

01162

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS Y SOLUCION NUMERICA
DE FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO
A GASTO CRECIENTE

JUAN ANTONIO GONZALEZ CASTRO

T E S I S

PRESENTADA A LA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

(HIDRAULICA)

TESIS CON
FALLA LE ORIGEN

CIUDAD UNIVERSITARIA

MEXICO, D. F.

1991.



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

1.	INTRODUCCION	1
2.	ECUACIONES DINAMICAS PARA FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO	5
2.1	Desarrollo a partir del principio de cantidad de movimiento	6
2.2	Desarrollo a partir del principio de energía	9
2.3	Comparación entre las aproximaciones de cantidad de movimiento y energía	12
2.4	Discusión de las hipótesis más comúnmente establecidas para el desarrollo de la ecuación dinámica	14
2.5	Ecuaciones dinámicas simplificadas para gasto creciente	15
3.	SECCIONES DE CONTROL	18
3.1	Análisis del punto singular	19
3.2	Análisis del punto crítico	23
4.	METODO DE SOLUCION	25
5.	APLICACIONES	30
5.1	Información experimental	31
5.1.1	Experimentos de Guargã	31
5.1.2	Experimentos de Bremen y Hager	31
5.1.3	Experimentos del Laboratorio de Hidráulica de CFE	31
5.2	Solución numérica	32
5.2.1	Cálculos con los datos de Guarga	32
5.2.2	Cálculos con los datos de Bremen y Hager	33
5.2.3	Cálculos con los datos del Laboratorio de Hidráulica de CFE	33
5.3	Análisis y discusión de resultados	33
5.3.1	Perfiles de Guarga	33
5.3.2	Perfiles de Bremen y Hager	36
5.3.3	Perfiles del Laboratorio de Hidráulica de CFE	44
6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	49
	REFERENCIAS	52
	NOTACION	53
	APENDICE A. Desarrollo de las expresiones del capítulo 3	55
	APENDICE B. Programa de computadora	66

1. INTRODUCCION

El tipo de flujo unidireccional permanente donde el gasto es función de la distancia, se conoce como flujo espacialmente variado. La variación del gasto en el sentido del escurrimiento puede ser negativa (gasto decreciente) o positiva (gasto creciente).

El flujo espacialmente variado a gasto creciente se presenta, por ejemplo, en los vertedores con canal lateral que se usan como obra de excedencias en las presas, en plantas de tratamiento de agua en las estructuras colectoras a la salida de tanques de sedimentación, y en cunetas de drenaje en carreteras.

La forma más conocida de la ecuación diferencial que describe el flujo espacialmente variado (Chow, 1959), se basa en los principios de cantidad de movimiento y continuidad. Aunque para derivar la ecuación diferencial de flujo gradualmente variado se parte del principio de energía, entre esta ecuación y la de flujo espacialmente variado, la única diferencia estructural consiste en que en la de flujo espacialmente variado aparece un tercer término en el numerador, el cual toma en cuenta la variación del gasto en la dirección del flujo.

Tal vez el primer desarrollo de una ecuación diferencial para flujo espacialmente variado se debe a Hinds (1926). Por otra parte, Favre (1933) desarrolló una ecuación más completa considerando la fricción y la componente de la velocidad con se que se incorpora el gasto lateral al flujo principal. Li (1955) clasificó los perfiles de flujo en función de la pendiente del

fondo del canal para el caso de sección prismática.

Chow (1959) desarrolló dos ecuaciones para flujo espacialmente variado, una para gasto creciente y otra para gasto decreciente, y sugiere que pueden obtenerse con base en los principios de energía o de cantidad de movimiento.

Yen y Wenzel (1970) desarrollaron dos ecuaciones dinámicas generales para flujo espacialmente variado, válidas tanto para gasto creciente como decreciente; una se basa en el principio de cantidad de movimiento y la otra en el de energía. Partiendo de ellas e introduciendo las hipótesis comúnmente hechas (flujo unidireccional, canal de sección prismática, coeficientes de distribución de cantidad de movimiento, energía cinética y presión), se llega a ecuaciones estructuralmente distintas.

En este trabajo se presentan formas particulares de las ecuaciones desarrolladas por Yen y Wenzel (1970), obtenidas al introducir hipótesis apropiadas, en las cuales sólo aparecen parámetros conocidos *a priori* en aplicaciones prácticas.

De la ecuación general desarrollada con base en el principio de cantidad de movimiento, se deriva una ecuación que considera el efecto de la cantidad de movimiento con que se incorpora el gasto lateral al flujo principal, para el caso de vertedores con canal lateral. A partir de esta expresión, al desprestigiar el efecto de la cantidad de movimiento debido al gasto lateral, se obtiene una ecuación idéntica a la que presenta Chow (1959) para el caso de gasto creciente. De manera similar, con base en la ecuación general desarrollada a partir del principio de energía, se deriva una ecuación que considera el incremento de energía cinética causado por la velocidad con que ingresa el gasto lateral.

Uno de los procedimientos que se han empleado para calcular los perfiles en este tipo de flujo, consiste en resolver la ecuación de cantidad de movimiento empleando un método de incrementos finitos (Chow, 1959).

Li (1955) integró numéricamente una ecuación de flujo espacialmente variado a gasto creciente, desarrollada con base en el principio de cantidad de movimiento, para el caso de sección prismática, sin fricción y pendiente no nula. Para canal rectangular y flujo subcrítico, calculó el tirante que se presenta en el extremo de aguas arriba del canal y lo presenta en diagramas adimensionales. También señala Li que si la pendiente del canal es pequeña o nula, es necesario considerar el efecto de la fricción.

Guarga (1983) parte de la ecuación clásica (Chow 1959), para desarrollar una ecuación adimensional aplicable al caso de gasto creciente, considerando sección trapecial y despreciando el efecto de fricción. Con base en ella obtuvo una solución analítica para el caso de pendiente nula, en tanto que para pendiente no nula generó diagramas dimensionales mediante integración numérica.

Hager (1985) considera que la pendiente de fricción en un canal con gasto creciente puede representarse por el promedio de sus valores en los extremos. Al hacer tal hipótesis supone que la pendiente de fricción restada de la del fondo del canal es independiente de la distancia. Con esta suposición parte de una ecuación similar a la que usó Guarga (1983) para desarrollar una ecuación adimensional. De hecho, las soluciones que obtiene son también similares. Analiza dos casos: canal casi horizontal (diferencia de pendientes casi cero) y canal con pendiente apreciable (diferencia de pendientes positiva). Para el primer caso propone soluciones analíticas y para el segundo presenta gráficas dimensionales obtenidas mediante integración numérica parecidas a las propuestas por Guarga (1983).

Cuando se calcula el perfil por incrementos finitos, la sección de control se puede determinar con algún método gráfico (Hinds, 1926; Smith, 1967).

Para integrar numéricamente una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, es necesario disponer de condiciones iniciales de la variable desconocida. El cálculo de perfiles hidráulicos generalmente inicia en una sección de control. En flujo espacialmente variado, dicha sección puede ser un punto singular o un punto crítico, aunque en algunos casos el flujo puede depender del flujo que se da luego del flujo espacialmente variado. En un punto singular, simultáneamente numerador y denominador de la ecuación diferencial se hacen idénticos a cero, de modo que sus coordenadas se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales que esta condición genera. Por otra parte, la pendiente de la superficie libre en el punto singular es igual al valor límite de la forma indeterminada de la ecuación diferencial. Mediante la regla de L'Hopital puede obtenerse una expresión que permite calcular dicho valor límite.

Para encontrar las coordenadas del punto singular asociado a sus ecuaciones, tanto Guarga (1983) como Hager (1985) presentan diagramas dimensionales. Para el cálculo de la pendiente de la superficie libre en el punto singular, Guarga (1983) propone una expresión aproximada, que obtiene al incrementar las variables de su ecuación diferencial en valores muy pequeños. En su desarrollo supone que la derivada de la superficie libre en el punto singular

es igual al cociente de los incrementos y desprecia términos cuadráticos, lo que conduce a un polinomio cuadrático en la derivada, cuyos coeficientes son función de parámetros adimensionales. Hager (1985), por su parte, aplica la regla de L'Hopital a la ecuación adimensional que propone y obtiene también un polinomio de segundo grado en la derivada.

En este trabajo, para las ecuaciones simplificadas antes mencionadas (ecuación dinámica que considera el efecto del cantidad de movimiento con que ingresa el gasto lateral al flujo principal para el caso de canales con vertedor lateral, ecuación dinámica clásica y ecuación dinámica que considera la energía cinética con que ingresa el gasto lateral), se presentan dos tipos de expresiones, unas permiten determinar las coordenadas del punto singular y con las otras es posible calcular el valor límite de la pendiente de la superficie libre en el punto singular. Para el caso de punto crítico, se presentan dos maneras de aproximar el valor de la pendiente de la superficie libre, necesario como condición inicial para la integración numérica.

En el trabajo se propone un algoritmo para el cálculo de perfiles en flujo espacialmente variado a gasto creciente. Sus principales ventajas son: se puede identificar el tipo de control; se introducen expresiones para calcular el valor límite de la pendiente de la superficie libre para cuando el control es un punto singular, y para aproximarla cuando el control es un punto crítico; asimismo, se identifica cuándo el control depende de las condiciones de flujo aguas abajo. Su aplicación permite cálculos rápidos y directos, prescindiendo de diagramas, lo que, consecuentemente, simplifica el diseño.

Este algoritmo, adaptado a cada una de las ecuaciones dinámicas para flujo espacialmente variado que se presentan, se aplica a algunos datos experimentales reportados por Guarga (1983), Bremen y Hager (1989) y el Laboratorio de Hidráulica de la Comisión Federal de Electricidad (1990). Los perfiles calculados con cada ecuación dinámica se comparan entre sí y se contrastan contra las observaciones experimentales.

El trabajo comprende 6 capítulos: en el capítulo 2 se desarrollan las ecuaciones dinámicas. En el 3 se discuten las secciones de control. El algoritmo propuesto aparece en el capítulo 4. El capítulo 5 contiene las aplicaciones. Las conclusiones y recomendaciones se presentan en el capítulo 6. Se incluyen dos apéndices, en uno se detallan los desarrollos de las expresiones del capítulo 3, y el otro contiene el listado del programa de cómputo basado en el algoritmo propuesto, adaptado a la ecuación dinámica que se basa en el principio de cantidad de movimiento y considera el efecto del cantidad de movimiento debido al gasto lateral.

2. ECUACIONES DINAMICAS PARA FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO

Si bien es más conveniente partir del principio de cantidad de movimiento para desarrollar una ecuación dinámica para flujo permanente espacialmente variado, también es posible derivar una ecuación con base en el principio de energía, siempre que se introduzcan algunas hipótesis.

Aunque la ecuación de la energía en su forma original es válida en la línea de corriente, en el caso de flujo unidireccional su aplicación puede extenderse a toda la región de flujo mediante coeficientes apropiados de distribución de energía cinética y de presión (Rouse, 1970). Conforme al principio de conservación, para el caso de flujo espacialmente variado, el flujo neto de energía debe considerar la energía que el gasto lateral incorpora al flujo principal.

Ciertamente, la representatividad que de un fenómeno físico se obtiene con ayuda de un modelo matemático, depende de las hipótesis que sustentan al modelo; también es cierto que al derivar una ecuación dinámica para flujo permanente espacialmente variado partiendo del principio de energía, se hacen hipótesis más vulnerables que las que se hacen si se parte del principio de cantidad de movimiento. No obstante, el objeto de este capítulo es presentar los desarrollos partiendo de ambos principios, y analizar sus diferencias y aplicabilidad. En seguida se presentan estos desarrollos considerando algunas de las ideas de Yen y Wenzel (1970).

2.1 Desarrollo a partir del principio de cantidad de movimiento

En un canal recto, casi horizontal y de sección transversal uniforme, el tirante del flujo $y(x)$ se mide normal al fondo, siendo x la dirección del fondo del canal y y normal a él, fig. 2.1. El canal forma un ángulo θ con el plano horizontal, por lo que la pendiente del canal es $S_0 \approx \sin \theta$. En un punto del flujo, el vector velocidad tiene como componentes a v_x y v_y . El gasto lateral es $q(x)$, positivo para gasto entrando al canal y negativo si éste sale de él. En el punto que el gasto lateral entra o deja el flujo principal, q tiene velocidad U , cuya dirección forma un ángulo ϕ con el eje x .

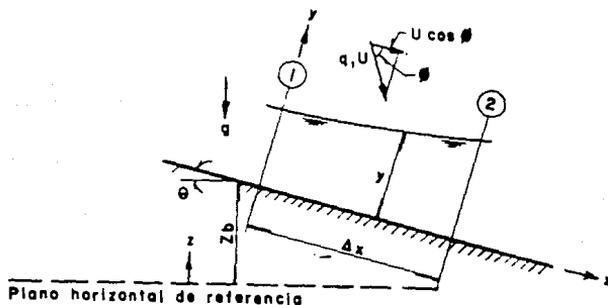


fig 2.1 Esquema de definición

Al considerar el principio de conservación de masa, para una sección del flujo

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (2.1)$$

como $Q = V A$

$$V \frac{dA}{dx} + A \frac{dV}{dx} = q \quad (2.2)$$

donde A es el área de la sección transversal y V es la velocidad promedio definida como

$$V = \frac{1}{A} \int v_x dA \quad (2.3)$$

Para un elemento de fluido considerado entre las secciones 1 y 2, como se muestra en la fig. 2.1, el cambio de cantidad de movimiento en la dirección x es

$$\Delta M = M_2 - (M_1 - M_L) \quad (2.4)$$

en donde

$$M_2 - M_1 = \int_A \rho v_x^2 dA \Big|_1^2 \quad (2.5)$$

es la diferencia de cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 2, y M_L , dado como

$$M_L = \rho q \Delta x U \cos \phi \quad (2.6)$$

es la cantidad de movimiento debido al gasto lateral.

Las fuerzas externas actuantes en el volumen de control son: la componente del peso en la dirección x, la resistencia al flujo en las paredes del canal y las fuerzas de presión actuantes en las secciones 1 y 2. La componente del peso es

$$W = \int_0^{\Delta x} \int_A \gamma S_o dA dx$$

en donde γ es el peso específico del fluido.

La resistencia al flujo es

$$F_f = \int_0^{\Delta x} \tau P dx$$

donde τ es el esfuerzo cortante medio en las paredes del canal en la dirección x y P es el perímetro mojado.

La diferencia de las fuerzas de presión en las secciones 1 y 2 es

$$F_p = \int_A p dA \Big|_1^2$$

en la cual p es la presión a una distancia z abajo de la superficie.

Al igualar el cambio total de cantidad de movimiento con la suma de fuerzas externas, dividir por Δx y evaluar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{d}{dx} \int \rho v_x^2 dA - \rho q U \cos \phi = \gamma S_o A - \tau P - \frac{d}{dx} \int p dA \quad (2.7)$$

Introduciendo el factor β de corrección de cantidad de movimiento se tiene que

$$\int_A \rho v_x^2 dA = \rho \beta A V^2 \quad (2.8)$$

También puede considerarse un factor de corrección de presión, tal que

$$\int_A p \, dA = K \gamma A y \cos \theta \quad (2.9)$$

al sustituir las ecs 2.8 y 2.9 en la 2.7 y tomar en cuenta que $R = \frac{A}{P}$

$$\frac{d}{dx} \left[\rho \beta A V^2 + \gamma K A \cos \theta \right] = \gamma S_o A - \tau \frac{A}{R} + \rho q U \cos \phi \quad (2.10)$$

Debe señalarse que tanto θ como q pueden ser funciones de x , y que se ha despreciado la componente de la fuerza debida a la presión sobre el fondo del canal en la dirección de x , por la variación de θ .

Tomando en cuenta el tirante hidráulico, $D = \frac{A}{T}$, donde T es el ancho de la superficie libre, se tiene que

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dx} \frac{dy}{dx} = T \frac{dy}{dx} = \frac{A}{D} \frac{dy}{dx} \quad (2.11)$$

Al desarrollar la ec 2.10, considerando las ecs 2.2 y 2.11 y despejando la pendiente de la superficie libre respecto a x , se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - \frac{\tau}{\gamma R} + \frac{q}{g A} (U \cos \phi - 2\beta V) - \frac{V^2}{g} \frac{d\beta}{dx} - y \frac{d}{dx} (K \cos \theta)}{K \cos \theta \left(1 + \frac{y}{D}\right) + \frac{\beta V^2}{g D}} \quad (2.12)$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

Si θ es constante, se considera presión hidrostática, $U \cos \phi = 0$, $\beta = 1$, $\cos \theta = 1$; se designa a $\frac{\tau}{\gamma R}$ como S_f y ya que el número de Froude es

$$F = \frac{V}{\sqrt{g D}}$$

La expresión anterior se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - \frac{2qQ}{g A^2}}{1 - F^2} \quad (2.13)$$

La ec 2.13 es una aproximación de la ecuación dinámica para flujo espacialmente variado, derivada con base en el principio de cantidad de movimiento.

2.2 Desarrollo a partir del principio de energía

Dado que en muchos problemas de Hidráulica se puede aceptar la aproximación unidireccional, se partirá de ella antes de hacer algunas consideraciones bidimensionales. Con referencia nuevamente a la fig. 2.1, la tasa de disipación de energía mecánica E_D dentro del elemento, es igual a la diferencia entre la energía en la sección 2, E_2 , y la energía en la sección 1, E_1 , más la energía debida al gasto lateral E_L , esto es

$$\Delta E = E_2 - (E_1 + E_L) = -E_D \quad (2.14)$$

La energía debido al gasto lateral es

$$E_L = \gamma q \Delta x \left[y_L \cos \theta + z_L + \frac{U_x^2}{2g} \right] \quad (2.15)$$

en donde $y_L \cos \theta + z_L$ es la carga piezométrica del gasto lateral en el instante de abandonar o incorporarse al flujo principal; U_x es la componente de la velocidad con que ingresa el gasto lateral en la dirección del flujo principal. La energía en las secciones 1 y 2 está dada respectivamente por

$$E_1 = \gamma Q_1 \left[y_1 \cos \theta + z_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \right] \quad (2.16)$$

$$E_2 = \gamma Q_2 \left[y_2 \cos \theta + z_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \right] \quad (2.17)$$

en las que $y \cos \theta + z$ es la carga piezométrica del flujo y α es el coeficiente de Coriolis de distribución de energía cinética.

Por continuidad

$$Q_2 = Q_1 + q \Delta x \quad (2.18)$$

Al sustituir las ecs 2.15 a 2.18 en 2.14, dividir por Δx y tomar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (y \cos \theta) + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{v^2}{2g} \right) &= S_o - S_o + \\ + \frac{q}{vA} \left[\left(y_L \cos \theta + z_L + \frac{U_x^2}{2g} \right) - \left(y \cos \theta + z + \alpha \frac{v^2}{2g} \right) \right] & \quad (2.19) \end{aligned}$$

en la que $S_o = -\frac{dz}{dx} = \sin \theta$; y S_o es el gradiente de energía disipada,

definido como

$$S_o = - \frac{1}{\gamma A V} \frac{dE}{dx} \quad (2.20)$$

Si se define $H_{PL} = y_L \cos \theta + z_L - z$, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_o + \frac{q}{VA} \left[\frac{U_x^2}{2g} - \frac{3\alpha V^2}{2g} + H_{PL} - y \cos \theta \right] - \frac{V^2}{2g} \frac{d\alpha}{dx} - y \frac{d}{dx} (\cos \theta)}{\cos \theta - \frac{\alpha V^2}{gD}} \quad (2.21)$$

para el caso especial en que $H_{PL} = y$, $\cos \theta = 1$, $U_x = \sqrt{\alpha} V$, $\alpha = 1$ y recordando la definición del número de Froude F , se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_o - \frac{qQ}{gA^2}}{1 - F^2} \quad (2.22)$$

Un inconveniente de la aproximación unidimensional de la energía es que no permite visualizar el trabajo efectuado por todas las fuerzas involucradas; tampoco la transformación de energía en la frontera, ni en el interior del volumen de control. Por esta razón, esta aproximación difiere de la aproximación que se obtiene a partir del principio de cantidad de movimiento. Con el fin de corregir esta desventaja, Yen y Wenzel (1970) examinan con mayor detalle la diferencia de energía entre las secciones 1 y 2 del volumen de control en cuestión. La aproximan como la suma algebraica de la energía cinética, la potencial respecto al fondo del canal, el trabajo efectuado por la fuerza debida a la presión externa en la dirección x y el trabajo realizado por la fuerza debida al peso. Al sustituir esta aproximación en la ec 2.14, considerar la transferencia de energía debida al gasto lateral y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se llega a la expresión siguiente

$$- \frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx} \int \left[\frac{\rho v^2}{2} + p + \gamma y \cos \theta \right] v_x dA + \int \gamma S_o v_x dA + \gamma q \left[H_{PL} + \frac{U_x^2}{2g} \right] \quad (2.23)$$

Esta ecuación aún involucra aproximaciones. Para señalar sus limitaciones, puede demostrarse, a partir de la ecuación general trabajo-energía presentada por Rouse (1959), que el gradiente de energía disipada debe expresarse como

$$- \frac{dE}{dx} = \int \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v_i' v_j'} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv \quad (2.24)$$

en donde v_i' y v_j' son las fluctuaciones turbulentas respecto de las componentes de la velocidad media temporal v_i y v_j ; i y j son direcciones ortogonales,

una de ellas la de x , y μ es la viscosidad dinámica del fluido. El término en que aparece μ representa la disipación de energía debido al trabajo efectuado por los esfuerzos viscosos impuestos por la continua deformación media temporal del fluido, descrita por los gradientes de velocidad. El término $\overline{\rho v_1' v_j'}$ representa la disipación de energía debido a los esfuerzos turbulentos, i.e. el trabajo efectuado por los esfuerzos de Reynolds dentro del volumen de control. Puede considerarse que tal transformación de energía primero es transferida del movimiento medio a turbulencia y luego disipada como calor. La magnitud del gradiente de energía disipada, calculado con la ec 2.24, difiere de la que se obtiene con la ec 2.23, pues en esta última se desprecian tanto los esfuerzos viscosos como los esfuerzos de Reynolds sobre la sección transversal y la superficie libre. Ello también implica que la componente x de una normal hacia afuera de la superficie libre es despreciable, que la magnitud de v_x es mucho mayor que la de v_y , además que

$$\frac{d}{dx} \int 2v_x \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} dA = 0 \quad (2.25)$$

Estas limitaciones implican esencialmente que tanto el tirante como la velocidad cambian gradualmente en la dirección de x .

La ec 2.23 puede transformarse a una forma similar a la de la ec 2.21; para ello se supone que $v = v_x$ y se introducen dos factores, uno de distribución de energía cinética, α , y otro η tal que

$$\int (p + \gamma y \cos \theta) v_x dA = \eta \gamma V A y \cos \theta \quad (2.26)$$

Al considerar las ecs 2.2, 2.20 2.25 y la definición de α , la ec 2.23 puede expresarse como

$$\frac{d}{dx} \left[y \cos \theta + \alpha \frac{v^2}{2g} \right] = S_0 - S_o + \frac{q}{VA} \left[h_{PL} + \frac{U^2}{2g} + \alpha \frac{v^2}{2g} - \eta y \cos \theta \right] \quad (2.27)$$

Finalmente, al desarrollar la ec 2.27 y tomando en cuenta las ecs 2.2 y 2.11, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_o + \frac{q}{VA} \left[h_{PL} + \frac{U^2}{2g} - \frac{3\alpha v^2}{2g} + \eta y \cos \theta \right] - \frac{v^2}{2g} \frac{d\alpha}{dx} - y \frac{d}{dx} (\eta \cos \theta)}{\cos \theta - \frac{\alpha v^2}{gD}} \quad (2.28)$$

Se nota claramente que la ec 2.21 es el caso particular de la ec 2.28, en que la distribución de presiones es hidrostática, i.e. $\eta = 1$.

2.3 Comparación entre las aproximaciones de cantidad de movimiento y energía

A pesar de que los principios de cantidad de movimiento y de energía derivan de la segunda ley de Newton, aunque el de energía también puede derivarse a partir de la primera ley de la termodinámica, (Daily, 1981; Levi, 1982), las aproximaciones para flujo espacialmente variado derivadas de ellos son distintas. La obtenida a partir de cantidad de movimiento es una relación vectorial en la que se toman en cuenta todas las fuerzas externas actuando sobre el volumen de control en consideración, incluyendo las fuerzas actuantes sobre su superficie, aunque no realicen ningún trabajo. La que se obtiene a partir de energía es una relación escalar que incluye tanto la energía transferida a través de la superficie de control como la disipación de energía generada por los esfuerzos internos. La diferencia puede notarse al comparar las ecs 2.12 y 2.28 así como sus deducciones, enseguida se destacan algunas de esas diferencias.

- 1) En la aproximación desarrollada a partir de cantidad de movimiento aparece un factor K de corrección de presión, diferente del factor η que aparece en la expresión desarrollada a partir de energía. El primero toma en cuenta la distribución de presión en la sección transversal, mientras que el segundo está relacionado con el trabajo efectuado por las fuerzas de presión y es función tanto de la distribución de presión como de la distribución de velocidad.
- 2) El factor β de corrección de cantidad de movimiento aparece sólo en la primera aproximación y el factor α de corrección de energía cinética, únicamente en la aproximación a partir de energía. En general $\alpha \neq \beta$, lo que refleja los diferentes efectos que la distribución de velocidad ejerce sobre la energía y la cantidad de movimiento.
- 3) En la aproximación mediante cantidad de movimiento sólo se consideran las componentes apropiadas de la velocidad de los flujos principal y lateral, en tanto que en la derivada de la energía se toma en cuenta la magnitud de los vectores velocidad de interés.
- 4) La energía potencial del gasto lateral no tiene efecto directo sobre la relación de cantidad de movimiento.
- 5) Excepto por la pendiente de fondo del canal S_0 , y la pendiente de la superficie libre, dy/dx , ningún otro gradiente es común a ambas aproximaciones. En realidad, para flujo establecido espacialmente variado hay seis gradientes involucrados:

- a) La pendiente del fondo del canal, S_o .
- b) La pendiente de la superficie libre, dy/dx .
- c) La pendiente de fricción, S_f .
- d) El gradiente de la energía disipada, S_o .
- e) El gradiente de la carga piezométrica con respecto al fondo del canal, dH_p/dx .
- f) El gradiente de la carga total,

$$S_H = - \frac{dH_T}{dx} \quad (2.29)$$

donde
$$H_T = H_p + z_b + \frac{\alpha V^2}{2g} \quad (2.30)$$

La primera pendiente es conocida; la segunda puede obtenerse mediante medición directa. El gradiente de carga piezométrica respecto al fondo del canal puede evaluarse si se conoce la distribución de presiones en el flujo, si ésta es hidrostática se hace igual a $\frac{d}{dx}$ (y $\cos \theta$). La pendiente del gradiente hidráulico es igual a la diferencia de $\frac{dH_p}{dx}$ y S_o .

Con las suposiciones hechas y a partir de las ecs 2.12, 2.28, 2.29 y 2.30, pueden obtenerse las relaciones siguientes

$$S_H = S_f + K \cos \theta \left(1 + \frac{y}{D}\right) \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx} (K \cos \theta) - \frac{dH_p}{dx} + \frac{d}{dx} \left[(\beta - \alpha) \frac{V^2}{2g} \right] + \frac{V^2}{2g} \frac{d\beta}{dx} - \frac{q}{gA} (U \cos \phi - \beta V) \quad (2.31)$$

$$S_o = S_f + \left[K \left(1 + \frac{y}{d}\right) - \eta \right] \cos \theta \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx} \left[\cos \theta (k - \eta) \right] + \frac{d}{dx} \left[(\beta - \alpha) \frac{V^2}{2g} \right] + \frac{V^2}{2g} \frac{d\beta}{dx} - \frac{q}{AV} \left[(\alpha - 2\beta) \frac{V^2}{2g} + \frac{VU \cos \phi}{g} - \frac{U^2}{2g} - H_{PL} + \eta y \cos \theta \right] \quad (2.32)$$

$$S_o = S_H + \frac{d}{dx} (H_p - \eta y \cos \theta) \frac{q}{AV} \left[H_{PL} - \frac{U^2}{2g} - \alpha \frac{V^2}{2g} - \eta y \cos \theta \right] \quad (2.33)$$

Al comparar las ecs. 2.31, 2.32 y 2.33, se notará que solamente para el caso de flujo uniforme, lo que implica que $q = 0$, los gradientes involucrados son idénticos.

Para la solución de alguna de las ecuaciones dinámicas es necesario calcular S_f o S_o , según la aproximación correspondiente. Ninguna de las dos se puede

estimar directamente (aunque S_f puede evaluarse si se mide τ o si se conoce la distribución de velocidad en el interior de la capa límite). Comúnmente S_f se aproxima mediante alguna de las expresiones desarrolladas para flujo uniforme (Manning o Chezy). Sin embargo, el gasto lateral afecta la distribución de velocidad y en consecuencia el esfuerzo cortante desarrollado en la frontera difiere del que se presenta en condiciones de flujo uniforme. Algo similar ocurre con la aproximación de S_o , aunque teóricamente puede evaluarse a partir de la expresión 2.24 y aproximadamente con la 2.23, ello también requiere de mediciones detalladas del flujo. Como puede apreciarse de las expresiones 2.31, 2.32 y 2.33, aun para flujo gradualmente variado sin gasto lateral, la suposición de que dos o más de los gradientes S_o , S_f , S_H , $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dH_p}{dx}$ son iguales es solamente una aproximación, a menudo suficiente para fines prácticos. No es posible saber cual pendiente, S_o o S_f , se aproxima mejor con las expresiones de flujo uniforme, aunque para el caso de gasto lateral ingresando a manera de lluvia, se ha estimado que se aproxima mejor a S_f . Por otra parte, quizá mediante la comparación de cálculos numéricos con resultados experimentales, sea posible estimar, para el caso de canales con vertedor lateral, a cual de las pendientes en cuestión, S_f o S_o , se aproxima mejor con la aplicación de las expresiones de flujo uniforme.

2.4 Discusión de las hipótesis comúnmente establecidas para el desarrollo de la ecuación dinámica

Chow (1959) presenta el desarrollo de dos ecuaciones dinámicas para flujo espacialmente variado. Las hipótesis planteadas para sus deducciones lo conducen, por un lado, a una ecuación que basada en el principio de cantidad de movimiento, para la que no considera la cantidad de movimiento debida al gasto lateral, resulta similar a la ec 2.22, en la que inconsistentemente se introduce el coeficiente de distribución de energía cinética en vez del de distribución de cantidad de movimiento, y restringe su aplicación al caso de gasto creciente sin plena justificación. Por el otro lado, desarrolla a partir del principio de energía un segunda ecuación, que considera aplicable al caso de gasto decreciente, con la hipótesis de que $S_o = S_f$, indicando que su naturaleza es similar a la que desarrolla para gasto creciente; estas ecuaciones difieren solamente en el coeficiente del tercer término del numerador.

Chow señala también que las ecuaciones anteriores pueden derivarse, la primera, a partir del principio de energía y, la segunda, a partir del principio de cantidad de movimiento, siempre que se tomen en cuenta algunas

variantes de las hipótesis, a saber: que para gasto decreciente no se agrega cantidad de movimiento al flujo, lo que implica que, en su desarrollo, el término que contiene el diferencial de gasto puede omitirse y conducir a una ecuación idéntica a su ecuación (Chow 1959, ec 12.8), de igual manera, al aplicar el principio de energía para el caso de gasto creciente, debe agregarse a la energía total la energía cinética debida al gasto lateral $\frac{\alpha V dq}{g A}$, lo que permite llegar a una expresión idéntica a otra de sus ecuaciones (Chow 1959, ec 12.5).

Henderson (1969) asegura que no existe una forma de la ecuación de energía aplicable al caso de gasto creciente y que la ecuación de cantidad de movimiento sí puede aplicarse puesto que el gasto lateral no agrega cantidad de movimiento en la dirección del flujo. Asimismo, supone que las pérdidas por descarga a gasto decreciente son pequeñas, que la energía es una propiedad del fluido que no se altera por división de flujo y que la componente de cantidad de movimiento saliente como efecto del gasto lateral no se puede evaluar de manera sencilla. Sobre estas bases desarrolla dos ecuaciones, una para gasto creciente a partir de cantidad de movimiento y otra para gasto decreciente a partir de la ecuación de energía.

French (1985) se refiere a la expresión desarrollada por Yen y Wenzel (1970) para el caso de gasto creciente, aunque no hace hincapié en su aplicación para gasto decreciente, como lo señalan los autores. Para el caso de gasto decreciente presenta un desarrollo similar al descrito por Chow y Henderson.

Si se analiza con cuidado, se podrá observar que las hipótesis planteadas por Chow, Henderson y French no son congruentes con el principio general de conservación, pues este implica que deben considerarse las variaciones netas de energía o cantidad de movimiento, sin importar si el flujo es a gasto creciente o decreciente. Bastará entonces con tomar en cuenta el principio general de conservación, para apreciar que se pueden desarrollar dos ecuaciones dinámicas, una aproximada mediante el principio de cantidad de movimiento, y la otra por medio del principio de energía; ambas son aplicables tanto al caso de gasto creciente como al de gasto decreciente. Las ecs. 2.12 y 2.28 satisfacen el principio general de conservación.

2.5 Ecuaciones dinámicas simplificadas para el caso de gasto creciente

Las ecuaciones dinámicas que aproximan el flujo espacialmente variado, desarrolladas a partir del principio de cantidad de movimiento (ec 2.12) y de energía (ec 2.28), contienen parámetros que difícilmente se conocen en la práctica; no obstante, la introducción de hipótesis adicionales, según el

caso, conduce a ecuaciones aplicables a problemas prácticos. Para gasto creciente las hipótesis son:

- Distribución hidrostática de presiones.
- Pendiente de la plantilla del canal, constante y pequeña ($\cos \theta \approx 1$).
- Coefficiente de distribución de cantidad de movimiento igual a uno.
- La pendiente de fricción se puede estimar con alguna expresión para flujo uniforme (e.g. Manning).

Con ellas y suponiendo que el gasto lateral entra perpendicular al flujo principal, a partir de la ec 2.12 se derivó la 2.13.

De manera similar, si se acepta que el gasto lateral entra verticalmente al canal, conforme a la fig 2.2 se tiene que el ángulo ϕ que forma la vertical con la plantilla del canal, es el complementario del ángulo θ que forma la plantilla del canal con la horizontal, de modo que $\cos \phi = \sin \theta \approx \tan \theta = S_o$.

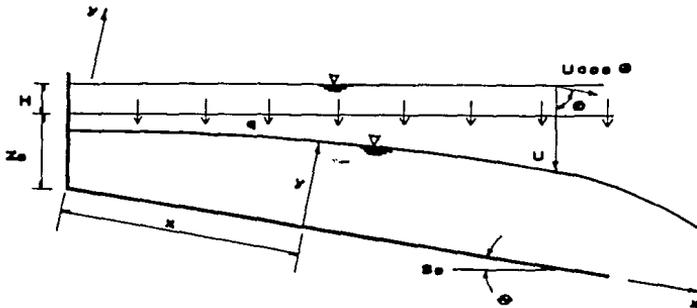


fig. 2.2 Gasto lateral entrando verticalmente

Puesto que la velocidad U con que el gasto lateral alcanza al flujo principal depende de la diferencia de elevaciones entre el nivel de agua sobre el vertedero lateral y la superficie libre en el canal, entonces $U = \sqrt{2g(z_0 + H + S_o x - y)}$ (Bremen y Hager, 1987), donde z_0 es la elevación de la cresta vertederosa respecto de la plantilla del canal en $x = 0$, fig 2.2. Introduciendo estas hipótesis y las de los incisos a, b, c y d, a la ec 2.12, se llega a la siguiente expresión para gasto creciente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - \frac{2qQ}{gA^2} + \frac{qS_o}{gA} \sqrt{2g(z_0 + H + S_o x - y)}}{1 - F^2} \quad (2.34)$$

Si se considera que el coeficiente de distribución de energía cinética es unitario, las hipótesis antes mencionadas respecto de ϕ y U , aceptando además que $S_o = S_f$, y las de los hipótesis de los incisos a, b y d, a partir de la ec 2.28, se llega a la siguiente expresión para flujo espacialmente variado a gasto creciente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - \frac{2qQ}{gA^2} \left[\frac{gA^2 S_o^2}{2Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{3}{4} \right]}{1 - F^2} \quad (2.35)$$

3. SECCIONES DE CONTROL

En los problemas de valores iniciales estudiados en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, debe conocerse un valor de la función integral y que para tal valor la función derivada esté definida. En el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen perfiles de flujo unidireccional, la condición inicial es un punto de control. Para integrar las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden 2.13, 2.34 ó 2.35, se requiere de un valor conocido del tirante y que para éste la derivada tome un valor finito.

En flujo permanente espacialmente variado a gasto creciente, cuando no le preceda otro tipo de flujo, el valor inicial del tirante puede estar asociado a un punto singular, un punto crítico o depender de las condiciones de flujo que se presentan aguas abajo del tramo con flujo espacialmente variado. Un punto singular es aquel en el que el valor de la derivada está indeterminado para la forma original de la ecuación diferencial (i. e. $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$). Para que el control se de en un punto singular, es necesario que la abscisa de este punto quede dentro del tramo con flujo espacialmente variado; si esto sucede, la ordenada del punto singular es el valor inicial que debe emplearse para la integración numérica, y su derivada puede calcularse como el valor límite de la forma indeterminada de la ecuación diferencial. Para que el control consista en un punto crítico, no debe existir un punto singular dentro del tramo de canal con flujo espacialmente variado, y, simultáneamente, la pendiente del fondo del canal debe ser supercrítica para el gasto total (gasto en el extremo aguas abajo del tramo de canal con flujo espacialmente variado)

o empieza a serlo justo donde termina el flujo espacialmente variado (este caso incluye la presencia de una caída). Si no existe la posibilidad de que el control se de en un punto singular o en uno crítico, el tirante inicial depende de las condiciones de flujo que se tienen aguas abajo del flujo espacialmente variado.

Desde luego que en un punto crítico las líneas de corriente dejan de ser paralelas, y consecuentemente la distribución de presiones ya no es hidrostática. Estrictamente, las ecs 2.13, 2.34 ó 2.35, se basan en la hipótesis de que la distribución de presiones es hidrostática, por lo que no son aplicables en los puntos críticos, en donde predican que $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$.

La condición $\frac{dy}{dx} = \infty$ implica que la superficie libre del agua sea vertical. En un punto crítico, esta condición resulta físicamente imposible, ya que ahí la pendiente de la superficie libre tomará valor finito, aun cuando en ese punto exista una caída.

Enseguida se analizan los puntos singular y crítico; se presentan expresiones que permiten calcular las coordenadas del punto singular y su derivada, para las ecuaciones arriba mencionadas, y expresiones que permiten aproximar la derivada para el caso de punto singular.

3.1 Análisis del punto singular

Considérese en general una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma siguiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \quad (3.1)$$

si en un punto (x_0, y_0) los valores del numerador y del denominador son idénticos a cero, se dice que éste es un punto singular de la ecuación. Sus coordenadas se pueden calcular resolviendo simultáneamente las ecuaciones que definen el numerador y el denominador. Evidentemente, la derivada en este punto no puede evaluarse mediante la ec 3.1. No obstante, puede calcularse como el valor límite de la forma indeterminada de la ecuación diferencial.

Para cualquier ecuación que tenga la forma de la ec 3.1, la aplicación de la regla de L'Hopital permite obtener una expresión para valuar la derivada en el punto singular.

Para el caso de las ecuaciones simplificadas de flujo espacialmente variado a gasto creciente, la expresión general que se obtiene para calcular el valor límite de la forma indeterminada de la ecuación diferencial en el punto

singular, es una ecuación de segundo grado en la derivada (y') de la forma siguiente

$$G y'^2 + M y' + N = 0 \quad (3.2)$$

en ella, los coeficientes dependen de la ecuación particular y de las coordenadas del punto singular.

Para el caso de las ecs 2.13, 2.34 y 2.35, la solución simultánea del numerador y denominador, conduce a funciones implícitas de la ordenada del punto singular.

En lo que sigue se presentan expresiones asociadas a las ecs. 2.13, 2.34 y 2.35; unas para determinar las coordenadas del punto singular y otras permiten evaluar los coeficientes de la ecuación cuadrática en la derivada, con la cual se calcula el valor límite de la derivada en el punto singular. Para su desarrollo se consideró sección prismática trapecial, gasto lateral constante y la pendiente de fricción se aproximó con la ecuación de Manning para flujo uniforme. En el apéndice A se presentan los desarrollos correspondientes.

a) Expresiones para la ecuación 2.13

La expresión para determinar el tirante y , en el punto singular es la siguiente

$$f(y) = S_0 - \frac{g}{T A^{1/3}} \left[\frac{n P^{2/3}}{C} \right]^2 - \frac{2q}{\sqrt{g A T}} = 0 \quad (3.3)$$

Los coeficientes de la ecuación de segundo grado que permite el cálculo del valor límite de la derivada en el punto singular son

$$G = - \frac{2Q^2}{gA^3} \left[k - \frac{1.5T^2}{A} \right] \quad (3.4)$$

$$M = \frac{8}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{\sqrt{1+k^2}}{A^{10/3}} P^{1/3} - \frac{10}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{P^{4/3} T}{A^{13/3}} - \frac{6qQT}{gA^3} \quad (3.5)$$

$$N = \frac{2n^2 Q q P^{4/3}}{C^2 A^{10/3}} + \frac{2q^2}{gA^2} \quad (3.6)$$

b) Expresiones para la ecuación 2.34

El valor del tirante en el punto singular se puede calcular con la ecuación

siguiente

$$f(y) = S_o - \frac{g}{TA^{1/3}} \left[\frac{nP^{2/3}}{C} \right]^2 - \frac{2q}{\sqrt{gAT}} + \frac{qS_o}{gA} \sqrt{2g \left[z_o + \left(\frac{q}{C_d} \right)^{2/3} \frac{S_o A}{q} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gAT} - y \right]} = 0$$

(3.7)

Los siguientes son los valores de los coeficientes de la ecuación cuadrática que permite calcular el valor límite de la pendiente de la superficie libre en el punto singular

$$G = - \frac{2Q^2}{gA^3} \left[k - \frac{1.5T^2}{A} \right] \quad (3.8)$$

$$M = \frac{8}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{\sqrt{1+k^2}}{A^{10/3}} P^{1/3} - \frac{10}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{P^{4/3}}{A^{13/3}} T - \frac{6qQT}{gA^3} +$$

$$+ \frac{qS_o}{A \sqrt{2g \left[z_o + \left(\frac{q}{C_d} \right)^{2/3} \frac{S_o A}{q} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gAT} - y \right]}} +$$

$$+ \frac{qS_o T}{gA^2} \sqrt{2g \left[z_o + \left(\frac{q}{C_d} \right)^{2/3} \frac{S_o A}{q} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gAT} - y \right]} \quad (3.9)$$

$$N = \frac{2n^2 Q q P^{4/3}}{C^2 A^{10/3}} + \frac{2q^2}{gA^2} - \frac{qS_o^2}{A \sqrt{2g \left[z_o + \left(\frac{q}{C_d} \right)^{2/3} \frac{S_o A}{q} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gAT} - y \right]}} \quad (3.10)$$

c) Expresiones para la ec 2.35

El tirante en el punto singular se calcula con la expresión siguiente

$$f(y) = S_o + S_o^3 - \frac{g}{TA^{1/3}} \left[\frac{nP^{2/3}}{C} \right]^2 + \frac{q}{A \sqrt{gAT}} \left[S_o^2 \left[z_o + \left(\frac{q}{C_d} \right)^{2/3} - y \right] - \frac{3A}{2T} \right] = 0 \quad (3.11)$$

Los coeficientes de la ecuación cuadrática que permite calcular el valor límite de $\frac{dy}{dx}$ en el punto singular son

$$G = -\frac{2Q^2}{gA^3} \left\{ k - \frac{1.5T^2}{A} \right\} \quad (3.12)$$

$$M = \frac{8}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{\sqrt{1+k^2}}{A^{10/3}} P^{1/3} - \frac{10}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{P^{4/3}}{A^{13/3}} T - \frac{5qQT}{gA^3} - \frac{q}{Q} S_o^2 \quad (3.13)$$

$$N = \frac{2n^2QqP^{4/3}}{C^2A^{10/3}} + \frac{3}{2} \frac{q^2}{gA^2} - \frac{q^2}{Q^2} S_o^2 \left[z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{2/3} - y \right] \quad (3.14)$$

En cualquier caso, una vez conocido el tirante en el punto singular, puesto que en la sección de control $F = 1$, el gasto en esta sección, Q_c , se puede calcular como

$$Q_c = A \sqrt{gAT} \quad (3.15)$$

La abscisa en el punto singular se calcula simplemente como:

$$x = \frac{Q_c}{q} \quad (3.16)$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado en y' , que permite calcular el valor límite de la pendiente de la superficie libre en el punto singular, satisfacen a dos funciones integrales distintas, de las cuales sólo una se ajusta a las condiciones aguas arriba y aguas abajo de la sección de control y es la que corresponde a la pendiente de la superficie libre del flujo.

El comportamiento de las soluciones de la ecuación sigue al descrito en el análisis de puntos singulares de Henri Poincaré (1881) y retomado por Escoffier (1956) para el caso de perfiles hidráulicos en flujo gradualmente variado con pendiente variable.

La aplicación de las ecuaciones presentadas ha permitido observar que la solución correspondiente al signo negativo del radical (en la fórmula general que resuelve las ecuaciones de segundo grado), es la asociada a cambio de régimen subcrítico a supercrítico.

En flujo espacialmente variado los tipos de punto singular que puede presentarse, para que dicho punto sea control, son punto silla o punto nodo, aunque generalmente se presenta punto silla, ver fig. 3.1.

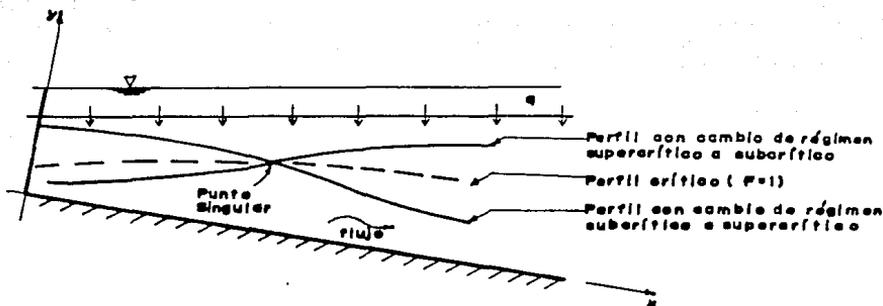


fig.3.1- Punto singular tipo silla en flujo espacialmente variado a gasto creciente

3.2 Análisis del punto crítico

Un punto crítico se presenta al final del tramo de canal con flujo espacialmente variado, ya sea porque, para el gasto total, la pendiente del canal es supercrítica o cambia de subcrítica a supercrítica (este caso incluye la presencia de una caída).

Si bien la pendiente de la superficie libre no puede calcularse con ninguna de las ecuaciones dinámicas para flujo espacialmente variado cuando el control es un punto crítico, para proceder con la integración numérica se requiere aproximar o estimar dicha pendiente. Aunque sin fundamento teórico, en lo que sigue se presentan dos métodos para aproximar el valor de la derivada en el punto crítico.

El primer método consiste en considerar al punto crítico como un punto singular. Si se toma en cuenta que q se hace cero en $x = L$, en esta sección las ecs 2.13, 2.34 ó 2.35 para flujo espacialmente variado, se reducen a la ecuación dinámica para flujo gradualmente variado

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F^2} \quad (3.17)$$

Para esta ecuación es posible aplicar un análisis similar al de punto singular. De esta manera, se dispondrá de una aproximación del valor de la derivada en el punto crítico, necesario para la integración numérica.

El tirante en el punto crítico se calcula como se hace para flujo gradualmente variado, es decir se calcula mediante la expresión siguiente (Chow, 1959)

$$f(y) = \frac{Q}{A \sqrt{gAT}} - 1 = 0 \quad (3.18)$$

La ecuación que aproxima el valor de la pendiente de la superficie libre en el punto crítico es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \left[4 \left[\frac{P}{A^{10}} \right]^{1/3} \sqrt{1+k^2} - 5T \left[\frac{P^4}{A^{13}} \right]^{1/3} \right]}{\left[\frac{3T}{A} - \frac{2k}{T} \right]} \quad (3.19)$$

Es importante mencionar que con esta aproximación, la expresión de la derivada válida en el punto crítico es única, a diferencia de las expresiones desarrolladas para el punto singular en flujo espacialmente variado y para el caso de flujo gradualmente variado con pendiente variable. El desarrollo de la ec 3.19 también se presenta en el apéndice A.

Otra forma de estimar el valor de la pendiente de la superficie libre en el punto crítico, consiste en evaluar el numerador de la ecuación diferencial para el tirante crítico, y asignarle al número de Froude un valor ligeramente menor que la unidad. Se sugiere que en esta aproximación se haga uso de la ecuación dinámica de flujo espacialmente variado que se pretende aplicar. En general, si se designa a la función del numerador de la ecuación dinámica como $n(x,y)$, se tendrá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n(x,y)}{1 - F^2}$$

si se sustituye F^2 por un valor diferente a la unidad, la derivada tomará un valor finito. Puesto que aguas arriba de la sección crítica, el flujo es necesariamente subcrítico, conviene que se sustituya por un valor menor que uno. En las aplicaciones que se presentan en el cap 5, se pudo observar que al sustituir F^2 por 0.95, se obtuvieron resultados satisfactorios. La suposición anterior conduce a

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_c} \approx 20 n(x,y) \quad (3.20)$$

en donde x_c se refiere al punto crítico.

4. METODO DE SOLUCION

La integración numérica de las ecuaciones diferenciales que aproximan el flujo espacialmente variado, descritas en el cap 3, como ya se mencionó, es un problema de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con valores o condiciones iniciales; es decir, se requiere del conocimiento de un valor del tirante y que para este tirante, la pendiente de la superficie libre tenga un valor finito.

A diferencia del flujo gradualmente variado (FGV), en el flujo espacialmente variado (FEV) no es posible identificar de manera tan sencilla las secciones de control. En FEV la sección de control puede consistir en un punto singular o un punto crítico, que se localicen dentro del tramo de canal con este tipo de flujo, o depender de un control que se encuentre fuera de él.

Aunque se dispone de las expresiones para calcular las coordenadas del punto singular (ecs 3.3, 3.7, 3.11, 3.15 y 3.16), antes conviene averiguar si para las condiciones de interés (geometría, gasto, rugosidad), existe punto singular en el tramo de canal con FEV, punto crítico en su extremo de aguas abajo, o si el control se presenta fuera de este tramo.

Las gráficas de las ecs 3.3, 3.7 y 3.11, muestran que son funciones monótonas crecientes en el rango de interés, ver fig 4.1 .

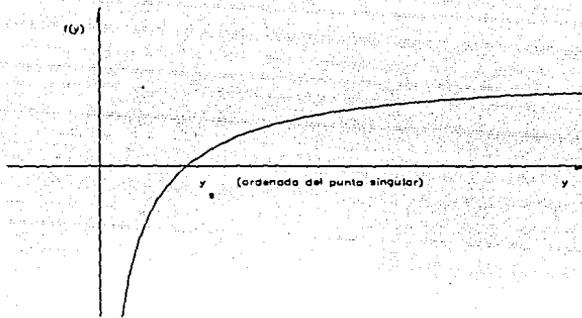


fig 4.1 Forma típica de las funciones 3.3, 3.7 y 3.11

Sea L la longitud del tramo de canal con FEV, x la abscisa de la sección de control, S_o la pendiente del canal en el tramo con FEV, S_{op} la pendiente del canal posterior al tramo con FEV, Y_c el tirante crítico asociado al gasto total, $f(Y_c)$ el valor que toma la función válida en el punto singular para Y_c , y $S_f(Y_c)$ la pendiente de fricción asociada a Y_c . Son cuatro los casos que pueden presentarse (fig 4.2), a saber:

I) Punto singular en $x = L$.

Se presenta para el caso particular en que $f(Y_c) = 0$, es decir, cuando el tirante crítico asociado al gasto total es raíz de la función válida en el punto singular.

II) Punto singular en $x < L$.

Puesto que la función válida en el punto singular es monótona creciente, existirá punto singular en $x < L$ si $f(Y_c) > 0$, es decir, siempre que el valor de la función válida en el punto singular sea positivo para el tirante crítico asociado al gasto total.

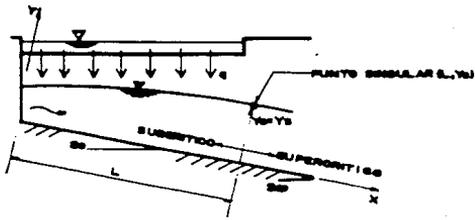
III) Punto crítico en $x = L$.

Si $f(Y_c) < 0$, no existe punto singular en $x < L$. Se tendrá punto crítico en $x = L$, si adicionalmente se presenta alguna de las condiciones siguientes:

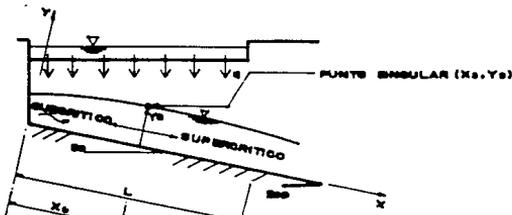
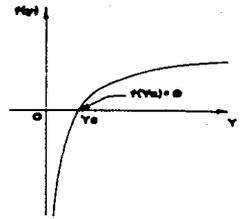
1. Existe una caída en esta sección.
2. La pendiente del canal es supercrítica para el gasto total, $S_o > S_f(Y_c)$.
3. La pendiente del canal cambia en esta sección de sub a supercrítica para el gasto total, $S_{op} > S_f(Y_c)$.

IV) Sección de control en $x > L$.

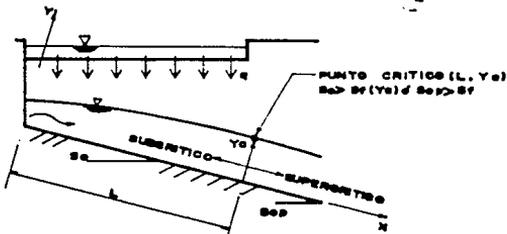
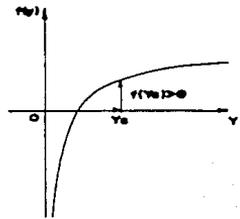
Se tendrá la sección de control en $x > L$, si no existe caída en $x = L$, si la pendiente no es supercrítica para el gasto total, $S_o < S_f(Y_c)$, o si para dicho gasto no existe cambio de pendiente subcrítica a supercrítica en $x = L$, esto es, que $S_{op} < S_f(Y_c)$.



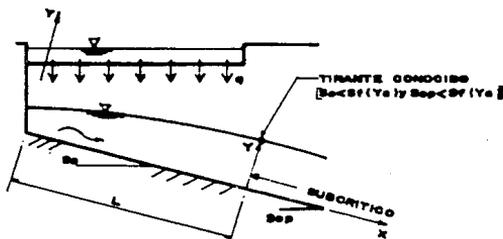
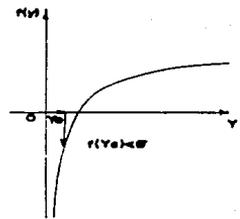
CASO I



CASO II



CASO III



CASO IV

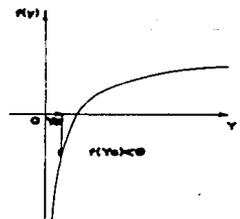


Fig. 4.2 - Tipos de control en FEV a gasto creciente en un vertedor con canal lateral

En caso de que el control consista en un punto singular, su ordenada es la raíz de la ecuación válida en el punto singular; la abscisa se calcula con las ecs 3.15 y 3.16, y la derivada de la superficie libre es el valor límite de la ecuación dinámica considerada. Si la sección de control es un punto crítico en $x = L$, su ordenada es el tirante crítico para el gasto total, su abscisa es igual a L y la derivada de la superficie libre puede aproximarse con las ecs 3.19 ó 3.20.

Para el caso de que la sección de control esté en $x > L$, con la información disponible no es posible calcular las coordenadas del punto de control; sin embargo, se sabe entonces que en $x \leq L$ el flujo es subcrítico y el tirante inicial puede conocerse mediante cálculos de flujo gradualmente variado.

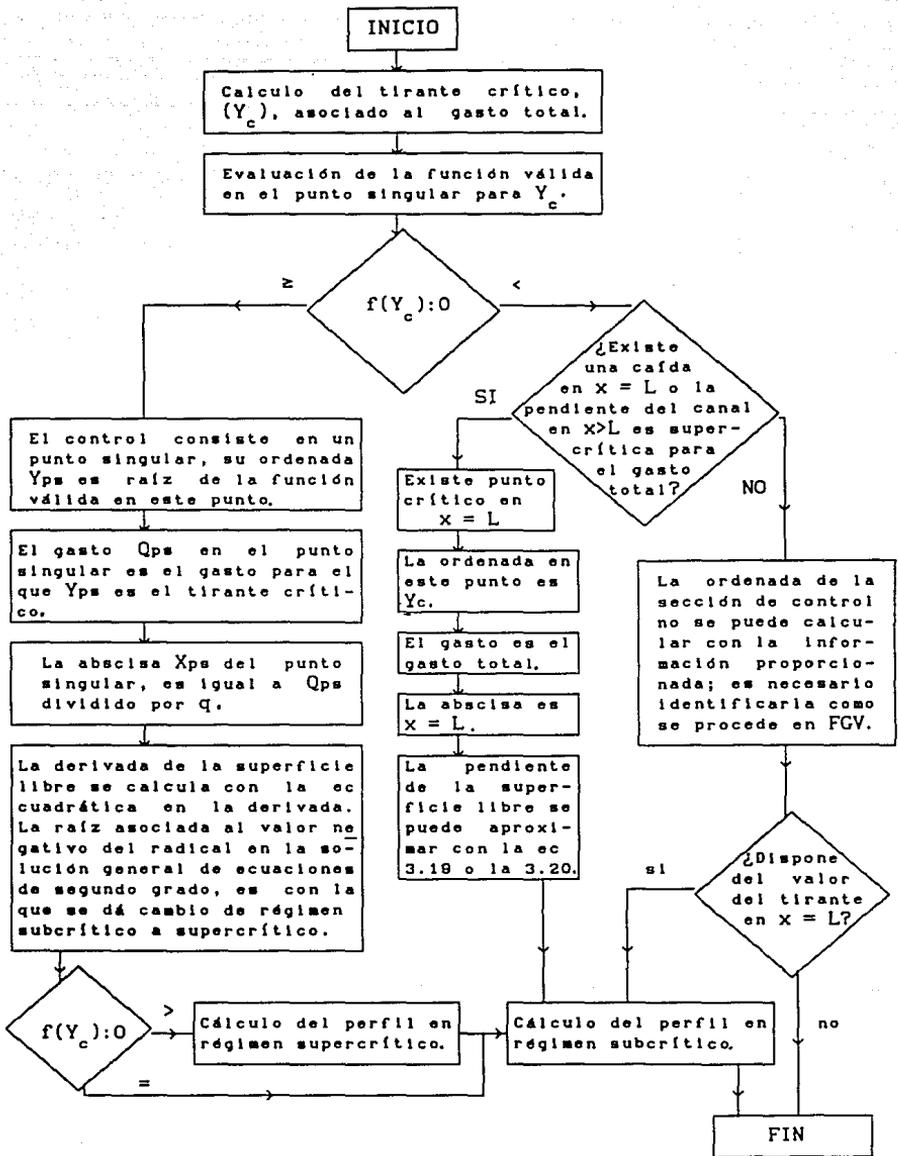
Este procedimiento permite disponer de los valores iniciales para la integración numérica. Desde luego, al igual que en FGV, el cálculo del perfil para FEV inicia desde la sección de control procediendo hacia aguas abajo para régimen supercrítico y hacia aguas arriba para régimen subcrítico. Adelante se presenta el diagrama de bloques que ilustra el algoritmo descrito.

En cualquier caso, es necesario identificar si el vertedor lateral está descargando libremente. Se dice que la descarga sobre un cimacio es libre si aguas abajo de éste, la superficie libre del agua está cuando mucho dos tercios de la carga sobre el cimacio, arriba de la elevación de su cresta. Si la carga H sobre la cresta del vertedor lateral se aproxima mediante la ec A.22, para que exista descarga libre debe cumplirse la condición siguiente:

$$y \leq z_0 + S_0 x + \frac{2}{3} \left[\frac{q}{C_d} \right]^{2/3}$$

donde el punto (x,y) es un punto cualquiera del perfil, z_0 es la elevación de la cresta vertedora respecto a la plantilla del canal en $x = 0$, S_0 es la pendiente del canal, q el gasto lateral unitario y C_d el coeficiente de descarga del vertedor lateral.

Para cualquiera de las ecuaciones diferenciales que aproximan el FEV, siempre que se satisfaga la condición anterior, se puede suponer que el gasto lateral está ingresando uniformemente. Para las ecs 2.34 y 2.35, esta condición garantiza además que la velocidad con que ingresa el gasto lateral sea físicamente posible. Es conveniente que al calcular el perfil, se verifique que se cumpla dicha condición.



ALGORITMO PARA CALCULO DE PERFILES CON FEV A GASTO CRECIENTE

5. APLICACIONES

En este capítulo se presenta la aplicación de las ecuaciones diferenciales simplificadas (cap 2) que aproximan el flujo espacialmente variado, desarrolladas a partir de cantidad de movimiento sin considerar cantidad de movimiento por efecto de la velocidad con que ingresa el gasto lateral (ec 2.13), considerándolo (ec 2.34), y energía (ec 2.35).

Con la finalidad de analizar las aproximaciones que se obtienen a partir de cada ecuación, se emplearon datos experimentales reportados por Guarga (1983), Bremen y Hager (1989) y por el Laboratorio de Hidráulica de la Comisión Federal de Electricidad (1990).

Se ha preferido tomar solamente algunos perfiles de cada fuente antes que hacerlo de manera exhaustiva, por considerar que esto es suficiente para la aplicación de las ecuaciones presentadas en la tesis.

De los perfiles reportados por Guarga se tomaron cuatro, dos obtenidos para sección rectangular y dos para sección trapecial. De las mediciones de Bremen y Hager se escogieron también cuatro perfiles, todos ellos medidos en un canal con sección rectangular. De la tercera fuente se escogieron tres perfiles únicamente; en este caso la sección del canal también es rectangular. Para el cálculo de los perfiles se aplicó el algoritmo descrito en el cap 4 y para la integración numérica se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Burden et al, 1978).

5.1 Información experimental

5.1.1 Experimentos de Guarga

Los resultados reportados por Guarga (1983), se obtuvieron en un canal al que se podía cambiar la pendiente y la sección transversal. En todos los casos el gasto lateral ingresó en forma de lluvia. Los perfiles seleccionados son los que Guarga designa como N1, S3, T1 y T4. En la tabla 5.1 se describen las características hidráulicas y geometrías correspondientes para cada caso.

Tabla 5.1 Datos de los perfiles reportados por Guarga (1983).

PERFIL	TALUD	PENDIENTE	GASTO l/s
N1	0.0	0.0	20.55
S3	0.0	0.01	8.86
T1	0.5	0.01	17.34
T4	0.5	0.05	17.34

La longitud del canal fue de 1.885 m, y el ancho de la plantilla de 0.25 m, en todos los casos. Los perfiles experimentales se midieron por el eje del canal.

5.1.2 Experimentos de Bremen y Hager²

El dispositivo experimental empleado por Bremen y Hager consiste en un canal de PVC con 5.38 m de longitud, 0.331 m de ancho, pendiente de 0.0524 y elevación de la cresta del vertedor lateral sobre la plantilla al inicio del canal de 0.39 m. Para el gasto de diseño (125 l/s), reportan que la carga sobre el vertedor fue de 4.2 cm, con lo que se estimó en 2.7 el valor del coeficiente de descarga.

Los perfiles tomados pertenecen al grupo que los autores designan como 1.1 en su referencia, y corresponden a los gastos de 20, 40, 60 y 100 l/s. Para cada perfil consignan los tirantes medidos por el eje del canal y en la pared de la margen opuesta a la de ingreso del gasto lateral.

5.1.3 Experimentos del Laboratorio de Hidráulica de CFE

Los perfiles que reporta el Laboratorio de Hidráulica, forman parte del estudio experimental del vertedor con canal lateral que constituye la estructura de salida del tanque sedimentador del PH Agua Prieta. Este estudio se ha conducido en un modelo escala 1:20 construido de mampostería con aplanado fino de cemento.

El canal es de sección transversal rectangular; tiene 4.5 m de longitud, 0.18 m de ancho, pendiente de plantilla de 0.004 y elevación de la cresta vertedora (respecto de la plantilla) al inicio del canal de 0.22 m.

Las mediciones corresponden a gastos en modelo de 6.9, 11.31 y 22.1 l/s. Para cada conjunto de datos experimentales se reportan las cargas con que se descarga el gasto lateral sobre la cresta vertedora; a partir de estos datos se estimaron coeficientes de descarga por el vertedor de 2.9 para el primer gasto y de 2.6 para los dos restantes. Los perfiles experimentales se obtuvieron en tres ejes longitudinales, uno por el eje del canal y los otros dos a 1.5 cm de sus paredes.

5.2 Solución numérica

Con base en el algoritmo descrito en el cap 4, se elaboró un programa en Quickbasic; en el apéndice B se anexa el listado del programa para el caso de la ec. 2.34

En los todos los casos que se presentan, la sección de control consiste en un punto singular o bien en un punto crítico. Con objeto de comparar los perfiles calculados sobre la misma base, se procuró que el intervalo de longitud usado en el cálculo numérico permaneciera constante, al menos en cada grupo de datos. Asimismo, se trató que dichos intervalos fueran los suficientemente pequeños, de manera que el error de aproximación por este concepto fuera despreciable.

En las figuras y tablas a que se hará referencia se presentan sólomente los puntos de los perfiles para los que se conoce el valor experimental, independientemente del intervalo de cálculo empleado durante la integración numérica.

5.2.1 Cálculos con los datos de Guarga

En las ecs 2.34 y 2.35 se hace una estimación de la velocidad con que ingresa el gasto lateral, para el caso de canales con vertedor lateral a gasto creciente. Para su aplicación deben conocerse el coeficiente de descarga del vertedor y el desnivel entre la cresta vertedora y la plantilla del canal. Como en este grupo de experimentos el gasto lateral ingresó en forma de lluvia, la velocidad con que ingresa el gasto lateral debe valuarse de manera diferente. Al no disponer de una expresión para calcular esta velocidad, no se aplicaron las ecs 2.34 y 3.25; la 2.13 si se aplicó, ya que no la considera.

Para la integración numérica se empleó un intervalo de longitud de 0.005 m.

Como el coeficiente de Manning del canal experimental no viene reportado en la referencia, se consideró que al material con que está conformado el canal se le puede asignar una n de 0.010. Estos cálculos revisten interés porque se considera el efecto de fricción y porque solo este grupo de datos contiene mediciones en sección trapecial.

5.2.2 Cálculos con los datos de Bremen y Hager

Como en este grupo de experimentos el gasto entró al canal a través de un vertedor lateral, es posible la aplicación de las tres ecuaciones diferenciales para calcular los perfiles. En los cálculos se empleó el coeficiente de Manning-Strickler igual a 95, como lo sugieren Bremen y Hager. El intervalo de longitud para integración fue de 0.01 m para los perfiles con control en un punto crítico, y menor para el caso de punto singular.

Los cálculos permitirán observar, por un lado, la importancia del efecto de la cantidad de movimiento con que ingresa el gasto lateral, y por el otro (como se sugirió en el subcap 2.3) cual pendiente, S_e o S_f , se estima mejor a partir de la expresión de flujo uniforme de Manning.

5.2.3 Cálculos con los datos del Laboratorio de Hidráulica de CFE

Este grupo de datos, al igual que los tomados de las experiencias de Bremen y Hager, permite, dadas las condiciones experimentales, la aplicación de las ecs 2.13, 2.34 y 2.35. La integración numérica se hizo considerando un intervalo de 0.01 m. Puesto que se conoce el acabado de la superficie en modelo, el coeficiente de Manning se supuso de 0.009.

Aunque la pendiente del canal es pequeña, y por ello también el efecto de la cantidad de movimiento con que ingresa el gasto lateral, es posible observar las diferencias entre los perfiles obtenidos con las ec 2.13 y 2.34, y la aproximación que se obtiene con la ec 2.35.

5.3 Análisis y discusión de resultados

5.3.1 Perfiles de Guarga

Debido a la razones señaladas en 5.2.1, sólo se aplicó la ec 2.13 para el cálculo de este grupo de perfiles. En todos ellos se identificó punto crítico como sección de control. La pendiente de la superficie libre en el control se aproximó con la ec 3.20; en la tabla 5.2 se presentan las coordenadas del punto crítico así como la aproximación de la pendiente de la superficie libre.

Tabla 5.2 Coordenadas del punto crítico y aproximación de la pendiente de la superficie libre en los perfiles de Guarga.

PERFIL	x (m)	y (cm)	$\frac{dy}{dx}$ (ec 3.20)
N1	1.885	8.83	- 1.9639
S3	1.885	5.04	- 0.9530
T1	1.885	7.48	- 1.2730
T4	1.885	7.48	- 0.4730

Las fig 5.1 a 5.4 y las tablas 5.3 a 5.6 permiten comparar los perfiles calculados con los experimentales. Puede notarse que en el extremo de canal próximo a la sección de control, los tirantes calculados sean mayores que los experimentales. Se considera que estas diferencias reflejan la propagación del error con que se estima la pendiente de la superficie libre en el punto crítico. Los perfiles T1 y T4 sugieren que, si se mantienen fijas la sección transversal y el gasto, la estimación del tirante al inicio del canal mediante la ec 2.13, depende de la pendiente de la plantilla del canal; así, mientras que para T1, con $S_0=0.01$, se tiene un error relativo máximo de 3%, para T4, con $S_0=0.05$, fue de -10%.

La importancia de los errores mencionados podría ponderarse mejor si se conociera la magnitud del error experimental.

fig 5.1 Perfiles calculados y medidos

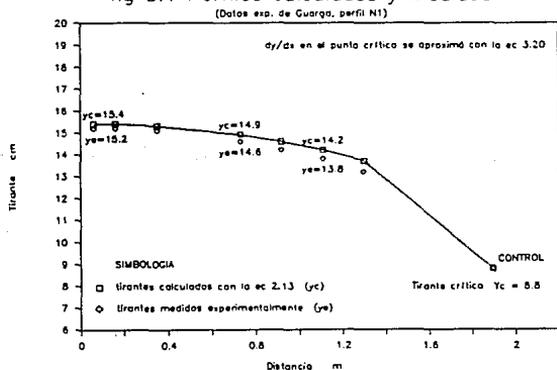


Tabla 5.3 Perfiles calculados y medidos, datos de Guarga; Perfil N1.

X (m)	Y ec 2 13 (cm)	Y medida (cm)
0.00	15.4	---
0.08	15.4	15.2
0.18	15.4	15.2
0.35	15.3	15.1
0.73	14.9	14.8
0.92	14.6	14.2
1.11	14.2	13.8
1.30	13.7	13.2
1.89	8.8	8.8

fig 5.2 Perfiles calculados y medidos

(Datos esp. de Guarga, perfil S3)

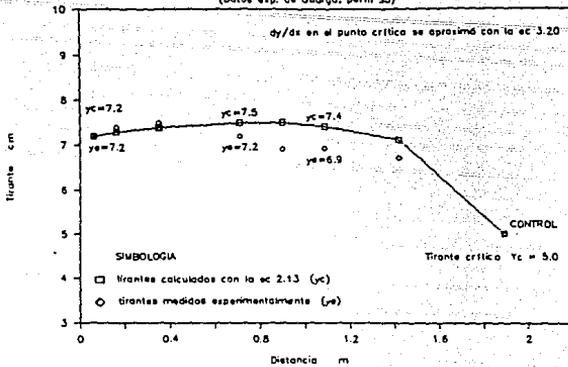


Tabla 5.4 Perfiles calculados y medidos, datos de Guarga; Perfil S3.

X (m)	Y ec 2.13 (cm)	Y medida (cm)
0.00	7.1	----
0.08	7.2	7.2
0.18	7.3	7.4
0.35	7.4	7.5
0.71	7.5	7.2
0.80	7.5	6.9
1.09	7.4	6.9
1.42	7.1	6.7
1.89	5.0	5.0

fig 5.3 Perfiles calculados y medidos

(Datos esp. de Guarga, perfil T1)

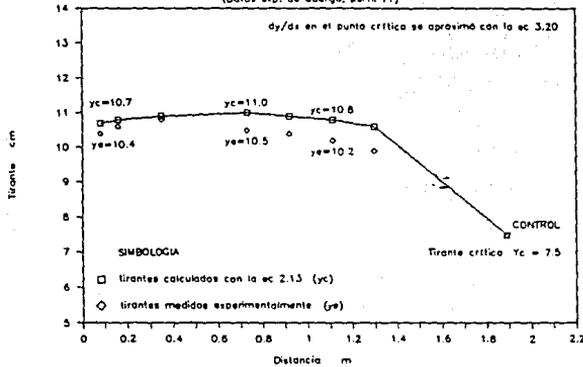


Tabla 5.5 Perfiles calculados y medidos, datos de Guarga; Perfil T1.

X (m)	Y ec 2.13 (cm)	Y medid (cm)
0.00	10.7	----
0.08	10.7	10.4
0.18	10.8	10.8
0.35	10.8	10.8
0.73	11.0	10.5
0.92	10.8	10.4
1.11	10.8	10.2
1.30	10.6	9.9
1.89	7.5	7.5

fig 5.4 Perfiles calculados y medidos

(Datos esp. de Guarga, perfil T4)

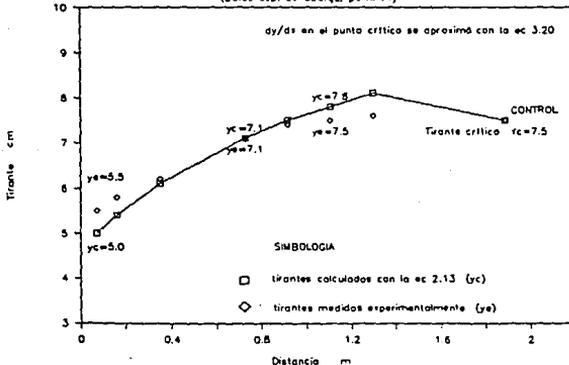


Tabla 5.6 Perfiles calculados y medidos, datos de Guarga; Perfil T4.

X (m)	Y ec 2.13 (cm)	Y medida (cm)
0.00	4.7	----
0.07	5.0	5.5
0.18	5.4	5.8
0.35	6.1	6.2
0.73	7.1	7.1
0.82	7.5	7.4
1.11	7.8	7.5
1.30	8.1	7.8
1.89	7.5	7.5

5.3.2 Perfiles de Bremen y Hager

Las tres ecuaciones con que se aproxima el flujo espacialmente variado (2.13, 2.34 y 2.35), indican que la sección de control para gastos de 20 y 40 l/s, consiste en un punto singular, y para 100 l/s, en un punto crítico. Para el gasto de 60 l/s, conforme a la ec 2.35, la sección de control es un punto singular, en tanto que, conforme a las ecs 2.13 y 2.34, se trata de un punto crítico. En la tabla 5.7 se indica, para cada gasto y ecuación aplicada, el tipo de sección de control.

Tabla 5.7 Tipos de punto en la sección de control en los perfiles de Bremen y Hager.

PERFIL	GASTO (l/s)	ec 2.13	ec 2.34	ec 2.35
1	20	SINGULAR	SINGULAR	SINGULAR
2	40	SINGULAR	SINGULAR	SINGULAR
3	60	CRITICO	CRITICO	SINGULAR
4	100	CRITICO	CRITICO	CRITICO

En la tabla 5.8 se consignan las coordenadas de los puntos singulares, para los casos en que se presentan. En los casos que existe punto crítico, esto sucede al final del canal, y el tirante es el crítico correspondiente al gasto total; en la tabla 5.9 se indican las coordenadas del punto crítico y las aproximaciones de la pendiente de la superficie libre conforme a las ecs 3.19 y 3.20.

Tabla 5.8 Puntos singulares y pendiente de la superficie libre.

PERF	ec 2.13			ec 2.34			ec 2.35		
	x (m)	y(cm)	$\frac{dy}{dx}$	x (m)	y(cm)	$\frac{dy}{dx}$	x (m)	y(cm)	$\frac{dy}{dx}$
1	0.94	2.25	0.01087	0.50	1.48	0.01478	0.34	1.14	0.01559
2	3.70	8.90	0.01104	2.73	7.26	0.01259	1.47	4.82	0.01424
3							3.47	11.16	0.01413

Tabla 5.9 Coordenadas del punto crítico y aproximación de la pendiente de la superficie libre en los perfiles de Bremen y Hager.

PERF	x (m)	y(cm)	$\frac{dy}{dx}$ (ec 3.19)	$\frac{dy}{dx}$ (ec 3.20)		
				(ec 2.13)	(ec 2.34)	(ec 2.35)
3	5.38	14.96	- 0.0043	- 0.1611	- 0.0822	
4	5.38	21.03	- 0.0047	- 0.6249	- 0.5357	- 0.2288

En todos los casos, para una misma sección, el tirante calculado con la ec 2.13 es mayor que el obtenido con la ec 2.34, y éste que el encontrado con la ec 2.35.

Enseguida se discute cada perfil.

Perfil 1. Como puede observarse en la fig 5.5 y en la tabla 5.10, los perfiles calculados con las ec 2.13 y 2.34 se mantienen entre los perfiles medidos por el eje y por la pared. El perfil obtenido con la ec 2.35 se observa ligeramente por abajo de los tirantes experimentales, en una sección de canal comprendida entre $x=3$ y $x=5$ m. En este caso se nota que es pequeño el efecto de la cantidad de movimiento con que ingresa el gasto lateral (diferencia relativa de aproximadamente 5 %).

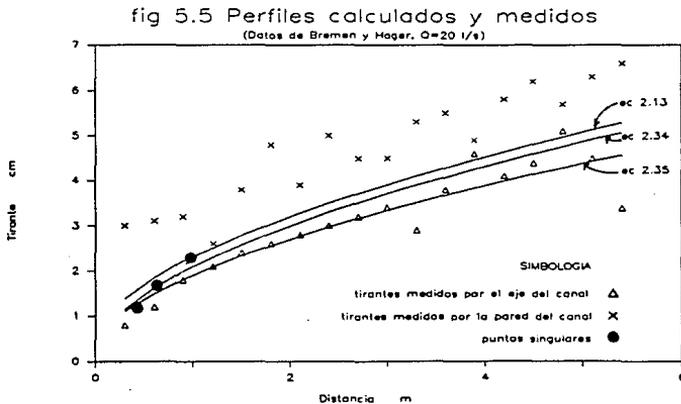


Tabla 5.10 Perfiles calculados y medidos, experimentos de Bremen y Hager; $Q = 20 \text{ l/s}$.

X (m)	Y ec 2.35 (cm)	Y ec 2.13 (cm)	Y ec 2.34 (cm)	Y eje (cm)	Y pared (cm)
0.30	1.1	1.4	1.2	0.8	3.0
0.80	1.5	1.8	1.8	1.2	3.1
0.90	1.8	2.2	2.0	1.8	3.2
1.20	2.1	2.5	2.3	2.1	2.8
1.50	2.3	2.8	2.8	2.4	3.8
1.80	2.8	3.1	2.8	2.8	4.8
2.10	2.8	3.3	3.1	2.8	3.9
2.40	3.0	3.5	3.3	3.0	5.0
2.70	3.2	3.7	3.5	3.2	4.5
3.00	3.3	3.9	3.7	3.4	4.5
3.30	3.5	4.1	3.9	2.9	5.3
3.80	3.7	4.3	4.1	3.8	5.5
3.90	3.8	4.5	4.3	4.8	4.9
4.20	4.0	4.7	4.4	4.1	5.8
4.50	4.2	4.8	4.8	4.4	6.2
4.80	4.3	5.0	4.8	5.1	5.7
5.10	4.4	5.1	4.9	4.5	6.3
5.40	4.6	5.3	5.1	3.4	6.6

Perfil 2. De acuerdo con la fig 5.6 y la tabla 5.11, el perfil estimado con la ec 2.35 cae por abajo del perfil medido por el eje, en tanto que el encontrado con la ec 2.13 permanece entre los dos perfiles experimentales. Los tirantes calculados con la ec 2.34 se localizan ligeramente abajo de los observados por el eje, entre $x=3.6$ y $x=5.1$ m (error relativo máximo de 6%).

fig 5.6 Perfiles calculados y medidos
(Datos de Bremen y Hager, $Q=40 \text{ l/s}$)

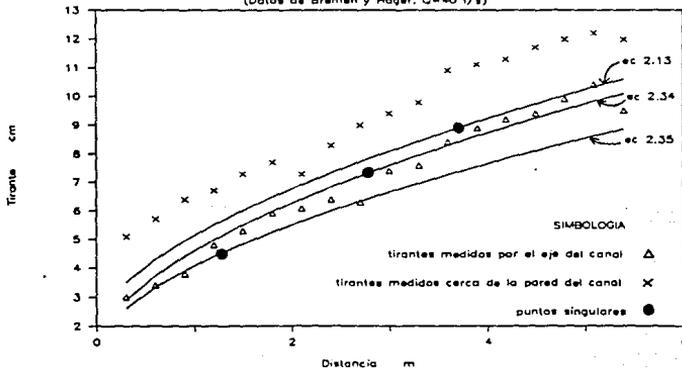


Tabla 5.11 Perfiles calculados y medidos, experimentos de Broaden y Hager; $Q = 40 \text{ l/s}$.

X (m)	Y ec 2.35 (cm)	Y ec 2.13 (cm)	Y ec 2.34 (cm)	Y eje (cm)	Y pared (cm)
0.30	2.8	3.5	2.9	3.0	5.1
0.60	3.3	4.3	3.8	3.4	5.7
0.90	3.9	5.0	4.4	3.9	6.4
1.20	4.4	5.8	5.0	4.5	6.7
1.50	4.9	6.0	5.5	5.3	7.3
1.80	5.3	6.5	6.0	5.9	7.7
2.10	5.8	6.9	6.4	6.1	7.3
2.40	6.0	7.3	6.8	6.4	6.3
2.70	6.3	7.7	7.2	6.3	6.0
3.00	6.7	8.1	7.6	7.4	6.4
3.30	7.0	8.5	8.0	7.6	6.8
3.60	7.3	8.8	8.3	8.4	10.0
3.90	7.6	9.1	8.6	8.9	11.1
4.20	7.8	9.4	8.9	9.2	11.3
4.50	8.1	9.7	9.2	9.4	11.7
4.80	8.4	10.1	9.5	9.9	12.0
5.10	8.8	10.3	9.8	10.4	12.2
5.40	8.9	10.8	10.1	9.5	12.0

Perfil 3. La aproximación que se consigue con la ec 2.35 es deficiente, como puede desprenderse de las figs 5.7 y 5.8, y tablas 5.12 y 5.13. El error relativo entre cálculos y mediciones por el eje es -16 % en $x = 2.4 \text{ m}$. Al obtener los perfiles con las ecs 2.13 y 2.34 se aplicaron las ecs 3.19 y 3.20 para aproximar el valor de la derivada de la superficie libre en el punto crítico. Es importante señalar que los perfiles encontrados con la ec 2.13 y aplicando las ecs 3.19 y 3.20, son prácticamente iguales en las abscisas menores a 3 m; y que los obtenidos con la ec 2.34 lo son para las menores a 4.2 m. Por otra parte, en las proximidades del punto crítico, la aproximación del perfil conseguida al aplicar la ec 3.19 es mejor que la alcanzada con la ec 3.20.

Tabla 5.11 Perfiles calculados y medidos, experimentos de Bremen y Hager; $Q = 40$ l/s.

X (m)	Y ec 2.35 (cm)	Y ec 2.13 (cm)	Y ec 2.34 (cm)	Y eje (cm)	Y pared (cm)
0.30	2.8	3.5	2.9	3.0	5.1
0.80	3.3	4.3	3.8	3.4	5.7
0.80	3.8	5.0	4.4	3.8	8.4
1.20	4.4	5.5	5.0	4.8	8.7
1.50	4.9	6.0	5.5	5.3	7.3
1.80	5.3	6.5	6.0	5.9	7.7
2.10	5.8	6.9	6.4	6.1	7.3
2.40	6.0	7.3	6.8	6.4	8.3
2.70	6.3	7.7	7.2	6.3	9.0
3.00	6.7	8.1	7.6	7.4	9.4
3.30	7.0	8.5	8.0	7.6	9.8
3.60	7.3	8.8	8.3	8.4	10.8
3.90	7.6	9.1	8.6	8.9	11.1
4.20	7.8	9.4	8.9	9.2	11.3
4.50	8.1	9.7	9.2	9.4	11.7
4.80	8.4	10.1	9.5	9.9	12.0
5.10	8.8	10.3	9.8	10.4	12.2
5.40	8.9	10.6	10.1	9.5	12.0

Perfil 3. La aproximación que se consigue con la ec 2.35 es deficiente, como puede desprenderse de las figs 5.7 y 5.8, y tablas 5.12 y 5.13. El error relativo entre cálculos y mediciones por el eje es -16 % en $x = 2.4$ m. Al obtener los perfiles con las ecs 2.13 y 2.34 se aplicaron las ecs 3.19 y 3.20 para aproximar el valor de la derivada de la superficie libre en el punto crítico. Es importante señalar que los perfiles encontrados con la ec 2.13 y aplicando las ecs 3.19 y 3.20, son prácticamente iguales en las abscisas menores a 3 m; y que los obtenidos con la ec 2.34 lo son para las menores a 4.2 m. Por otra parte, en las proximidades del punto crítico, la aproximación del perfil conseguida al aplicar la ec 3.19 es mejor que la alcanzada con la ec 3.20.

fig 5.7 Perfiles calculados y medidos
(Datos de Bremen y Hager, $Q=60$ l/s)

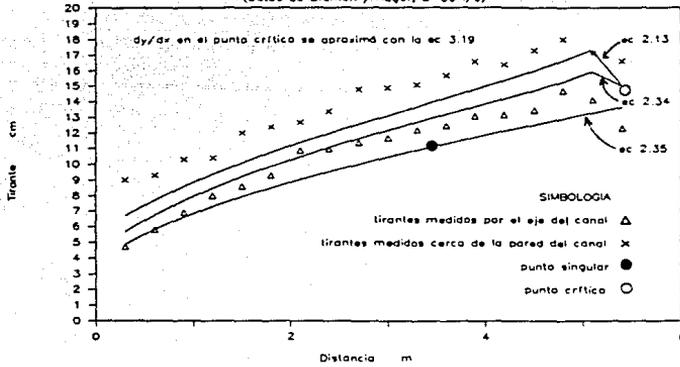


Tabla 5.12 Perfiles calculados y medidos, experimentos de Bremen y Hager; $Q = 60$ l/s. La derivada en el punto crítico se aproxima con la ec 3.19.

X (m)	Y ec 2.35 (cm)	Y ec 2.13 (cm)	Y ec 2.34 (cm)	Y eje (cm)	Y pared (cm)
0.30	4.9	6.7	5.7	4.7	9.0
0.80	5.8	7.7	6.8	5.8	9.3
0.90	6.6	8.6	7.7	6.9	10.3
1.20	7.3	9.4	8.5	8.0	10.4
1.50	7.9	10.1	9.2	8.8	12.0
1.80	8.5	10.8	9.9	9.3	12.4
2.10	9.0	11.4	10.5	10.9	12.7
2.40	9.5	12.0	11.1	11.0	13.4
2.70	10.0	12.6	11.7	11.4	14.8
3.00	10.5	13.1	12.2	11.7	14.9
3.30	10.9	13.7	12.7	12.2	15.1
3.60	11.4	14.2	13.2	12.5	15.7
3.90	11.8	14.8	13.7	13.1	16.6
4.20	12.2	15.4	14.2	13.2	16.4
4.60	12.6	16.0	14.7	13.5	17.3
4.80	12.9	16.6	15.3	14.7	18.0
5.10	13.3	17.3	15.9	14.1	17.1
6.40	13.6	15.0	15.0	12.3	16.6

fig 5.8 Perfiles calculados y medidos

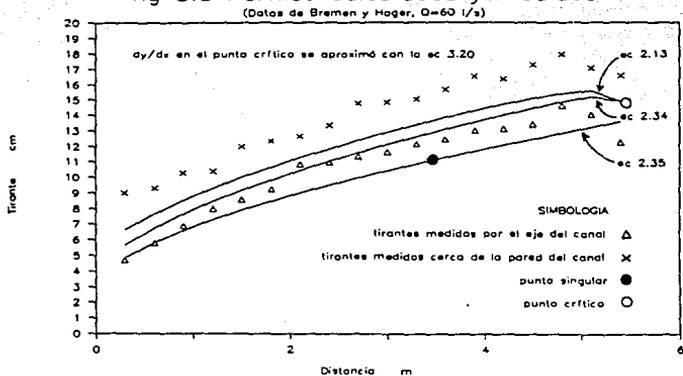


Tabla 5.13 Perfiles calculados y medidos, experimentos de Bremen y Hager; $Q = 80$ l/s. La derivada en el punto crítico se aproximó con la ec 3.20.

X (m)	Y ec 2.35 (cm)	Y ec 2.13 (cm)	Y ec 2.34 (cm)	Y eje (cm)	Y pared (cm)
0.30	4.9	6.7	5.7	4.7	9.0
0.80	5.8	7.7	6.8	5.8	9.3
0.90	6.8	8.6	7.7	6.9	10.3
1.20	7.3	8.3	8.5	8.0	10.4
1.50	7.9	10.0	9.2	8.8	12.0
1.80	8.5	10.7	9.9	9.3	12.4
2.10	9.0	11.3	10.5	10.9	12.7
2.40	9.5	11.9	11.1	11.0	13.4
2.70	10.0	12.4	11.6	11.4	14.8
3.00	10.5	13.0	12.2	11.7	14.9
3.30	10.8	13.5	12.7	12.2	15.1
3.60	11.4	13.9	13.2	12.5	15.7
3.90	11.8	14.4	13.6	13.1	16.6
4.20	12.2	14.8	14.1	13.2	16.4
4.80	12.8	15.2	14.5	13.5	17.3
4.80	12.9	15.5	14.9	14.7	18.0
5.10	13.3	15.7	15.2	14.1	17.1
5.40	13.6	15.0	15.0	12.3	16.6

Perfil 4. En este caso, para una misma x , se hacen más pronunciadas las diferencias entre los tirantes calculados con cada ecuación (diferencia

relativa máxima de 9.5 % entre los perfiles obtenidos con las ecs 2.13 y 2.34; y de 27 % entre los perfiles calculados con las 2.34 y 2.35).

Los perfiles encontrados con la ec 2.35 se acercan más al perfil medido por el eje que en el caso anterior (fig 5.9 y 5.10, y tablas 5.14 y 5.15). Su aproximación es aún mejor cuando la pendiente de la superficie libre en el punto crítico se estima mediante la ec 3.19 (fig 5.10 y tabla 5.15).

El perfil que se obtiene con base en la ec 2.13, aproximando la pendiente de la superficie libre en el punto crítico con la ec 3.19 (fig 5.9 y tabla 5.14) en casi todo el canal se mantiene por arriba del perfil medido en la pared; esto no sucede cuando se emplea la ec 3.20 (fig 5.10 y tabla 5.15), aunque estos perfiles se aproximan más a los perfiles medidos cerca de la pared que a los del eje.

En la fig 5.10 puede observarse que cuando el perfil se calcula con la ec 2.34 y la pendiente de la superficie en el punto crítico se estima con la ec 3.20, se obtiene un perfil que se ajusta mejor a las mediciones. Asimismo, puede notarse que el perfil obtenido se mantiene aproximadamente en medio de los perfiles experimentales, en el tramo comprendido entre las sección de control y $x = 2.4$, y se acerca más al perfil medido por la pared para $x < 2.4$.

Es importante destacar que las combinaciones de ecuaciones con que se calcula el perfil, que mejor se ajustan a los perfiles medidos por el eje son, la ec 2.35 con la 3.20 y las ecs 2.13 ó 2.34 con la 3.19.

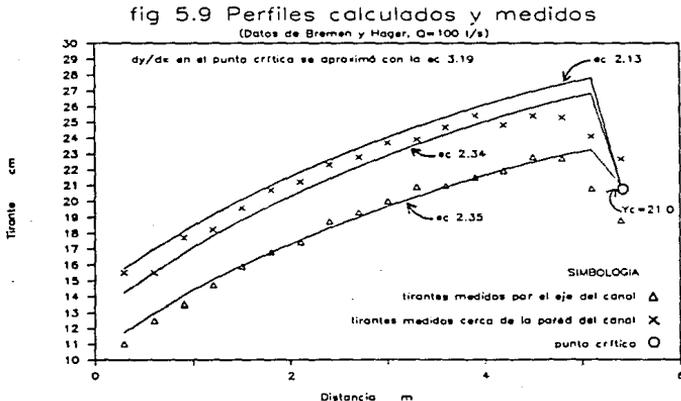


Tabla B.14 Perfiles calculados y medidos, experimentos de Bremen y Haqer; $Q = 100$ l/s. La derivada en el punto crítico se aproxima con la ec 3.19.

X (m)	Y ec 2.35 (cm)	Y ec 2.13 (cm)	Y ec 2.34 (cm)	Y eje (cm)	Y pared (cm)
0.30	11.7	15.7	14.2	11.0	15.5
0.80	13.0	17.0	15.5	12.5	15.5
0.80	14.1	18.1	16.7	13.5	17.7
1.20	15.1	19.2	17.8	14.7	18.2
1.50	16.0	20.1	18.8	15.8	19.6
1.80	16.8	21.0	19.8	16.8	20.7
2.10	17.8	21.8	20.8	17.4	21.2
2.40	18.3	22.6	21.4	18.7	22.3
2.70	19.0	23.4	22.2	19.3	22.8
3.00	19.7	24.1	22.9	20.0	23.7
3.30	20.3	24.7	23.6	20.8	23.9
3.60	20.9	25.3	24.2	21.0	24.7
3.90	21.5	25.9	24.8	21.5	25.4
4.20	22.0	26.5	25.4	21.9	24.8
4.50	22.5	27.0	25.9	22.8	25.4
4.80	22.9	27.4	26.4	22.7	25.3
5.10	23.3	27.8	26.8	20.8	24.1
5.40	21.0	21.0	21.0	18.8	22.7

fig 5.10 Perfiles calculados y medidos

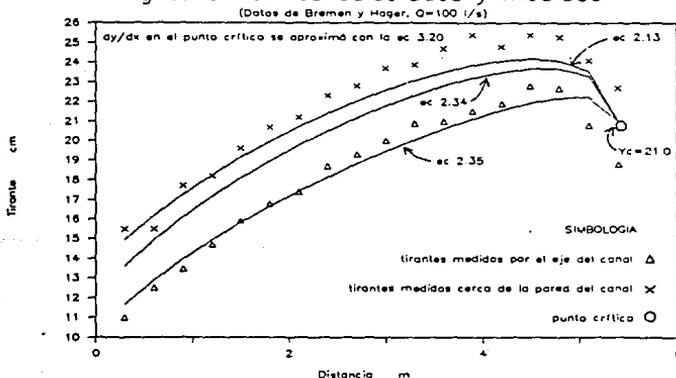


Tabla 5.15 Perfiles calculados y medidos, experimentos de Bremen y Hager; $Q = 100$ l/s. La derivada en el punto crítico se aproxima con la ec 3.20.

X (m)	Y ec 2.35 (cm)	Y ec 2.13 (cm)	Y ec 2.34 (cm)	Y eje (cm)	Y pared (cm)
0.30	11.7	14.9	13.8	11.0	15.5
0.60	12.9	18.2	14.9	12.5	15.5
0.90	14.0	17.3	18.1	13.5	17.7
1.20	14.9	18.3	17.2	14.7	18.2
1.50	15.8	19.2	18.1	15.8	18.8
1.80	16.7	20.0	19.0	16.8	20.7
2.10	17.4	20.7	19.8	17.4	21.2
2.40	18.2	21.4	20.5	18.7	22.3
2.70	18.8	22.0	21.2	19.3	22.8
3.00	19.5	22.8	21.8	20.0	23.7
3.30	20.1	23.1	22.3	20.9	23.9
3.60	20.8	23.5	22.8	21.0	24.7
3.90	21.1	23.8	23.2	21.5	25.4
4.20	21.8	24.1	23.5	21.9	24.8
4.50	21.9	24.2	23.7	22.8	25.4
4.80	22.2	24.1	23.7	22.7	25.3
5.10	22.2	23.8	23.3	20.8	24.1
5.40	21.0	21.0	21.0	18.8	22.7

5.3.3 Perfiles del Laboratorio de Hidráulica de CFE

En todos los perfiles de este grupo, el control es un punto crítico. En la tabla 5.16 se presentan las coordenadas del control y la aproximación de la pendiente de la superficie libre en este punto, calculada con las ecs 3.19 y 3.20.

Tabla 5.16 Coordenadas del punto crítico y aproximación de la pendiente de la superficie libre en los perfiles del Laboratorio de Hidráulica de CFE.

PERF	x (m)	y (cm)	$\frac{dy}{dx}$ (ec 3.19)	$\frac{dy}{dx}$ (ec 3.20)		
				(ec 2.13)	(ec 2.34)	(ec 2.35)
I	4.50	5.31	- 0.0037	- 0.4705	- 0.4680	- 0.3525
II	4.50	7.38	- 0.0038	- 0.6605	- 0.6576	- 0.4964
III	4.50	11.54	- 0.0042	- 1.0438	- 1.0407	- 0.7874

En las figs 5.11 a 5.16 y tablas 5.17 a 5.22, puede observarse que prácticamente no hay diferencia entre los perfiles obtenidos con la ec 2.13 y los calculados con la 2.34. Esto se debe a que la pendiente del canal es pequeña ($S_0=0.004$) y como consecuencia la cantidad de movimiento con que ingresa el gasto lateral tiene poco efecto sobre el perfil.

Cuando la pendiente de la superficie libre en el punto crítico se estima con la ec 3.19, los perfiles calculados con la ec 2.35 (figs 5.11, 5.13 y 5.15, y tablas 5.17, 5.19 y 5.21) se aproximan mejor al perfil medio experimental.

Cuando se usa la ec 3.20 en vez de la 3.19, los tirantes calculados con 2.13 y 2.34 se aproximan mejor a los tirantes medios experimentales, figs 5.12, 5.14 y 5.16, y tablas 5.18, 5.20 y 5.22; en estos casos el error relativo máximo, entre tirantes calculados y medidos, para los perfiles I, II y III (correspondientes a 6.9, 11.31 y 22.1 l/s) fue de 6.9, 1.25 y -2.9 %, respectivamente.

fig 5.11 Perfiles calculados y medidos

(Datos del Lab. Hid. CFE, perfil I)

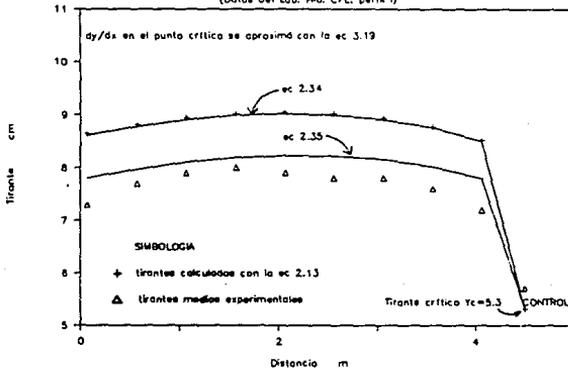


Tabla 5.17 Perfiles calculados y medidos; experimentos del Lab. Hid. de C.F.E. perfil I; la derivada en el punto crítico se aproximó con la ec 3.19.

X (m)	Y (cm)			
	ecuacion	2.13	2.34	EXP.
0.07	7.8	8.8	8.8	7.3
0.57	8.0	8.8	8.8	7.7
1.07	8.1	8.9	8.8	7.9
1.57	8.2	9.0	9.0	8.0
2.07	8.2	9.0	9.0	7.9
2.57	8.2	9.0	9.0	7.8
3.07	8.2	8.9	8.9	7.8
3.57	8.0	8.8	8.8	7.8
4.07	7.8	8.5	8.5	7.2
4.50	5.3	5.3	5.3	5.7

fig 5.12 Perfiles calculados y medidos

(Datos del Lab. Hid. C.F.E. perfil I)

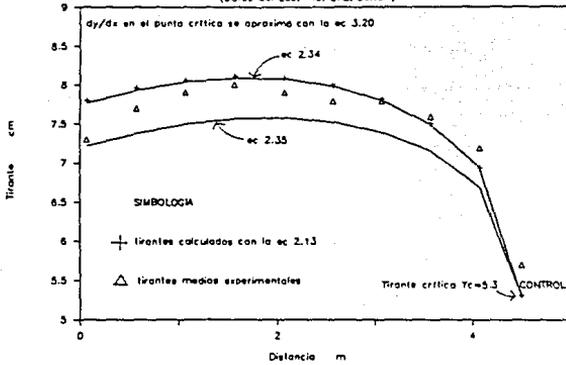


Tabla 5.18 Perfiles calculados y medidos; experimentos del Lab. Hid. de C.F.E. perfil I; la derivada en el punto crítico se aproxima con la ec 3.20.

X (m)	Y (cm)			
	ecuacion			EXP.
	2.35	2.13	2.34	
0.07	7.2	7.8	7.8	7.3
0.57	7.4	8.0	7.9	7.7
1.07	7.5	8.1	8.0	7.9
1.57	7.6	8.1	8.1	8.0
2.07	7.6	8.1	8.1	7.9
2.57	7.5	8.0	8.0	7.8
3.07	7.4	7.8	7.8	7.8
3.57	7.2	7.5	7.5	7.6
4.07	6.7	7.0	7.0	7.2
4.50	5.3	5.3	5.3	5.7

fig 5.13 Perfiles calculados y medidos

(Datos del Lab. Hid. C.F.E. perfil II)

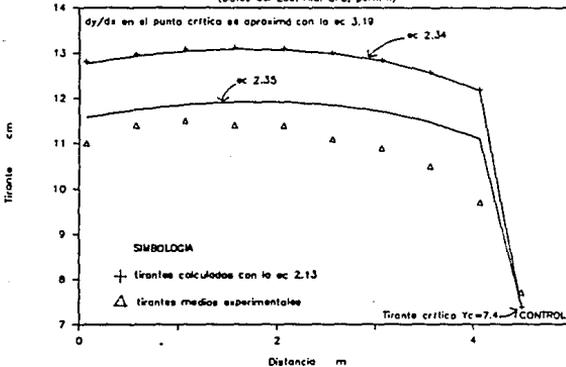


Tabla 5.19 Perfiles calculados y medidos; experimentos del Lab. Hid. de C.F.E. perfil II; la derivada en el punto crítico se aproxima con la ec 3.19.

X (m)	Y (cm)			
	ecuacion			EXP.
	2.35	2.13	2.34	
0.07	11.8	12.8	12.8	11.0
0.57	11.8	13.0	12.8	11.4
1.07	11.9	13.1	13.0	11.5
1.57	11.9	13.1	13.1	11.4
2.07	11.9	13.1	13.1	11.4
2.57	11.8	13.0	13.0	11.1
3.07	11.7	12.8	12.8	10.9
3.57	11.5	12.6	12.6	10.5
4.07	11.1	12.2	12.2	8.7
4.50	7.4	7.4	7.4	7.7

fig 5.14 Perfiles calculados y medidos

(Datos del Lab. Hid. C.F.E. perfil II)

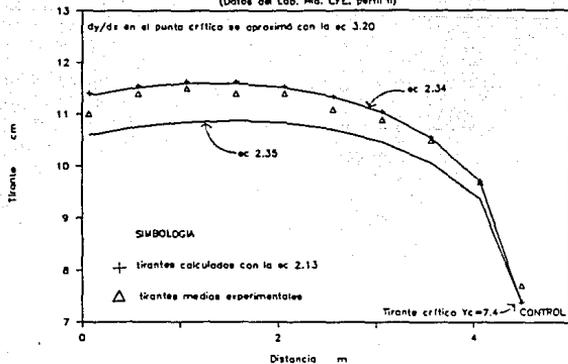


Tabla 5.20 Perfiles calculados y medidos; experimentos del Lab. Hid. de C.F.E. perfil II; la derivada en el punto crítico se aproximó con la ec 3.20.

X (m)	Y (cm)			EXP.
	ecuacion			
	2.35	2.13	2.34	
0.07	10.8	11.4	11.4	11.0
0.57	10.8	11.8	11.5	11.4
1.07	10.8	11.8	11.8	11.5
1.57	10.9	11.8	11.8	11.4
2.07	10.8	11.5	11.5	11.4
2.57	10.7	11.4	11.3	11.1
3.07	10.5	11.1	11.0	10.9
3.57	10.1	10.8	10.8	10.5
4.07	9.4	9.7	9.7	9.7
4.50	7.4	7.4	7.4	7.7

fig 5.15 Perfiles calculados y medidos

(Datos del Lab. Hid. C.F.E. perfil III)

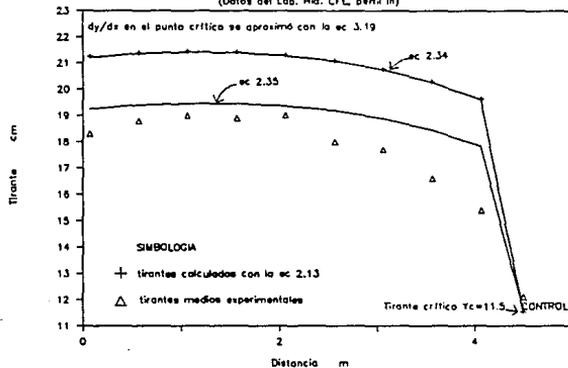


Tabla 5.21 Perfiles calculados y medidos; experimentos del Lab. Hid. de C.F.E. perfil III; la derivada en el punto crítico se aproximó con la ec 3.19.

X (m)	Y (cm)			EXP.
	ecuacion			
	2.35	2.13	2.34	
0.07	19.3	21.2	21.2	18.3
0.57	19.4	21.4	21.4	18.8
1.07	19.5	21.5	21.4	18.0
1.57	19.5	21.4	21.4	18.9
2.07	19.4	21.3	21.3	18.0
2.57	19.2	21.1	21.1	18.0
3.07	18.9	20.8	20.7	17.7
3.57	18.5	20.3	20.3	18.6
4.07	17.8	19.8	19.8	15.4
4.50	11.5	11.5	11.5	12.1

fig 5.16 Perfiles calculados y medidos

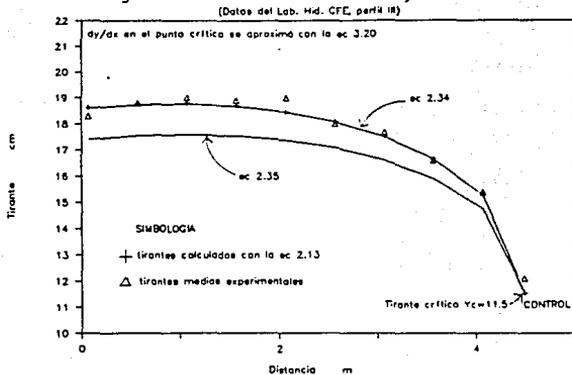


Tabla 5.22 Perfiles calculados y medidos; experimentos del Lab. Hid. de C.F.E. perfil III; la derivada en el punto crítico se aproximó con la ec 3.20.

X (m)	Y (cm)			EXP.
	2.35	2.13	2.34	
0.07	17.4	18.8	18.8	18.3
0.57	17.6	18.8	18.7	18.8
1.07	17.6	18.8	18.8	19.0
1.57	17.5	18.7	18.7	18.8
2.07	17.4	18.5	18.5	19.0
2.57	17.1	18.1	18.1	18.0
3.07	18.8	17.5	17.5	17.7
3.57	15.8	16.7	16.7	16.8
4.07	14.8	15.3	15.3	15.4
4.50	11.5	11.5	11.5	12.1

6. CONCLUSIONES Y RECOMENACIONES

Se ha presentado el desarrollo de ecuaciones diferenciales que aproximan el flujo espacialmente variado, partiendo de los principios de cantidad de movimiento y energía, así como algunas aplicaciones. Enseguida se destacan las conclusiones y se dan algunas recomendaciones.

- a) Con base en el principio de cantidad de movimiento se ha desarrollado la ec 2.12. Su solución requiere de parámetros que comúnmente no están disponibles para aplicaciones prácticas. Introduciendo algunas hipótesis es posible llegar a la ec 2.13 (el ángulo que forma el canal con la horizontal es constante y pequeño, así que su coseno es prácticamente igual a uno; la distribución presiones es hidrostática y el coeficiente de distribución de cantidad de movimiento es igual a uno). Esta aproximación es la que generalmente se aplica en la práctica.
- b) Cuando se hacen la mismas hipótesis que conducen a la ec 2.13, excepto que la velocidad con que el gasto lateral se incorpora tenga proyección nula sobre la dirección del flujo principal, y se considera el caso de canal con vertedor lateral, se obtiene la ec 2.34.
- c) A partir del principio de energía se desarrolló la ec 2.28. Haciendo hipótesis similares a las hechas para llegar a las ecs 2.13 y 2.34, se obtuvo la 2.35. Bajo ninguna de tales hipótesis se llegó a una ecuación derivada del principio de energía que resultara idéntica a la ec 2.13.

- d) Se han analizado los tipos de control que pueden presentarse en flujo espacialmente variado a gasto creciente, con variación de gasto constante en la dirección del flujo y para sección trapecial. Para cada una de las ecuaciones diferenciales consideradas, ec 2.13, 2.34 y 2.35, se desarrollaron expresiones que permiten calcular las coordenadas del punto de control así como la pendiente de la superficie libre, para el caso de punto singular. Asimismo, se han presentado dos maneras de estimar la pendiente de la superficie libre cuando el control consiste en un punto crítico.
- e) Se ha propuesto un algoritmo que facilita el análisis y la simulación numérica del flujo espacialmente variado a gasto creciente en vertedores de canal lateral con sección prismática trapecial y pendiente constante. La aplicación de este algoritmo elimina el uso de diagramas y métodos gráficos, así como de aproximaciones de la pendiente de la superficie libre en el caso de control en punto singular. Mediante su aplicación es posible identificar si existe control en el tramo de canal con flujo espacialmente variado y de que tipo es, o si se presenta fuera de él. De cualquier forma, el cálculo del perfil es entonces posible, siempre que para el caso en que el control esté fuera del tramo con flujo espacialmente variado se disponga del tirante en el extremo final del canal como condición inicial. Desde luego, este tirante depende de las condiciones de flujo que se presentan enseguida del tramo de canal con flujo espacialmente variado.
- f) Las aplicaciones presentadas tuvieron como objetivo discutir las aproximaciones que pueden conseguirse a partir de cada una de las tres ecuaciones diferenciales simplificadas que se han presentado en el trabajo.

En general, los tirantes que se obtienen al integrar la ec 2.13 sobrestiman los perfiles experimentales medios o medidos por el eje, lo que en aplicaciones prácticas se considera mala aproximación. Esto es más pronunciado cuando existe punto crítico como control, se aplica la ec 3.19 para estimar la pendiente de la superficie libre en el punto crítico y la pendiente del canal es del orden del 5 %. En algunas aplicaciones puede observarse que el perfil calculado se aproxima más a los tirantes medidos por la pared opuesta a la margen por que ingresa el gasto lateral, que a los que se observaron por el eje.

Los perfiles obtenidos al integrar la ec 2.35, generalmente subestiman los valores observados. Por otra parte, durante la integración numérica, en abscisas próximas a cero, se calculan tirantes que sobrestiman a los

medidos. Esta inexactitud puede justificarse si se observa que el tercer término del numerador de la ecuación mencionada tiende a valores positivos grandes conforme el gasto tiende a cero. En las aplicaciones presentadas se observó que cuando la ec 2.35 se integraba hasta abscisas aproximadamente iguales al tirante en la sección de control, el perfil calculado se mantiene razonablemente próximo a las observaciones experimentales.

En términos generales, los perfiles obtenidos al integrar la ec 2.34, son los que mejor aproximan, y prácticamente no subestiman las observaciones experimentales, siempre que la pendiente de la superficie libre en el punto de control se calcule con la ec 3.20 cuando el control es un punto crítico, y con la A.27 cuando es un punto singular.

- g) En las aplicaciones presentadas, y tomando en cuenta las aproximaciones conseguidas con las ec 2.13, 2.34 y 2.35, puede considerarse que la expresión para flujo uniforme de Manning permite aproximar mejor a la pendiente de fricción (S_f) que a la pendiente de energía (S_0).
- h) Se recomienda que al integrar numéricamente cualquiera de las ecs (2.13, 2.34 ó 2.35), el valor de la pendiente de la superficie libre, en el caso de punto singular, se maneje con buena aproximación, ya que los valores que a partir de este se obtienen son muy sensibles a ella (en algunos casos puede conducir a al ecuación integral que cambia de régimen supercrítico a subcrítico). Al calcular este valor en el mismo programa que calcula el perfil, se obtuvo buena aproximación.
- i) Finalmente, con base en el análisis de las aplicaciones presentadas, se recomienda que se aplique la ec 2.34 en vez de la 2.13, pues aunque ambas parten del mismo principio, la segunda es un caso particular de la primera (para el caso de gasto creciente en vertedores con canal lateral), y en la práctica se pueden estimar a priori los parámetros que en ella se consideran.

REFERENCIAS

- 1 Chow, V. T. (1959). "Open channel hydraulics." Mc.Graw-Hill Book Co., New York, N. Y.
- 2 Hinds, J. (1926). "Side Channel Spillways." Transactions, ASCE, Vol. 89, 881-927.
- 3 Favre, H. (1933). "Contribution à l'étude des Courants Liquides." Dunod, Paris, 37-54.
- 4 Li, W.-H. (1945). "Open Channels with Non-Uniform Discharge." Transactions, ASCE, Vol 120, 255-274.
- 5 Yen, B. C., and Wenzel, H. G. (1970). "Dynamics equations for steady spatially varied flow." J. Hydr. Div., ASCE, 96(3), 801-814.
- 6 Guarga, R. (1983). "Canales con gasto creciente, teoría y aplicaciones." Series del Instituto de Ingeniería, No. 463.
- 7 Hager, W. H. (1985). "Trapezoidal side-channel spillways." Can. J. Civ. Engrg. 12, 774-781.
- 8 Smith, K. V. H. (1967). "Control point in a lateral spillway channel." J. Hydr. Div., ASCE, 93(3), 27-34.
- 9 Bremen, R., and Hager, H. W. (1989). "Experiments in side channel spillways." J. Hydr. Div., ASCE, 115(5), 617-635.
- 10 Comisión Federal de Electricidad, Laboratorio de Hidráulica (1991). "Informe Preliminar del Estudio en Modelo Hidráulico del Tanque Sedimentador del P. H. Agua Prieta." Cuernavaca, Mor.
- 11 Rouse, H. (1970). "Work-Energy Equation for the Streamline." J. Hydr. Div., ASCE, 96(5), 1179-1190.
- 12 Rouse, H., ed. (1959). "Advanced Mechanics of Fluids." John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 274.
- 13 Dally, J. W., and Harleman, D. (1981). "Dinámica de los Fluidos." Ed. Trillas, México, D. F., 145-146.
- 14 Levi, E. (1982). "Elementos de la Mecánica del Medio Continuo." Ed. Limusa, México, D. F., 175-182.
- 15 Henderson, F. M. (1966). "Open channel flow.", Macmillan Publishing Co., Inc. New York, N. Y.
- 16 French, R. H. (1985). "Open channel hydraulics." Mc Graw Hill, Inc., New York, N. Y.
- 17 Poincaré, H. (1881) "Mémoire sur les courbes définies par une equation différentielle." Journal de mathematiques pures et applloquées, Paris, vol. 7, 375-422.
- 18 Escoffier, F. F. (1933). "Transition profiles in nonuniform flow.", Transactions, ASCE, paper No. 2069, 43-56.
- 19 Burden, R. L., Faires, J. D. and Reynolds A.C. (1978). "Numerical Analysis", Prindle, Weber & Schmidt, U.S.A.

NOTACIÓN

A	área de la sección transversal al flujo;
b	ancho de plantilla en un canal;
C _d	coeficiente de descarga del vertedor lateral;
C	coeficiente de la ecuación de Manning (1 para el sistema internacional y 1.49 para el Sistema Inglés);
D	tirante hidráulico;
E	energía;
F	número de Froude;
G	coeficiente en la ecuación cuadrática de la pendiente de la superficie libre válida en el punto singular;
g	aceleración de la gravedad;
H	carga sobre la cresta del vertedor lateral;
H _P	carga piezométrica promedio de la sección transversal del flujo principal respecto del fondo del canal;
H _{PL}	carga piezométrica del gasto lateral medida respecto del fondo del canal;
H _T	carga total;
i, j	direcciones de coordenadas ortogonales;
K	factor de corrección de presión;
k	designación del talud de la sección transversal;
L	longitud de la cresta vertedora;
M	coeficiente en la ecuación cuadrática de la pendiente de la superficie libre válida en el punto singular;
N	coeficiente de la ecuación cuadrática de la pendiente de la superficie libre válida en el punto singular;
n	coeficiente de rugosidad de Manning;
P	perímetro mojado;
p	presión;
Q	gasto total;
q	gasto lateral por unidad de longitud ($-\frac{dQ}{dx}$);
R	radio hidráulico;
S _e	gradiente de energía disipada;
S _f	pendiente de fricción;
S _H	gradiente de la carga total;
S _o	pendiente del canal;
S _{op}	pendiente del canal en $x > L$;
T	ancho de superficie libre;
U	velocidad del gasto lateral;
V	velocidad media del flujo en la dirección de x;
v	volumen;
v	velocidad local media temporal del flujo principal;
v'	fluctuación turbulenta de la velocidad con respecto a v;
W	peso;
x	coordenada longitudinal;
Y _c	tirante crítico;
y	tirante medido en la dirección de las ordenadas;
z	elevación medida respecto a un plano horizontal de referencia;
z _b	elevación del fondo del canal respecto al plano de referencia;
z _o	elevación de la cresta vertedora respecto a la plantilla del canal en $x = 0$;

α coeficiente de corrección de energía cinética (Coriolis);
 β coeficiente de distribución de cantidad de movimiento (Boussinesq);
 γ peso específico del fluido;
 η factor de corrección de energía potencial;
 θ ángulo que forma la plantilla del canal con el plano horizontal;
 μ viscosidad dinámica del fluido;
 ρ densidad del fluido;
 τ esfuerzo cortante medio en la pared del canal en la dirección x;
 ϕ ángulo que forma U con el eje x;

APENDICE A

En este apéndice se presentan los desarrollos de expresiones del cap 3. En la siguiente tabla se relacionan los números con que se designan las ecuaciones en ese capítulo con los números que se les asignan en este apéndice y se indica la aplicación de cada una de ellas.

ECUACION DEL CAPITULO 3	ECUACION DEL APENDICE A	APLICACION PARA EL CALCULO DE	INCISO EN QUE SE DESARROLLA	VALORES INICIALES PARA INTEGRAR LA
3.3	A.4	ordenada del punto singular	a	ec 2.13
3.4, 3.5 y 3.6	coeficientes de la ec A.19	pendiente de la superficie libre en el punto singular	a	ec 2.13
3.7	A.23	ordenada del punto singular	b	ec 2.34
3.8, 3.9 y 3.10	coeficientes de la ec A.27	pendiente de la superficie libre en el punto singular	b	ec 2.34
3.11	A.28	ordenada del punto singular	c	ec 2.35
3.12, 3.13 y 3.14	coeficientes de la ec A.33	pendiente de la superficie libre en el punto singular	c	ec 2.35
3.19	A.37	pendiente de la superficie libre en el punto crítico	d	ecs 2.13, 2.34 ó 2.35

a) Desarrollo de las ecuaciones que permiten calcular las condiciones iniciales para la integración de la ec 2.13 cuando el control es un punto singular

a1) Coordenadas del punto singular

En el punto singular el denominador del segundo miembro de la ec 2.13 debe valer cero, es decir se presenta flujo crítico, por tal razón, el número de Froude es igual a 1, por lo que se requiere satisfacer la expresión siguiente

$$Q = A \sqrt{g A T} \quad (A.1)$$

El numerador de la ecuación diferencial también necesita ser igual a cero, de donde se tiene la siguiente expresión

$$S_o - S_r - \frac{2qQ}{g A^2} = 0 \quad (A.2)$$

La pendiente de fricción se estima mediante la expresión de Manning para flujo uniforme como

$$S_r = \left[\frac{Q n P^{2/3}}{C A^{5/3}} \right]^2 \quad (A.3)$$

Sustituyendo las ecs A.1 y A.3 en la ec A.2 y simplificando se tiene

$$f(y) = S_o - \frac{g}{T A^{1/3}} \left[\frac{n P^{2/3}}{C} \right]^2 - \frac{2q}{\sqrt{gAT}} = 0 \quad (A.4)$$

La expresión A.4, identificada como 3.3 en el cap 3, es una función implícita del tirante cuya solución permite conocer la ordenada del punto singular. Es únicamente válida para el punto singular. En la ec A.4, los valores de las características hidráulicas T, A, y P, corresponden a la sección en que se presenta el punto singular.

El gasto en dicho punto se evalúa mediante la ec A.1, y el cálculo de la abscisa correspondiente se obtiene a partir de

$$x = \frac{Q_c}{q} \quad (A.5)$$

a2) Derivada de la superficie libre en el punto singular

Para calcular el valor de la derivada en el punto singular se aplica la regla de L'Hospital a la ec. 2.13.

Derivando primeramente el numerador de esta ecuación se tiene

$$\frac{d}{dx} \left[S_o - S_f - \frac{2qQ}{g A^2} \right] = - \frac{dS_f}{dx} - \frac{2qQ}{g} \left[\frac{A^2 q - 2QA \frac{dA}{dx}}{A^4} \right] = - \frac{dS_f}{dx} - \frac{2q^2}{gA^2} + \frac{4qQT}{gA^3} \frac{dy}{dx}$$

(A.6)

La derivada de la pendiente de fricción es

$$\frac{dS_f}{dx} = \frac{2n^2 Q q P^{4/3}}{C^2 A^{10/3}} + \frac{4 n^2 Q^2 P^{1/3}}{3C^2 A^{10/3}} \frac{dP}{dx} - \frac{10n^2 Q^2 P^{4/3}}{3C^2 A^{13/3}} \frac{dA}{dx}$$

(A.7)

Ya que el perímetro mojado para la sección trapecial es

$$P = b + 2y \sqrt{1+k^2}$$

su derivada con respecto a x resulta ser

$$\frac{dP}{dx} = 2 \sqrt{1+k^2} \frac{dy}{dx}$$

(A.8)

El área hidráulica para sección trapecial se define como

$$A = by + ky^2$$

Su derivada con respecto a x queda expresada como

$$\frac{dA}{dx} = T \frac{dy}{dx}$$

(A.9)

Sustituyendo las ecs A.8 y A.9 en la A.7, se tiene que

$$\frac{dS_f}{dx} = \frac{2n^2 Q q P^{4/3}}{C^2 A^{10/3}} + \frac{8n^2 Q^2 P^{1/3}}{3C^2 A^{10/3}} \sqrt{1+k^2} \frac{dy}{dx} - \frac{10n^2 Q^2 P^{4/3} T}{3C^2 A^{13/3}} \frac{dy}{dx}$$

(A.10)

Sustituyendo la ec A.10 en la A.6 y agrupando términos, la derivada del numerador de la ec 2.13 se expresa como

$$\frac{d}{dx} \left[S_o - S_f - \frac{2qQ}{g A^2} \right] = \frac{dy}{dx} \left[\frac{8n^2 Q^2 P^{1/3}}{3C^2 A^{10/3}} \sqrt{1+k^2} + \frac{10n^2 Q^2 P^{4/3} T}{3C^2 A^{13/3}} + \frac{4qQT}{gA^3} \right] - \frac{2n^2 Q q P^{4/3}}{C^2 A^{10/3}} - \frac{2q^2}{gA^2}$$

(A.11)

Al derivar el denominador de la ec. 2.13 se tiene que

$$\frac{d}{dx} (1 - F^2) = -2 F \frac{dF}{dx} \quad (\text{A. 12})$$

Puesto que el número de Froude es

$$F = \frac{Q}{\sqrt{g A^3/T}}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (1 - F^2) &= \frac{-2 F}{\sqrt{g}} \frac{d}{dx} \left[\frac{Q T^{1/2}}{A^{3/2}} \right] = \\ &= \frac{-2 F}{\sqrt{g}} \left[\frac{A^{3/2} \left(\frac{1}{2} Q T^{-1/2} \frac{dT}{dx} + T^{1/2} q \right) + 3/2 Q T^{1/2} \left(A^{1/2} \frac{dA}{dx} \right)}{A^3} \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 13})$$

El ancho de la superficie libre para sección trapecial se define como

$$T = b + 2 k \bar{y} \quad (\text{A. 14})$$

y su derivada respecto a x es

$$\frac{dT}{dx} = 2 k \frac{dy}{dx} \quad (\text{A. 15})$$

Las ecs A.9 y A.15, la ecuación del ancho de la superficie libre y la del número de Froude, sustituidas en la A.13 conducen a

$$\frac{d}{dx} (1 - F^2) = \frac{-2 F}{\sqrt{g}} \left[\frac{A^{3/2} \left[k Q T^{-1/2} \frac{dy}{dx} + T^{1/2} q \right] - \frac{3}{2} Q T^{1/2} \left[A^{1/2} T \frac{dy}{dx} \right]}{A^3} \right] \quad (\text{A. 16})$$

al simplificar y reacomodar términos se llega a

$$\frac{d}{dx} (1 - F^2) = \frac{-2 Q}{g A^3} \left[k Q - \frac{3 Q T^2}{2 A} \right] \frac{dy}{dx} - \frac{2 Q}{g A^3} T q \quad (\text{A. 17})$$

Al sustituir las ecs A.11 y A.17 en la 2.13 se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{-8n^2 \sqrt{1+k^2} Q^2 P^{1/3}}{3 C^2} + \frac{10n^2 Q^2 P^{4/3} T}{3C^2 A^{13/3}} + \frac{4qQT}{gA^3} \right] \frac{dy}{dx} - \frac{2n^2 QqP^{4/3}}{C^2 A^{10/3}} - \frac{2q^2}{gA^2}}{\frac{-2Q}{gA^3} \left[kQ + \frac{QT^2}{A} \right] \frac{dy}{dx} - \frac{2Q}{gA^3} Tq} \quad (A.18)$$

Al reagrupar términos en la ec A.18, ésta se transforma en

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \left[-\frac{2Q^2}{gA^3} \left[k - \frac{1.5T^2}{A} \right] \right] + \\ & + \frac{dy}{dx} \left[\frac{8}{3} \left(\frac{nQ}{C} \right)^2 \frac{\sqrt{1+k^2}}{A^{10/3}} P^{1/3} - \frac{10}{3} \left(\frac{nQ}{C} \right)^2 \frac{P^{4/3} T}{A^{13/3}} - \frac{6qQT}{gA^3} \right] + \\ & + \left[\frac{2n^2 QqP^{4/3}}{C^2 A^{10/3}} + \frac{2q^2}{gA^2} \right] = 0 \quad (A.19) \end{aligned}$$

La ec A.19 es la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y segundo grado válida en el punto singular de la ec 2.13. Sus coeficientes corresponden con las ecs 3.4, 3.5 y 3.6 del cap 3.

b) **Desarrollo de las ecuaciones que permiten calcular las condiciones iniciales para la integración de la ec 2.34 cuando el control es un punto singular**

b1) **Coordenadas del punto singular**

Las ecs 2.13 y 2.34 difieren en el cuarto término, el cual sólo aparece en el numerador de la segunda de ellas. Por esta razón, para el desarrollo de la función que permite calcular el tirante en el punto singular sólo hace falta incluir dicho término. De manera que la expresión correspondiente es

$$f(y) = S_o - \frac{g}{TA^{1/3}} \left[\frac{nP^{2/3}}{C} \right]^2 - \frac{2q}{\sqrt{gAT}} + \frac{qS_o}{gA} \sqrt{2g(z_o + H + S_o x - y)} = 0$$

(A.20)

Con base en las ecs A.1 y A.5, x se puede expresar como

$$x = \frac{A \sqrt{gAT}}{q} \quad (\text{A.21})$$

La expresión que permite calcular el gasto descargado por un cimacio es

$$Q = C_d L H^{3/2}$$

Siendo L la longitud total de cresta, y C_d el coeficiente de descarga por el cimacio, a partir de la ecuación anterior, y recordando que $q = \frac{Q}{L}$, se tiene que

$$H = \left[\frac{q}{C_d} \right]^{2/3} \quad (\text{A.22})$$

Al sustituir las ecs A.21 y A.22 en la A.20, se llega a

$$f(y) = S_o - \frac{g}{TA^{1/3}} \left[\frac{nP^{2/3}}{C} \right]^2 - \frac{2q}{\sqrt{gAT}} + \frac{qS_o}{gA} \sqrt{2g \left[z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{2/3} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gAT} - y \right]} = 0 \quad (\text{A.23})$$

La ec A.23 permite calcular el tirante en el punto singular. Los valores del gasto y de la abscisa correspondientes se calculan con las ecs A.1 y A.5 respectivamente.

b2) Derivada de la superficie libre en el punto singular

Para el desarrollo de la ecuación diferencial válida en el punto singular, basta derivar el término que aparece en el numerador de la ec 2.34, retomar las derivadas de los términos que son comunes a las ecs 2.13 y 2.34 antes desarrollados, y efectuar las simplificaciones pertinentes.

Enseguida se presenta el cálculo de la derivada del término mencionado.

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{qS_o}{gA} \sqrt{2g(z_o + H + S_o x - y)} \right] = \sqrt{2/g} q S_o \frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt{z_o + H + S_o x - y}}{A} \right] \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt{z_o + H + S_o x - y}}{A} \right] = \frac{A}{2\sqrt{z_o + H + S_o x - y}} \left[S_o - \frac{dy}{dx} \right] - \frac{\sqrt{z_o + H + S_o x - y}}{A^2} \frac{dy}{dx}$$

Simplificando y reagrupando términos se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{qS_o}{gA} \sqrt{2g(z_o + H + S_o x - y)} \right] &= \frac{q S_o^2}{A \sqrt{2g(z_o + H + S_o x - y)}} - \\ - \frac{dy}{dx} \left[\frac{qS_o T}{gA^2} \sqrt{2g(z_o + H + S_o x - y)} + \frac{q S_o}{A \sqrt{2g(z_o + H + S_o x - y)}} \right] \end{aligned} \quad (A.25)$$

Al sustituir las ecs A.21 y A.22 en la A.25, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{qS_o}{gA} \sqrt{2g(z_o + H + S_o x - y)} \right] &= \frac{q S_o^2}{\sqrt{2g \left[z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{\frac{2}{3}} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gA/T} - y \right]}} - \\ - \frac{dy}{dx} \left[\frac{qS_o T}{gA^2} \sqrt{2g \left[z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{\frac{2}{3}} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gA/T} - y \right]} + \frac{q S_o}{\sqrt{2g \left[z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{\frac{2}{3}} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gA/T} - y \right]}} \right] \end{aligned} \quad (A.26)$$

Sustituyendo en la ec 2.34 la A.11, que es la derivada de los tres primeros términos de su numerador, la ec A.26, que expresa la derivada del cuarto término del mismo y la derivada de su denominador expresada por la A.17, luego de reagrupar términos, se llega a

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \left[- \frac{2Q^2}{gA^3} \left[k - \frac{1.5T^2}{A} \right] \right] + \frac{dy}{dx} \left[\frac{8}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{\sqrt{1+k^2}}{A^{10/3}} P^{1/3} - \frac{10}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{P^{4/3} T}{A^{13/3}} - \frac{6qQT}{gA^3} + \right. \\ \left. + \frac{qS_o T}{gA^2} \sqrt{2g \left[z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{\frac{2}{3}} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gA/T} - y \right]} + \frac{q S_o}{A \sqrt{2g \left[z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{\frac{2}{3}} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gA/T} - y \right]}} \right] + \\ \left. + \left[\frac{2n^2 QqP^{4/3}}{C^2 A^{10/3}} + \frac{2q^2}{gA^2} - \frac{q S_o^2}{A \sqrt{2g \left[z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{\frac{2}{3}} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gA/T} - y \right]}} \right] \end{aligned} \quad (A.27)$$

La ec A.27 permite calcular el valor de la derivada en el punto singular para la ec 2.34. Sus coeficientes corresponden con las ecs 3.8, 3.9 y 3.10 presentadas en el cap 3.

c) Desarrollo de las ecuaciones que permiten calcular las condiciones iniciales para la integración de la ec 2.35 cuando el control es un punto singular

c1) Coordenadas del punto singular

Las ecs 2.13 y 2.35, difieren en que el tercer término del numerador de la segunda tiene un factor adicional. En el punto singular se tiene que el numerador es:

$$S_o - S_f + \frac{2 Q q}{g A^2} \left[\frac{g A^2 S_o^2}{2 Q^2} (z_o + H + S_o x - y) - \frac{3}{4} \right] = 0$$

que puede expresarse también como

$$S_o + S_o^3 - S_f + \frac{q}{Q} \left[S_o^2 (z_o + H - y) - \frac{3}{4} \right] = 0$$

Al combinar esta ecuación con la del denominador, ec A.1, y considerando las ecs A.2 y A.22, se llega a

$$f(y) = S_o - S_o^3 - \frac{g}{T A^{1/3}} \left[\frac{n P^{2/3}}{C} \right]^2 + \frac{q}{A \sqrt{g A / T}} \left[\left(z_o + \left[\frac{q}{C_d} \right]^{2/3} - y \right) + \frac{3}{4} \right] = 0$$

(A.28)

También en este caso los valores del gasto y de la abscisa en el punto singular se calculan con las ecs A.1 y A.5, respectivamente.

c2) Derivada de la superficie libre en el punto singular

Para desarrollar la ecuación válida en el punto singular, asociada a la ec 2.35, se procederá como se hizo para la desarrollo de la ecuación asociada a la ec 2.34. En este caso resta derivar el tercer término del numerador y efectuar las sustituciones y simplificaciones convenientes.

La derivada del término a que se hace referencia es

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{2Qq}{gA^2} \left[\frac{gA^2 S_o^2}{2Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{3}{4} \right] \right] = -\frac{2Qq}{gA^2} \frac{d}{dx} \left[-\frac{gA^2 S_o^2}{2Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{3}{4} \right] +$$

$$+ \left[-\frac{gA^2 S_o^2}{2Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{3}{4} \right] \frac{d}{dx} \left[-\frac{2Qq}{gA^2} \right] \quad (\text{A.29})$$

La derivada del segundo factor, luego de simplificar es

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{gA^2 S_o^2}{2Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{3}{4} \right] = \frac{dy}{dx} S_o^2 \left[-\frac{gAT}{Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{gA^2}{2Q^2} \right] -$$

$$- \frac{gA^2}{2Q^2} S_o^3 + \frac{gqA^2 S_o^2}{Q^3} (z_o + H + S_o x - y) \quad (\text{A.30})$$

La derivada del primer factor puede ser escrita como

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{2Qq}{gA^2} \right] = \frac{dy}{dx} \left[-\frac{4qQT}{gA^3} \right] + \frac{2q^2}{gA^2} \quad (\text{A.31})$$

Luego de sustituir A.30 y A.31 en A.29, y agrupar términos se llega a la ecuación siguiente

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{2Qq}{gA^2} \left[-\frac{gA^2 S_o^2}{2Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{3}{4} \right] \right] =$$

$$= -\frac{dy}{dx} \left[\frac{qS_o^2}{Q} - \frac{3qQT}{gA^3} \right] - \frac{q^2 S_o^2}{Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{q S_o^2}{Q} - \frac{3q^2}{2gA^2} \quad (\text{A.32})$$

Sustituyendo las ecs A.21 y A.22 en la A.32, se llega a

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{2Qq}{gA^2} \left[\frac{gA^2 S_o^2}{2Q^2} (z_o + H + S_o x - y) + \frac{3}{4} \right] \right] =$$

$$= \frac{dy}{dx} \left[\frac{3qQT}{gA^3} - \frac{qS_o^2}{Q} \right] - \frac{q^2 S_o^2}{Q^2} \left[z_o + \left(\frac{q}{C_d} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{S_o A}{q} \sqrt{gAT} - y \right] + \frac{qS_o^2}{Q} - \frac{3q^2}{2gA^2} \quad (\text{A.32})$$

La derivada del primer término del numerador de la ec 2.35 es cero, la derivada del segundo término está expresada por la ec A.10, y la ec A.32 es la derivada del tercer término. La derivada de su denominador está expresado por la ec A.17. Considerando lo anterior, y luego de factorizar términos se tiene que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left[-\frac{2Q^2}{gA^3} \left[k - \frac{1.5T^2}{A} \right] \right] +$$

$$+ \frac{dy}{dx} \left[\frac{8}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{\sqrt{1+k^2}}{A^{10/3}} P^{1/3} - \frac{10}{3} \left[\frac{nQ}{C} \right]^2 \frac{P^{4/3}T}{A^{13/3}} - \frac{5qQT}{gA^3} + \frac{qS_o^2}{Q} \right] +$$

$$+ \frac{2n^2QqP^{4/3}}{C^2A^{10/3}} + \frac{3}{2} \frac{q^2}{gA^2} + \frac{q^2S_o^2}{Q^2} \left[z_o + \left(\frac{q}{C_d} \right)^{2/3} - y \right] \quad (A.33)$$

La ec A.33 permite evaluar la derivada en el punto singular cuando se aplica la ec 2.35. Sus coeficientes corresponden con las expresiones 3.12, 3.13 y 3.14, que se presentan en el cap 3.

d) Desarrollo de la ecuación que permite aproximar el valor de la derivada en un punto crítico

La diferencia que existe entre las ecs 2.13 y 3.17, se debe solamente al tercer término del numerador de la ec 2.13. Visto así, resulta sencillo desarrollar la ecuación válida en el punto crítico.

La derivada del numerador, al ser $q = 0$ en el extremo aguas abajo del tramo de canal con flujo espacialmente variado, es, a partir de la ec A.10

$$\frac{d}{dx} \left[S_o - S_f \right] = -\frac{dS_f}{dx} = \frac{8}{3} \frac{n^2 Q^2 P^{1/3}}{C^2 A^{10/3}} \sqrt{1+k^2} \frac{dy}{dx} - \frac{10}{3} \frac{n^2 Q^2 P^{4/3} T}{C^2 A^{13/3}} \frac{dy}{dx} \quad (A.34)$$

Con la misma consideración respecto de q , a partir de la ec A.17, se tiene que

$$\frac{d}{dx} (1 - F^2) = -\frac{2Q}{gA^3} \left[kQ - \frac{3QT^2}{2A} \right] \frac{dy}{dx}$$

luego de recomodar y considerar la definición de F

$$\frac{d}{dx} (1 - F^2) = F^2 \left[\frac{3T}{A} - \frac{2k}{T} \right] \frac{dy}{dx} \quad (A.35)$$

pero como $F=1$ en el punto crítico, se tiene que al aplicar la regla de L'Hospital, con base en las ecs A.34 y A.35

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{8n^2 Q^2 P^{1/3}}{3C^2 A^{10/3}} \sqrt{1+k^2} \frac{dy}{dx} - \frac{10n^2 Q^2 P^{4/3} T}{3C^2 A^{13/3}} \frac{dy}{dx}}{\left[\frac{3T}{A} - \frac{2k}{T} \right] \frac{dy}{dx}} \quad (\text{A.36})$$

Al simplificar y reacomodar se llega a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{3} \left[\frac{n Q}{C} \right]^2 \left[4 \left[\frac{P}{A^{10}} \right]^{1/3} \sqrt{1+k^2} - 5 T \left[\frac{P^4}{A^{13}} \right]^{1/3} \right]}{\left[\frac{3T}{A} - \frac{2k}{T} \right]} \quad (\text{A.37})$$

La ec A.37 permite aproximar el valor de la pendiente de la superficie libre en el punto crítico, y corresponde con la ec 3.19 del cap 3.

APENDICE B

- * PROGRAMA PARA CALCULAR EL PERFIL DE FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE EN SECCION TRAPEZIAL. LA ECUACION DINAMICA CONSIDERADA DERIVA DEL PRINCIPIO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO, E INCLUYE EL EFECTO DE LA VELOCIDAD CON QUE INGRESA EL GASTO LATERAL.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - \frac{2Qq}{gA^2} + \frac{qS_o}{gA} \sqrt{2g(Z_o + H + S_o x - y)}}{1 - F^2}$$

- * EL METODO DE INTEGRACION NUMERICA APLICADO ES EL DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN.

LISTA DE VARIABLES:

- * Planti Ancho de plantilla
- * Talud Talud
- * Zo Elevación de la cresta vertedora respecto al fondo del canal en x = 0
- * Cd Coeficiente de descarga del vertedor
- * So Pendiente del fondo del canal en el tramo con FEV
- * Sop Pendiente del fondo del canal en el tramo con FGV (x > Lcanal)
- * n Coeficiente de rugosidad de Manning
- * Lcalc Longitud de calculo del perfil
- * Q Gasto total i.e. Q(x=Lcanal)
- * Lcanal Longitud total del canal
- * Yc Tirante en la sección de control
- * Delx Intervalo de cálculo
- * G Aceleración de la gravedad
- * Cman Coeficiente de la ec de Manning (1 para S I y 1.49 para sistema inglés)
- * Numimp Número que define a cada cuantos intervalos de cálculo se desea impresión

DEFDBL A-Z

DIM Profile(1000, 2)

DECLARE SUB Ycritra (Ycrit)

DECLARE SUB Carhid (Y)

DECLARE SUB Fypsin (Y, Fyps)

DECLARE SUB Fpsin (Yini, Xini, Qini)

DECLARE SUB Fdydxfev (Yini, Qini, dydx)

DECLARE SUB Perfi (Lcalc, Xini, Yini, Qini, dydx, Profile())

DECLARE SUB CoefRK (Y, Q1, KK)

CLS

LOCATE 10, 1

INPUT " Nombre del archivo de salida "; Fsal\$: PRINT

OPEN "O", #1, Fsal\$

PRINT " Sistema de Unidades "

PRINT " 1 para sistema internacional "

INPUT " 2 para sistema inglés "; Sisuni: PRINT

PRINT : PRINT : PRINT

IF Sisuni = 1 THEN

G = 9.81

Cman = 1!

ELSE

G = 32.185

Cman = 1.49

END IF

```

CLS
LOCATE 5, 1
PRINT "INGRESE LOS SIGUIENTES DATOS": PRINT : PRINT
INPUT " Ancho de plantilla " ; Plant1:PRINT
INPUT " Talud " ; Talud: PRINT
INPUT " Gasto total " ; Q: PRINT
PRINT " Elevación de la cresta del vertedor lateral sobre "
INPUT " la plantilla del canal en x = 0 " ; Zo: PRINT
INPUT " Coeficiente de descarga del vertedor lateral " ; Cd: PRINT
INPUT " Longitud de canal con flujo espacialmente variado " ; Lcanal: PRINT
INPUT " Pendiente del canal " ; So: PRINT
INPUT " Existe una caída en x = L (s/n) " ; Caída$:PRINT
IF Caída$ = "n" OR Caída$ = "N" THEN
INPUT " Existe cambio de pendiente en x = L (s/n) " ; Cambio$:PRINT
IF Cambio$ = "s" OR Cambio$ = "S" THEN
INPUT " Pendiente del canal en x > L " ; Sop: PRINT
ELSE
Sop = So
END IF
END IF
INPUT " n de Manning " ; n: PRINT
PRINT #1, " DATOS ": PRINT #1, : PRINT #1,
PRINT #1, "Ancho de plantilla = " ; : PRINT #1, USING " ###.###"; Plant1
PRINT #1, "Talud = " ; : PRINT #1, USING " ##.##"; Talud
PRINT #1, "Pendiente = " ; : PRINT #1, USING " #.#####"; So
PRINT #1, "Elevación de la cresta = " ; : PRINT #1, USING " ##.###"; Zo
PRINT #1, "vertedora sobre la "
PRINT #1, "plantilla del canal en "
PRINT #1, " x = 0 "
PRINT #1, "n de Manning = " ; : PRINT #1, USING " #.#####"; n
PRINT #1, "Coef de sist. de unid. = " ; : PRINT #1, USING " #.###"; Cman
PRINT #1, "Coef de desc. del vert. = " ; : PRINT #1, USING " ##.###"; Cd
PRINT #1, "Acel. de la gravedad = " ; : PRINT #1, USING " ##.###"; G
PRINT #1, "Longitud del canal = " ; : PRINT #1, USING " ###.###"; Lcanal
PRINT #1, "Gasto total = " ; : PRINT #1, USING "#####.#####"; Q
PRINT #1, : PRINT #1,
qa = Q / Lcanal
CALL Ycritra(Ycrit)
PRINT #1, " RESULTADOS "; : PRINT #1, : PRINT #1,
PRINT #1, "El tirante crítico en x = L es " ;
PRINT #1, USING "#####.#####"; Ycrit
CALL Fypsin(Ycrit, Fyps)
PRINT #1, "El valor de la función válida en el punto singular es " ;
PRINT #1, USING "#####.#####"; Fyps
IF Fyps < 0 THEN
PRINT #1, "No existe punto singular en x < L "
CALL Carhid(Ycrit)
Sf = (n * Q * (Permoj) ^ (2! / 3!) / Cman / (Ahid) ^ (5! / 3)) ^ 2!
PRINT #1, "La pendiente de fricción en x = L es " ;
PRINT #1, USING " #.#####"; Sf
IF Caída$ = "s" OR Caída$ = "S" OR Sop > Sf THEN
PRINT #1, "La sección de control consiste en un punto crítico "
PRINT #1, "localizado en x = L "
Yini = Ycrit
Xini = Lcanal
Qini = Q
Lcalc = Xini
Flagg = 1
CALL CoefRK(Ycrit, Qini, dydx)
dydx = 20 * dydx

```

```

Flagg = 0
PRINT #1, "La aproximación de dy/dx en el punto crítico es ";
PRINT #1, USING "####.####"; dydx
Flag1 = 1
ELSE
PRINT #1, "La sección de control se encuentra en x mayor que L; "
PRINT #1, "no es posible calcular el perfil con esta información. "
INPUT "Conoce el tirante en x = L (s/n) "; Tirin$
IF Tirin$ = "n" OR "N" THEN STOP
INPUT "Tirante en x = L "; Yini
Xini = Lcanal
Qini = Q
Bande = 1
END IF
ELSE
PRINT #1, "La sección de control consiste en un punto singular "
PRINT #1, "cuyas coordenadas son:"
CALL Fpsin(Yini, Xini, Qini)
PRINT #1, USING "####.####", Yini; Xini; Yini
CALL Fdydxfev(Yini, Qini, dydx)
PRINT #1, "dy/dx es:";
PRINT #1, USING "####.####"; dydx
END IF
'CALCULO DEL PERFIL CON REGIMEN SUBCRITICO
INPUT " δx para cálculo del perfil con régimen subcrítico "; Delx: PRINT
INPUT " Número de intervalos para impresión "; Numimp
Lcalc = Xini
Signo = -1!
flujo$ = "SUBCRITICO"
Dex = Delx
CALL Perfil(Lcalc, Xini, Yini, Qini, dydx, Profile())
PRINT #1, "δx para cálculo del perfil con régimen subcrítico ";
PRINT #1, USING "###.###"; Delx: PRINT #1,
PRINT #1, "Número de intervalos para impresión ";
PRINT #1, USING "####"; Numimp: PRINT #1,
IF Flag1 = 1 GOTO Final
'CALCULO DEL PERFIL CON REGIMEN SUPERCRITICO
Lcalc = Lcanal - Xini
Signo = 1!
flujo$ = "SUPERCRITICO"
Dex = Delx
CALL Perfil(Lcalc, Xini, Yini, Qini, dydx, Profile())
PRINT #1, "δx para cálculo del perfil con rgimen supercrítico ";
PRINT #1, USING "###.###"; Delx: PRINT #1, : PRINT #1,
Final:
PRINT #1, " X Y ": PRINT #1,
IF Sisuni = 1 THEN
PRINT #1, " (m) (m) "; : PRINT #1,
ELSE
PRINT #1, " (ft) (ft) "; : PRINT #1,
END IF
FOR I = 1 TO Facsub + Facsup + 1
IF I = Facsub + 1 THEN
PRINT #1, " Secc de control"
IF Flag1 = 1 THEN
PRINT #1, USING "#####.#### #####.#### "; Xini; Yini
GOTO Control
END IF
END IF
IF Profile(I, 2) = 0 GOTO Control

```

```

PRINT #1, USING "*****.**** *****.**** "; Profile(I, 1); Profile(I, 2)
Control:
NEXT I
CLS:END

SUB Carhid (Y)
SHARED Plant1, Talud, Ahid, Permoj, Rhid, Asul, Thid
'SUBPROGRAMA QUE CALCULA LAS CARACTERISTICAS HIDRAULICAS
'PARA SECCION TRAPEZIAL
Ahid = (Plant1 + Talud * Y) * Y
Permoj = Plant1 + 2! * Y * SQR(1! + Talud * Talud)
Rhid = Ahid / Permoj
Asul = Plant1 + 2! * Talud * Y
Thid = Ahid / Asul
END SUB

SUB CoefRK (Y, Q, KK)
SHARED G, So, n, Cman, qa, Zo, Cd, Signo, Delx, Ahid, Permoj, Thid, Asul, Flagg
'SUBROUTINA EN QUE SE CALCULAN LOS VALORES DE LOS COEFICIENTES PARA
'EL METODO DE INTEGRACION DE RUNGE-KUTTA
CALL Carhid(Y)
Froude = Q / (Ahid * SQR(G * Thid))
Sf = n * Q * (Permoj) ^ (2! / 3!) / Cman / Ahid ^ (5! / 3!)
Sf = Sf * Sf
Tfev = 2! * Q * qa / (G * Ahid * Ahid)
Raiz = Zo + (qa / Cd) ^ (2! / 3!)
Raiz = Raiz + So * Q / qa - Y
Raiz = SQR(2 * G * Raiz)
Tmol = qa * So * Raiz / G / Ahid
KK = So - Sf - Tfev + Tmol
IF Flagg = 1 THEN EXIT SUB
KK = KK / (1 - Froude * Froude)
KK = Signo * Delx * KK
END SUB

SUB Fdydxfev (Y, Qini, dydx)
SHARED Plant1, Talud, n, Cman, G, So, Lcanal, Zo, Cd, qa, Ahid, Permoj, Asul
'SUBROUTINA QUE CALCULA LA APROXIMACION DE LA PENDIENTE DE LA
'SUPERFICIE LIBRE DEL AGUA EN EL PUNTO SINGULAR
CALL Carhid(Y)
E = -2! * Qini * Qini * (Talud - 1.5 * Asul * Asul / Ahid)
E = E / G / Ahid ^ 3!
M1 = (n * Qini / Cman) ^ 2! / 3!
M2 = 8! * M1 * SQR(1 + Talud * Talud)
M2 = M2 * (Permoj / Ahid ^ 10!) ^ (1! / 3!)
M3 = 10! * M1 * (Permoj ^ 4! / Ahid ^ 13!) ^ (1! / 3!) * Asul
M4 = M2 - M3 - 6! * qa * Qini * Asul / G / Ahid ^ 3!
Raiz = Zo + (qa / Cd) ^ (2! / 3!)
Raiz = Raiz + So * SQR(G * Ahid ^ 3! / Asul) / qa - Y
Raiz = SQR(2 * G * Raiz)
M = M4 + qa * So / Ahid * (1! / Raiz + Asul * Raiz / G / Ahid)
N1 = 2! * Qini * qa * (n / Cman) ^ 2!
N1 = N1 * (Permoj ^ 4! / Ahid ^ 10!) ^ (1! / 3!)
N2 = N1 + 2! * (qa / Ahid) ^ 2! / G - qa * So * So / Raiz / Ahid
dydx = -M - SQR(M * M - 4! * E * N2)
dydx = dydx / 2! / E
END SUB

```

SUB Fpsin (Ordps, Absps, Qps)

SHARED Plant1, Talud, Ahid, Permoj, Rhid, Asul, Thid, qa, G, n, Cman, Zo, Cd
' SUBRUTUINA QUE CALCULA LAS COORDENADAS DEL PUNTO SINGULAR
' EN CASO DE QUE SE PRESENTE FLUJO MIXTO, i.e. CUANDO EXISTE
' PUNTO SINGULAR EN $x < Lcanal$
Toler = .000000001#: Imax = 250
Y1 = .001

Alef:

CALL Fypsin(Y1, Fy)
Fdy1 = qa * (2! * Talud * Ahid + Asul * Asul)
Fdy1 = Fdy1 / SQR(G * (Ahid * Asul) ^ 3!)
Fdy2 = G * n * n / (3! * Cman * Cman * Rhid ^ (1! / 3!))
Fdy3 = 8! * SQR(1 + Talud * Talud) / Asul
Fdy3 = Fdy3 - 1! / Rhid - 6! * Talud * Permoj / Asul / Asul
Raiz = Zo + (qa / Cd) ^ (2! / 3!)
Raiz = Raiz + So * SQR(G * Ahid ^ 3! / Asul) / qa - Y1
Raiz = SQR(2 * G * Raiz)
Fdy4 = 3! * SQR(G * Ahid * Asul) / 2!
Fdy4 = Fdy4 - Talud * SQR(G * (Ahid / Asul) ^ 3!)
Fdy4 = (Fdy4 * G * So / qa - G) / Raiz
Fdy4 = qa * So * (Fdy4 - Asul * Raiz / Ahid) / G / Ahid
Fdy = Fdy1 - Fdy2 * Fdy3 + Fdy4
Y11 = Y1 - Fy / Fdy
IF ABS(Y1 - Y11) <= Toler GOTO Bet
IF Cont = Imax GOTO Gimmel
Y1 = Y11
GOTO Alef

Gimmel:

PRINT #1, "La mejor aproximación del tirante en el punto singular es:"; Y
PRINT #1, "Luego de "; Itmax; " iteraciones."
PRINT #1, "El error absoluto es "; ABS(Y11 - Y1)
INPUT " Sigo (s/n)", sigo\$
IF sigo\$ = "N" OR sigo\$ = "n" THEN STOP

Bet:

Ordps = Y11
CALL Carhid(Y11)
Qps = Ahid * SQR(G * Thid)
Absps = Qps / qa

END SUB

SUB Fypsin (Y, Fyps)

SHARED Plant1, Talud, Q, n, Cman, G, So, Lcanal, Ahid, Permoj, Asul, qa, Zo, Cd
' SUBRUTINA QUE PERMITE CALCULAR EL VALOR DE LA FUNCION VALIDA
' EN EL PUNTO SINGULAR
CALL Carhid(Y)
Raiz = Zo + (qa / Cd) ^ (2! / 3!)
Raiz = Raiz + So * SQR(G * Ahid ^ 3! / Asul) / qa - Y
Raiz = SQR(2 * G * Raiz)
Fyps = n * Permoj ^ (2! / 3!) / Cman
Fyps = Fyps * Fyps
Fyps = G / (Asul * Ahid ^ (1! / 3!)) * Fyps
Fyps = So - Fyps - 2 * qa / SQR(G * Ahid * Asul)
Fyps = Fyps + qa * So * Raiz / G / Ahid

END SUB

SUB Perf1 (Lcalc, Xini, Yini, Qini, dydx, Profile())

SHARED Signo, flujo\$, Delx, Numimp, qa, G, n, Cman, Sisuni, Facsub, Facsup, Zo, Band

'SUBROUTINA QUE CALCULA EL PERFIL

X = Xini

Y = Yini

Q1 = Qini

Factimp = CINT(Lcalc / (Numimp * Delx))

IF Factimp = 0 THEN Factimp = 1

Delx = Lcalc / (Numimp * Factimp)

flag = 0

IF Bande = 1 THEN flag = 1

FOR I = 1 TO Factimp

FOR J = 1 TO Numimp

IF I = 1 AND flag = 0 THEN

K1 = Delx * Signo * dydx

flag = 1

ELSE

CALL CoefRK(Y, Q1, K1)

END IF

CALL CoefRK(Y + K1 / 2!, Q1 + Signo * qa * Delx / 2!, K2)

CALL CoefRK(Y + K2 / 2!, Q1 + Signo * qa * Delx / 2!, K3)

CALL CoefRK(Y + K3, Q1 + Signo * qa * Delx, K4)

Y = Y + (K1 + 2! * (K2 + K3) + K4) / 6!

X = X + Signo * Delx

Q1 = Q1 + Signo * qa * Delx

Lahog = Zo + .66 * (qa / Cd) ^ (2! / 3!) + So * X

IF Y > Lahog THEN

PRINT #1, "La descarga de gasto lateral deja de ser libre": PRINT #1,

PRINT #1, "En x = ";

PRINT #1, USING "###.##"; X;

PRINT #1, " pues y = "; : PRINT #1, USING "###.##"; Y

PRINT #1, "Excede el limite de ahogamiento";

PRINT #1, USING "###.##"; Lahog :GOTO uno

END IF

NEXT J

uno:

IF flujo\$ = "SUBCRITICO" THEN

Facsub = Factimp

Profile(Facsub + 1 - I, 1) = X

Profile(Facsub + 1 - I, 2) = Y

ELSE

Facsup = Factimp

IF I = 1 THEN

Profile(Facsub + 1, 1) = Xini

Profile(Facsub + 1, 2) = Yini

END IF

Profile(Facsub + 1 + I, 1) = X

Profile(Facsub + 1 + I, 2) = Y

END IF

IF Y > Lahog THEN EXIT SUB

NEXT I

END SUB

SUB Ycritra (Y11)

SHARED Plant1, Talud, G, Q, Ahid, Asul, Thid
' SUBPROGRAMA PARA CALCULAR EL TIRANTE CRITICO EN SECCION PRISMATICA
' TRAPEZIAL, MEDIANTE EL METODO DE NEWTON RAPHSON
Toler = .000001: Itmax = 250
IF Plant1 = 0 THEN Plant1 = .00001
Y1 = (Q * Q / (G * Plant1 * Plant1)) ^ (1! / 3!)
IF Talud <> 0 THEN Y1 = (-Plant1 + SQR(Plant1 * (Plant1 + 4 * Talud * Y1)
IF Plant1 = .00001 THEN Plant1 = 0

Alfa:

Cont = Cont + 1
CALL Carhid(Y1)
Froude = Q / (Ahid * SQR(G * Thid))
Fy1 = Froude - 1!
Dy1 = Froude * (Talud / Asul - 3! * Asul / (2! * Ahid))
Y11 = Y1 - Fy1 / Dy1
IF ABS(Y11 - Y1) <= Toler GOTO Beta
IF Cont = Itmax GOTO Gama
Y1 = Y11
GOTO Alfa

Gama:

PRINT "La mejor aproximación del tirante crítico es "; Y11
PRINT "Luego de "; Itmax; " iteraciones"
PRINT "El error absoluto es "; ABS(Y11 - Y1)
INPUT "Sigo (s/n)", sigo\$
IF sigo\$ = "N" OR sigo\$ = "n" THEN STOP

Beta:

END SUB