

6
2ej



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

**METODO PARA LA ELECCION
DE CARTERAS DE INVERSION**

FALLA DE ORIGEN

Tesis Profesional

Que para obtener el título de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

Juan Ignacio Ambia Medina

Asesor: M en C Roberto Canovas Theriot

México, D. F.

1991



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	página
Introducción	1
Capítulo I.	
1.- ¿Qué es la utilidad?	
1.1.- Antecedentes	3
1.1.1.- Teoría clásica	4
1.1.2.- Teoría del equilibrio	5
1.1.3.- Teoría de los juegos	6
1.2.- Algunas otras consideraciones	10
Capítulo II.	
2.- Modelos de selección de carteras de inversión	
2.1.- Método de Markowitz	15
2.2.- Otros métodos	22
2.3.- Proceso propuesto	24
2.4.- Conclusión	38
Bibliografía	40

Introducción

Cada vez son más los países que abren y liberan sus sistemas financieros como una exigencia, en particular en los países subdesarrollados, para disminuir las transferencias de recursos al exterior que les impone la pesada carga del servicio de su deuda externa.

Este cambio adoptado por los países ha desatado una gran competencia entre los intermediarios financieros, trastocando la importancia que por tradición se asignaba a los tipos de valores, las técnicas de obtención de fondos y prácticas institucionales, siendo éstas reemplazadas por una nueva ingeniería financiera gracias a los sistemas modernos de computación y comunicación, así como a los diferentes métodos matemáticos y estadísticos: el cálculo diferencial e integral, la programación matemática, la teoría de las decisiones y la simulación electrónica. Sin embargo, el uso de dichas técnicas ha sido indiscriminado, como es por ejemplo el darle tratamiento a las variables aleatorias como si no fueran tales.

En el fondo, la causa del uso inadecuado de las técnicas matemáticas y estadísticas se debe, como se intentará mostrar en el presente trabajo, al concepto de utilidad que subyace en aquéllas.

En el primer capítulo se dará respuesta, sin que esto pretenda ser una teoría acabada de la utilidad, a la pregunta ¿qué es la utilidad?, la cual nos lleve a responder otras interrogantes tales como: ¿qué factores intervienen en la elección de los fines y medios?, ¿cómo deciden los sujetos?, ¿es posible racionalizar estas decisiones o hasta qué punto? con base en éstas, estableceremos un marco conceptual de la función financiera, entendida como la define Ezra Solomon (*The theory*

of Financial Management, Nueva York: Columbia University Press, 1963, p.p. 3 y 9). Esto es, la función financiera como el estudio de los problemas implicados en el uso y la adquisición de fondos, a través de la función de planeación de la ganancia del ejecutivo financiero. La expresión "planeación de la ganancia" se refiere a la decisión adoptada por el ejecutivo en las áreas de fijación de precios, volumen del producto y selección de las líneas de producción de la empresa. En este sentido, la planeación de la ganancia o rentabilidad es un prerequisite para "optimizar" la inversión financiera.

Con el objeto de ejemplificar qué tipo de métodos se pueden derivar del marco conceptual de la utilidad propuesto, se desarrolla en el segundo capítulo un procedimiento para la elección de carteras de inversión, el cual se presentará de manera comparativa al sugerido por Markowitz, también para la elección de carteras de inversión.

1.- ¿ Qué es la utilidad ?

1.1- Antecedentes:

Los primeros tratados de que se tiene conocimiento sobre qué es la *utilidad* o qué se entiende por *útil* se remontan al siglo XIII. En éste, San Alberto Magno define *útil* como el medio o instrumento para un fin cualquiera. En este sentido, la utilidad es un carácter de la cosa misma.

Más adelante Hobbes llamó *útil* a lo que sirve a la conservación del hombre o lo que en general satisface sus necesidades. A este respecto Hobbes afirmó que cada hombre es, por derecho natural, árbitro acerca de lo que es útil, y que "la medida del derecho es la misma utilidad" (*De Cive*, 1642.I, 9-10). Siguiendo las huellas de Hobbes, Spinoza identificó el comportamiento racional del hombre con la búsqueda de lo útil: "como la razón no exige nada que sea contrario a la naturaleza, exige, por tanto, que cada cual se ame a sí mismo, que busque lo que es útil para él, lo que le es realmente útil". Para Spinoza, entre las muchas cosas útiles y deseables las más importantes son las que convienen a la naturaleza humana y por tanto la más importante de todas es la conservación del hombre, la propia persona, y la de los demás. "Los hombres que son gobernados por la razón, esto es, los hombres que buscan lo que les es útil bajo la guía de la razón, no apetecen para sí lo que no desean para los demás hombres y, por tanto, son justos, leales y honestos" (*Eth.*, IV, 18, 1700.). En este sentido, la utilidad resulta por un lado fundamento de la doctrina moral que es el utilitarismo y, por el otro, el concepto fundamental de la economía política.

En el campo de la economía política se entendió por utilidad, en términos generales, todo lo que satisface una

necesidad, sea económica o biológica(1). Se puede distinguir tres fases de la economía política en relación con, también, tres diferentes fundamentos adoptados como sostén o guía de la técnica económica: la clásica, la del equilibrio y la de los juegos.

1.1.1.- Teoría clásica

La teoría clásica, que tiene como principio que existe un orden económico natural y necesario, no deja alternativa de elección de los individuos, más bien, propiamente hablando no reconocía posibilidad alguna de elección. En efecto, los individuos no pueden hacer otra cosa que seguir sus instintos económicos y el orden económico es el efecto natural inevitable de tal instinto. En un orden semejante, el fundamento de las relaciones económicas, de los cambios, o sea del valor, debe ser tan natural y necesario como el orden mismo; por ello la economía clásica de Smith a Marx ve el origen o principio del valor en el trabajo.

Dentro de este enfoque, el concepto de utilidad no presentó realmente un problema. En efecto: según Adam Smith existe un orden armonioso y benéfico de las cosas, orden que se manifiesta allí donde la naturaleza es abandonada. La escuela histórica y el marxismo partían del principio según el cual el orden natural no es un mecanismo sino un organismo que lleva en sí una ley de sucesión, la cual pasa por diferentes grados de desarrollo, de tal modo, señala Marx en El capital, que la

1) La advertencia de que no siempre lo que satisface una necesidad desde el punto económico la satisface desde el punto de vista biológico llevó a Pareto a introducir la noción de *ofelimitad*, que es lo útil en el contexto económico, esto es, el valor de uso que no siempre coincide con la utilidad. Por ejemplo un estupefaciente tiene *ofelimitad* pero no utilidad (Cours d'économie politique, Lausanne, 1896).

socialización de los medios de producción, su transpaso de la clase capitalista a la clase obrera, llegará con la "fuerza inexorable de un proceso natural". Así pues, la tarea de la economía política se centró en encontrar las leyes o principios determinantes de tal orden y prescribir los caminos mediante los cuales puede ser realizado íntegramente en las sociedades humanas. En este sentido el problema de cómo eligen los individuos, por su carácter fatalista, se puede considerar como un falso problema.

1.1.2.-Teoría del equilibrio

La teoría del equilibrio niega que exista un orden natural que garantice el comportamiento económico de los individuos, pero existe, y puede determinarse en cada caso, una distribución óptima de los medios económicos que puedan realizar la máxima satisfacción de los individuos interesados y que, por tanto, constituye un estado de equilibrio que, justo por ser el mejor, se mantiene indefinidamente en caso de no ser alterada. Si por alguna causa el equilibrio es modificado, tiende a restablecerse. Es así como, dentro de este esquema, el problema de utilidad se presenta como un problema de optimización. De ahí que la preocupación se centre en tratar de medir la utilidad, sea de manera ordinal o cardinal.

Para Marshall (Principles of Economics, libro III, cap. 3, Londres: Macmillan and Co., 1920,) y otros teóricos, la utilidad era una cantidad psíquica mensurable y cuantificable, del mismo modo que la temperatura y el peso del cuerpo son medibles y cuantificables. Por lo tanto, se presumía que una persona era capaz de sentir que un bien le aportaba "X" unidades de satisfacción, y que cada adición de ese bien le aportaba un número cada vez menor de unidades de satisfacción. Esta interpretación cardinal y hedonista cedió sitio a la interpretación ordinal y conductista de la utilidad. En 1934, Allen y Hicks ("A Reconsideration of the Theory of Value",

Economic , New Series, I, febrero 1934, pp. 52-70) elaboran una teoría del comportamiento sin suponer que la utilidad era una cantidad mensurable. Basaron su teoría en el supuesto de que el consumidor tenía una escala de preferencias mediante la cual ordenaba la deseabilidad de diferentes clases de artículos. La utilidad, en este sentido, era algo que los consumidores ordenaban más que medían. Ambos enfoques, tanto el conductista como el presentado por Marshall, parten del supuesto de infalibilidad y omnisciencia del sujeto económico. Esto es, parten del supuesto de que un individuo se encuentra en las mismas condiciones que Robinson Crusoe, el cual conoce perfectamente sus necesidades y los medios que debe usar para satisfacerlas.

1.1.3.-Teoría de los juegos

La teoría de los juegos señala que no tiene sentido un estado de equilibrio que no tenga su contrapartida en la realidad económica. El comportamiento racional⁽²⁾ del hombre, en las situaciones de escasez, se puede determinar solamente a partir de las condiciones de ignorancia y falibilidad con que éste llega a tales situaciones. En la realidad los individuos están en mutua relación y el éxito del comportamiento de cada uno de ellos depende de diferentes variables, las cuales el individuo sólo controla en parte, en tanto que las demás dependen de la naturaleza o de otros individuos; pero el éxito general depende de todas las variables.

2) Anota Morgenstern que " Es necesario, por tanto, examinar la posibilidad de resolver el problema de la manera en que deberá comportarse un individuo o una empresa para que su comportamiento pueda ser considerado ' racional '. La palabra ' racional ' no tiene por sí misma significado alguno en esta construcción y lo podrá tener solamente en caso de contar con una teoría que pueda ser empleada en todas estas situaciones" (Teoría del juego, en la industria, 1951, p. 310).

En un esfuerzo por comprender la decisión de las personas en condiciones de incertidumbre y de crear una teoría del comportamiento racional, Von Neumann y Morgenstern proponen la idea de evaluar la atracción de cualquier transacción arriesgada, asignando a la transacción la utilidad equivalente en condiciones de certidumbre, con las probabilidades actuando como ponderadores. Cuando una persona debe elegir entre que prometen diferentes resultados inciertos, debe optar por el curso de acción que maximiza su utilidad esperada.

En la teoría de la utilidad elaborada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern (Theory of Games and Economic Behavior; Princeton, Nueva Jersey, Princeton University Press, 1947), la *utilidad* es un número utilizado por el responsable de la decisión para medir el valor de las retribuciones monetarias de diferentes grados de incertidumbre. Más específicamente, se inscribe sólo en el ámbito monetario y supone que un individuo tiene una función de utilidad cardinal con estas dos propiedades importantes:

- 1) Si se prefiere el resultado A al resultado B, la utilidad de A $U(A)$ es mayor que la utilidad de B $U(B)$.
- 2) Si las probabilidades de que resulten A ó B son, respectivamente, p y q , la utilidad conjunta L puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$U(L) = pU(A) + qU(B)$$

Una decisión racional es pues la que maximiza $U(L)$.

Siguiendo las huellas a Neumann y Morgenstern, James Tobin ("Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", en THE REVIEW OF ECONOMIC STUDIES 67, febrero 1958, pp. 85-86) expresa la función de utilidad del inversor en la notación funcional general $U=U(W)$, donde U representa la utilidad y W los agregados monetarios a su riqueza. Luego, supone que la función de

densidad de la probabilidad de W puede explicarse íntegramente con sólo dos parámetros: μ y σ , la media y la desviación estándar de W . Por tanto, la utilidad esperada se expresa:

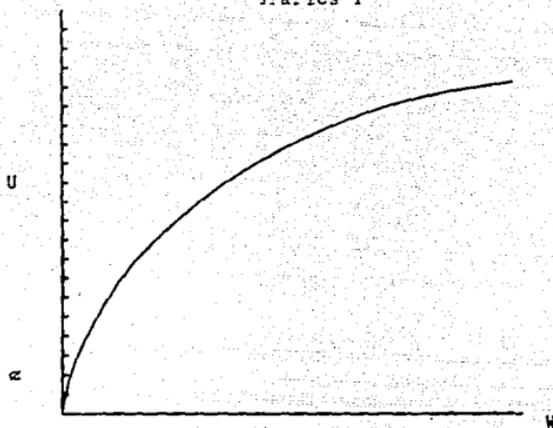
$$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} U(W) f(W, \mu, \sigma) dW \quad (1)$$

Denomina curva de indiferencia al lugar de los puntos (μ, σ) que aportan una utilidad esperada constante. Diferenciando (1) con respecto a σ , Tobin observa que si la utilidad marginal de la riqueza es positiva y si disminuye con la riqueza (ver gráfica 1), cualquier curva de indiferencia debe tener pendiente positiva y cóncava en sentido descendente (ver gráfica 2). Es decir:

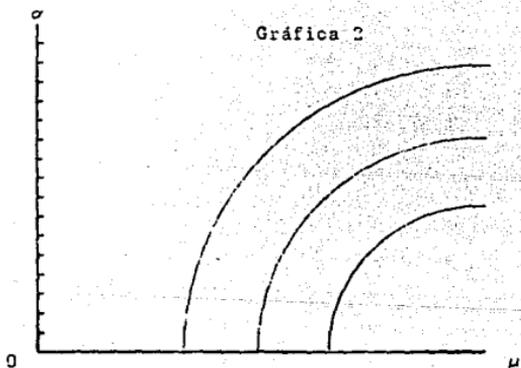
$$U'(W) > 0 \text{ y } U''(W) < 0 \text{ implica que } dc/d\mu > 0 \text{ y } d^2c/d\sigma^2 < 0$$

Más aún, las mismas dos propiedades de la función de utilidad implican: $\partial E(U)/\partial \mu > 0$ y $\partial E(U)/\partial \sigma < 0$; es decir, la utilidad esperada aumenta con la rentabilidad y disminuye con el riesgo.

Gráfica 1



Gráfica 2



De los resultados anteriores se desprende que el inversionista hipotético tiene aversión al riesgo. Esto es,

elige inversiones bajo estas dos reglas:

1) Ante dos inversiones que tienen la misma rentabilidad esperada elegirá la de menor desviación standard.

2) Ante dos inversiones que tienen desviaciones standard iguales elegirá la de mayor rentabilidad esperada.

Por tanto, si a este inversionista se le ofrece elegir entre las dos siguientes alternativas:

A) Un billete de la lotería del cual puede esperar, en caso de ganar, una retribución de 10 unidades monetarias con probabilidad de 0.125 y que, en otro caso, perdería una unidad monetaria con probabilidad de 0.875; esto es, una rentabilidad esperada de 0.5 unidades monetarias.

B) Una suma de 0.5 unidades monetarias sin riesgo.

Si es un inversionista "racional" debe elegir la alternativa B.

1.2.-Algunas otras consideraciones

La teoría del equilibrio se sustenta en el supuesto de que las personas conocen sus necesidades y los medios para

satisfacerlas. En la realidad económica la situación es totalmente distinta, porque en ella los hombres actúan en la mayor parte de los casos por instinto o costumbre, y sólo ocasionalmente algunos individuos elevan a conciencia una necesidad y los medios para satisfacerla.

La actitud que el hombre adopta hacia la realidad, en general, no es la de un sujeto abstracto, o la de una mente pensante que enfoca la realidad de un modo especulativo, sino la de un ser práctico que persigue la satisfacción de sus fines e intereses en un conjunto determinado de relaciones sociales. Esto, es, se presenta como un ser práctico, cuyo polo complementario y opuesto es, precisamente, el sujeto abstracto en busca del conocimiento, que existe fuera del mundo y aislado de él.

Al respecto señala Karel Kosik (Dialéctica de la concreta. Teoría y praxis, ed. 1978, p. 26), que la relación "práctica-utilitaria inmediata y el sentido común correspondiente pone a los hombres en condiciones de orientarse en el mundo, de familiarizarse con las cosas y manejarlas, pero no les proporciona una comprensión de las cosas y de la realidad". Hoy día, por ejemplo, gracias al movimiento considerable de los precios y sus consecuencias, ¿quién no razona?, ¿quién no discute el Índice General de Precios al Consumidor?, ¿quién no basa sus pruebas en ellos para las tesis más diversas y a veces más opuestas?, pero, antes de esa utilización, ¿cuántas personas advirtieron o se preocuparon por saber cómo se establece dicho índice?, ¿sobre qué bases?, ¿mediante qué método?, ¿qué significa y qué no significa?. Del mismo modo, por ejemplo, los individuos usan el dinero y realizan con él las más sofisticadas transacciones sin estar obligados a saber siquiera qué es el dinero.

Ahora bien, tan pronto como intentamos tener conciencia de nuestras necesidades y de los medios para satisfacerlas, la realidad nos ofrece una casi infinita diversidad de acontecimientos sucesivos y simultáneos, que aparecen y

desaparecen dentro y fuera de nosotros, de tal forma que lo que en un momento pudiera ser una necesidad o un medio, en otro momento ya no lo es. Y la infinidad de dicha diversidad subsiste aun cuando nos fijemos en una única necesidad.

Es prácticamente imposible, por no decir totalmente imposible, la pretensión de Morgenstern de resolver la manera en que deberán comportarse los individuos o las empresas, ante la diversidad de acontecimientos, casi infinitos, para que su comportamiento pueda ser considerado racional. Pero aun cuando pueda alcanzarse mediante conceptos y reglas racionales, no debe dejarse de un lado el aprehender, mediante conceptos teóricos adecuados, fenómenos irracionales como los místicos, proféticos, afectivos, etc., ya que el hombre es igualmente racional e irracional.

Tal pretensión es radicalmente falsa y frecuentemente peligrosa, no sólo por presentar una visión mutilada del hombre (únicamente como ser racional), sino también por introducir el concepto del deber pues reduce, mediante un ropaje matemático, el comportamiento racional del hombre, por ejemplo al considerar sólo como racional aquel comportamiento que busca una utilidad esperada máxima. Es innegable que los juegos azarosos tienen una fuerza de atracción, incluso más allá de lo que Morgenstern considera racional; de qué otra forma se puede explicar la expansión de los mercados bursátiles, Las Vegas y, en general, el surgimiento de loterías en todo el mundo.

Al respecto cabe señalar que la utilidad implica la intervención de procesos mentales, fundamentalmente cualitativos, cuya comprensión constituye una tarea específicamente distinta a la que quisieran solucionar las fórmulas del conocimiento exacto. Sin embargo, en nuestro campo especializado topamos frecuentemente con la opinión de que la utilidad de un individuo es susceptible de cuantificar. No es sorprendente que los que sostienen tal afirmación se vean llevados, en su práctica, a considerar sólo como digno de ser conocido lo que puede ser medido o, peor, a conceder únicamente

la existencia científica a todo lo que es posible medir.

La intervención de motivos mentales no excluye, en modo alguno, el establecimiento de reglas de una actuación racional. Cualquier teoría de la utilidad debe considerar al hombre de manera integral, esto es, al hombre tanto racional como irracional. Además, también debe partir de la hipótesis de la no conciencia del sentido cultural de los actos, y es justamente el hecho histórico que desempeña la utilidad el que debe hacerse comprensible, desde el significado cultural, y explicarse causalmente desde el punto de vista de su origen histórico.

Dentro de este contexto, el acto de elección de las necesidades y los medios para satisfacerlas está cargado de motivos culturales no conscientes, así como de procesos mentales. Una vez que una persona elige qué necesidades va a cubrir busca los medios para satisfacerlas; entonces la retribución monetaria es un requisito previo para hacerse de algunos de estos medios. Esto es, la remuneración monetaria no es un satisfactor en sí mismo, sino el conducto para hacerse de algunos satisfactores, y la elección de las necesidades y los medios, como hecho concreto, surge de una síntesis de factores tanto culturales como individuales. Dentro de este enfoque la construcción de modelos no interesa como un fin (una utilidad máxima), sino exclusivamente como un medio que, por analogía, puede desempeñar el papel de revelar las relaciones ocultas.

Este proceso es similar al que se da en el ámbito de una empresa. Esto es, las necesidades a cubrir pueden ser, entre otras, la ampliación de la empresa, garantizar un mercado, permanecer en el mismo y los medios pueden ser diversos; una campaña publicitaria, política de precios, etc., donde el pago al capital o rendimiento es un requisito previo para hacerse de los medios y se determina, precisamente, por una síntesis entre realidad y fines que se persiguen, de la cual se desprende una estrategia.

Es obvio que existe una relación directa entre riesgo y

rentabilidad, pues a mayor riesgo es también mayor la utilidad. Así pues, si el objetivo de una empresa es una política agresiva de ampliación, buscará altos rendimientos y por lo mismo estará más dispuesta a tomar mayores riesgos. En cambio si su política es de consolidación, elegirá bajos rendimientos y en consecuencia menores riesgos.

En el siguiente capítulo se presentará, con fines comparativos, los procedimientos que se desprendan de la interpretación de la utilidad de Morgenstern y de la de este trabajo. De antemano quiero subrayar que el procedimiento que se desprenda del presente debe separarse rigurosamente de la noción del deber.

2.-Modelos de selección de carteras de inversión.

2.1.-Método de Markowitz

Markowitz considera el caso de un inversionista para quien es deseable una elevada rentabilidad esperada e indeseable la incertidumbre: esta es parte del supuesto de que este inversionista tiene aversión al riesgo.

Si dicho inversionista tiene una suma de dinero para invertir en n valores, Markowitz se pregunta cómo debe distribuir el dinero de modo que la cartera resultante aporte la utilidad máxima esperada.

Para tal efecto, Markowitz sugiere que el análisis debe realizarse en dos etapas: en la primera, generar el conjunto de carteras eficientes y en la segunda, seleccionar de este conjunto de carteras eficientes aquella que le ofrezca, al inversionista, la combinación más adecuada de riesgo y rentabilidad.

Markowitz define como cartera eficiente a la que exhibe la más reducida variancia entre todas las carteras con la misma rentabilidad esperada. Para generar el conjunto de carteras eficientes expresa primero R , la rentabilidad originada de una cartera, como un promedio ponderado de R_i ($i=1,2,3,\dots,n$):

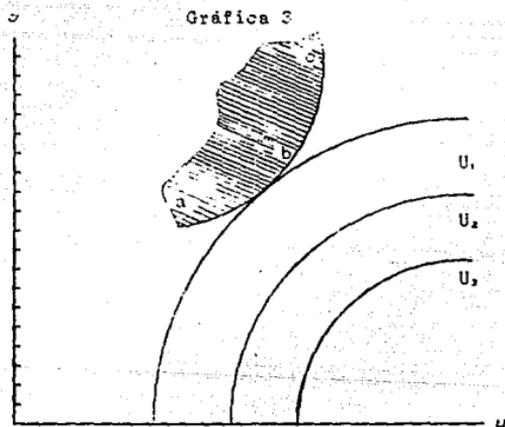
$$R = x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n \\ \text{para } 0 \leq x_i \leq 1$$

donde x_i es la fracción de recursos invertidos en el valor i y R_i es una variable aleatoria que representa la rentabilidad del valor i . Como R_i es una variable aleatoria, entonces R también es una variable aleatoria con esperanza matemática y variancia:

completo de carteras eficientes se obtiene encontrando todas las soluciones para los valores de $A \geq 0$, donde A es la medida de aversión al riesgo del inversionista.

Si suponemos que el eje de la Gráfica 3 representa el conjunto de todas las combinaciones realizables de μ y σ^2 , el conjunto de carteras eficientes está representado por el arco abc, que es el límite inferior derecho del área sombreada.

Para seleccionar la cartera óptima del conjunto de carteras eficientes, el inversionista debe especificar la forma de su función de utilidad, es decir, su actitud frente al riesgo.



Para ilustrar el modelo de Markowitz, consideremos el caso de un inversionista que afronta el problema de distribuir sus fondos entre tres títulos: renta fija, una acción especulativa y una acción patrimonial. Los rendimientos esperados y varianzas para estos tres títulos son:

- 1) renta fija $\mu_1=0.04$ $\sigma_1=0.0$
- 2) acción especulativa $\mu_2=0.068$ $\sigma_2=0.0009$
- 3) acción patrimonial $\mu_3=0.056$ $\sigma_3=0.0004$
- y covarianzas: $\sigma_{1,2}=0.0$ $\sigma_{1,3}=0.0$ $\sigma_{2,3}=\pm 0.0005$

El conjunto de carteras eficientes se obtiene al hallar los valores de x_i (la proporción del capital invertido en el valor i), para el cual

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_i \geq 0 \text{ para } i=1, 2 \text{ y } 3$$

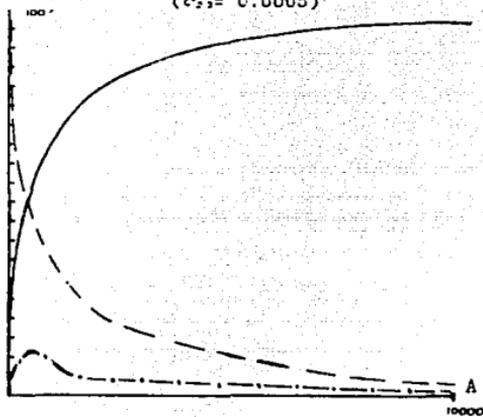
y que haga máxima la función

$$f=0.04x_1 + 0.068x_2 + 0.056x_3 - A(0.0009x_2^2 + 0.0004x_3^2 + 2x_2x_3\sigma_{2,3})$$

$$\text{donde } \sigma_{2,3}=\pm 0.0005$$

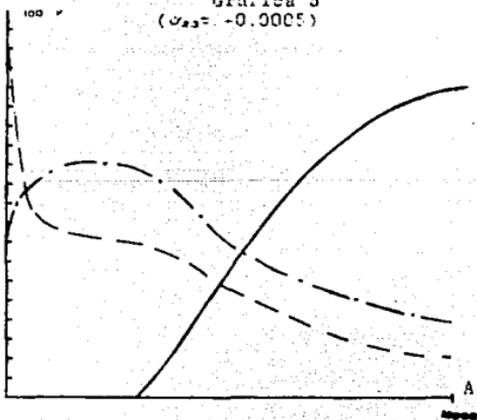
Se trata de un problema de programación no lineal con función objetivo cuadrática, donde Markowitz denomina línea crítica al conjunto de todas las soluciones para $A \geq 0$. Es obvio que dicha línea crítica es el lugar de todas las carteras eficientes que pueden obtenerse dentro de las restricciones. En las gráficas 4 y 5 se presentan los resultados.

Gráfica 4
 ($C_{23} = 0.0005$)



X_1 ———
 X_2 - - -
 X_3 - · -

Gráfica 5
 ($C_{23} = -0.0005$)



La interpretación de los resultados es directa. En primer lugar, si A (coeficiente de aversión al riesgo) es cero, la política óptima consiste en invertir todo el capital en la acción especulativa, la cual tiene la mayor rentabilidad esperada; en cambio, si A es muy grande, la política óptima consiste en invertir todo el capital en renta fija. En segundo lugar, dado el mismo aumento de la aversión al riesgo, el desplazamiento hacia los valores de renta fija es más veloz si los títulos restantes están correlacionados positivamente que si están correlacionados negativamente.

El método exige dos breves comentarios: primero, suponga usted que es el inversionista y su asesor en inversiones le presenta la línea crítica. En seguida su asesor le pregunta, sobre un escalar mayor que cero, cuál es su aversión al riesgo o si le podría describir su función de utilidad. Esto es, qué valores numéricos tiene para usted un agregado monetario a su fortuna. Es evidente que no podrá contestar dichas preguntas; segundo, se manejan las variables aleatorias como si se tratase de variables determinísticas.

Para la selección de la cartera de inversión, parte central del método es que el inversionista especifique la forma de su función de utilidad, es decir, su actitud frente al riesgo. Aunque Markowitz no insiste en determinado criterio de selección, en todo caso explora la relación entre la función de utilidad de un inversionista y su criterio de selección. Por ejemplo, considera una función de utilidad de la forma $U = a + bR + cR^2$, donde U representa la utilidad de un inversionista, R la rentabilidad de una cartera y a, b y c son constantes (ver Gráfica 5). Un inversionista que tiene esta función de utilidad elige la cartera que haga máxima la expresión:

$$E(U) = a + bE(R) + cE(R^2)$$

$$= a + b\mu + c(\mu^2 + \sigma^2)$$

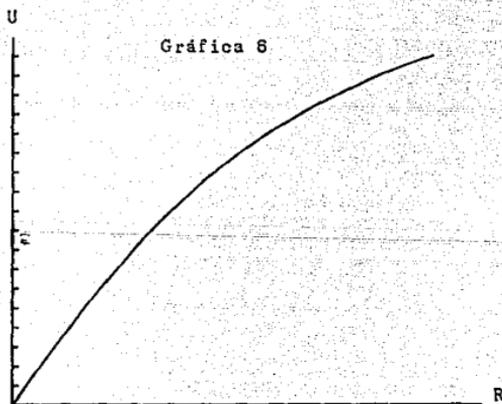
En cambio si la función de utilidad asume la forma

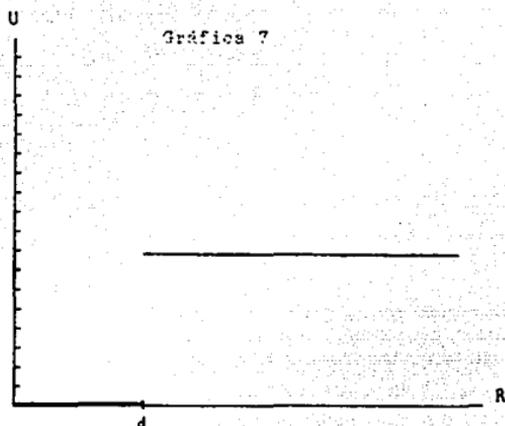
$$U(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \geq d \\ 0 & \text{si } R < d \end{cases}$$

(ver Gráfica 7) el inversor elige la cartera que haga mínima la probabilidad de que R sea inferior a cierto valor d , mínimo aceptable de rentabilidad. Ello se desprende porque $E(U)$ está dado por la expresión

$$\begin{aligned} E(U) &= 1 \cdot P(R \geq d) + 0 \cdot P(R < d) \\ &= 1 - P(R < d) \end{aligned}$$

Por lo que el obtener el máximo de $E(U)$ implica hacer mínimo a $P(R < d)$.





2.2.-Otros métodos

Markowitz examina otras funciones de utilidad, pero éstas son particularmente importantes porque son las bases de los modelos de Donal E. Farrar (The Investment Decision Under Uncertainty, Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall, Inc., 1962) y de A. D. Roy (Safety First and the Holding of Assets, Econometrica 20, julio de 1952, pp 431-449).

Desde el punto de vista teórico conceptual, el método de selección de la cartera de Farrar es el mismo que el de Markowitz, aun cuando no aplican el mismo criterio, pues para Markowitz la función objetivo $\mu - A\sigma^2$ es sólo un medio para generar el conjunto de carteras eficientes, en cambio Farrar la considera como la función de utilidad del inversionista.

La contribución especial de A. C. Roy reside en la importancia que atribuye a la supervivencia económica como objetivo del inversionista. Sostiene que en la práctica las decisiones relacionadas con la cartera de inversión tienen menos que ver con los ajustes marginales en μ y σ que con el evitar el desastre financiero. Considera que el inversionista tiene un único objetivo, que es eludir el desastre financiero, por lo que tratará de hacer mínima la probabilidad de que la rentabilidad, R , pueda descender por debajo de cierto nivel crítico, d . Si R se distribuye como una Normal con media μ y varianza σ^2 , entonces:

$$P(R \leq d) = P \left[(R - \mu) / \sigma \leq (d - \mu) / \sigma \right]$$

se hace mínimo cuando también se hace mínimo $\sigma / (d - \mu)$. Por lo que propone como método el encontrar el mínimo de $\sigma / (d - \mu)$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= 1 \\ x_i &\geq 0 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Para el método propuesto por Roy no es necesario que el inversionista señale cuánta es su aversión al riesgo, ni el que tenga que describir su función de utilidad. Sin embargo, el evitar el desastre financiero es sólo uno de los muchos objetivos de un inversionista. Por su parte los métodos propuestos por Markowitz y Farrar si parten del supuesto de que las personas pueden medir su utilidad o, al menos, describir su función de utilidad. Como se vio, precisamente este supuesto hace poco manejables los métodos propuestos para seleccionar una cartera de inversión. Es obvio que quienes se empeñen en medir la utilidad estarán destinados al fracaso.

2.3.- Proceso propuesto

En cambio, si a un inversionista se le preguntara cuál es la rentabilidad que pretende obtener, seguramente le contestaría que tal o cual rentabilidad. Esto es así porque la rentabilidad, como señalamos en el capítulo anterior, surge de una primera aproximación entre medios y fines que pretende satisfacer un individuo, esto es, de una síntesis entre realidad y fines, los cuales son múltiples. Por lo mismo, no es posible reducir los fines a uno solo, como es la sobrevivencia de la empresa.

Sea de manera consciente o inconsciente, cuando un individuo señala una rentabilidad particular ésta ya incluye el riesgo de tal forma que lo compensa. De un modo u otro, la decisión de cuál debe ser la rentabilidad parte del reconocimiento de que a mayor rentabilidad es mayor también el riesgo. Asimismo, ésta ya toma en cuenta fines y medios. En particular los métodos para seleccionar cartera de inversión deberían estar encaminados a evitar desviaciones de la rentabilidad pretendida, como es por ejemplo el hacer mínimo el error cuadrático con respecto a la rentabilidad que pretende quien toma las decisiones. Esto es, el problema es el hacer mínima la función objetivo.

$$f = E(Y - \hat{Y})^2$$

sujeto a las restricciones

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

P. 40

$$\text{donde } Y = \sum_{i=1}^{n-1} p_i X_i + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i) X_n$$

X_i (para $i=1,2,\dots,n$) son variables aleatorias que representan la rentabilidad del valor i ;
 p_i es la proporción del capital invertido en el valor i (para $i=1,2,\dots,n-1$). Es obvio que la proporción invertida en el valor n es $1-p_1-\dots-p_{n-1}$; y θ es la rentabilidad pretendida por el inversionista.

Para encontrar todas las carteras que hacen mínimo el error cuadrático para los distintos valores de θ consideremos que conocemos los valores de $E(X_i)=\mu_i$, $\text{VAR}(X_i)=\sigma_i^2$ y $\text{COV}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$, entonces:

$$E(Y-\theta)^2 = \text{VAR}(Y) + (EY-\theta)^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{VAR}(Y) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 \sigma_i^2 + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i)^2 \sigma_n^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j-1} p_i \dots p_j \sigma_{ij} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} p_i (1 - \sum_{k=1}^{i-1} p_k) \sigma_{in} \dots\dots\dots (2)$$

si de (2) extraemos la derivada parcial de la $\text{VAR}(Y)$ con respecto a p_k tenemos:

$$\partial \text{VAR}(Y) / \partial p_k = 2 p_k \sigma_k^2 - 2 (1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i) \sigma_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i \sigma_{ki}$$

$$+ 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} \sigma_{i..} + 2\sigma_{..n} \left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i - \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i - 2F \right]$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{i..} - 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} \sigma_{i..}$$

$$= 2p_n \sigma_n^2 - 2\sigma_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i \sigma_n^2 + 2\sigma_n^2 p_n + 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i \sigma_n^2$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{i..} + 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} \sigma_{i..} + 2\sigma_{..n} - 2\sigma_{..n} \sum_{i=1}^{k-1} p_i$$

$$- 2\sigma_{..n} \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i - 4\sigma_{..n} p_n - 2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i \sigma_{i..} - 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i \sigma_{i..}$$

$$= 2p_n \sigma_n^2 - 2\sigma_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i \sigma_n^2 + 2\sigma_n^2 p_n + 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i \sigma_n^2$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i \sigma_{i..} + 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i \sigma_{i..} + 2\sigma_{..n} - 2\sigma_{..n} \sum_{i=1}^{k-1} p_i$$

$$- 2\sigma_{..n} \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i - 4\sigma_{..n} p_n - 2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i \sigma_{i..} - 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i \sigma_{i..}$$

$$= 2p_i (\sigma_i^2 + \sigma_n^2 - 2\sigma_{i,n}) - 2(\sigma_n^2 - \sigma_{i,n})$$

$$+ 2\sigma_{i,n} p_i \sigma_n^2 - 2\sigma_{i,n} p_i - 2p_i \sigma_{i,n}$$

$$+ 2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} p_i (\sigma_n^2 + \sigma_{i,n} - \sigma_{i,n} - \sigma_{i,n}) \right]$$

$$+ 2 \left[\sum_{i=k+1}^{n-1} p_i (\sigma_n^2 + \sigma_{i,n} - \sigma_{i,n} - \sigma_{i,n}) \right]$$

$$= 2p_i (\sigma_i^2 + \sigma_n^2 - 2\sigma_{i,n}) - 2(\sigma_n^2 - \sigma_{i,n})$$

$$+ 2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} p_i (\sigma_n^2 - \sigma_{i,n}) + \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i (\sigma_n^2 - \sigma_{i,n}) \right] \quad (3)$$

ahora, si extraemos la derivada parcial de $(EY - \hat{\theta})^2$ también respecto a p_i .

$$\partial(EY - \hat{\theta})^2 / \partial p_i = 2(\mu_i - \mu_n) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \mu_n) + \mu_n - \hat{\theta} \right)$$

$$= 2(\mu_i - \mu_n) \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \mu_n) + 2(\mu_n - \mu_n)(\mu_n - \theta) \dots (4)$$

de 3 y 4 tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial E(Y-\theta)^2 / \partial \rho_i &= 2\rho_i(\sigma_i^2 + \sigma_n^2 - 2\sigma_{i,n} + (\mu_i - \mu_n)^2) \\ &+ 2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_i^2 - \sigma_{i,n} + (\mu_i - \mu_n)(\mu_i - \mu_n)) \right] \\ &+ 2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_n^2 - \sigma_{i,n} + (\mu_i - \mu_n)(\mu_i - \mu_n)) \right] \\ &- 2 \left[\sigma_n^2 - \sigma_{n,n} + (\mu_n - \mu_n)(\theta - \mu_n) \right] \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

expresada 5 en forma matricial

$$A \times P = C \dots \dots \dots (6)$$

donde A es una matriz cuadrada de (n-1) x (n-1) con elementos:

$$a_{k,i} = \begin{cases} \sigma_i^2 - \sigma_{i,n} + (\mu_i - \mu_n)(\mu_i - \mu_n) & \text{si } k \neq i \\ \sigma_i^2 + \sigma_n^2 - 2\sigma_{i,n} + (\mu_i - \mu_n)^2 & \text{si } k = i \end{cases} \dots (7)$$

C es una matriz de $(n-1) \times 2$ con elementos:

$$c_{k,i} = \begin{cases} \sigma_n^2 - \sigma_{k,n} (\mu_k - \mu_n) \mu_n & \text{si } i=1 \\ (\mu_k - \mu_n) & \text{si } i=2 \end{cases} \dots\dots(8)$$

de 6 se desprende que

$$P = A' \times C \dots\dots\dots(9)$$

El producto de A' y de C es una matriz de $(n-1) \times 2$ y sus renglones representan una combinación lineal de p_i en función de θ , esto es:

$$p_i = k_i - L_i \theta \quad \text{para } i=1,2,\dots,n-1 \dots\dots\dots(10)$$

De 10 se procede a encontrar los intervalos de θ para cada i , de tal forma que $0 \leq p_i \leq 1$ y $0 \leq 1-p_i = \dots = p_{n-1} \leq 1$. De esta forma obtenemos n intervalos y por construcción la intersección de todos estos es el conjunto solución, donde se hace mínimo el error cuadrático de la media con respecto a θ , de tal forma que $p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} \leq 1$ y $p_i \geq 0$, para $i=1,2,\dots,n-1$.

Sin embargo, para cada combinación de los n valores el error cuadrático puede variar o el conjunto solución puede ser el vacío. Para salvar estos problemas, se puede proceder a encontrar para cada combinación de los n valores el error cuadrático $E(Y-\theta)^2$, y sólo tomar aquellas combinaciones cuyo

rango de variación de θ sea diferente al conjunto vacío. Después de ello, se comparan los errores cuadráticos y de esta forma se selecciona la combinación más adecuada por intervalos.

Para ilustrar el procedimiento propuesto y además comparar el método sugerido por Markowitz, consideremos los mismos datos de los ejercicios anteriores. Sea entonces el caso de un inversionista que afronta el problema de distribuir sus fondos en tres títulos con parámetros conocidos:

- 1) renta fija: $\mu_1 = 0.04$ $\sigma_1^2 = 0.0$
 2) acción especulativa: $\mu_2 = 0.068$ $\sigma_2^2 = 0.0008$
 3) acción patrimonial: $\mu_3 = 0.056$ $\sigma_3^2 = 0.0004$
 $\sigma_{1,2} = 0.0$ $\sigma_{1,3} = 0.0$ $\sigma_{2,3} = \pm 0.0005$

donde los símbolos corresponden a las definiciones anteriores.

Primero consideremos los tres títulos con $\sigma_{1,2} = 0.0005$. En seguida remplazamos sus valores para encontrar las matrices A y C de las fórmulas 7 y 8.

$$A = \begin{pmatrix} 0.000565 & 0.000208 \\ -0.000292 & 0.000444 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.001286 & -0.016 \\ -3.500772 & 0.011 \end{pmatrix}$$

la inversa de A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1261.3656 & -590.9090 \\ -590.9090 & 1883.8363 \end{pmatrix}$$

y el producto de $A^{-1} \times C$ tenemos:

$$A^{-1} \times C = \begin{pmatrix} 2.0909 & -27.2727 \\ -0.3636 & 9.0909 \end{pmatrix} = P$$

por construcción:

$$p_1 = 2.0909 - 27.2727 \theta \quad p_2 = -0.3636 + 9.0909 \theta \text{ y}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= 1 - (2.0909 - 0.3636) - (-27.2727 + 9.0909) \theta \\ &= -0.7272 + 19.1818 \theta \end{aligned}$$

De esto se desprende que: si $0 \leq p_1 \leq 1$ entonces $0.4 \leq \theta \leq 0.07678$
 si $0 \leq p_2 \leq 1$ entonces $0.4 \leq \theta \leq 0.15$
 si $0 \leq p_3 \leq 1$ entonces $0.4 \leq \theta \leq 0.095$

por lo que la intersección de estos tres conjuntos:

$$0.4 \leq \theta \leq 0.07678$$

que es el conjunto solución si se incluyen los tres títulos. Si se sustituyen p_1 , p_2 y p_3 en la ecuación 1 tenemos que:

$$E(Y-\theta)^2 = 0.000825 - 0.046281 \theta + 0.568512 \theta^2$$

si consideramos los dos primeros títulos tenemos

$$\mu_1 = 0.04 \quad \sigma_1^2 = 0.0 \quad c_{1,2} = 0.0$$

$$\mu_2 = 0.088 \quad \sigma_2^2 = 0.0009$$

$$A = (0.001584) \quad C = (0.002804, -0.026)$$

$$A^{-1} = (593.82422)$$

$$A^{-1} \times C = (1.6650831, -16.627078)$$

$$p_1 = 1.6650831 - 16.627078 \theta \quad \text{y} \quad p_2 = -0.6650331 + 16.627078 \theta$$

el intervalo de solución es para $0.04 \leq \theta \leq 0.1001429$ y

$$E(Y-\theta)^2 = 0.000855 - 0.042755 \theta + 0.534442 \theta^2$$

con el primero y último de los títulos

$$\mu_1 = 0.04 \quad \sigma_1^2 = 0.0 \quad \sigma_{1,2} = 0.0$$

$$\mu_2 = 0.056 \quad \sigma_2^2 = 0.0004$$

$$A = (0.000858) \quad C = (0.001296, -0.016)$$

$$A' = (1524.3902)$$

$$A' \times C = (1.975610, -24.390245)$$

$$p_1 = 1.875610 - 24.390245 \theta \text{ y } p_2 = -0.375610 + 24.390245 \theta$$

el intervalo de solución es $0.04 \leq \theta \leq 0.081$ y

$$E(Y-\theta)^2 = 0.000876 - 0.048780 \theta + 0.608756 \theta^2$$

con los dos últimos títulos:

$$\mu_1 = 0.068 \quad \sigma_1^2 = 0.0009 \quad \sigma_{1,2} = 0.0005$$

$$\mu_2 = 0.056 \quad \sigma_2^2 = 0.0004$$

$$A = (0.000444) \quad C = (-.000772, 0.012)$$

$$A' = (2252.2522)$$

$$A' \times C = (-1.738738, 27.027027)$$

$$p_1 = -1.738738 + 27.027027 \theta \text{ y } p_2 = 2.738738 - 27.027027 \theta$$

el intervalo de solución es $0.0633 \leq \theta \leq 0.10133$ y

$$E(Y-\theta)^2 = 0.002184 - 0.070270 \theta + 0.875875 \theta^2$$

De considerar cada título de manera individual es obvio que el conjunto de solución es sobre todo R y para el primer título

$$E(Y-\theta)^2 = (0.04-\theta)^2 = 0.0016 - 0.08 \theta + \theta^2$$

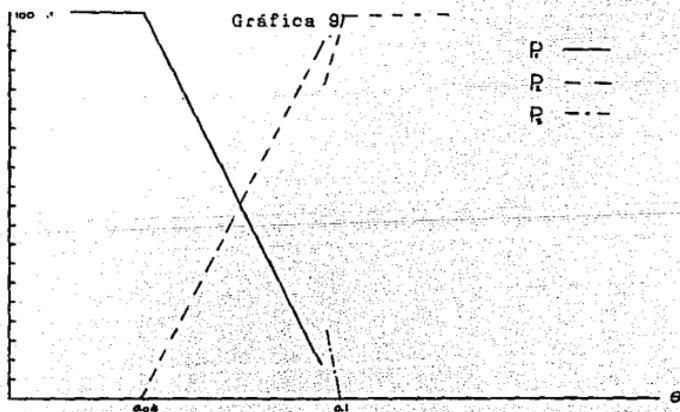
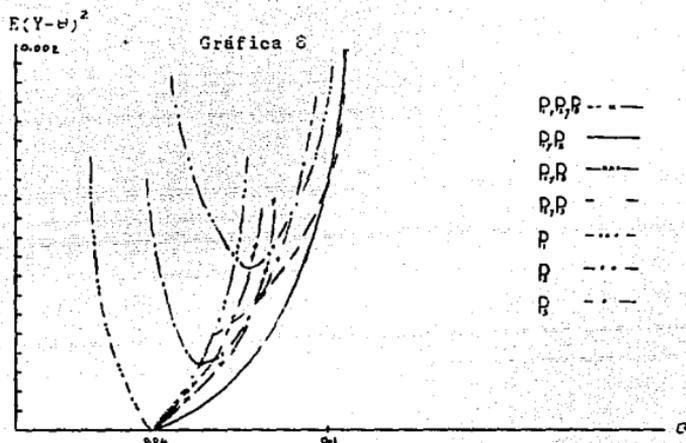
para el segundo

$$E(Y-\theta)^2 = 0.0008 + (0.066 - \theta)^2 = 0.005524 - 0.136 \theta + \theta^2$$

y para el tercero

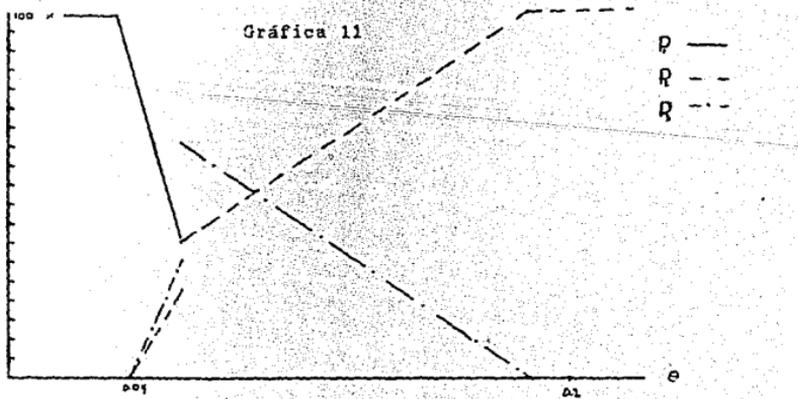
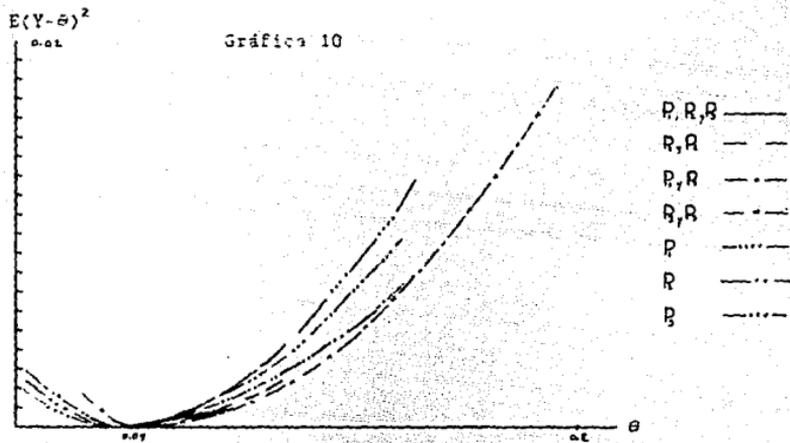
$$E(Y-\theta)^2 = 0.0004 + (0.056-\theta)^2 = 0.003536 - 0.112 \theta + \theta^2$$

Una vez que se encontró los intervalos de solución y error cuadrático para cada combinación de los títulos, se procede a comparar sus errores cuadráticos en dichos intervalos. Para ello se puede utilizar algún método analítico o gráfico. Para fines explicativos presentamos los resultados en la gráfica (8) donde, como se puede observar, se hace mínimo el error cuadrático cuando: se invierte todo el capital en el primer título para $\theta < 0.04$; se invierte en los dos primeros títulos en las proporciones de $p_1 = 1.6650831 - 16.627078 \theta$ y $p_2 = -0.6650831 + 16.627078 \theta$ para $0.04 \leq \theta < 0.0941$; se invierte en los dos últimos títulos en las proporciones de $p_3 = -1.738737 + 27.027027 \theta$ y $p_4 = 2.738738 - 27.027027 \theta$ para $0.0941 \leq \theta < 0.10133$ y se invierte todo el capital en el segundo título para $\theta \geq 0.10133$.



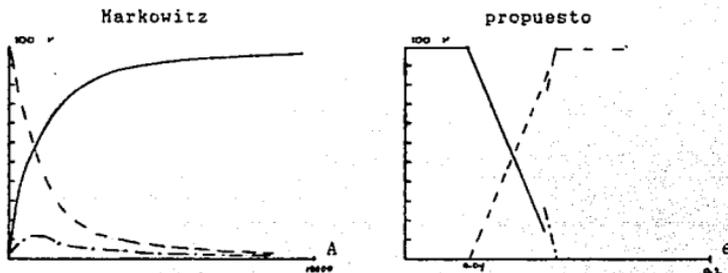
En la Gráfica 9 se presentan las proporciones de inversión para cada título en función de ϵ .

Para comparar los resultados con el procedimiento propuesto por Markowitz consideremos ahora que la covarianza entre el título parrimonial y el especulativo es $\sigma_{e,s} = 0.0005$. Para tal efecto obviamos los cálculos ya que el procedimiento es el mismo y sólo presentamos sus resultados en las gráficas 10 y 11.

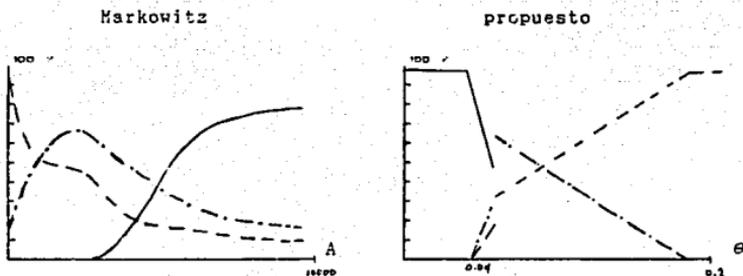


Para comparar los procedimientos, el sugerido por Markowitz y el propuesto, presentaremos ambos resultados en forma gráfica, uno al lado del otro. Es conveniente señalar que para fines de análisis de sensibilidad de estos dos procedimientos suponemos que $\sigma_{2,3}$ adopta valores entre 0.0005 y -0.0005. Además, sólo para el procedimiento propuesto por Markowitz, suponemos que A (el coeficiente de aversión al riesgo) adopta valores entre cero y 10,000.

Gráfica 12
comparación de resultados para $\sigma_{2,3} = 0.0005$



Gráfica 13
comparación de resultados para $\sigma_{2,3} = -0.0005$



Los gráficos exigen cuatro comentarios, que se presentarán en el siguiente apartado.

2.4.- Conclusión

Primero, A no está acotado por la derecha, lo que dificulta al ejecutivo de finanzas el establecer puntos de referencia para establecer su aversión al riesgo. En cambio, el procedimiento propuesto sí presenta máximos y mínimos permisibles de variación de θ y por lo mismo es más fácil el establecer una política de inversión.

Segundo, cuando $A \rightarrow \infty$ la política óptima consiste en invertir todo el capital en renta fija. Si $A = 0$, la política óptima consiste en invertir todo el capital en la acción especulativa que posea la más alta rentabilidad. Esta misma situación se presenta en el procedimiento propuesto pero de manera inversa, ya que cuando $\theta = 0.04$ o menor, la política óptima consiste en invertir todo el capital en renta fija y, para cuando θ es muy grande la política consiste en invertir todo el capital en la acción especulativa.

Tercero, dado el mismo aumento de la aversión al riesgo, el desplazamiento hacia los títulos de renta fija es más veloz si los otros dos títulos están correlacionados positivamente. Nótese también que el papel de la acción patrimonial varía según el grado de correlación entre ella y la acción especulativa. En el procedimiento propuesto existe cierta similitud, pues cuando se encuentran correlacionadas de manera positiva las acciones, patrimonial y especulativa, $p > 0$ cuando $\theta < 0.0941$, en cambio cuando la correlación es negativa $p > 0$ si $\theta < 0.0607$. En este sentido podemos decir que en la medida que θ desciende el desplazamiento hacia el título de renta fija es más rápido, siempre y cuando se encuentren correlacionados de manera positiva los títulos: patrimonial y especulativo. Asimismo se observa que el papel de la acción patrimonial también varía según el grado de correlación entre ella y la acción especulativa.

Cuarto, el procedimiento sugerido por Markowitz utiliza la programación matemática para encontrar la cartera óptima de inversión, lo que presenta una inconsistencia metodológica al tratar las variables aleatorias como si no fueran tales. No así en el método propuesto, donde es posible encontrar cierta similitud con los métodos de regresión lineal, e incluso es posible extender estos métodos al análisis de carteras de inversión. Esto es, tratar a D_1, p_1, \dots, p_n como parámetros y no como variables deterministas tal cual las maneja Markowitz.

Reconozco que este ejemplo representa una esquematización. Sin embargo, es razonable suponer que las observaciones realizadas indican el tipo de resultados que probablemente se obtendrán en los problemas más complejos de la inversión.

Bibliografía

- A.D. Roy ; Safety First and the Holding of Assets, Econometria, 1952
- Allen and Hicks; Principles of Economics. Macmillan, Londres 1896
- Donal E Farrar; The Investment Decision Under Uncertainty, Englewood Cliffs, 1962
- Erza Solomon; The Theory of Financial Management; Nueva York, Columbia University press
- James C.T. Mao; análisis Financiera. el Ateneo, Argentina 1960
- James Tobin; Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, The Review of Economic Studies, 1959
- Karel Kosik; Dialéctica de lo Concreto. Teoría y praxis, Grijalbo, México 1976
- Markowitz, Harry M; Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons, Nueva York 1962
- Pareto; Cours d'économie Politique, Lausanne, 1896
- V. Neumann and O. Morgenstern; Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, Nueva Jersey, Princeton University Press, 1947