

47  
2y

**Universidad Nacional Autónoma de México**

**Facultad de Ciencias**



**DISTRIBUCION DE CARGA EN  
METALES: Una aproximación estocástica.**

**TESIS**

que para obtener el título de

**FISICO**

presenta

**Imanol Ordorika Sacristán**

México, D.F.

1991

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

CAPITULO I. INTRODUCCION.	1
CAPITULO II. PROCESOS ESTOCASTICOS Y CADENAS DE MARKOV	5
II.1 El Proceso Estocástico como concepto.	6
II.2 Cadenas de Markov	9
II.3 Cadenas de Markov y su relación con la teoría de Matrices	13
II.4 Clasificación de Estados y Cadenas	15
CAPITULO III. ALGUNOS ELEMENTOS DE TEORIA ELECTROSTATICA	21
III.1 Fuerza del Campo Eléctrico y Potencial Eléctrico	21
III.2 Ley de Coulomb. El Flujo de la Fuerza Eléctrica	23
III.3 La Distribución de carga en Conductores	28
CAPITULO IV. APLICACION AL PROBLEMA DEL CAMPO ELECTRICO EN UN DISCO CONDUCTOR EN PRESENCIA DE UNA CARGA PUNTUAL EXTERNA.	33
IV.1 Presentación del problema.	33
IV.2 Aplicación del Método de Markov.	33
IV.2.1 Sin presencia de campo eléctrico externo.	37
IV.2.2 Con Campo Eléctrico externo.	39
IV.3.1 Distribución de Carga en una placa infinita.	42
IV.3.2 Solución por el Método de Imágenes.	43

<b>IV.4 Aplicación de la matriz de transición para el caso de un disco metálico finito.</b>	<b>44</b>
<b>IV.4.1 Disco finito sin presencia de carga externa.</b>	<b>45</b>
<b>IV.4.2 Disco finito con presencia de carga externa.</b>	<b>47</b>
<b>CAPITULO V. CONCLUSION</b>	<b>51</b>
<b>CAPITULO VI. APENDICES</b>	<b>56</b>
<b>IV.1 Programa de Simulación del Problema descrito.</b>	
<b>IV.2 Cuadratura de Gauss de 16 puntos.</b>	
<b>IV.3 Bibliografía General</b>	

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

En la actualidad, casi todos los problemas que uno se plantea a resolver dentro del campo de la física se pueden atacar con el uso de las computadoras. Desde luego la parte más importante en el proceso de solución numérica de un problema tiene que ver con los algoritmos específicos que deben de usarse en la computadora. Los problemas dinámicos que aparecen en la física tienen que ver con ecuaciones diferenciales, las cuales, en la mayoría de los casos no se pueden resolver exactamente, necesitando aproximaciones analíticas o numéricas. En el presente trabajo tomamos prestadas ideas de la teoría estocástica, en particular la idea de cadenas markofianas, para desarrollar soluciones a ecuaciones diferenciales que se presentan en la física, como un método conceptualmente sencillo que conduce a las soluciones del problema planteado. El uso de las cadenas markofianas es frecuente en problemas discretos asociados a procesos sociales, dinámica de poblaciones (humanas o biológicas), problemas de predicción de tiempo, etc. La aplicación de conceptos de cadenas markofianas a la solución de ecuaciones diferenciales en la física es muy similar a los métodos de relajación perfectamente conocidos en la literatura. No es del interés de la presente tesis demostrar tal equivalencia. Lo que si es de interés de este trabajo es hacer ver la bondad de conceptos estocásticos en su aplicabilidad a distintos campos para la solución de problemas tanto discretos como continuos.

El escrito que aquí se presenta tiene un claro interés didáctico. Una de las dificultades más significativas del proceso de aprendizaje es la representación de los fenómenos físicos en la imaginación del educando o en imágenes gráficas. El procedimiento empleado en este trabajo facilita enormemente esta visualización haciendo posible una mejor comprensión del problema descrito. La presentación de simulaciones de diversos fenómenos físicos se constituye en un complemento de la docencia tradicional en muchos casos y la física no es la excepción. Sin embargo, los procesos de simulación requieren, para su efectiva comprensión por parte del alumno, de modelos sencillos y didácticos que hagan evidente el procedimiento de construcción de una solución. Desde nuestra óptica los procesos estocásticos, y más en particular los procesos de Markov cumplen este objetivo. Esperamos que este trabajo tenga una clara aplicación al proceso de enseñanza y que muestre las bondades de un método para su utilización posterior en la simulación de problemas físicos de diversa índole.

El problema físico que se va a resolver con estas ideas es el de la distribución de carga en metales en presencia o no de campos eléctricos externos.

La tesis está dividida en dos grandes rubros. El primero, dividido a su vez en tres capítulos (I, II y III), es esencialmente monográfico. El capítulo inicial es precisamente esta Introducción general. En el segundo capítulo se ubica la teoría de procesos estocásticos con énfasis en el concepto de cadenas markofianas. Es una descripción teórica bastante formal y árida de dichos procesos, de las cadenas de Markov, su clasificación y su relación con la teoría de matrices. El tercer capítulo

constituye un breve recordatorio de la ecuaciones de Maxwell que conducen a los problemas del potencial; esto es, a las ecuaciones de Poisson y Laplace.

El segundo gran rubro está dividido en dos capítulos (IV y V). En el capítulo IV, se presenta el problema físico a resolver planteando las ecuaciones para la cadenas de Markov y los resultados con el proceso empleado. Finalmente en el capítulo V se presentan la conclusiones.

En los apéndices se muestran elementos que le dan consistencia a la tesis pero que no son primordiales en el cuerpo del trabajo, como el algoritmo de integración numérica de Gauss de 16 puntos y el programa que resuelve el proceso estocástico planteado para la solución de la ecuación de Poisson del problema que nos ocupa.

## CAPITULO II

### PROCESOS ESTOCASTICOS Y CADENAS DE MARKOV

Un proceso estocástico es aquel que se desarrolla en el tiempo de acuerdo con las leyes de la probabilidad. Esto quiere decir que no podemos predecir su comportamiento futuro con certeza; lo más que podemos hacer, es asociar probabilidades a los varios estados futuros posibles. Estos procesos ocurren con mucha frecuencia en la naturaleza y su estudio ha aportado el ímpetu para un rápido desarrollo de la teoría de procesos estocásticos en las últimas décadas. Hasta hace relativamente poco tiempo, la mayoría de las aplicaciones habían sido a problemas en las ciencias físicas y biológicas donde las ideas de análisis cuantitativo eran completamente familiares. El progreso ha sido mucho mas lento en las ciencias sociales por varias razones. La mas importante es que muchos de los problemas de medición en las ciencias sociales aun no han sido resueltos y sin medición puede haber pocas posibilidades de uso de técnicas matemáticas. Aun mas, existe todavía hoy, un amplio debate entre muchos científicos sociales sobre la relevancia de un pensamiento cuantitativo de problemas sociales sustantivos. Estos debates parecen ser una reminiscencia de aquellos que tuvieron lugar entre los biólogos a principios de este siglo.

Un modelo es una abstracción del mundo real en el que las relaciones relevantes entre los elementos reales son reemplazadas por relaciones similares entre entidades matemáticas. Los modelos matemáticos pueden ser deterministas o estocásticos. Si el efecto



de cualquier cambio en un sistema puede ser predicho con certeza se dice que el sistema es determinista. En la práctica en la mayoría de los casos esto no ocurre. Ya sea porque el sistema no está plenamente especificado o por el carácter impredecible de algunas de sus componentes usualmente hay un elemento de incertidumbre en cualquier predicción. Esta incertidumbre puede ser incorporada si introducimos distribuciones de probabilidad al modelo en lugar de variables matemáticas. Esto quiere decir que las ecuaciones del modelo tendrán que incluir variables aleatorias. Un modelo de este tipo es denominado estocástico.

### II.1. El Proceso Estocástico como concepto.

Queremos dar una medida probabilística para describir un experimento que tiene lugar en estados<sup>1</sup>. El resultado del  $n$ -ésimo estado puede depender de los resultados correspondientes a estados previos. Suponemos sin embargo que la probabilidad para cada posible resultado en un estado particular es conocido cuando los resultados de todas los estados previos son conocidos. De este conocimiento habremos de construir un espacio de lo posible y tomar medidas para el experimento en su conjunto.

Los resultados posibles de un experimento pueden ser representados por un árbol. Cada posibilidad puede ser identificada con una trayectoria entre los árboles. Cada

---

<sup>1</sup> En los procesos estocásticos y las cadenas de Markov se habla de estados como equivalente de etapa, estadio o status. El sentido es totalmente distinto a la concepción de estado de la mecánica cuántica.

trayectoria está constituida por por una línea de segmentos llamadas ramas.

Conocemos la probabilidad para cada resultado en un estado dado cuando los estados previos son conocidos. Asignamos estas probabilidades conocidas a las ramas y las denominamos ramas de probabilidades. El procedimiento descrito puede desarrollarse para cualquier experimento que tenga lugar en estados. Solamente requerimos que haya un número finito de resultados posibles en cada estado y que conozcamos la probabilidad de un resultado particular cualquiera en el estado  $j$ -ésimo dado el conocimiento de los resultados para los primeros  $j-1$  estados. Para cada  $j$ , obtenemos un árbol  $U_j$ . El conjunto de trayectorias de este árbol sirve como espacio de lo posible para cualquier proposición relacionada a los primeros  $j$  experimentos. En este árbol asignamos una medida al conjunto de todas las trayectorias. Primero asignamos probabilidades por rama. Entonces el peso asignado a una trayectoria es el producto de todas las probabilidades por rama en la trayectoria. Las mediciones del árbol son consistentes en el siguiente sentido. Una premisa cuyo valor verdadero depende sólo de los primeros  $j$  estados puede ser considerada una proposición relacionada a cualquier árbol  $U_i$  para  $i \geq j$ . Cada uno de estos árboles tiene su propia medida de árbol y la probabilidad de la proposición puede ser encontrada de cualquiera de estas medidas. Sin embargo, en cada caso la probabilidad asignada sería la misma.

Supongamos que tenemos un árbol para un experimento de  $n$  estados. Sea  $f_j$  una función con dominio en el conjunto de trayectorias  $U_n$  y evaluemos el resultado en el  $j$ -ésimo estado.

Entonces las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  se llaman funciones de resultado. El conjunto de funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  es denominado *proceso estocástico*.

Existe una conexión simple entre las probabilidades de rama y las funciones resultado. Las probabilidades de rama en el primer estado son,

$$\Pr[f_1 = r_1] \quad (2.1)$$

en el segundo estado

$$\Pr[f_2 = r_j | f_1 = r_1] \quad (2.2)$$

en el tercer estado

$$\Pr[f_3 = r_k | f_2 = r_j \wedge f_1 = r_1] \quad (2.3)$$

etc.

Con frecuencia debemos tratar con experimentos en los que se permite un número arbitrario de estados. Para cualquier número de ellos es posible construir un árbol. Es posible incluso considerar la continuación indefinida del árbol para obtener uno con trayectorias infinitas. Nuestro procedimiento para asignar una medida no sería muy adecuado en este caso ya que daría un peso cero a cada trayectoria. No es necesario sin embargo asignar una medida al árbol infinito. Este es el caso si los enunciados del proceso que nos interesa depende únicamente de una parte finita del árbol, y para cualquier número finito de estados tenemos un método para asignar una medida. Consideraremos sin embargo funciones cuya definición requiere del árbol infinito.

Podemos hablar del valor promedio de una función cuando se satisfacen las siguientes conclusiones:

a) Hay una secuencia de un intervalo numérico de valores  $r_1, r_2, \dots$  tal que el valor verdadero de la proposición  $f=r_j$

depende solamente de los resultados de un número finito de estados

$$y \quad \sum_j \Pr\{f=r_j\}=1 \quad (2.4)$$

$$b) \quad \sum_j r_j \Pr\{f=r_j\} < \infty \quad (2.5)$$

en caso de que se cumplan a) y b) decimos que  $f$  tiene un valor promedio dado por

$$M\{f\} = \sum_j r_j \Pr\{f=r_j\} \quad (2.6)$$

Cuando  $f$  tiene un promedio  $a$ , decimos que  $f$  tiene una varianza si  $(f-a)^2$  tiene un promedio. Si esto es así entonces  $\text{Var}\{f\}=M\{(f-a)^2\}$ .

*Teorema.* Dadas  $f_1, f_2, \dots$ , funciones tales que el rango de cada  $f_j$  es un subconjunto del mismo conjunto finito de números y haciendo  $s=f_1+f_2+\dots$ , entonces si el promedio de  $s$  existe,  $M\{s\}=M\{f_j\}$ .

Un proceso estocástico en que todas las funciones resultado tienen rangos que son subconjuntos de un conjunto finito dado es denominado un *proceso estocástico finito*. El teorema anterior señala que en un proceso estocástico finito el promedio de la suma de las funciones (si este promedio existe) es la suma de los promedios de las funciones.

## II.2. Cadenas de Markov

Para un proceso estocástico tenemos entonces un árbol y una medida de árbol y una sucesión de funciones resultado  $f_n$ , con  $n=0,1,2,\dots$ . El dominio de  $f_n$  es el árbol  $T_n$  y el rango es el conjunto  $U_n$  de posibles resultados para el  $n$ -ésimo experimento. El valor de  $f_n$  es  $s_j$  si el resultado del  $n$ -ésimo experimento es  $s_j$ .

Un proceso estocástico finito es un proceso independiente si:

I) Para cualquier proposición  $P$  cuyo valor verdadero depende

solamente de los resultados anteriores al  $n$ -ésimo,

$$\Pr\{f_n = s_j | p\} = \Pr\{f_{n-1} = s_j\}. \quad (2.7)$$

Para dicho proceso el conocimiento del resultado de cualquier experimento precedente no afecta nuestras predicciones para el siguiente experimento. Para un proceso de Markov debilitamos ésto para permitir el conocimiento del pasado inmediato para influir en estas predicciones.

Un proceso de Markov es entonces un proceso estocástico finito tal que:

II) Para cualquier proposición  $p$  cuyo valor verdadero depende solamente de los resultados anteriores al  $n$ -ésimo estado,

$$\Pr\{f_n = s_j | (f_{n-1} = s_1) \wedge p\} = \Pr\{f_{n-1} = s_j\}. \quad (2.8)$$

LLlamamos a esta condición II la propiedad de Markov. En un proceso de Markov, conociendo el resultado del último experimento, podemos desechar cualquier otra información que tengamos del pasado para predecir el futuro. Es importante establecer que este es el caso solamente si conocemos con exactitud el resultado del último experimento. Por ejemplo, si solamente sabemos que el resultado del último experimento fue  $S_1$  o  $S_k$  entonces el conocimiento del valor verdadero de una proposición verdadera  $p$  relacionada con experimentos previos puede afectar nuestras predicciones futuras.

En el marco anterior resultan significativas las siguientes definiciones:

*Definición.* La  $n$ -ésima etapa de transición de probabilidad para un proceso de Markov, denotado por  $p_{ij}(n)$  esta dada por:

$$p_{ij}(n) = \Pr\{f_n = s_j | f_{n-1} = s_i\} \quad (2.9)$$

*Definición.* Una cadena de Markov es un proceso finito de

Markov tal que la transición de probabilidades  $p_{ij}(n)$  no depende de  $n$ . En este caso están denotados por  $p_{ij}$ . Los elementos de  $U$  son denominados estados.

*Definición.* La matriz de transición de una cadena de Markov es la matriz  $P$  con componentes  $p_{ij}$ . El vector inicial de probabilidad es el vector  $\mathfrak{f}_0 = \{p_j^{(0)}\} = \{\text{Pr}[f_0 = s_j]\}$ .

Para una cadena de Markov podemos visualizar un proceso que se mueve de un estado a otro. Comienza en  $s_j$  con probabilidad  $p_j^{(0)}$ . Si en cualquier momento está en el estado  $s_i$ , entonces se mueve en el siguiente paso a  $s_j$  con probabilidad  $p_{ij}$ . Las probabilidades iniciales se toman como las probabilidades para los diversos estados posibles de inicio. El vector inicial de probabilidad y la matriz de transición determinan completamente el proceso de la cadena de Markov ya que son suficientes para construir toda una medida de árbol. Entonces, dado cualquier vector de probabilidad  $\mathfrak{f}_0$  y cualquier matriz de probabilidad  $P$ , hay una única cadena de Markov que tendrá a  $\mathfrak{f}_0$  como vector inicial de probabilidad y a  $P$  como matriz de transición.

Generalmente se considera a la matriz de transición  $P$  como fija pero es posible que se desee variar el vector inicial  $\mathfrak{f}$ . La medida de árbol asignada dependerá del vector inicial  $\mathfrak{f}$  que se escoja. De aquí se concluye que si  $p$  es cualquier proposición relativa al árbol, o  $f$  es una función cuyo dominio es el árbol entonces  $\text{Pr}[P]$ ,  $M[f]$  y  $\text{Var}[f]$  todas dependen de  $\mathfrak{f}$ . Se indica lo anterior escribiendo  $\text{Pr}_i[P]$ ,  $M_i[f]$  y  $\text{Var}_i[f]$ . El caso particular cuando tiene un 1 en la  $i$ -ésima componente (el proceso comenzó en el estado  $s_i$ ) se denota  $\text{Pr}_i[P]$ ,  $M_i[f]$  y  $\text{Var}_i[f]$ .

Concluimos este apartado con algunos comentarios breves sobre

la propiedad de Markov.

Es facilmente comprobable que la propiedad de Markov es equivalente a las siguientes propiedades mas simétricas respecto del tiempo.

II') Sea  $p$  cualquier proposición cuyo valor verdadero depende solamente de los resultados posteriores al  $n$ -ésimo experimento y  $q$  cualquier proposición cuyo valor verdadero depende solamente de los resultados anteriores al  $n$ -ésimo experimento. Entonces:

$$\Pr[p \wedge q | f_n = s_j] = \Pr[p | f_n = s_j] \cdot \Pr[q | f_n = s_j]. \quad (2.10)$$

Esta condición esencialmente señala que, dado el presente, el pasado y el futuro son independientes uno de otro. Esta definición más simétrica sugiere que un proceso de Markov debe seguir siendo un proceso de Markov si se le observa en sentido inverso. Que lo anterior es cierto puede comprobarse en el siguiente teorema:

**Teorema.** Dado un proceso de Markov sea  $p$  una proposición cualquiera cuyo valor verdadero depende exclusivamente de los procesos posteriores al  $n$ -ésimo experimento. Entonces

$$\Pr[f_n = s_j | (f_{n+1} = s_1) \wedge p] = \Pr[f_n = s_j | f_{n+1} = s_1]$$

Dado que un proceso de Markov observado en sentido inverso sigue siendo un proceso de Markov, se puede sospechar que lo mismo es válido para una cadena de Markov. Este sería el caso si las "probabilidades de transición inversas",

$$p_{ij}^*(n) = \Pr[f_n = s_j | f_{n+1} = s_i],$$

fueran independientes de  $n$ . Estas probabilidades pueden ser encontradas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^*(n) &= \frac{\Pr[f_n = s_j \wedge f_{n+1} = s_i]}{\Pr[f_{n+1} = s_i]} \\
&= \frac{\Pr[f_{n+1} = s_i | f_n = s_j] \cdot \Pr[f_n = s_j]}{\Pr[f_{n+1} = s_i]} \\
&= \frac{p_{ji} \cdot \Pr[f_n = s_j]}{\Pr[f_{n+1} = s_i]} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Estas probabilidades de transición serían independientes de  $n$  solamente si la probabilidad de estar en un estado particular en el tiempo  $n$  fuera independiente de  $n$ . Ciertamente este no es generalmente el caso. Por ejemplo, si el sistema es inicializado en el estado  $s_1$  con probabilidad 1, entonces la probabilidad de que este allí en el siguiente paso es  $p_{11}$ . Por consiguiente, en general,  $\Pr[f_0 = s_1] \neq \Pr[f_1 = s_1]$ . De aquí que se concluye que una cadena de Markov observada en sentido inverso será un proceso de Markov, pero en general sus probabilidades de transición dependerán del tiempo y por consiguiente no será una cadena de Markov.

### II.3. Cadenas de Markov y su relación con teoría de Matrices

Para mostrar la relación entre la teoría de cadenas de Markov y la teoría de matrices empezaremos con el proceso finito mas general de procesos de Markov y luego especializaremos nuestros resultados a la cadena finita de Markov.

*Teorema.* Sea  $f_n$  la función resultante al tiempo  $n$  para un proceso finito de Markov con probabilidades de transición  $p_{ij}(n)$ , entonces:

$$\Pr[f_n = s_v] = \sum_u \Pr[f_{n-1} = s_u] p_{uv}(n) \quad (2.12)$$

La proposición  $f_n = s_v$  es una proposición relativa al árbol  $T_n$ . Para encontrar su probabilidad sumamos los pesos de todas las



trayectorias en su conjunto verdadero. Esto es, todas las trayectorias posibles que terminan con un resultado  $s_v$ . Entonces si  $j, k, \dots, u$  es una secuencia de estados posibles

$$\begin{aligned} \Pr[f_n = s_v] &= \sum_{j, k, \dots, u} \Pr[f_0 = s_j \wedge \dots \wedge f_{n-1} = s_u \wedge f_n = s_v] \\ &= \sum_{j, k, \dots, u} \Pr[f_0 = s_j \wedge \dots \wedge f_{n-1} = s_u] \cdot \Pr[f_n = s_v | f_0 = s_j \wedge \dots \wedge f_{n-1} = s_u] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por la propiedad de Markov esto es

$$\sum_{j, k, \dots, u} \Pr[f_0 = s_j \wedge \dots \wedge f_{n-1} = s_u] p_{uv}(n) \quad (2.14)$$

Si en esta última suma mantenemos la  $u$  fija y sumamos sobre los índices restantes obtenemos

$$\Pr[f_n = s_v] = \sum_u \Pr[f_{n-1} = s_u] p_{uv}(n) \quad (2.15)$$

Así se comprueba el teorema enunciado anteriormente.

Podemos escribir el resultado de este teorema en forma matricial. Sea  $\mathbf{f}_n$  un vector de línea que da la medida inducida para la función resultante  $f_n$ . Esto es

$$\mathbf{f}_n = \{p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_r^{(n)}\} \quad (2.16)$$

donde  $p_j^{(n)} = \Pr[f_n = s_j]$ . Entonces  $p_j^{(n)}$  es la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado  $s_j$  después de  $n$  pasos. El vector  $\mathbf{f}_0$  es el vector de probabilidad inicial. Sea  $P(n)$  la matriz con entradas  $p_{ij}(n)$ . Entonces el resultado del teorema anterior puede ser escrito en la forma

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_{n-1} \cdot P(n) \quad (2.17)$$

para  $n \geq 1$ . Aplicando repetidamente este resultado tenemos que

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_0 \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot \dots \cdot P(n) \quad (2.18)$$

En el caso del proceso de una cadena de Markov, todas las  $P(n)$ 's son iguales y obtenemos el siguiente teorema fundamental:

**Teorema.** Sea  $n$  la medida inducida para la función resultante  $f_n$  para una cadena de Markov finita con vector de probabilidad

inicial  $\mathbf{f}_0$  y matriz de transición  $P$ . Entonces

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_0 \cdot P^n \quad (2.19)$$

Este teorema muestra que la clave para el estudio de las medidas inducidas para las funciones resultantes de una cadena de Markov finita es el estudio de las potencias de la matriz de transición. Las entradas de estas potencias tienen en si mismas una interesante interpretación probabilística. Para ver esto, tomemos como vector inicial  $\mathbf{f}_0$  el vector con 1 en la  $i$ -ésima componente y 0 en todas las demás. Entonces, con base en el teorema anterior,  $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_0 P^n$ . Sin embargo  $\mathbf{f}_0 P^n$  es el  $i$ -ésimo renglón de la matriz  $P^n$ . Entonces, el  $i$ -ésimo renglón de la  $n$ -ésima potencia de la matriz de transición nos da la probabilidad de estar en cada uno de los diversos estados asumiendo que el proceso se inició en el estado  $s_i$ .

#### II.4. Clasificación de Estados y Cadenas

Nos interesa clasificar los estados de una cadena de Markov en función de su posibilidad de transitar de un estado dado a otro estado dado. En particular los estados están divididos en clases de equivalencias. Dos estados se encuentran en la misma clase de equivalencia si se "comunican", es decir si uno puede ir de un estado al otro. El ordenamiento parcial resultante nos muestra las direcciones posibles en las que puede proceder el proceso.

Los elementos mínimos del ordenamiento parcial son de particular interés.

*Definición.* Los elementos mínimos del ordenamiento parcial de las clases de equivalencia son denominados conjuntos ergódicos. Los elementos restantes de un conjunto de transición son

denominados estados de transición. Los elementos de un conjunto ergódico son denominados estados ergódicos o no transitivos.

Como cualquier ordenamiento parcial finito debe tener al menos un elemento mínimo, debe existir al menos un conjunto ergódico para cada cadena de Markov. Sin embargo no necesariamente existe un conjunto de transición. Esto último ocurre si la cadena completa consiste de un único conjunto ergódico, o si hay varios conjuntos ergódicos que no se comunican con otros.

De las relaciones de comunicación podemos desprender que si un proceso abandona un conjunto de transición nunca podrá regresar a el, mientras que si una vez entra a un conjunto ergódico nunca podrá abandonarlo. En particular si un conjunto ergódico contiene sólo un elemento, entonces tenemos un estado al que una vez que se entra no puede ser abandonado. Ese estado es denominado *absorbente*. Dado que de estado con esas características no podemos pasar a otro estado, el siguiente teorema caracteriza a los estados absorbentes.

*Teorema.* Un estado es absorbente si y solo si  $p_{11}=1$ .

Es conveniente utilizar esta clasificación para arribar a la forma canónica de la matriz de transición. Renumeramos los estados de la manera siguiente: Los elementos de una equivalencia dada recibirán números consecutivos. Los conjuntos mínimos vendrán en primer lugar, después los conjuntos que están un nivel por encima de los conjuntos mínimos, después los conjuntos dos niveles arriba de los conjuntos mínimos, etc. Esto permite asegurar que es posible ir de un estado dado a otro en la misma clase, o un estado en una clase anterior pero no a un estado en

una clase posterior. Si las clases de equivalencia arregladas de la manera aquí descrita son  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , entonces nuestra matriz aparecerá como sigue (donde  $k$  se toma como 5 para efectos de ilustración):

$$\begin{array}{l}
 u_1: \\
 u_2: \\
 u_3: \\
 u_4: \\
 u_5:
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{ccccc}
 P_1 & & & & 0 \\
 R_2 & P_2 & & & \\
 & R_3 & P_3 & & \\
 & & R_4 & P_4 & \\
 & & & R_5 & P_5
 \end{array}
 \right)$$

Aquí la  $P_i$  representa las matrices de transición en una clase de equivalencia dada. La región 0 consiste enteramente de 0's. La matriz  $R_i$  será enteramente 0 si  $P_i$  es un conjunto ergódico, en caso contrario tendrá elementos diferentes de cero.

En esta forma es sencillo ver que ocurre en la medida en que  $P$  es elevada a potencias. Cada potencia será una matriz de la misma forma; en  $P^n$  seguiremos teniendo ceros en la región superior, y simplemente  $P_i^n$  en las regiones diagonales. Esto muestra que una clase de equivalencia dada puede ser estudiada de forma aislada tratando solamente la submatriz  $P_i$ . Cada equivalencia de clase puede ser partida en clases cíclicas. Si hay una sola clase cíclica entonces decimos que la equivalencia de clase es *regular* si no es así decimos que es *cíclica*.

Si una equivalencia de clase es regular, entonces, después de que ha transcurrido un tiempo suficiente, el proceso puede estar en cualquier estado de clase sin importar el estado de equivalencia en que inició. Esto quiere decir que todas las potencias suficientemente grandes de sus  $P_i$  deben ser positivas (tener solamente entradas positivas). Si la equivalencia de clase es cíclica, entonces ninguna potencia de  $P_i$  puede ser positiva.

De esta clasificación de estados podemos llegar a una

clasificación de cadenas de Markov. Puede notarse que debe haber un conjunto ergódico pero puede no haber uno de transición. Esto nos lleva a una primera subdivisión. Dentro de esta podemos subdividir de acuerdo con el número y tipo de los conjuntos ergódicos.

#### A. Cadenas sin conjuntos de transición.

Si dicha cadena tiene más de un conjunto ergódico, entonces no existe ninguna interacción entre estos conjuntos. Así tenemos agrupadas dos o mas cadenas de Markov que no guardan relación entre sí. Estas cadenas pueden ser estudiadas por separado, y por consiguiente sin perder la generalidad podemos asumir que la cadena entera es un conjunto ergódico único. Una cadena que consiste de un sólo conjunto ergódico es denominada *cadena ergódica*.

A-1. El conjunto ergódico es regular. En este caso la cadena es denominada *cadena de Markov regular*. De consideraciones previas es posible concluir que todas las potencias suficientemente altas de  $P$  deben ser positivas en este caso. Así, no importa donde comienza el proceso, después de un lapso de tiempo suficiente puede estar en cualquier estado.

A-2. . El conjunto ergódico es cíclico. En este caso la cadena es denominada *cadena de Markov cíclica*. Una cadena de este tipo tiene un período  $d$  y sus estados están subdivididos en  $d$  conjuntos cíclicos ( $d > 1$ ). Para una posición de inicio dada se moverá a través de los conjuntos cíclicos en un orden definido regresando al conjunto del estado de inicio después de  $d$  pasos. Después de que transcurra un tiempo suficiente, el proceso puede estar en cualquier estado del conjunto cíclico apropiado al

momento.

**B. Cadenas con conjuntos de transición.**

En una cadena de este tipo, el proceso se mueve hacia los conjuntos ergódicos. La probabilidad de que el proceso esté en un conjunto ergódico tiende a 1; y no puede escapar a un conjunto ergódico una vez que entra a él. Es productivo clasificar estas cadenas con base en sus conjuntos ergódicos.

B-1. Todos los conjuntos ergódicos son conjuntos unitarios. Una cadena de este tipo es denominada *cadena absorbente*. En este caso el proceso es eventualmente atrapado en un único estado (absorbente). Este tipo de proceso también puede caracterizarse por el hecho de que todos los estados ergódicos son estados absorbentes.

B-2. Todos los conjuntos ergódicos son regulares pero no todos son conjuntos unitarios.

B-3. Todos los conjuntos ergódicos son cíclicos.

B-4. Existen estados ergódicos cíclicos y regulares.

Naturalmente, en cada una de estas clases podemos clasificar mas allá en función de el número de estados ergódicos que existen.

## Bibliografia

Finite Markov Chains. John G. Kemeney, J. Laurie Snell.  
Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York.  
1976.

Stochastic Models for Social Processes. D.J. Bartholomew. John  
Wiley & Sons. Great Britain. 1973.

# CAPITULO III

## ALGUNOS ELEMENTOS DE TEORIA ELECTROSTATICA

### III.1 Fuerza del Campo Eléctrico y Potencial Eléctrico

Las cargas eléctricas siempre ejercen fuerzas entre sí. Esta fuerza, en su dependencia de la magnitud de las cargas y su separación mutua, puede ser el objeto unico de una investigación como lo fue en el caso de la teoría usual de acción a la distancia anterior a Faraday y Maxwell. También podemos hablar, en el sentido de Faraday y Maxwell, de un *campo de fuerzas eléctricas* en la vecindad de todo cuerpo cargado. Se supone la existencia de este campo, como el gravitacional de la tierra, incluso en los puntos en los que no hay carga sobre la que pudiera actuar. La investigación de este campo de fuerza, que es visto inicialmente como el origen de la acción de fuerza, es el objeto de una teoría de acción-fuerza.

El concepto de campo de Faraday y Maxwell se manifiesta y se sostiene en el siguiente hecho experimental: La fuerza  $F(r)$  experimentada por una pequeña carga de prueba en un punto con vector de posición  $r$  en un sistema de cargas diferentes y arbitrariamente distribuidas, es directamente proporcional a la carga  $e$  de la carga de prueba. Entonces siempre podemos escribir que:

$$F = eE \tag{3.1}$$

en donde  $E = E(r)$  es una función de la posición en el sistema considerado e independiente de la carga de prueba. A esta



cantidad se le denomina la *intensidad del campo electrico*.

La expresión anterior para la fuerza sobre una carga prueba en un campo eléctrico no es válida incondicionalmente. Deja de ser válida en cuanto la carga prueba se acerca demasiado a un cuerpo, cargado o no, y cuanto mayor es el valor de la carga mas se cumple esta situación. Es también inexacto cuando la fuerza del campo varía demasiado con la posición y en mayor medida en función del mayor tamaño del cuerpo de prueba. Por lo anterior tomaremos una carga suficientemente pequeña y debil para evaluar la fuerza de un campo electrico con base en la expresión enunciada anteriormente.

Si una carga  $e$  es movida por una fuerza  $F$  a través de una distancia  $dr$ , el campo, de acuerdo a las leyes tradicionales de la mecánica, desarrolla una cantidad de trabajo  $F \cdot dr = eE \cdot dr$ . En el desplazamiento de la carga del punto 1 al 2, el trabajo realizado es igual a la integral de línea

$$A_{12} = \int_1^2 F \cdot dr = e \int_1^2 E \cdot dr \quad (3.2)$$

Para un campo eléctrico (como para los campos de fuerzas estáticas en mecánica) este trabajo debe ser independiente de la trayectoria recorrida para ir de 1 a 2; en particular para una trayectoria cerrada debe desaparecer:

$$\oint F \cdot dr = e \oint E \cdot dr = 0 \quad (3.3)$$

En mecánica, se desprende del teorema de la energía, que un campo de fuerza estático se puede representar como el gradiente (negativo) de una función de la posición, la *energía potencial*. De manera similar podemos concluir que para todo campo electrostático, la fuerza del campo eléctrico se debe expresar en

la forma

$$E = -\text{grad } \phi \quad (3.4)$$

La función escalar de la posición es denominada *potencial electrostático*  $\phi$  y la unidad de trabajo obtenido por unidad de carga

$$V_{12} = \int_1^2 E \cdot dr = \phi_1 - \phi_2 \quad (3.5)$$

es denominada *diferencia de potencial* o también *voltaje* entre los puntos 1 y 2.

La ecuación anterior contiene una importante afirmación concerniente a la fuerza de campo  $E$  en el campo electrostático: Como  $E$  puede ser expresada como el gradiente de la función potencial  $\phi$  necesariamente debe ser *irrotacional*<sup>2</sup>:

$$\oint E \cdot dr = 0 \quad \text{ó} \quad \text{rot } E = 0 \quad (3.6)$$

Estas relaciones representan en una forma integral y diferencial respectivamente a la primera de las cuatro *ecuaciones de Maxwell* para el campo electromagnético. Lo son para el caso específico del campo electrostático.

### III.2 Ley de Coulomb. El Flujo de la Fuerza Electrica

En los parrafos anteriores estábamos ocupados con los efectos de las fuerzas de un campo electrico sobre las cargas. Ahora intentaremos considerar el efecto productor de campo de las cargas.

---

<sup>2</sup> Ver Teorema de Stokes.

Uno de los resultados mas importantes de la teoría eléctrica cuantitativa anterior a los trabajos de Faraday fue la ley de *Coulomb*:

La fuerza que ejercen entre sí dos cuerpos cargados 1 y 2, cuyas dimensiones son pequeñas comparadas a la distancia existente entre ellas, tiene la dirección de la línea que las une y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa  $r$ .

Entonces podemos escribir

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2} f \quad (3.7)$$

en donde el factor  $f$  es independiente no sólo de la condición de los cuerpos sino de sus posición relativas también. La cantidad  $f$  tiene las dimensiones de fuerza  $\times$  (distancia)<sup>2</sup> / (carga)<sup>2</sup>. Mas aún,  $F$  actua como fuerza de repulsión cuando  $e_1$  y  $e_2$  tienen el mismo signo, y de atracción cuando tienen signos opuestos.

Introducimos ahora el sistema de unidades *Gaussiano* en donde al establecer arbitrariamente la dimensión indeterminada de la carga, hacemos que  $f$  no tenga dimensión y la definimos  $f = 1$ . La unidad de cantidad de electricidad (carga eléctrica) se define entonces de tal manera que respecto a una cantidad de electricidad igual a la suya, colocada a una distancia de 1 cm., ejerce una fuerza de 1 dina. La unidad de  $E$  queda entonces también establecida. En el lenguaje de Faraday y Maxwell podemos describir los resultados de medición de *Coulomb* de la siguiente manera: *Una carga eléctrica puntual produce en su vecindad un campo eléctrico  $E$  que, en dirección y magnitud, está dado por*

$$E = \frac{e}{r^2} \frac{r}{r} = \frac{er}{r^3} \quad (3.8)$$

Aquí  $r$  es el vector que se extiende de la carga a un punto en el campo.

El campo eléctrico  $E$  producido por una carga puntual corresponde formalmente al campo velocidad  $v$  de un fluido incompresible emanando de un punto fuente de fuerza  $e$ . Como señalamos anteriormente  $E$ , de la misma forma que  $v$ , es irrotacional y puede ser representado como el gradiente del "Potencial de Coulomb"

$$\phi = \frac{e}{r} \quad (3.9)$$

Además tenemos que

$$\oiint E_n \, dS = 4\pi e \quad \text{ó} \quad = 0 \quad (3.10)$$

dependiendo si la carga  $e$  está dentro ó fuera de la superficie cerrada sobre la que se toma la integral. A la integral  $\int_s E_n \, dS$  se le denomina de *flujo* de la fuerza eléctrica a través de la superficie  $S$ .

Dado que los experimentos muestran que en la acción simultánea de varias cargas  $e_1, e_2, e_3, \dots$  sus contribuciones al campo así como la fuerza que ejercen en una carga prueba se suman de acuerdo a la ley de adición vectorial, podemos generalizar el teorema del flujo eléctrico al enunciado:

*El flujo eléctrico total  $\oiint_s E_n \, dS$  a través de una superficie cerrada es igual a  $4\pi$  veces la carga total existente en la región  $V$  encerrada por la superficie.*

Entonces tenemos la expresión

$$\oiint E_n \, dS = 4\pi \sum_{(j) \in V} e_j \quad (3.11)$$

donde la suma se extiende solamente para las  $e_j$  que se encuentran en la región  $V$ .

Puede haber una distribución de cargas tan densa en la región

V que sea necesario agrupar las cargas dentro de un elemento de volumen  $dv$  en una carga total  $\rho dv$ , donde  $\rho$  representa la densidad de carga volumétrica. El teorema de flujo de carga es entonces

$$\iiint_{\text{vol}} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_{\text{vol}} \rho dv \quad (3.12)$$

en donde el volumen de integración debe extenderse a toda la región encerrada por la superficie. Con base en el teorema de Gauss<sup>3</sup> obtenemos la forma diferencial del teorema del flujo eléctrico

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (3.13)$$

Esta es la segunda ecuación de Maxwell para el caso especial de cargas en el vacío.

Si un número muy grande de cargas puntuales está distribuido en la inmediata vecindad de una superficie de tal manera que las

<sup>3</sup> Tenemos el teorema de Gauss en forma tradicional

$$\iint u_n dS = \iiint \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dv$$

entonces a partir de

$$\text{div } \mathbf{u} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint u_n dS$$

tenemos inmediatamente como la forma de la divergencia de  $\mathbf{u}$  la siguiente expresión

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

independiente de cualquier relación con la superficie  $S$ . La divergencia del campo  $\mathbf{u}$  es una cantidad escalar independiente de cualquier sistema de coordenadas. Esto también se deduce del hecho de que  $\text{div } \mathbf{u}$  se puede escribir obviamente como el producto del operador nabla  $\nabla$  con el vector  $\mathbf{u}$ :

$$\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Entonces el teorema de Gauss se puede escribir como

$$\iint u_n dS = \iiint \text{div } \mathbf{u} dv$$

cargas en el elemento de superficie  $dS$  puedan ser consideradas como una superficie de carga  $\omega dS$  con densidad de superficie  $\omega$ , entonces tenemos en la superficie una fuente de la componente normal de:

$$(E_n)_1 - (E_n)_2 = 4\pi \omega \quad (3.14)$$

en donde el índice 1 se refiere al mismo lado de la superficie que el indicado por la normal  $n$ .

Si la distribución de carga está dada, el potencial electrostático se puede calcular y con él, el campo eléctrico  $E$ . Para un sistema de cargas puntuales  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_h$  localizado en puntos cuyos vectores de posición son  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_h$ , tenemos que

$$\phi(r) = \sum_{j=1}^h \frac{e_j}{|r - r_j|} \quad (3.15)$$

Para determinar el campo eléctrico  $E$  a partir de sus fuentes tenemos que

$$\text{rot } E = 0 \quad \text{y} \quad \text{div } E = 4\pi\rho \quad (3.16)$$

entonces como  $E = -\text{grad } \phi$  la divergencia de  $E$  está dada por

$$\text{div } (-\text{grad } \phi) = 4\pi\rho \quad (3.17)$$

de donde obtenemos que

$$\nabla^2 = -4\pi\rho \quad (3.18)$$

denominada comunmente la *ecuación de Poisson*.

A partir de lo anterior y de la función  $\phi(r)$  definida mas arriba y cuando  $\rho(r')dv'$  se sustituye por  $e_j$  y  $r'$  por  $r_j$ , tenemos que

$$\phi(r) = \iiint \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dv \quad (3.19)$$

De manera correspondiente, para una distribución superficial de cargas tenemos que

$$\phi(r) = \iiint \frac{\omega(r')}{|r - r'|} ds' \quad (3.20)$$

### III.3 La Distribución de Carga en Conductores

En los problemas de electrostática los problemas rara vez son tan simples que la distribución de carga esté dada y el potencial evaluado con base en las ecuaciones de (r) que vimos en el apartado anterior. La distribución de carga en cuerpos metálicos se determina a partir de requerimientos particulares. Veamos.

Los metales, en su contacto simultaneo con otros dos cuerpos cargados diferentes, poseen la propiedad de conducir un determinada cantidad de carga de uno de los cuerpos al otro. Los materiales que poseen esta característica son denominados *conductores eléctricos* y a otros que no tienen esta propiedad se les llama *aislantes*. Estos tipos de cuerpos no son siempre fáciles de distinguir.

La decisión para describir a un objeto como un conductor o como un aislante depende esencialmente de la duración de la observación. Si el objeto es llevado a un campo electrostático se genera un campo dentro del objeto y este campo tiene en todos los casos como consecuencia una corriente eléctrica. Esta corriente tiene la tendencia a producir una distribución de carga en la superficie del cuerpo de tal manera que en cualquier punto del interior del cuerpo el campo externo se cancela exactamente. Cuando se alcanza esta condición tenemos otra vez frente a nosotros una condición electrostática en donde al interior del cuerpo, se obtiene un campo nulo en todos los puntos. Existen dos casos extremos posibles. Si el intervalo de tiempo para alcanzar

esta condición final es pequeño comparado con el tiempo de observación (ejemplo  $10^{-6}$  seg.); en este caso siempre encontraremos un campo cero dentro del objeto y por ende lo definimos como conductor. si por el contrario, el tiempo es muy largo; entonces cualquier corriente será tan pequeña que durante el tiempo de observación no existe ninguna influencia apreciable en lo que observamos. En este caso hablamos de un aislante. La electrostática pura, entonces, trata con cuerpos idealizados, para los cuales el tiempo es o infinitamente corto (metales) o infinitamente largo (aislantes). De esta forma en electrostática los metales se caracterizan por el hecho de que el campo E dentro del conductor es cero en todos los puntos. En otras palabras: *El potencial electrostático  $\phi$  en un conductor es constante.*

El campo de objetos metálicos cargados colocados en una región libre de otras cargas y de materia

En todo el espacio exterior

$$\text{div } E = - \text{div grad } \phi = -\nabla^2 \phi = 0 \text{ (ecuación de Laplace) } \quad (3.21)$$

En la región ocupada por el metal no existe campo y por consiguiente, ahí y en la superficie de cada conductor, el potencial tiene un valor constante

$$\phi = \text{constante} \quad E = 0 \quad \text{en el metal}$$

Al interior del metal, entonces, no existen cargas netas; existen sin embargo cargas en la superficie. De estas cargas de superficie de densidad  $\omega$  emana un flujo de fuerza eléctrica para el que tenemos



$$E_n = 4\pi\omega^4$$

(3.22)

siendo  $n$  la normal dirigida hacia el exterior. El conductor entonces lleva una carga total

$$e = \iint \omega \, dS = \frac{1}{4\pi} \iint E_n \, dS = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial\phi}{\partial n} \, dS \quad (3.23)$$

En general conocemos ya sea el campo  $E$  a partir del cual la distribución de carga en las superficies pudiera ser calculado, o la misma distribución es conocida y a partir de ella se puede conocer el campo. Esencialmente el problema básico de la electrostática, cuando están presentes conductores, consiste en resolver la ecuación de Laplace con las condiciones auxiliares que describimos de tal forma que el potencial del conductor individual coincide con los valores dados de  $\phi$  ó su carga total coincide con el valor de  $e$  dado. Entonces, para un cuerpo metálico,  $\phi$  ó  $e$  pueden ser especificados de antemano; el valor de la cantidad no especificada se obtiene de la solución del problema.

El hecho de que, con los requerimientos establecidos arriba, la solución esté determinada y sea única se desprende del teorema de Green. Para la región delimitada por la superficie del metal esta es

---

<sup>4</sup> En este punto vale la pena recordar el señalamiento que como la ecuación relaciona a  $E$  únicamente con  $\sigma$ , la densidad local de carga superficial, se puede suponer incorrectamente que  $\sigma$  es la fuente de  $E$ .  $E$  es el campo total producido por todas las cargas del sistema de las cuales la carga de superficie constituye sólo una parte. Como puede verse claramente en el problema que nos ocupa, la carga superficial en un conductor se reacomoda para satisfacer la relación aquí descrita.

$$\sum_1 \iint_{S_1} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = - \iiint (\text{grad } \phi)^2 dv \quad (3.24)$$

Suponiendo que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son dos soluciones del problema, entonces para  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ , debemos tener en cada superficie  $S_1$  ya sea que  $\phi = 0$  ó que

$$\iint \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = 0 \quad (3.25)$$

Consecuentemente, en el espacio total  $(\text{grad } \phi)^2 = 0$ ; esto quiere decir, sin embargo, que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  difieren por lo menos en una constante aditiva, esto cuando para cada conductor la carga  $e_1$  ha sido previamente especificada. Sin embargo, si para sólo uno de los conductores el potencial  $\phi$  ha sido definido, la magnitud absoluta del potencial en todos los puntos está determinada.

## Bibliografía

Classical Electrodynamics. J. D. Jackson. John Wiley & Sons. New York. 1962.

Div, Grad, Curl, and all that. An Informal Text on Vector Calculus. H.M. Schey. W. W. Norton & Company Inc. New York. 1973.

Electricidad. Carlos A. Coulson. University Mathematical Texts. Editorial DOSSAT. SA. Madrid. 1950.

Electricity and Magnetism. Berkeley Physics Course, Vol. 2. Mc GrawHill Book Company. New York. 1965.

Electromagnetic Fields and Interactions. Vol. 1. Electromagnetic Theory and Relativity. Richard Becker, Fritz Sauter. Blaisdell Publishing Company. New York. 1964.

Fundamentos de la Teoría Electromagnética. John R. Reitz, Frederick J. Milford. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. México. 1969.

## CAPITULO IV

### APLICACION AL PROBLEMA DEL CAMPO ELECTRICO EN UN DISCO CONDUCTOR EN PRESENCIA DE UNA CARGA PUNTUAL EXTERNA.

#### IV.1 Presentación del problema.

Un problema que no se resuelve en los libros de texto de electricidad, a cualquier nivel, es el de la distribución de carga en un disco metálico. A veces sólo se muestra la solución del problema. La razón es obvia. La solución de la ecuación de Poisson es sumamente compleja. Cuando el radio del disco tiende a infinito la solución de Poisson tiende a la solución sencilla que da el método de imágenes que se trata en todos los libros de texto, elementales o no.

La solución de la ecuación de Poisson para el disco es compleja pues depende de la geometría del metal. En esta sección, la principal de la tesis, aplicaremos las ideas expuestas en el primer capítulo para resolver indirectamente la ecuación diferencial que gobierna a la distribución de carga en el disco. En este caso se aprovechara de la simetría del disco para resolver más facilmente el problema.

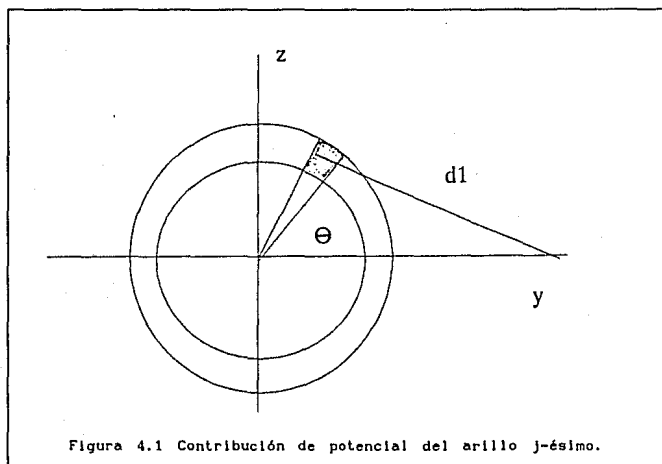
#### IV.2 Aplicación del Método de Markov.

Nos proponemos entonces encontrar una solución directa al problema planteado. En la construcción de esta solución aplicaremos el método descrito en el capítulo anterior. Veamos:

Dividimos la placa en anillos concéntricos de espesor  $\Delta r$

alrededor del eje X y obtenemos que la contribución de cada elemento del arillo  $j$ -ésimo a cualquier punto del plano está dado por:

$$d_1 = \sqrt{r_j^2 + y_1^2 - 2r_j y_1 \cos\theta} \quad (\text{ley de cosenos})$$



La contribución de potencial del elemento diferencial del arillo  $j$ -ésimo está dado por:

$$d\varphi = \frac{\sigma_j \Delta r r_j d\theta}{d_1} \quad (4.1)$$

de donde obtenemos que el potencial producido por el arillo de radio  $r_j$  en la posición  $y_1$  con  $z = 0$  es:

$$\begin{aligned} \varphi^\sigma(y_1, r_j) &= \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_j \Delta r r_j d\theta}{\sqrt{r_j^2 + y_1^2 - 2r_j y_1 \cos\theta}} \\ &= \sigma_j \Delta r r_j \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r_j^2 + y_1^2 - 2r_j y_1 \cos\theta}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

el potencial producido por el arillo  $r_j$  en la posición  $r_1$  es:

$$\varphi^\sigma(r_1, r_j) = \sigma_j \Delta r r_j F(r_1, r_j) \quad (4.3)$$

donde

$$F(r_1, r_j) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r_j^2 + r_1^2 - 2r_j r_1 \cos\theta}} \quad (4.4)$$

entonces el potencial producido por  $n$  anillos sobre  $r_1$  es:

$$\varphi_1^\sigma = \sum_{j=1}^n \sigma_j r_j F(r_1, r_j) \Delta r \text{ con } i \neq j \quad (4.5)$$

ahora:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{2\pi r_1 \Delta r} \quad (4.6)$$

La contribución de la carga externa al potencial en cada arillo está dada por:

$$\varphi_1^q = \frac{Q}{\sqrt{r_j^2 + h^2}} \quad (4.7)$$

entonces el potencial total sobre cada punto  $r_1$  está dado por:

$$\varphi_1^T = \varphi_1^\sigma + \varphi_1^q = \sum_{j=1}^n \sigma_j r_j F(r_1, r_j) \Delta r + \frac{Q}{\sqrt{r_j^2 + h^2}} \quad (4.8)$$

La superficie de la placa debe tender a ser equipotencial por consiguiente intentaremos igualar la carga entre cada dos anillos contiguos.

Al tiempo  $t = 0$  conocemos  $\sigma_j(0)$  dado  $q_j$  arbitraria<sup>5</sup>. Entonces, dado  $q_j(t)$  hacemos que:

<sup>5</sup> Como nos estamos refiriendo a un problema electrostático es necesario tener mucho cuidado en la interpretación que le damos al concepto tiempo en el presente trabajo. En realidad nos referimos a un tiempo virtual que corresponde a los ciclos de aplicación de la matriz de transición en el que se actualizan las cargas en cada uno de los  $n$  anillos del disco.

$$q_j(t+1) = q_j(t) - \Delta q_j(t) \quad y$$

$$q_{j+1}(t+1) = q_{j+1}(t) + \Delta q_j(t) \quad (4.9)$$

expresando lo anterior en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 - \frac{\Delta q_j(t)}{q_j(t)} & & \\ & \frac{\Delta q_j(t)}{q_j(t)} & & \\ & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_j(t) \\ q_{j+1}(t) \\ q_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(t+1) \\ q_j(t+1) \\ q_{j+1}(t+1) \\ q_n(t+1) \end{bmatrix}$$

Aparentemente la matriz anterior no es lineal. Una vez obtenida la expresión para  $\Delta q_j(t)$  haremos una referencia mas cuidadosa a esta condición.

en términos de  $\sigma$ :

$$\sigma_j(t) = \frac{q_j(t)}{2r_j \Delta r} \quad (4.10)$$

tenemos que:

$$\varphi_1^\sigma(t) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(r) r_j F(r_1, r_j) \Delta r \quad (4.11)$$

y sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} \varphi_1^\sigma(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{q_j(t) r_j F(r_1, r_j) \Delta r}{2r_j \Delta r} \\ &= \frac{1}{2r} \sum_{j=1}^n q_j(t) F(r_1, r_j) \end{aligned} \quad (4.12)$$

#### IV.2.1 Sin presencia de campo eléctrico externo.

Analicemos el problema tomando como caso inicial aquel en que no existe campo eléctrico externo, es decir sin presencia de carga externa.

La determinación de  $\Delta q_j(t)$  para equilibrar el potencial de los anillos  $j$  y  $j+1$  dado el tiempo  $t$  está dada por:

$$\varphi_1^\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n q_j(t) F(r_1, r_j)$$

$$\varphi_1^\sigma(t) = [q_1(t) F(r_1, r_j) + q_{i+1}(t) F(r_1, r_j) + \sum_j'' q_j(t) F(r_1, r_j)] / 2\pi$$

$$\varphi_{i+1}^\sigma(t) = [q_1(t) F(r_1, r_j) + q_{i+1}(t) F(r_1, r_j) + \sum_j'' q_j(t) F(r_1, r_j)] / 2\pi \quad (4.13)$$

al tiempo  $t+1$  se transfiere carga de  $i$  a  $i+1$  en una cantidad:

$\Delta q(t)_j$ , entonces:

$$\varphi_1^\sigma(t+1) = q_1(t+1) F(r_1, r_1) + q_{i+1}(t+1) F(r_1, r_{i+1}) + \sum_j'' q_j(t+1) F(r_1, r_j)$$

$$\varphi_{i+1}^\sigma(t+1) = q_1(t+1) F(r_1, r_{i+1}) + q_{i+1}(t+1) F(r_{i+1}, r_{i+1}) + \sum_j'' q_j(t+1) F(r_1, r_j)$$

(4.14)

con la condición:

$$\varphi_1^\sigma(t+1) = \varphi_{i+1}^\sigma(t+1) \quad (4.15)$$

entonces, como la carga se conserva, tenemos que:

$$q_1(t+1) = q_1(t) - \Delta q_1(t)$$

$$q_{i+1}(t+1) = q_{i+1}(t) + \Delta q_1(t) \quad (4.16)$$

sustituyendo:

$$\left[ q_1(t) - \Delta q_1(t) \right] F(r_1, r_1) + \left[ q_{i+1}(t) + \Delta q_1(t) \right] F(r_1, r_{i+1}) + \sum_j'' q_j(t) F(r_1, r_j) =$$



$$= \left( q_1(t) - \Delta q_1(t) \right) F(r_{1+1}, r_1) + \left( q_{1+1}(t) + \Delta q_1(t) \right) F(r_{1+1}, r_{1+1}) + \\ + \sum_j^n q_j(t) F(r_{1+1}, r_j)$$

de donde:

$$\begin{aligned} & \varphi_1^\sigma(t) + \Delta q_1(t) \left( F(r_1, r_{1+1}) - F(r_1, r_1) \right) = \\ & = \varphi_{1+1}^\sigma(t) + \Delta q_1(t) \left( F(r_{1+1}, r_{1+1}) - F(r_{1+1}, r_1) \right) \\ & \Delta q_1(t) \left( F(r_{1+1}, r_{1+1}) + F(r_1, r_1) - F(r_{1+1}, r_1) - F(r_1, r_{1+1}) \right) = \\ & = \varphi_1^\sigma(t) - \varphi_{1+1}^\sigma(t) \end{aligned}$$

hacemos que:

$$FF(r_1, r_{1+1}) = \left( F(r_{1+1}, r_{1+1}) + F(r_1, r_1) - F(r_{1+1}, r_1) - F(r_1, r_{1+1}) \right)$$

entonces:

$$\Delta q_1^\sigma(t) = \frac{\varphi_1^\sigma(t) - \varphi_{1+1}^\sigma(t)}{FF(r_1, r_{1+1})} \quad (4.17)$$

Ahora retomamos el analisis de los elementos de la matriz de transición. Como se recordará los términos fundamentales son:

$$1 - \frac{\Delta q_j(t)}{q_j(t)} \quad Y \quad \frac{\Delta q_j(t)}{q_j(t)}$$

sustituyendo la expresión para  $\Delta q_j$  tenemos que:

$$\frac{\Delta q_j(t)}{q_j(t)} = \frac{\varphi_j^\sigma(t) - \varphi_{j+1}^\sigma(t+1)}{FF(r_1, r_j)} / q_j(t)$$

sustituyendo en  $\varphi$  tenemos:

$$\frac{\Delta q_j(t)}{q_j(t)} = \frac{1}{2\tau} \frac{\sum_{i=1}^n q_i(t) F(r_i, r_j) - \sum_{i=1}^n q_{i+1}(t) F(r_i, r_j)}{q_j(t) FF(r_i, r_j)}$$

por consiguiente es evidente que la matriz es lineal solamente para el caso en que  $i$  es igual a  $j$ . En todos los demas casos, la matriz depende de la condición inmediata anterior del vector  $q_j$ . Esto quiere decir que la matriz de transición depende del presente para definir el siguiente paso, es decir, el futuro. En términos rigurosos este tipo de matriz de transición conforma un *Proceso de Markov* y no estrictamente una *Cadena de Markov* como puede verse en el primer capítulo. En el caso de nuestro problema, esta situación no es realmente significativa pues el Proceso de Markov, mantiene muchas de las propiedades y clasificaciones correspondientes a las propiamente denominadas Cadenas de Markov. En particular nos interesa que el proceso sea *absorbente* es decir que la carga total del disco metálico se conserve.

Muchos textos, que ponen menos énfasis en el formalismo teórico, manejan un concepto amplio de Cadena de Markov que engloba a casi todos los Procesos de Markov. Este es el caso del libro Stochastic Models for Social Processes que caracteriza a las matrices no lineales y dependientes del tiempo como Cadenas de Markov.

#### IV.2.2 Con Campo Eléctrico externo.

Analícemos ahora el segundo caso en donde existe una carga externa y por lo tanto un campo eléctrico externo. La distancia de la carga al plano está dada por  $h$  y el potencial en  $i$  debido a

esta carga puntual está dado por:

$$\varphi_1^q(t) = \frac{Q}{\sqrt{r_1^2 + h^2}} \quad (4.18)$$

este potencial es invariante en el tiempo para cada punto.

Como en el caso anterior, es necesario determinar  $\Delta q_j(t)$  para equilibrar el potencial de los anillos  $j$  y  $j+1$  dado el tiempo  $t$  está dada por:

$$\varphi_1^T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n q_j(t) F(r_1, r_j) + \frac{Q}{\sqrt{r_1^2 + h^2}} \quad (4.19)$$

desarrollando tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_1^T(t) &= q_1(t) F(r_1, r_j) + q_{i+1}(t) F(r_1, r_j) + \sum_j^n q_j(t) F(r_1, r_j) + \varphi_1^q(t) \\ \varphi_{i+1}^T(t) &= q_1(t) F(r_1, r_j) + q_{i+1}(t) F(r_1, r_j) + \sum_j^n q_j(t) F(r_1, r_j) + \varphi_1^q(t+1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

sabemos que al tiempo  $t+1$  se transfiere carga de  $i$  a  $i+1$  en una cantidad:

$$\Delta q_j(t)$$

de esta forma

$$\begin{aligned} \varphi_1^T(t+1) &= q_1(t) F(r_1, r_j) + q_{i+1}(t) F(r_1, r_j) + \sum_j^n q_j(t) F(r_1, r_j) + \varphi_1^q(t+1) \\ \varphi_{i+1}^\sigma(t+1) &= q_1(t) F(r_1, r_j) + q_{i+1}(t) F(r_1, r_j) + \sum_j^n q_j(t) F(r_1, r_j) + \varphi_{i+1}^q(t+1) \end{aligned}$$

con la condición:

$$\varphi_1^T(t+1) = \varphi_{i+1}^T(t+1) \quad (4.21)$$

entonces, como la carga se conserva, tenemos que:

$$q_1(t+1) = q_1(t) - \Delta q_1(t) \quad (4.22)$$

$$q_{i+1}(t+1) = q_{i+1}(t) + \Delta q_1(t) \quad (4.23)$$

como además la contribución de la carga externa es invariante en el tiempo  $\varphi_1^q(t) = \varphi_1^q(t+1)$ , sustituyendo :

$$\begin{aligned}
& \left( q_1(t) - \Delta q_1(t) \right) F(r_1, r_1) + \left( q_{1+1}(t) + \Delta q_1(t) \right) F(r_1, r_{1+1}) + \\
& \quad + \sum_j^n \bar{q}_j(t) F(r_1, r_j) + \varphi_1^q(t) = \\
& = \left( q_1(t) - \Delta q_1(t) \right) F(r_{1+1}, r_1) + \left( q_{1+1}(t) + \Delta q_1(t) \right) F(r_{1+1}, r_{1+1}) + \\
& \quad + \sum_j^n \bar{q}_j(t) F(r_1, r_j) + \varphi_{1+1}^q(t)
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
& \varphi_1^\sigma(t) - \Delta q_1(t) \left( F(r_1, r_{1+1}) + F(r_1, r_1) \right) + \varphi_1^q(t) = \\
& = \varphi_{1+1}^\sigma(t) + \Delta q_1(t) \left( F(r_{1+1}, r_{1+1}) + F(r_{1+1}, r_1) \right) + \varphi_{1+1}^q(t) \\
& \Delta q_1(t) \left( F(r_{1+1}, r_{1+1}) + F(r_1, r_1) - F(r_{1+1}, r_1) - F(r_1, r_{1+1}) \right) + \varphi_1^q(t) - \varphi_{1+1}^q(t) \\
& \quad = \varphi_1^\sigma(t) - \varphi_{1+1}^\sigma(t) + \varphi_1^q(t) - \varphi_{1+1}^q(t) \quad (4.24)
\end{aligned}$$

una vez más hacemos que:

$$FF(r_1, r_{1+1}) = \left( F(r_{1+1}, r_{1+1}) + F(r_1, r_1) - F(r_{1+1}, r_1) - F(r_1, r_{1+1}) \right)$$

entonces:

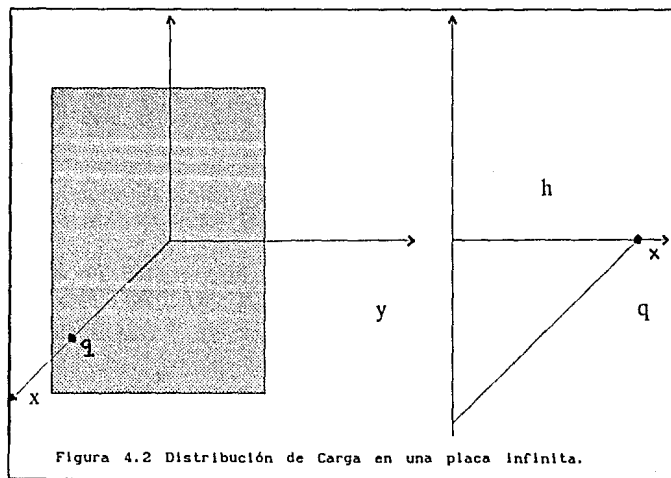
$$\Delta q_1^T(t) = \frac{(\varphi_1^\sigma(t) + \varphi_1^q(t)) - (\varphi_{1+1}^\sigma(t) + \varphi_{1+1}^q(t))}{FF(r_1, r_{1+1})} \quad (4.25)$$

y sustituyendo finalmente tenemos que:

$$\Delta q_1^T(t) = \frac{\varphi_1^T(t) - \varphi_{1+1}^T(t)}{FF(r_1, r_{1+1})} \quad (4.26)$$

#### IV.3.1 Distribución de Carga en una placa infinita.

Supongamos que el plano  $YZ$  es la superficie de un conductor que se extiende al infinito. Asignemos a este plano un potencial cero. Ahora acercamos una carga positiva  $Q$  a una distancia  $h$  del plano sobre el eje  $X$ . ¿Que tipo de campo y distribución de carga podemos esperar? Esperamos que la carga positiva  $Q$  atraiga carga negativa pero difícilmente ocurrirá que la carga negativa se agrupe en una concentración de densidad infinita al pie de la perpendicular con la carga  $Q$ . También sabemos que el campo eléctrico siempre es perpendicular a la superficie del conductor en esta misma superficie. En un punto muy cercano a la carga  $Q$ , la presencia del plano conductor hace muy poca diferencia; las líneas de campo deben partir de  $Q$  como si salieran de una carga puntual en forma radial. De esta forma esperaríamos un comportamiento cualitativo parecido al de la figura siguiente.



El comportamiento detallado del campo eléctrico aun es indefinido y, por supuesto, esperamos que este sea simétrico respecto al eje X.

#### IV.3.2 Solución por el Método de Imágenes.

Tenemos un problema sencillo cuya solución, o parte de ella, puede aplicarse al problema que nos ocupa. El problema de fácil solución es el de dos cargas puntuales iguales pero de signo diferente,  $Q$  y  $-Q$ . En el plano que bisecta la línea que une ambas cargas, el campo eléctrico es perpendicular a la superficie del mismo. Si hacemos que la distancia de  $Q$  al plano coincida con la distancia de nuestro problema original  $h$  la parte del campo que se encuentra entre el plano y la carga  $Q$  se comporta conforme a lo establecido en el problema original. El campo es perpendicular al plano del conductor y, en la vecindad de  $Q$ , se aproxima al campo de una carga puntual. El potencial del conductor esta fijo pero tenemos en el sistema una carga puntual en la cual el potencial se acerca a infinito. Podemos suponer que la carga puntual es el caso limite de un pequeño conductor esférico en el que la carga total  $Q$  es fija. Para estas condiciones a la frontera-potenciales dados en algunas superficies, carga total en otras-también existe un teorema de unicidad. Si nuestra solución prestada se comporta tan bien, tiene que ser la solución real al problema original.

Podemos calcular la magnitud y dirección del campo eléctrico en cada punto volviendo al problema de las dos cargas y usando la Ley de Coulomb. Consideremos un punto en la superficie a una distancia  $r$  del origen. El cuadrado de su distancia a  $Q$  es  $r^2+h^2$

y la componente X del campo de Q, en este punto, es:

$$-Q \cos\theta / (r^2 + h^2) \quad (4.28)$$

La "carga imagen"  $-Q$ , bajo el plano contribuye con una componente X igual a la anterior. Por consiguiente el campo eléctrico en este punto está dado por:

$$E_x = \frac{-2Q}{r^2 + h^2} \cos\theta = \frac{-2Q}{r^2 + h^2} \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{-2Qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (4.29)$$

Esto nos dice que la superficie tiene una densidad de carga  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{E_x}{4\pi} = \frac{-Qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (4.30)$$

La carga total de la superficie debe ser igual a  $-Q$ .

Para comprobar lo anterior integramos sobre la superficie:

$$\begin{aligned} \text{Carga total de la superficie} &= \int_0^{\infty} \sigma \, 2\pi r \, dr \\ &= -Q \int_0^{\infty} \frac{hr \, dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = -Q \quad (4.31) \end{aligned}$$

El método de solución utilizado aquí ha sido llamado tradicionalmente *método de imágenes*. Se podría describir mejor el método como un ejemplo de una aproximación más general que podía llamarse "ajuste de las condiciones de frontera a una solución".

#### IV.4 Aplicación de la matriz de transición para el caso de un disco metálico de radio finito.

Una vez obtenida  $\Delta q$  procedemos conformar la matriz de transición en los términos desritos en el apartado IV.2. Aplicamos repetidamente dicha matriz de transición hasta obtener un estado de equilibrio con potenciales iguales para todos los

puntos del disco,  $\varphi(r)=\text{constante}$ . Alcanzada esta condición, obtenemos los valores de  $q_1$  para cada uno de los arillos del disco. La carga  $q_1$  entre la superficie del arillo  $i$ -ésimo correspondiente nos da la densidad de carga  $\sigma_1$ .

Sabemos que el campo eléctrico en la superficie del disco es perpendicular al mismo en cada punto, por consiguiente, conocemos su dirección y obtenemos su magnitud a partir de  $\sigma$ , ya que

$$E_z = 4\pi\sigma$$

#### IV.4.1 Disco finito sin presencia de carga externa.

Analicemos el caso de un disco metálico de radio  $r = 1$  al que se ha cargado uniformemente con una carga total igual a 100 y sin presencia de carga externa. Al correr nuestro programa<sup>6</sup>, lo primero que éste hace es calcular la función  $FF(r_1, r_j)$  descrita en las secciones anteriores utilizando el método de cuadratura gaussiana de 8 puntos<sup>7</sup>. Con esto el programa calcula  $\Delta q$  hasta completar la matriz de transición.

Aplicamos sucesivamente la matriz de transición hasta alcanzar la condición de equipotencialidad. Entonces tenemos los siguientes resultados:

---

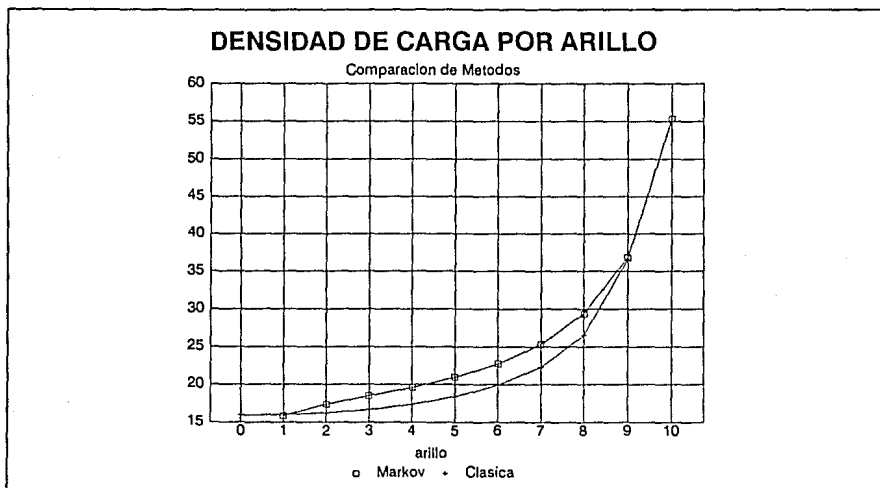
<sup>6</sup> El programa está elaborado en Turbo Pascal 5.0. Un listado del mismo se incluye como Apéndice A al final de trabajo.

<sup>7</sup> Ver Apéndice B en la última sección de este trabajo.



Método de Markov				Predicción Clásica
arillo	potencial	carga	densidad	densidad
1	1.4554E+02	4.98E-01	1.59E+01	1.60E+01
2	1.4554E+02	1.64E+00	1.74E+01	1.62E+01
3	1.4554E+02	2.90E+00	1.85E+01	1.67E+01
4	1.4554E+02	4.31E+00	1.96E+01	1.74E+01
5	1.4554E+02	5.92E+00	2.10E+01	1.84E+01
6	1.4554E+02	7.86E+00	2.27E+01	1.99E+01
7	1.4554E+02	1.03E+01	2.53E+01	2.23E+01
8	1.4554E+02	1.38E+01	2.94E+01	2.65E+01
9	1.4554E+02	1.96E+01	3.68E+01	3.65E+01
10	1.4554E+02	3.30E+01	5.54E+01	***

Gráficamente podemos observar el comportamiento de la densidad de carga en cada uno de los arillos con las siguientes características:



La predicción clásica se establece como un problema típico de condiciones mezcladas a la frontera<sup>8</sup>. Para la superficie del

<sup>8</sup>Ver Classical Electrodynamics. J. D. Jackson. J. Wiley (1962). Sección 3.12, "Mixed Boundary Conditions; Charged Conducting Disc". pp 89-93.

disco cargado tenemos que el potencial  $\Phi(\rho, 0) = \frac{q}{2} \frac{q}{a}$  donde  $a$  es el radio del disco y  $0 \leq \rho \leq a$ . De aquí tenemos que, para el caso de nuestro disco cargado, el potencial de equilibrio es  $\Phi = 157$  (el obtenido mediante Markov fue de  $\Phi = 145$ ). La densidad de carga esta dada por:

$$\sigma(\rho) = - \frac{q}{2\epsilon} * 1 / \sqrt{a^2 - \rho^2}$$

Con los resultados, para el caso de nuestro disco, que aparecen en la tabla anterior.

Como puede observarse los resultados obtenidos por ambos métodos son muy aproximados. Resalta la importancia del propuesto en este trabajo pues permite resolver el problema en la frontera (último arillo), en donde la predicción clásica presenta una singularidad matemática producto de la suposición de que el disco metálico es infinitamente delgado.

#### IV.4.2 Disco finito con presencia de carga externa.

Tomemos ahora el caso de un disco metálico de radio finito  $r = 1$  cargado uniformemente y en presencia de una carga externa con valor  $q = -100$  colocada a una distancia  $h = 0.1$  sobre la perpendicular a la superficie que pasa por el centro del disco.

A partir de la aplicación repetida de la matriz de transición hasta alcanzar la condición de equipotencialidad de todos los puntos de la superficie del disco obtenemos los siguientes datos:

Proceso de Markov				Método de Imágenes	
arillo	potencial	carga	densidad	densidad	densidad promedio
1	1.4423E+01	1.57E+01	5.00E+02	5.63E+02	1.08E+03
2	1.4423E+01	2.16E+01	2.29E+02	1.42E+02	3.53E+02
3	1.4423E+01	1.58E+01	1.01E+02	5.03E+01	9.63E+01
4	1.4423E+01	1.11E+01	5.03E+01	2.27E+01	3.65E+01
5	1.4424E+01	8.03E+00	2.84E+01	1.20E+01	1.74E+01
6	1.4424E+01	6.20E+00	1.79E+01	7.07E+00	9.54E+00
7	1.4424E+01	5.17E+00	1.27E+01	4.50E+00	5.79E+00
8	1.4425E+01	4.75E+00	1.01E+01	3.04E+00	3.77E+00
9	1.4425E+01	4.98E+00	9.33E+00	2.14E+00	2.59E+00
10	1.4425E+01	6.71E+00	1.12E+01	1.57E+00	1.86E+00

De una comparación entre el método propuesto en este trabajo y el tradicional de imágenes podríamos esperar que al simular la existencia de una placa infinita los resultados obtenidos fueran prácticamente equivalentes. La simulación mas común de la condición infinita de la placa se haría aumentando sucesivamente el radio del disco metálico. En nuestro caso, esto requeriría de la división en un número mayor de anillos (actualmente hemos utilizado un disco de radio  $r = 1$  subdividido en 10 arillos) que garantizara que estos tuvieran un espesor suficientemente pequeño.

Como el interés de este trabajo no radica en encontrar un solución numérica precisa del problema sacrificamos precisión en el cálculo por sencillez en la programación. Procedimos entonces a acercar sucesivamente la carga puntual al plano del disco de tal forma que esta distancia fuera sumamente pequeña en comparación con el radio del disco. Este procedimiento nos permitiría obtener un comportamiento cualitativo similar al previsto por el método de imágenes. De antemano esperamos que cuando el valor en la orilla del disco, muestre una mayor concentración de carga que la

prevista en el método de imágenes. De la misma forma esperamos que la densidad de carga en el centro del disco sea bastante menor que la obtenida por imágenes a diferencia de lo que ocurre con una placa infinita como en el caso de el método de imágenes.



El comportamiento cualitativo de las soluciones es muy similar. Las diferencias fundamentales radican, como esperabamos, en la alta concentración de carga para los primeros arillos en el caso de la placa infinita (método de imágenes) y en el crecimiento de la carga para los arillos extremos del disco finito para la solución obtenida mediante el proceso de Markov. Es evidente que la aproximación puede mejorarse reduciendo el tamaño de los anillos y ampliando su número.

## Bibliografía

Classical Electrodynamics. J. D. Jackson. John Wiley & Sons. New York. 1962.

Análisis Numérico. S.D. Conte - Carl de Boor. Mc Graw Hill. Segunda Edición. México. 1980.

Computer Applications of Numerical Methods. Shan S. Kuo. Addison Wesley. Massachusetts. 1972.

Electricidad. Carlos A. Coulson. University Mathematical Texts. Editorial DOSSAT. SA. Madrid. 1950.

Electricity and Magnetism. Berkeley Physics Course, Vol. 1. Mc Graw Hill Book Company. New York. 1965.

Electromagnetic Fields and Interactions. Vol. 1. Electromagnetic Theory and Relativity. Richard Becker, Fritz Sauter. Blaisdell Publishing Company. New York. 1964.

Finite Markov Chains. Undergraduate Texts in Mathematics. John G. Kemeny, J. Laurie Snell. Springer-Verlag. New York. 1960.

Fundamentos de la Teoría Electromagnética. John R. Reitz, Frederick J. Milford. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. México. 1969.

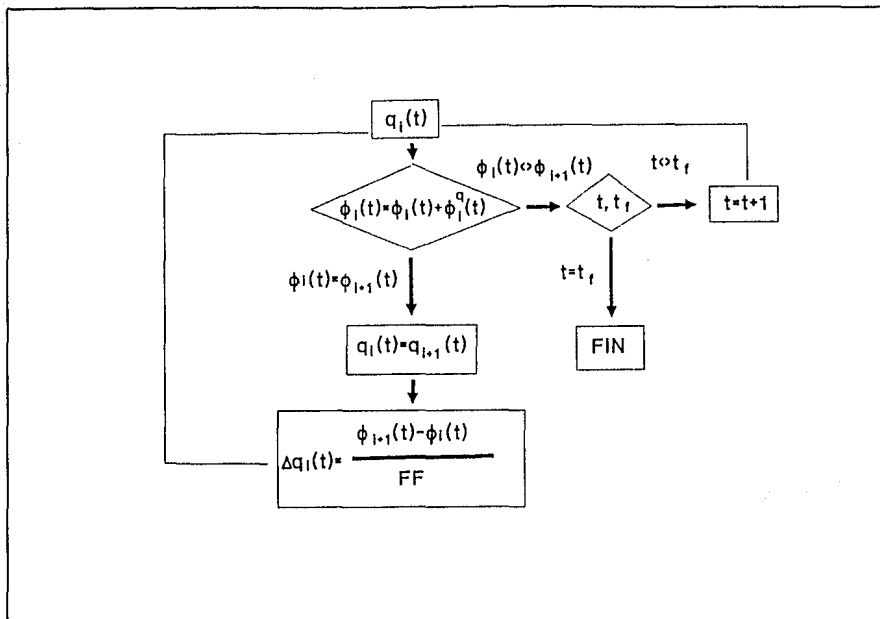
Stochastic Models for Social Processes. D.J. Bartholomew. John Wiley & Sons. 2nd. Edition. Great Britain. 1978.

El proceso de elaboración de este trabajo de tesis ha sido sumamente rico y provechoso. Nos ha permitido familiarizarnos con una metodología cuyas aplicaciones son múltiples y diversas en áreas y campos del conocimiento completamente disímolas.

Del trabajo previo es posible extraer conclusiones relevantes en varios ámbitos. Analicemos sucintamente las siguientes:

1.- En primer lugar queda plenamente demostrado el hecho de que la construcción de la cadena de Markov y su matriz de transición, deducidas intuitiva y analíticamente a partir de la física del problema descrito, son plenamente equivalentes a la solución de una ecuación diferencial, en este caso la ecuación de Poisson.

2.- El método utilizado, conceptualmente muy sencillo, da lugar a un algoritmo o diagrama de solución que permite una fácil visualización del desarrollo de la solución del problema y establece una base directa para la programación y simulación del fenómeno físico. El algoritmo es el siguiente:



3.- Los resultados obtenidos por este método coinciden plenamente con los que se reportan en algunos textos tradicionales.. A diferencia de éstos, desarrolla la solución del problema en lugar de simplemente describir cualitativamente el resultado omitiendo un cálculo que se ha obtenido por procedimientos complejos y no siempre accesibles al lector.

4.- Las condiciones anteriores destacan la utilidad didáctica del método estocástico como procedimiento que permite visualizar con mucha claridad y sencillez el proceso de solución de un problema que involucra ecuaciones diferenciales y cálculos numéricos.

5.- El acceso casi indiscriminado a facilidades de cómputo ha abierto una nueva veta en la presentación de problemas tradicionales en la enseñanza de la física. En este marco cada

vez adquieren más importancia los trabajos de simulación, que se desarrollan en todo tipo de computadoras, desde las *supercomputadoras* para simulación de problemas sumamente complejos y cálculos numéricos extensos y muy complicados hasta las *microcomputadoras*, cuya capacidad de desarrollo de métodos numéricos ha aumentado, adquiriendo mayor velocidad y que han permitido la *popularización* de los problemas de simulación.

6.- Una vertiente que no está desarrollada en este trabajo pero que de alguna manera se apunta y que se hizo muy evidente durante la revisión bibliográfica y la elaboración de esta tesis es la posibilidad de generalizar las aplicaciones de las cadenas de Markov a la solución de problemas discretos de muy diversos tipos. Como se señalaba anteriormente las aplicaciones abarcan campos muy diversos en ciencias naturales, exactas y sociales. Generalmente han estado asociados a estudios sobre poblaciones y a descripciones cuantizadas. En Ciencias Sociales destacan los análisis de población, de comportamiento de fuerza de trabajo y de comportamiento de clases sociales. En biología destaca el estudio de poblaciones, tanto en zoología como en botánica, comportamiento de plagas y extensión de epidemias. En Ciencias de la Tierra resaltan los modelos de predicción del clima. Paralelamente al trabajo de esta tesis desarrollamos una aplicación para simular el comportamiento de paquetes de ondas en presencia de pozos y barreras de potencial. Como en este trabajo el resultado fue un método sencillo y evidente para describir un fenómeno físico bastante complejo cuyas soluciones numéricas resultaban enormemente complicadas y poco accesibles.

7.- Particularizando en el problema electrostático analizado en



el capítulo IV es importante señalar que cuando nosotros simulamos una placa metálica infinita nuestra solución se asemeja, en términos cualitativos, a la obtenida mediante el método de imágenes.

8.- Durante el desarrollo del presente trabajo nos preguntamos si en realidad este proceso de solución por cadenas de Markov no era en los hechos mas que una forma de solución mediante el método de relajación. Inicialmente llegamos a concluir que era expresión particular de dicho método. Posteriormente encontramos que a pesar de ser equivalentes presentaban diferencias sustanciales. El método de Markov funciona a partir del intercambio de población, en nuestro caso de carga eléctrica, el método de relajación funciona a partir del promedio del potencial en un punto dado con los de aquellos que lo rodean inmediatamente. En el libro Electricity and Magnetism del Berkeley Physics Course se señala lo siguiente en referencia al método de relajación:

"...[existe] un método numérico para encontrar soluciones aproximadas del potencial electrostático con condiciones a la frontera dadas. ... este método se basa en esa propiedad especial de de las funciones armónicas con la que ya estamos familiarizados: El valor de la función en un punto es igual a su promedio sobre la vecindad del punto. En este método la función potencial  $\phi$  esta representada por valores en un arreglo de puntos discretos solamente, incluyendo puntos discretos en las fronteras. Los valores en los puntos que no son frontera, se ajustan hasta que cada valor es igual al promedio de los valores vecinos. En principio se podría hacer esto resolviendo una gran número de ecuaciones simultáneas, tantas como puntos interiores hubiera. Pero una solución aproximada se puede obtener de manera mucho más simple al cambiar sistemáticamente cada valor para hacerlo coincidir con el promedio de sus vecinos y repitiendo este proceso hasta que los cambios fueran tan pequeños que resultaran

despreciables. Esto se llama *método de relajación*.<sup>9</sup>

Los límites de este trabajo están bien establecidos. No parece entonces excesivo decir que se han cumplido los objetivos propuestos explícitamente en la introducción. La originalidad de la tesis radica en la aplicación de un método poco común a la solución de un problema clásico de la teoría electrostática. En si mismo esto no es ninguna innovación, nunca pretendió serlo, sin embargo es una contribución que pretende simplificar la solución y la comprensión de problemas como el que aquí se presenta.

---

<sup>9</sup> Electricity and Magnetism. Berkeley Physics Course. Vol. 2. Mc Graw Hill. New York. 1965.

## APENDICES

APENDICE A

LISTADO DEL PROGRAMA PARA SIMULAR LA DISTRIBUCION DE CARGA EN UN  
DISCO DE RADIO FINITO

```

{ ----- }
Program Potenciales_en_metales;
{ ----- }
{$N+}
Uses Crt, Graph, Dos;
{ ----- }
Var
T                                     : Char;
i, k, l, g1, g2, xp, yp, ypq, yps, ypi, c, N, ciclo, ba,
GD, GM, MaxX, MaxY, LM, te           : Integer;
dr, su, Sum, Facx, Facy, qe, qd, sigma, h, Ro, qpi, alfa   : Double;
r, q, Pot, Pote, FT, Area, sig, sigp, qp   : Array [0..10] of Double;
FF                                     : Array [0..10, 0..10] of Single;
x1, x2, a, b : Single;
SF, ArchIntel, po, nombre2          : String[40];
cic                                  : String[2];
Tec                                  : String[1];
Label salte, otra;

{ ----- }
Function IntGauss(Var li, ls: Single): Double;
{ ----- }
Var i, j, N                            : Integer;
I1, I2, h, S, c, y, F1, F2, zz        : Double;
W, Z                                   : Array [1..8] of Double;
Function F(Var x: Double): Double; { Función a Integrar }
Begin
{===== Aquí se pone la función a integrar como función de x =====}
F:= 1/Sqrt(a+b*cos(x));
{=====}
End;
Begin
Z[1]:= 0.0950125098; W[1]:= 0.1894506104;
Z[2]:= 0.2816035507; W[2]:= 0.1826034150;
Z[3]:= 0.4580167776; W[3]:= 0.1691565193;
Z[4]:= 0.6178762444; W[4]:= 0.1495959888;
Z[5]:= 0.7554044083; W[5]:= 0.1246289712;
Z[6]:= 0.8656312023; W[6]:= 0.0951585116;
Z[7]:= 0.9445750230; W[7]:= 0.0622535239;
Z[8]:= 0.9894009349; W[8]:= 0.0271524594;
I1:= 0; I2:= 100;
N:= 2;

```

```

While Abs(I1-I2) > 1E-4 do
Begin
h:= (I1-I2)/(2*N);
S:= 0; I1:= I2;
For j:= 0 to N-1 do
Begin
c:= I1 + (2*j+1) * h;
For i:= 1 to 8 do
Begin
zz:= h * Z[i];
y:= c + zz; F1:= F(y);
y:= c - zz; F2:= F(y);
S:= S + W[i] * (F1+F2);
End;
End;
I2:= h * S;
N:= N + N ;
End;
IntGauss:= I2 + (I2 - I1) / 15;
End;

```

```

{-----}
Procedure GeneraIntegrales;
{-----}

```

```

Var i,j : Integer;
x3 : Single;
FileN : File of Single;
Begin
ArchIntel:= 'INTELIP3.DAT';
SF:= FSearch(ArchIntel,'');
If SF = '' then
Begin
x1:= 0; x2:= pi; x3:= x2;
Assign(FileN,ArchIntel);
Rewrite(FileN);
a:= 2; b:= -2; x3:= 0.001;
FF[1,1]:= Intgauss(x3,x2)+1.4142*sqrt(x3);
For i:= 1 to 10 do
For j:= i to 10 do
Begin
If i = j then
Begin
FF[i,i]:= FF[1,1]/i;
End Else
Begin
a:= i * i + j * j; b:= -2 * i * j;
FF[i,j]:= Intgauss(x1,x2);
End;
FF[j,i]:= FF[i,j];
Write(FileN,FF[i,j]);
End;
Close(FileN);
End else

```

```

Begin
  ArchIntel:= FExpand(SF);
  Assign(FileN,ArchIntel);
  Reset(FileN);
  For i:= 1 to 10 do
  For j:= i to 10 do
  Begin
    Read(FileN,FF[i,j]);
    FF[j,i]:= FF[i,j];
  End;
  Close(FileN);
End;
End;

```

```

{ ----- }
  Procedure PotencialesFijos;
{ ----- }

```

```

Begin
  For k:= 0 to N do
  Begin
    If qe <> 0 then
    Begin
      Pote[k]:= qe/Sqrt(h*h+Sqr(r[k])); { Potencial externo }
      { Densidad de carga según imagenes }
      sigp[k]:= (-qe)*h/(2*pi*Sqrt((h*h+Sqr(r[k]))*
      (h*h+Sqr(r[k]))))
    End else
    { Densidad de carga exacta según Jackson }
    If r[k] <> Ro then
      sigp[k]:= qd/(2*pi*Ro*Sqrt(Ro*Ro-r[k]*r[k]))
      else sigp[k]:= 0;
    End;
  End;
End;

```

```

{ ----- }
  Procedure Potencial;
{ ----- }

```

```

Begin
  For k:= 1 to N do
  Begin
    Sum:= 0;
    For l:= 1 to N do
    Begin
      sig[l]:= q[l]/Area[l];
      qp[l]:= sig[l] * r[l];
      Sum:= Sum + qp[l] * FF[k,l];
    End;
    Pot[k]:= Sum / alfa;
    { Writeln(Pot[k]:10:4); }
  End;

  { Para el potencial externo }
  If qe <> 0 then

```

```

For k:= 1 to N do
Begin
Pot[k]:= Pot[k] + (Pote[k-1]+Pote[k])/2;
End;
End;

```

```

{ ----- }
Procedure Datos;
{ ----- }
Var car,dis,rad,na : String[5]; sub : Integer;
Begin
sub:= 0;
If c <> 0 then sub:= 40;
Rectangle(0,459-sub,639,479-sub);
Str(qe:5:0,car);
Str(h:6:4,dis);
Str(Ro:5:1,rad);
OutTextXY(30,469-sub,'Carga Externa:'+car+', Distancia: '+dis+
',Radio:'+rad);
End;

```

```

{ ----- }
Procedure LeeTarjetaGrafica;
{ ----- }
Var GMM,GMC,co : Integer; TJ : String[4]; RE : String[8];
Label otra;
Begin
DetectGraph(G1,G2); GMM:= G2;
otra:
Case G1 of
1: Begin MaxY:= 199; TJ:= 'CGA';
Case G2 of
0,1,2,3 : Begin MaxX:= 319; RE:= '320X200'; End;
4 : Begin MaxX:= 639; RE:= '620X200'; End;
End;
9: Begin MaxX:= 639; TJ:= 'VGA';
Case G2 of
0 : Begin MaxY:= 199; RE:= '640X200'; End;
1 : Begin MaxY:= 349; RE:= '640X350'; End;
2 : Begin MaxY:= 479; RE:= '640X480'; End;
End;
End;
End;
InitGraph(G1,G2,'');
GotoXY(1,15);
TextColor(15);
Writeln('Su tarjeta gráfica es tipo ',TJ);
Writeln('La resolución es : ',RE,' (',GM:1,',)');
Writeln('Para cambiar la resolución introduzca un número',
' entre 0 y ',GMM:1,', distinto de ',GM:1);
ClrEol;
Readln(GMC);

```

```

If GMC <> GM then
    Begin
        GM:= GMC;
        Goto otra;
    End;
}
End;

{ ----- }
Procedure Grafica;
{ ----- }
Var esca,y1,y2 : Double; pro,ancho,sep,co : Integer;
    est : word; ar: String[2];
Begin
    esca:= 0.18;
    sep:= 15; est:= 1;
    ancho:= sep-2; pro:= 5;
    ClearViewPort;
    Datos;
    Rectangle(0,10,639,479);
    Rectangle(0,300,639,300);
    For k:= 1 to N do
        Begin
            xp:= Round(4*sep*(k-1));
            Rectangle(xp,300,xp+4*sep,350);
            SetColor(0);
            OutTextXY(xp+25,340,ar);
            Str(k,ar);
            SetColor(15);
            OutTextXY(xp+25,340,ar);
        End;

    { Opción de barras }
    For k:= 1 to N do
        Begin
            xp:= Round(4*sep*(k-1));
            yp:= Round(300-esca*Pot[k]/2*Facy);
            SetColor(15);
            SetFillStyle(est,2);
            Bar3D(xp,yp,xp+ancho,300,pro,True);
            ypq:= Round(300-esca*q[k]*8);
            SetColor(15);
            SetFillStyle(est,14);
            Bar3D(xp+sep,ypq,xp+ancho+sep,300,pro,True);
            yps:= Round(300-esca*sig[k]);
            SetColor(15);
            SetFillStyle(est,5);
            Bar3D(xp+2*sep,yps,xp+ancho+2*sep,300,pro,True);
            If (qe = 0) and (k = N) then ypi:= 300 else
            ypi:= Round(300-esca*(sigp[k-1]+sigp[k])/2);
            SetColor(15);
            SetFillStyle(1,4);
            Bar3D(xp+3*sep,ypi,xp+ancho+3*sep,300,pro,True);
        End;

```



```

    ba:= 25;    co:= 20;
    SetFillStyle(1,2);
    Bar(30+co,360,50+co,380);
    OutTextXY(60+co,370,' Potencial total');
    SetFillStyle(1,14);
    Bar(30+co,360+ba,50+co,380+ba);
    OutTextXY(60+co,370+ba,' Carga en el arillo');
    SetFillStyle(1,5);
    Bar(30+co,360+2*ba,50+co,380+2*ba);
    OutTextXY(60+co,370+2*ba,
    ' Densidad de carga en el arillo');
    SetFillStyle(1,4);
    Bar(30+co,360+3*ba,50+co,380+3*ba);
    If qe <> 0 then
    Begin
        OutTextXY(60+co,370+3*ba,
        ' Densidad de carga en el arillo de acuerdo a imagenes');
    End else
        OutTextXY(60+co,370+3*ba,' Densidad de carga exacta');
    SetColor(15);
End;
```

```

{ ----- }
  Procedure Enlista;
```

```

{ ----- }
```

```

  Begin
    Textmode(LM);
    Clrscr;
    Writeln;
    TextColor(13);
    Writeln('Carga externa : ',qe:6:2,', distancia: ',h:7:4,
    ',radio : ',Ro:7:2);
    TextColor(10);
    Writeln(' POTENCIAL          CARGA          DEN. MARKOV    ',
    ' DEN. CLASICA');
    TextColor(14);
    For k:= 1 to N do
    Begin
        Writeln(Pot[k]:10:4,' ',q[k]:10:2,' ',sig[k]:10:2,' ',
        sigp[k]:10:2);
    End;
  End;
```

```

  End;
```

```

{ ----- }
  Procedure Archiva;
```

```

{ ----- }
```

```

  Var FileM: Text;
  Begin
    Write('Nombre del archivo : ');
    Readln(nombre2);
    Assign(FileM,nombre2);
    Rewrite(FileM);
```

```

For k:= 1 to N do
Begin
  Writeln(FileM,Pot[k],',',q[k],',',sig[k],',',sigp[k]);
End;
Close(FileM);
End;

{ ----- }
{ Procedure Dibuja(Var op :Integer); }
{ ----- }
Var i,j,rp,yp,ra,d,nc,esc,c,co,ba : Integer;
    tp,ta : Double;
Begin

  esc:= 15; c:= 15; ta:= 1;
  ClearViewPort;
  Datos;
  If op = 0 then Grafica else
  Begin
    For i:= 1 to N do
    Begin
      ra:= esc*i;
      If op = 1 then
      Begin
        c:= 14;
        For j:= 1 to Round(8*q[i]) do
        Begin
          rp:= Round(ra - Random * esc);
          tp:= 2 * pi * Random;
          xp:= Round(ta*rp * cos(tp));
          yp:= Round(ta*rp * sin(tp));
          PutPixel(319+xp,224-yp,c);
        End;
      End;
    End;
    If op = 2 then
    Begin
      SetColor(c);
      nc:= Round(q[i]/i/4);
      For j:= 0 to nc do
      Begin
        d:= Round(esc*j/(nc+1));
        ra:= esc*(i-1)+ d;
        Circle(319,224,Round(ta*ra));
      End;
    End;
    SetColor(c);
    Circle(319,224,Round(ta*10*esc));
  End;
End;
End;

If op = 3 then Enlista;

End;

```

```

----- }
Procedure MueveCargas;
----- }
Var i: Integer; dq : Double;
Begin
  For i:= 1 to 9 do
    If Pot[i] <> Pot[i+1] then
      Begin
        dq:= alfa * (Pot[i]-Pot[i+1])/
          (FF[i+1,i+1]*r[i+1]/Area[i+1]
          -FF[i,i+1]*r[i+1]/Area[i+1]
          -FF[i+1,i]*r[i]/Area[i]
          +FF[i,i]*r[i]/Area[i]);

        q[i]:= q[i] - dq;
        q[i+1]:= q[i+1] + dq;
      {
        If q[i] < 0 then Begin
          q[i+1]:= q[i+1] + q[i];
          q[i]:= 0;
          End;
        If q[i+1] < 0 then Begin
          q[i]:= q[i+1] + q[i];
          q[i+1]:= 0;
          End;
      }
    }
  End;
End;

```

```

----- }
Procedure CompruebaCarga;
----- }
Var sus : String[5];
Begin
  su:= 0;
  For k:= 1 to N do
    su:= su + q[k];
    str(su:5:0,sus);
    If Round(10*sus) <> Round(10*qd) then Begin OutTextXY(1,1,sus);
    Readln; End;
  End;

```

```

----- }
Procedure Inicializa;
----- }
Begin
  FillChar(r, Sizeof(r), 0);
  FillChar(q, Sizeof(q), 0);
  FillChar(Pot, Sizeof(Pot), 0);
  FillChar(FT, Sizeof(FT), 0);
  FillChar(Area, Sizeof(Area), 0);
  FillChar(sig, Sizeof(sig), 0);
  FillChar(qp, Sizeof(qp), 0);
  FillChar(FF, Sizeof(FF), 0);
End;

----- }
{                               EMPIEZA PROGRAMA PRICIPAL                               }
----- }
Begin
  LM:= 3;
  otra:
  TextMode(LM);
  ClrScr;

  dr:= 0.1; N:= 10;
  Ro:= N*dr;
  alfa:= 2 * pi * dr;
  Inicializa;
  Write('CARGA EXTERNA : ');
  Readln(qe);
  qe:= -Abs(qe);
  If qe <> 0 then Begin
    Write('DISTANCIA AL DISCO : ');
    Readln(h);
    qd:= Abs(qe);
  End else
  Begin
    h:= 0;
    Write('CARGA EN EL DISCO : ');
    Readln(qd);
  End;

  sigma:= qd/pi/Ro/Ro;
  r[0]:= 0; Area[0]:= 0; q[0]:= 0;
  For k:= 1 to N do
  Begin
    r[k]:= k * dr;
    Area[k]:= pi * (2*k-1) * dr * dr; { q[k]:= 10 ;}
    q[k]:= sigma * Area[k];
  End;

```

```

Write('Opción de Gráfica : '); Readln(c);
If c < 0 then Goto salte;
Randomize;

LeeTarjetaGrafica;
Facx:= 30; Facy:= 0.8;

PotencialesFijos;
GeneraIntegrales;
Potencial;
Dibuja(c);
GotoXY(2,2);Readln;

ciclo:= 0;
Repeat
For k:= 1 to N do
Begin
  MueveCargas;
  Potencial;
  Dibuja(c);
End;
CompruebaCarga;
If c <> 3 then
Begin
SetColor(0);
OutTextXY(320,30,cic);
End;
ciclo:= ciclo + 1;
If c <> 3 then
Begin
Str(ciclo,cic);
SetColor(15);
OutTextXY(320,30,cic);
End;
Delay(100);
Until Keypressed;
If c = 3 then
Begin
  Write('Para guardar datos oprime la tecla <1> : ');
  Readln(Te);
  if Te = 1 then Archiva;
End;
Goto otra;
salte:
CloseGraph;
TextMode(LM);
End.
{ ----- }

```

APENDICE B  
INTEGRACION GAUSSIANA

Nuestro propósito es discutir la fórmula de integración Gaussiana que aproxima a la integral definida

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

y mostrar que por un simple cambio de variables, el procedimiento puede extenderse para límites de integración diferentes a  $(-1,1)$ .

Este método sirve para aproximarnos a la integral definida

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

por la expresión

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n) = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

donde  $w_0, w_1, \dots, w_n$  son los coeficientes de peso y  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son los puntos asociados. El problema básico es determinar estos  $2n+1$  constantes y nuestra suposición fundamental es que la ecuación anterior no involucra aproximaciones si el integrando  $f(x)$  es un polinomio de grado  $2n+1$  o menos.

En primer lugar es necesario mostrar que los puntos asociados  $x_k (k=0,1,\dots,n)$  son iguales a los valores de las raíces de un polinomio de Legendre  $P_{n+1}(x)$ .

Tomemos arbitrariamente un polinomio  $g_n(x)$  de grado  $n$ . Este polinomio puede escribirse en términos de los polinomios de Legendre como:

$$g_n(x) = \beta_0 P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \dots + \beta_n P_n(x)$$

De las relaciones de ortogonalidad de los polinomios de Legendre tenemos que:

$$\int_{-1}^1 g_n(x) P_{n+1}(x) dx = \int_{-1}^1 \beta_0 P_0 P_{n+1}(x) dx + \int_{-1}^1 \beta_1 P_1 P_{n+1}(x) dx + \dots + \int_{-1}^1 \beta_n P_n P_{n+1}(x) dx = 0$$

Es conveniente notar que  $g_n(x)P_{n+1}(x)$  es un polinomio de grado  $2n+1$ . Por consiguiente satisface el requerimiento básico en la selección de los coeficientes de peso  $w_k$  y los puntos asociados  $x_k$  ( $k=0,1,\dots,n$ ). Comparando las dos ecuaciones y tomando en cuenta que  $g_n(x)P_{n+1}(x)$  es el integrando, tenemos que:

$$w_0 g_n(x_0) P_{n+1}(x_0) + w_1 g_n(x_1) P_{n+1}(x_1) + \dots + w_n g_n(x_n) P_{n+1}(x_n) = 0$$

En la ecuación anterior,  $g_n(x)$  es un polinomio escogido arbitrariamente. Para cada valor de  $x_k$  ( $k=0,1,\dots,n$ ), encontramos que  $g_n(x_k)$  tiene un valor correspondiente. No todos los  $n+1$  valores correspondientes pueden ser igual a cero y no todos los  $n+1$  coeficientes de peso  $w_k$  ( $k=0,1,\dots,n$ ) pueden tampoco ser igual a cero. Si esto fuera así, entonces la ecuación anterior sería idénticamente igual a cero que es un caso trivial. Por consiguiente la única condición que dicha ecuación debe satisfacer es que:

$$P_{n+1}(x_0) = 0$$

$$P_{n+1}(x_1) = 0$$

⋮

$$P_{n+1}(x_n) = 0$$

En otras palabras, los puntos asociados  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son las

raíces de el polinomio de Legendre  $P_{n+1}(x) = 0$ . Existen  $n+1$  raíces reales diferentes en el intervalo  $(-1,1)$ . Por ejemplo, para  $n = 2$ , las raíces de  $P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) = 0$  son  $-\sqrt{3/5}$ ,  $0$  y  $\sqrt{3/5}$  respectivamente. En adelante tomaremos la  $x$  como  $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n$  para indicar las raíces del polinomio de Legendre  $P_{n+1}(x)$ .

Habiendo seleccionado los valores de  $x_k$  ahora vamos a determinar los valores de los coeficientes de peso  $w_k (k=0,1,\dots,n)$ . Recordamos que con base en el requerimiento básico, nuestra primera ecuación no debe involucrar ninguna aproximación si el polinomio  $f(x)$  es de grado  $2n+1$  o menor. Por la definición de polinomios de Legendre, cualquier polinomio  $h_n(x)$  de grado  $n$  que pase a través de los puntos  $x_k (k=0,1,\dots,n)$  puede ser expresado en la forma

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^n h_n(x_k) L_k(x)$$

entonces:

$$\int_{-1}^1 h_n(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n h_n(x_k) L_k(x) dx$$

y como  $h_n(x_k)$  es constante tenemos que

$$\int_{-1}^1 h_n(x) dx = \sum_{k=0}^n h_n(x_k) \int_{-1}^1 L_k(x) dx$$

comparando esta ecuación con la original tenemos:

$$w_k = \int_{-1}^1 L_k(x) dx \quad \text{con} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Como un detalle práctico para la computación frecuentemente



se calculan los coeficientes de peso  $w_k$  en términos de los polinomios de Legendre  $P_n(x)$ :

$$w_k = \frac{1}{P'_{n+1}(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{P_{n+1}(x) dx}{x - x_k}$$

Para establecer la validez de la ecuación anterior, primero destacamos que el polinomio

$$\frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k}$$

tiene valor cero para  $x = x_j$  ( $j \neq k, j = 0, 1, \dots, n$ ). Entonces, por la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k} = \left[ \frac{dP_{n+1}(x)/dx}{d(x - x_k)/dx} \right]_{x=x_k} = P'_{n+1}(x_k)$$

donde  $x_k$  es una de las  $n+1$  raíces del polinomio de Legendre  $P_{n+1}(x) = 0$ . De esta forma, se puede escribir una función  $L_k(x)$  como

$$L_k(x) = \frac{1}{P'_{n+1}(x_k)} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k}$$

como toma el valor 0 cuando  $x = x_j$  ( $j \neq k$ ) y el valor de 1 en  $x=x_k$ , donde la derivada de  $P_{n+1}(x_k)$  se ha establecido anteriormente, sustituimos en la expresión integral de  $w_k$  y obtenemos

$$\frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k}$$

Para extender este resultado a límites arbitrarios de integración a  $y$ ,  $b$ , respectivamente, tenemos que obtener una

relación que se mantenga para los límites -1 y 1. Hacemos esto usando simplemente la relación

$$x = \frac{(b - a)t + (b + a)}{2} \quad y$$

$$dx = \frac{b - a}{2} dt$$

APENDICE C  
BIBLIOGRAFIA GENERAL

- Análisis Numérico. S.D. Conte - Carl de Boor. Mc Graw Hill. Segunda Edición. México. 1980.
- Classical Electrodynamics. J. D. Jackson. John Wiley & Sons. New York. 1962.
- Computational Physics. Steve E. Koonin. The Benjamin/Cummins Publishing Company Inc. Menlo Park. 1986.
- Computer Applications of Numerical Methods. Shan S. Kuo. Addison Wesley. Massachusetts. 1972.
- Computer Power and Human Reason. Joseph Weizenbaum. W.H. Freeman and Company. San Francisco. 1976.
- Div, Grad, Curl, and all that. An Informal Text on Vector Calculus. H.M. Schey. W. W. Norton & Company Inc. New York. 1973.
- Electricidad. Carlos A. Coulson. University Mathematical Texts. Editorial DOSSAT. SA. Madrid. 1950.
- Electricity and Magnetism. Berkeley Physics Course, Vol. 2. Mc GrawHill Book Company. New York. 1965.
- Electromagnetic Fields and Interactions. Vol. 1. Electromagnetic Theory and Relativity. Richard Becker, Fritz Sauter. Blaisdell Publishing Company. New York. 1964.
- Finite Markov Chains. John G. Kemeny, J. Laurie Snell. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1976.
- Fundamentos de la Teoría Electromagnética. John R. Reitz, Frederick J. Milford. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. México. 1969.
- Numerical Solutions of Differential Equations. Isaac Fried. Academic Press. New York. 1979.
- Stochastic Models for Social Processes. D.J. Bartholomew. John Wiley & Sons. 2nd. Edition. Great Britain. 1978.