38

2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE FLUJO A COSTO MINIMO Y POTENCIALES

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

BORIS IVAN LAVIN FIGUEROA

CIUDAD UNIVERSITARIA, D. F. 1991

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO PRIMERO

CAPITULO SEGUNDO

CAPITULO TERCERO

INTRODUCCION

La investigación de operaciones se ha ido desarrollando a un ritmo vertiginoso. El crecimiento de las aplicaciones prácticas continúa a al par que el de la teoría. Si bien el origen de esta área de las matemáticas aplicadas data de la Segunda Guerra Mundial y se debió exclusivamente a la búsqueda de mejores estrategias bélicas, es cada vez mayor el número de empresas que utilizan esta técnicas para planear su producción, del mismo modo han aumentado considerablemente los gobiernos del mundo que utilizan la investigación de operaciones para el desarrollo urbano, o para distribuir de manera adecuada los presupuestos de las naciones. De la misma forma la aplicación de algunas técnicas matemáticas de optimización es cada vez más común en el sector financiero.

En este marco el Análisis de Redes no podía quedarse rezagado y de hecho son numerosos los nuevos elementos teóricos que se agregan a los problemas tradicionales y que permiten el estudio de problemas que antes no se trataban debido a su complejidad o a falta de conocimiento del tema.

En este trabajo abordaremos el estudio de un problema clásico de la Teoría de Redes que es el de minimizar el costo de mandar cierto producto en una red , considerando algunas restricciones para la cantidad de flujo que se puede mandar por cada arco. Sin embargo, incorporaremos un elemento adicional a dicho problema que es el potencial.

Este elemento es un valor asociado a cada uno de los nodos, que representa el costo de una unidad del producto que se está mandando en cada uno de los nodos.

De este elemento se deriva otro muy importante que es el de la tensión, se define como la diferencia de potencial entre los nodos que limitan a cada uno de los arcos y es un valor asociado a cada uno de los arcos de la red.

Con estos elemento se desprende del problema que hemos mencionado, uno nuevo, que es el problema de Distribución, la riqueza práctica de este último es mucho mayor, ya que puede aplicarse a un número más grande de casos reales y en él se incorporan teóricamente los elementos que hemos introducido (potencial y tensión), considerando ciertas condiciones de factibilidad que se aplican a los mismos.

Por otra parte, se estudia en este trabajo otro problema: el de minimizar el costo total de cierto producto considerando la cantidad que hay del mismo en cada uno de los nodos y el aumento de costo que sufre en cada uno de los arcos, el cual está sometido a ciertas restricciones. Este problema recibe el nombre de Diferencial.

Existen algoritmos que resuelven estos problemas, los cuales también serán estudiados. Veremos que no son exactamente iguales para el caso en que las funciones de costo son lineales o no lineales. Estudiaremos todos los elementos teóricos necesarios para comprender cada uno de los algoritmos y veremos su justificación.

Por otra parte se investigan ciertas condiciones bajo las cuales uno de los problemas se transforma en el Dual del otro, utilizando los criterios de Dualidad de la programación Lineal.

Todo esto se explora en los tres capítulos principales que componen este trabajo , en el primero se analizan los dos problemas mencionados (Problema de Distribución y Problema Diferencial), para el caso en que la función de costo asociada a cada uno de los problemas es una función lineal. Se excluyen aquí las demostraciones de la mayoría de los resultados por el hecho de que el estudio esencial de nuestra tesis se centra en los capítulos segundo y tercero.

En el segundo se desarrolla el estudio de ambos problemas para el caso en el cual las funciones de costo son no lineales. Es muy importante en este capítulo el estudio de las condiciones generales que permiten que ambos problemas se transformen uno en el Dual del otro.

En el capítulo tercero se analizan en detalle y justifican varios algoritmos que resuelven ambos problemas.

En el cuarto capítulo se menciona una interpretación económica de las aplicaciones de este desarrollo sin profundizar en ella, ya que el objetivo de este trabajo es establecer las bases teóricas fundamentales para poder resolver los problemas Diferencial y de Distribución, en el caso más general cuando las funciones de costo son no lineales.

En los apéndices se encuentran el Algoritmo de Distribución Factible y Diferencial Factible, esenciales como subrutinas de varios algoritmos.

En las conclusiones se hace un estudio comparativo de los algoritmos resolutivos y se establecen las ventajas y desventajas de los mismos.

La mayoría de los elementos teóricos que conforman nuestro trabajo se encuentran en el libro de Rockafellar, "Network Flows and monotropic optimization", y en varias revistas que se mencionan en la bibliografía.

Nuestra intención ha sido de una manera general, aportar los puntos siguientes :

a)Terminación de una gran cantidad de resultados y demostraciones del desarrollo teórico.

b)Realización de varias demostraciones que aparecen como ejercicios para el lector.

c)Organización del trabajo para que este constituyera un bloque uniforme y completo.

d)Finalmente, y a modo ilustrativo se presenta una interpretación económica de ambos problemas.

CAPITULO PRIMERO

I. PROBLEMA DE DISTRIBUCION Y DIFERENCIAL PARA EL CASO LINEAL INTRODUCCION

Este primer capítulo es una introducción en donde se estudian los problemas de Distribución y Diferencial para el caso en que las funciones de costo son lineales. Se estudian también varios algoritmos que permiten resolver estos problemas. Se hace también un estudio de las condiciones que se requieren para que los problemas sean duales el uno del otro.

Se excluyen las demostraciones de la mayoría de los resultados por el hecho de que esta sección no constituye el estudio principal que nos ocupa y además este tema ya fue abordado en una tesis de maestría. [9 Bibliografía]

I.1 DEFINICIONES

Empezaremos por definir algunos elementos de la teoría de redes indispensables en nuestro estudio

DEFINICION

Una red $R = (N, A, d)$ es una tripleta formada por un conjunto finito de puntos N llamados vértices o nodos, un conjunto A cuyos elementos se llaman arcos y una función $d : A \to R$

DEFINICION

Dado un arco $(i, j) \in A$

a i lo llamamos vértice inicial del arco (i, j)

a j lo llamamos vértice final del arco (i, j)

a i y j los llamamos vértices terminales del arco (i, j)

DEFINICION

Matriz de Incidencia

Es una matriz m * n en la que cada columna representa un arco y cada renglón un nodo de la red y cuyos elementos son:

$$e(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es el vértice inicial del arco } j \\ -1 & \text{si } i \text{ es el vértice terminal del arco } j \\ 0 & \text{si } i \text{ no es ni el vértice inicial ni el final del arco } j \text{ o si el arco es un bucle} \end{cases}$$

DEFINICION

Un camino es una sucesión alternada de vértices y arcos(o aristas), tal que para cada arco de la sucesión, los vértices que lo encuadran son sus vértices terminales.

DEFINICION

Un circuito es un camino cerrado

DEFINICION

Un flujo en una red es un vector X m-dimensional cuyos elementos $x(j)$ están asociados a cada uno de los arcos de la red.

(Usualmente se interpreta como la cantidad de un material determinado que fluye por cada uno de los arcos de la red)

DEFINICION

Definimos el divergente de un flujo x en el nodo i como

$y(i) = div_x(i) = \sum_{j \in A} x(j)e(i,j)$

y el divergente total de la red como

$y = Ex = div(x)$

donde E es la matriz de incidencia

NOTA:

Una propiedad importante del divergente es :

$\sum_{i \in N} y(i) = 0$ para $y = divx$

Demostración:

$\sum_{i \in N} y(i) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in A} x(j)e(i,j) = \sum_{j \in A} x(j) \sum_{i \in N} e(i,j) = 0$

ya que $\sum_{i \in N} e(i,j) = 0$

DEFINICION

Un flujo x tal que $divx = 0$ recibe el nombre de circulación.

DEFINICION

El conjunto formado por todos los flujos $x \quad talesque \quad divx = 0$ recibe el nombre de espacio de circulación C.

DEFINICION

Un potencial en N es un valor arbitrario asociado a cada uno de los nodos de la red,que se denota por $u(i)$.

Tiene diversas interpretaciones como por ejemplo el costo en cada uno de los nodos, de una unidad de cierto producto que circula a través de la red, o si consideramos que la red representa una red de tuberías en la ciudad, entonces el potencial representa la altura a la que llega el agua en cada una de las ciudades que son conectadas por la tubería.

DEFINICION

La tensión es un valor asociado a cada uno de los arcos que se denota como $v(j)$ y es la diferencia de potencial entre el nodo final e inicial de cada uno de los arcos j.

$v(j) = u(i') - u(i)$ donde $j = (i, i')$

DEFINICION

Se llama a un vector v un diferencial en G si existe un vector potencial u tal que $v = \Delta(u)$

DEFINICION

El conjunto de todos los diferenciales forma un subespacio lineal de R^n que se llama el espacio diferencial y se denota por D

TEOREMA

Los espacios D y C son ortogonalmente complementarios.

Demostración:

Considérense los siguientes productos interiores:

$u \bullet y = \sum_{i \in N} u(i)y(i)$ y $v \bullet x = \sum_{j \in A} v(j)x(j)$

veamos que si $v \in D$ y $x \in C$ entonces

$v \bullet x = \sum_{j \in A} v(j)x(j) = \sum_{j \in A}(-\sum_{i \in N} u(i)e(i,j))x(j) = -\sum_{j \in A}\sum_{i \in N} u(i)e(i,j)x(j) = -\sum_{i \in N} u(i)\sum_{j \in A} e(i,j)x(j) = -\sum_{i \in N} u(i)div_x(i) = -u \bullet y$

para $v \in D$ y $x \in C$ tenemos $v \bullet x = -u \bullet y = -u \bullet divx = -u \bullet (0) = 0$

Por lo tanto, se tiene que D y C son espacios ortogonalmente complementarios □

Debido a este resultado tenemos la siguiente alternativa de definición para los intervalos.

$D = \{v \in R^N \mid v \bullet x = 0 \ \ \forall x \in C\}$

$C = \{x \in R^N \mid v \bullet x = 0 \ \ \forall v \in D\}$

Esta relación entre flujos y potenciales es muy importante para determinar la conexión entre los dos problemas lineales que consideramos,ya que nos permiten establecer ciertas condiciones bajo las cuales uno de los dos problemas aparece como el dual del otro.

Para un circuito P determinado tenemos la siguiente función indicadora:

$$e_p(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in P^+ \\ -1 & \text{si } j \in P^- \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Para un conjunto arbitrario S de arcos tenemos la siguiente función indicadora definimos

$$e_s(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in S \\ 0 & \text{si } j \notin S \end{cases}$$

I.2 DESCRIPCION DE LOS DOS PROBLEMAS

Pasemos ahora a enunciar los dos problemas que serán el objeto central de nuestro estudio.

En el primero se busca minimizar el costo que implica mandar cierto flujo por una red, el cual cumple con la siguiente condición de factibilidad: $c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j)$

Problema de Distribución

$$\begin{array}{c} MIN \\ d(j)(x(j)) + const \\ s.c. \\ c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) \\ y(i) = b(i) \text{ donde } y = div(x) \end{array}$$

$b(i)$ es una etiqueta asociada a cada nodo que representa la relación oferta demanda en cada uno de los vértices.

En el segundo se busca minimizar el costo total asociado a los potenciales y las tensiones de la red y que cumpla con determinadas condiciones de factibilidad:

Problema Diferencial

$$\begin{array}{c} MIN \\ \sum_{i \in N} b(i)u(i) + \sum_{j \in A} c(j)v(j) + q(j) \\ s.c. \\ d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j) \end{array}$$

I.3 PROBLEMA DE DISTRIBUCION. (INTRODUCCION)

El problema de Distribución es un problema típico de flujo en redes: encontrar el flujo a costo mínimo con ciertas restricciones de capacidad para el flujo.

Sin embargo, en este caso se incorpora un elemento adicional que es el potencial: un valor asociado a cada nodo y que se representa por $u(i)$ .Además consideraremos el elemento $v(j)$ que es la diferencia de potencial asociada a cada uno de los arcos

Aunque estos elementos no participan en la función objetivo del problema de Distribución, la tensión para cada arco $v(j)$ debe estar en un intervalo de factibilidad determinado en base al flujo $x(j)$ dado para cada uno de los arcos, para garantizar la optimalidad del flujo buscado.

De la misma forma sucede en el segundo problema, sólo que en este caso lo que se busca minimizar es el costo global de la mercancía en cada nodo,y el aumento global de costo en todos los arcos de la red.

El elemento conocido como flujo sigue ligado a este problema, ya que para tener una solución óptima del mismo, es necesario que este flujo cumpla con determinadas condiciones de factibilidad,asociadas a los valores de la tensión $v(j)$.

1.3.1 ELEMENTOS BASICOS DEL PROBLEMA DE DISTRIBUCION

Los teoremas y definiciones que enunciaremos a continuación son de gran importancia para determinar una solución óptima para el problema de distribución.

TEOREMA(de optimalidad).

Dado un par $(x(j), v(j))$, X es una solución óptima para el problema de distribución si y sólo si $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ y además x es un flujo factible.

Donde

$$\Gamma_j = \begin{cases} (x(j), v(j)) \in R^2 \mid & c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) \text{ y además,} \\ v(j) \leq d(j) & \text{si } x(j) < c^+(j) \text{ y} \\ v(j) \geq d(j) & \text{si } c^-(j) < x(j) \end{cases}$$

DEFINICION

Un circuito P que cumple con que:

$$d \cdot e_p = \sum_{j \in P^+} d(j) - \sum_{j \in P^-} d(j) < 0$$

y además es de ilimitada capacidad es decir, $c^+(j) = \infty \;\; \forall \;\; j \in P^+$ y

$c^-(j) = -\infty \;\; \forall \;\; j \in P^-$ recibe el nombre de circuito no balanceado.

TEOREMA(de Existencia lineal)

El problema de Distribución tiene una solución óptima finita si y solo si tiene al menos una solución factible y no presenta circuitos no balanceados.

DEFINICION

Un flujo extremo en el problema (P) es un flujo factible tal que el conjunto de arcos $F_x = \{j \in A \mid c^-(j) < x(j) < c^+(j)\}$ forma un bosque (conjunto de arboles).

DEFINICION

Un árbol en la gráfica G es una componente conexa de dicha gráfica que no tiene ningún circuito.

1.3.2 ALGORITMO DE DISTRIBUCION OPTIMA

A continuación introduciremos el algoritmo que proponemos para resolver el problema de Distribución.

Los pasos son:

(1) Encontrar una solución factible extrema,es decir, un flujo extremo.

(2) Definir el siguiente sistema de intervalos para v(j).

$$[d_x^-(j), d_x^+(j)] = \begin{cases} [d(j), d(j)] & \text{si } c^-(j) < x(j) < c^+(j), \\ (-\infty, d(j)] & \text{si } c^-(j) = x(j) < c^+(j), \\ [d(j), \infty) & \text{si } c^-(j) < x(j) = c^+(j), \\ (-\infty, \infty) & \text{si } c^-(j) = x(j) = c^+(j), \end{cases}$$

(3) Utilicemos aquí el Algoritmo Diferencial Factible,(ver apéndice B) el cual genera dos posiblidades:

a)Un potencial u, tal que $v = \Delta(u)$ y $d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j)$

b)Un circuito elemental tal que $d^+(P) = \sum_{j\in P^+} d(j) - \sum_{j\in P^-} d(j) = d * e_p < 0$

Si llegamos a (a) terminamos, hemos hallado una solución óptima porque $(x(j), v(j) \in \Gamma_j$

Si llegamos a (b) podemos tener nuevamente dos posibilidades:

b.1)Si $c^-(j) = -\infty$ para toda $j \in P^-$ y $c^+(j) = \infty$ para toda $j \in P^+$ entonces terminar, tenemos un circuito no balanceado, y por el Teorema de Existencia Lineal, esto implica que no se puede tener una solución óptima finita.

b.2)Si no sucede lo anterior, entonces ir a 4)

(4)El siguiente paso es encontrar

$$\alpha = min \begin{cases} c^+(j) - x(j) & \forall j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) & \forall j \in P^- \end{cases}$$

Debido a que el flujo es factible es claro que $\alpha \geq 0$

Se toma como nuevo flujo $x\prime = x + \alpha e_p$ donde dicho flujo es necesariamente factible y su costo es $d * x\prime = d * x + \alpha d * e_p < d * x$.Ir a 1)

Hemos disminuido el costo con este nuevo flujo. Se vuelve a repetir el algoritmo hasta que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$

I.4 PROBLEMA DIFERENCIAL (INTRODUCCION)

Este problema también es un problema de programación lineal, susceptible de ser resuelto por los métodos tradicionales; en él la función de costo costo está formada por los siguientes elementos:

-$g_j(v(j))$ representa la ganancia total del productor , debido al aumento del precio de cada unidad del producto que circule por el arco j, en el caso lineal es igual a $c(j)v(j)$ para cada arco j.

-$b(i)u(i)$ que representa el costo total que se tiene del producto en el nodo i.

Haremos dos supuestos importantes que se mantendrán en todo el desarrollo teórico del problema Diferencial.

-Se asume que la red es conexa

y

-$b(N) = 0 = b * e_N = b * e_S + b * e_{N/S} \Rightarrow b * e_s = -b * e_{N/S}$

Dicha condición significa que si existe un conjunto de nodos que mandan más flujo del que reciben, es necesario que haya un conjunto de nodos que reciben más flujo del que mandan, logrando finalmente que sea siempre el mismo flujo total, sólo que distribuído de manera diferente en los arcos de la red.

1.4.1 ELEMENTOS BASICOS DEL PROBLEMA DIFERENCIAL

Problema Diferencial

$MAX - \sum_{i\in N} b(i)u(i) - \sum_{j\in A}[c(j)v(j) - e(j)] = -b \bullet u - c \bullet v - const.$

s.c.

$d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j) \quad \forall j \in A$

La función objetivo es una función lineal de los potenciales u. (Recuérdese que $v(j) = u(i') - u(i)$)

Un potencial óptimo será aquel que minimice la función objetivo

Veremos ahora algunos elementos teóricos que nos permitirán abordar este problema.

DEFINICION

En una red $R = (N, A, d)$ un conjunto de arcos Q se llama cortadura, si podemos encontrar $Y \subset N$ tal que el nodo origen de la red pertenece a Y y el nodo destino a Y^c. Entonces Q sería

$$Q = \{(x,y) \in A \mid x \in Y, y \in Y^c\} \bigcup \{(z,w) \in A \mid z \in Y^c, w \in Y\}$$

DEFINICION

Una cortadura Q de capacidad ilimitada es aquella que cumple con que $d^+(j) = \infty \quad \forall j \in Q^+$ y $d^-(j) = -\infty \quad \forall j \in Q^-$

DEFINICION

Una cortadura $Q = [S, N/S]$ que satisface la siguiente propiedad: $-\sum_{i\in S} b(i) + \sum_{j\in Q^+} c(j) - \sum_{j\in Q^-} c(j) = b \bullet e_{N/S} + c \bullet e_Q \leq 0$

y además para la que Q es de capacidad ilimitada recibe el nombre de cortadura no balanceada.

DEFINICION

Definimos la región solución Γ_j del problema Diferencial de la siguiente manera.

$$\Gamma_j = \begin{cases} (x(j), v(j)) \in R^2 & | \, d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j) \\ además \;\; x(j) \leq c(j) & \text{si } v(j) < d^+(j) \\ y \;\; x(j) \geq c(j) & \text{si } v(j) > d^-(j) \end{cases}$$

TEOREMA(De optimalidad)

Dado un par $(x(j), v(j)), V$ es una solución óptima para el problema Diferencial sí y solo si $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ y además x es un flujo factible.

TEOREMA(De Existencia de Soluciones óptimas)

Existe al menos una solución óptima finita en el Problema Diferencial y el Supremo del problema Diferencial es finito sí y sólo si ninguna cortadura es no balanceada y hay al menos una solución factible.

I.4.2 ALGORITMO DIFERENCIAL OPTIMO

Los pasos del algoritmo Diferencial óptimo que nos permite resolver el problema del mismo nombre son los siguientes:

(1)Suponemos como ya hemos visto que la red es conexa , y que $b(N) = 0$; partimos además de un potencial factible u.

(2)Dada cualquier solución factible u al problema diferencial óptimo, definir el sistema de intervalos de capacidad que depende del potencial u.

$$[c_u^-(j), c_u^+(j)] = \begin{cases} [c(j), c(j)] & \text{si } d^-(j) < v(j) < d^+(j), \\ (-\infty, c(j)) & \text{si } d^-(j) = v(j) < d^+(j) \\ (c(j), \infty) & \text{si } d^-(j) < v(j) = d^+(j) \\ (-\infty, \infty) & \text{si } d^-(j) = v(j) = d^+(j) \end{cases}$$

En este problema $c(j)$ puede interpretarse como el flujo esperado en cada uno de los arcos.

Por lo tanto podemos interpretar esta región solución de la siguiente forma: si el aumento del costo en cada uno de los arcos es igual al mínimo permitido, entonces el productor mandará menos que el flujo esperado en cada arco, ya que no es costeable para él mandar más,

pero si es igual al máximo permitido en cada uno de los arcos, entonces se mandará una cantidad de flujo mayor que el flujo esperado,ya que el productor obtiene una clara ganancia.

(3)Usamos aquí el algoritmo de Distribución Factible que nos genera dos posiblidades:

a) Un flujo x' tal que

y $c_u^-(j) \leq x'(j) \leq c_u^+(j) \quad \forall j \in A$ o sea $(x'(j), v(j)) \in \Gamma_j$ En este caso terminamos.

b) Una cortadura $Q = [S, N/S]$ con la propiedad de que $b(S) > c_u^+(Q)$ es decir

$b(S) > \sum_{j\in Q^+} c_u^+(j) - \sum_{j\in Q^-} c_u^-(j)$

Si dicha cortadura tiene la característica de que $d^+(j) = \infty \quad \forall j \in Q^+$ y $d^-(j) = -\infty \quad \forall j \in Q^-$,entonces terminamos, dicha cortadura es no balanceada y el óptimo es ∞

(4)Sea

$$\alpha = min \begin{cases} d^+(j) - v(j) & \forall j \in Q^+ \\ v(j) - d^-(j) & \forall j \in Q^- \end{cases}$$

Como $\infty > \alpha \geq 0, u' = u + \alpha * e_{N/S}$ y $v' = v + \alpha * e_Q$, entonces u' es una nueva solución factible y para $v' = \Delta u'$ uno tiene que

$-b * u' - c * v' = -b * u - c * v - \alpha * [b * e_{N/S} + c * e_Q] \geq -b * u - c * v$

(5)Con el nuevo potencial u' ir a (2)

I.5 CONDICIONES NECESARIAS PARA GARANTIZAR LA DUALIDAD

En el caso que estamos tratando, en el cual tenemos funcio nes de costo no li - neales, es posible, realizando algunas transformaciones en las condiciones de factibilidad de ambos problemas, que se transformen uno en el Dual del Otro.

La idea más importante es reducir los modelos lineales a un caso más particular. Los nuevos intervalos de capacidad tendrán la forma $[c(j), \infty]$ y los intervalos para la tensión tendrán la forma $(-\infty, d(j))$

A continuación se enuncian los problemas Elementales de Distribución y Diferen - cial :

PROBLEMA ELEMENTAL DE DISTRIBUCION

MIN

$\sum_{j\in A}[d(j)x(j) + p(j)]$

Sobre todos los flujos que satisfacen

$x(j) \geq c(j) \quad \forall j \in A$

$y(i) = b(i) \quad \forall i \in N$

PROBLEMA DIFERENCIAL ELEMENTAL

MAX

$-\sum_{i\in N} b(i)u(i) - \sum_{j\in A}[c(j)v(j) + q(j)]$

sobre todos los potenciales v que satisfacen

$v(j) \leq d(j) \quad \forall j \in A$ donde

$v = \Delta(u)$

Vamos a ver ahora como efectivamente cada uno de estos problemas puede considerarse como el Dual del otro.

Para esto estableceremos la siguiente relación entre las constantes $q(j)$ y $p(j)$: $q(j) = -c(j)d(j) - p(j)$.

Consideremos primero el problema Elemental de Distribución, definimos una nueva variable: $x' = x(j) - c(j)$, en base a esta variable vamos a replantear el Problema Elemental.

MIN

$\sum_{j\in A}[d(j)x(j) + (-c(j)d(j) - q(j))]$

s.c.

$x'(j) \geq 0$

$Ex' = b'$

o sea

MIN

$\sum[d(j)(x'(j)) - q(j)]$

s.c.

$x'(j) \geq 0$

$Ex' = b'$

En el caso del problema Diferencial Elemental considérese la siguiente variable:

$v(j) = u(i') - u(i)$

MAX

$-\sum_{i\in N} b(i)u(i) - \sum_{j\in A}[c(j)v(j) + q(j)]$

s.c.

$-uE \leq d$

$u(i)$ sin restricción

o sea

MAX

$-\sum_{i\in N} b(i)u(i) - \sum_{j\in A}[c(j)(u(i') - u(i)) + q(j)]$

s.c.

$-uE \leq d$

$u(i)$ sin restricción

MAX

$-\sum_{i\in N} u(i)(b(i) - c(j)) + q(j)$

s.c.

$-uE \leq d$

$u(i)$ sin restricción..

considerando que $b'(i) = b(i) - c(j)$ tenemos

MAX

$-\sum u(i)b'(i) + q'(j)$

s.c.

$-uE \leq d$

$u(i)$ sin restricción

Podemos suponer que las constantes valen cero, sin pérdida de generalidad, así tenemos que los problemas pueden enunciarse como:

MIN	MAX
$d * x'$	$-u * b'$
s.c.	s.c.
$x' \geq 0$	u sin restricción
$Ex' = b'$	$-uE \leq d$

Es claro que estos dos problemas son duales el uno del otro.

Así como existe una región de optimalidad en los problemas de Distribución y Diferencial, existe una región solución que garantiza encontrar una solución óptima para los problemas elementales y además la equivalencia de dichas soluciones: esta región es la intersección de las regiones solución de los problemas Diferencial y de Distribución, y se simboliza con Γ_j

DEFINICION

La región solución que se aplica para el problema de Distribución y el problema Diferencial ya modificados es la siguiente:

$$\Gamma_j = \{(x(j), v(j)) \in R^2 \mid x(j) \geq c(j), v(j) \leq d(j) \quad \text{y } (x(j) - c(j)) * (v(j) - d(j)) = 0\}$$

-El hecho de que $v(j) \leq d(j)$ y $x(j) \geq c(j)$ se infiere directamente de los intervalos para x y v que imponen los 2 problemas que estamos tratando

-El hecho de que (x(j)-c(j))*(v(j)-d(j))=0 se desprende del Teorema Débil de Holguras Complementarias de la Teoría de la Dualidad.

En efecto: Supongamos que $x(j) > c(j)$ entonces $-u_j E = d$, es decir $v(j) = d(j)$, del mismo modo si $v(j) < d(j)$ entonces $x(j) = c(j)$. De aquí se desprende que $(x(j) - c(j)) * (v(j) - d(j)) = 0$.

TEOREMA

Si ambos problemas poseen soluciones elementales factibles, entonces

el mínimo en el problema de Distribución elemental es igual al máximo en el problema Diferencial elemental

Demostración:

Consideremos las 2 funciones objetivo y la diferencia que existe entre ellas

$\sum_{j\in A} d(j)x(j) + p(j) + \sum_{i\in N} b(i)u(i) - \sum_{j\in A} c(j)v(j) + q(j) = \sum_{j\in A}[d(j)x(j) + c(j)v(j) - x(j)v(j) + c(j)d(j)] = \sum_{j\in A}(x(j) - c(j)) * (d(j) - v(j)) \geq 0$

ya que

$x(j) \geq c(j)$ y $v(j) \leq d(j)$

Se tiene por tanto que

$\sum d(j)x(j) + p(j) \geq -\sum_{i\in N} u(i)b(i) - \sum_{j\in A} c(j)v(j) - q(j)$..........*)

si $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ entonces se da la igualdad en (*)

 □

Por otra parte la desigualdad demostrada no asegura que:

a)El ínfimo en el problema de Distribución sea finito

b)El supremo en el problema Diferencial sea finito

Si no existe solución factible en el problema Diferencial, quiere decir que el ínfimo en el Problema Distribución es igual a ∞

Por otras parte si no existe solución factible en el problema de Distribución, quiere decir que el supremo del problema Diferencial es igual a ∞

Hemos visto que en los problemas elementales los intervalos de factibilidad para ambos problemas se modifican. Así tenemos que

$x(j) \geq c(j) \quad \forall j$, $v(j) \leq d(j) \quad \forall j$

Debido a esto, para poder adaptar cualquier par de Problemas Lineal y de Distribución, y transformalos en problemas elementales,tendremos que hacer algunas adaptaciones a los intervalos de factibilidad.

Consideremos primero el caso de los flujos:

1.Si tenemos que $c^-(j)$ es finito pero $c^+(j) = \infty$ entonces basta con hacer $c(j) = c^-(j)$ y habremos terminado.

2.Si tenemos que $c^-(j) = -\infty$ pero $c^+(j)$ finito, entonces tendremos que sustituir dicho arco por otro que vaya en sentido inverso donde $c' = -c^+(j)$ y tengamos el intervalo para los flujos definido como $(c'(j), \infty)$ El costo del flujo que pasa por este arco es igual a $-d(j)x(j) + p(j)$

3.El tercer caso es cuando tenemos un intervalo de la forma $[c^-(j), c^+(j)]$, entonces el arco correspondiente debe ser sustituido por dos que vayan en sentido contrario y agregarse además un vértice adicional k que los una.

Para el primer arco formado tendríamos como restricción $(c^-(j), \infty)$ y para el segundo arco tendriamos $(-c^+(j), \infty)$ *como* $b(k) = 0, x^+(j) = -x^-(j)$

Para no alterar el costo del flujo consideramos que el valor de este en el primer caso es $d(j)x(j) + p(j)$ y en el segundo es igual a cero.

4.En el cuarto caso se tiene $(-\infty, \infty)$ como intervalo para las capacidades. En este caso se remplaza j por un par de arcos j^+ y j^-

El flujo original corresponde a $x^+(j) - x^-(j)$. Para j^+ el intervalo es $[0, \infty)$ y el costo es $d(j)x^+(j) + p(j)$ y para j^- el intervalo es $[0, \infty)$ pero el costo es $-d(j)x^-(j)$

El procedimiento es simple para hacer el remplazo en el caso de los potenciales.

1)Si $d^-(j)$ es infinito y $d^+(j)$ es finito, basta con hacer $d^+(j) = d(j)$.Tendremos así el intervalo $(-\infty, d(j))$

2)Si $d^-(j)$ es finito y $d^+(j)$ es infinito, tendremos que considerar un arco en sentido contrario, al cual le asignaremos como intervalo para la Tensión $(-\infty, -d^-(j))$ y con costo $-c(j)v(j) + q(j)$

3)Si $d^+(j)$ y $d^-(j)$ son ambas finitas, sustituimos el arco original por dos arcos.

Para j^+ el costo de la tensión es $c(j)v(j) + q(j)$ y para j^- es cero. Para j^+ el intervalo es $(-\infty, d^+(j))$ y para j^- es $(-\infty, -d^-(j))$ y el costo es cero.

4)Si $d^+(j)$ y $d^-(j)$ son ambos infinitos reemplacemos $j = (i, i')$ por arcos j^+ y j^-, así la tensión $v(j)$ se presenta como la diferencia entre $v(j^+)$ y $v(j^-)$ $(v(j^+) - v(j^-))$ y los costos son para j^+ , $c(j)v(j^+) + q(j)$ y para j^- $-c(j)v(j^-)$

Hemos visto ya dos algoritmos que resuelven el Problema de Distribución y el Problema Diferencial, ahora hemos hecho una serie de adaptaciones que nos permiten asegurar que uno de los problemas es el Dual del otro. En este contexto se plantea la pregunta de cuales son las formas de resolver ambos problemas.

Una de las manera sería recurrir al algoritmo para encontrar el flujo óptimo del problema Elemental de Distribución, utilizando el Algoritmo de Distribución Factible.

El valor hallado coincidiría con el máximo de la función objetivo del segundo problema. Sin embargo, aquí plantearemos otras posiblidades para resolver este par de problemas, y que además consideran de manera fundamental la Teoría de Dualidad.

1.6 ALGORITMO THRIFTY (Preliminares)

En el capítulo tercero introduciremos el algoritmo *Thrifty* para el caso de funciones de costo no lineales. Sin embargo en este capítulo haremos una serie de demostraciones necesarias para asegurar la validez de este algoritmo, y dichas demostraciones nos servirán de utilidad en el capítulo tercero, esta es la razón por la cual presentamos este algoritmo para el caso lineal en esta parte de nuestro trabajo. Antes de entrar de lleno a este algoritmo, veremos el Algoritmo del Camino mínimo, para lo cual necesitamos algunas definiciones preliminares.

Sea una red (N, A, d) con dos conjuntos de nodos N^+ y N^- subconjuntos de N cuya intersección es vacia.Veamos ahora los siguientes elementos:

1) La difusión de v con respecto a un camino P que va de N^+ a N^- y que forma parte de la red es igual a :

$\sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j)$

2)

$d^+(P) = \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j)$

$d^-(P) = \sum_{j \in P^-} d^-(j) - \sum_{j \in P^+} d^+(j)$

3) La difusión de v con respecto al camino P es igual a :

$[u(i') - u(i)]$ donde i' es el nodo final del camino P e i es el nodo inicial debido a que v es un diferencial y además:

[difusión de V con respecto a P]= $\sum_{j\in P^+} v(j) - \sum_{j\in P^-} v(j)$

4)La última expresión es la siguiente:

Dados dos conjuntos N^+ y N^- que pertenecen a A en los cuales el valor del potencial es constante para cada uno de los nodos, se define:

[difusión de U con respecto a N^+ y N^-] = $u(i') - u(i)$

con $i' \in N^+$ e $i \in N^-$

Se plantean ahora los siguientes problemas cuyas soluciones son equivalentes. Estos problemas son esenciales para el desarrollo del algoritmo *Thrifty*

A)Problema del camino mínimo

Dado un conjunto de nodos N^+ y otro N^- cuya intersección es vacía , encontrar el mínimo de la expresión $d^+(P)$ sobre todos los caminos que van de N^+ a N^-

B)Problema del potencial máximo.Dados ciertos intervalos para las tensiones, considérese el caso en el que tenemos el mismo valor de potencial para todos los arcos de N^+ y también para todos los de N^- encontrar la Difusión de u de N^+ a N^- que sea máxima.

Un resultado básico es el siguiente

[Difusión máxima de U de N^+ N^-]=

[Valor mínimo de $d^+(P)$ sobre .todos los caminos de N^+ a N^-]

Veamos primero el algoritmo que resuelve A)

Algoritmo del camino mínimo.

(1).Considérese un conjunto arbitrario N^+ y otro N^- de nodos de la red.

Considérese un conjunto S tal que $N^+ \subset S \subset N/N^-$

Inicialmente $S = N^+$

Considérese la función $w : s \to R$ que parte con $w(i) = 0 \ \ \forall i \in N^+ = S$

Considérese un potencial inicial u_0 constante en todo N^+ y en todo N^- y que sea factible

Sea

$d_0^+(j) = d^+(j) - v_0(j)$

$d_0^-(j) = d^-(j) - v_0(j)$

(2)Para la cortadura $Q = [S, N/S]$ considérese

$$\beta = \min \begin{cases} w(i) + d_0^+(j) & \text{si } (i', i) = j \in Q^+ \\ w(i) - d_0^-(j) & \text{si } (i, i') = j \in Q^- \end{cases}$$

(3)Si $\beta = \infty$ terminamos, Q es una cortadura de ilimitada capacidad y entonces [el valor mínimo de $d^+(P)$] = [∞] ya que:

$d^+(j) = \infty \ \ \forall j \in Q^+$ y $d^-(j) = -\infty \ \ \forall j \in Q^-$, lo cual significa que Q es una cortadura de ilimitada capacidad, y por lo tanto $d^+(P) = \infty \ \ \forall P$

Si no sucede así, considérese el arco para el cual se alcanza el mínimo, si $j \in Q^+$ inclúyase en S el nodo final i. Si $j \in Q^-$ inclúyase en S el nodo inicial i. En ambos casos, sea $u(i) = \beta$

(4)Si $i \in N^-$, hemos terminado, tendremos como potencial $u = u_0 + u$, con $u(i) = \beta$, para todos los arcos que no estén en S, además habremos encontrado el camino buscado, si no ir a (2).

Veamos ahora el siguiente resultado que se desprende de la implementación del algoritmo:

Proposición

$d_0^+(P) = \beta$

Demostración: Probemos este resultado por inducción:

i)Consideremos el primer arco j del camino y el primer nodo i' del mismo

$i' \in N^+$ por lo tanto $u(i') = 0$

Considérese que j' es el arco para el cual se alcanza el mínimo. Entonces tenemos que se cumple alguna de las dos cosas siguientes:

$$\beta = \begin{cases} d_0^+(j) & j' \in Q^+ \\ -d_0^-(j) & j' \in Q^- \end{cases}$$

es claro que β es igual a $d_0^+(P)$.

ii)Para $n \leq k$ aceptemos que:

$$\beta_n = min \begin{cases} u(i') + d_0^+(j) & j = (i', i) \in Q^+ \\ u(i') - d_0^-(j) & j = (i, i') \in Q^- \end{cases}$$

Es igual a:

$\sum_{j \in P_n^+} d_0^+(j) - \sum_{j \in P_n^-} d_0^-(j)$ con $|j| = n$

iii)Para $n = k+1$

$$\beta' = min \begin{cases} u(i) + d_0^+(j) & j = (i,i') \in Q^+ \\ u(i) - d_0^-(j) & j = (i',i) \in Q^- \end{cases}$$

Considérese que dicho mínimo se alcanza cuando $j = j'$ con $j' = (i,i') \in Q^+$ o $j' = (i',i) \in Q^-$ Existen dos posiblidades para $u(i)$, si $i \in N^+$ entonces $u(i) = 0$ y en este caso volvemos a 1) Si $i \in S/N^+$ entonces $u(i) = \beta_n$ p.a. $n \leq K$ (Recordemos la estructura del algoritmo) Por lo cual tenemos que:

$$\beta' = \begin{cases} \beta_n + d_0^+(j') & j = (i,i') \in Q^+ \\ \beta_n - d_0^-(j') & j = (i',i) \in Q^- \end{cases}$$

$$\beta' = \sum_{j \in P_n^+} d_0(j) - \sum_{j \in P_n^-} d_0(j) + d_0^+(j)$$

si

$$j \in Q^+$$

o también

$$\beta' = \sum_{j \in P_n^+} d_0(j) - \sum_{j \in P_n^-} d_0(j) - d_0^-(j)$$

si

$$j \in Q^-$$

De todo lo anterior se desprende que

$$\beta' = d_0^+(P_{n+1})$$

□

Además tenemos el siguiente resultado :

Resultado

$d^+(P) =$ [difusión de u_0 con respecto de N^+ y N^-] + β

=[difusión de U de N^+ a N^-]

Demostración:

como $d_0^+(P) = \beta$

$\sum_{j \in P^+} d_0(j) - \sum_{j \in P^-} d_0(j) = \beta$

$\sum_{j \in P^+} (d^+(j) - v_0(j)) - \sum_{j \in P^-} (d^-(j) - v_0(j)) = \beta$

$\sum_{j \in P^+} (d^+(j)) - \sum_{j \in P^-} (d^-(j)) - [\sum_{j \in P^+} v_0(j) - \sum_{j \in P^-} v_0(j)] = \beta$

$d^+(P) = \beta +$ [difusión de u_0 de N^+ a N^-]

$\beta + [u_0(i') - u_0(i)] = u_(i') - u_i$ □

Por lo tanto si consideramos otro camino P' que empiece en i y termine en i' tendremos que

$d^+(P) =$ [difusión de U de N^+ a N^-]

$= u(i') - u(i)$ con $i \in N^+, i \in N^-$

$= \sum_{j\in P^+} v(j) - \sum_{j\in P^-} v(j) \leq \sum_{j\in P^+} d(j) - \sum_{j\in P^-} d(j)$

$= d^+(P')$

de aquí es claro que $d^+(P)$ es el valor mínimo posible.

Ahora veremos cómo corresponde este valor al máximo de la difusión de los potenciales de N^+ a N^-, con el siguiente

TEOREMA

[maximo dif. con respecto a N^+ y a N^- de U]=

[minimo de los valores de $d^+(P)$ sobre todos los caminos de N^+ a N^-]

Considérese cualquier otro potencial u' tal que

$u'(i') - u'(i) = \sum_{j\in P^+} v(j) - \sum_{j\in P^-} v(j) \leq \sum_{j\in P^+} d(j) - \sum_{j\in P^-} d(j) = u(i') - u(i) = d^+(P)$

I.6.1 ALGORITMO THRIFTY (DESCRIPCION)

(1)Tomemos un par $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$, esto pasa si y solo si $x(j) \in [c_u^-(j), c_u^+(j)] \iff v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)]$

Para obtener una solución óptima es necesario que se cumpla la condición anterior y que además se tenga que $div_x(i) = b_i$.Este algoritmo parte desde el principio suponiendo que se cumple la propiedad mencionada, y todo su desarrollo sirve para obtener finalmente un flujo x tal que $div_x(i) = b_i$.

(2)Considérese los 2 conjuntos siguientes :

$N^+ = \{i \mid b(i) > y(i)\}$

$N^- = \{i \mid b(i) < y(i)\}$

(3)Utilizaremos el algoritmo del camino minimo que encuentra el mínimo de los valores de $d^+(P) = \sum_{j\in P^+} d(j) - \sum_{j\in P^-} d(j)$ que es igual al máximo de los valores $u(i') - u(i)$ de un camino P que empieza con un nodo nodo i' en N^+ y termina con un nodo i en N^-

Recordemos que para implementar el algoritmo del camino mínimo se parte de un potencial inicial factible u_0 y al final se tiene $\forall i \in N$, $u(i) = u_0(i) + w$

(4) calcúlese

$$\alpha = min \begin{cases} x(j) - c(j) & \forall j \in P \\ b(i) - y(i) & i \in N^+ \\ y(i') - b(i') & i' \in N^- \end{cases}$$

Entonces $0 < \alpha < \infty$. Reemplazar x por $x + \alpha e_p$. Si $b(i) = y(i)$ y $b(i') = y(i')$ se extraen dichos nodos de N^- y N^+ respectivamente

(5) se itera con este nuevo flujo y el nuevo potencial u.

Iniciación del Algoritmo.

Se puede tomar al principio cualquier potencial u cuyo diferencial es factible con respecto al problema diferencial y luego escoger $x(j)$ arbitrariamente en los intervalos

$$[c_u^-(j), c_u^+(j)] = \begin{cases} [c(j), \infty) & \text{si } v(j) = d(j) \\ [c(j), c(j)] & \text{si } v(j) < d(j) \end{cases}$$

CAPITULO SEGUNDO

I.- PROBLEMA DE DISTRIBUCION Y PROBLEMA DIFERENCIAL EN EL CASO NO LINEAL.

II.1 PRELIMINARES

En la primera parte de este trabajo hemos desarrollado la Teoría de la Dualidad,pero aún de manera parcial,remitiéndonos a problemas que involucran funciones de costo lineales.Sin embargo ahora desarrollaremos una teoría que nos permite extender el concepto de la Dualidad a un marco más amplio,ya que trabajaremos sobre funciones de costo localmente lineales,cuadráticas o localmente cuadráticas.

II.1.1 ELEMENTOS BASICOS

Consideraremos la función $f : x(j) \to R$, que hace corresponder a cada valor de flujo posible para el arco j,un número real.

También consideraremos la función $g : v(j) \to R$ que hará corresponder a cada valor de tensión posible para el arco j,un número real.

La función f representa el costo de mandar x unidades de un producto a través del arco j.

La función g representa el aumento global de precio debido al envío de un número determinado de unidades por el arco j.

Ambas funciones serán esenciales en el contexto de los dos problemas que enunciaremos en esta sección.

A continuación se enuncian algunas definiciones importantes:

DEFINICION *Dada una red $G = (X, A, C)$ definimos para cada $j \in A$, el intervalo no vacio $C(j)$ del siguiente modo:* $C(j) = \{x(j) \in R \mid f_j(x(j)) < \infty\}$

De este modo

Si $x(j) \in C(j)$ entonces $f_j(x(j)) < \infty$

Si $x(j) \in (C(j))^c$ entonces $f_j(x(j) = \infty$

DEFINICION

Se dirá que $f : x(j) \to R$ es convexa cuando:

$x(j) = \lambda x'(j) + (1-\lambda)x''(j) \Rightarrow \quad f_j(x(j)) \le \lambda f_j(x'(j)) + (1-\lambda)f_j(x''(j))$

$0 < \lambda < 1$

DEFINICION *Se dirá que la función $f : x(j) \to R$ es "cerrada" cuando cumpla lo siguiente:*

1.Si

$$-\infty < c^{-}(j) < c^{+}(j)$$

y $f \to \alpha < \infty$ cuando $x(j) \to c^{-}(j)$ entonces

$$c^{-}(j) \in C(j) \text{ y } f_j(c^{-}(j)) = \alpha$$

2.Si

$$c^{-}(j) < c^{+}(j) < \infty$$

y $f \to \beta < \infty$ cuando $x(j) \to c^{+}(j)$ entonces

$$c^{+}(j) \in C(j) \text{ y } f_j(c^{+}(j)) = \beta$$

.

(En este caso es claro que la función f es contínua por la izquierda en $c^{+}(j)$ y es contínua por la derecha en $c^{-}(j)$).

DEFINICION *Para* cada $x(j) \in C(j)$ definamos lo siguiente:

$f_j'^{-}(x(j)) = \lim_{h \to 0} \frac{f_j((x-h)(j)) - f_j(x(j))}{h}$

$f_j'^{+}(x(j)) = \lim_{h \to 0} \frac{f_j((x+h)(j)) - f_j(x(j))}{h}$

Observaciones y resultados importantes.

* Es posible que $c^{+}(j)$ y $c^{-}(j)$ no pertenezcan a $C(j)$ .Esto sucede si:

$f \to \infty$ cuando $x(j) \to c^{+}(j)$ o $x(j) \to c^{-}(j)$

* La función f solo puede ser discontinua en $c^{-}(j)$ y en $c^{+}(j)$ ya que estos son el ínfimo y el supremo de $C(j)$,en el interior de dicho conjunto la función es contínua por hipótesis,mientras que en el exterior el valor de la función es infinito.

*Las derivadas que hemos definido serán muy importantes en el desarrollo posterior porque nos permitirán conectar los dos problemas que trataremos.

Suposiciones:

*Como hipótesis de trabajo consideraremos que si $x(j) < c^{-}(j)$,entonces

$f_j'^{-}(x(j)) = -\infty$ y $f_j'^{+}(x(j)) = -\infty$,

por otra parte,si $x(j) > c^{+}(j)$,entonces

$f_j'^{-}(x(j)) = \infty$ y $f_j'^{+}(x(j)) = \infty$.

para $x(j) = c^{+}(j)$, $f_j'^{+}(x(j)) = \infty$

para $x(j) = c^{-}(j)$, $f_j'^{-}(x(j)) = -\infty$

* Supondremos que la función de costo es convexa,como una hipótesis básica de trabajo.

De dicha suposición se derivan los siguientes resultados:

PROPOSICION1

$\frac{f_j(x_2)-f_j(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f_j(x_3)-f_j(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f_j(x_3)-f_j(x_2)}{x_3-x_2}$

para cualesquiera $0 \leq x_1 < x_2 < x_3$ flujos dados

Demostración:

$$x_2 = \lambda x_3 + (1-\lambda)x_1 \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

de aquí

$$f_j(x_2) \leq \lambda f_j(x_3) + (1-\lambda) f_j(x_1)$$

$$f_j(x_2) \leq \lambda f_j(x_3) + f_j(x_1) - \lambda f_j(x_1)$$

$$f_j(x_2) - f_j(x_1) \leq \lambda[f_j(x_3) - f_j(x_1)]$$

$$\frac{f_j(x_2) - f_j(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \lambda \frac{(f_j(x_3) - f_j(x_1))}{\lambda(x_3 - x_1)}$$

y de aquí

$$\frac{f_j(x_2) - f_j(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f_j(x_3) - f_j(x_1)}{x_3 - x_1}$$

Otra forma de expresar x_2 es la siguiente:

$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$ y de aquí tenemos que:

$$f_j(x_2) \leq \lambda f_j(x_1) + (1-\lambda) f_j(x_3)$$

$$f_j(x_2) - f_j(x_3) \leq \lambda(f_j(x_1) - f_j(x_3))$$

$$\lambda \frac{(f_j(x_3) - f_j(x_1))}{\lambda(x_3 - x_1)} \leq \frac{f_j(x_3) - f_j(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\frac{f_j(x_3) - f_j(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f_j(x_3) - f_j(x_2)}{x_3 - x_2}$$

□

De esta proposicion se desprenden los siguientes resultados:

PROPOSICION2 La función

$$H(x(j)) = \frac{f_j(x(j)) - f_j(x'(j))}{x(j) - x'(j)}$$

donde $H(x(j)) : x(j) \rightarrow R$, con $x'(j)$ un valor fijo dado es no decreciente.

LEMA

$f_j'^{-}(x(j)) \leq f_j'^{+}(x(j))$ para todo valor de flujo.

Por otra parte también tenemos el siguiente

LEMA $f_j'^{+}(x'(j)) \leq f_j'^{-}(x''(j))$ para $x'(j) \leq x''(j)$

Demostración: Tómese cualquier valor de flujo $x(j)$, tal que $x'(j) < x(j) < x''(j)$ entonces:

$$\frac{f_j(x(j)) - f_j(x'(j))}{x(j) - x'(j)} \leq \frac{f_j(x''(j)) - f_j(x(j)}{x''(j) - x(j)}$$

por la proposicion 1, es claro entonces que tenemos que

$\frac{f_j(x'(j)) - f_j(x(j))}{x'(j) - x(j)} \leq \lim_{x(j)^- \rightarrow x''(j)} \frac{f_j(x(j)) - f_j(x''(j))}{x(j) - x''(j)}$

$= f_j'^{-}(x''(j))$

Como esta expresión se cumple para cualquier valor de $x(j)$,consideremos el límite por la derecha en el primer término de la desigualdad :

$$\lim_{x(j) \rightarrow x'(j)} \frac{f_j(x'(j)) - f_j(x(j))}{x'(j) - x(j)} \leq f_j'^{-}(x''(j))$$

por todo esto tenemos que $f_j'^{+}(x'(j)) \leq f_j'^{-}(x''(j))$. □

LEMA *Si se tiene que* $f_j'^{-}(x(j)) = f_j'^{+}(x(j))$,entonces la función es contínua en $x(j)$

Demostración: *Si* se tiene la igualdad que hemos mencionado, entonces la función es diferenciable en $x(j)$ por lo tanto al ser diferenciable es contínua □

II.1.2 LA FUNCION MARGINAL DE COSTOS

En algunos casos no se conoce la función de costo del problema que se quiere resolver. Este puede ser el caso del problema Diferencial. En este caso dicha función puede ser construída en base a una función marginal ϕ_j que será no decreciente y convexa.

$$\phi_j = \begin{cases} -\infty, & \text{si } \ x(j) < c^-(j). \\ n \in R & \text{para } \phi_j(x(j)-) \leq n \leq \phi_j(x(j)+). \ si \ \ x(j) \in C(j) \\ +\infty, & \text{si } \ x(j) > c+(j) \end{cases}$$

donde:

$$\phi_j(x(j)-) = \lim_{x'(j) \to^- x(j)} \phi_j(x'(j))$$

$$\phi_j(x(j)+) = \lim_{x'(j) \to^+ x(j)} \phi_j(x'(j))$$

Lo que buscamos es una función ϕ_j tal que al integrarla obtengamos la función de costo $f_j(x(j))$ es decir una función ϕ_j que cumpla con:

$$f_j(x(j)) = \int_{x'(j)}^{x(j)} \phi_j(t)dt + \alpha$$

$$\forall \ \ x(j) \in R \text{ y con } \ \alpha \in R$$

Tenemos como condición a la frontera que $f_j(x'(j)) = \alpha$

Entonces es claro que:

$$f_j'^-(x(j)) = \phi_j(x(j)-)$$

$$f_j'^+(x(j)) = \phi_j(x(j)+)$$

Y debido a esto la función marginal de costos que buscamos es la siguiente:

$$\phi_j = \begin{cases} -\infty, & \text{si } x(j) < c^-(j) \\ n \in R. & \text{para } f_j'^-(x(j)) \leq n \leq f_j'^+(x(j)) \text{ .si } x(j) \in C(j) \\ \infty, & \text{si } x(j) > c^+(j) \end{cases}$$

Definiremos el siguiente intervalo, con el objeto de abordar posteriormente cuando pasemos al problema de Distribución, el concepto de solución regularmente factible, el cual es esencial en el planteamiento de varios teoremas.

DEFINICION

$$\bar{C}(j) = \{x(j) \in R \text{ tal que existe } n \in R \text{ con } f_j'^-(x(j)) \leq n \leq f_j'^+(x(j))\}$$

o

$$\tilde{C}(j) = \{x(j) \in R \text{ tal que existe } n \in R \text{ con } \phi_j(x(j)-) \leq n \leq \phi_j(x(j)+)\}$$

Nota: La diferencia entre $C(j)$ y $\tilde{C}(j)$ está solamente en los valores extremos $c^-(j)$ y $c^+(j)$; estos valores pueden pertenecer a $C(j)$ pero no pertenecer a $\tilde{C}(j)$.

II.1.3 CURVAS CARACTERISTICAS

Considérese el siguiente conjunto:

$$\Gamma_j = \{(x(j), v(j)) \in R^2 \text{ tal que } f_j'^-(x(j)) \leq v(j) \leq f_j'^+(x(j))\}$$

DEFINICIONΓ_j recibirá el nombre de curva característica.

Observación:Dicha curva no es la gráfica de una función ya que en todos los valores $x(j)$ donde $f_j'^-(x(j))$ no es igual a $f_j'^+(x(j))$ encontramos en la curva un segmento vertical que une ambos valores.de aquí que para estos valores de flujo $x(j)$,tenemos que todos los puntos de la forma $(x(j), n)$ con $f_j'^-(x(j)) \leq n \leq f_j'^+(x(j))$ pertenecen a la curva característica.

En Γ_j podemos leer el valor de $f_j'^-(x(j))$ y de $f_j'^+(x(j))$ si recordamos que

$$f_j'^-(x(j)) = \lim_{x'(j) \to x(j)^-} \phi_j(x'(j))$$

$$f_j'^+(x(j)) = \lim_{x'(j) \to x(j)^+} \phi_j(x'(j))$$

II.2 PROBLEMA DE DISTRIBUCION

En esta sección introduciremos el problema de distribución óptima considerando funciones de costo no lineales.Dicho problema es una extensión del problema de Distribución para el caso elemental,el cual ya hemos tratado con anterioridad.

Con este objetivo en mente será necesario incorporar algunos elementos teóricos indispensables en el planteamiento del problema que nos ocupa.

Para cada arco j, hemos definido la función $f_j(x(j))$ que representa el costo de mandar $x(j)$ unidades de flujo por el arco j.

II.2.1 PLANTEAMIENTO DE PROBLEMA DE DISTRIBUCION

DEFINICION

La función global de costo de un flujo x en una red se define como:

$$\phi(x) = \sum_{j \in A} f_j(x(j))$$

Pasemos ahora a enunciar el problema de Distribución óptima

$$Min \phi(x)$$

$$s.c.$$

$$x(j) \in C(j) \forall \quad j \in A$$

$$y(i) = b(i) \forall \quad i \in N$$

$$\text{donde } y = div x$$

donde $b(i)$ es una etiqueta asociada a cada nodo que representa la relacion de ofertas y demandas de flujo la relación Oferta- Demanda en cada uno de los nodos.

Haremos ahora dos supuestos importantes que mantendremos en el desarrollo de esta sección

i) $\sum_{j \in N} b(i) = b(N) = 0$

ii) *La red G es conexa*

Tenemos dos resultados importantes de los cuales se derivan una serie de resultados más, el primero establece que para cualquier flujo factible X el valor de la función de costo necesariamente es finito, lo cual es básico para entender el teorema de acotamiento para flujos que veremos en el final de este capítulo; el segundo es e - sencial para saber cuando se ha encontrado una solución factible para el problema de distribución y cuando es necesario seguir buscando dicha solución , sólo así podemos abordar y entender los algoritmos resolutivos del capítulo tercero.

PROPOSICION

$$\phi(x) < \infty \iff x(j) \in C(j) \ \ \forall j$$

Esto se debe claramente al hecho de que sólo si $x(j)$ no pertenece a $C(j)$ tenemos que

$$f_j(x(j)) = \infty$$

TEOREMA DE DISTRIBUCION FACTIBLE.

Sea un flujo x para el problema de Distribución tal que $div x = b$.Una condición necesaria y suficiente para que dicho flujo sea factible es que $b(S) \leq c^+(Q)$ para todas las cortaduras $Q = [S, N/S]$ donde N es el conjunto total de nodos.

En este teorema tenemos un nuevo elemento teórico

$$c^+(Q) = \sum_{j \in Q^+} (c^+(j)) - \sum_{j \in Q^-} (c^-(j))$$

La interpretación que podemos dar a este resultado se desprende de lo siguiente: $b(S)$ es la suma total de las relaciones oferta-demanda de todos los nodos de S. Cuando dicha relación es igual a $div x$ para cada nodo de S entonces $b(S)$ coincide con $A = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j)$; es claro que si x es un flujo factible, entonces $A = b(S) \leq c^+(Q)$.

Demostración:

$\rightarrow$) Supongamos primero que $x(j) \in C(j)$ $\forall j$ i.e.

$c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j)$ $\forall j$

Nuestro objetivo es demostrar lo siguiente:

$$b(S) \leq c^+(Q) \text{ para toda cortadura } Q = [S, N/S]$$

Consideremos ahora la cortadura generada por un nodo w_i,

$$Q = [S, N/S] \text{ donde } S = w_i \text{ y } N/S = N - \{w_i\}$$

$$b(w_i) = \sum_{j\in Q^+} x(j) - \sum_{j\in Q^-} x(j) \leq \sum_{j\in Q^+} c^+(j) - \sum_{j\in Q^-} c^-(j)$$

Por lo tanto $b(S) \leq c^+(Q)$

Consideremos una colección arbitraria de nodos S

Entonces si $S = \bigcup w_i$ y $Q = [S, N/S]$ tenemos que $b(S) = \sum_{w_i \in S} b(w_i) \leq \sum_{j\in Q^+} x(j) - \sum_{j\in Q^-} x(j) \leq \sum_{j\in Q^+} c^+(j) - \sum_{j\in Q^-} c^-(j) = c^+(Q)$

y de aquí

$$b(S) \leq c^+(Q)$$

Como la colección era arbitraria la necesidad queda demostrada.

$\Leftarrow$)

La suficiencia se prueba de forma constructiva, usando el Algoritmo de Distribución Factible (ver Apéndice A) □

Puede ser que $C(j)$ no sea cerrado, lo cual nos llevaría a replantear el teorema en los siguientes términos:

TEOREMA DE DISTRIBUCION FACTIBLE MODIFICADO

El flujo $x(j) \in C(j) \iff b(S) \in C(Q)$ para todas las cortaduras

$Q = [S, N/S]$,donde

$$C(Q) = \{ \sum_{j\in Q^+} x(j) - \sum_{j\in Q^-} x(j) \text{ tal que } x(j) \in C(j) \}$$

Demostración: La demostración es análoga a la del teorema anterior:

$\Rightarrow$) Se toma un nodo arbitrario w_i tal que $b(w_i) = div(w_i)$;además se considera una cortadura $Q = [S, N/S]$ tal que $S = w_i$,es claro que

$$b(S) = b(w_i) = \sum_{j\in Q^+} x(j) - \sum_{j\in Q^-} x(j)$$

donde $x(j) \in C(j) \forall \; j \in Q$,por lo tanto $b(S) \in C(Q)$

Considérese cualquier otra cortadura $Q = [S, N/S]$. S puede expresarse como $S = \bigcup w_i$.

$$b(S) = \sum_{w_i \in S} b(w_i) = \sum_{j\in Q^+} x(j) - \sum_{j\in Q^-} x(j) \in C(Q)$$

donde $x(j) \in C(j)$,por lo tanto

$b(S) \in C(Q)$

$\Leftarrow$) Es una demostración análoga a la que se hace para el teorema original usando el algoritmo de Distribución Factible $\square$

Podemos referirnos a un caso análogo que garantiza la existencia de soluciones regularmente factibles.

DEFINICION *U*na solución se llama regularmente factible cuando $x(j) \in \hat{C}(j)$ para toda $j \in A$,y $divx = b$

Se puede modificar el teorema ya mencionado para la existencia de soluciones factibles y adaptarlo para soluciones regularmente factibles.

TEOREMA DE DISTRIBUCION FACTIBLE (SEGUNDA MODIFICACION)

Un flujo x que cumple con que $divx = b$ es regularmente factible sí y solo sí

$b(S) \in \hat{C}(Q)$

donde $\hat{C}(Q) = \{\sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j)$ tal que $x(j) \in \hat{C}(j)\}$

Demostración Análoga a la del resultado anterior.

II.2.2 CASOS PARTICULARES

Un caso especial del problema de distribución óptima es el problema de circulación en el que $b(i) = 0 \ \forall \ i \in N$

Un modelo más general es el problema de flujo óptimo,en este caso, también se tiene una función de costo asociada a cada nodo i, y la función objetivo a minimizar es:

$\sum_{j \in A} f_j(x(j)) + \sum_{i \in N} f_i(y(i))$

Sobre todos los flujos que satisfacen:

$x(j) \in C(j) \ \forall \ j \in A$

y

$y(i) \in C(i) \ \forall \ i \in N$

Supongamos que nuestro problema es mandar una cierta mercancía por una red. La función de costo asociada a cada nodo representaría el precio global del total que se tenga de mercancía en cada uno de los nodos.

II.3.PROBLEMA DIFERENCIAL

En este problema tendremos asociado a cada nodo un valor u(i) conocido como potencial y a cada arco (i,i'), el valor de la tensión $v(j) = u(i') - u(i)$

Para cada valor de la tensión definiremos la función de costo $g_j(v(j))$

Dicha función tendra las características mencionadas para f_j: convexa, no decreciente y contínua en el interior de $D(j)$

tenemos los siguientes intervalos para el caso de la tensión:

$D(j) = \{v(j) \in R \mid g_j(v(j)) < \infty\}$ y

$\hat{D}(j) = \{v(j) \in R \mid$ existe $n \in R$ con $g_j'^-(v(j)) \leq n \leq g_j'^+(v(j))\}$

Observación: Es claro que $\hat{D}(j) \in D(j)$ porque si $v(j) \in \hat{D}(j)$ entonces existe $n \in R$ tal que $g_j'^-(v(j)) \leq n \leq g_j'^+(v(j))$ por lo tanto se cumple que $g_j(v(j)) < \infty$

Consideraremos la función objetivo $v(u)$ definida como

$v(u) = -\sum_{i \in N} u(i)b(i) - \sum_{j \in A} g_j(v(j))$

II.3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DIFERENCIAL

Pasemos ahora a plantear el problema Diferencial.

Maximizar $v(u)$

s.c. $v(j) \in D(j) \quad \forall \quad j \in A$

DEFINICION Un potencial u tal que $v(j) \in D(j) \quad \forall \quad j \in A$ se llama potencial factible.

DEFINICION Si además minimiza $v(u)$ es un potencial óptimo

La siguiente definición es básica para entender el planteamiento del Teorema Diferencial Factible que como en el Problema de Distribución es básico para saber cuando tenemos una solución factible o cuando necesitamos seguir buscando dicha solución factible.

DEFINICION $d^+(P) = \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j)$

TEOREMA DIFERENCIAL FACTIBLE:

$v(j) \in [d^-(j), d^+(j)] \quad \forall j \iff 0 \leq d^+(P) \quad \forall$

circuito elemental P

DEMOSTRACION

$\Rightarrow)$

Si $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j) \forall \quad j \Rightarrow$

$\sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) \leq$

$\sum_{j \in P^+} d(j) - \sum_{j \in P^-} d(j) = d^+(P)$

para todo camino P

Si $V = \Delta U$ para algún potencial U, entonces $u(i') - u(i) = \sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) \leq d^+(P)$

para todo camino P.

Donde i' es el nodo final de P, e i es el nodo inicial de P. Si nos referimos a un circuito entonces ambos nodos coinciden por lo que

$0 = u(i') - u(i) \leq d^+(P)$ □

$\Leftarrow$) Se prueba constructivamente usando el algoritmo Diferencial Factible (Apéndice B)

Sabemos que $D(j)$ puede ser un intervalo no cerrado ya que $d^-(j)$ y/o $d^+(j)$ pueden no pertenecer a $D(j)$, en este caso nuestro teorema debe ser sustituido por el siguiente

TEOREMA DIFERENCIAL FACTIBLE MODIFICADO:

Un potencial $v(j) \in D(j) \iff 0 \in D(P)$ $\forall$ los circuitos elementales P donde

$D(P) = \{\sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j)$ tal que $v(j) \in D(j)\}$

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$)Sean i e i' vértice inicial y final de un camino P

$$u(i') - u(i) = \sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) \in D(P)$$

porque

$v(j) \in D(j)$ para todo arco j del camino P

$\Leftarrow$) Análogo a la del Teorema original utilizando el Algoritmo Diferencial Factible.

DEFINICION Se dice que un potencial es regularmente factible cuando $v(j) \in \hat{D}(j)$ $\forall j \in A$

En base a esta definición tenemos el siguiente

TEOREMA DIFERENCIAL FACTIBLE (SEGUNDA MODIFICACION):

Un Potencial es Regularmente Factible si y solo si $0 \in \hat{D}(P)$ donde

$\hat{D}(P) = \{\sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) \mid v(j) \in \hat{D}(j)\}$

(La demostracion es análoga a la de los casos anteriores.)

II.3.2 CASOS PARTICULARES

En este caso también tenemos las dos variantes del problema anterior

1. Si consideramos que $b(i) = 0$ tenemos que

$\psi(u) = -\sum_{j \in A} g_j(v(j))$

Esto significa que eliminamos de nuestra función objetivo el costo por concepto de la mercancía en cada uno de los nodos, conservándose solamente el aumento global del costo en los arcos de la red.

2. Si asociamos a cada nodo i una función de costo $g_i(u(i))$ y un intervalo $D(i)$ tenemos entonces el problema potencial óptimo.

En este caso lo que habría que maximizar es:

$$-\sum_{i \in N} g_i(u(i)) - \sum_{j \in A} g_j(v(j))$$

$$s.c. \quad u(i) \in D(i) \;\; \forall \;\; i \in N$$

$$v(j) \in D(j) \;\; \forall \;\; j \in A$$

II.4. CONDICIONES DE LAS FUNCIONES DE COSTO

Hemos visto hasta ahora el Problema de Distribucion óptima y el Problema Diferencial. Bajo ciertas condiciones impuestas a las funciones de costo dichos problemas pueden convertirse uno en el Dual del otro; son precisamente esas condiciones las que estudiaremos ahora.

DEFINICION

Diremos que las funciones $f_j(x(j))$ y $g_j(v(j))$ son CONJUGADAS la una de la otra si:

$$f_j(x(j)) = sup_{v(j) \in R}\{x(j)v(j) - g_j(v(j))\}$$

$$= -inf_{v(j) \in D(j)}\{g_j(v(j)) - x(j)v(j)\}$$

$$g_j(v(j)) = sup_{x(j) \in R}\{x(j)v(j) - f_j(x(j))\}$$

$$= -inf_{x(j) \in C(j)}\{f_j(x(j) - x(j)v(j)\}$$

Veremos ahora tres resultados básicos, partiendo de que las funciones son conjugadas, ya que nos permitirán demostrar que cuando $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ y $div\,x = b$ hemos encontrado las soluciones óptimas de ambos problemas y ademas dichas soluciones coinciden.

A.- $g_j(v(j)) = -(f_j x(j) - x(j)v(j)) \iff f_j'^{-}(x(j)) \leq v(j) \leq f_j'^{+}(x(j)) \quad \forall x(j) \in R$

Demostración:

$g_j(v(j)) = -inf_{x(j)\in C(j)}\{f_j(x(j)) - x(j)v(j)\}$ por definición

Consideremos la función $h(x(j)) = f_j(x(j)) - x(j)v(j)$. Para encontrar el valor de $x(j)$ tal que $g_j(v(j)) = -f_j(x(j)) + x(j)v(j)$ es necesario encontrar el ínfimo de la función h debido a la definición de g. De aquí en $x(j)$ se alcanza el ínfimo de la de la función $h \iff -h = g$ y por otro lado

En $x(j)$ se alcanza el ínfimo de la función $h \iff h'^-(x(j)) \leq 0 \leq h'^+(x(j))$ (ver cap. 3) de donde $-h = g \iff h'^-(x(j)) \leq 0 \leq h'^+(x(j)) \iff f_j'^-(x(j)) \leq v(j) \leq f_j'^+(x(j))$ □

B.- $f_j(x(j)) = -(g_j(v(j)) - x(j)v(j) \iff g_j'^-(v(j)) \leq x(j) \leq g_j'^+(v(j)) \quad \forall v(j) \in R$

Demostración: $f_j(x(j)) = -inf_{v(j)\in D(j)}\{g_j(v(j)) - x(j)v(j)\}$ Considerar la función $h(v(j)) = g_j(v(j)) - x(j)v(j)$, es claro que para encontrar el valor de $v(j)$ tal que $f_j(x(j)) = -g_j(v(j)) + x(j)v(j)$ el ínfimo de la función h es necesaria. En $v(j)$ se alcanza el ínfimo de la función $h \iff -h = f$ y por otro lado En $v(j)$ se alcanza el ínfimo de la función $h \iff h'^-(v(j)) \leq 0 \leq h'^+(v(j))$ De aquí $-h = f \iff h'^-(v(j)) \leq 0 \leq h'^+(v(j)) \iff g_j'^-(v(j)) \leq x(j) \leq g_j'^+(v(j))$ □

TEOREMA

$(x(j), v(j)) \in \Gamma_j \iff f_j'^-(x(j)) \leq v(j) \leq f_j'^+(x(j)) \iff g_j'^-(v(j)) \leq x(j) \leq g_j'^+(v(j))$

Demostración:

$g_j'^-(v(j)) \leq x(j) \leq g_j'^+(v(j)) \iff \quad f_j(x(j)) = x(j)v(j) - g_j(v(j)) \iff$

$g_j(v(j) = x(j)v(j) - f_j(x(j)) \iff f_j'^- x(j) \leq v(j) \leq f_j'^+ x(j) \iff (x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ □

De aquí se ve que $\Gamma_j^{-1} = \{(v(j), x(j)) \mid g_j'^- v(j) \leq x(j) \leq g_j'^+ v(j)\}$. Si consideramos a $\hat{D}(j)$ como la proyección en el eje vertical de la curva característica, entonces llegamos a la siguiente definición:

DEFINICION

$\hat{D}(j) = \{v(j) \in R \mid$ existe $x(j) \in R con g_j'^-(v(j)) \leq x(j) \leq g_j'^+(v(j))\}$ que es la Proyección de Γ_j en el eje vertical.

II.5 CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES DE COSTO

Las propiedades que se desprenden de tener funciones de costo conjugadas son muy importantes para la elaboración de la Teoría de la Dualidad Generalizada. Gracias a ellas podemos construir las funciones de costo $g_j(v(j))$ en base a las funciones de costo $f_j(x(j)$ asociadas a los flujos. Basta con obtener primero la curva característica Γ_j en base a $f_j(x(j))$, después determinar Γ_j^{-1} y finalmente integrar Γ_j^{-1} para de este modo obtener $g_j(v(j))$

La constante de integración se determina en base a las condiciones iniciales preestablecidas. Teniendo la curva característica se determina un punto $(\bar{x}(j), \bar{v}(j)) \in \Gamma_j$ y $g_j(\bar{v}(j)) = \bar{x}(j)\bar{v}(j) - f_j(\bar{x}(j))$

De aquí se desprende que:

$$g_j(v(j)) = \bar{x}(j)\bar{v}(j) - f_j(\bar{x}(j)) + \int_{\bar{v}(j)}^{v(j)} \psi_j(t)d(t) \qquad \forall v(j) \in R$$

Donde $\psi_j(t)$ es la función que se genera utilizando Γ_j^{-1} sin considerar los segmentos verticales de dicha curva. Otra forma de encontrar $g_j(v(j))$ es obtener la curva característica Γ_j en base a $f_j(x(j))$, luego determinar $\tilde{D}(j)$ como la proyección de Γ_j en el eje vertical.

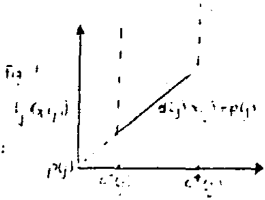
Posteriormente, para cada $v(j) \in \tilde{D}(j)$ encontrar un valor $x(j)$, tal que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ y luego obtener $g_j(v(j)) = x(j)v(j) - f_j(x(j))$. Por otra parte para cada $v(j)$ que no pertenece a $\tilde{D}(j)$ definir $g_j(v(j)) = \infty$

La posibilidad de construir las funciones de costo del problema dual en base a las funciones de costo del primal es fundamental dentro de la teoría de la dualidad ya que nos garantiza que las funciones obtenidas g y f son conjugadas por lo que si $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$, $x(j) \in C(j)$ y $v(j) \in D(j)$.según los teoremas que hemos visto . Esta propiedad es básica y necesaria para asegurar que ambos problemas son duales el uno del otro como veremos a continuación.

II.6 EJEMPLOS DE FUNCIONES CONJUGADAS

Ejemplo. 1. Consideremos el primer caso de funciones lineales de costo

$$f_j(x(j)) = \begin{cases} d(j)x(j) + p(j) & \text{si } x(j) \in [c^-(j), c^+(j)] \\ \infty & \text{si } x(j) \notin [c^-(j), c^+(j)]^c \end{cases}$$



De la gráfica de Γ_j se ve que :

$v(j) \geq d(j) \Rightarrow (v(j), c^+(j)) \in \Gamma_j^{-1}$

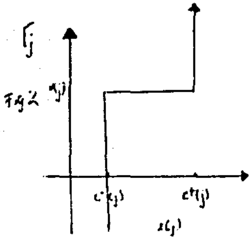
$v(j) \leq d(j) \Rightarrow (v(j), c^-(j)) \in \Gamma_j^{-1}$

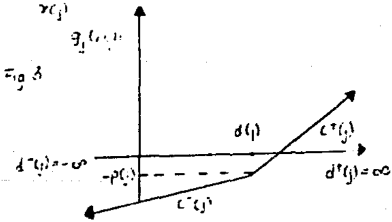
Para $d(j) \leq v(j)$ se tiene que $g_j(v(j)) = v(j)c^+(j) - d(j)c^+(j) - p(j) = c^+(j)[v(j) - d(j)] - p(j)$

Para $v(j) \leq d(j)$ se tiene que $g_j(v(j)) = v(j)c^-(j) - d(j)c^-(j) - p(j) = c^-(j)[v(j) - d(j)] - p(j)$

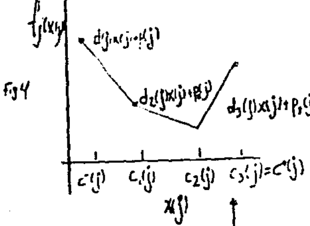
Por lo tanto la función $g_j(v(j))$ es la siguiente

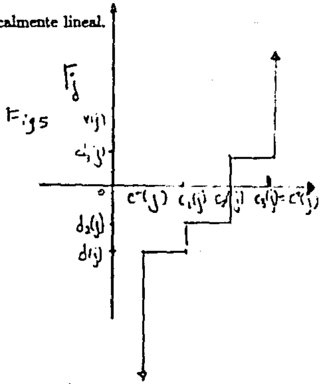
$$g_j(v(j)) = \begin{cases} c^+(j)[v(j) - d(j)] - p(j) & \text{si } v(j) \geq d(j) \\ c^-(j)[v(j) - d(j)] - p(j) & \text{si } v(j) \leq d(j) \end{cases}$$

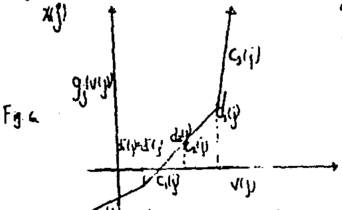




2.Veamos el caso de una función localmente lineal.







$$f = \begin{cases} d(j)x(j) + p(j) & \text{si } c^-(j) \leq x(j) \leq c_1(j) \\ d_2(j)x(j) + p_2(j) & \text{si } c_1(j) \leq c_2(j) \\ d_3(j)x(j) + p_3(j) & \text{si } c_2(j) \leq c_3(j) \end{cases}$$

Vemos en la gráfica de Γ_j que si

$$v(j) \leq d^-(j) \Rightarrow (c^-(j), v(j)) \in \Gamma_j$$

$$d^-(j) \leq d_1(j) \leq v(j) \leq d_2(j) \Rightarrow (c_1(j), v(j)) \in \Gamma_j$$

$$d_2(j) \leq v(j) \leq d_3(j) \Rightarrow (c_2(j), v(j)) \in \Gamma_j$$

$$d_3(j) \leq v(j) \Rightarrow (c_3(j), v(j)) \in \Gamma_j$$

Esto nos lleva a lo siguiente:

$$v(j) \leq d_1(j) \Rightarrow g_j(v(j)) = c(j)v(j) - f_j(c^-(j))$$

De aquí:

$$g = c^-(j)v(j) - d_1(j)c^-(j) - p_1(j)$$

$$g = c^-(j)[v(j) - d_1(j)] - p_1(j)$$

Utilizando un razonamiento análogo, podemos saber cuanto vale la función g en cada uno de los intervalos dados para $v(j)$.

$$v(j) \leq d(j) \Rightarrow g \;= c^{-}(j)[v(j) - d_1(j)] - p_1(j)$$

$$d_1(j) \leq v(j) \leq d_2(j) \Rightarrow g_j(v(j)) = c_1(j)[v(j) - d_2(j)] - p_2(j)$$

$$d_2(j) \leq v(j) \leq d_3(j) \Rightarrow g_j(v(j)) = c_2(j)[v(j) - d_3(j)] - p_3(j)$$

$$d_3(j) \leq v(j) \leq d_4(j) \Rightarrow g_j(v(j)) = c_3(j)[v(j) - d_4(j)] - p_4(j)$$

De esta forma hemos obtenido la función g.

II.7 VERIFICACION DE LA DUALIDAD.

Hemos llegado a una fase muy importante dentro de nuestro desarrollo de la Teoría de las funciones Conjugadas: veremos cómo cada uno de los problemas que estamos tratando se convierte en el dual del otro al asumir que las funciones de costo son conjugadas y al considerar los vectores de flujo x y tensión y tales que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j \;\; \forall j$.

Utilizaremos para ello la teoría tradicional de la Dualidad de la Programación Lineal junto con los Teoremas que de ella se desprenden.

A continuación enunciaremos los dos problemas:

Problema de Distribución

$$MIN \;\; \phi(x) = \sum_{j \in A} f_j(x(j))$$

$$s.c.$$

$$x(j) \in C(j)$$

$$div_i(x) = y(i) = b(i) \;\; \forall i \in N$$

Problema Diferencial

$$MAX \;\; \psi(u) = -\sum u(i)b(i) - \sum g_j(v(j))$$

$$s.c.$$

$$v(j) \in D(j)$$

$u(i)$ sin restricción

Veamos ahora porqué son duales el uno del otro

Partamos por hipótesis de que las funciones son *conjugadas*, además usaremos los pares $(x(j), v(j))$ tales que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ $\forall j$ La igualdad $div_i(x) = b(i)$ puede expresarse como $Ex = b$ para toda $i \in N$ donde E es la matriz de Incidencia.

Entonces podemos volver a expresar el problema primal de la siguiente forma:

$$MIN\phi(x) = \sum_{j\in A} f_j(x(j))$$

$$s.c.$$

$$x(j) \in C(j)$$

$$Ex = b$$

Como estamos trabajando con funciones de costo congujadas, tenemos que si $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ entonces $x(j) \in [c_u^-(j), c_u^+(j)]$ y de aquí $x(j) \in C(j)$ y $v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)]$ por lo que $v(j) \in D(j)$

Por efectos de la verificación, consideraremos que las variables del problema dual forman el vector $u' = -u$ Por otra parte como $Ex = b$ las variables del problema dual no tienen restricción de signo.

De hecho, las condiciones del Problema Dual son $v(j) \in D(j)$ y $u(i)$ sin restricción.

Lo que resta pues es determinar la estructura de la Función Objetivo del Problema Dual. Debido a que trabajamos con funciones congujadas tenemos que:

$$g_j(v(j)) = x(j)v(j) - f_j(x(j))$$

y de aquí:

$$\frac{g_j(v(j)) + f_j(x(j))}{v(j)} = x(j)$$

De aquí como $Ex = b$ se tiene que $E[\frac{g_j(v(j))+f_j(x(j))}{v(j)}]_{j\in A} = b \quad \Rightarrow$
$E[f/v(j) + g/v(j)]_j \in A = b$ De aquí

$$E[\frac{f}{v(j)}]_{j\in A} = b - E[\frac{g}{v(j)}]_{j\in A}$$

Notar que $\frac{f}{v(j)}$ es una función del flujo $x(j)$. De acuerdo a la teoría de Dualidad tendríamos que los coeficientes de la función objetivo del problema dual son:

$$b - E[\frac{g_j(v(j))}{v(j)}]$$

Y la función objetivo del problema Dual quedaría como

$$\psi(u') = u' * [b - E[\frac{g_j(v(j))}{v(j)}]]$$

con $u' = (u'(i))$ Considerando que $u' = -u$ con u vector de potenciales.

$$\psi(u) = (-bu)_{i\in N} + [-v][E^{-1}][E][\frac{g_j(v(j))}{v(j)}]$$ porque $[-v][E^{-1}]$ es el vector de potenciales u.

Esto último se debe a que $v = -u[E]$

Finalmente de aquí obtenemos la función objetivo del problema Dual que estábamos buscando.

$$\psi(u) = -\sum_{i\in N} b(i)u(i) - \sum_{j\in A} g_j(v(j))$$

De esta forma hemos llegado al problema Dual, primero encontrando las restricciones y posteriormente la estructura de la función objetivo:

$$Max \quad \psi(u)$$

$$s.c.$$

$$v(j) \in D(j)$$

$u(i)$ sin restricción

II.7.1 COINCIDENCIA DE LAS SOLUCIONES OPTIMAS.

A continuación enunciamos el teorema fundamental de la Dualidad para el problema Diferencial y para el Problema de Distribución.

TEOREMA

Un flujo y un potencial son soluciones óptimas para el problema Diferencial y para el Problema de Distribución, y además coinciden $\iff$ satisfacen $div_i(x) = b_i$ y $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j \ \forall \ j \in A$

Demostración:

siempre daremos por hecho que las funciones de costo son congujadas

$\Leftarrow)$

Como f y g son conjugadas

se tiene que $f_j(x(j)) \geq x(j)v(j) - g_j(v(j)) \;\; \forall \;\; j \in A$ como $divx = b$ tenemos que $x(j)v(j) = -u(i)b(i)$

por lo que

$$f_j(x(j)) \geq -u(i)b(i) - g_j(v(j))$$

y

$$\sum_{j \in A} f_j(x(j)) \geq -\sum_{i \in N} u(i)b(i) - \sum_{j \in A} g_j(v(j)).$$

lo cual implica que

$$\phi(x) \geq \psi(u) \;\; \forall \;\; x \text{ y } u \text{ tal que } \;\; div_i(x) = b_i$$

Como por hipótesis $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j \;\; \forall \;\; j \in A$ tenemos que:

$$f_j(x(j)) = -u(i)b(i) - g_j(v(j)) \;\; \forall \;\; j \in A$$

por lo que tenemos que

$$\phi(x) = \psi(u)$$

Si consideramos cualquier otro flujo x^* y cualquier otra tensión v^*, tenemos que $\phi(x^*) \geq \phi(x) = \psi(u) \geq \psi(u^*)$

Lo anterior implica que dicha igualdad sólo puede darse en el caso de que tengamos que

$$inf\{\phi(x) \mid x \in R^A, divx = b\} = \phi(x') = \psi(u') = sup\{\psi(u) \mid u \in R^n\}$$

$\Rightarrow \quad \} \; inf\{\phi(x) \mid x \in R^A, divx = b\} =$

$\phi(x) = \psi(u) = sup\{\psi(u) \mid u \in R^n\}$

De aquí se desprende que :

$$f_j(x(j)) = -u(i)b(i) - g_j(v(j)) \;\; \forall \;\; j \in A$$

Como las soluciones son óptimas $divx = b$

lo que significa que

$$f_j(x(j)) = v(j)x(j) - g_j(v(j) \;\; \forall \;\; j \in A$$

por lo que

$$(x(j), v(j)) \in \; \Gamma_j \;\; \forall \;\; j \in A$$

$\square$

II.8 MEJORAMIENTO DE FLUJOS

Vamos ahora a continuar nuestro desarrollo teórico con objeto de establecer bases suficientes para entender posteriormente los algoritmos de resolución para ambos problemas. Definimos la función $f(t) = \phi(x + tz)$ donde x es una solución factible y z es un flujo arbitrario. Dicha función es convexa en $t \in R$. Especialmente importante en el desarrollo de algoritmos, es el caso donde z es el vector incidente e_p para un camino elemental P.

En este contexto se tiene que:

$$f(t) = \phi(x + te_p) = \sum_{j\in P^+} f_j(x(j) + t) + \sum_{j\in P^-} f_j(x(j) - t) + \sum_{j\notin P} f_j(x(j))$$

Se ve claramente que los valores para los cuales $f(t) < \infty$ son aquellos para los que $x(j) + t \in C(j)$ para toda $j \in P^+$ y $x(j) - t \in C(j)$ para toda $j \in P^-$

Son fundamentales en nuestro desarrollo teórico,los siguientes conceptos:

a)La derivada de $f(t)$ por la derecha, a continuación veremos como se obtiene:

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = \frac{\sum_{j\in P^+} f_j(x(j) + s) + \sum_{j\in P^-} f_j(x(j) - s) - \sum_{j\in P^+} f_j(x(j) + t) - \sum_{j\in P^-} f_j(x(j) - t)}{s - t}$$

$$= \sum_{j\in A} \frac{(f_j(x(j) + s) - f_j(x(j) + t))}{s - t} + \sum_{j\in A} \frac{(f_j(x(j) - s) - f_j(x(j) - t))}{s - t}$$

$$\lim_{s\to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} = \sum_{j\in P^+} f_j'^{+}(x(j) + t) - \sum_{j\in P^-} f_j'^{-}(x(j) - t)$$

$$f'^{+}(t) = \sum_{j\in P^+} f_j'^{+}(x(j) + t) - \sum_{j\in P^-} f_j'^{-}(x(j) - t)$$

De la misma manera se obtiene que :

b)La derivada de $f(t)$ por la izquierda

$$f'^{-}(t) = \sum_{j\in P^+} f_j'^{-}(x(j) + t) - \sum_{j\in P^-} f_j'^{+}(x(j) - t)$$

Un caso muy importante es cuando $f'^{+}(0) < 0$. Como la función f'^{+} es creciente porque cada f_j es convexa,existe una $t' > 0$ tal que $f'^{+}(t) \geq 0$ y en la que $f'^{-}(t) \leq 0$.

Como veremos después, en dicho punto t' la función alcanza su mínimo,por lo cual

$$f(t') < f(0) \text{ y } \phi(x + t'e_p) < \phi(x),$$

lo cual significa que podemos mejorar el v de nuestra función de costo.

Por otra parte,encontremos ahora el valor de $d_x^+(P)$:

$$d_x^+(P) = \sum_{j\in P^+} d_x^+(j) - \sum_{j\in P^-} d_x^-(j)$$
$$= \sum_{j\in P^+} f_j'(x(j)) - \sum_{j\in P^-} f_j'(x(j)) = f^+(0)$$

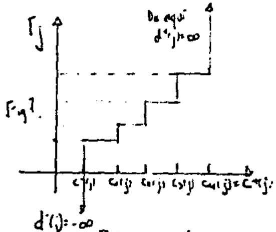
ya que

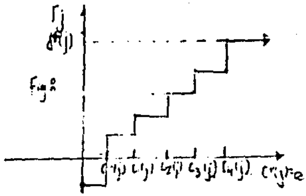
$$[d_x^-(j), d_x^+(j)] = [f_j^-(x(j)), f_j^+(x(j))]$$

así $f'^+(0)$ es igual a $d_x^+(P)$

Se puede ver facilmente que :

$$\lim_{x(j)\to\infty} f_j'^-(x(j)) = \lim_{x(j)\to\infty} f_j'^+(x(j)) = \lim_{x(j)\to\infty} d_x^+(j) = d^+(j)$$





Estas expresiones son equivalentes a las siguientes:

$$\lim_{t\to\infty} f_j'^-(x(j)+t) = \lim_{t\to\infty} f_j'^+(x(j)+t) = d^+(j)$$

y del mismo modo

$$\lim_{t\to\infty} f_j'^-(x(j)-t) = \lim_{t\to\infty} f_j'^+(x(j)-t) = d^-(j)$$

De todas estas identidades podemos determinar una identidad importante para $d^+(P)$

$$d^+(P) = \sum_{j\in P^+} d^+(j) - \sum_{j\in P^-} d^-(j)$$
$$= \sum_{\substack{t\to\infty \\ j\in P^+}} \lim f_j'^+(x(j)+t) - \sum_{\substack{t\to\infty \\ j\in P^-}} \lim f_j'^-(x(j)-t)$$

$$= \lim_{t \to \infty} f'^{+}(t)$$

y del mismo modo

$$d^{-}(P) = \lim_{t \to -\infty} f'^{-}(t) = \lim_{t \to \infty} f'^{+}(t)$$

Resulta necesario en este momento definir dos elementos fundamentales que servirán de base teórica para demostrar una serie de teoremas que veremos posteriormente.

DEFINICION *Se* dice que un circuito P es no Balanceado cuando $\tilde{D}(P) \subset (-\infty, 0)$

DEFINICION *Se* dice que una cortadura Q es no balanceada cuando $\tilde{C}(Q) - b(S) \subset (-\infty, 0)$

El siguiente Teorema es básico porque conecta las soluciones de ambos problemas:

TEOREMA

Para que en el problema de Distribución la solución factible encontrada sea óptima, es necesario y suficiente que en el problema Diferencial la solución encontrada sea regularmente factible.

La Demostración la abordaremos más tarde en el Teorema de existencia de soluciones óptimas. (sección II.13)

Analicemos ahora los tres casos siguientes

a) sabemos que si $d^{+}(P) \leq 0$, no existe un potencial U tal que $v(j) \in [d_x^{-}(j), d_x^{+}(j)]$ y si $D(j)$ es cerrado decimos que no hay un potencial factible.

b)Supongamos ahora que $D(j)$ no es un conjunto cerrado *p.a.* j, entonces lo que afirmaríamos es que si $D(P) \subset (-\infty, 0)$ entonces no hemos encontrado aún un valor de tensión $v(j)$ que satisfaga $v(j) \in D(j)$

c)Por último si $d^{+}(P) < 0$ podemos asegurar que no existe una solución regularmente factible para el problema Diferencial, ya que estaríamos frente a un circuito P tal que $\tilde{D}(P) \subset (-\infty, 0)$.

Estos tres resultados son muy importantes; en base a ellos podemos saber si aún no tenemos una solución factible o regularmente factible , además se conectan con los siguientes teoremas los cuales relacionan la factibilidad con la derivada por la derecha de la función de costo.

TEOREMA

1)P es un circuito no balanceado $\iff f'^{+}(t) < 0 \ \forall \ t$

(De aquí, si $f'^{+}(t) < 0 \ \forall \ t$, entonces se cumple c)

Demostración: $\Longrightarrow$)

Partimos de que $\tilde{D}(P) \subset (-\infty, 0)$ donde

$\tilde{D}(P) = \{\sum_{j\in P^+} v(j) - \sum_{j\in P^-} v(j) \mid v(j) \in \tilde{D}(j)\}$

Ahora,

$$\begin{aligned} f'^+(t) &= \sum_{j\in P^+} f_j'^+(x(j)+t) - \sum_{j\in P^-} f_j'^-(x(j)-t) \\ &= \sum_{j\in P^+} d^+_{x+t}(j) - \sum_{j\in P^-} d^-_{x+t}(j) \end{aligned}$$

Es claro que

$$d^+_{x+t}(j) \in \tilde{D}(j) \text{ y } d^-_{x+t}(j) \in \tilde{D}(j) \text{ para } j \in P^+ \text{ y } j \in P^-$$

respectivamente (ver definición de $\tilde{D}(j)$

Por lo tanto:

$$f'^+(t) \in \tilde{D}(P).$$

Por esto

$$f'^+(t) < 0 \quad \forall t$$

$\Leftarrow$)

$f'^+(t) < 0 \ \ \forall \ \ t \Rightarrow d^+(P) < 0$ (por definición de $d^+(P)$) $\Rightarrow \tilde{D}(P) \subset (-\infty, 0)$

□

TEOREMA

$$d^+(P) \leq 0 \iff f'^+(t) \leq 0 \quad \forall \quad t$$

De aquí si $f'^+(t) \leq 0 \quad \forall t$ entonces no se tiene un potencial factible ($v(j) \in [d^-(j), d^+(j)]$)

Demostración: $\iff$)

$$d^+(P) \leq 0 \iff \lim_{t\to\infty} f'^+(t) \leq 0 \iff f'^+(t) \leq 0 \quad \forall t$$

□

TEOREMA

$$d^+(P) < 0 \iff \quad p.a. \;\; \epsilon > 0 \text{ se tiene } f'^+(t) \leqslant -\epsilon \;\; \forall \;\; t$$

Demostración: $\iff$)

$d^+(P) < 0 \iff \lim_{t\to\infty} f'^+(t) < 0 \iff \lim_{t\to\infty} f'^+(t) = -\epsilon$ con $\epsilon > 0$

$\iff f'^+(t) \leq -\epsilon \quad \forall t.$ □

Estos resultados son importantes porque en base a ellos se establece la forma de mejorar una función de costo $f_j(x(j))$ establecida para cada arco j.

TEOREMA DEL DESCENSO PARA FLUJOS.

Sea P cualquier circuito elemental y sea $f(t) = \phi(x + te_p)$ donde x es cualquier solución factible al problema de Distribución.

Entonces se tienen las condiciones siguientes :

i. f es no creciente $\iff d^+(P) \leq 0$.

ii. f es decreciente $\iff P$ es no balanceado,i.e. $\hat{D}(P) \subset (-\infty, 0)$

iii. f es fuertemente decreciente $\iff d^+(P) < 0$. (Una función se dice *fuertemente decreciente* si para alguna $\epsilon > 0$ se tiene que $f(t_2) \leq f(t_1) - \epsilon(t_2 - t - 1)$ cada vez que $t_1 \leq t_2$ y $f(t_1) \leq \infty$)

Demostración:

i. $\iff$)

f es no creciente $\iff f(t_2) \leq f(t_1)$ cuando $t_1 \leq t_2$,

esto implica que $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \leq 0 \;\; \forall t_1, t_2$, esto pasa

$\iff f'^+(t) \leq 0 \;\; \forall t \iff d^+(P) < 0$

ii. $\iff$)

f es decreciente $\iff f(t_2) < f(t_1)$ cuando $t_1 < t_2$ y $f(t_1) < \infty$,

esto implica que $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} < 0 \;\; \forall t_1, t_2 \;\; \in R$

por lo tanto $f'^+(t) < 0 \;\; \forall t$ esto último pasa $\iff$ P es un circuito no balanceado.

iii. $\iff$)

Una función se dice *fuertemente decreciente* si para alguna $\epsilon > 0$ se tiene que $f(t_2) \leq f(t_1) - \epsilon(t_2 - t_1)$ cada vez que $t_1 \leq t_2$ y $f(t_1) \leq \infty$

Es claro por la definición que $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{(t_2-t_1)} \leq -\epsilon(t_2-t_1) \leq -\epsilon \ \forall \ t_1$ de aquí $f'^{+}(t) \leq -\epsilon \ \forall \ t$, esto pasa $\iff d^{+}(P) < 0$. □

COROLARIO

Si $f(t) = \phi(x + te_p)$ es una función no creciente, decreciente o fuertemente decreciente para la elección de un flujo determinado x, entonces guarda la misma propiedad para cualquier otro flujo x.

Demostración: Vamos a usar el primer caso, es decir, el de una función no creciente, para la demostración.

f es no creciente $\iff d^{+}(P) \leq 0$ i.e. $\lim_{t\to\infty} f'^{+}(t) \leq 0$

Consideremos ahora otro flujo x' es claro que $\lim_{t\to\infty} f'^{+}(t)$ continúa siendo menor o igual que cero por lo que $f(t) = \phi(x + te_p)$ continúa siendo no creciente. □

II.9 MEJORAMIENTO DE POTENCIALES

Consideremos ahora la función ψ del problema diferencial. Sabemos que g es convexa para toda $j \in A$, ya que $g_j'^{-}(v(j))$ y $g_j'^{+}(v(j))$ son funciones crecientes, de aquí se desprende que $\sum g_j(v(j))$ es convexa , por lo cual $\psi(u) = -\sum b(i)u(i) - \sum g_j(v(j))$ es cóncava.

Como g es contínua en el intervalo $[d^{-}(j), d^{+}(j)] \ \forall \ j$ esto implica que ψ es continua en el conjunto

$$\{u \in R^n \mid d^{-}(j) \leq v(j) \leq d^{+} j \ \ \forall \ \ j \in A\}$$

y

El conjunto

$$\{u \in R^n \mid \ v(j) \in D(j) \ \ \forall \ \ j \in A \text{ y } \psi(u) \geq \alpha\}$$

es cerrado ya que $\{\psi(u) \geq \alpha\}$y$\{v(j) \in D(j)\}$ son conjuntos cerrados.

El objetivo es utilizar todos los resultados de funciones convexas a los cuales hemos llegado para potenciales arbitrarios u y w tal que u es factible.

Consideremos la función

$$g(t) = -\psi(u + tw)$$

que es una función convexa cerrada .

Considérese el caso en que se tiene una cortadura $Q = [S, N/S]$ y w es el vector de potencial $e_{N/S}$ para el que:

$$e_{N/S}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in S, \\ 1 & \text{si } i \in S^c \end{cases}$$

El diferencial de w es entonces $\Delta e_{N/S} = e_Q$. Además $b(S) = -b(N/S)$ ya que $b(S) + b(N/S) = 0$

$$g(t) = -\psi(u + te_{N/S}) = \sum u(i)b(i) - tb(S) + \sum_{j\in Q^+} g_j(v(j) + t) + \sum_{j\in Q^-} g_j(v(j) - t) + \sum_{j\in A/Q} g_j(v(j))$$

De esta expresión se desprenden $g'^+(t)$ y $g'^-(t)$ como se desprendieron $f'^+(t)$ y $f'^-(t)$

así tenemos que

$$g'^+(t) = \lim_{s\to t} \frac{g(s) - g(t)}{s - t} = -b(S) + \sum_{j\in Q^+} g_j\prime{+}(v(j) + t) - \sum_{j\in Q^-} g_j\prime{-}(v(j) - t))$$

y de la misma forma se desprende que:

$$g'^-(t) = -b(S) + \sum g_j'^-(v(j) + t) - \sum g_j'^-(v(j) - t)$$

Un caso importante es el que se da cuando $g'^+(0) < 0$.

Es muy importante ya que implica que existe una $t' > 0$ tal que $g'^+(t) \geq 0$ y $g'^-(t) \leq 0$ y en la cual la función g alcanza su mínimo (esto por un resultado que se demostrará en el capítulo Tres).

Lo anterior asegura que $g(t) \leq g(0)$

.Por otra parte $g'^+(0) < 0$ puede expresarse como $c_u^+(Q) - b(S) < 0$ con respecto a los intervalos $[c_u^-(j), c_u^+(j)] = [g_j'^-(v(j)), g_j'^+(v(j))]$

Vamos a verificar precisamente que $g\prime{+}(0)$ puede expresarse como $c_u^+(Q) - b(S) < 0$:

$$g'^+(0) = -b(S) + \sum g_j'^+(v(j)) - \sum g_j'^-(v(j)) < 0$$

$$de \quad aqui \quad \sum g_j\prime{+}(v(j)) - \sum g_j\prime{-}(v(j)) < 0$$

$$de \quad aqui \quad c_u^+(Q) < b(S)$$

Veamos ahora los siguientes resultados:

Es claro que

$$c^{+}(j) = \lim_{v(j)\to\infty} c_u^{+}(j) = \lim_{v(j)\to\infty} g_j^{+}(v(j)) = \lim_{t\to\infty} g_j^{+}(v(j)+t)$$

y también que

$$c^{-}(j) = \lim_{v(j)\to-\infty} c_u^{-}(j) = \lim_{v(j)\to-\infty} g_j^{-}(v(j)) = \lim_{t\to\infty} g_j^{+}(v(j)-t)$$

De aquí se desprende fácilmente que

$$\lim_{t\to\infty} g'^{+}(t) = \lim_{t\to\infty}\{\sum_{j\in Q^{+}} g_j'^{+}(v(j)+t) - \sum_{j\in Q^{-}} g_j'^{-}(v(j)-t)\} - b(S)\}$$

$$= \sum_{j\in Q^{+}} c^{+}(j) - \sum_{j\in Q^{-}} c^{-}(j) - b(S) = c^{+}(Q) - b(S)$$

Del mismo modo

$$\lim_{t\to-\infty} g'^{+}(t) = \lim_{t\to-\infty}\{\sum_{j\in Q^{+}} g_j'^{+}(v(j)+t) - \sum_{j\in Q^{-}} g_j'^{-}(v(j)-t)\} - b(S)$$

$$= \sum_{j\in Q^{+}} c^{-}(j) - \sum_{j\in Q^{-}} c^{+}(j) - b(S) = -c^{-}(Q) - b(S).$$

a)Supongamos que $C(j)$ es un conjunto cerrado.Debido al Teorema de Distribución Factible sabemos que la existencia de una cortadura con $c^{+}(Q) \leq b(S)$ implica que no existe $x(j)$ que satisfaga :

$c^{-}(j) \leq x(j) \leq c^{+}(j)$ y que además cumpla con que $div\, x = b$.

b) Supongamos ahora que $C(j)$ no es un conjunto cerrado,entonces lo que afirmaríamos es que si $C(Q) \subset (-\infty, b(S))$ entonces no hemos encontrado aún un flujo $x(j)$ que satisfaga $x(j) \in C(j)$ y que además cumpla con $div\, x = b$.(Teorema Diferencial Factible Modificado)

c) Un tercer caso, supongamos ahora que existe una cortadura $Q = [S, N/S]$ tal que $\tilde{C}(Q) \subset (-\infty, b(S))$. entonces el flujo asociado a dicha cortadura no es regularmente factible.(Teorema Dif. Factible, Segunda Modificacion)

Estos tres resultados son muy importantes ya que en base a ellos podemos saber si hemos encontrado una solución factible , regularmente factible o si tenemos que seguirlas buscando; además se conectan con los siguientes teoremas que relacionan la factibilidad de la tensión V con la función de costo $g_j(v(j))$ para cada arco j, hecho que utilizaremos en el desarrollo de algunos algoritmos que se ven en el capitulo tres.

TEOREMA

$$Q \text{ es una cortadura no balanceada} \iff g'^{+}(t) < 0 \quad \forall\ t$$

De aquí se desprende que $g'^{+}(t) < 0$ implica c)

Demostración:

$\Rightarrow$)

$$\hat{C}(Q) \subset (-\infty, b(S)) \Rightarrow \hat{C}(Q) - b(S) \subset (-\infty, 0)$$

$$sup(\hat{C}(Q) - b(S)) = c^{+}(Q) - b(S) \leq 0$$

Se presentan entonces dos casos

si $c^{+}(Q) - b(S) < 0 \Rightarrow lim_{t\to\infty} g'^{+}(t) < 0$ por lo tanto $g'^{+}(t) < 0 \ \forall\ t.$

si $c^{+}(Q) - b(S) = 0$, supongamos que existe un valor de t para el cual se tiene que $g'^{+}(t) = 0$, entonces :

$$0 = g'^{+}(t) = -b(S) + \sum_{j\in Q^{+}} g_j'^{+}(v(j) + t) - \sum_{j\in Q^{-}} g_j'^{-}(v(j) - t)$$

$$= -b(S) + \sum_{j\in Q^{+}} c_u^{+}(j) - \sum_{j\in Q^{-}} c_u^{-}(j) \in \quad \hat{C}(Q) - b(S) \qquad !$$

por lo tanto

$$g'^{+}(t) < 0 \ \ \forall\ \ t$$

$\Leftarrow$) Si $g'^{+}(t) < 0 \ \ \forall t \Rightarrow \lim_{t\to\infty} g'^{+}(t) < 0 \Rightarrow c^{+}(Q) - b(S) < 0 \Rightarrow \hat{C}(Q) \subset (-\infty, b(S)) \Rightarrow$ $\hat{C}(Q) - b(S) \subset (-\infty, 0) \Rightarrow Q$ es una cortadura no balanceada □

TEOREMA

$$c^{+}(Q) \leq b(S) \quad \iff \quad g'^{+}(t) \leq 0 \ \ \forall\ \ t$$

(De aquí, si $g'^{+}(t) \leq 0 \Rightarrow$ se cumple 1) o 2) si C(j) es cerrado)

Demostración:

$\iff$)

$$c^{+}(Q) \leq b(S) \iff c^{+}(Q) - b(S) \leq 0 \iff \lim_{t\to\infty} g'^{+}(t) \leq 0 \iff g'^{+}(t) \leq 0 \ \ \forall t \qquad □$$

TEOREMA

$$c^+(Q) < b(S) \iff g'^+(t) \le -\epsilon \text{ p.a. } \epsilon \ge 0$$

Demostración:

$$c^+(Q) < b(S) \iff c^+(Q) - b(S) < 0 \iff$$

$$\lim_{t\to\infty} g'^+(t) < 0 \iff \lim_{t\to\infty} g'^+(t) \le -\epsilon$$

$$\iff g'^+(t) \le -\epsilon \;\; \forall t \text{ y para alguna } \;\; \epsilon \ge 0$$

□

Veamos ahora las tres formas distintas que existen de mejorar el valor de nuestra función $g(t)$, expresadas en el siguiente Teorema de Descenso para Potenciales.

TEOREMA DE DESCENSO PARA POTENCIALES.Sea $Q = [S, N/S]$ cualquier cortadura y sea $g(t) = -\psi(u + te_{N/S})$ donde u es alguna solución factible al Problema Diferencial Óptimo, entonces

1. g es no creciente $\iff$ $c^+(Q) \le b(S)$
2. g es decreciente $\iff$ Q es no balanceado o sea que $\check{C}(Q) \subset (-\infty, b(S))$
3. g es fuertemente decreciente $\iff$ $c^+(Q) < b(S)$

La demostración es análoga a la que se hizo en el caso del problema de distribución.

II.10 PROPIEDAD DE ACOTAMIENTO PARA FLUJOS

Esta propiedad y la siguiente se utilizan sobre todo en el capitulo tercero, aquí sólo se mencionan para apoyar la Demostración del Teorema de Existencia de soluciones óptimas.

Se dirá que un flujo guarda la propiedad de acotamiento cuando para cada valor $\alpha \in R$ el conjunto cerrado y convexo $A = \{x \mid \phi(x) \le \alpha\}$ es un conjunto acotado.

TEOREMA

Dicha propiedad es equivalente al acotamiento de cada sucesión de flujos factibles y finitos $\{x\}_{k=1}^{k=\infty}$ tal que $\phi(x^k)$ tiende al ínfimo del problema.

Demostración: Este tema se tratará de nuevo en el capítulo tercero y ahí se abordará la Demostración.(ver capítulo tercero, sección III.7.3)

II.11 PROPIEDAD DE ACOTAMIENTO PARA POTENCIALES

El problema Diferencial Optimo tiene la propiedad de acotamiento si para cada $\beta \in R$ el conjunto cerrado convexo:

$$\{v \in R^A \mid \ \exists \ u \ \ con \ \ \Delta u = v \text{ y } \psi(u) \geq \beta\}$$

es acotado.

TEOREMA *D*icha propiedad es equivalente al acotamiento de cada sucesión de diferenciales, esto es, de cada sucesión de soluciones factibles $\{u^K\}_{K=1}^{\infty}$ en la que $\psi(u^k)$ tiende al máximo de la función objetivo y en la que $\psi(u^K) \leq \infty$.

Demostración: La demostración es análoga a la del teorema anterior

II.12 TEOREMA DE ACOTAMIENTO PARA FLUJOS Y POTENCIALES

Los dos teoremas que mencionamos a continuación serán de gran utilidad para demostrar los Teoremas de existencia.

TEOREMA DE ACOTAMIENTO PARA FLUJOS

Supongamos que hay al menos una solución factible al problema de Distribución óptima, entonces las siguiente aseveraciones son equivalentes:

1.-El problema de Distribución óptima guarda la Propiedad de Acotamiento

2.-$d^+(P) > 0$ para todo circuito elemental P

3.-El conjunto de arcos $F = \{j \mid d^-(j) = d^+(j)\}$ no contiene ningún circuito elemental y hay una solución factible al problema diferencial óptimo, tal que $d^-(j) < v(j) < d^+(j) \quad \forall j \in F$

Demostración:

1) $\to$ 2) supongamos que $d^+(P) \leq 0$ para algún circuito elemental P, entonces la función $\phi(x + te_p)$ es no creciente $\forall j \in P$ (por el Teorema de Descenso para flujos), por lo cual si existe un flujo x factible tal que $\phi(x) \leq \alpha$ para alguna alfa determinada entonces para todo flujo $x + te_p$, tendríamos que $\phi(x + te_p) \leq \alpha$ con t cualquier número real, esto indica claramente que el conjunto $A = \{x \mid divx = b \text{ y } \phi(x) \leq \alpha\}$ no podría ser acotado.

2) $\rightarrow$ 1) Supongamos que el problema no cumple con la Propiedad de Acotamiento, entonces existe un valor de α para el cual el conjunto $A = \{x \mid div x = b$ y $\phi(x) \leq \alpha\}$ no es acotado, esto es equivalente al hecho de que existe alguna sucesión de flujos $\{x_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ factibles que tienden al ínfimo del problema que no está acotada . Sin pérdida de generalidad podemos considerar que dicha sucesión es de la forma $\{x + te_p\}_{t=1}^{t=\infty}$,donde P es un circuito arbitrario de la red, consideremos un valor de flujo x para el cual $\phi(x) \leq \alpha$, entonces $\phi(x + te_p) \leq \phi(x + t^* e_p) \leq \phi(x) \leq \alpha \forall \quad t > 0$. Esto se debe a que la sucesión no está acotada y a que la función $f(t) = \phi(x + te_p)$ es convexa. Todo lo anterior implica que la función $f(t) = \phi(x + te_p)$ es no creciente y esto implica que por el Teorema de Descenso para flujos $d^+(P) \leq 0$. ver II.10 □

Esta es la única demostración que haremos porque de hecho es la única que necesitamos para la demostración del Teorema de Existencia de Soluciones óptimas.

De la misma forma tenemos el Teorema de Acotamiento para potenciales que nos dice lo siguiente

TEOREMA DE ACOTAMIENTO PARA POTENCIALES

Supongamos que hay al menos una solución factible al problema Diferencial óptimo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1.- El problema Diferencial óptimo tiene la propiedad de acotamiento.

2.- $b(S) < c^+(Q)$ para todas las cortaduras.

3.-El conjunto de arcos $F' = \{j \mid c^-(j) = c^+(j)\}$ no contiene ninguna cortadura no vacía y hay una solución factible al problema de Distribución óptima tal que $c^-(j) < x(j) < c^+(j) \forall j \notin F'$

Demostración: 1) $\Longleftrightarrow$ 2) Nuevamente, ésta es la única demostración que resulta de utilidad, pero no la vamos a realizar porque es equivalente a la del caso anterior.

II.13 TEOREMAS DE EXISTENCIA PARA FLUJOS Y POTENCIALES

A continuación enunciamos el Teorema de existencia para flujos y su demostración.

TEOREMA DE EXISTENCIA PARA FLUJOS. Supongamos que existe una solución factible para el problema de distribución, entonces los siguientes resultados son equivalentes.

i. El problema de Distribución tiene una solución óptima.

ii. El problema Diferencial óptimo tiene una solución Regularmente Factible.

iii. Ningún circuito elemental P es no Balanceado

iv. Para cada solución factible x al problema de distribución óptima y cada circuito elemental P, la función $f(t) = \phi(x + te_p)$ alcanza su mínimo en algún $t \in \; R$

Demostración:

$ii) \iff iii)$ Tenemos un diferencial tal que $v(j) \in \tilde{D}(j) \;\; \forall \;\; j \in A$

Dicha solución es Regularmente Factible por Definición, por el Teorema Diferencial Factible existe una solución Regularmente Factible para el problema Diferencial $\iff$ $0 \in \tilde{D}(P) \quad \iff$ P no es un circuito no balanceado, sin importar cual es la P que estoy escogiendo.

$iii) \iff iv)$ No existe ningún circuito P tal que $\tilde{D}(P) \in (-\infty, 0)$,por lo tanto $0 \in \tilde{D}(P) \;\; \forall \;\; circuito P$, por el Teorema de Descenso para Flujos, esto pasa $\iff$ f es no decreciente, por lo cual f alcanza su mínimo en algún $t \in P$

$i) \rightarrow iv)$ Si el problema de Distribución tiene una solución óptima, entonces para cada solución factible x al problema de Distribución óptima y cada circuito elemental P,la función $\phi(x + te_P)$ alcanza su mínimo en algún $t \in R$ porque si no lo hiciera no existiría una solución óptima.

De aquí como iv) es equivalente a ii) tenemos que $i) \rightarrow ii)$

Se ha de probar que de ii, iii o iv se deriva i) Veamos que de iii) se deriva i).

$iii) \Rightarrow i)$ Ningún circuito elemental P es no balanceado, esto significa que:

$d^-(P) \leq 0 \leq d^+(P)$

Analicemos esta expresión considerando tres casos.

1) $0 < d^+(P)$ Por el Teorema de Acotamiento para flujos,esto implica que el problema de Distribución óptima cumple con la Propiedad de Acotamiento para flujos; entonces cualquier sucesión de flujos factibles $A = \{x_K\}_{K=1}^{\infty}$ que tienda al ínfimo del problema, está acotada.

Como cualquier sucesión $A = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es claramente un conjunto cerrado y acotado entonces es un conjunto compacto, y por otra parte, como la función $\phi(x)$ es contínua, podemos afirmar que el ínfimo de dicha función es alcanzado para un flujo x que pertenece al conjunto compacto A, esto significa que el Problema de Distribución tiene una solución óptima

2) Consideremos el caso en que algún circuito es del tipo 2, es decir $d^-(P) = 0 = d^+(P)$

como

$d^+(P) = lim_{t \rightarrow \infty} f'^+(t) = 0$

$d^-(P) = lim_{t \rightarrow -\infty} f'^-(t) = 0$

Entonces tenemos que $f'^+(t) = 0 \;\; \forall t$ por ser $f'^+(t)$ una función monótona creciente.

De aquí se tiene que el valor de $\phi(x + te_p)$ es un valor constante, por lo que si modificamos el flujo óptimo, de tal forma que para un arco particular j de dicho circuito, tengamos un flujo $x(j) = 0$, seguiremos manteniendo una solución óptima.

Sin embargo, si $x(j) = 0$ para este arco particular, podemos también redefinir $c^-(j) = 0$ y $c^+(j) = 0$, para este arco j, lo cual implica que $d^-(j) = -\infty$ y $d^+(j) = \infty$, hecho que está en contradicción con que $d^+(P)$ y $d^-(P)$ sean iguales a cero. Podemos efectuar esta misma redefinición con cada uno de los arcos j que pertenecen a P De esta forma este caso puede ignorarse y reducirse al caso anterior.

Veamos ahora que sucede en el tercer caso.

3) Supongamos que $d^-(P) < 0 = d^+(P) \in \hat{D}(P)$

o $d^-(P) = 0 < d^+(P)$

Consideremos la primera expresión, de ella se desprende lo siguiente: como

$d^+(P) = \sum_{j\in P^+} d^+(j) - \sum_{j\in P^-} d^-(j) \in \hat{D}(P)$

se tiene que $d^+(j) \in \hat{D}(j) \ \ \forall j \in P^+$

y

$d^-(j) \in \hat{D}(j) \ \ \forall j \in P^-$

Lo cual implica que:

$f_j'^+(x(j)) = f_j'^-(x(j)) = lim_{x(j)\to\infty} f_j'^+(x(j)) = d^+(j)$ para $x(j)$ suficientemente grandes cuando $j \in P^+$

y

$f_j'^+(x(j)) = f_j'^-(x(j)) = lim_{x(j)\to-\infty} f_j'^-(x(j)) = d^-(j)$ para $x(j)$ suficientemente pequeño cuando $j \in P^-$.

De aquí se tiene que para toda $j \in P^+$ y para valores de flujo $x(j)$ lo suficientemente grandes, se tiene por el Teorema del Valor Medio:

$\frac{f_j(x'(j)) - f_j(x(j))}{x'(j) - x(j)} = d^+(j) = f_j'^+(x^*(j))$ con $x(j) \leq x^*(j) \leq x'(j)$

y por lo tanto $f_j(x'(j)) = d^+(j)x'(j) + \alpha_j$ para $x'(j) > x(j)$ si $j \in P^+$

donde $\alpha_j = f_j(x(j)) - d^+(j)x(j)$

De manera análoga, para $j \in P^-$ se obtiene que

$f_j(x'(j)) = d^-(j)x'(j) + \alpha_j$ para $x'(j) < x(j)$ si $j \in P^-$

Aquí definiremos una nueva función que será la sigui ente:

$$\bar{f}_j(x(j)) = \begin{cases} d^+(j)x(j) + \alpha_j & \text{si } j \in P^+ \\ d^-(j)x(j) + \alpha_j & \text{si } j \in P^- \\ f_j(x(j)) & \text{si } j \notin P \end{cases}$$

Y sea $\bar{\phi}$ la función obtenida de ϕ cuando cada función f_j es remplazada por $\bar{f}_j$ para todos los arcos. Es claro que $f_j(x(j)) \geq \bar{f}_j(x(j))$ para todo valor de flujo $x(j)$, esto se debe a la convexidad de la curva. De hecho, para t lo suficientemente grande, se tiene que $\phi(x + te_p) = \bar{\phi}(x + te_p)$

Considerando esta nueva función $\bar{\phi}$, observamos que no se alteran las condiciones requeridas en ii),iii),iv). Por otra parte, este nuevo flujo nos lleva a un problema del tipo (2), porque $d^-(P) = d^+(P) = 0$, ya que $lim_{t\to-\infty} f(t) = lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, considerando todos los circuitos posibles de la red de este tipo, podemos reducir un problema del tipo tres a un problema del tipo 2. □

TEOREMA DE EXISTENCIA PARA POTENCIALES

Supongamos que existe una solución factible para el problema Diferencial, entonces los siguientes resultados son equivalentes.

(1). Existe una solución óptima para el problema Diferencial.

(2).-El problema de Distribución tiene una solución regularmente factible

(3).-Ninguna cortadura Q es no balanceada.

(4).-Para cada solución factible al problema Diferencial y cada cortadura $Q = [S, N/S]$ existe la función $f(t) = -\psi(u + te_{N/S})$ y alcanza su mínimo en algún $t \in R$

La demostración de este teorema es análoga a la del caso anterior.

CAPITULO TERCERO

III ALGORITMOS PARA COSTOS CONVEXOS

Hemos visto ya los algoritmos para resolver los dos problemas elementales para los casos en que tenemos funciones de costo lineales. (Ver el capítulo uno). En este capítulo generalizaremos dichos algoritmos para adaptarlos al caso en que tengamos funciones de costo no lineales, se estudiaran los siguientes casos:

-Algoritmo de Distribución óptima para el problema General

Resulta de la Generalización del Algoritmo de Distribución para el caso elemental Parte de una solución factible pare el problema de Distribución hasta llegar a una solución regularmente factible para el problema Diferencial, siguiendo una secuencia análoga al algoritmo lineal, pero con algunas modificaciones que veremos más adelante.

-Algoritmo Diferencial óptimo para el problema General.

Parte de una solución factible para el problema Diferencial hasta llegar a una solución regularmente factible para el problema de Distribución, nuevamente la secuencia es semejante a la del algoritmo correspondiente para el caso de funciones lineales, sin embargo, deben hacerse algunas modificaciones.

-Algoritmo Thrifty

Se parte de un flujo y un potencial tal que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ y se busca un flujo x tal que $div(x) = y$, para esto se utiliza como subrutina el Algoritmo del Camino mínimo el cual fue presentado en el capitulo uno en la sección (II.7)

-Algoritmo de Desviaciones

Se parte de un flujo x tal que $div x = b$ y se busca que para toda j se tenga que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$

-Algoritmos Fortificados de Distribución

Se basan en el Algoritmo General de Distribución óptima, sólo que se modifican algunos criterios para garantizar la terminación del Algoritmo en un número finito de pasos.

-Algoritmos Diferenciales Fortificados

Se basan en el Algoritmo de Distribución óptima modificando algunos criterios para garantizar también la terminación del algoritmo en un número finito de pasos.

III.1 ALGORITMO DE DISTRIBUCION OPTIMA GENERAL

Como ya hemos mencionado, esta es una generalización del Algoritmo de Distribución óptima para el caso lineal. Se parte de una solución factible para el problema de Distribución, luego, usando el Algoritmo Diferencial Factible (Apendice B), se llega a una solución factible para el problema Diferencial o a un Circuito Elemental tal que $d_x^+(P) < 0$. Si sucede lo primero se termina el algoritmo, hemos encontrado una solución óptima para el Problema de Distribución, en el segundo caso, lo que procede es modificar el flujo factible que consideramos al principio hasta lograr una solución óptima.

Veamos ahora el Algoritmo

(1).- Dada cualquier solución factible al problema de Distribución óptima, determinar en base al problema Diferencial los siguientes intervalos.

$[d_x^-(j), d_x^+(j)] = [f_j'^-(x(j)), f_j'^+(x(j))] = \eta \mid (x(j), \eta) \in \Gamma_j$

(2).- Utilizar un algoritmo que construya un potencial u con $d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j)$ o en su defecto que produzca un circuito elemental con $d_x^+(P) < 0$. En este caso un algoritmo útil es el Algoritmo Diferencial Factible.

(3).- Si se obtiene un potencial u tal que $d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j)$, entonces terminamos.

(4).-Si se obtiene un circuito con la característica de que $d_x^+(P) < 0$ entonces la función $f(t) = \phi(x + te_p)$ cumple con que $f'^+(0) = d_x^+(P) < 0$ ya que

$f'^+(0) = \sum_{j \in P^+} f_j'^+(x(j)) - \sum_{j \in P^-} f_j'^-(x(j))$

$= \sum_{j \in P^+} d_x^+(j) - \sum_{j \in P^-} d_x^-(j) < 0$

(5).-Sea $\alpha = min\{t > 0 \mid f'^+(t) \geq 0\}, \alpha > 0$

Si $\alpha = \infty, f'^+(t) < 0 \;\; \forall t \in R$ lo cual significa que P es un circuito no Balanceado y esto implica a su vez que el problema Diferencial no tiene solución regularemente factible (Teo. de Existencia de soluciones factibles para el problema Diferencial), por lo que el problema de Distribución no tiene solución óptima (Teo. de Existencia de Soluciones óptimas para el problema de Distribución) terminar si $\alpha < \infty$ entonces ir a 6)

(6).-Aumentemos ahora la cantidad de flujo mandada por cada uno de los arcos $x' = x + \alpha * e_p$. De aquí se ve que x' es otra solución regularmente factible y además

$\phi(x') \leq \phi(x)$

ir a (1)

Observación:

La estructura del algoritmo es análoga a la del problema lineal, la única diferencia significativa es la redefinición de α en base a la derivada de la función de costos, razón por la cual presentamos la siguiente sección:.

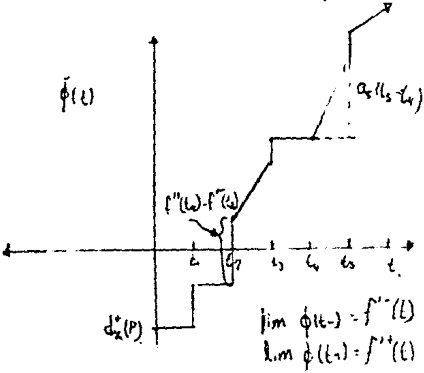
III.1.1 CALCULO DE ALFA

Obtener $min\{t > 0 \mid f'^+(t) \geq 0\}$ puede ser difícil en el caso de problemas que involucren funciones de costo no lineales, de hecho no hay una forma de resolver este problema de manera general. Sin embargo, en el caso de problemas cuya función de costo sea localmente lineal no existen obstáculos mayores. Veremos una forma bastante eficiente para calcular α en el caso mencionado en el párrafo anterior. Para ello, vamos a utilizar los puntos $t > 0$ donde la función $f(t) = \phi(x + te_y)$ no sea diferenciable.

Supongamos que $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \ldots\ldots\ldots < t_m$ son los puntos positivos donde la función f no es diferenciable. Sean $t_0 = 0$ y $t_{m+1} = \infty$. Supongamos que se tiene un valor constante de la segunda derivada de f para cada intervalo (t_{k-1}, t_k), a dicho valor le llamaremos a_k y será necesariamente mayor que cero por el hecho de que la función f es convexa. Entonces tenemos la siguiente identidad para funciones de costo lineales, localmente lineales, o localmente cuadráticas.

$$f'^+(t) = d_x^+(P) + \sum_{0<k<r}[f'^+(t_k) - f'^-(t_k)] + (a_k - a_{k+1})t_k + a_r(t) \text{ con } t_{r-1} \leq t < t_r$$

Verificación. Vamos a realizar ahora la verificación de manera gráfica, utilizando las propiedades y elementos de la curva característica Γ_j. Considérese la gráfica de la figura 9.



Es claro gráficamente que $f'^+(t)$ para cualquier valor de t es resultado de sumar $f'^+(0) = d_x^+(P)$ con cada uno de los intervalos que hemos dibujado y que se dividen en dos tipos.

1. si $f'^+(t_k) \neq f'^-(t_k)$ entonces el intervalo es igual a $f'^+(t_k) - f'^-(t_k)$

2. si $f'^{+}(t_k) = f'^{-}(t_k) \Rightarrow$ el intervalo es igual a $a_{k+1}(t_{k+1} - t_k)$ donde a_{k+1} es el valor constante de la segunda derivada en (t_k, t_{k+1})

En el caso 1) $a_{k+1} = 0$

En el caso 2) $f'^{+}(t_k) - f'^{-}(t_k) = 0$

De lo anterior se desprende la identidad planteada.

$f'^{+}(t) = d_x^{+}(P) + \sum_{0<k<r} [f'^{+}(t_k) - f'^{-}(t_k)] + (a_k - a_{k+1})t_k] + a_r(t)$ con $t_{r-1} < t < t_r$

Con esta fórmula resulta sencillo encontrar $\alpha = \min\{t > 0 \mid f'^{+}(t) \geq 0\}$

Vamos probando cuánto vale $f'^{+}(t_r)$ variando $r = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m$ y se determina el índice más bajo r' para el que $f'^{+}(t_r) > 0$

Si $a_{r'} = 0 \Rightarrow \alpha = t_r$ porque el valor de $f'^{+}(t)$ es constante para $t_{r-1} \leq t \leq t_r$

si $a_{r'} > 0 \Rightarrow \alpha$ es el valor t que resuelve la ecuación lineal

$0 = d_x^{+}(P) + \sum_{0<k<r} [f'^{+}(t_k) - f'^{-}(t_k)] + (a_k + a_{k+1})t_k + a_r t$

El cálculo se simplifica en el caso de funciones de costo lineales o localmente lineales ya que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots = a_r = 0$

III.1.2 JUSTIFICACION DEL ALGORITMO

Veamos primero algunos resultados que nos servirán posteriormente para la justificación

TEOREMA *Sea la función f convexa en $t \in R$. Entonces* $f'^{-}(t) \leq 0 \leq f'^{+}(t) \iff$ la función f alcanza su mínimo en $f(t)$

Demostración: Utilizando el hecho de que la función $\phi(\epsilon) = \frac{f(\epsilon) - f(t)}{(\epsilon) - t}$ es no decreciente (ver capítulo 2, página cuatro) tenemos lo siguiente:

$\lim_{h \to 0} \frac{f(t-h) - f(t)}{h} \leq 0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \forall \quad h$

$\iff \frac{f(t-h) - f(t)}{h} \leq 0 \leq \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \forall h$

$\iff f(t-h) - f(t) \leq 0 \leq f(t+h) - f(t) \quad \forall h$

$\iff f(t-h) \leq f(t) \leq f(t+h) \quad \forall h$

De todo esto se infiere que la función alcanza su mínimo en $f(t)$ □

TEOREMA

Si un flujo x es regularmente factible, $x + te_p$ es un flujo regularmente factible $\Longleftrightarrow$

$f'^-(t) < \infty$ y $-\infty < f'^+(t)$

Demostración: Partimos de que x es un flujo regularmente factible, $x + te_p$ es también un flujo regularmente factible $\Longleftrightarrow x + te_p \in \bar{C}(j)$

$\Longleftrightarrow f_j'^-(x(j) + te_p) < \infty$ y $-\infty < f_j'^+(x(j) + te_p)\ \forall j \in A$

$\Longleftrightarrow \sum_{j \in A} f_j'^-(x(j) + te_p) < \infty \Longleftrightarrow f'^-(t) < \infty$

y $-\infty < \sum_{j \in A} f_j'^+(x(j) + te_p) = f'^+(t)$

Por otra parte sabemos que $div(x + te_p) = div(x) = b$ (porque P es un circuito) por lo tanto hemos reunido las dos condiciones necesarias para asegurar la factibilidad del nuevo flujo . □

JUSTIFICACION DEL ALGORITMO

Esta demostración se basa en los teoremas que acabamos de demostrar y también en Teoremas que ya se vieron en el capítulo segundo. (secciones $II.4$ y $II.7$) Si se obtiene un potencial u factible, entonces para todos los arcos j se tiene que $f_j'^-(x(j)) \leq v(j) \leq f_j'^+(x(j))$ esto implica que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$, (Ver sección $II.4$) , además $div\,x = b$ porque x es una solución factible.

Debido a las condiciones de equilibrio,(ver $II.7.1$) esto implica que x y u son soluciones óptimas.

Si obtenemos un circuito elemental tal que $d_x^+(P) < 0$ esto implica que

$f'^+(0) = \sum_{j \in P^+} f_j'^+ x(j) - \sum_{j \in P^-} f_j'^- x(j)$

$= \sum_{j \in P^+} d_x^+(j) - \sum_{j \in P^-} d_x^-(j) = d_x^+(P) < 0$

Puesto que f es una función convexa f'^+ es no decreciente.De aquí si $t < 0, f'^+(t) < 0$

Si $f'^+(t) < 0 \quad \forall t > 0$ entonces P es un circuito no balanceado, lo que implica que no se tiene una solución regularmente factible para el problema Diferencial (Teorema Diferencial Factible) ni tampoco una solución óptima para el problema de Distribución. (Teo. de Existencia de Soluciones óptimas)

Supongamos ahora que $f'^+(t) > 0$ p .a. $t > 0$.

Búsquese entonces el mínimo de los valores $t > 0$ tal que $0 < f'^+(t)$. En dicho valor la función f alcanza su mínimo porque se tiene que

$f'^-(t) \leq 0 \leq f'^+(t)$ (sección III.1.2)

Sea $\alpha = min\{t > 0 \mid f'^+(t) \geq 0\}$

Entonces $f(\alpha) \leq f(0)$ por lo que $\phi(x+te_p) \leq \phi(x)$ por otra parte se tiene que $f'^-(\alpha) \leq 0 < \infty$ y $-\infty \leq 0 \leq f'^+(\alpha)$ lo cual significa que $x+\alpha e_p$ es una solución regularmente factible. (sección III.1.2)

De esta forma hemos visto cómo mejoramos el valor de nuestra función de costo con este nuevo flujo. Para saber si llegamos a una solución óptima en un número finito de iteraciones pasemos a la siguiente sección.

III.1.3 CONSIDERACIONES SOBRE LA TERMINACION DEL ALGORITMO

No podemos garantizar la terminación del algoritmo en un número finito de iteraciones, aún cuando garanticemos la existencia del ínfimo de la función $\phi(x+te_p)$.

Esto se debe a que el valor de α en cada iteración podría ser tan pequeño como se quisiera (positivo) ,lo implicaría que podríamos aumentar indefinidamente nuestro flujo sin llegar al ínfimo de la función objetivo

En algunos casos particulares sí se puede garantizar la terminación del algoritmo en un número finito de iteraciones, y queda claramente expresado en el siguiente teorema

TEOREMA

Supongamos que:

1) Todas las funciones de costo f_j en el problema de distribución son localmente lineales,

2) Los puntos $t > 0$ donde la función $f(t)$ no es diferenciable y los flujos iniciales $x(j)$ $\forall j$ son múltiplos con respecto a cierta $\delta > 0$,

3) El ínfimo en el problema de distribución óptima es finito,

entonces el algoritmo terminará en un número finito de iteraciones.

Demostración: Considérese el conjunto

$$A = \{t_i > 0 \mid f'^+(t) \geq 0\} \cap \{t_i \mid f'^-(t_i) \neq f'^+(t_i)\}$$

Es claro que A está inferiormente acotado y sus elementos son múltiplos de cierta δ por hipótesis, por lo cual tiene un elemento mínimo. Sea α' el punto mínimo, dicha α' concuerda con α , porque si suponemos que existe un valor s tal que $f'^+(s) \geq 0$ y donde f alcanza su mínimo, sabemos que existen t_i y $t_{i+1} \in A$ tales que $t_i \leq s \leq t_{i+1}$. como la función de costo ϕ es localmente lineal, entonces $f'^+(s) = f'^+(t_i)$ como $t_i > 0$, entonces $t_i = \alpha' = \alpha$

Es claro que α está acotado por cierta $\delta > 0$.

Pues bien,

$$-\infty < f'^{+}(0) \ \forall \text{circuito P}$$

porque

$f'^{+}(0) = \sum_{j\in P^+} f_j^{+}(x(j)) - \sum_{j\in P^-} f_j^{+}(x(j))$

y $f_j'^{+}(x(j)), f_j'^{-}(x(j))$ son valores finitos para cada flujo $x(j) \in (c^-(j), c^+(j))$

y además $f'^{+}(0)$ puede tomar sólo un número finito de valores, ya que existe sólo un número finito de circuitos elementales en la red.

De aquí $f'^{+}(0)$ está acotado por cierta cantidad $-\epsilon$, con $\epsilon > 0$

El decremento del valor de la función objetivo que se obtiene en cada iteración viene dado por lo siguiente:

$\phi(x) - \phi(x') \geq f'^{+}(0)(\delta) \geq -\epsilon * \delta$

Lo cual implica que como el ínfimo es finito, será alcanzado en un número finito de iteraciones, ya que en cada una de ellas tenemos un descenso del valor de la función de costo que es equivalente a un múltiplo de δ

Este algoritmo tiene un inconveniente importante, el hecho de que pueda garantizarse su finitud sólo en el caso de funciones de costo localmente lineales es una desventaja importante ya que se restringen sus posiblidades de aplicación. Debido a esta desventaja se hicieron una serie de modificaciones a este algoritmo para presentar otro más general que es el Algoritmo Fortificado de Distribución.

III.2 ALGORITMO DIFERENCIAL OPTIMO

En este algoritmo partimos de una solución factible para el problema diferencial y buscamos obtener una solución factible para el Problema de Distribución. Para ello nos apoyamos en el Algoritmo de Distribución Factible, el cual nos permite encontrar un flujo factible o una cortadura $Q = [S, N/S]$ tal que $c_u^{+}(Q) < b(S)$, en este último caso lo que debemos hacer es mejorar (minimizar) la función $g(t) = -v(u + te_{N_S})$, modificando nuestro potencial hasta lograr una solución factible para el problema de Distribución.

Algoritmo Diferencial Optimo

(1).-Partamos de un potencial v factible en el sentido siguiente:

$v(j) \in [d^-(j), d^+(j)] \quad \forall j \in A$

(2).- Construyamos ahora en base a la función de costo para el potencial y la tensión, los siguientes intervalos de factibilidad

$[c_u^-(j), c_u^+(j)] = (g_j'^{-} v(j), g_j'^{+} v(j)) = \{\eta \mid (\eta, v(j)) \in \Gamma_j\}$

(3).- Y ahora, a través del algoritmo de distribución factible, encontremos un flujo $x(j) \mid x(j) \in [c_u^-(j), c_u^+(j)] \quad \forall j \in A$ o en su defecto una cortadura $Q = [S, N\S]$ con $c_u^+(Q) < b(S)$

(4).-Si $c_u^-(j) \leq x(j) \leq c_u^+(j) \forall j \in A$, entonces hemos terminado ya que nuestro flujo es factible y por las condiciones de equilibrio tanto u como x son soluciones óptimas,por lo tanto aquí terminamos .

(5).-Si tenemos que para alguna cortadura $Q = [S, N/S], c^u(Q) < b(S)$ entonces $c^u(Q) - b(S) < 0$, esto implica que considerando el potencial factible u que hemos fijado, no hemos encontrado un flujo x factible por lo cual es necesario ir a 6)

(6).-Tómese $\alpha = min\{t > 0 \mid g'^+(t) \geq 0\}$

donde $g(t) = -\psi(u + te_{N/S})$

Si $\alpha = \infty$ hemos terminado, la cortadura considerada ha resultado ser no balanceada, por lo que el ínfimo de $g(t)$ es $-\infty$ porque $g'^+(t) < 0 \quad \forall t$ y por el Teorema de Distribución factible no existe solución regularmente factible para el problema de Distribución, lo cual implica que no existe solución óptima para el problema Diferencial.

Si $\alpha < \infty$ ir a 7)

(7).-Considérese el nuevo potencial $u + \alpha e_{N/S}$

$g(\alpha) = -\psi(u + \alpha e_{N/S}) \leq -\psi(u)$

por lo que

$-g(\alpha) = \psi(u + \alpha e_{N/S}) \geq \psi(u)$

por lo tanto

$-g(\alpha) = \psi(u + \alpha e_{N/S}) \geq \psi(u)$ y de aquí

$\psi(u') \geq \psi(u)$

(Este nuevo potencial u sigue siendo factible)

(8).- Repetimos el procedimiento con este nuevo potencial.

III.2.1 CALCULO DE α

Nuevamente para el cálculo de α se incorpora una fórmula en la que están directamente involucrados los puntos en donde la función g no es diferenciable.

Sean $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots\ldots < t_m$ los puntos donde la función g no es diferenciable. Sea b_i el valor de la segunda derivada en el intervalo (t_{i-1}, t_i)

Considérese entonces la siguiente

IDENTIDAD

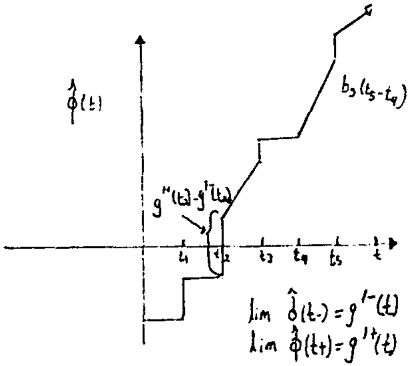
$g'^+(t) = c_u^+(Q) - b(s) + \sum_{0<k<r} g'^+(t_k) - g'^-(t_k) + [(b_k - b_{k+1})t_k] + b_r(t)$

Para $t_{r-1} < t < t_r$ y $r = 1,2,3$.........

VERIFICACION DE LA IDENTIDAD

Al igual que en el caso anterior la mejor forma de verificar la igualdad es de manera gráfica.

Supongamos la representación gráfica de $g'^+(t)$ en un caso arbitrario



Tenemos que para obtener $g'^+(t)$ basta con sumarle a $g'^+(0)$ los intervalos que hemos considerado que son de dos tipos:

a)De la forma $g'^+(t_k) - g'^-(t_k)$ si $g'^+(t_k) \neq g'^-(t_k)$ y $b_k = 0$

b)De la forma $b_K(t_k - t_{k-1})$ si $g'^+(t_k) = g'^-(t_k)$

Por otra parte $g'^+(0) = c_*^+(Q) - b(S)$, de todo esto se desprende pues que

$$g'^+(t) = c_*^+(Q) - b(S) + \sum_{0<k<r} g'^+(t_k) - g'^-(t_k) + (b_k - b_{k+1})t_k + b_r t.$$

para $t_{r-1} < t < t_r$ y $r = 1, 2, 3.......$

De esta forma para encontrar α utilizamos el conjunto de todos los puntos donde G no es diferenciable y además donde $g'^{+}(t)$ es mayor que cero. Como este conjunto es numerable y acotado, tiene un primer elemento.

Para obtenerlo partimos de la colección de todos los puntos mayores que cero donde la función $g(t)$ no es diferenciable, sea $\{t_i\}_{i=1}^{m}$ dicha colección. Vamos sustituyendo todos los valores de t_i en la identidad encontrada hasta determinar el primer elemento que cumple con que $g'^{+}(t_r) \geq 0$

Por otra parte según las características de las funciones de costo existen tres casos fundamentales a considerar

1.- Si $b_k = 0 \Rightarrow \alpha$ coincide con el punto t_r que es el último que hemos considerado.

2.- Si $b_r > 0 \Rightarrow$ se soluciona la siguiente ecuación lineal

$$g'^{+}(t) = c_u^{+}(Q) - b(S) + \sum_{0<k<r} g'^{+}(t_k) - g'^{-}(t_k) + (b_k - b_{k+1})t_k + b_r t$$

para encontrar t considerando que todos los demás valores son constantes y ya están determinados.

3.-Si $g'^{+}(t_k) < 0 \quad \forall k \in [1, ...m]$ entonces nos encontramos con una cortadura no balanceada por lo que no existe una solución óptima finita.

III.2.2 JUSTIFICACION DEL ALGORTMO

La justificación es análoga a la del algoritmo anterior. Nuevamente necesitamos dos resultados básicos como en el teorema anterior, que nos permiten abordar la demostración.

TEOREMA

Si una función g es convexa y para t perteneciente al dominio de la función g, tenemos que $g'^{-}(t) \leq 0 \leq g'^{+}(t)$ entonces g alcanza su valor mínimo en t.

Demostración:

$lim_{h\to 0}\frac{g(t-h)-g(t)}{h} \leq 0 \leq lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$

Como la función $h(x) = \frac{g(x)-g(t)}{x-t}$ es creciente por ser g convexa, tenemos que
$\frac{g(t-h)-g(t)}{h} \leq 0 \leq \frac{g(t+h)-g(t)}{h} \quad \forall h$
y de aquí
$g(t-h) \leq g(t) \leq g(t+h) \quad \forall h$
Por lo tanto g alcanza su valor mínimo en t. □

TEOREMA

Si u es un potencial regularmente factible ($u \in \tilde{D}(j)$) entonces $u+te_{N/S} \in \tilde{D}(j) \;\; \forall j \iff g'^{-}(t) < \infty$ y $g'^{+}(t) > -\infty$

Demostración:

$u + te_{N/S} \in \tilde{D}(j) \iff g_j'^{-}(v(j)) < \infty$ y $g_j'^{+}(v(j)) > -\infty \quad \forall j \iff g'^{-}(t) < \infty$ y $g'^{+}(t) > -\infty$ □

JUSTIFICACION DEL ALGORITMO

La justificación es análoga a la del problema anterior, el problema de Distribución.

Partimos de una solución Factible para el problema Diferencial y a través del algoritmo de Distribución Factible, llegamos a dos posiblidades para el flujo que hemos hallado.

Si $c_u^-(j) \leq x(j) \leq c_u^+(j) \;\; \forall j \in A \Rightarrow x(j) \in C_u(j) \;\; \forall j \in A$ lo que significa que el flujo es factible y por el Teorema de Existencia de Soluciones óptimas, esto implica que x y u son soluciones óptimas.

Veamos ahora el otro caso.

Si $c_u^+(Q) < b(s) \Rightarrow c_u^+(Q) - b(s) < 0 \Rightarrow \sum_{j \in Q^+} c_u^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c_u^-(j) - b(s) < 0 \Rightarrow$

$g'^{+}(0) = \sum g_j'^{+}(v(j)) - \sum g_j'^{-}(v(j)) - b(s) < 0$

Como $g_j'^{+}(v(j))$ es una función no decreciente $\forall t \Rightarrow g'^{+}(t)$ también lo es, lo cual significa que si $t < 0 \Rightarrow g'^{+}(t) < 0$

Buscamos entonces

$\alpha = min\{t > 0 \mid g'^{+}(t) \geq 0\}$, esto equivale a tomar del conjunto de las t aquella que cumpla con que $g'^{-}(t) \leq 0 \leq g'^{+}(t)$. Dicha t valuada en g corresponde al mínimo de la función (ver III.2.2). De aquí se desprende que $g(t) \leq g(0)$.

Si existe t tal que $g'^{-}(t) \leq 0 \leq g'^{+}(t)$, entonces $g'^{-}(t) < \infty$ y $-\infty < g'^{+}(t)$, lo cual implica que $u + te_{N/S}$ sigue siendo una solución regularmente factible.

De esta forma podemos ver como hemos encontrado un nuevo valor para la tensión que mejora indudablemente al valor original y además sigue siendo regularmente factible. Veremos ahora si podemos asegurar que llegaremos a la solución óptima en un número finito de iteraciones.

III.2.3 CONSIDERACIONES ACERCA DE LA FINITUD DEL ALGORITMO

Al igual que en el problema de Distribución, no se puede asegurar que el algoritmo termine en una secuencia finita de iteraciones, las razones son las mismas que en el caso anterior.

De la misma forma tenemos el siguiente Teorema que nos garantiza la terminación del algoritmo en un número finito de pasos cuando tengo una función de costo localmente lineal

TEOREMA

Supongamos que:

1) Todas las funciones de costo g_j en el problema de distribución son localmente lineales,

2) Los puntos $t > 0$ donde la función $g(t)$ no es diferenciable, $\forall Q$ y las tensiones iniciales $v(j)$ $\forall j$ son múltiplos de cierta $\delta > 0$

3) El ínfimo en el Problema Diferencial óptimo es finito,

entonces el algoritmo terminará en un número finito de iteraciones.

Demostración:

Considérese el conjunto siguiente:

$A = \{t \mid \text{en } t \text{ la función } g \text{ no es diferenciable}\} \cap \{t > 0 \mid g'^{+}(t) > 0\}$

Es claro que A es un conjunto numerable y acotado, además todos los elementos de A son múltiplos de cierta δ por hipótesis, consideremos entonces el primer elemento de A, llamémosle α' a este primer elemento, es claro que α' es múltiplo de δ y que además coincide con la α que nosotros estamos buscando porque $g(t)$ es una función localmente lineal , por lo cual es claro que α es un múltiplo de la δ considerada. (ver III.1.3)

Por otra parte, para toda cortadura $Q = [S, N/S]$ se tiene que $-\infty < g'^{+}(0) < \infty$ porque $g'^{+}(0) = \sum_{j \in Q^{+}} g_j'^{+} v(j) - \sum_{j \in Q^{-}} g_j'^{-} v(j) - b(S) =$

$\sum_{j \in Q^{+}} c_v^{+}(j) - \sum_{j \in Q^{-}} c_v^{-}(j) - b(S)$ y

$-\infty < g_j'^{+} v(j) < \infty,$

$-\infty < g_j'^{-} v(j) < \infty$

Para funciones de costo localmente lineales y tomando en cuenta que $v(j) \in D(j)$

Además $g'^{+}(0)$ puede tomar solamente un número finito de valores porque existe un número finito de cortaduras $Q = [S, N/S]$.

De todo lo anterior se desprende que existe una cota inferior $-\epsilon$ para los valores de $g'^{+}(t)$, por lo que el decremento de $g(0)$ a $g(\alpha')$ donde $u' = u + \alpha' e_{N/S}$ está acotado por $-\epsilon * \delta$ ya que por la convexidad de g se tiene:

$$X = g(0) - g(\alpha') = -\psi(u) - (-\psi(u') \geq g'^{+}(0) * \alpha' \geq -\epsilon * \delta$$

si en cada iteración nos acercamos al potencial óptimo en una cantidad $X \geq -\epsilon * \delta$.

De aquí se desprende que alcanzaremos este potencial óptimo en un número finito de iteraciones.

III.3 ALGORITMO THRIFTY

Todos los algoritmos que hemos visto hasta ahora comienzan con una solución factible para el problema Diferencial o el de Distribucuión y trabajan para encontrar una solución regularmente factible para el otro problema.

En el caso del Algoritmo Thrifty no sucede así. Se trabaja con ambos problemas simultaneamente. Partimos de un flujo que cumpla con que $x(j) \in C_x(j)$ y un potencial que cumpla con que $v(j) \in D_x(j)$. La única condición faltante y sobre la que gravita el algoritmo es que $divx$ debe ser igual a b para tener una solución factible para el problema de Distribución, debido a las condiciones de equilibrio (sección II.7.1.)

Consideremos el conjunto $N = \{i \mid divx > b(i)\}$ y $N' = \{i \mid divx < b(i)\}$

Utilizando el algoritmo del camino mínimo (sección I.7), logramos encontrar el camino P que va de un vértice inicial en N^+ a un vértice final en N^- para el que $d_x^+(P)$ es menor, esto nos permite saber cuál es la ruta más barata para mandar un flujo adicional de N^+ a N^-, al calcular el valor de este flujo adicional se alteran los valores de flujo de todos los arcos del camino P. Se altera también el valor del divergente en el nodo inicial y final del camino, esto provoca que eventualmente se eliminen todos los nodos de N^+ y N^-.

Veamos ahora el algoritmo:

(1).- Empezamos con un flujo $x(j)$ que cumpla con que $x(j) \in C(j) \forall j \in A$ y una tensión $v(j)$ tal que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ .Primero determinamos el intervalo $[d_x^-(j), d_x^+(j)] \forall j \in A$

(2).-Consideramos dos conjuntos $N^+ = \{i \mid b(i) > y(i)\}$ y $N^- = \{i \mid b(i) < y(i)\}$ Si $N^+ = N^- = \emptyset$ hemos terminado porque esto implica que $divx = b$ para todo $j \in A$

(3).-Si $N^+ \neq N^-$ se aplica el algoritmo de la ruta mínima de N^+ a N^-. Con dicho algoritmo encontramos un camino P tal que su vértice inicial pertenece a N^+ y su vértice final a N^- y además en el que

$d^+(P) = \sum_{j\in P^+} d_x(j) - \sum_{j\in P^-} d_x(j)$ alcanza su valor mínimo, considerando todos los caminos que van de N^+ a N^-, o en su defecto, encontramos una cortadura Q de ilimitada capacidad y se sigue que en este caso el problema de Distribución factible no tiene solución.

(4).-Debido a nuestra operación ,el potencial se ve incrementado por el algoritmo de la ruta mínima de u_0 a $u_0 + w_i = u$ ($w(i)$ es un valor asociado a cada nodo que se determina en el Algoritmo de la ruta Mínima como se vio en el primer capítulo.

(5).-Utilizando este nuevo potencial u determinar $[c_u^-(j), c_u^+(j)]$ y con este nuevo intervalo determinar

$$\alpha = min \begin{cases} c_u^+(j) - x(j) & \forall j \in P^+ \\ x(j) - c_u^-(j) & \forall j \in P^- \\ b(i) - y(i) & i \in N^+ \\ y(i) - b(i) & i \in N^- \end{cases}$$

(6).-Hacer $x' = x + \alpha e_p \quad \forall j \in P$

(7).- Volver a 1).

Si la diferencia entre $y(i)$ y $b(i)$ ha desaparecido, entonces eliminamos los nodos inicial y final del camino P, hasta lograr que N^+ y N^- sean conjuntos vacíos.

III.3.1 JUSTIFICACION DEL ALGORITMO

Si al aplicar el Algoritmo de la ruta mínima obtenemos una cortadura Q de ilimitada capacidad sucede lo siguiente:

como $d^+(j) = \infty$ para toda $j \in Q^+$ entonces es claro que $v(j) \leq d^+(j)$ para cualquier valor de $v(j)$. Usando un razonamiento análogo llegamos a que $d^-(j) \geq v(j)$.

Pues bien veamos la primera desigualdad:

$v(j) \leq d^+(j)$, utilizando la monotonía de las derivadas de la función de costo $g_j(v(j))$ desprendemos de aquí lo siguiente:

$v(j) \leq d^+(j)$ es equivalente a $v(j) \leq f_j^{\prime +} \quad (x(j))$ es equivalente a

$g_j^{\prime +}(v(j)) \leq g_j^{\prime -} f_j^{\prime +}(x(j)) \iff c_u^+(j) \leq x(j) \quad \forall j \in Q^-$

Utilizando un razonamiento análogo considerando la monotonía de las derivadas de la función de costo $g_j(v(j))$ llegamos a que

$x(j) \leq c_u^-(j) \quad \forall j \in Q^-$

Es claro con estos resultados que no se puede tener un flujo factible.

Veamos ahora que pasa en el caso contrario

Demostraremos cómo el potencial u después de cada iteración sigue siendo factible

Se tiene que

$d_x^-(j) - v_0(j) \leq \Delta w(j) \leq d_x^+(j) - v_0(j) \quad \forall j \in A$

donde $\Delta w(j) = w(i') - w(i)$ con $(i, i') = j$

Por otra parte

[despliegue de Δw relativo a P] $= \sum_{j \in P^+} \Delta w(j) - \sum_{j \in P^-} \Delta w(j)$

$= w(i')_{i \in N^-} - w(i'_{i \in N^+} = \beta$

$d_0^+(P) = \sum_{j \in P^+}(d_x^+(j) - v_0(j)) - \sum_{j \in P^-}(d_x^-(j)) - v_0(j)) = \sum_{j \in P^+} d_x^+(j) - \sum_{j \in P^-} d_x^-(j) - \sum_{j \in P^+} v_0(j) - \sum_{j \in P^-} v_0(j) = d_x^+(P)-$ [despliegue de v_0 relativo a P]$= \beta$

$\Rightarrow \sum_{j \in P^+} \Delta w(j) - \sum_{j \in P^-} \Delta w(j) = \sum_{j \in P^+} d_x^+(j) - v_0(j) - \sum_{j \in P^-} d_x^-(j) - v_0(j)$

Y esto implica que

$\Delta w(j) = d_x^+(j) - v_0(j) \quad \forall j \in P^+$

$\Delta w(j) = d_x^-(j) - v_0(j) \quad \forall j \in P^-$

En términos del nuevo potencial se tiene que

$u(i) = u_0(i) + w(i)$

$v(j) = v_0(j) + \Delta w(j)$

$v(j) - v_0(j) + \Delta w(j)$

de aquí

$d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j) \quad \forall j \in A$

y

$$v(j) = \begin{cases} d_x^+(j) & \forall \quad j \in P^+ \\ d_x^-(j) & \forall \quad j \in P^- \end{cases}$$

Para $j \in P$ se tiene que $x + \alpha e_p(j)$ sigue siendo solución factible

i.e. $c_u^-(j) \leq x + \alpha e_p(j) \leq c_u^+(j)$. Esto se debe a la forma en que definimos

α la cual también nos garantiza que la diferencia entre $b(i)$ y $y(i)$ va disminuyendo para cada uno de los arcos y nodos que pertenezcan a N^+ y a N^-. □

III.3.2 CONCLUSIONES Y DISCUSION SOBRE LA TERMINACION

Veremos ahora cuál es la razon que justifica la utilización del Algoritmo de la Ruta Mínima en el Algoritmo Thrifty.

Al obtener el camino P para el cual se minimiza $d_x^+(P)$ de hecho estamos consiguiendo la forma más barata de enviar un flujo adicional de N^+ a N^-,esto es importante desde un punto de vista interpretativo porque lo que se busca en el problema de Distribución es minimizar el costo del flujo que pasa por la red.

Analicemos ahora lo referente a la terminación del algoritmo "Thrifty", si revisamos el algoritmo de Distribución Factible (Apéndice A), observaremos que es extraordinariamente parecido al algoritmo "Thrifty", la única diferencia es que en el Algoritmo de Distribución Factible se usa como subrutina el Algoritmo de la red Pintada, y en el "Thrifty" se usa el algoritmo del Camino Mínimo.

Recordemos también que en el algoritmo Diferencial Optimo se usa como subrutina el algoritmo Diferencial Factible; cada vez que aplicando dicho algoritmo obtenemos una cortadura tal que $b(S) > c^+(Q)$ podríamos sustituir dicho algoritmo por el "Thrifty" y tampoco obtendríamos un flujo factible. Del mismo modo cuando obtenemos un flujo factible podemos asegurar que aplicando el algoritmo "Thrifty" obtendríamos también dicho flujo.

De esta forma se desprende claramente que las condiciones enunciadas en $III.2.3$ son también son las que se necesitan para garantizar la terminación en un número finito de iteraciones para el algoritmo "Thrifty"

III.4 ALGORITMO DE LAS DESVIACIONES

El algoritmo que veremos a continuación trabaja sobre ambos problemas al mismo tiempo; en el caso del algoritmo "Thrifty" partimos de un par $(x(j), v(j))$ tal que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ y lo que buscamos es que $div_i(x)$ sea igual a $b(i)$ para cada nodo i En el caso del algoritmo de Desviaciones se parte de un par $(x(j), v(j))$ en el que ni el flujo ni la tensión son factibles, pero en el que se tiene como hipótesis que $div = b$. En base a las características del flujo y el potencial en cada uno de los arcos, se efectúa un pintado de la red. Se localizan los arcos j tales que $x(j) \notin C(j)$ o $v(j) \notin D(j)$, se determina un circuito o una cortadura que involucre a cada uno de estos arcos en cada iteración, y usando un proceso que veremos a continuación, se logra que cumplan con las restricciones de factibilidad para el flujo y la tensión, de este modo obtenemos 2 soluciones factibles, y por tanto dos soluciones óptimas, una para el problema Diferencial y otra para el Problema de Distribución.

III.4.1 ALGORITMO DE DESVIACIONES (PRELIMINARES)

Veremos ahora una serie de resultados necesarios para el desarrollo teórico del algoritmo de desviaciones.

DEFINICION

Se dice que un arco j está fuera de orden si $(x(j), v(j)) \notin \Gamma_j$ lo cual significa que $x(j) \notin C(j)$ o que $v(j) \notin D(j)$ o ambos.

DEFINICION

Se dice que un arco está en orden si se cumple que $c_u^-(j) \leq x(j) \leq c_u^+(j)$ y $d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j)$

Para el desarrollo del algoritmo se utiliza el siguiente pintado de la red, tomando en cuenta los criterios que se dan a continuación.

Verde si $c_u^-(j) < x(j) < c_u^+(j)$

Blanco si $x(j) < c_u^+(j)$ y $v(j) > d_x^-(j)$

Negro si $x(j) > c_u^-(j)$ y $v(j) < d_x^+(j)$

Rojo si $d_x^-(j) < v(j) < d_x^+(j)$

El objetivo de dicha clasificación es efectuar una partición de los arcos de la red de tal manera que podamos separar en dos grupos los arcos de un circuito o de una cortadura.

Con esta clasificación se abarca a todos los arcos de la red (considerando flujos y potenciales finitos).

Esto es porque para los arcos en orden se tiene que según el pintado antes mencionado

Un arco es

Verde si $c_u^-(j) < x(j) < c_u^+(j) \rightarrow v(j) = d_x^-(j) = d_x^+(j)$,

Blanco si $c_u^-(j) = x(j) < c_u^+(j) \Rightarrow v(j) > d_x^-(j)$,

Negro si $c_u^+(j) = x(j) > c_u^-(j) \Rightarrow v(j) < d_x^+(j)$,

Rojo si $d_x^-(j) < v(j) < d_x^+(j) \Rightarrow x(j) = c(j) = c_u^-(j) = c_u^+(j)$

Los arcos "fuera de orden" son blancos o negros:

Blanco si $x(j) < c_u^-(j)$ o $v(j) > d_x^+(j)$

Negro si $x(j) > c_u^+(j)$ o $v(j) < d_x^-(j)$

Veamos ahora los siguientes dos problemas, los cuales son muy importantes ya que se utilizan en el Algoritmo de las Desviaciones el cual abordaremos más tarde.

a)Problema del Camino Pintado

Consideremos una red G pintada como ya hemos establecido, en la que son dados dos conjuntos de nodos N^+ y N^- tal que su intersección es vacía. El problema es determinar un camino $P : N^+ \rightarrow N^-$ con nodo inicial en N^+ y nodo terminal en N^-, tal que cada arco en P^+ es verde o blanco y cada arco en P^- es verde o negro.

b)Problema de la Cortadura Pintada

En la red G, dos conjuntos no vacíos N^+ y N^- son dados y se tiene un pintado de G igual al del caso anterior. El problema es encontrar una cortadura $Q = [S, N/S]$ en la que $N^+ \subset S$ y tal que j sea rojo o negro si $j \in Q^+$ y tal que j sea rojo o blanco si $j \in Q^-$

Al encontrar un camino o una cortadura que cumpla con las características mencionadas puedo aplicar el algoritmo de las desviaciones el cual veremos más adelante y asegurar que los arcos fuera de orden tarde o temprano dejarán de serlo. Para resolver a) utilizaremos un conjunto S que contiene a N^+ y trataremos de encontrar un camino que vaya de N^+ a S/N^+ que cumpla con las condiciones que requiere el problema .

Para ello definimos la función $\theta : S/N^+ \rightarrow A$ con $\theta(i) = j \in A$ Se pueden construir de este modo, caminos que empiezen en cualquier nodo de S/N^+ y desemboquen finalmente en N^+. Considerando este camino recorrido al revés, partiríamos de cualquier $i \in N^+$ y llegaríamos a un nodo $i' \in S/N^+$.

A continuación abordamos el algoritmo que permite resolver el problema de el camino pintado, .

Algoritmo de la red Pintada.

Este algoritmo nos permitirá resolver el problema a)

(1)Considere $S = N^+$ y un conjunto N^- arbitrario tal que la intersección de ambos conjuntos es vacía. (N^- puede ser unitario).

(2)Considere ahora una cortadura $Q = [S, N/S]$

(3)Verificar si para alguna $\bar{j} \in Q^+$, $\bar{j}$ es verde o blanco o para alguna $\bar{j} \in Q^-$, $\bar{j}$ es verde o negro.

(4)Si no sucede ninguna de estas dos cosas, entonces no existe un camino que vaya de N^+ a N^- y que sea compatible con el pintado de la red.

(5)Si existe algún $j \in Q$ que cumpla con (3), entonces consideramos al nodo i tal que i es el nodo inicial o terminal de j y no pertenece a S. Entonces $S' = S \bigcup i$ y $\theta(i) = j$

(6) volvemos a realizar el proceso con esta nueva S'.Si $i \in N^-$ terminamos.

Cómo resolvemos el segundo problema? Pues este mismo algoritmo nos permite encontrar una cortadura compatible con el pintado de la red. Para comprobar esto revisemos nuevamente el paso número tres del algoritmo.

i no existe ningún camino compatible que vaya de N^+ a N^-, entonces tenemos que j es rojo o negro $\forall j \in Q^+$ y que j es rojo o blanco $\forall j \in Q^-$. Todo esto implica que $Q = [S, N/S]$ con $N^+ \in S$ es una cortadura compatible que resuelve el problema de la Cortadura Pintada.

Como el algoritmo es constructivo, se justifica por sí mismo.

Es importante haber expuesto este algoritmo por lo siguiente: hemos certificado al estudiarlo que para cualesquiera dos conjuntos N^+ y N^-, o existe una cortadura o un camino compatible con el pintado de la red. De este modo resulta totalmente claro el siguiente

TEOREMA DE LA RED PINTADA.

Sea una red G.

Sean N^+ y N^- dos conjuntos de nodos tal que su intersección es vacía y cada uno de los conjuntos es distinto del vacío.

Sea el pintado ya establecido de la red, entonces se tiene alguno de los resultados siguientes:

i)-Existe un camino P, solución al Prob lema del Camino Pintado.

ii)-Existe una cortadura Q, solución al Problema de la Cortadura Pintada.

Es claro que el Algoritmo de la Red pintada lleva sólo a alguna de esas dos posiblidades, por lo que la demostración sale sobrando.

De este Teorema se desprende el siguiente lema el cual es esencial porque gracias a él podemos empezar a trabajar con el Algoritmo de las Desviaciones.

LEMA DE MINTY

Sea una red $G = (X, A, d)$, considerando el pintado de la red G ya establecido, entonces si se tiene un arco $\bar{j} \in A$ que es blanco o negro, se presenta alguna de las posiblildades siguientes.

-Que el arco $\bar{j}$ esté en un circuito P compatible con el pintado.

-Que el arco $\bar{j}$ esté en una cortadura Q compatible con el pintado.

Demostración: La demostración se basa en el algoritmo que resuelve el problema del camino pintado.

Sean s y s' los nodos terminales de $\bar{j}$, tómese $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{s'\}$,

Si $\bar{j}$ es negro, tómese $\bar{j} = (s, s')$

Si $\bar{j}$ es blanco, tómese $\bar{j} = (s', s)$

Por el Teorema de la Red Pintada tenemos dos posiblidades:

1)Que para la red G tengamos un camino P que vaya de N^+ a N^- o sea de S a S'. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que dicho camino es elemental. Dicho camino no contiene a $\bar{j}$ porque el único camino elemental que contiene a $\bar{j}$ es $\{s, \bar{j}, s'\}$,el cual sin embargo indica que $j = (s, s')$ es negro, sin embargo, como $j \in P^+$, j es blanco, contradicción evidente.

Por esto llamémosle P a dicho camino El circuito que buscamos es $P' = P \bigcup \bar{j} \bigcup s$

2)Que exista una cortadura compatible con el pintado de la red $Q = [S, N/S]$ y que incluya a j',esto pasa si no se da (1). □

III.4.2 ALGORITMO DE LAS DESVIACIONES (DESARROLLO)

Vamos a plantear ahora los pasos del algoritmo "out-of-kilter".

(1)El proceso se inicia con algún flujo "x" que satisface $div x = b$ y un potencial u no necesariamente factibles.

(2)Si no hay arcos fuera de orden, termina el algoritmo, x y u son soluciones óptimas.

(3)Si existe un arco $\bar{j}$ "fuera de orden" entonces hay que encontrar un circuito o una cortadura que lo contenga y que sea compatible con el pintado establecido. (Esto, gracias al Lema de Minty y usando el Algoritmo del camino Pintado)

a)Consideremos el primer caso, i.e. existe un circuito con $\bar{j} \in P$ tal que dicho circuito es compatible con el pintado de la red. Entonces sea

$$\alpha = min \begin{cases} c_u^+(j) - x(j) & j \in P^+ \\ x(j) - c_u^-(j) & j \in P^- \\ \hat{\alpha} \end{cases}$$

con

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} x(\bar{j}) - c_u^+(\bar{j}) & \bar{j} \in P^- (\bar{j} \text{ negro }) \\ c_u^-(\bar{j}) - x(\bar{j}) & \bar{j} \in P^+ (\bar{j} \text{ blanco}) \end{cases}$$

donde $\bar{j}$ está fuera de orden.

Si $\alpha = \infty, P$ es un circuito no balanceado, por lo que no hay solución factible para el problema diferencial.

(4.a) Si $\alpha < \infty$ considérese ahora el nuevo flujo $x' = x + \alpha e_p$

(5.a)Consideremos los siguientes indicadores.

$D_1(x(j), v(j)) = max\{0, x(j) - c_u^+(j), c_u^-(j) - x(j)\}$

$D_2(x(j), v(j)) = max\{0, v(j) - d_x^+(j), d_x^-(j) - v(j)\}$

Si dichos indicadores son "iguales a cero", j es un arco "en orden".

Si alguno de ellos es mayor que cero, j es aún un arco "fuera de orden".

(6.a)Si al probar con el flujo x' existe algún arco $\bar{j} \in P$ tal que

$D_1(x'(j), v(j)) > 0$ o $D_2(x'(j), v(j)) > 0$

Entonces volver a (3) con el mismo potencial, si no es así volver a (1) y escoger otro arco $\bar{j}'$ "fuera de orden"

En el caso de una cortadura, tenemos

(3.b)

$$\alpha = \begin{cases} v(j) - d_x^-(j) & \text{si } \bar{j} \in Q^- \text{ (blanco)} \\ d_x^+(j) - v(j) & \text{si } \bar{j} \in Q^+ \text{ (negro)} \\ \hat{\alpha} \end{cases}$$

Donde

$$\alpha = \begin{cases} v(\bar{j}) - d_x^+(\bar{j}) & \text{si } \bar{j} \in Q^- \text{ (negro)} \\ d_x^-(\bar{j}) - v(\bar{j}) & \text{si } \bar{j} \in Q^+ \text{ (blanco)} \end{cases}$$

con $\bar{j}$ "fuera de orden"

Si $\alpha = \infty$, Q es una cortadura no balanceada por lo que el problema de Distribución no tiene solución factible,y el Diferencial o no tiene solución o $[inf] = -\infty$

(4.b)Si $\alpha < -\infty$ Sea el nuevo potencial $v' = v + \alpha e_{N/S}$

(5.b)Si $D_2(x(j), v'(j)) = 0$ y $D_1(x(j), v'(j) = 0 \ \forall j \in Q$, volver a uno y buscar otro arco $\bar{j}$ fuera de orden

(6.b)Si $D_2(x(j), v'(j)) > 0, p.e. \bar{j} \in Q$ entonces volver a 3.b).Lo mismo hacemos si $D_1(x(j), v'(j)) > 0$ considerando el mismo flujo $x(j)$

III.4.3 JUSTIFICACION DEL ALGORITMO DE DESVIACIONES

Dividiremos esta demostración en dos casos, debido a que existen dos posiblidades usando el algoritmo de la red pintada.

III.4.3.1 CASO DEL CIRCUITO

Es claro que $\alpha > 0$ porque

$x(j) \leq c_v^+(j) \ \ \forall j \in P^+ \quad (x(j) \leq c_v^-(j)$ para los arcos fuera de orden)

$c_v^-(j) \leq x(j) \forall j \in P^- \quad (c_v^+(j) \leq x(j)$ para los arcos fuera de orden)

y

$d_x^-(j) \leq v(j) \forall j \in Q^+ \quad (d_x^+(j) \leq v(j)$ para los arcos fuera de orden)

$v(j) \leq d_x^+(j) \forall j \in Q^- \quad (v(j) \leq d_x^-(j)$ para los arcos fuera de orden)

Debido a la forma en que se construye α tenemos

1) $x(j) < x'(j) \leq c_v^+(j) \ \ \forall j \in P^+$

2) $c_v^-(j) \leq x'(j) < x(j) \ \ \forall j \in P^-$

Por la monotonía de las derivadas de f y debido a que $c_v^+(j) = g_j'^+(v(j))$ tenemos que de (1) se desprende:

$f_j'^+(x(j)) \leq f_j'^+(x'(j)) \leq f_j'^-(g_j'^+(v(j))$ Entonces $d_x^+(j) \leq d_{x'}^+(j) \leq v(j)$

De (2), y por la monotonía de las derivadas de f y debido a que $c_x^-(j) = g_j'^-(v(j))$ se deriva que

$f_j'^+(g_j'^-(v(j)) \leq f_j'^+(x'(j)) \leq f_j'^-(x(j)) \Rightarrow v(j) \leq d_{x'}^-(j) \leq d_x^-(j)$

De esto se infiere que

$d_x^+(j) \leq d_{x'}^+(j) \leq v(j) \quad \forall j \in P^+$

$v(j) \leq d_{x'}^-(j) \leq d_x^-(j) \quad \forall j \in P^-$

Esto implica que

$D_1(x(j), v(j)) \geq D_1(x'(j), v(j)) \geq 0$

$D_2(x(j), v(j)) \geq D_2(x'(j), v(j)) \geq 0$

Lo cual significa que estamos disminuyendo la medida de desviación de nuestro circuito, ya que dichos indicadores lo que nos se alan es qué tan lejos está cada uno de los arcos de la factibilidad. Esto permite que gradualmente un arco que estaba fuera de orden se transforme en un arco en orden, lo cual garantiza la funcionalidad del algoritmo.

En el momento en que $D_1(x(j), v(j)) = D_2(x(j), v(j)) = 0 \quad \forall j \in P$ todos los arcos de nuestro circuito están en orden

Es claro que ningún arco que está en orden dejará de estarlo en alguna iteración pósterior.

- Lo que resta por demostrar es que si $\alpha = \infty \Rightarrow P$ es un circuito no balanceado

Veamos el siguiente resultado:

PROPOSICION

Si $\alpha = \infty$, lo cual significa que $c_x^+(j) = \infty \quad \forall j \in P^+$ y $c_x^-(j) = -\infty \quad \forall j \in P^-$, además $\hat{\alpha} = \infty$ por lo que $c_x^-(j) = \infty$ p.a $j \in P^+$ y $c_x^+(j) = -\infty$ *p.a.* $j \in P^-$, entonces $v(j) \geq d^+(j) \quad \forall j \in P^+$ y $v(j) \leq d^-(j) \quad \forall j \in P^-$ con al menos una de las desigualdades estrictas.

Demostración: Tenemos que como $c_x^+(j) = \infty \quad \forall j \in P^+ \Rightarrow x(j) < c_x^+(j) \quad \forall j \in P^+$ y para cualquier valor de flujo finito

$\Rightarrow f_j'^+(x(j)) \leq f_j'^-(g_j'^+(v(j))$ porque $f_j'+$ y $f_j'-$ son funciones monótonas crecientes, dicha desigualdad puede expresarse como

$d_x^+(j) \leq v(j)$

Como es para cualquier flujo x entonces se tiene que $d^+(j) \leq v(j)$

En el segundo caso tenemos que

$c_x^-(j) = -\infty \quad \forall j \in P^- \Rightarrow c_x^-(j) < x(j) \quad \forall j \in P^-$ y para cualquier valor de flujo $\Rightarrow f_j'^+(g_j'^- v(j)) \leq f_j'^-(x(j)) \Rightarrow v(j) \leq d_x^-(j)$ (para algún arco fuera de orden, las desigualdades son estrictas por hipótesis)

Por el resultado obtenido tenemos que $d^+(P) = \sum_{j\in P^+} d(j) - \sum_{j\in P^-} d(j) < \sum_{j\in P^+} v(j) - \sum_{j\in P^-} v(j) = v * e_p = 0$ (porque P es un circuito y v un diferencial)

Por lo tanto P es un circuito no balanceado y de aquí se desprende que el problema diferencial no tiene solución factible y que el problema de Distribución o no tiene solución óptima o $[inf] = -\infty$ □

III.4.3.2 CASO DE LA CORTADURA

En este caso nuevamente $\alpha > 0$

$d_x^+(j) > v(j) \quad \forall j \in Q^+$

$v(j) > d_x^-(j) \quad \forall j \in Q^-$

$d_x^-(j) > v(j) \quad \forall j \in Q^+$ (para los arcos j fuera de orden)

$v(j) > d_x^+(j) \quad \forall j \in Q^-$ (para los arcos j fuera de orden)

Debido a la forma en que se define α podemos asegurar que:

1) $v(j) \leq v'(j) \leq d_x^+(j)$

2) $v(j) \geq v'(j) \geq d_x^-(j)$

De aquí, por la monotonía de las funciones crecientes $g_j'^+$, $g_j'^-$ y gracias a que $f'^-(x(j)) = d_x^-(j)$ y $f'^+(x(j)) = d_x^+(j)$ podemos inferir

de 1)

$g_j'^+(v(j)) \leq g_j'^+(v'(j)) \leq g_j'^-(f_j'^+(x(j))$

$c_v^+(j) \leq c_{v'}^+(j) \leq x(j)$

y de 2)

$c_v^-(j) \geq c_{v'}^-(j) \geq x(j)$,

esto implica nuevamente que

$D_1(x(j), v(j)) \geq D_1(x'(j), v(j)) \geq 0$

$D_2(x(j), v(j)) \geq D_2(x'(j), v(j)) \geq 0$

Lo cual significa que estamos disminuyendo la medida de desviación de nuestra cortadura, esto lo hacemos en cada iteración hasta que todos los arcos de nuestra cortadura están en orden.

es claro que ninguna cortadura que está en orden dejará de estarlo en alguna iteración posterior.

-Falta probar que si $\alpha = \infty \Rightarrow P$ es un circuito no balanceado.

Veamos el siguiente

RESULTADO:

Si $\alpha = \infty$ (lo cual significa que $d_x^+(j) = \infty \;\; \forall j \in Q^+$ y $d_x^-(j) = -\infty \;\; \forall j \in Q^-$, además de que $\hat{\alpha} = \infty$ por lo cual $c_v^-(j) = \infty \quad p.a.\, j \in Q^+$ y $c_v^+(j) = -\infty \quad p.a.\, j \in Q^-$), entonces

$x(j) \geq c^+(j) \;\; \forall j \in Q^+$ y $x(j) \leq c^-(j) \;\; \forall j \in Q^-$.(Con las últimas dos desigualdades estrictas para algún arco j fuera de orden).

Demostración: como $d^+(j) = \infty \;\; \forall j \in Q^+$

$\Rightarrow v(j) \leq d^+(j) \;\; \forall j \in Q^+ \;\; \forall \;\; v(j)$

$\Rightarrow g_j'^+(v(j)) \leq g_j'^-(f_j'^+(x(j)))$

$\Rightarrow c_u^+(j) \leq x(j) \;\; \forall j \in Q^+$

como esta desigualdad se cumple para todo potencial u tenemos que

$c_u^+(j) \leq x(j) \;\; \forall j \in Q^+$

por otra parte $d^-(j) = -\infty \;\; \forall j \in Q^- \Rightarrow d^-(j) \leq v(j) \;\; \forall j \in Q^-$ y $\forall v(j)$

entonces- $g_j'^+(f_j'^-(x(j))) \leq g_j'^-(v(j))$ entonces $x(j) \leq c_u^-(j) \;\; \forall j \in Q^+$ y $\forall v(j)$ por lo tanto $x(j) \leq c^-(j)$

En el caso de los arcos fuera de orden las desigualdades son estrictas por hipótesis □

TEOREMA *Si* $\alpha = \infty$ entonces Q es una cortadura no balanceada

Demostración:

Utilizando el resultado anterior que acabamos de demostrar tenemos que $c_u^+(Q) = \sum c_u^+(j) - \sum c_u^-(j) \leq \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = x \cdot e_q = 0$. Si planteamos el problema original como un problema de circulación en el que $b_i = 0$, lo cual se puede hacer con una red aumentada, sin perder generalidad.

De lo anterior se deduce que $c_u^+(Q) - b(S) = 0$ por lo cual Q es una cortadura no balanceada, esto implica por el teorema de Distribución Factible que no existe una solución regularmente factible para dicho problema, y esto a su vez nos lleva a la conclusión de que no existe solución óptima para el problema diferencial o es igual a $-\infty$.

III.4.4 DEMOSTRACION DE LA FINITUD DEL ALGORITMO

Para efectuar dicha demostración tendremos que definir dos conceptos importantes:

DEFINICION *Una iteración fuerte es aquella que produce un decremento en* $D_1(x(j), v(j))$ o $D_2(x(j), v(j))$ para al menos una $j \in A$

DEFINICION *Una iteración débil es aquella que deja estos valores iguales para toda* $j \in A$.

Una iteración débil debe cumplir con que $D_1(x(j), v(j)) = \infty \quad \forall j \in P$ fuera de orden, lo cual significa qe $v(j) \geq d^+(j) \quad \forall j \in P^+$ y $v(j) \leq d^-(j) \quad \forall j \in P^-$ en el caso de un circuito.

En el caso de una cortadura $D_2(x(j), v(j)) = \infty \quad \forall j \in Q$ que sea fuera de orden, lo cual implica que $x(j) \geq c^+(j) \quad \forall j \in Q^+$ (fuera de orden), y $x(j) \leq c^-(j)$y $\forall j \in Q^-$.

Tenemos ahora las condiciones de finitud para el algoritmo, enmarcadas en un

TEOREMA

- El algoritmo "fuera de orden" debe terminar en un número finito de iteraciones si las siguientes 2 condiciones se cumplen.

1) Los puntos de discontinuidad de las derivadas de las funciones de costo y los valores que toman las derivadas de las funciones de costo son múltiplos de cierta δ al igual que los valores de flujo y tensión iniciales $x(j)$ y $v(j)$.

2) Es imposible para el algoritmo encontrar una secuencia infinita de iteraciones que sean todas débiles

Demostración: Por (2) sabemos que es imposible que nuestros valores de $D_1(x(j), v(j))$ se mantengan sin cambio, lo mismo que los de $D_2(x(j), v(j))$

Por otra parte, supongamos apoyándonos en 1) y sin pérdida de generalidad, que todas las variables y constantes mencionadas sean enteras, entonces α también sería entero por lo que $D_1(x(j), v(j))$ iría disminuyendo un número entero en cada iteración, lo mismo que $D_2(x(j), v(j))$

Como ambos indicadores están acotados inferiormente por cero, eventualmente lograremos alcanzar este valor, lo cual implicará tener un arco más en orden.

Como el número de arcos fuera de orden es finito, repitiendo el algoritmo con cada uno de ellos terminaremos la aplicación del algoritmo en un número finito de iteraciones.

□

Tenemos también un resultado muy importante que se desprende del Teorema anterior, y que también nos garantiza la finitud del algoritmo bajo ciertas condiciones.

COROLARIO

Si se cumple 1) y además ambos problemas tienen soluciones factibles entonces se cumple 2) y el algoritmo termina en un número finito de iteraciones

Demostración:

Consideremos las siguientes cantidades

$dist[x(j), c(j)] = max\{0, c^-(j) - x(j), x(j) - c^+(j)\}$

$dist[v(j), d(j)] = max\{0, d^-(j) - v(j), v(j) - d^+(j)\}$

Sea j un arco fuera de orden. Una vez que se tenga $[dist[x(j), c(j)] = 0$, después de efectuar una serie de iteraciones, entonces j ya no será afectado en una iteración débil que involucre una cortadura porque $x(j) \geq c^-(j)$ y $x(j) \leq c^+(j)$ para todo arco $j \in A$, y debido a esto j no puede estar en Q^+ ni en Q^-

De igual modo, una vez que se tenga $dist[v(j), d(j)] = 0$ es imposible que j sea afectada por una iteración débil que involucre un circuito porque

$d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$ y esto impide que j pertenezca a P^+ o a P^-

Supongamos ahora que un arco j fuera afectado por un número infinito de iteraciones débiles pero permaneciera desviado

Tendríamos entonces 4 posiblidades

-Consideramos que $j \in P^+$, tendríamos que eventualmente $dist[x(j), c(j)] = 0$. Desde ese momento en adelante j sólo sería afectado por circuitos . Además $v(j) > d^+(j) = f_j'^-(x(j)) = f_j'^+(x(j))$ y j sólo sería afectado por iteraciones que involucraran circuitos

-El segundo caso sería Si $j \in P^-$ eventualmente $dist[x(j), c(j)] = 0$. Desde este momento en adelante j sería afectado sólo por circuitos. En este caso tendríamos que $v(j) < d^-(j) = f_j'^+(x(j)) = f_j'^-(x(j))$

(Continúa en la siguiente hoja)

Supongamos ahora que fijamos un flujo x. Siguiendo un razonamiento análogo, si j es un arco "fuera de orden" y es sometido a un número infinito de iteraciones $v(j) < d^-(j)$ tendríamos lo siguiente: Si $j \in Q^+$ eventualmente $dist[v(j), d(j)] = 0$.Desde este momento este arco sería afectado sólo por cortaduras al aplicar el algoritmo. Tendríamos además que $x(j) > c^+(j) = g_j'^+(v(j)) = g_j'^-(v(j))$

Si $j \in Q^-$, eventualmente $dist[v(j), d(j)] = 0$ .Este estado también sería afectado sólo por cortaduras al aplicar el algoritmo. Además tendríamos que $x(j) < c^-(j) = g_j'^-(v(j)) = g_j'^+(v(j))$.

Estos últimos dos estados serían afectados sólo por cortaduras

Así ,llamaremos a cada uno de los estados $A_{PW}, A_{PB}, A_{QB}, A_{QW}$ respectivamente, con A_K el conjunto de arcos en orden, y A_U el conjunto de arcos no afectados por la secuencia de iteraciones.

$(x(j), v(j)) \in \Gamma_j \quad \forall j \in A_k$

$(x(j), d^+(j)) \in \Gamma_j \quad \forall j \in A_{PW}$

$(x(j), d^-(j)) \in \Gamma_j \quad \forall j \in A_{PB}$

$(c^-(j), v(j)) \in \Gamma_j \quad \forall j \in A_{QW}$

$(c^+(j), v(j)) \in \Gamma_j \quad \forall j \in A_{QB}$

De aquí $f_j(x(j)) + g_j(v(j)) = x(j)v(j) \quad \forall j \in A_k$

$f_j(x(j)) + g_j(d^+(j)) = x(j)d^+(j) \quad \forall j \in A_{PW}$

$f_j(x(j)) + g_j(d^-(j)) = x(j)d^-(j) \quad \forall j \in A_{PB}$

$f_j(c^-(j)) + g_j(v(j)) = c^-(j)v(j) \quad \forall j \in A_{QW}$

$f_j(c^+(j)) + g_j(v(j)) = c^+(j)v(j) \quad \forall j \in A_{QB}$

Considérese ahora la cantidad finita

$\Lambda = \sum_{j \in A_k} f_j(x(j)) + \sum_{j \in A_{PW}} f_j(x(j)) + \sum_{j \in A_{PB}} f_j(x(j)) + \sum_{j \in A_k} g_j(v(j)) + \sum_{j \in A_{QW}} g_j(v(j)) + \sum_{j \in A_{QB}} g_j(v(j)) + b \bullet u$

donde por supuesto $b \bullet u = -x \bullet v$

$1 \ldots \Lambda = \sum_{j \in A_K} x(j)v(j) + \sum_{j \in A_{PW}} x(j)d^+(j) - g_j(d^+(j)) + \sum_{j \in A_{PB}} x(j)d^-(j) - g_j(d^-(j)) + \sum_{j \in A_{QW}} c^-(j)v(j) - f_j(c^-(j)) + \sum_{j \in A_{QB}} c^+(j)v(j) - f_j(c^+(j)) - \sum_{j \in A} x \bullet v$

$\Lambda = \sum_{j \in A_{PW}} x(j)[d^+(j) - v(j)] - g_j(d^+(j)) + \sum_{j \in A_{PB}} x(j)[d^-(j) - v(j)] - g_j(d^-(j)) + \sum_{j \in A_{QW}} v(j)[c^-(j) - x(j)] - f_j(c^-(j)) - \sum_{j \in A_U} x(j)v(j) + \sum_{j \in A_{QB}} v(j)[c^+(j) - x(j)] - f_j(c^+(j))$

En cada iteración está involucrado al menos un arco "desviado" el cual está en alguno de los estados PW, PB, QW, QB

Si se analiza cada uno de los términos de esta expresión ,se vera que Λ disminuye en una cantidad positiva y entera en cada iteración , y si suponemos una secuencia infinita de iteraciones, es claro que Λ tiende a $-\infty$

Por otra parte, para soluciones que sean factibles ($\bar{X}$ y $\bar{U}$), se tiene que

$-\bar{x} \bullet v = -b \bullet \bar{u}$, y por el hecho de que f_j y g_j son funciones conjugadas tenemos que

$f_j(x(j)) \geq x(j)\bar{v}(j) - g_j(\bar{v}(j))$ y

$g_j(v(j)) \geq \bar{x}(j)v(j) - f_j(\bar{x}(j))$

Se sigue de la definición de Λ que

$\Lambda \geq \sum_{j \in \{A_K \bigcup A_{PW} \bigcup A_{PB}\}} x(j)\bar{v}(j) - g_j(\bar{v}(j)) - \sum_{j \in \{A_K \bigcup A_{QW} \bigcup A_{QB}\}} \bar{x}(j)v(j) - f_j(\bar{x}(j)) - \bar{x} \bullet v = -b \bullet \bar{u} - \sum_{j \in \{A_k \bigcup A_{PW} \bigcup A_{PB}\}} x(j)\bar{v}(j) - \sum_{j \in \{A_K \bigcup A_{PW} \bigcup A_{PB}\}} g_j(\bar{v}(j)) - \sum_{j \in \{A_U \bigcup A_{QW} \bigcup A_{QB}\}} \bar{x}(j)v(j) - \sum_{j \in \{A_K \bigcup A_{QW} \bigcup A_{QB}\}} f_j(\bar{x}(j))$ Este valor es constante porque $x(j)$ es constante para A_k, A_{PW}, A_{PB} y $v(j)$ es constante para A_k, A_{QW}, A_{QB}; pero esto contradice el hecho que habíamos se$alado con anterioridad de que Λ tiende a menos infinito, por lo tanto no se puede tener una sucesión infinita de iteraciones débiles, si la condición uno se cumple y ambos problemas tienen soluciones factibles. □

III.5 ALGORITMO FORTIFICADO DE DISTRIBUCION (INTRODUCCION)

Los algoritmos generales para resolver el problema de Distribución y el Problema Diferencial tienen el grave inconveniente de que la terminación en un número finito de iteraciones no está asegurada.

Para lograr que el algoritmo termine en un número finito de iteraciones se implementan algunas transformaciones en los algoritmos generales, sin embargo aún así no se obtiene una solución óptima sino una solución casi óptima en el sentido que veremos a continuación.

DEFINICION

Una solución ϵ óptima al problema de Distribución es una solución factible x tal que $\phi(x)$ difiere del ínfimo del problema a lo más un valor ϵ

La estructura del algoritmo Fortificado de Distribución es análoga a la del Algoritmo General de Distribución.

Se parte de una solución factible para el problema de Distribución y se busca una solución factible para el problema Diferencial considerando los siguientes intervalos $[d_x^-(j), d_x^+(j)]$ para $v(j)$

$[d_x^-(j), d_x^+(j)] = [f'^{\epsilon}_{j-}(x(j)), f'^{\epsilon}_{j+}(x(j))]$

donde

$f'^{\epsilon}_{j+}(t) = \inf_{s>t}\{\frac{f_j(s)-f_j(t)+\epsilon}{s-t}\}$

$\geq f_j'^{+}(t)$

$f'^{\epsilon}_{j-}(t) = \sup_{s<t}\{\frac{f_j(s)-f_j(t)+\epsilon}{s-t}\} \leq f_j'^{-}(t)$

Como utilizamos el Algoritmo Diferencial Factible existen 2 posiblidades

1)Hallamos un circuito tal que $d_x^+(P) < 0$ o bien

2)Un potencial factible

En el primer caso terminamos,en el segundo continuamos mejorando nuestro flujo hasta llegar a un flujo óptimo

Pasemos ahora al algoritmo Fortificado de Distribución:

(1)Sea $\epsilon > 0$ y sea $\delta = \epsilon/A$ Dada cualquier solución factible x

Definanse los intervalos

$[d_x^-(j), d_x^+(j)] = [f_{j-}^{\prime\delta}(x(j)), f_{j+}^{\prime\delta}(x(j))]$

(2).- Utilizar el algoritmo Diferencial Factible para hallar un potencial u factible o un circuito elemental con $d_x^+(P) < 0$

(3).-Si sucede lo primero , x y u son ϵ soluciones óptimas al problema de Distribución y su dual. De hecho se tiene que $\phi(x) - \psi(u) < \epsilon$

(4).-Si se encuentra un circuito elemental con $d_x^+(P) < 0$, entonces la función $f(t) = \phi(x + te_p)$ cumple con la propiedad siguiente $inf f < f(0) - \delta$. Escoger cualquier α tal que $f(\alpha) \leq f(0) - \delta$ y sea $x' = x + \alpha e_p$. Entonces x' es otra solución factible al Problema de Distribución óptima y $\phi(x') \leq \phi(x) - \delta$. Iterar con esta nueva x'.

III.5.1 JUSTIFICACION DEL ALGORITMO FORTIFICADO DE DISTRIBUCION

Si se encuentra un potencial u tal que $v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)]$

tenemos que $f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq \delta \quad \forall j \in A$

ya que

$f_{j-}^{\prime\delta}(x(j)) \leq v(j) \leq f_{j+}^{\prime\delta}(x(j)) \iff f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq \delta$

Sumando sobre todos los arcos y usando el hecho de que $-x \bullet v = div(x) \bullet u = b \bullet u$

Se obtiene

$\sum_{j\in A} f_j(x(j)) + \sum_{j\in A} g_j(v(j)) + \sum_{i\in N} b(i)u(i) \leq \delta|A| = \epsilon$

lo que significa que

$\phi(x) - \psi(u) \leq \epsilon$. De aquí $-\psi(u) \leq \epsilon - \phi(x) \leq \infty$ por lo que u también es una solución factible.

$\phi(x) \geq$ [inf en el problema de distribución] $\geq$ [sup. en el problema Diferencial óptimo] $\geq \psi(u)$

como $\phi(x) - \psi(u) \leq \epsilon \Rightarrow \phi(x)$- [inf. en el problema de Distribución] $\leq \epsilon$ y [sup. en el problema dif. óptimo] $-\psi(u) \leq \epsilon$. Por lo que x y u son ϵ óptimos

Si se obtiene un circuito tendríamos lo siguiente.

$0 > d_x^{+}(P) = \sum f_{j+}^{\prime\epsilon} - f_{j-}^{\prime\epsilon}(x(j)) = \sum_{j\in P} \inf_{t_j>0} \frac{[f_j(x(j)+t_j e_P(j)) - f_j(x(j)) + \epsilon]}{t_j}$

Consideremos t_j un valor fijo para cada j donde se alcanza el ínfimo de la función.

Sea $s = \frac{1}{\sum_{j\in P}(1/t_j)} \geq 0$

Para cada $j \in P$, se tiene que $t_j > s$ y por lo tanto debido a la convexidad de f_j

$\frac{[f_j(x(j))+t_j e_P(j)] - f_j(x(j)) + \epsilon]}{t_j} \geq \epsilon/s + \sum_{j\in A} \frac{f_j(x(j)) + s e_P(j) - f_j(x(j))}{s} = \frac{f(S) - f(0) + \epsilon}{s}$

De aquí

$0 > \inf_{t>0} \frac{f(t) - f(0) + \epsilon}{t}$

y por lo tanto existe α tal que

$f(\alpha) \leq f(0) - \epsilon$ como se había supuesto

Es claro que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones en el caso de tener una solución óptima finita ya que desciende el valor de la función objetivo en un valor por lo menos igual a ϵ

III.6. ALGORITMO DIFERENCIAL OPTIMO FORTIFICADO

El Algoritmo General Diferencial óptimo no garantiza que se alcance la solución óptima en un número finito de iteraciones, se requieren algunas modificaciones importantes,que nos generan el Algoritmo Diferencial óptimo fortificado. Sin embargo, dichas modificaciones sólo pueden garantizar una solución ϵ óptima después de un número finito de iteraciones, entenderemos este término como sigue

DEFINICIONUna solución ϵ óptima para el problema de Diferencial es aquella que cumple con que $\phi(u)$ difiere del ínfimo en un valor a lo más igual a ϵ

El Algoritmo Diferencial óptimo Fortificado resulta de la incorporación de modificaciones análogas a las del algoritmo de Distribución.

Partimos de un potencial factible en base al cual definimos los siguientes intervalos

$[c_u^{-}(j), c_u^{+}(j)] = [g_{j-}^{\prime\epsilon}(v(j)), g_{j+}^{\prime\epsilon}(v(j))]$

donde

$g_{j+}^{\prime\epsilon}(v(j)) = \inf_{v'(j)>v(j)} \frac{g_j(v'(j)) - g_j(v(j)) + \epsilon}{v'(j) - v(j)} \geq g_j^{\prime +}(v(j))$

$g_{j-}^{\prime\epsilon}(v(j)) = \sup_{v'<v(j)} \frac{g_j(v'(j)) - g_j(v(j)) + \epsilon}{v'(j) - v(j)} \leq g_j^{\prime -}(v(j))$

Utilizamos el algoritmo de Distribución Factible para encontrar un flujo factible x' o una cortadura $Q = [S, N/S]$ tal que $c_u^{+}(Q) < b(S)$

Si sucede lo primero hemos terminado, si sucede lo segundo mejoramos el valor de la función de costo asociada al potencial. hasta encontrar el potencial óptimo.

Veamos ahora el algoritmo.

Algoritmo Diferencial Optimo Fortificado

(1).-Empezar partiendo de un potencial factible . En base a un algoritmo específico que puede ser el algoritmo de distribución factible determinar un flujo factible que cumpla con

$c_u^-(j) \le x(j) \le c_u^+(j)$ y $div\, x = b$ o en su defecto una cortadura $Q = [S, N/S]$ tal que

$c_u^+(Q) < b(S)$

(2).- Si sucede lo primero, tenemos que $\phi(x) - \psi(u) \le \epsilon$, lo cual implica que tanto x como u son soluciones óptimas.

(3).- Si se obtiene una cortadura con las características en 1), $Q = [S, N/S]$ entonces la función $g(t) = -\psi(u + te_{N/S})$ cumple con la propiedad de que el $inf\, g \le g(0) - \delta$

(4).-Escoger cualquier α tal que $g(\alpha) \le g(0) - \delta$ y sea $u' = u + \alpha e_{N/S}$

(5).-Entonces u' es otra solución factible al problema Diferencial óptimo y $\psi(u') \ge \psi(u) + \delta$

(6).- Iterar con esta nueva u'

III.6.1 JUSTIFICACION DEL ALGORITMO

Veamos qué pasa en el caso de que se encuentre un flujo tal que

$c_u^-(j) \le x(j) \le c_u^+(j)$ y $div\, x = b$

debido a que $c_u^-(j) \le x(j) \le c_u^+(j) \iff f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \le \delta$

es claro que

$\phi(x) - \psi(u) = \sum_{j \in A} f_j(x(j)) + \sum_{j \in A} g_j(v(j)) - \sum x(j)v(j) \le \delta A \le \epsilon$ y usando el mismo argumento que en el caso anterior $[\phi(x) - inf] < \epsilon$ y $[sup - \psi(u)] < \epsilon$

Ahora consideremos qué sucede en el segundo caso, es decir cuando se encuentra una cortadura tal que $c_u^+(Q) \le b(S)$ en dicho caso $c_u^+(Q) - b(S) \le 0$ y

$0 \ge \sum c_u^+(j) - \sum c_u^-(j) - b(S)$

$0 \ge \sum_{j \in Q} inf[g_j(v(j) + t_j e_Q) - g_j(v(j) + \delta)/t_j] - b(S)$

Considerar los valores $t_j > 0$ donde se alcanza el ínfimo para cada arco j de los términos mencionados

$s = 1/\sum_{j \in P}(1/t_j) > 0$

$\forall j \in P$ se tiene que $t_j > s$ y consecuentemente

$-b(S) + \frac{g_j(v(j) + t_j e_Q) - g_j(v(j)) + \delta}{t(j)} \ge \frac{[g_j(v(j) + s e_Q(j)) - g_j(v(j))]}{s} + \delta/s - b(S)$

Por lo que

$-b(S) + \sum \frac{g_j(v(j)+t_j e_Q) - g_j(v(j)) + \delta}{t_j} \geq \sum \frac{g_j(v(j)+\alpha e_Q(j)) - g_j(v(j))}{\alpha} + \delta/\alpha - b(S)$

$0 > \frac{g(\alpha)-g(0)+\delta}{\alpha} \geq inf_{t>0} \frac{g(t)-g(0)+\delta}{t}$

De aqui se desprende que existe un valor de α para el cual se cumple que

$g(\alpha) \leq g(0) - \delta$

y de aqui

$\psi(u') \geq \psi(u) + \delta$

Terminación

En cada iteración el valor de la función objetivo asciende al menos una cantidad igual a δ , por lo que el supremo de la función será alcanzado tarde o temprano, si existe una solución óptima finita.

III.7. ALGORITMOS DE DESCENSO DISCRETOS

En el caso de problemas generales, puede ser difícil determinar las expresiones modificadas de las derivadas que hemos encontrado en el caso anterior, debido a esto se plantea una mueva modificación.

Veamos ahora de qué manera se establecen las cotas de factibilidad para la tensión, en el caso que ahora nos ocupa.

Para $t \in C(j)$ y $\delta > 0$ definir las cotas para este problema

$d_x^+(j) = \Delta_+^\delta f_j(t) = \frac{f_j(t+\delta)-f_j(t)}{\delta}$

$d_x^-(j) = \Delta_-^\delta f_j(t) = \frac{f_j(t)-f_j(t-\delta)}{\delta}$

Es claro que

$\Delta_+^\delta f_j(t) \rightarrow f_j^{\prime +}(t)$ cuando $\delta \rightarrow 0$

$\Delta_-^\delta f_j(t) \rightarrow f_j^{\prime -}(t)$ cuando $\delta \rightarrow 0$

y como $\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = F(t)$

Ahora definimos el siguiente indicador que será muy importante en todo el desarrollo subsiguiente.

$$w_j(t,\delta) = \delta max \begin{cases} \Delta_+^\delta f_j(t) - f'_{j+}(t) \\ f'_{j-}(t) - \Delta_-^\delta f_j(t) \end{cases}$$

también consideraremos el indicador

$w(x,\delta) = \sum w_j(x(j),\delta)$ el cual es siempre menor o igual que infinito,veamos ahora el

III.7.1 ALGORITMO DE DISTRIBUCION OPTIMA DISCRETO

Este algoritmo es equivalente al algoritmo de distribución Optima General, la única diferencia son los intervalos de factibilidad para la tensión que se definen en base a un vector de flujo factible, dichos intervalos se construyen utilizando un valor δ determinado, esto significa que son funciones del valor δ y obviamente del flujo $x(j)$.

Veamos pues el

Algoritmo de distribución óptima Discreto

Sea $\delta > 0$

(1)Encontrar una solución factible x al problema de Distribución óptima.

(2) Dada dicha solución, utilizar el algoritmo de Distribución Factible, el cual nos lleva a dos posiblidades:

a)Encontrar un potencial u tal que $v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)] \quad \forall j \in A$

i.e. $v(j) \in [\Delta_-^\delta f_j(x(j)), \Delta_+^\delta f_j(x(j))]$

b) Encontrar un circuito elemental P tal que $d_x^+(P) < 0$, y entonces $\phi(x+\delta e_p) < \phi(x)$

-Si sucede lo primero (a), x es una solución ϵ óptima al problema de Distribución y u es una solución ϵ óptima al problema dual. De hecho, se tiene que que $\phi(x) - \psi(u) \leq \epsilon$ Además x es un flujo δ óptimo ya que $\phi(x + te_p) \geq \phi(x)$ para todo circuito elemental P y toda $t \geq \delta$, hemos terminado.

-Por otro lado, si se da la otra posiblidad, esto es, si un circuito elemental P con $d_x^+(P) < 0$ es obtenido, entonces $\phi(x + \delta e_p) < \phi(x)$

De nuevo aquí se nos presentan dos posiblidades

Si no se encuentra un entero $n > 0$ tal que $\phi(x+(n+1)\delta e_p) \geq \phi(x+n\delta e_p)$ (A) hemos terminado porque P es un circuito no balanceado y el problema de Distribución no tiene solución.

En otro caso, determinar el entero n más pequeño tal que sucede (A). es claro que $f(n\delta) \leq f(\delta)$, ir a 3)

(3).-Sea $x' = x + n\delta e_p$ x' una solución factible con $\phi(x') < \phi(x)$

(4).-Regresar a (1) con esta nueva x

III.7.1.1.- JUSTIFICACION DEL ALGORITMO

Primero veremos el siguiente:

LEMA:

Si $v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)]$ entonces $\phi(x) - \psi(u) < \epsilon = u(x, \delta)$

Partiremos de un resultado auxiliar para poder demostrar el lema:

PROPOSICION

$d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j) \Rightarrow f_j(x(j) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq w_j(x(j), \delta)$

Demostración: Si $f_j'^-(x(j)) \leq v(j) \leq f_j'^+(x(j))$ entonces

$f_j(x(j))+g_j(v(j)) - v(j)x(j) = 0$ de aquí se ve que la desigualdad de la derecha es trivialmente válida.

Supongamos ahora que

$f_j'^+(x(j)) < v(j) < \Delta_+^\delta f_j(x(j))$

Debido a que las funciones son conjugadas se tiene que $f_j(x(j))+g_j(v(j))-x(j)v(j) = -inf_{x'(j)}r(x'(j))$

Donde tenemos la siguiente función $r(x'(j))$ $r(x'(j)) = f_j(x'(j)) - f_j(x(j)) + (x(j) - x'(j)v(j)) = f_j(x'(j)) - f_j(x(j)) + x(j)v(j) - x'(j)v(j)$ $-r(x'^{(j)}) = f_j(x(j)) - x(j)v(j) - f_j(x'(j)) + x'(j)v(j)$

La función $r(x')$ es convexa y $r(x(j)) = 0$

$r(x(j) + \delta) = f_j(x(j) + \delta) - f_j(x(j)) - \delta v(j)$

$= \delta[\Delta_+^\delta f_j(x(j)) - v(j)] \geq 0$

$= r'^+(x(j)) = f_j'^+(x(j)) - v(j) < 0$

Todo esto implica que $inf_{x(j)}r(x'(j))$ se alcanza en algún punto en el interior de $(x(j), x(j) + \delta)$

Debido a que la función es convexa se tiene que :

$r(x'(j)) \geq (x'(j) - x(j))[r'^+(x(j)]$

$r(x'(j) \geq (x'(j) - x(j))[f_j'^+(x(j) - v(j)]$ $\forall x'(j) > x(j)$ y de aqui

$inf r(x'(j))_{x(j)\in R} = inf r(x(j))_{x'(j)\in(x(j),x(j)+\delta)} \geq inf_{x'(j)\in(x(j),x(j)+\delta)}(x' - x(j))[f_j'^+(x(j)) - v(j)] \geq \delta[f_j'^+(x(j)) - v(j)] \geq \delta[f_j'^+(x(j)) - \Delta_+^\delta f_j(x(j))]$

lo cual implica que $f_j(x(j))+g_j(v(j))-x(j)v(j) \leq \delta[\Delta_+^\delta f_j(x(j))-f_j'^+(x(j))] \leq w_j(x(j), \delta) \leq$ □

Un argumento paralelo prueba que $f_j(x(j)) - g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq \delta[f_j'^+(x(j)) - \Delta_-^\delta f_j(x(j))] \leq \epsilon$

Pues bien, hemos visto que si $d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j) \Rightarrow f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - v(j)x(j) \leq w_j(x(j), \delta)$

de esto se desprende que si $v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)]$ entonces

$f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq w_j(x(j), \delta)$ entonces

$\sum f_j(x(j)) + \sum g_j(v(j)) - \sum v(j)x(j) = \phi(x) - \psi(v) \leq w(x, \delta) = \epsilon$

que era el RESULTADO que queríamos probar □

Si lo anterior sucede es claro que x y u son soluciones ϵ óptimas porque $\psi(u) \leq$ [*sup. problema de Dist.*] $\leq$ [*inf. del problema dist.*] $\leq \phi(x)$ ....(i)

Ahora analicemos que sucede en el caso que el algoritmo Diferencial factible encuentra un circuito con la propiedad de que $d_x^+(P) < 0$

Tendríamos que demostrar el siguiente:

RESULTADO

Si $d_x^+(P) < 0$, entonces $\phi(x + \delta e_T) < \phi(x)$

$d_x^+(P) = \sum_{j\in P^+} d^+(j) - \sum_{j\in P^-} d^-(j) =$

$\sum_{j\in P^+} \Delta_+^\delta f_j(x(j)) - \sum_{j\in P^-} \Delta_-^\delta f_j(x(j))$

$\sum_{j\in P^+} \frac{f_j(x+\delta)-f_j(x)}{\delta} - \sum_{j\in P^-} \frac{f_j(x)-f_j(x-\delta)}{\delta}$

$\sum_{j\in A} \frac{f_j(x+\delta e_p)-f_j(x(j))}{\delta} = \frac{\phi(x+\delta e_p)-\phi(x)}{\delta} < 0$ entonces como $\delta > 0$

$\phi(x + \delta e_p) < \phi(x)$ y de aquí si para $n(\delta)$ se alcanza el mínimo de la función $f(t) = \phi(x + te_p$ tenemos que $\phi(x + n\delta e_p) \leq \phi(x + \delta) < \phi(x)$

III.7.1.2.- DEMOSTRACION DE LA FINITUD DEL ALGORITMO

Antes de abordar este problema veremos la propiedad de acotamiento para flujos, ya la enunciamos en el capítulo anterior pero ahora demostraremos un teorema que se desprende de dicha propiedad.

Se tiene la Propiedad de acotamiento para flujos si para toda $\alpha \in R$ el conjunto convexo

$\{x \in R^n \mid div x = b$ y $\phi(x) \leq \alpha\}$ está acotado

TEOREMA Un flujo guarda la propiedad de acotamiento si y sólo si cada sucesión de flujos factibles $x^k{}_{k=1}^{\infty}$ que tiende al ínfimo del problema está acotada.

Demostración: $\Rightarrow$) Sea una sucesión $A = \{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ de flujos factibles que tiende al ínfimo del problema.

Sea un valor $\epsilon' > 0$, es claro que $\forall\epsilon' > 0$ existe $k' \in N$ tal que si $k > k' \Rightarrow$ $|(\phi(x^k) - inf)| < \epsilon'$

De aquí

$|\phi(x^k) - inf)| \leq \epsilon'$

De aquí $|\phi(x^k)| - |inf| \leq |phi(x^k) - inf| \leq \epsilon'$

y

$|\phi(x^k)| \leq |inf| + |\epsilon'| \quad \forall k > k'$ sucesión de flujos factibles

Considérese $A' = \{x^k\}_{k=k'}^{\infty}$, es claro que si $|inf| + \epsilon' = \alpha$ entonces $|\phi(x^k)| \leq |\alpha| \quad \forall k > k'$

Como $A' \subset A^* = \{x \mid \phi(x) \leq \alpha \;\; y \;\; div\, x = b\}$, por hipótesis está acotado, es claro que A' está acotado.

Tómese ahora $A^{**} = \{x^k\}_{k=1}^{\mu}$ es claro que este conjunto está acotado, porque está formado de un número finito de valores de flujo, para cada uno de los cuales existe una $\alpha \in R$ tal que $\phi(x^k) \leq \alpha$;

si se toma el valor de α más grande (α') pues es claro que $\phi(x^k) \leq \alpha'$ para todos los valores de flujo que integran A^{**}, de aquí A^{**} está acotado por hipótesis.

Así $A = A' \bigcup A^{**}$ está acotado.

$\Leftarrow$) Supongamos que no se cumple la propiedad de Acotamiento, esto significa que existe algún valor de α para el cual el conjunto $A = \{x \in R^A \mid div\, x = b \text{ y } \phi(x) \leq \alpha\}$ no está acotado, lo cual implica que existe algún vector x' de flujo que no está acotado, para el que $\phi(x') \leq \alpha$.

Tomemos una sucesión $A = \{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ de flujos factibles que tenga como elemento x' y que converja al ínfimo del problema .Dicha sucesión es claro que no está acotada. $\square$

RESULTADO El Algoritmo de Descenso Discreto termina en un número finito de iteraciones

Demostración: Es claro que al final de la késima iteración el flujo factible obtenido tiene la forma $x^k = x^0 + n_1 \delta e_p + n_2 \delta e_p + n_3 \delta e_p + \ldots\ldots\ldots\ldots.$

Donde x_0 es el flujo inicial. Este flujo x^k difiere en cada arco sólo un múltiplo de δ. Como el conjunto de soluciones factibles X que satisfacen $\phi(x) \leq \phi(x_0)$ es acotado, (porque en otro caso no hay solución óptima) , entonces toda sucesión de flujos factibles que tienda al ínfimo del problema , será una sucesión acotada. Es claro que los flujos $\{xk\}$ están dentro de una sucesión con estas características.Por otra parte , hay sólo un número finito de flujos de la forma mencionada, en cualquier sucesión acotada , tales que $\phi(x^k) < \ldots\ldots < \phi(x^1) < \phi(x^0)$, debo terminar entonces en un número finito de iteraciones.

III.7.2 ALGORITMO DIFERENCIAL OPTIMO DISCRETO

Veremos algunos elementos básicos de este problema antes de pasar al desarrollo del algoritmo. Considérese las siguientes expresiones que constituirán las cotas de factibilidad para la tensión

$$\Delta_+^{\delta} g_j(v(j)) = [\tfrac{g_j(v(j)+\delta) - g_j(v(j))}{\delta}]$$

$$\Delta_-^{\delta} g_j(v(j)) = [\tfrac{g_j(v(j)-\delta) - g_j(v(j))}{\delta}]$$

y la expresiones siguientes que nos permitirán determinar el valor de ϵ que representa el grado de exactitud de nuestra solución

$$(z_j(v(j),\delta) = \delta max \begin{cases} \Delta_+^\delta g_j(v(j)) - g_j'^+(v(j)) \\ g_j'^-(v(j)) - \Delta_-^\delta(g_j v(j)) \end{cases}$$

y $z(v,\delta) = \sum_{j\in A} z_j(v(j),\delta)$

Algoritmo Diferencial Optimo Discreto

(1)Sea $\delta > 0$; partamos de un potencial factible u, utilicemos el algoritmo de Distribución Factible que proporciona dos posibilidades:

a)Un flujo $x(j)$ tal que $x(j) \in [c_u^-(j), c_u^+(j)] = [\Delta_-^\delta g_j(v(j)), \Delta_+^\delta g_j(v(j))]$

Si dicho flujo es obtenido y además $div x = b$ $\forall j \in A$ entonces habremos terminado. Para el valor $\epsilon = z(u,\delta)$, u es una solución ϵ óptima y además $\phi(x) - \psi(u) \leq \epsilon$. Aún podemos decir más, $\psi(u + te_{N/S}) \leq \psi(u)$ $\forall S \in N$ y $t \geq \delta$

b)Si una cortadura $Q = [S, N/S]$ es obtenida, para la cual $c_u^+(Q) < b(S)$ entonces $\psi(u + \delta e_{N/S}) \geq \psi(u)$. Aquí se nos presentan dos posiblidades.

(2)Si no hay un entero $n > 0$ tal que $\psi(u+(n+1)\delta e_{N/S}) > \psi(u)$ entonces terminamos. En ese caso Q es una cortadura no balanceada y el problema Diferencial no tiene soluciones óptimas

(3)En otro caso, determinar el entero n más chico tal que se cumple lo mencionado en dos. Sea $u' = u + n\delta e_{N/S}$. Entonces u' es una solución factible con $\psi(u') > \psi(u)$, con esta nueva u', ir a (1).

III.7.2.1 JUSTIFICACION DEL ALGORITMO DIFERENCIAL OPTIMO DISCRETO

Recordemos que al aplicar el algoritmo de Distribución Factible nos enfrentamos con dos posiblidades.

a)Veamos primero qué pasa si obtenemos una cortadura Q tal que $c_u^+(Q) < b(S)$, en ese caso tenemos que $c_u^+(Q) - b(S) < 0$, utilizando este hecho tenemos lo siguiente

$0 > c_u^+(Q) - b(S) = \sum_{j\in Q^+} c^+(j) - \sum_{j\in Q^-} c^-(j) - b(S) = \sum_{j\in Q^+} \Delta_+^\delta g_j(v(j)) - \sum_{j\in Q^-} \Delta_-^\delta g_j(v(j)) - b(S)$

$= \sum_{j\in Q^+} \frac{g_j(v(j)+\delta) - g_j(v(j))}{\delta} - \sum_{j\in Q^-} \frac{g_j(v(j)) - g_j(v(j)-\delta)}{\delta} - b(S)$

$= \sum_{j\in Q} g_j(v(j) + \delta e_Q) - \sum_{j\in Q} g_j(v(j)) - \delta b(S)$

$= -\delta b(S) + \sum_{j\in Q} g_j(v(j) + \delta e_Q) - \sum_{j\in Q} g_j(v(j))$

De aquí se desprende que $\psi(u) \leq \psi(u')$

-Es fácil ver cuándo existe un óptimo finito que maximiza el valor de la función $\psi(u)$. Basta con considerar si existe algún valor n tal que

$\psi(u + (n+1)\delta e_{N/S}) \leq \psi(u + (n)\delta e_{N/S})$

Considere el valor más pequeño de n para el cual se cumpla la expresión anterior, entonces $\psi(u + n\delta e_{N/S}) \geq \psi(u + n'\delta e_{N/S})$ para todo valor de n', debido a que la función ψ es cóncava y sólo tiene un máximo.

Esto significa que $u' = u + n\delta e_{N/S}$ maximiza el valor de $\psi(u)$. Empezamos de nuevo el proceso con este potencial que sigue siendo factible.

Cuando no encontramos una n tal que

$\psi(u + (n+1)\delta e_{N/S}) \leq \psi(u + n\delta e_{N/S})$

entonces $\psi(u + (n+1)\delta e_{N/S}) > \psi(u + (n)\delta e_{N/S})$ entonces $-\psi(u + (n+1)\delta e_{N/S}) < -\psi(u + n\delta e_{N/S})$

$0 > \frac{g((n+1)\delta) - g(n\delta)}{\delta} \geq g'^{+}(n\delta)$

Esto último es válido para cualquier valor entero de n y de δ, lo cual implica que Q es una cortadura no balanceada.

b)Veamos ahora qué sucede cuando se obtiene un flujo x factible.

Lo primero que veremos es un resultado esencial para todo el desarrollo posterior:

RESULTADO

$c^{-}(j) \leq x(j) \leq c^{+}(j) \iff f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq z(v(j), \delta)$

Demostración:

Veamos el primer caso:

$g_j^{-}(v(j)) \leq x(j) \leq g_j^{+}(v(j)) \iff f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) = 0 \leq z(v(j), \delta)$, la proposición se cumple trivialmente.

Veamos ahora que sucede en el caso en que :

$g_j'^{+} \leq x(j) \leq \Delta_{+}^{\delta} g_j(v(j))$

Supóngase que $g_j'^{+}(v(j)) > -\infty$ Como $f_j(x(j))$ y $g_j(v(j))$ son funciones conjugadas entonces es claro que: $f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) = -inf_{v'(j)} r(v'(j))$ donde tenemos que:

$r(v'(j)) = g_j(v'(j)) - g_j(v(j)) + (v(j) - v'(j))x(j)$ y se tiene que $r(v(j)) = 0$

Utilizando lo anterior tenemos que:

$r(v(j) + \delta) = \delta[\Delta_{+}^{\delta} g_j(v(j)) - x(j)] \geq 0$ y por otra parte

$r'_{+}(v(j)) = g_j' v(j) - x(j) < 0$

Todo esto a su vez implica que el $inf_{v'(j)} r(v'(j))$ es alcanzado en algún lugar en el interior de $(v'(j), v'(j) + \delta)$'

Como $\frac{g_j(v'(j)) - g_j(v(j))}{v'(j) - v(j)} \geq g_j'^{+}(v(j)) \quad \forall v'(j) > v(j)$

Tenemos que $r(v'(j)) \geq (v'(j) - v(j))[g_j'^{+}(v(j)) - x(j)] \quad \forall v'(j) > v(j)$ y consecuentemente:

$inf_{v'(j) \in R} r(v'(j) = inf_{v'(j) \in (v(j), v(j)+\delta)} r(v'(j)) \geq inf(v'(j) - v(j))[g_j'^{+} v(j) - x(j)] \geq \delta[g_j'^{+} v(j) - x(j)] \geq \delta[g_j{'}{+} v(j) - \Delta_{+}^{\delta} g_j(v(j))]$

De todo lo anterior se desprende que: $-inf_{v'(j) \in R} r(v'(j)) = f_j(x(j) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq \delta[\Delta_{+}^{\delta} f_j(x(j)) - f_j'^{+}(x(j)) \leq z(v(j), \delta)$

Un argumento paralelo demuestra que :

$\Delta_{-}^{\delta} g_j(v(j)) \leq v(j) \leq g_j'^{-}(v(j)) \Rightarrow f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq \delta[g_j'^{-} v(j) - \Delta_{-}^{\delta} g_j(v(j))] \leq z(v(j), \delta)$ □

Bien, en el caso de que se encuentre un potencial factible, hemos probado que se presenta que $f_j(x(j)) + g_j(v(j)) - x(j)v(j) \leq z_j(x(j), \delta)$, de aquí se desprende directamente que $\sum f_j(x(j)) + \sum g_j(v(j)) - \sum v(j)x(j) \leq z(x, \delta)$ y esto implica que $\phi(x) - \psi(u) \leq \epsilon$ lo cual significa que ambas soluciones son ϵ óptimas □

III.7.2.2 DISCUSION SOBRE LA TERMINACION DEL ALGORITMO

Para verificar que el algoritmo finaliza en un número finito de iteraciones basémonos en que el Diferencial cumple con la propiedad de Acotamiento, porque si no fuera así no habría solución óptima. El potencial al final de la iteración késima es el siguiente: $u^k = u_0 + n_1 \delta e_{N/S} + n_2 \delta e_{N/S} + n_3 \delta e_{N/S} + \ldots + n_k \delta e_{N/S}$ donde u_0 es el potencial inicial. El flujo en cada arco difiere de u_0 un múltiplo de δ y $\psi(u_0) \leq \psi(u_1) \leq \psi(u_2) \leq \psi(u_3) \leq \psi(u_n)$.. Como se tiene la propiedad de acotamiento para potenciales, el conjunto de potenciales que se obtienen de la forma mencionada forma parte de una sucesión acotada que tiende al supremo del problema y debido a las características de este conjunto de potenciales podemos asegurar que es un conjunto finito.Esto asegura que en algún momento alcanzaremos la solución casi óptima que buscamos.

III.7.2.3 CALCULO DE SOLUCIONES ϵ - óptimas

Así como en los algoritmos fortificados existe una manera de obtener una solución ϵ -óptima, con una ϵ mayor que cero dada de antemano, en los algoritmos discretos también debería lograrse esto. Consideraremos el problema de distribución, en el caso del problema diferencial las consideraciones son análogas. Para lograrlo partiremos de dos postulados esenciales:

a)Para cada arco j tenemos que existe la segunda derivada para casi todo valor de flujo $x(j)$ tal que $x(j) \in [c^-(j), c^+(j)]$, excepto en un número finito de puntos que son aquellos en donde cambia la derivada.

b)Los puntos en donde cambia la derivada y los valores iniciales de flujo son todos múltiplos de una cierta cantidad $\delta_0 > 0$.

Lo que buscaremos entonces es determinar el valor de δ para que se cumpla:

$w(x, \delta) \leq \sigma\delta^2 \leq \epsilon$ donde $\sigma = \sum_{j \in A} \sigma_j \geq 0$

suponemos que $\delta = \delta_0/m$ entonces lo que buscaríamos sería un valor de m tal que

$\sigma[\delta_0/m]^2 \leq \epsilon$

$\sigma[\delta_0^2/m^2] \leq \epsilon$

$\sigma\delta_0^2/\epsilon \leq m^2$ por lo que $(\sigma/\epsilon)^{1/2}\delta_0 \leq m$.

También necesitamos que $w(x, \delta) \leq \sigma\delta^2$ pero esto se desprende directamente del siguiente razonamiento, usando el Teorema del Valor Medio. Para $(x, x + \delta) \in C(j)$ y $x(j) < c^+(j)$ se tiene que

$\Delta_+^\delta f_j(x(j)) - f_j'^+(x(j)) = f_j'^+(x'(j)) - f_j'^+(x(j))$

$\leq \delta(f_j''(x^*(j)) < \delta\sigma_j$ considerando que $x(j) \leq x' \leq x^*(j) \leq x(j) + \delta$

Por otra parte de manera ánaloga se ve que si $(x - \delta, x) \in C(j))$ y $x(j) \geq c^-(j)$ entonces

$f_j'^-(x(j)) - \Delta_-^\delta f_j(\epsilon) \leq \sigma_j\delta$

De las dos expresiones anteriores se ve que:

$w_j(x(j), \delta) \leq \sigma(\delta)^2 \leq \epsilon$

Veamos ahora el

ALGORITMO ITERADO

Existe otra forma de obtener una solución $\epsilon - \acute{o}ptima$ dada una $\epsilon > 0$.

Estos son los paso del Algoritmo Iterado que logra esto.

(1).-Aplicar el Algoritmo de Distribución óptima discreto con una solución x_0 arbitraria inicial y factible, y con un incremento inicial $\delta_0 > 0$.

(2).- Obtener x_1 y u_1 que satisfagan $\phi(x_1) - \psi(u_1) \leq w(x_1, \delta_0)$ con $\phi(x_1) \leq \phi(x_2)$

(3).- Si sucede que $w(x_1, \delta_0) \leq \epsilon$ entonces x_1 y u_1 son soluciones $\epsilon - \acute{o}ptimas$ y el objetivo que buscábamos se ha logrado.Terminamos.

Si no es así tómese $\delta_1 = \delta_0/p$ y aplíquese de nuevo el algoritmo con la solución inicial factible x_1 y con δ_1 (p es un entero arbitrario)

(4).-Con el nuevo flujo x y el potencial u que se obtienen después de esta iteración ir a 3).

(En el caso del Problema Diferencial,el algoritmo es análogo sólo que se utiliza el Algoritmo Diferencial óptimo Discreto en 1)

III.8. LINEARIZACION POR PEDAZOS

Todos los algoritmos que hemos visto hasta ahora trabajan especialmente bien para el caso de problemas en que las funciones de costo son localmente lineales, veamos qué pasa cuando no sucede así. Abordemos ahora el problema de Distribución, las consideraciones son análogas para el problema Diferencial. Esto nos lleva a considerar que en el caso general de una función $f_j(x(j))$ podríamos aproximarnos a dicha función con una función localmente lineal y resolver el correspondiente problema aproximado.

Después podríamos considerar aproximaciones más y más finas, usando como flujo inicial en cada iteración, el flujo obtenido en la iteración anterior. Para efectuar dicha aproximación, dividimos el dominio de la función que es $[c^-(j), c^+(j)]$ efectuando una partición del mismo $[x_0 = c^-(j), x_0 + \delta_k, x_1 + 2\delta_k, \ldots\ldots, c^+(j)]$ si consideramos un flujo inicial x_0 tendríamos como puntos de la partición de nuestro intervalo los siguientes $x_k^* = x_0 + n\delta_k$. Constituiríamos así una aproximación lineal formada en base a segmentos lineales delimitados por puntos contiguos de la partición.

Llamemos $f_j^k(x(j))$ a nuestra aproximación

Entonces $f_j^k(x(j)) = f_j(x(j))$ en los puntos de la partición.

$f'^k_{j+}(x(j)) = \Delta_+^{\delta_k} f_j(x(j))$

y

$f'^k_{j-}(x(j)) = \Delta_-^{\delta_k} f_j(x(j))$

De aquí tenemos que:

$f'^k_+(t) = \sum_{j \in P^+} f'^k_{j+}(x(j) + t\delta_k) - \sum_{j \in P^-} f'^k_{j-}(x(j) - t\delta_k) = \sum_{j \in P^+} \Delta_+^{\delta_k} f_j(x(j) + t\delta_k) - \sum_{j \in P^-} \Delta_-^{\delta_k} f_j(x(j) - t\delta_k) = \Delta_+^{\delta_k \prime} f(t)$

La idea esencial como ya lo hemos mencionado es trabajar con aproximaciones cada vez más finas, que pueden realizarse considerando la siguiente norma variable de la partición: $\delta_k = \delta_0 / p^k$ con $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

TEOREMA

Considérese la Forma Iterada del Algoritmo de Distribución óptima discreto. Utilizando como indicador δ_k , considere que se cumple la propiedad de Acotamiento tanto para el Problema Diferencial como para el Problema de Distribución, considere también que para algún entero $m > 0$ los valores $c_0(j), c^-(j), c^+(j)$ para cada arco difieren sólo en múltiplos de $\delta_0 p^m$ (p entero arbitrario), y se generan sucesiones infinitas $\{x_k\}$ y $\{u_k\}$ de soluciones óptimas.

Entonces tendríamos que, hay una $\beta \geq 0$ tal que $0 \leq w(x_k, \delta_{k-1}) \leq \beta\delta_0/p^{k-1}$ para toda k suficientemente grande.

Este teorema tiene implicaciones importantes, nos garantiza que si k tiende a ∞, entonces $w(x_k, \delta_{k-1}) \to 0$, de aquí es claro que $\{x_k\}$ es una sucesión decreciente que converje a la solución óptima para el problema de Distribución y $\{u_k\}$ es una sucesión creciente que converje a la solución óptima del problema Diferencial.

Demostración:

Consideremos los puntos de la partición $x_k = x_0 + n\delta_k$, es claro que para estos puntos $\phi(x_k) = \phi^k(x_k)$

la primera parte de la prueba consiste en verificar que $min\phi^k \to min\phi$ si $k \to \infty$

La definición de f_j^k implica que $f_j^k(x(j)) \geq f_j^{k+1}(x(j)) \geq f_j^{k+2}(x(j)) \ldots\ldots \geq f_j(x(j))\ \forall x(j)$

La igualdad se da si nos referimos a un punto de la partición o también si $x(j) < c^-(j)$ o $x(j) > c^+(j)$. Verifiquemos ahora que $f_j^k(x(j)) \to f_j(x(j))$ si $k \to \infty$ y si $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$. Para valores x_0 y x_1 que satisfacen $c^-(j) < x_0 < x < x_1 < c^+(j)$, los valores $f_j'^+(x_0)$ y $f_j'^-(x_1)$ son necesariamente finitos para k lo suficientemente grande. Por otra parte habrá un punto $\bar{x}$ de la partición para el cual se cumpla que: $x_0 < \bar{x} < x < \bar{x}+\delta_k \leq x_1$

Como $\bar{x}$ es un punto de la partición tenemos que $f_j^k(\bar{x}) = f_j(\bar{x})$

$f_j^k(x) - f_j(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{x}[f_{j+}'^k(t) - f_j'^+(t)]dt$

$\leq \int_{\bar{x}}^{x}[f_j'^-(x_1) - f_j'^+(x_0)]dt \leq \delta[f_j'^-(x_1) - f_j'^+(x_0)]$

De aquí se deriva que:

$f_j^k(x(j)) \to f_j(x(j))$ si $k \to \infty$ y si $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$

Falta probar que de aquí se desprende que:

$min\phi^k \to min\phi$ cuando k tiende a ∞

Consideremos una $\mu > 0$ y alguna solución óptima $\bar{x}$ al Problema de Distribución óptima. (Existe al menos una solución óptima debido a que el flujo cumple con la propiedad de acotamiento). Sea la función $f(t) = \phi(\bar{x} + t(x_0 - \bar{x}))$, es claro que

$f(t) \to f(0)$ cuando $t \to 0$

Existe un valor $t \in (0,1)$ tal que $f(t) < f(0) + \mu$, esto significa que el flujo

$x^* = \bar{x} + t(x_0 - \bar{x}) = (1-t)\bar{x} + tx_0$

cumple con que:

$\phi(x^*) = \phi(\bar{x}) + \mu = [min\phi] + \mu$

y se tiene que para cada arco j

o $x^*(j) = \bar{x}(j) = x_0(j)$ o es un flujo que forma parte de la partición o es un flujo que no forma parte de la partición.

Para arcos de la primera categoria uno tiene que $x^*(j)$ es un punto de la partición de $[c^-(j), c^+(j)]$ por lo que $f_j(x^*(j)) = f_j^k(x^*(j))$. Para arcos de la segunda categoría uno tiene que $f_j^k(x^*(j)) \to f_j(x^*(j))$ cuando k tiende a ∞ . Por todo esto es claro que $\phi^k(x^*) \to \phi(x^*)$ cuando k tiende a infinito.

Se sigue de las aseveraciones anteriores que: $min\{\phi\} + u \geq \phi^k(x^*) \geq min\phi^k \geq min\phi$

Bien, ya hemos comprobado que $min\phi^k \to min\phi$ cuando k tiende a infinito. Veamos ahora la parte final de la demostración.

Consideremos valores finitos de flujo. Es claro que existen valores finitos de flujo tales que $c^-(j) \leq x_0(j) \leq x^k(j) \leq x_1(j) \leq c^+(j) \quad \forall k$ lo suficientemente grande.

x_0 y x_1 pueden ser escogidos como puntos de la partición cuando k es lo suficientemente grande. Se puede encontrar una partición tal que para los arcos j que cumplan con $x_0(j) > c^-(j)$ se tenga que:

$x_k(j) - \delta_{k-1} \geq x_0(j) \quad \forall k$ suficientemente grande.

mientras que para los arcos que cumplan con

$x_1(j) < c^+(j)$ se tiene que

$x_k(j) + \delta_{k-1} \leq x_1(j) \quad \forall k$ suf. grande.

En base a esta clasificación podemos inferir los cuatro casos siguientes:

1.- $x_0(j) \leq x_k(j) - \delta_{k-1}$ y $x_k(j) + \delta_{k-1} \leq x_1(j)$

2.- $c^-(j) = x_0(j) = x^k(j)$ y $x_k(j) + \delta_{k-1} \leq \epsilon_1(j)$

3.- $x_0(j) \leq x_k(j) - \delta_{k-1}$ y $x_k(j) = \epsilon_1(j) = c^+(j)$

4.- $c^-(j) = x_0(j) = x_1(j) = x_k(j) = c^+(j)$

Considerando que:

$$w_j(x_k(j), \delta_{k-1}) = \delta_{k-1} max \begin{cases} \Delta_+^{\delta_{k-1}} f_j(x_k(j)) - f_j'^+(x(j)) \\ , f_j'^-(x(j)) - \Delta_-^{\delta_{k-1}} f_j(x(j)) \end{cases}$$

como $\Delta_+^{\delta_{k-1}} f_j(x_k(j)) \leq f_j'^-(x_1(j))$ y

$f_j'^+(x_0(j)) \leq \Delta_-^{\delta_{k-1}} f_j(x_k(j))$

Tenemos los cuatro resultados siguientes:

$$w_j(x_k(j), \delta_{k-1}) \leq \delta_{k-1} max \begin{cases} f_j'^-(x_1(j)) - f_j'^+(x_k(j)) \\ , f_j'(x_k(j)) - f_j'^+(x_0(j)) \end{cases}$$

En el caso 1) tenemos que:

$$w_j(x^k(j), \delta_{k-1}) \leq \delta_{k-1} max \begin{cases} f_j'^-(x_1(j)) - f_j'^+(x_k(j)) \\ , f_j'(x_k(j) - f_j'^+(x_0(j)) \end{cases}$$

En el caso 2)

$$\begin{aligned} w_j(x_k(j), \delta_{k-1}) &\leq \delta_{k-1} max\{f_j'^-(x_1(j)) - f_j'^+(x_k(j)), 0\} \\ &\leq \delta_{k-1} max\{f_j'^-(x_1(j)) - f_j'^+(x_k(j)), 0\} \\ &\leq \delta_{k-1}[f_j'(x_1(j)) - f_j'^+(x_0(j))] \end{aligned}$$

En el caso 3)

$$w_j(x_k(j), \delta_{k-1}) \leq \delta_{k-1} max\{0, f_j'^-(x_k(j)) - f_j'^+(x_0(j))\} \leq \delta_{k-1}[f_j'^-(x_1(j)) - f_j'^+(x_0(j))]$$

En el caso 4)

$$w_j(x_k(j), \delta_{k-1}) = max\{0, 0\} = 0$$

Se sigue que para $A_0 = \{j \mid c^-(j) \neq c^+(j)\}$ y $\beta = \sum_{j \in A_0}[f_j'^-(x_1(j)) - f_j'^+(x_0(j))]$
$w(x_k, \delta_{k-1}) \leq \beta\delta_0/p^{k-1}$
Donde $\delta_0/p^{k-1} = \delta^{k-1}$ □

Con este resultado damos término a la parte esencial de este trabajo. En las conclusiones del mismo podrá el lector encontrar un análisis que pretende establecer las recines entre los distintos algoritmos, sus ventajas y desventajas.

CAPITULO CUARTO

IV. INTERPRETACION ECONOMICA

En este capítulo mencionaremos algunas aplicaciones prácticas en las que se pueden utilizar los modelos del problema Diferencial y del problema de Distribución, no entraremos en detalle, sólo los mencionaremos.

Ejemplo 1

Un productor desea mandar un cargamento de naranjas a las distinitas ciudades del país de tal forma que se *minimice* su costo de transportación e incluso que pueda obtener una ganancia al transportar dicha mercancía por las redes de carreteras debido al aumento del precio del kilo de naranjas de una ciudad a otra.

Consideremos el problema de Distribución que ya hemos visto

Min $\phi(x) = \sum f_j(x(j))$

s.c.

$x(j) \in C(j)$

$div\, x = b$

En dicho problema interpretamos cada uno de los elementos como sigue

-$x(j)$ representa el flujo mandado por el arco j de cierto producto, en este caso vamos a interpretarla como el número de kilos de naranja que circulan por la carretera j.

-Para cada arco , $f_j(x(j))$ representa el costo de mandar $x(j)$ kilos de naranjas por la carretera j .

-$\phi(x)$ representa el costo total considerando todos los arcos de la red.(todas las carreteras de la red)

-$C(j)$ representa el conjunto de valores permitidos de flujo.Esto significa que en cada carretera deben estar circulando por lo menos una cantidad determinada de kilos de naranja, y dicha cantidad no debe exceder tampoco de un valor ya prefijado en cada una de las carreteras.

-$div\, x$ representa la cantidad de producto en cada uno de los nodos,esto significa en nuestro ejemplo particular el número de naranjas que se tienen en cada ciudad.

-b representa la cantidad de producto requerida o disponible en cada uno de los nodos.Esto significa cuantos kilos de naranja requiere una determinada ciudad para satisfacer sus necesidades o de cuantos kilos de naranja dispone para satisfacer las necesidades de otras ciudades.

Por otro lado se incorporan dos elementos adicionales al problema que deberán ser tomados en consideración

$u(i)$ representa el costo del kilo de naranjas en cada una de las ciudades.

$v(j)$ representa el aumento del precio del kilo de naranjas al ir de una ciudad a otra

Estos dos elementos deberán ser tomados en cuenta para encontrar nuestro flujo óptimo por lo que veremos a continuación.

Hemos visto ya que si se encuentra un flujo factible para el problema de Distribución y se encuentra a través del Algoritmo Diferencial Factible un potencial u tal que $v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)]$ entonces tanto x como u son soluciones óptimas,la primera para el problema de Distribución y la segunda para el problema Diferencial.

$[d_x^-(j), d_x^+(j)]$ es un intervalo que depende como ya se vio en el capítulo anterior de la derivada de la función de costo $f_j(x(j))$ para cada arco j , de hecho resulta que $d_x^-(j)$ es la derivada por la izquierda de dicha función de costo y $d_x^+(j)$ es la derivada por la derecha de dicha función de costo.

En el caso de que la función de costo sea lineal su forma es la siguiente:

$\sum d(j)x(j)$ donde

$d(j)$ representa el costo de transportar un kilo de naranjas a través del arco j.

Es claro que en el caso lineal el intervalo de factibilidad para la tensión $[d_x^-(j), d_x^+(j)]$ depende directamente de $d(j)$, esta dependencia también se da en el caso de funciones localmente lineales, cuadráticas o localmente cuadráticas.

Analicemos ahora el caso en que la función de costo es lineal:

La relación entre $v(j)$ y $d(j)$ es clara y nos permite determinar los intervalos de factibilidad para la tensión.

$$[d_x^-(j), d_x^+(j)] = \begin{cases} (d(j), \infty) & \text{si } c^-(j) < x(j) = c^+(j) \\ (-\infty, d(j)) & c^-(j) = x(j) < c^+(j) \\ (d(j), d(j)) & c^-(j) < x(j) < c^+(j) \\ (-\infty, \infty) & c^-(j) = x(j) = c^+(j) \end{cases}$$

Coloquémonos del lado del productor para interpretar el significado de este intervalo.

En la primera posiblidad tenemos que el productor está mandando la cantidad más grande posible de flujo. En ese caso es lógico pensar que esto se debe a que es mayor el aumento del precio del kilo de naranjas al ir de una ciudad a otra que lo que cuesta transportar ese kilo de naranjas, por lo que el productor obtiene una ganancia al mandar cada kilo de naranjas.

En la segunda posiblidad tenemos que el productor está mandando la menor cantidad posible de flujo. En este caso es también lógico pensar que esto se debe a que el aumento del costo del kilo de naranjas al ir de una ciudad a otra es menor que lo que cuesta transportarlo, por lo que el productor tiene una pérdida evidente por cada kilo de naranjas que manda.

En la tercera posibilidad la cantidad de flujo mandada es un valor intermedio entre las cotas inferior y superior. Esto significa que el aumento del costo del kilo de naranjas es igual a lo que cuesta transportar dicho kilo por la carretera que une ambas ciudades.

Ejemplo 2

Consideremos ahora el problema Diferencial colocándonos del lado del consumidor y considerando como variable a $v(j)$ (aumento del precio del producto en cada arco)

Dicho problema se enuncia como sigue

$Min - \psi(u) = \sum b(i)u(i) + \sum g_j(v(j)) = max\psi(u) = -\sum b(i)u(i) - \sum g_j(v(j))$

s.c.

$v(j) \in D(j)$

En este problema tenemos el siguiente elemento nuevo:

$D(j)$: el conjunto de valores permitidos del aumento del precio del producto en cada uno de los nodos.

$sup\{D(j)\} = d^+(j)$

$inf\{D(j)\} = d^-(j)$

Aquí lo que se busca es *minimizar* $-\psi(u)$, maximizar $\psi(u)$,

Interpretemos a continuación la función objetivo que hemos mencionado

$b(i)u(i)$ representa el costo total considerando todas las naranjas que se encuentran en cada ciudad "i"..

$g_j(v(j))$ representa el costo total por concepto del aumento del precio del producto en el arco j.

En el caso en que la función de costo sea lineal tiene la siguiente estructura: $\sum c(j)v(j)$

Donde $c(j)$ es el numero de kilos de naranja esperado por el consumidor en el arco j.

En el caso de que la función de costo no sea lineal de todas manera depende de este valor $c(j)$.

Hemos visto ya que si se encuentra un potencial factible para el problema Diferencial y se encuentra a través del algoritmo de Distribución Factible un flujo x' tal que

$x(j) \in [c_u^-(j), c_u^+(j)]$ *entonces* u es un diferencial óptimo.

Este intervalo está directamente relacionado con la derivada por la izquierda y por la derecha de la función de costo $g_j(v(j))$ que a su vez depende de $c(j)$

La relación entre $x(j)$ y $c(j)$ sobre todo es muy clara en el caso en que la función de costos es lineal.

$$[c_u^-(j), c_u^+(j)] = \begin{cases} (c(j), \infty) & d^-(j) < v(j) = d^+(j) \\ (-\infty, c(j)) & d^-(j) = v(j) < d^+(j) \\ (-\infty, \infty) & d^-(j) = v(j) = d^+(j) \\ (c(j), c(j)) & d^-(j) < v(j) < d^+(j) \end{cases}$$

Analicemos este intervalo; en el primer caso el productor manda por cada arco un flujo mayor del esperado por el consumidor, esto se debe a que el aumento del precio del kilo de naranjas al ir de una ciudad a otra es igual al máximo valor permitido, por lo que al productor le conviene mandar más naranjas que las que el consumidor espera.

En el segundo caso el productor manda por cada arco un flujo menor del esperado, esto se debe a que el consumidor le permite el menor aumento posible en el precio del kilo de naranjas, lo que le resulta claramente desfavorable.

En el caso de una función de costos localmente lineal el intervalo de factibilidad es idéntico sólo que el valor de $c(j)$ no es fijo, depende del valor de flujo que consideremos.

$$[c_u^-(j), c_u^+(j)] = \begin{cases} (c(j), c_1(j)) & d^-(j) < v(j) = d_1(j) \\ (c_1(j), c_2(j)) & d_1(j) < v(j) = d_2(j) \\ (c_2(j), c_3(j)) & d_2(j) < v(j) = d_3(j) \\ \vdots & \end{cases}$$

Así con este par de ejemplos sencillos hemos querido mostrar la aplicación de la teoría de los problemas de Distribución y Diferencial a problemas prácticos.

CONCLUSIONES

En este trabajo se han abordado dos problemas básicos de la teoría de Redes que resultan de la incorporación del elemento llamado potencial: el problema Diferencial y el problema de Distribución.

Para cada uno de ellos se han estudiado distintos casos considerando las características de la función de costo: esta puede ser lineal, localmente lineal, cuadrática o localmente cuadrática.

Se ha visto a fondo cuales son las condiciones que necesitan cumplir las funciones de costo de ambos problemas para que podamos afirmar que uno es el Dual del otro, hemos visto también que si tenemos estas condiciones y encontramos la solución óptima para uno de los problemas , entonces habremos encontrado la solución óptima para el otro.

También se han estudiado varios algoritmos que resuelven estos problemas y hemos mencionado las limitaciones que ofrece cada uno de ellos.

Sin embargo quisiéramos recapitular haciendo aquí un pequeño estudio comparativo entre los distintos algoritmos que se tienen.

Debido a la estructura que presentan los algoritmos podemos decir que estos se dividen en cuatro grupos.

a)El algoritmo de Distribución Optima, junto con todas las derivaciones que del mismo se desprenden, que son el Algoritmo de Distribución Optima fortificado y el Algoritmo de Distribución Optima Discreto.

b)El algoritmo Diferencial Optimo, junto con todas las derivaciones que de él se desprenden, que son el Algoritmo Diferencial Optimo Fortificado y el Algoritmo Diferencial Optimo Discreto.

c)El algoritmo Thrifty.

d)El algoritmo de las Desviaciones.

Los dos primeros algoritmos trabajan con alguno de los problemas fijando el flujo o la tensión según el caso, los dos últimos trabajan con la tensión y el flujo al mismo tiempo, por esto los dos primeros son Primal y Dual respectivamente y los dos últimos son Primales-Duales.

En ninguún caso podemos garantizar la terminación en un número finito de iteraciones sin condiciones adicionales, que son las mismas para a), b) y c).

Debido a esto en el caso del Algoritmo de Distribución óptima y del Algoritmo Diferencial óptimo se hacen una serie de modificaciones que nos permiten garantizar que terminamos el proceso en un número finito de iteraciones sin que se requiera ninguna condición adicional, obteniendo según los cambios realizados los algoritmos Fortificados o los algoritmos Discretos.

Sin embargo tanto en el caso de los algoritmo Discretos como en el de los algoritmos Fortificados de ambos problemas no llegamos a una solución óptima sino a una solución que se acerca a la solución óptima de tal modo que la diferencia entre las dos no es mayor que una cantidad ϵ.

Por otra parte el número de cálculos que se tienen que hacer en los algoritmos Fortificados es mucho mayor que el de los algoritmos Discretos debido a la estructura de los intervalos de factibilidad que se utilizan. Sin embargo, en el caso de los algoritmos Fortificados se fija de antemano el valor de la ϵ, mientras que en el caso de los algoritmos Discretos no puedo determinar de antemano este valor.

En el caso del algoritmo de las Desviaciones hemos visto también que no se puede asegurar su terminación en un número finito de iteraciones para el caso general sin embargo es posible bajo algunas condiciones que se mencionan en (III.4.4).

Es claro por último que cada uno de los algoritmos reúne importantes ventajas y desventajas, por lo cual dependerá de las necesidades de aquel que los aplique, la elección de alguno de ellos; es obvio que si se tienen funciones de costo localmente lineales con un número finito de puntos en los que las funciones no son diferenciables resultaría absurdo utilizar los algoritmos Discretos o los algoritmos Fortificados.

Finalmente, se ha dejado el tema de las aplicaciones prácticas, abierto para una investigación posterior mencionando superficialmente algunas de las aplicaciones prácticas que se desprenden de este desarrollo teórico, esperamos que esta posiblidad sea explotada por futuros estudios y que este trabajo pueda servir como sustento teórico de los mismos.

APENDICE A

I. Algoritmo de Distribución Factible

El algoritmo de Distribución Factible busca resolver el Problema de Distribución Factible que consiste en encontrar un flujo x factible dados determinados intervalos de factibilidad y dados también valores de $b(i)$ para cada nodo i

A continuación presentamos los pasos de dicho algoritmo.

(1)Se asume que $b(N) = 0$. Se da un flujo que sea factible con respecto a las capacidades de los arcos.

(2)Se definen los siguientes conjuntos de nodos

$N^+ = \{i \mid b(i) > y(i)\}$

y

$N^- = \{i \mid b(i) < y(i)\}$

Si N^+ = conjunto vacío = N^- entonces x es una solución al problema de Distribución Factible, y el algoritmo termina.

(3) Considerar el siguiente pintado de la red

verde si $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$

blanco si $c^-(j) = x(j) < c^+(j)$

negro si $c^-(j) < x(j) = c^+(j)$

rojo si $c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

(4)Aplicar el Algoritmo de la red pintada (capítulo 2), el cual nos da sólo dos posibilidades

(5.a) Si se obtiene una cortadura Q solución al problema de la Cortadura Pintada, entonces $b(S) > c^+(Q)$ y se sigue que el problema de Distribuciòn Factible no tiene solución, ya que aquí se termina el algoritmo.

(Esto prueba la suficiencia del Teorema de Distribución Factible del capítulo segundo)

(5.b) Si se obtiene un camino P solución al problema del camino pintado (ver capítulo 2) entonces la cantidad

$$\alpha = min \begin{cases} c^+(j) - x(j) & \text{para } j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) & \text{para } j \in P^- \\ b(i) - y(i) & \text{para el nodo inicial de P en } N^+ \\ y(i) - b(i) & \text{para el nodo terminal de P en } N^- \end{cases}$$

es positiva y finita.

(6)Fórmese el flujo $x' = x + \alpha e_P$

ir a 2)

El proceso termina hasta que $N^+ = N^-$ = conjunto vacio .

JUSTIFICACION

Si al aplicar el algoritmo de la red pintada se obtiene una cortadura $Q = [S, N/S]$ que es solución al problema de la cortadura pintada, entonces

$$c^{+}(Q) = \sum_{j\in Q^{+}} x(j) - \sum_{j\in Q^{-}} x(j) = \sum_{j\in Q^{+}} c^{+}(j) - \sum_{j\in Q^{-}} c^{-}(j)$$

porque

$$x(j) = c^{+}(j) \quad \forall j \in Q^{+}$$

$$x(j) = c^{-}(j) \quad \forall j \in Q^{-}$$

de aquí

$$c^{+}(Q) = \sum_{j\in Q^{+}} x(j) - \sum_{j\in Q^{-}} x(j) = [\text{divergencia de x con respecto a S}]$$

$$y(S) = b(S) - [b(S) - y(S)] = b(S) - [b(N^{+}) - y(N^{+})] < b(S)$$

porque $b(i) > y(i)$ para $i \in N^{+}$

Aquí ha sido usado el hecho de que $b(i) - y(i) = 0$ para $i \in S/N^{+}$ pero

$b(i) - y(i) > 0$ para $i \in N^{+}0$ Aquí se detiene el algoritmo de Distribución

Factible, por lo tanto no se encuenta una solución a dicho problema.

Por otra parte, si se encuentra un camino $P : N^{+} \rightarrow N^{-}$ que resuelva el problema del camino pintado, se obtiene α que es positiva y finita.

Es claro que el flujo $x' = x + \alpha e_p$ todavía satisface los intervalos de capacidad.

Al cambiar de flujo de x a x', se hace más pequeño el valor $b(i) - y(i)$ para el nodo inicial y el valor $y(i) - b(i)$ para el nodo terminal hasta que dichos nodos pueden ser extraídos de N^{+} y de N^{-}. De esta forma llegamos a que eventualmente N^{+} y N^{-} sean iguales al conjunto vacío, lo cual asegura que hemos encontrado la solución óptima.

APENDICE B

I.Algoritmo Diferencial Factible.

Este algoritmo busca resolver el problema Diferencial Factible que consiste en encontrar un vector potencial U tal que los valores de tensión $v(j)$ para cada arco j estén en un intervalo de factibilidad $D(j)$ dado de antemano.

A continuación presentamos los pasos de dicho algoritmo.

(1).- Empezar con un potencial arbitrario U

sea

$d_0^+(j) = d^+(j) - v(j)$

$d_0^-(j) - d^-(j) - v(j)$

(2).- Checar si $\delta(i) \geq 0 \quad i \in N$ donde

$$\delta(i) = min \begin{cases} d_0^+ j) & \text{para } j \in [i, N/i]^+ \\ -d_0^-(j) & \text{para } j \in [i, N/i]^- \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

(3).-Si es así terminamos, u resuelve el problema Diferencial Factible, de otro modo tómese cualquier nodo $\bar{i}$ tal que $\delta(\bar{i}) < 0$ y aplíquese el algoritmo del camino mínimo como sigue.

(4).-Tómese u como el potencial inicial u_0

(5).- Considérese $N^+ = \{\bar{i}\}$ y $N^- = \{\bar{i}\}$, esto significa que $\bar{i}$ será un elemento de S y de N

(6).-Excepto en el caso de los arcos que salen de $\bar{i}$ considére todos los valores de $d_0^+(j)$ y $-d_0^-(j)$ como si fueran cero.

(7).-Si $\bar{i}$ es alcanzado por el algoritmo con $\beta < 0$ terminar. El camino $P : \bar{i} \to \bar{i}$ es un circuito con $d^+(P) < 0$ y el problema Diferencial Factible no tiene Solución, porque $\delta(\bar{i})$ continúa siendo negativo, (esto prueba la suficiencia del algoritmo Diferencial Factible).

-De otra forma, detener el algoritmo tan pronto como un valor $\beta \geq 0$ haya sido alcanzado, aunque $\bar{i}$ no haya sido alcanzado por el algoritmo.

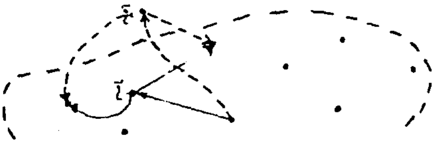
Sea $w(i) = 0 \quad \notin S$.El potencial $u'(i) = u(i) + w(i)$ mejora el potencial que se tiene porque los nuevos valores de δ nunca son más bajos que los que había para u, empesar de nuevo con esta u'. Además $\delta(\bar{i}) = 0$

Volver a 1)

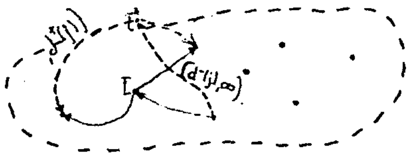
JUSTIFICACION

De la definición de $\delta \bar{i}$ es claro que $\delta \bar{i}$ es igual a cero si y sólo si $v(j) \leq d^+(j) \quad \forall j \in [\bar{i}, N/\bar{i}]^+$ y $v(j) \geq d^-(j) \quad \forall j \in [\bar{i}, N/\bar{i}]^-$. Esto sucede si y sólo si $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$ $\forall j \in A$

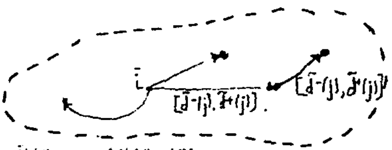
Supongamos ahora que $\bar{i}$ es un nodo con $\delta(\bar{i}) < 0$, considerar la red auxiliar G^*. Esta se construye agregando a G una copia $\bar{i}^*$ de $\bar{i}$, así como una copia de todos los arcos incidentes a $\bar{i}$ que llamaremos j^*, así como también un arco especial $\bar{j} = (\bar{i}^*, \bar{i})$ con un intervalo de capacidad para la tensión de la forma $(-\infty, 0]$.



Para los arcos $j^* \in [\bar{i}^*, N/\bar{i}]^+$, j es asignado como $(-\infty, d^+(j)]$, mientras que para $j^* \in [\bar{i}^*, N/\bar{i}]^-$ es asignado como $[d^-(j), \infty)$.



A cada arco de G se le asigna el siguiente intervalo modificado: $[\tilde{d}^-(j), \tilde{d}^+(j)]$



$\tilde{d}^+(j) = max\{d^+(j), v(j)\}$

$\tilde{d}^-(j) = min\{d^-(j), v(j)\}$

Para el potencial tenemos los siguientes valores en la gráfica aumentada.

$$u'(i) = \begin{cases} u(\bar{i}) & \text{para } i = \bar{i}^* \\ u(i) + \delta(\bar{i}) & \text{para cualquier otra } i \end{cases}$$

Considerando la red aumentada G^*, el diferencial v' coincide con v en los arcos de G, y es factible con respecto a los intervalos modificados en dichos arcos. También es factible con respecto a los intervalos modificados para los nuevos arcos de G^* debido a la definición de $\delta(\bar{i})$

El procedimiento general en el algoritmo Diferencial Factible equivale a resolver el problema de la difusión máxima de U en G^* para $N^+ = \{\bar{i}^*\}$ y $N^- = \{\bar{i}\}$, con u_0 como el potencial inicial.

Debido al arco $\bar{j}$ y a su intervalo de factibilidad para la tensión uno tiene que la [difusión máxima ≤ 0] en este problema.

Si [difusión máxima de U] < 0, el algoritmo del camino mínimo ha encontrado un camino con un valor de difusión negativa lo cual puede interpretarse en G como un circuito P tal que $d^+(P) < 0$.

Si [la difusión máxima de U] es igual a cero entonces la solución que es obtenida para el problema de la máxima tensión en G satisface que $u'(\bar{i}) - u'(\bar{i}^*) = 0$ y de aquí se desprende que $v'(j) = v'(j^*) = 0$ para cada uno de los arcos j incidentes a $\bar{i}$ en G. Debido a que $v'(j^*)$ es factible con respecto a los intervalos modificados en G^*, se sigue que $v'(j)$ (donde j es un arco incidente de $\bar{i}$) es factible con respecto a los intervalos modificados y para los arcos que salen de $\bar{i}$ tenemos que $v'(j) \leq d^+(j)$ y por otra parte $v'(j) \geq d^-(j)$ para los arcos que llegan a $\bar{i}$. De aquí es claro que $\delta(\bar{i}) = 0$ que era precisamente lo que se quería demostrar.

BIBLIOGRAFIA

1.- BERTSEKAS, D.A. "A new algorithm for solutions of restrictive networks involving diodes". IEE, Trans-Circuits System.1976. Vol. 23. pp. 599-608.

2.- BIRKHOF,E. y DIAZ,J.B. "Non linear network problems". Quarterly Applied Mathematics. 1956. Vol. 13. p.p. 431-444.

3.- COLLINS,COOPER,HELGASON,KENNINGTON. "Solving the pipe network using optimization techniques". Management Science. 1978. Vol. 24. p.p. 747-760.

4.- DENNIS,J. Mathematical programming and electrical Networks. Ed. Wiley. E.U. 1959.

5.- GEOFFRION. "Objective function approximations in mathematical programming". Mathematical programming. 1977. Vol. 13. p.p 23-27.

6.- IRI,M. Network flow transportation and scheduling. Edit. Academic Press. E.U.1969

7.- LUENBERGER,D. Introduction to linear and nonlinear programming. Adison Wesley. E.U. 1973.

8.- MEYER. "Two segment separable programming". Management Science. 1979. Vol. 25. p.p. 285-295.

9.- NARRO, Ana Elena. Problemas lineales duales en redes de flujo. 1987. Tesis.

10.- ROCKAFELLAR, R.T. Network Flows and Monotropic Optimization. Edit Wiley. 1984. E.U.