathrm{C}^+} \times S^{n-1}: \exists r \in \mathrm{R}^+:$$

$$\sup_{k' \in B_r(0) \cap \overline{\mathrm{C}^+} \setminus \{0\}} \|(e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1})^* \|_{\mathrm{B}(H_{-2,s}(\mathrm{R}^n), L_{-s}(\mathrm{R}^n))} =$$

$$= \sup_{k' \in B_r(0) \cap \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}} \|e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} <$$

(L.C.22 y Rudin 1979, teorema 4.10)

$$< \infty \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall h \in H_{-2,s}(\mathrm{R}^n):$$

$$\lim_{k' \to k} \|((e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1})^* - (e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1})^*) h\|_{0,-s} \leq$$

$$\leq \lim_{k' \to k} \|(e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1})^* -$$

$$-(e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1})^*\|_{\mathrm{B}(H_{-2,s}(\mathrm{R}^n), L_{-s}(\mathrm{R}^n))} \cdot \|h\|_{-2,s} =$$

$$= \lim_{k' \to k} \|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} -$$

$$-e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} \|h\|_{-2,s} =$$

(Rudin 1979, teorema 4.10)

$$= 0$$

Por lo tanto:

$$\forall h \in H_{-2,s}(\mathrm{R}^n): \forall (k', \omega') \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\} \times S^{n-1}: \|(R_0^{\omega}(k)^* - R_0^{\omega'}(k')^*) h\|_{0,-s} =$$

$$= \|((T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} T_\omega^{-1})^* -$$

$$-(T_{\omega'} e^{-\imath \mathrm{Re} k' x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k', k') e^{\imath \mathrm{Re} k' x_1} T_{\omega'}^{-1})^*) h\|_{0,-s} =$$

$$= \|((T_\omega^{-1})^* (e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\, k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1})^* T_\omega^* -$$

$$-(T_{\omega'}^{-1})^*(e^{-\imath\mathrm{Re}k'x_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k',k')e^{\imath\mathrm{Re}k'x_1})^*T_{\omega'}^*)h\|_{0,-s} =$$

$$= \|(T_\omega(e^{-\imath\mathrm{Re}kx_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)e^{\imath\mathrm{Re}kx_1})^*T_\omega^{-1}-$$

$$-T_{\omega'}(e^{-\imath\mathrm{Re}k'x_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k',k')e^{\imath\mathrm{Re}k'x_1})^*T_{\omega'}^{-1})h\|_{0,-s} \quad (\mathrm{L.D.12})$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|(R_0^\omega(k)^* - R_0^{\omega'}(k')^*)h\|_{0,-s} =$$

$$= \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|(T_\omega(e^{-\imath\mathrm{Re}kx_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)e^{\imath\mathrm{Re}kx_1})^*T_\omega^{-1}-$$

$$-T_{\omega'}(e^{-\imath\mathrm{Re}k'x_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k',k')e^{\imath\mathrm{Re}k'x_1})^*T_{\omega'}^{-1})h\|_{0,-s} =$$

$$= 0 \quad (\mathrm{L.D.18\ y\ L.A.14,\ d.e.e.c.}\ (E,B_2) = (H_{-2,s}(\mathrm{R}^n), L^2_{-s}(\mathrm{R}^n)))$$

Q.E.D.

Lema 24. Considerar a un elemento $(n,s) \in \mathrm{N}\setminus\{1\} \times (1/2,\infty)$, a un subconjunto compacto $S \subset \overline{\mathrm{C}^+}\setminus\{0\}$ y a un subconjunto $S' \subset L^2_s(\mathrm{R}^n)$. Entonces:

$$\sup_{f\in S'} \|f\|_{0,s} < \infty \Longrightarrow \forall s' \in (1/2,s]: \sup_{(k,\omega,f)\in S\times S^{n-1}\times S'} \|R_0^\omega(k)f\|_{2,-s} < \infty$$

Demostración.

Dado que S es compacto, $e^{-\imath\mathrm{Re}\ \cdot x_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\cdot,\cdot)e^{\imath\mathrm{Re}\ \cdot x_1}(S)$ es compacto; por Rudin 1979, teorema 1.15, todo $s' \in (1/2,s]$ es tal que:

$$\sup_{k\in S} \|e^{-\imath\mathrm{Re}kx_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)e^{\imath\mathrm{Re}kx_1}\|_{\mathrm{B}(L^2_{s'}(\mathrm{R}^n),H_{2,-s'}(\mathrm{R}^n))} < \infty \tag{1}$$

Entonces:

$\forall(k,\omega,f) \in S\times S^{n-1}\times S'$:

$$\|R_0^\omega(k)f\|_{2,-s'} = \|T_\omega e^{-\imath\mathrm{Re}kx_1}R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k,k)e^{\imath\mathrm{Re}kx_1}T_\omega^{-1}f\|_{2,-s'} \le$$

$$\leq \|T_\omega e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} T_\omega^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_{s'}(\mathbf{R}^n), H_{2,-s'}(\mathbf{R}^n))} \|f\|_{0,s'} =$$

$$= \|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1}\|_{\mathrm{B}(L^2_{s'}(\mathbf{R}^n), H_{2,-s'}(\mathbf{R}^n))} \|f\|_{0,s'} \leq$$

(L.D.11 y L.A.21, d.e.e.c. $(E_1, E_2, E_3, E_4, O_1, O_2) = (L^2_{s'}(\mathbf{R}^n), L^2_{s'}(\mathbf{R}^n), H_{2,-s'}(\mathbf{R}^n), H_{2,-s'}$ $(\mathbf{R}^n), T_\omega^{-1}, T_\omega))$

$$\leq \|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1}\|_{\mathrm{B}(L^2_{s'}(\mathbf{R}^n), H_{2,-s'}(\mathbf{R}^n))} \|f\|_{0,s}$$

Por lo tanto:

$$\sup_{(k,\omega,f)\in S\times S^{n-1}\times S'} \|R_0^\omega(k) f\|_{2,-s'} \leq$$

$$\leq \sup_{k\in S} \|e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1}\|_{\mathrm{B}(L^2_{s'}(\mathbf{R}^n), H_{2,-s'}(\mathbf{R}^n))} \sup_{f\in S'} \|f\|_{0,s} < \infty \quad (\text{Por } (1))$$

Q.E.D.

Lema 25. Mismas hipótesis que en el lema 24. Entonces:

$$\sup_{f\in S'} \|f\|_{0,s} < \infty \Longrightarrow \forall s' \in (1/2, \infty)\colon \sup_{(k,\omega,f)\in S\times S^{n-1}\times S'} \|R_0^\omega(k) f\|_{2,-s'} < \infty$$

Demostración.

$\sup_{f\in S'} \|f\|_{0,s} < \infty \Longrightarrow \forall s' \in (1/2, \infty)\colon \exists r \in \mathbf{R}^+$:

$$\sup_{(k,\omega,f)\in S\times S^{n-1}\times S'} \|R_0^\omega(k) f\|_{2,-s'} =$$

$$= \sup_{(k,\omega,f)\in S\times S^{n-1}\times S'} \left(\chi_{(1/2,s]}(s') \|R_0^\omega(k) f\|_{2,-s'} + \chi_{(s,\infty)}(s') \|R_0^\omega(k) f\|_{2,-s'}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{(k,\omega,f)\in S\times S^{n-1}\times S'} \left(\chi_{(1/2,s]}(s') \|R_0^\omega(k) f\|_{2,-s'} + \chi_{(s,\infty)}(s') r \|R_0^\omega(k) f\|_{2,-s}\right) < \quad (\text{L.C.2})$$

$$< \infty \quad (\text{L.24})$$

Q.E.D.

Apéndice H. El método de Balslev. Parte II

Una vez que han sido establecidas las propiedades importantes del operador $R_0^\omega(k)$, tales como la continuidad y la analiticidad como función de k, haremos extensivas estas propiedades al operador $R^\omega(k)$ además de reforzar las demostraciones del texto en este respecto. Empezaremos calculando el espectro esencial de $H^\omega(k)$.

Lema 1.

$$\forall(n,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{C}: \forall(\omega, V) \in S^{n-1} \times K_2: \sigma_e(H^\omega(k)) = \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq |\mathrm{Im}\ k|\}$$

Demostración.

Por el lema E.31, todo $(n,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{C}$ es tal que todo $(\omega, V) \in S^{n-1} \times K_2$ es tal que $\psi(V) \in \mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}^n), H_2(\mathrm{R}^n))$ y es compacto. Entonces:

$$\sigma_e(H^\omega(k)) = \sigma_e(H_0^\omega(k)) = \text{ (Kato 1976, teorema IV.5.35)}$$

$$= \sigma(H_0^\omega(k)) = \text{ (Schechter 1971, corolario 4.3.3)}$$

$$= \{z^2 \in \mathbf{C}: |\mathrm{Im}\ z| \leq |\mathrm{Im}\ k|\} \quad \text{(L.G.13)}$$

Q.E.D.

Lema 2. $\forall(n,s) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times (1/2, \infty): \forall(k,\omega) \in \overline{\mathbf{C}^+} \times S^{n-1}$:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \|R_0^\omega(k) - R_0^\omega(k+\imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0 \quad \Longrightarrow \forall l \in L_s^2(\mathrm{R}^n): (H_0^\omega(k) - k^2) R_0^\omega(k) l = l$$

Demostración.

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n): ((H_0^\omega(k) - k^2)R_0^\omega(k)l, c) = (R_0^\omega(k)l, (H_0^\omega(\bar{k}) - \overline{k^2})c) =$$
(Schechter 1971, corolario 4.2.2)

$$= \lim_{\delta \downarrow 0}(R_0^\omega(k + \imath\delta)l, (H_0^\omega(\bar{k}) - \overline{k^2})c) = \lim_{\delta \downarrow 0}((H_0^\omega(k) - k^2)R_0^\omega(k + \imath\delta)l, c) =$$
(Schechter 1971, corolario 4.2.2)

$$= (l, c) + \lim_{\delta \downarrow 0}(R_0^\omega(k)l, \overline{[(k + \imath\delta)^2 - k^2]}c) = (l, c) \quad (\text{L.A.15, d.c.c.c. } E = L_s^2(\mathbf{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$(H_0^\omega(k) - k^2)R_0^\omega(k)l = l$$

Q.E.D.

Lema 9. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$ y $V \in K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1 + \epsilon)/2$$

Entonces:

$$\forall (k, \omega) \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta \ \times S^{n-1}: \lim_{\delta \downarrow 0} \|R^\omega(k) - R^\omega(k + \imath\delta)\|_{\mathbf{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall l \in L_s^2(\mathbf{R}^n): (H^\omega(k) - k^2)R^\omega(k)l = l$$

Demostración.
$\forall l \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$:

$$(H^\omega(k) - k^2)R^\omega(k)l = (H_0^\omega(k) + V - k^2)R_0^\omega(k)(I + VR_0^\omega(k))^{-1}l =$$

$$= (I + VR_0^\omega(k))(I + VR_0^\omega(k))^{-1}l = \ (\text{L.2})$$

$$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n): ((H_0^\omega(k) - k^2)R_0^\omega(k)l, c) = (R_0^\omega(k)l, (H_0^\omega(\bar{k}) - \overline{k^2})c) =$$
(Schechter 1971, corolario 4.2.2)

$$= \lim_{\delta \downarrow 0}(R_0^\omega(k + \imath\delta)l, (H_0^\omega(\bar{k}) - \overline{k^2})c) = \lim_{\delta \downarrow 0}((H_0^\omega(k) - k^2)R_0^\omega(k + \imath\delta)l, c) =$$
(Schechter 1971, corolario 4.2.2)

$$= (l, c) + \lim_{\delta \downarrow 0}(R_0^\omega(k)l, \overline{[(k + \imath\delta)^2 - k^2]}c) = (l, c) \quad (\text{L.A.15, d.e.e.c. } E = L_s^2(\mathbf{R}^n))$$

Por lo tanto:

$$(H_0^\omega(k) - k^2)R_0^\omega(k)l = l$$

Q.E.D.

Lema 8. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$ y $V \in K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1 + \epsilon)/2$$

Entonces:

$$\forall (k, \omega) \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta \;\times S^{n-1}: \lim_{\delta \downarrow 0} \|R^\omega(k) - R^\omega(k + \imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall l \in L_s^2(\mathbf{R}^n): (H^\omega(k) - k^2)R^\omega(k)l = l$$

Demostración.
$\forall l \in L_s^2(\mathbf{R}^n)$:

$$(H^\omega(k) - k^2)R^\omega(k)l = (H_0^\omega(k) + V - k^2)R_0^\omega(k)(I + VR_0^\omega(k))^{-1}l =$$

$$= (I + VR_0^\omega(k))(I + VR_0^\omega(k))^{-1}l = \quad (\text{L.2})$$

$$= (h, T(x)HT(x)^{-1}c) = (T(x)^{-1}h, HT(x)^{-1}c) = \quad \text{(L.D.27 y L.D.12)}$$

$$= (HT(x)^{-1}h, T(x)^{-1}c) = \text{ (L.E.13)}$$

$$= (T(x)HT(x)^{-1}h, c) \quad \text{(L.D.27 y L.D.12)}$$

Por lo tanto:

$$(H_0 + T(x)V)h = T(x)HT(x)^{-1}h$$

Por lo tanto:

$$H_0 + T(x)V = T(x)HT(x)^{-1} \quad \text{(L.D.28)}$$

Q.E.D.

Lema 6.

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \overline{\mathbf{C}^{+}}: \forall (\omega, V) \in S^{n-1} \times K_2: k \in \overline{\mathbf{C}^{+}} \setminus \Delta_0 \iff N(I + VR_0^{\omega}(k)) = \{0\}$$

Demostración.

$$N(I + VR_0^{\omega}(k)) = N(I + VT_{\omega}e^{-\imath \mathrm{Re} k x_1} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) e^{\imath \mathrm{Re} k x_1} T_{\omega}^{-1}) =$$

$$= N(I + Ve^{-\imath \mathrm{Re} k \omega \cdot x} T_{\omega} R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k) T_{\omega}^{-1} e^{\imath k \omega \cdot x}) = \text{ (L.D.40)}$$

$$= N(e^{-\imath \mathrm{Re} k \omega \cdot x} T_{\omega}(I + (T_{\omega}^{-1}V) R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)) T_{\omega}^{-1} e^{\imath \mathrm{Re} k \omega \cdot x}) = \text{ (L.D.39)}$$

$$= \{0\} \Leftrightarrow N((I + (T_{\omega}^{-1}V) R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)) T_{\omega}^{-1} e^{\imath \mathrm{Re} k \omega \cdot x}) = \{0\} \Leftrightarrow$$
$$\text{(L.A.7, d.e.c.c. } (O_1, O_2) = (e^{-\imath \mathrm{Re} k \omega \cdot x} T_{\omega}, (I + (T_{\omega}^{-1}V) R_{0_+}(\mathrm{Im}\ k, k)) T_{\omega}^{-1} e^{\imath \mathrm{Re} k \omega \cdot x}))$$

$$\Leftrightarrow N(I + (T_\omega^{-1}V)R_{0+}(\mathrm{Im}\ k, k)) = \{0\} \Leftrightarrow$$
(L.A.6, d.e.e.c. $(O_1, O_2) = ((I + (T_\omega^{-1}V)R_{0+}(\mathrm{Im}\ k, k), T_\omega^{-1}e^{i\mathrm{Re}k\omega\cdot x}))$

$$\Leftrightarrow k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\{iq \in \mathbf{C}^+ : -q^2 \in \sigma_d(H_0 + T_\omega^{-1}V)\} \cup \{0\} \cup \{p \in \mathbf{R}^+ : p^2 \in \sigma_+(H_0 + T_\omega^{-1}V)\}) =$$
(Balslev 1988, lema A.2.4)

$$= \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\{iq \in \mathbf{C}^+ : -q^2 \in \sigma_d(T_\omega^{-1}HT_\omega)\} \cup \{0\} \cup \{p \in \mathbf{R}^+ : p^2 \in \sigma_+(T_\omega^{-1}HT_\omega)\}) = \quad \text{(L.5)}$$

$$= \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\{iq \in \mathbf{C}^+ : -q^2 \in \sigma_d(H)\} \cup \{0\} \cup \{p \in \mathbf{R}^+ : p^2 \in \sigma_+(H)\}) =$$
(L.A.20, d.e.e.c. $(E_1, E_2) = (L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n)))$

$$= \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0$$

Q.E.D.

Lema 7. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $\omega \in S^{n-1}$ y $V \in K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1 + \epsilon)/2$$

Entonces:

$$\forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 : (I + VR_0^\omega(k))^{-1} \in \mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))$$

Demostración.

$$\forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 : N(I + VR_0^\omega(k)) = \{0\} \quad \text{(L.6)}$$

Por lo tanto:

$$(I + VR_0^\omega(k))^{-1} \in \mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n)) \quad \text{(L.E.34, d.e.e.c. } s = (1+\epsilon)/2)$$

Q.E.D.

Lema 8. Mismas hipótesis que en el lema 7. Entonces:

$$\forall k \in \overline{\mathbf{C}^{+}} \setminus \Delta_0 \colon \lim_{\delta \downarrow 0} \| R_0^\omega(k)(I + V R_0^\omega(k))^{-1} - [H^\omega(k) - (k + \imath\delta)^2]^{-1} \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\forall k \in \overline{\mathbf{C}^{+}} \setminus \Delta_0 \colon \lim_{\delta \downarrow 0} \| (I + V R_0^\omega(k)) - (I + V R_0^\omega(k + \imath\delta)) \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{\delta \downarrow 0} \|V\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathrm{R}^n), L_s^2(\mathrm{R}^n))} \| R_0^\omega(k) - R_0^\omega(k + \imath\delta) \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} =$$

$$= 0 \Rightarrow \text{ (Por (3.85))}$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \downarrow 0} \| (I + V R_0^\omega(k))^{-1} - (I + V R_0^\omega(k + \imath\delta))^{-1} \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

(L.7 y Rudin 1979, teorema 10.12)

$$\Rightarrow \lim_{\delta \downarrow 0} \| R_0^\omega(k)(I + V R_0^\omega(k))^{-1} - [H^\omega - (k + \imath\delta)^2]^{-1} \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} =$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \| R_0^\omega(k)(I + V R_0^\omega(k))^{-1} - R_0^\omega(k + \imath\delta)(I + V R_0^\omega(k + \imath\delta))^{-1} \|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} =$$

(L.A.11, d.e.e.c. $(O_1, O_2) = (H_0^\omega(k) - (k + \imath\delta)^2, V)$)

$$= 0 \quad \text{(Por (3.85) y L.A.13, d.e.e.c. } (B_1, B_2, B_3) = (L_s^2(\mathrm{R}^n), L_s^2(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n)))$$

Q.E.D.

Lema 9. Considerar a los elementos $(n, \alpha) \in \mathrm{N} \setminus \{1\} \times [0, 1)$, $\omega \in S^{n-1}$ y $V \in B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathrm{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1 + \epsilon)/2$$

Entonces:

$\forall \rho \in (\sup|\Delta_0|, \infty) \colon \exists r \in \mathbf{R}^+ \colon \forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus B_\rho(0) \colon$

$$\|R^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq r(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.

$$\forall \rho \in (\sup|\Delta_0|, \infty) \colon \exists r \in \mathbf{R}^+ \colon \lim_{|k|\to\infty} \|I - (I + V R_0^\omega(k))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{|k|\to\infty} \|V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n))} \|R_0^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq \|V\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n))} r(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2} = \quad (\mathrm{L.G.19})$$

$$= 0 \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus B_\rho(0) \colon \lim_{k'\to k} \|(I + V R_0^\omega(k)) - (I + V R_0^\omega(k'))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{k'\to k} \|V\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathbf{R}^n), L^2_s(\mathbf{R}^n))} \|R_0^\omega(k) - R_0^\omega(k')\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \quad (\mathrm{L.G.20})$$

Por lo tanto:

$$\|R^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} = \|R_0^\omega(k)(I + V R_0^\omega(k))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq \|R_0^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \|(I + V R_0^\omega(k))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))} \leq \quad (\mathrm{L.7})$$

$$\leq r(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2} \sup_{k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus B_\rho(0)} \|(I + V R_0^\omega(k))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n))}$$

(L.G.19 y L.A.26, d.c.e.c. $(S, A, f) = (\overline{\mathbf{C}^+} \setminus B_\rho(0), \mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n)), I + V R_0^\omega(\cdot)))$

Q.E.D.

Lema 10. Mismas hipótesis que en lema 7. Entonces:

$$\forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 \colon \lim_{k' \to k} \|R^\omega(k) - R^\omega(k')\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 \colon \lim_{k' \to k} \|(I + VR_0^\omega(k)) - (I + VR_0^\omega(k'))\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{k' \to k} \|V\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n))} \|R_0^\omega(k) - R_0^\omega(k')\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0 \Rightarrow \quad \text{(L.G.20)}$$

$$\Rightarrow \lim_{k' \to k} \|(I + VR_0^\omega(k))^{-1} - (I + VR_0^\omega(k'))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

(L.7 y Rudin 1979, teorema 10.12)

$$\Rightarrow \lim_{k' \to k} \|R^\omega(k) - R^\omega(k')\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} =$$

$$= \lim_{k' \to k} \|R_0^\omega(k)(I + VR_0^\omega(k))^{-1} - R_0^\omega(k')(I + VR_0^\omega(k'))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0$$

(L.G.20 y L.A.13, d.e.e.c. $(E_i, B_1, B_2, B_3, f_1, f_2) = (\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0, L^2_s(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n), (I + VR_0^\omega(\cdot))^{-1}, R_0^\omega(\cdot)))$

Q.E.D.

Lema 11. Todo $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ es tal que todo $(\omega, V) \in S^{n-1} \times K_2$ es tal que $R^\omega(\cdot)$ es analítica en $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$.

Demostración.

Sea $\epsilon \in \mathrm{R}^+$ correspondiente a V. Sea:

$$s = (1 + \epsilon)/2$$

Por el lema G.21, $R_0^\omega(\cdot)$ es analítica en $\mathbf{C}^+$; por el lema A.17, donde en este caso $(S, E_1, E_2, E_3, f_1, f_2) = (\mathbf{C}^+, L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n), R_0^\omega(\cdot), V)$; $I + VR_0^\omega(\cdot)$ es analítica en $\mathbf{C}^+$; por los lemas 7 y A.27, donde en este caso $(S, A, f) = (\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d, \mathrm{B}(L^2_s(\mathrm{R}^n)), I + VR_0^\omega(\cdot))$; $(I + VR_0^\omega(\cdot))^{-1}$ es analítica en $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$; por el lema A.17, donde en este caso $(S, E_1, E_2, E_3, f_1, f_2) = (\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d, L^2_s(\mathrm{R}^n), L^2_s(\mathrm{R}^n), H_{2,-s}(\mathrm{R}^n), (I + VR_0^\omega(\cdot))^{-1}, R_0^\omega(\cdot))$; se concluye que $R_0^\omega(\cdot)(I + VR_0^\omega(\cdot))^{-1}$ es analítica en $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$; luego, $R^\omega(\cdot)$ es analítica en $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$.

Q.E.D.

Lema 12. Mismas hipótesis que en lema 3. Entonces:
$\forall(k,\omega) \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 \times S^{n-1}$:

$$\lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|R_0^{\omega}(k) - R_0^{\omega'}(k')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|R^{\omega}(k) - R^{\omega'}(k')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|(I+VR_0^{\omega}(k)) - (I+VR_0^{\omega'}(k'))\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|V\|_{\mathrm{B}(H_{2,-s}(\mathbf{R}^n),L_s^2(\mathbf{R}^n))} \|R_0^{\omega}(k) - R_0^{\omega'}(k')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|(I+VR_0^{\omega}(k))^{-1} - (I+VR_0^{\omega'}(k'))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

(L.7 y Rudin 1979, teorema 10.12)

$$\Rightarrow \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|R^{\omega}(k) - R^{\omega'}(k')\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} =$$

$$= \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|R_0^{\omega}(k)(I+VR_0^{\omega}(k))^{-1} - R_0^{\omega'}(k')(I+VR_0^{\omega'}(k'))^{-1}\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0$$

(L.A.13, d.e.e.c. $(E_i, B_1, B_2, B_3, f_1, f_2) = (\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0, L_s^2(\mathbf{R}^n), L_s^2(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n), (I + VR_0^{\cdot}(\cdot))^{-1}, R_0^{\cdot}(\cdot))$)

Q.E.D.

Lema 13. Considerar a los elementos $(n, n', (s_1, s_2, \alpha)) \in \mathbf{N} \times \{0\} \cup \mathbf{N} \times \mathbf{R}^3$ y $B \in \mathrm{B}(H_{n',s_1}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,s_2}(\mathbf{R}^n))$. Entonces $B \in \bigcap_{(s,\alpha')\in(s_2,\infty)\times(n',\infty)} \mathrm{B}(H_{\alpha',s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,s_2}(\mathbf{R}^n))$ y es compacto.

Demostración.

Por el lema C.3, todo$(s,\alpha') \in (s_2,\infty) \times (n',\infty)$ es tal que $B \in \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,s_2}(\mathbf{R}^n)) \cap \mathrm{B}(H_{\alpha',s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,s_2}(\mathbf{R}^n))$. Considerar a un elemento $c \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ tal que:

$$(c(B_1(0)), c(B_2(0)^c)) = (\{1\}, \{0\})$$

Por el lema C.17, donde en este caso $(s_1, s_2, \alpha, \alpha') = (s, s, \alpha', n')$, todo $k \in \mathbf{N}$ es tal que $\psi(T(k^{-1}I)c) \in \mathrm{B}(H_{\alpha',s}(\mathbf{R}^n), H_{n',s}(\mathbf{R}^n))$ y es compacto (definición D.2); por Kato 1976, teorema III.4.8, $B\psi(T(k^{-1}I)c) \in \mathrm{B}(H_{\alpha',s}(\mathbf{R}^n), H_{\alpha,s_2}(\mathbf{R}^n))$ y es compacto. Además:

$$\exists (r_1, r_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ : \forall (\beta, c') \in (\{0\} \cup \mathbf{N})^n \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n) : \|D^\beta (1 - T(k^{-1}I)c)c'\|_{0,s_2} =$$

$$= \left\| \sum_{\gamma \leq \beta} \left(\prod_{i=1}^n \beta_i! [\gamma_i! (\beta_i - \gamma_i)!]^{-1} \right) \rho_{s_1 - s} \chi_{B_k(0)^c} k^{-|\beta - \gamma|} (T(k^{-1}I) D^{\beta - \gamma}(1 - c)) \rho_s D^\gamma c' \right\|_{0,0} \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \left(\prod_{i=1}^n \beta_i! [\gamma_i! (\beta_i - \gamma_i)!]^{-1} \right) \|\rho_{s_1 - s} \chi_{B_k(0)^c} k^{-|\beta - \gamma|}\|_\infty \|T(k^{-1}I) D^{\beta - \gamma}(1 - c)\|_\infty \cdot$$

$$\cdot \|\rho_s D^\gamma c'\|_{0,0} =$$

$$= \sum_{\gamma \leq \beta} \left(\prod_{i=1}^n \beta_i! [\gamma_i! (\beta_i - \gamma_i)!]^{-1} \right) (1 + k^2)^{(s_1 - s)/2} k^{-|\beta - \gamma|} \|D^{\beta - \gamma}(1 - c)\|_\infty \|D^\gamma c'\|_{0,s} \quad \text{(L.D.13)}$$

Por lo tanto:

$$\|(1 - T(k^{-1}I)c)c'\|_{n',s_1} \leq r_1 \sum_{|\beta| \leq n'} \|D^\beta (1 - T(k^{-1}I)c)c'\|_{0,s_1} \leq$$

$$\leq r_1 \sum_{|\beta| \leq n'} \sum_{\gamma \leq \beta} \left(\prod_{i=1}^n \beta_i! [\gamma_i! (\beta_i - \gamma_i)!]^{-1} \right) (1 + k^2)^{(s_1 - s)/2} k^{-|\beta - \gamma|} \|D^{\beta - \gamma}(1 - c)\|_\infty \|D^\gamma c'\|_{0,s} \leq$$

$$\leq (1 + k^2)^{(s_1 - s)/2} r_2 \|c'\|_{n',s} \leq (1 + k^2)^{(s_1 - s)/2} r_2 \|c'\|_{\alpha',s}$$

Por lo tanto:

$$\|(B - B\psi(T(k^{-1}I)c))c'\|_{\alpha,s_2} = \|B(1 - T(k^{-1}I)c)c'\|_{\alpha,s_2} \leq$$

$$\leq \|B\|_{\mathrm{B}(H_{n',s_1}(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,s_2}(\mathrm{R}^n))}\|(1-T(k^{-1}I)c)c'\|_{n',s_1} \leq$$

$$\leq \|B\|_{\mathrm{B}(H_{n',s_1}(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,s_2}(\mathrm{R}^n))}(1+k^2)^{(s_1-s)/2}r_2\|c'\|_{\alpha',s}$$

Por lo tanto:

$$\|B - B\psi(T(k^{-1}I)c)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha',s}(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,s_2}(\mathrm{R}^n))} \leq \|B\|_{\mathrm{B}(H_{n',s_1}(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,s_2}(\mathrm{R}^n))}(1+k^2)^{(s_1-s)/2}r_2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{k\to\infty}\|B - B\psi(T(k^{-1}I)c)\|_{\mathrm{B}(H_{\alpha',s}(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,s_2}(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty}\|B\|_{\mathrm{B}(H_{n',s_1}(\mathrm{R}^n),H_{\alpha,s_2}(\mathrm{R}^n))}(1+k^2)^{(s_1-s)/2}r_2 = 0$$

Entonces, por Rudin 1979, teorema 4.18, B es compacto.

Q.E.D.

Lema 14. Considerar a los elementos $(n,n') \in \mathrm{N}\times \{0\}\cup\mathrm{N}$ y $c \in C_B^{n'}(\mathrm{R}^n)$, éste último tal que:

$$\exists (r,r') \in \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}: \forall\alpha \in \{\alpha \in (\{0\}\cup\mathrm{N})^n : |\alpha| \leq n'\}: |D^\alpha c| \leq r\rho_{r'}$$

Entonces $\psi(c) \in \bigcap_{(s,\alpha)\in(r'/2,\infty)\times(n',\infty)} \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n), H_{n',-s}(\mathrm{R}^n))$ (definición C.11) y es compacto.

Demostración.

$$\psi(c) \in \mathrm{B}(H_{n',r'/2}(\mathrm{R}^n), H_{n',-r'/2}(\mathrm{R}^n)) \Rightarrow \text{ (L.C.18, d.e.c.c. } s = r'/2)$$

$$\Rightarrow \psi(c) \in \bigcap_{s\in[r'/2,\infty)} \mathrm{B}(H_{n',r'/2}(\mathrm{R}^n), H_{n',-s}(\mathrm{R}^n)) \quad \text{(L.C.3)}$$

Entonces, por el lema 13, donde en este caso $(s_1,\alpha,B) = (r'/2, n', \psi(c))$; $\psi(c) \in \bigcap_{(s,\alpha)\in(r'/2,\infty)\times(n',\infty)} \mathrm{B}(H_{\alpha,s}(\mathrm{R}^n), H_{n',-s}(\mathrm{R}^n))$ y es compacto.

Q.E.D.

Lema 15. Considerar a los elementos $(n, n') \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \{0\} \cup \mathbf{N}$ y $(\omega, V) \in S^{n-1} \times C_B^{n'}(\mathbf{R}^n)$, éste último tal que:

$$\exists (r', r) \in (-\infty, -1) \times \mathbf{R}^+ : \forall \alpha \in \{\alpha \in (\{0\} \cup \mathbf{N})^n : |\alpha| \leq n'\} : |D^\alpha c| \leq r \rho_{r'}$$

Considerar a un elemento $s \in (1/2, -r'/2)$ y al conjunto consistente en los elementos inversibles en $\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n))$, $G \subset \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n))$. Entonces:

$$\forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 : I + V R_0^\omega(k) \in G$$

Demostración.

$$\forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0 : N(I + V R_0^\omega(k)) = \{0\} \quad \text{(L.7)} \tag{1}$$

Por el lema 14, donde en este caso $c = V$, $V \in \bigcap_{\alpha \in (n', \infty)} \mathrm{B}(H_{\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), H_{n',s}(\mathbf{R}^n))$ y es compacto; por Kato 1976, teorema III.4.8, todo $k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0$ es tal que $V R_0^\omega(k) \in \mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n))$ y es compacto; por (1) y por Rudin 1979, teorema 4.25, $-1 \in \rho(I + V R_0^\omega(k))$; luego, $I + V R_0^\omega(k) \in G$.

Q.E.D.

Lema 16. Mismas hipótesis que en lema 15. Entonces:
$\forall \rho \in (\sup |\Delta_0|, \infty) : \exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall (\alpha, k) \in [0, 1) \times \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta_0$:

$$\|R^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n), H_{n'+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq r(1 + |k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.
$\forall \rho \in (\sup |\Delta_0|, \infty) : \exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall \alpha \in [0.1)$:

$$\lim_{|k| \to \infty} \|I - (I + V R_0^\omega(k))\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\lim_{|k| \to \infty} \|V\|_{\mathrm{B}(H_{n'+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n), H_{n',s}(\mathbf{R}^n))} \|R_0^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n), H_{n'+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))} \leq$$
(L.C.18, d.e.e.c. $c = V$, y L.14, d.e.e.c. $c = V$)

$$\leq \lim_{|k|\to\infty} \|V\|_{\mathrm{B}(H_{n'+\alpha,-s}(\mathrm{R}^n),H_{n',s}(\mathrm{R}^n))} r(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2} = 0 \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \forall k \in \overline{\mathrm{C}^+} \setminus B_\rho(0): I + VR_0^\omega(k) \in G \quad \wedge \quad (L.15)$$

$$\wedge \quad \lim_{k'\to k} \|(I+VR_0^\omega(k)) - (I+VR_0^\omega(k'))\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\lim_{k'\to k} \|V\|_{\mathrm{B}(H_{n'+\alpha,-s}(\mathrm{R}^n),H_{n',s}(\mathrm{R}^n))} \|R_0^\omega(k) - R_0^\omega(k')\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0$$

Por lo tanto:

$$\|R^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} = \|R_0^\omega(k)(I+VR_0^\omega(k))^{-1}\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq \|R_0^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))} \|(I+VR_0^\omega(k))^{-1}\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n))} \leq$$

$$\leq r(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2} \sup_{k\in\overline{\mathrm{C}^+}\setminus B_\rho(0)} \|(I+VR_0^\omega(k))^{-1}\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n))}$$

$$(\text{L.A.26, d.e.e.c. } (S,A,f) = (\overline{\mathrm{C}^+} \setminus B_\rho(0), I+VR_0^\omega(\cdot)))$$

Q.E.D.

Pasaremos ahora al estudio de las funciones de onda generalizadas $\phi(x,k,\omega)$. En el siguiente lema probaremos que tales funciones son $H_{2,\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^n)$; en el lema 23 probaremos que son simultaneamente continuas como funciones de (x,k,ω), mientras que en el 24 demostraremos que son analíticas como funciones de k para todo x,ω.

Lema 17. Considerar a los elementos $n \in \mathrm{N} \setminus \{1\}$ y $V \in K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathrm{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2,$$

y suponer que $V \in L_s^2(\mathrm{R}^n)$. Entonces:

$\forall (k,\omega) \in \overline{\mathrm{C}^+} \setminus \Delta \times S^{n-1}$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R_0^\omega(k) - R_0^\omega(k+\imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L_s^2(\mathrm{R}^n),H_{2,-s}(\mathrm{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(\cdot,k,\omega) \in \bigcap_{(\alpha,s')\in(-\infty,2]\times\mathbf{R}} H_{\alpha,s'\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$$

Demostración.

$\forall(\alpha,s') \in (-\infty,2] \times \mathbf{R}$:

$$\phi(\cdot,k,\omega) = e^{ik\omega\cdot\cdot} - e^{ik\omega\cdot\cdot}R^{\omega}(k)V \in H_{\alpha,s'\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) + H_{\alpha,s'\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) = \quad \text{(L.C.29 y L.C.14)}$$

$$= H_{\alpha,s'\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$$

Por lo tanto:

$$\phi(\cdot,k,\omega) \in \bigcap_{(\alpha,s')\in(-\infty,2]\times\mathbf{R}} H_{\alpha,s'\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$$

Q.E.D.

Lema 18. Considerar a los elementos $(n,\Theta) \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times\{\phi,\{0\}\}$ y $V \in K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Suponer que $V \in L^2_s(\mathbf{R}^n)$. Entonces todo subconjunto compacto $S \subset \overline{\mathbf{C}^+}\setminus(\Theta\cup\Delta)$ es tal que:

$\forall(k,\omega) \in \overline{\mathbf{C}^+}\setminus(\Theta\cup\Delta) \times S^{n-1}$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R^{\omega}(k) - R^{\omega}(k+i\delta)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}} \|\phi(\cdot,k,\omega)\|_{L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)} < \infty$$

Demostración.

S es compacto; luego, $R^{\cdot}(\cdot)(S\times S^{n-1})$ es compacto, y por Rudin 1979, teorema 1.15, $\sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}} \|R^{\omega}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} < \infty$. Considerar a un subconjunto compacto $S' \subset \mathbf{R}^n$. Entonces:

$\exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall(k,\omega) \in S\times S^{n-1} : \forall x \in S'$:

$$|\phi(x,k,\omega)| = |e^{ik\omega\cdot x}(1 - R^{\omega}(k)V)(x)| \leq e^{|\mathrm{Im}\, k||\omega||x|}|1 - R^{\omega}(k)V|(x) \leq$$

$$\leq \exp\Big(\sup_{(k,x)\in S\times S'} |\mathrm{Im} kx|\Big)|1 - R^{\omega}(k)V|(x)$$

Por lo tanto:

$$\|\phi(\cdot,k,\omega)\|_{L^2(S')} \leq \Big\|\exp\Big(\sup_{(k,x)\in S\times S'} |\mathrm{Im} kx|\Big)(1 - R^{\omega}V)\Big\|_{L^2(S')} \leq$$

$$\leq \exp\Big(\sup_{(k,x)\in S\times S'} |\mathrm{Im} kx|\Big)\Big(\|1\|_{L^2(S')} + \|R^{\omega}(k)V\|_{L^2(S')}\Big) \leq$$

$$\leq \exp\Big(\sup_{(k,x)\in S\times S'} |\mathrm{Im} kx|\Big)\Big(\|1\|_{L^2(S')} + r\|R^{\omega}(k)V\|_{2,-s}\Big) \leq \quad (\mathrm{L.C.14})$$

$$\leq \exp\Big(\sup_{(k,x)\in S\times S'} |\mathrm{Im} kx|\Big)\Big(\|1\|_{L^2(S')} + r\|R^{\omega}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n),H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))}\|V\|_{0,s}\Big)$$

Por lo tanto:

$$\sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}} \|\phi(\cdot,k,\omega)\|_{L^2(S')} \leq$$

$$\exp\Big(\sup_{(k,x)\in S\times S'} |\mathrm{Im} kx|\Big)\Big(\|1\|_{L^2(S')} + r \sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}} \|R^{\omega}(k)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n),H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))}\|V\|_{0,s}\Big) < \infty$$

Q.E.D.

Lema 19. Mismas hipótesis que en el lema 18. Entonces:
$\forall (k,\omega) \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta \times S^{n-1}$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R^{\omega}(k) - R^{\omega}(k+i\delta)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n),H_{2,-s}(\mathbb{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega')\|_{L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Demostración.

$\forall c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\colon \exists r \in \mathbf{R}^+\colon \forall (k',\omega') \in B_1(k) \cap \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\Theta \cup \Delta) \ \times S^{n-1}\colon \forall x \in \operatorname{supp} c\colon$

$$|e^{\imath k'\omega'\cdot x}((R^\omega(k) - R^{\omega'}(k'))V)(x)| \leq e^{|\mathrm{Im}\ k'||\omega'||x|}|(R^\omega(k) - R^{\omega'}(k'))V|(x) \leq$$

$$\leq \exp\Big(\sup_{(k',x)\in B_1(k)\cap\overline{\mathbf{C}^+}\setminus(\Theta\cup\Delta)\ \times\operatorname{supp} c} |\mathrm{Im}\ k'x|\Big)|(R^\omega(k) - R^{\omega'}(k'))V|(x)$$

Por lo tanto:

$$\|c(\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega'))\|_{0,0} = \|c[e^{\imath k\omega\cdot\cdot}(1 - R^\omega(k)V) - e^{\imath k'\omega'\cdot\cdot}(1 - R^{\omega'}(k')V)]\|_{0,0} =$$

$$= \|c(e^{\imath k\omega\cdot\cdot} - e^{\imath k'\omega'\cdot\cdot})(1 - R^\omega(k)V) + ce^{\imath k'\omega'\cdot\cdot}(R^{\omega'}(k') - R^\omega(k))V\|_{0,0} \leq$$

$$\leq \|c(e^{\imath k\omega\cdot\cdot} - e^{\imath k'\omega'\cdot\cdot})(1 - R^\omega(k)V)\|_{0,0}+$$

$$+\left\|\exp\Big(\sup_{(k',x)\in B_1(k)\cap\overline{\mathbf{C}^+}\setminus(\Theta\cup\Delta)\ \times\operatorname{supp} c} |\mathrm{Im}\ k'x|\Big)\|c(R^\omega(k) - R^{\omega'}(k'))V\right\|_{0,0} \leq$$

$$\leq \|c(e^{\imath k\omega\cdot\cdot} - e^{\imath k'\omega'\cdot\cdot})(1 - R^\omega(k)V)\|_{0,0}+$$

$$+ \exp\Big(\sup_{(k',x)\in B_1(k)\cup\overline{\mathbf{C}^+}\setminus(\Theta\cup\Delta)\ \times\operatorname{supp} c} |\mathrm{Im}\ k'x|\Big) r\|(R^\omega(k) - R^{\omega'}(k'))V\|_{2,-s} \quad \text{(L.C.14)}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \|c(\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega'))\|_{0,0} \leq$$

$$\leq \lim_{(k',\omega')\to(k,\omega)} \Big[\|c(e^{\imath k\omega\cdot\cdot} - e^{\imath k'\omega'\cdot\cdot})(1 - R^\omega(k)V)\|_{0,0}+$$

$$\Rightarrow \phi(\cdot,k,\omega) \in \bigcap_{(\alpha,s')\in(-\infty,2]\times\mathbf{R}} H_{\alpha,s'\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$$

Demostración.

$\forall(\alpha,s') \in (-\infty,2] \times \mathbf{R}$:

$$\phi(\cdot,k,\omega) = e^{ik\omega\cdot\cdot} - e^{ik\omega\cdot\cdot}R^{\omega}(k)V \in H_{\alpha,s'\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) + H_{\alpha,s'\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) = \quad \text{(L.C.29 y L.C.14)}$$

$$= H_{\alpha,s'\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$$

Por lo tanto:

$$\phi(\cdot,k,\omega) \in \bigcap_{(\alpha,s')\in(-\infty,2]\times\mathbf{R}} H_{\alpha,s'\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$$

Q.E.D.

Lema 18. Considerar a los elementos $(n,\Theta) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \{\phi,\{0\}\}$ y $V \in K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Suponer que $V \in L^2_s(\mathbf{R}^n)$. Entonces todo subconjunto compacto $S \subset \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\Theta \cup \Delta)$ es tal que:

$\forall(k,\omega) \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\Theta \cup \Delta) \times S^{n-1}$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R^{\omega}(k) - R^{\omega}(k+i\delta)\|_{\mathbf{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}} \|\phi(\cdot,k,\omega)\|_{L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)} < \infty$$

Demostración.

S es compacto; luego, $R^{\cdot}(\cdot)(S \times S^{n-1})$ es compacto, y por Rudin 1979, teorema 1.15, $\sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}} \|R^{\omega}(k)\|_{\mathbf{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} < \infty$. Considerar a un subconjunto compacto $S' \subset \mathbf{R}^n$. Entonces:

$\exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall(k,\omega) \in S \times S^{n-1} : \forall x \in S'$:

$$\leq r \sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}} \|\phi(\cdot,k,\omega)\|_{L^2(B_1(x))} \quad \text{(L.18)}$$

Q.E.D.

Lema 21. Mismas hipótesis que en lema 20. Entonces todo par de subconjuntos compactos $S \subset \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\Theta \cup \Delta)$, $S' \subset \mathbf{R}^n$, es tal que:

$\forall (k,\omega) \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\Theta \cup \Delta) \times S^{n-1}$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R^\omega(k) - R^\omega(k+\imath\delta)\|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Rightarrow \sup_{(k,\omega,x)\in S\times S^{n-1}\times S'} |\phi(x,k,\omega)| < \infty$$

Demostración.

$$\exists n' \in \mathbf{N}: \exists \{s_i \in S' : i \in \{1,\ldots,n'\}\} : S' \subset \bigcup_{i=1}^{n'} B_{1/2}(s_i) \quad \text{(Pues } S' \text{ es compacto.)}$$

Por lo tanto:

$$\exists (r_1,\ldots,r_{n'}) \in \mathbf{R}^+ \times \ldots \times \mathbf{R}^+ : \forall (k,\omega,x) \in S \times S^{n-1} \times S' : \exists i \in \{1,\ldots,n'\} : x \in B_{1/2}(s_i)$$

Por lo tanto:

$$|\phi(x,k,\omega)| \leq r_i \leq \text{(L.20)}$$

$$\leq \max\{r_1,\ldots,r_{n'}\}$$

Por lo tanto:

$$\sup_{(k,\omega,x)\in S\times S^{n-1}\times S'} |\phi(x,k,\omega)| \leq \max\{r_1,\ldots,r_{n'}\}$$

Q.E.D.

Lema 22. Mismas hipótesis que en lema 20. Entonces todo subconjunto compacto $S \subset \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\Theta \cup \Delta)$ es tal que:

$$\forall (k,\omega) \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus (\Theta \cup \Delta) \quad \times S^{n-1} : \lim_{\delta \downarrow 0} \| R^{\omega}(k) - R^{\omega}(k + \imath\delta) \|_{\mathrm{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n), H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbf{R}^n : \exists (r_1, r_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ : \forall (k, k', \omega, \omega') \in S \times S \times S^{n-1} \times S^{n-1} :$$

$$|\phi(x,k,\omega) - \phi(x,k',\omega')| \le r_1 (\|\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega')\|_{L^2(B_1(x))} + r_2 |k^2 - (k')^2|)$$

Demostración.

$$\forall (k,k',\omega,\omega') \in S \times S \times S^{n-1} \times S^{n-1} : \phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega') \in H_{2\ \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \quad \text{(L.17)}$$

Por lo tanto:

$$\exists \theta \in (0,1/2) : \forall x \in \mathbf{R}^n : \exists r \in \mathbf{R}^+ : \forall (k,k',\omega,\omega') \in S \times S \times S^{n-1} \times S^{n-1} :$$

$$|\phi(x,k,\omega) - \phi(x,k',\omega')| \le$$

$$\le r \Bigg[\|\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega')\|_{L^2(B_1(x))} +$$

$$+ \left(\sup_{x' \in B_1(x)} \int_{B_1(x)} |(k^2 - (k')^2 \phi(y,k',\omega')|^2 |x' - y|^{4-(n+2\theta)} dy \right)^{1/2} \Bigg] \le$$

(Por (3.107) y Agmon 1975, teorema C.1)

$$\le r \Bigg[\|\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega')\|_{L^2(B_1(x))} +$$

$$+ \left(\sup_{x' \in B_1(x)} \int_{B_1(x)} |k^2 - (k')^2|^2 \sup_{(k,\omega,b) \in S \times S^{n-1} \times B_1(x)} |\phi(b,k,\omega)|^2 |x' - y|^{4-(n+2\theta)} dy \right)^{1/2} \Bigg] =$$

(L.21)

$$= r\left[\|\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega')\|_{L^2(B_1(x))}+\right.$$

$$\left.+\left(\sup_{(k,\omega,b)\in S\times S^{n-1}\times B_1(x)} |\phi(b,k,\omega)|^2 \sup_{x'\in B_1(x)} \int_{B_1(x)-x'} |y|^{4-(n+2\theta)}dy\right)^{1/2} |k^2-(k')^2|\right] \leq$$

$$\leq r\left[\|\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega')\|_{L^2(B_1(x))}+\right.$$

$$\left.+\left(\sup_{(k,\omega,b)\in S\times S^{n-1}\times B_1(x)} |\phi(b,k,\omega)|^2 \sup_{x'\in B_1(x)} \int_{B_2(x)} |y|^{4-(n+2\theta)}dy\right)^{1/2} |k^2-(k')^2|\right] =$$

$$= r\left[\|\phi(\cdot,k,\omega) - \phi(\cdot,k',\omega')\|_{L^2(B_1(x))}+\right.$$

$$\left.+\left(\sup_{(k,\omega,b)\in S\times S^{n-1}\times B_1(x)} |\phi(b,k,\omega)|^2 \|1\|_{L^2(S^{n-1})} \int_0^2 |y|^{4-(n+2\theta)}|y|^{n-1}d|y|\right)^{1/2} |k^2-(k')^2|\right]$$

Q.E.D.

Lema 29. Mismas hipótesis que en lema 20. Entonces:
$\forall (k,\omega,x) \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta \times S^{n-1} \times \mathbf{R}^n$:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \|R^\omega(k) - R^\omega(k+\imath\delta)\|_{\mathbf{B}(L^2_s(\mathbf{R}^n),H_{2,-s}(\mathbf{R}^n))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(k',\omega',x')\to(k,\omega,x)} |\phi(x,k,\omega) - \phi(x',k',\omega')| = 0$$

Demostración.
$\exists \theta \in (0,1/2): \forall x \in \mathbf{R}^n: \exists (r_1,r_2,r_3) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$:

$$\lim_{(k',\omega',x')\to(k,\omega,x)} |\phi(x,k,\omega) - \phi(x',k',\omega')| \leq$$

$$\leq \lim_{(k',\omega',x')\to(k,\omega,x)} (|\phi(x,k,\omega) - \phi(x,k',\omega')| + |\phi(x,k',\omega') - \phi(x',k',\omega')|) \leq$$

$$\leq \lim_{(k',\omega',x')\to(k,\omega,x)} [r_1(\|\phi(\cdot,k,\omega)-\phi(\cdot,k',\omega')\|_{L^2(B_1(x))} + r_2|k^2-(k')^2|) + r_3|x-x'|^{\theta}$$

(L.22 y L.20)

$$= 0 \quad \text{(L.19)}$$

Q.E.D.

Lema 24. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ y $(\omega, V) \in S^{n-1} \times K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Suponer que:

$$V \in L^2_s(\mathbf{R}^n) \quad \wedge \quad \forall (k,x) \in \mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d \times \mathbf{R}^n\colon \lim_{(k',x')\to(k,x)} |\phi(x,k,\omega)-\phi(x',k',\omega)| = 0 \quad (1)$$

Entonces todo $x \in \mathbf{R}^n$ es tal que $\phi(x,\cdot,\omega)$ es analítica en $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$.

Demostración.

$$\forall (k,x) \in \mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d \times \mathbf{R}^n\colon \lim_{(k',x')\to(k,x)} |(R^{\omega}(k)V)(x) - (R^{\omega}(k')V)(x')| =$$

$$= \lim_{(k',x')\to(k,x)} |e^{\imath k\omega\cdot x}\phi(x,k,\omega) - e^{\imath k'\omega\cdot x'}\phi(x',k',\omega)| = 0 \quad \text{(Por (1).)} \qquad (2)$$

Por el lema 11, $R^{\omega}(\cdot)$ es analítica en $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$; por lo que todo contorno cerrado $C \subset \mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$ interior a $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$ es tal que:

$$\forall c \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)\colon \int_{\mathbf{R}^n}\int_C (R^{\omega}(k)V)(x)dk\ c(x)dx = \int_C \int_{\mathbf{R}^n} (R^{\omega}(k)V)(x)c(x)dxdk =$$

(Por (2) y por el teorema de Fubini.)

$$= \int_C (R^{\omega}(k)V, \bar{c})dk = 0 \quad \text{(Teorema de Cauchy.)}$$

Por lo tanto:

$$\forall x \in \mathbf{R}^n: \int_C (R^\omega(k)V)(x)dk = 0 \quad \text{(Por (2))}$$

Entonces, por (2) y por el teorema de Morera, todo $x \in \mathbf{R}^n$ es tal que $(R^\omega(\cdot)V)(x)$ es analítica en $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$; luego, $\phi(x,\cdot,\omega)$ es analítica en $\mathbf{C}^+ \setminus \Delta_d$.

Q.E.D.

Lema 25. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1,2\}$ y $V \in K_2$, este último con elemento $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ correspondiente y tal que supp V sea compacto. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Suponer que cero no es resonancia correspondiente a H. Entonces:

$$(0,V) \in \sigma_p(H)^c \times L_s^2(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \Delta: \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \left| \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ik\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k,\omega')dx \right|^2 d\omega' d\omega < \infty$$

Demostración.

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \left| \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ik\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k,\omega')dx \right|^2 d\omega' d\omega \leq$$

$$\leq \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \|e^{-ik\omega\cdot x}V\|_{0,0}^2 \|\chi_{\text{supp } V}\phi(\cdot,k,\omega')\|_{0,0}^2 d\omega' d\omega \leq$$

$$\leq \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \|e^{-ik\omega\cdot x}V\|_{0,0}^2 \sup_{\varpi \in S^{n-1}} \|\chi_{\text{supp } V}\phi(\cdot,k,\varpi)\|_{0,0}^2 d\omega' d\omega =$$

$$= \left(\|1\|_{L^1(S^{n-1})} \|V\|_{0,0} \sup_{\omega \in S^{n-1}} \|\phi(\cdot,k,\omega)\|_{L^2(\text{supp } V)} \right)^2 < \infty \quad \text{(L.18)}$$

Q.E.D.

Para cerrar este apéndice nos referiremos a la función $\psi(x,k,\omega)$. En realidad sólo daremos un par de lemas de apoyo para las demostraciones del teorema 4.6 (en lo que se refiere a la aplicación del lema de Sobolev), y del lema 4.7.

Lema 26. Considerar a los elementos $(n,n') \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times\{0\}\cup\mathbf{N}$ y $(\omega,V)\in S^{n-1}\times C_B^{n'}(\mathbf{R}^n)$, este último tal que:

$$\exists(r',r)\in(-\infty,-1)\times\mathbf{R}^+:\forall\alpha\in\{\alpha\in(\{0\}\cup\mathbf{N})^n:|\alpha|\le n'\}:|D^\alpha V|\le r\rho_{r'}$$

Suponer que cero no es resonancia correspondiente a H. Entonces:

$$\overline{\mathbf{R}^-}\cap\sigma_p(H)=\phi\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\forall s\in(1/2,-r'/2):\exists\rho\in\mathbf{R}^+:\forall(\alpha,k)\in[0,1)\times\overline{\mathbf{C}^+}:$$

$$\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}\le\rho(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.
$\forall s\in(1/2,-r'/2):\exists\rho\in\mathbf{R}^+:\forall\alpha\in[0,1):\forall k\in\overline{\mathbf{C}^+}\cap B_1(0)$:

$$\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}\le\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{2+n',-s}(\mathbf{R}^n))}\le$$

$$\le\sup_{k\in\overline{\mathbf{C}^+}\cap B_1(0)}\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{2+n',-s}(\mathbf{R}^n))}\le$$

$$\le 2^{1/2}(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}\sup_{k\in\overline{\mathbf{C}^+}\cap B_1(0)}\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{2+n',-s}(\mathbf{R}^n))}$$

Por lo tanto:

$$\forall k\in\overline{\mathbf{C}^+}:\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}=$$

$$=\chi_{\overline{\mathbf{C}^+}\cap B_1(0)}(k)\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}+$$

$$+\chi_{\overline{\mathbf{C}^+}\setminus B_1(0)}(k)\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathbf{R}^n))}\le$$

$$\le\chi_{\overline{\mathbf{C}^+}\cap B_1(0)}(k)2^{1/2}(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}\sup_{k\in\overline{\mathbf{C}^+}\cap B_1(0)}\|R^\omega(k)\|_{\mathbf{B}(H_{n',s}(\mathbf{R}^n),H_{2+n',-s}(\mathbf{R}^n))}+$$

$$+\chi_{\overline{\mathbf{C}^+}\setminus B_1(0)}(k)\rho(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2} \leq \quad (L.16)$$

$$\leq \max\left\{2^{1/2} \sup_{k\in\overline{\mathbf{C}^+}\cap B_1(0)} \|R^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n),H_{2+n',-s}(\mathrm{R}^n))}, \rho\right\}(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Q.E.D.

Lema 27. Considerar a los elementos $(n,n') \in \mathbf{N}\setminus\{1\} \times\{0\}\cup\mathbf{N}$ y $(\omega,V) \in S^{n-1}\times C_B^{n'}(\mathbf{R}^n)$, éste último tal que:

$$\exists (r',r) \in (-\infty,-(1+n)/2)\times\mathbf{R}^+ : \forall\alpha\in\{\alpha\in(\{0\}\cup\mathbf{N})^n : |\alpha|\leq n'\} : |D^\alpha V| \leq r\rho_{r'}$$

Suponer que cero no es resonancia correspondiente a H. Entonces:

$$\overline{\mathbf{R}^-}\cap\sigma_p(H) = \phi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall s\in(1/2,-(r'+\max\{0,n+r'\})/2) : \exists\rho\in\mathbf{R}^+ : \forall(\alpha,k)\in[0,1)\times\overline{\mathbf{C}^+}:$$

$$\|\psi(\cdot,k,\omega)\|_{n'+\alpha,-s} \leq \rho\|V\|_{n',s}(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}$$

Demostración.

$$\|\psi(\cdot,k,\omega)\|_{n'+\alpha,-s} = \|R^\omega(k)V\|_{n'+\alpha,-s} \leq \|R^\omega(k)\|_{\mathrm{B}(H_{n',s}(\mathrm{R}^n),H_{n'+\alpha,-s}(\mathrm{R}^n))}\|V\|_{n',s} \leq$$

$$\leq \rho(1+|k|^2)^{(\alpha-1)/2}\|V\|_{n',s} \quad (L.26)$$

Q.E.D.

Lema 28. Considerar a los elementos $n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$, $x\in\mathbf{R}^n$ y $V\in K_2$, éste último con elemento $\epsilon\in\mathbf{R}^+$ correspondiente. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Entonces:

$$V \in L^2_s(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \mathbf{R}\backslash(-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2}) : \psi(x,k,\cdot) = P_\omega S_x(k) P_k \psi(x,k,\cdot) + (I - P_\omega S_x(k))1$$

Demostración.

$$P_\omega S_x(k) P_k \psi(x,k,\cdot) + (I - P_\omega S_x(k))1 = P_\omega S_x(k) P_k (1 - e^{-\imath k\cdot\cdot x}\phi(x,k,\cdot)) + (I - P_\omega S_x(k))1 =$$

$$-P_\omega e^{\imath k\omega\cdot x} S(k) e^{-\imath k\omega\cdot x} e^{\imath k\cdot\cdot x}\phi(x,-k,\cdot) + 1 = \quad (\text{L.4.2})$$

$$= -P_\omega e^{\imath k\cdot\cdot x}\phi(x,k,-\cdot) + 1 = \quad (\text{L.4.1})$$

$$= -e^{-\imath k\cdot\cdot x}\phi(x,k,\cdot) + 1 = \psi(x,k,\cdot)$$

Q.E.D.

Apéndice I. El operador de Marchenko-Newton generalizado

Resultados varios.

Iniciaremos este apéndice con un par de resultados que habían quedado pendientes debido a que se basan en lemas apenas probados en los últimos apéndices. En el lema 1 probamos que el espectro puntual negativo de H es discreto. En el lema 5 probaremos que el kernel $K(\bar{x}, \bar{y}, k + \imath\delta, \xi_\perp)$ definido en la demostración del lema 3.6, tiene norma en $L^2(\mathrm{R}^6)$ finita.

Lema 1. Todo $V \in K_2$ es tal que el conjunto $\mathrm{R}^- \cap \sigma_p(H)$ es discreto.

Demostración.

$$H = H^* \quad \wedge \quad (\mathrm{L.E.13})$$

$$\wedge \quad \sigma_e(H) = \overline{\mathrm{R}^+} \quad (\mathrm{L.H.1})$$

Por Kato 1976, observación X.1.11, se concluye que $\mathrm{R}^- \cap \sigma_p(H)$ es discreto.

Q.E.D.

Lema 2.

$$\forall (r, r', x) \in \mathrm{R}^- \times \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^3 : \int_{B_{r'}(x)} |x - x'|^{-2} \rho_r(x') dx' \leq 4\pi r' \sup_{t \in [-|x|, r' - |x|]} (1 + t^2)^{r/2}$$

Demostración.

$$\int_{B_{r'}(x)} |x - x'|^{-2} \rho_r(x') dx' = \int_{B_{r'}(0)} |x'|^{-2} \rho_r(x' - x) dx' \leq \int_{B_{r'}(0)} |x'|^{-2} [1 + (|x'| - |x|)^2]^{r/2} dx' =$$

$$= \int_{S^2}\int_0^{r'} |x'|^{-2}[1+(|x'|-|x|)^2]^{r/2}|x'|^2 d|x'|d\omega = 4\pi\int_{-|x|}^{r'-|x|}(1+t^2)^{r/2}dt \leq$$

$$\leq 4\pi \sup_{t\in[-|x|,r'-|x|]}(1+t^2)^{r/2}\ r'$$

Q.E.D.

Lema 3.

$$\forall (s,r_1,r_2,r)\in(-\infty,\ 2)\times \mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3\colon \int_{B_{r_1}(0)\cap B_{r_2}(r)^c}|r-x|^{-2}\rho_s(x)dx \leq \pi r_1(2r_2^{-1})^2$$

Demostración.

$$\int_{B_{r_1}(0)\cap B_{r_2}(r)^c}|r-x|^{-2}\rho_s(x)dx \leq (r_2)^{-2}\int_{B_{r_1}(0)}\rho_s(x)dx = (r_2)^{-2}\int_{S^2}\int_0^{r_1}\rho_s(x)|x|^2 d|x|d\omega \leq$$

$$\leq (r_2)^{-2}\int_{S^2}\int_0^{r_1} d|x|d\omega = \pi r_1(2r_2^{-1})^2$$

Q.E.D.

Lema 4. $\forall (s,r_1,r_2)\in(-\infty,-2)\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\colon \forall b\in B_{r_1}(0)$:

$$\int_{(B_{r_1}(0)\cup B_{r_2}(b))^c}|b-x|^{-2}\rho_s(x)dx \leq 4\pi(r_1-|b|)^{-1}(1+r_1^2)^{(2+s)/2}$$

Demostración.

$$\int_{(B_{r_1}(0)\cup B_{r_2}(b))^c}|b-x|^{-2}\rho_s(x)dx \leq \int_{B_{r_1}(0)^c}(|b|-|x|)^2\rho_s(x)dx =$$

$$= \int_{S^2}\int_{r_1}^{\infty}(|b|-|x|)^{-2}\rho_s(x)|x|^2 d|x|d\omega \leq \int_{S^2}\int_{r_1}^{\infty}(|b|-|x|)^{-2}(1+r_1^2)^{(2+s)/2}d|x|d\omega =$$

$$= 4\pi(1+r_1^2)^{(2+s)/2}\int_{r_1-|b|}^{\infty}t^{-2}dt = 4\pi(1+r_1^2)^{(2+s)/2}(r_1-|b|)^{-1}$$

Q.E.D.

Lema 5. $\forall s \in (-\infty, -2)$: $\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |x-y|^{-2}\rho_s(x)\rho_s(y)dxdy < \infty$

Demostración.

$$\forall s \in (-\infty, -2)\colon \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |x-y|^{-2}\rho_s(x)\rho_s(y)dydx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_s(x)\left(\int_{B_{1+|x|/2}(x)} |x-y|^{-2}\rho_s(y)dy + \int_{B_{1+2|x|}(0)\cap B_{1+|x|/2}(x)^c} |x-y|^{-2}\rho_s(y)dy + \right.$$

$$\left. + \int_{(B_{1+2|x|}(0)\cup B_{1+|x|/2}(x))^c} |x-y|^{-2}\rho_s(y)dy\right)dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \rho_s(x)\Big(4\pi(1+|x|/2)\sup_{t\in[-|x|,1-|x|/2]}(1+t^2)^{s/2} + \pi(1+2|x|)[2(1+|x|/2)^{-1}]^2 +$$

$$+4\pi(1+|x|)^{-1}[1+(1+2|x|)^2](2+s)/2\Big)dx = \quad \text{(L.2, L.3 y L.4)}$$

$$= \int_{S^2}\int_0^\infty \rho_s(x)\Big(4\pi(1+|x|/2)\sup_{t\in[-|x|,1-|x|/2]}(1+t^2)^{s/2} + \pi(1+2|x|)[2(1+|x|/2)^{-1}]^2 +$$

$$+4\pi(1+|x|)^{-1}[1+(1+2|x|)^2]^{(2+s)/2}\Big)|x|^2d|x|d\omega \leq$$

$$\leq \int_{S^2}\int_0^\infty \rho_{2+s}(x)\Big(4\pi(1+|x|/2)\sup_{t\in[-|x|,1-|x|/2]}(1+t^2)^{s/2} + \pi(1+2|x|)[2(1+|x|/2)^{-1}]^2 +$$

$$+4\pi(1+|x|)^{-1}[1+(1+2|x|)^2]^{(2+s)/2}\Big)d|x|d\omega =$$

$$= (4\pi)^2\left(\int_0^2 \rho_{2+s}(x)\Big((1+|x|/2)\sup_{t\in[-|x|,1-|x|/2]}(1+t^2)^{s/2} + (1+2|x|)(1+|x|/2)^{-2} + \right.$$

$$+(1+|x|)^{-1}[1+(1+2|x|)^2]^{(2+s)/2}\Big)d|x|+$$

$$+\int_2^\infty \rho_{2+s}(x)\Big((1+|x|/2)\sup_{t\in[-|x|,1-|x|/2]}(1+t^2)^{s/2}+$$

$$+(1+2|x|)(1+|x|/2)^{-2}+(1+|x|)^{-1}[1+(1+2|x|)^2]^{(2+s)/2}\Big)d|x|\Big)\leq$$

$$\leq(4\pi)^2\Big(\int_0^2\{(1+|x|/2)+(1+2|x|)(1+|x|/2)^{-2}+(1+|x|)^{-1}\}d|x|+$$

$$+\int_2^\infty |x|^{2+s}\{(1+|x|/2)(-2^{-3/2}|x|)^s+(1+2|x|)(|x|/2)^{-2}+|x|^{-1}(2|x|)^{2+s}\}d|x|\Big)<\infty$$

Q.E.D.

El operador de Marchenko-Newton generalizado.

Esta primer serie de lemas son de apoyo a las demostraciones del teorema 4.3 y del lema 4.4; en particular a la demostración de que el operador de Marchenko-Newton generalizado M_x es autoadjunto.

Lema 6. $\forall\pm\in\{-,+\}: \chi_\pm(t)=\chi_\pm(t)^*$

Demostración.

Considerar al conjunto:

$$\{\pm,\mp\}=\{-,+\}$$

Entonces:

$$\forall n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}: R(\chi_\pm(t))=L^2(\mathbf{R}^\pm,L^2(S^{n-1}))=L^2(\mathbf{R}^\mp,L^2(S^{n-1}))^\perp=$$
$$(\text{L.B.14, d.c.e.c. }(E,S_1,S_2,B)=(\mathbf{R},\mathbf{R}^\pm,\mathbf{R}^\mp,L^2(S^{n-1})))$$

$$= N(\chi_\pm(t))^\perp$$

Por lo tanto:

$$\chi_\pm(t) = \chi_\pm(t)^* \quad \text{(Rudin 1979, teorema 12.14)}$$

Q.E.D.

Lema 7. $\forall \pm \in \{-,+\}: P_\pm = F_1^* \chi_\pm(t) F_1$

Demostración.

$$\forall(\pm, n) \in \{-,+\} \times \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall l \in L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1})): l = F_1^* F_1 l = F_1^* \chi_-(t) F_1 l + F_1^* \chi_+(t) F_1 l$$
$$\text{(L.B.14, d.e.e.c. } (E, S_1, S_2, B) = (\mathbf{R}, \mathbf{R}^-, \mathbf{R}^+, L^2(S^{n-1})))$$

Por lo tanto:

$$P_\pm l = F_1^* \chi_\pm(t) F_1 l$$

Por lo tanto:

$$P_\pm = F_1^* \chi_\pm(t) F_1$$

Q.E.D.

Lema 8. $P_- = P_k P_+ P_k$

Demostración.

$$P_k P_+ P_k = (F_1^*)^2 F_1^* \chi_+(t) F_1 P_k = \quad \text{(L.7)}$$

$$F_1^* P_k \chi_+(t) F_1 P_k = F_1^* \chi_-(t) P_k F_1 P_k = F_1^* \chi_-(t) F_1^2 F_1 F_1^2 = F_1^* \chi_-(t) F_1 = P_- \quad \text{(L.7)}$$

Q.E.D.

Lema 9. Considerar al conjunto:

$$\{\pm, \mp\} = \{-, +\}$$

Entonces:

$$P_\pm P_\mp = 0$$

Demostración.

$$P_\pm P_\mp = F_1^* \chi_\pm(t) F_1 F_1^* \chi_\mp(t) F_1 = \quad \text{(L.7)}$$

$$= F_1^* \chi_\pm(t) \chi_\mp(t) F_1 = 0$$

Q.E.D.

Lema 10.

$$\forall (\pm, n) \in \{-, +\} \times \mathbf{N} \setminus \{1\} \colon \forall F \in \mathbf{F}(\mathrm{R}, \mathrm{L}(L^2(S^{n-1}))) \colon \forall d \in D(\Phi(F)) \cap D(\Phi(F)\chi_\pm(t)) \colon$$

$$\chi_\pm(t)\Phi(F)d = \Phi(F)\chi_\pm(t)d \quad \text{(D.B.7)}$$

Demostración.

$$(\text{c.t.p.}) r \in \mathrm{R} \colon (\chi_\pm(t)\Phi(F)d)(r) = \chi_\pm(t)F(r)d(r) = \quad \text{(D.B.7)}$$

$$= F(r)\chi_\pm(t)d(r) = (\Phi(F)\chi_\pm(t)d)(r) \quad \text{(D.B.7)}$$

Por lo tanto:

$$\chi_\pm(t)\Phi(F)d = \Phi(F)\chi_\pm(t)d$$

Q.E.D.

Lema 11. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ y $l \in L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1}))$, éste último tal que supp l sea compacto. Entonces:

$$F_1 P_\omega l = P_\omega F_1 l$$

Demostración.

$$\forall r \in \mathbb{R}: (F_1 P_\omega l)(r) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath r r'} (P_\omega l)(r') dr' = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath r r'} P_\omega l(r') dr' =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} P_\omega e^{-\imath r r'} l(r') dr' = (2\pi)^{-1/2} P_\omega \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath r r'} l(r') dr' = P_\omega (F_1 l)(r) = (P_\omega F_1 l)(r)$$

Por lo tanto:

$$F_1 P_\omega l = P_\omega F_1 l$$

Q.E.D.

Lema 12. $\forall \pm \in \{-,+\}: P_\pm P_\omega = P_\omega P_\pm$

Demostración.

$$\forall \pm \in \{-,+\}: P_\pm P_\omega = F_1^* \chi_\pm(t) F_1 P_\omega = \quad (\text{L.7})$$

$$= F_1^* \chi_\pm(t) P_\omega F_1 = \quad (\text{L.11})$$

$$= F_1^* P_\omega \chi_\pm(t) F_1 = \quad (\text{L.10})$$

$$= P_\omega F_1^* \chi_\pm(t) F_1 = \quad (\text{L.11})$$

$$= P_\omega P_\pm \quad (\text{L.7})$$

Q.E.D.

Lema 13. $R(P_\omega P_k P_+) \subset H_-$

Demostración.

$$R(P_\omega P_k P_+) = R(P_\omega P_- P_k) = \quad (\text{L.8})$$

$$= R(P_- P_\omega P_k) \subset \text{ (L.12)}$$

$$\subset H_-$$

Q.E.D.

Lema 14. $\forall V \in K_2 \colon P_k S^T(k) P_\omega = S^T(-k) P_\omega P_k$

Demostración.

$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \colon \forall V \in K_2 \colon \forall l \in L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1})) \colon \forall k \in \mathbf{R} \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \{0\} \cup \sigma_+(H)^{1/2})$:

$$(P_k S^T(\cdot) P_\omega l)(k) = (S^T(\cdot) P_\omega)(-k) = S^T(-k) P_\omega l(-k) = S^T(-k) P_\omega (P_k l)(k)$$

Por lo tanto:

$$P_k S^T(\cdot) P_\omega l = S^T(-k) P_\omega P_k l$$

Por lo tanto:

$$P_k S^T(k) P_\omega = S^T(-k) P_\omega P_k$$

Q.E.D.

Lema 15. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \colon \forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times K_2 \colon \hat{M}_x = \hat{M}_x^*$

Demostración.

$$\hat{M}_x^* = (P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k P_+)^* = P_+^* P_k^* (S_x^T(k) P_\omega)^* P_+^* =$$
$$\text{(L.B.10, d.e.e.c. } (E, B, F) = (\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}), S_x^T(\cdot) P_\omega))$$

$$= P_+ P_k S_x^T(-k) P_\omega P_+ = \text{ (L.6 y L.7, y L.F.18)}$$

$$= P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k P_+ = \text{ (L.14)}$$

$$= \hat{M}_x$$

Q.E.D.

Lema 16. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times K_2: M_x = F_1 \hat{M}_x F_1^*$

Demostración.

$$M_x = \chi_+(t) F_1 S_x^T(k) P_\omega P_k F_1^* \chi_+(t) = F_1 P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k P_+ F_1^* = \text{ (L.7)}$$

$$= F_1 \hat{M}_x F_1^*$$

Q.E.D.

Lema 17.

$$\forall (n, c) \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \times \mathbf{C}: \forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times K_2: N(M_x - c) = F_1 N(P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k - c)$$

Demostración.

$$n \in N(M_x - c) \Leftrightarrow F_1 (P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k - c) F_1^* n = (F_1 P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k F_1^* \chi_+(t) - c) n =$$

$$= (\chi_+(t) F_1 S_x^T(k) P_\omega P_k F_1^* \chi_+(t) - c) n = \text{ (L.7)}$$

$$= (M_x - c) n = 0 \Leftrightarrow (P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k - c) F_1^* n = 0 \Leftrightarrow F_1^* n \in N(P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k - c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \in F_1 N(P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k - c)$$

Por lo tanto:

$$N(M_x - c) = F_1 N(P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k - c)$$

Q.E.D.

Lema 18.

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times K_2: P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k P_+ = P_+ (S_x^T(k) - I) P_\omega P_k P_+$$

Demostración.

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: P_+ P_\omega P_k P_+ = P_\omega P_+ P_k P_+ = \quad (\mathrm{L}.12)$$

$$= P_\omega P_k P_- P_+ = \quad (\mathrm{L}.8)$$

$$= 0 \quad (\mathrm{L}.9)$$

Por lo tanto:

$$\forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times K_2:$$

$$P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k P_+ = P_+ S_x^T(k) P_\omega P_k P_+ - P_+ P_\omega P_k P_+ = P_+ (S_x^T(k) - I) P_\omega P_k P_+$$

Q.E.D.

Lema 19. $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}: \forall (x, V) \in \mathbf{R}^n \times K_2: \|M_x\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1})))} \leq 1$

Demostración.

$$\|S_x^T(k) P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbf{R}, L^2(S^{n-1})))} \leq \sup_{k \in \mathbf{R}} \|S_x^T(k) P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$
$$(L.B.9, d.e.e.c. (E, B, F) = (\mathbf{R}, L^2(S^{n-1}), S_x^T(\cdot) P_\omega))$$

$$= \sup_{k \in \mathbf{R}} \|P_\omega S_x(k) P_\omega P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq \quad (\mathrm{L.F.17})$$

$$\leq \sup_{k \in \mathbf{R}} \|P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \|S_x(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 1 \quad (\mathrm{L.C.7,\ d.e.e.c.\ ``}S\text{''} = S^{n-1})$$

Por lo tanto:

$$\|M_x\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} = \|\chi_+(t)F_1 S_x^T(k)P_\omega P_k F_1^* \chi_+(t)\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} \leq$$

$$\leq \|\chi_+(t)\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\|F_1\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\|S_x^T(k)P_\omega\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\cdot$$

$$\cdot\|P_k\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\|F_1^*\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\|\chi_+(t)\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} \leq 1$$

Q.E.D.

Dejamos las propiedades algebraicas de M_x y pasamos a las cuestiones de convergencia. La siguiente serie de lemas sirven de apoyo a la demostración de la compacidad de M_x bajo las hipótesis del teorema 4.4.

Lema 20. Considerar a los elementos $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \times [0,1)$ y $(x,c,V) \in \mathbb{R}^n \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \times B_\alpha$, éste último tal que:

$$(c(B_1(0)), c(B_2(0)^c)) = (\{0\},\{1\})$$

Entonces:

$$\lim_{n'\to\infty} \|F_1 P_+ T((n')^{-1}I)c(S_x^T(k) - I)P_\omega P_k P_+ F_1^*\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} = 0$$

Demostración.

$$\lim_{n'\to\infty} \|F_1 P_+ T((n')^{-1}I)c(S_x^T(k) - I)P_\omega P_k P_+ F_1^*\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} \leq$$

$$\leq \lim_{n'\to\infty} \|F_1 P_+\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\|T((n')^{-1}I)c(S_x^T(k) - I)P_\omega\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\cdot$$

$$\cdot\|P_k P_+ F_1^*\|_{B(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} \leq$$

$$\leq \lim_{n'\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{R}} \|T((n')^{-1}I)c(S_x^T(k) - I)P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

(L.B.9, d.e.e.c. $(E,B,F) = (\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}, T((n')^{-1}I)c(S_x^T(k) - I)P_\omega))$

$$= 0 \quad \text{(L.F.29)}$$

Lema 21. Considerar a los elementos $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$, $(x,c) \in \mathbb{R}^n \times C_B(\mathbb{R}^n)$ y $V \in \bigcup_{\alpha\in[0,1)} B_\alpha$, éste último con elemento $\epsilon \in (1,\infty)$ correspondiente. Suponer que cero no es resonancia correspondiente a H. Entonces:

$$\overline{\mathbb{P}^+} \cap \sigma_p(H) = \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \|F_1P_+c(S_x^T(k)-I)P_\omega P_kP_+F_1^* - F_1P_+c(S_{x,r}^T(k)-I)P_\omega P_kP_+F_1^*\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} =$$

$$= 0$$

Demostración.

$\forall r \in \mathbb{R}^+$:

$$\|F_1P_+c(S_x^T(k) - I)P_\omega P_kP_+F_1^* - F_1P_+c(S_{x,r}^T(k) - I)P_\omega P_kP_+F_1^*\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} =$$

$$= \|F_1P_+c(S_x^T(k) - S_{x,r}^T(k))P_\omega P_kP_+F_1^*\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} \leq$$

$$\leq \|F_1P_+\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\|c(S_x^T(k) - S_{x,r}^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))}\cdot$$

$$\cdot\|P_kP_+F_1\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} \leq$$

$$\leq \sup_{k\in\mathbb{R}} \|c(k)(S_x^T(k) - S_{x,r}^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}$$

(L.B.9, d.e.e.c. $(E,B,F) = (\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}), c(S_x^T(\cdot) - S_{x,r}^T(\cdot))P_\omega))$

Por lo tanto:

$$\lim_{r\to\infty} \|F_1P_+c(S_x^T(k) - I)P_\omega P_kP_+F_1^* - F_1P_+c(S_{x,r}^T(k) - I)P_\omega P_kP_+F_1^*\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R},L^2(S^{n-1})))} \leq$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \sup_{k\in\mathbf{R}} \|c(k)(S_x^T(k) - S_{x,r}^T(k))P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0 \quad \text{(L.F.33)}$$

Q.E.D.

Lema 22. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N} \setminus \{1,2\}$ y $V \in K_2$, éste último con elemento $\epsilon \in (1,\infty)$ correspondiente y tal que supp V sea compacto. Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Suponer que cero no es resonancia correspondiente a H. Entonces todo subconjunto compacto $S \subset \mathbf{R} \setminus (-\sigma_+(H)^{1/2} \cup \sigma_+(H)^{1/2})$ es tal que:

$$(0,V) \in \sigma_p(H)^c \times L_s^2(\mathbf{R}^n) \Rightarrow \lim_{\epsilon\downarrow 0} \sup_{k\in S} \|T(k) - T(k,\epsilon)\|_2 = 0$$

Demostración.

$(0,V) \in \sigma_p(H)^c \times L_s^2(\mathbf{R}^n) \Rightarrow (\text{c.t.p})\epsilon \in \mathbf{R}^+ : \forall k \in S \setminus \{0\}$:

$$\|T(k) - T(k,\epsilon)\|_2 =$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \Big| - \imath 2^{-n} (\pi \mathrm{sgn}\ k)^{1-n} k^{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k,\omega')dx -$$

$$-(-\imath)2^{-n}(\pi \mathrm{sgn}\ k)^{1-n} k^{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)\phi(x,k+\imath\epsilon,\omega')dx\Big|^2 d\omega' d\omega =$$

$$= 2^{-n}\pi^{1-n}|k|^{n-2} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \left| \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath k\omega\cdot x} V(x)(\phi(x,k,\omega') - \phi(x,k+\imath\epsilon,\omega'))dx \right|^2 d\omega' d\omega \leq$$

$$\leq 2^{-n}\pi^{1-n}|k|^{n-2} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \|e^{-\imath k\omega\cdot\cdot} V\|_{0,0}^2 \|\chi_{\mathrm{supp}\ V}(\phi(\cdot,k,\omega') - \phi(\cdot,k+\imath\epsilon,\omega'))\|_{0,0}^2 d\omega' d\omega \leq$$

$$\leq 2^{-n}\pi^{1-n}|k|^{n-2}.$$

$$\cdot \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \|e^{-\imath k\omega\cdot\cdot} V\|_{0,0}^2 \sup_{(k,\varpi)\in S\times S^{n-1}} \|\chi_{\mathrm{supp}\ V}(\phi(\cdot,k,\varpi) - \phi(\cdot,k+\imath\epsilon,\varpi))\|_{0,0}^2 d\omega' d\omega =$$

$$= 2^{-n}\pi^{1-n}|k|^{n-2}\left(\|1\|_{L^1(S^{n-1})}\|V\|_{0,0}\sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}}\|\phi(\cdot,k,\omega)-\phi(\cdot,k+\imath\epsilon,\omega)\|_{L^2(\mathrm{supp}\ V)}\right)^2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\sup_{k\in S}\|T(k)-T(k,\epsilon)\|_2 \le$$

$$\le \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left(2^{-n}\pi^{1-n}\sup_{k\in S}|k|^{n-2}\right)^{1/2}\|1\|_{L^1(S^{n-1})}\|V\|_{0,0}\cdot$$

$$\cdot \sup_{(k,\omega)\in S\times S^{n-1}}\|\phi(\cdot,k,\omega)-\phi(\cdot,k+\imath\epsilon,\omega)\|_{L^2(\mathrm{supp}\ V)} =$$

$$= 0 \quad \text{(L.H.19)}$$

Q.E.D.

Lema 23. Considerar a los elementos $n \in \mathbf{N}\setminus\{1,2\}$, $(x,c)\in \mathbf{R}^n\times C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ y $V\in K_2$, éste último con elemento $\epsilon\in(1,\infty)$ correspondiente y tal que supp V sea compacto.Sea:

$$s = (1+\epsilon)/2$$

Suponer que cero no es resonancia correspondiente a H. Entonces:

$$V \in L_s^2(\mathbf{R}^n) \quad \wedge \quad \overline{\mathbf{R}^+}\cap\sigma_p(H) = \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon\downarrow 0}\sup_{k\in\mathbf{R}}\|c(k)[(S_x^T(k)-I)-T_x^T(k,\epsilon)]P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0$$

Demostración.
$V \in L_s^2(\mathbf{R}^n) \quad \wedge \quad \overline{\mathbf{R}^+}\cap\sigma_p(H) = \phi \Rightarrow \forall\epsilon\in\mathbf{R}^+ : \forall k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$:

$$\|c(k)[(S_x^T(k)-I)-T_x^T(k,\epsilon)]P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

$$= |c(k)|\|(TS_x^*(k)T-I)-TT_x^*(k,\epsilon)T\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$

(L.A.21, d.e.e.c. $(E_i,O_1,O_2)=(L^2(S^{n-1}),P_\omega,I)$)

$$= |c(k)| \| \{ T[(e^{\imath k\omega\cdot x} S(k) e^{-\imath k\omega\cdot x} - I) - e^{\imath k\omega\cdot x} T(k,\epsilon) e^{-\imath k\omega\cdot x}] T\}^* \|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} =$$
(L.4.2 y L.C.5, d.e.e.c. $E = S^{n-1}$)

$$= |c(k)| \| T e^{\imath k\omega\cdot x}(T(k) - T(k,\epsilon)) e^{-\imath k\omega\cdot x} T\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = \text{ (Rudin 1979, teorema 4.10)}$$

$$= |c(k)| \| T(k) - T(k,\epsilon)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq \text{ (L.A.21, d.e.e.c. } E_i = L^2(S^{n-1}))$$

$$\leq |c(k)| \| T(k) - T(k,\epsilon)\|_2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \sup_{k\in\mathrm{R}} \| c(k)[(S_x^T(k) - I) - T_x^T(k,\epsilon)] P_\omega \|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} \leq \lim_{\epsilon\downarrow 0} \|c\|_\infty \sup_{k\in \operatorname{supp} c} \|T(k) - T(k,\epsilon)\|_2 =$$

$$= 0 \quad \text{(L.22)}$$

Q.E.D.

Lema 24. Mismas hipótesis que en lema 23. Entonces:

$$V \in L_s^2(\mathrm{R}^n) \quad \wedge \quad \overline{\mathrm{R}^+} \cap \sigma_p(H) = \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon\downarrow 0} \| F_1 P_+ c(S_x^T(k) - I) P_\omega P_k P_+ F_1^* - F_1 P_+ c T_x^T(k,\epsilon) P_\omega P_k P_+ F_1^* \|_{\mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1})))} = 0$$

Demostración.

$$V \in L_s^2(\mathrm{R}^n) \quad \wedge \quad \overline{\mathrm{R}^+} \cap \sigma_p(H) = \phi \Rightarrow \forall \epsilon \in \mathrm{R}^+ :$$

$$\| F_1 P_+ c(S_x^T(k) - I) P_\omega P_k P_+ F_1^* - F_1 P_+ c T_x^T(k,\epsilon) P_\omega P_k P_+ F_1^* \|_{\mathrm{B}(L^2(\mathrm{R}, L^2(S^{n-1})))} =$$

Demostración.

$$\forall x' \in \mathbb{R}^n: \|M_x - M_{x'}\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1})))} =$$

$$= \|\chi_+(t) F_1 S_x^T(k) P_\omega P_k F_1^* \chi_+(t) - \chi_+(t) F_1 S_{x'}^T(k) P_\omega P_k F_1^* \chi_+(t)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1})))} \leq$$

$$\leq \|\chi_+(t) F_1\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1})))} \|(S_x^T(k) - S_{x'}^T(k)) P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1})))} \cdot$$

$$\cdot \|P_k F_1^* \chi_+(t)\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1})))} \leq$$

$$\leq \sup_{k \in \mathbb{R}} \|(S_x^T(k) - S_{x'}^T(k)) P_\omega\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))}$$

(L.B.9, d.e.e.c $(E, B, F) = (\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}), (S_x^T(\cdot) - S_{x'}^T(\cdot)) P_\omega))$

Por lo tanto:

$$\lim_{x' \to x} \|M_x - M_{x'}\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathbb{R}^+, L^2(S^{n-1})))} \leq \lim_{x' \to x} \sup_{k \in \mathbb{R}} \|S_x^T(k) - S_{x'}^T(k)\|_{\mathrm{B}(L^2(S^{n-1}))} = 0$$

(L.F.31 y L.F.32)

Q.E.D.

Lema 26. Considerar a un elemento $\pm \in \{-, +\}$, a un espacio de medida E y a una función $f: \mathbf{C}^\pm \times E \to \mathbf{C}$. Entonces:

$$f \in \mathrm{F}(\mathbf{C}^\pm, L^2(E)) \quad \wedge \quad (\text{N.B.1})$$

$$\wedge \quad \forall q \in \mathbb{R}^\pm: \|f(p + iq, \cdot)\|_{L^2(E)} \in M(\mathbb{R}) \quad \wedge \quad (\text{N.B.4})$$

$$\wedge \quad \exists l \in L^2(\mathbb{R} \times E): \forall c \in \mathbf{C}^\pm: |f(c, \cdot)| \leq l(\operatorname{Re} c, \cdot) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{q \in \mathbb{R}^\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \|f(p + iq, \cdot)\|^2_{L^2(E)} dp < \infty$$

Demostración.

$$\sup_{q\in\mathbb{R}\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\|f(p+iq,\cdot)\|^2_{L^2(E)}dp=\sup_{q\in\mathbb{R}\pm}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_E|f(p+iq,\cdot)|^2\leq$$

$$\leq\sup_{q\in\mathbb{R}\pm}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_E l^2(p,\cdot)=\|l\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times E)}<\infty$$

Q.E.D.

Lema 27. Mismas hipótesis que en teorema 4.6. Entonces:

$$\chi_x=M_x\chi_x+f_x$$

Demostración.

$$\chi_x=\chi_+(t)\chi_x=\ (\mathrm{T.3.6})$$

$$=\chi_+(t)F_1\psi(x,\cdot,\cdot)=\chi_+(t)F_1[P_\omega S_x(\cdot)P_k\psi(x,\cdot,\cdot)+(I-P_\omega S_x(\cdot))1]=\ (\mathrm{L.H.28})$$

$$=\chi_+(t)F_1[P_\omega S_x(\cdot)P_\omega P_\omega P_k\psi(x,\cdot,\cdot)+(I-P_\omega S_x(\cdot)P_\omega 1]=$$

$$=\chi_+(t)F_1[S_x^T(\cdot)P_\omega P_k\psi(x,\cdot,\cdot)+(I-S_x^T(\cdot))1]=\ (\mathrm{L.F.17})$$

$$=\chi_+(t)F_1S_x^T(\cdot)P_\omega P_kF_1^*\chi_x+f_x=\chi_+(t)F_1S_x^T(\cdot)P_\omega P_kP_+F_1^*\chi_+(t)\chi_x+f_x=\ (\mathrm{T.4.6})$$

$$=M_x\chi_x+f_x$$

Q.E.D.

Lema 28. Mismas hipótesis que en el teorema 4.6. Entonces:

$$1\notin\sigma_p(M_x)\Rightarrow\chi_x=(I-M_x)^{-1}f_x$$

Demostración.

$$1 \notin \sigma_p(M_x) \Rightarrow 1 \in \rho(M_x) \Rightarrow \text{ (T.4.3 y Rudin 1979, teorema 4.25)}$$

$$\Rightarrow \chi_x = (I - M_x)^{-1} f_x \quad \text{(L.27)}$$

Q.E.D.

Bibliografía

Adams, R., 1975, *Sobolev Spaces.* Academic Press. New York, San Francisco, London.

Agmon, S., 1975, *Spectral Properties of Schrödinger Operators and Scatter Theory.* Annali della Scuola Nor. Sup. di Pisa, Cl. Sci (2) 2, 151-218.

Amrein, W., Jauch, J., Sinha, K., 1977, *Scattering Theory in Quantum Mechanics.* Lectures Notes and Supplements in Physics. London, Amsterdan, Ontario, Sydndey, Tokyo.

Balslev, E., 1988, *Analyticity Properties of Eigenfunctions and Scattering Matrix.* Comm. Math. Phys. 144, 599-612.

Eastham, M., Kalf, H., 1982, *Schrödinger Type Operators with Continuous Spectra.* Research Notes in Mathematics 65. Pitman.

Froese, R., Herbst, I.,Hoffmann-Ostenhof, M., Hoffmann-Ostenhof, T., 1982, *On the Absence of Positive Eigenvalues for One-Body Schrödinger Operators.* J. Anal. Math. 41, 273-284.

Hille, E., 1948, *Functional Analysis and Semi-groups.* Am. Math. Soc. Coll. Publications XXXI.

Hille, E., and Phillips, R., 1957, *Functional Analysis and Semigroups.* Am. Math. Soc. Coll. Publications XXXI.

Kato, T., 1976, *Perturbation Theory of Linear Operators.* Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Lax, P., and Phillips, R., 1976, *Scattering Theory for Automorphic Functions.* Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Newton, R., 1980 *Inverse Scattering II. Three Dimensions.* J. Math. Phys. 21 (7), 1698-1715.

Pearson, D., 1988, *Quantum Scattering and Spectral Theory.* Academic Press, London.

Reed, M., and Simon, B., 1975, *Methods of Modern Mathematical Physics.* Vol. II, Academic Press, New York, San Francisco, London.

Royden, H., 1968, *Real Analysis.* The Macmillan Company, London.

Rudin, W., 1979, *Functional Analysis.* McGraw-Hill Book Company. New York.

Schechter, M., 1971, *Spectra of Partial Differential Operators.* North Holland, Amsterdan, London.

Weder, R., 1990, *Multidimensional Inverse Scattering: the Reconstruction Problem.* Inverse Problems, 6, 267-298.