# GENERACION NUMERICA DE MALLAS
# Y SU APLICACION EN HIDRAULICA

MEJIA GONZALEZ MIGUEL ANGEL

TESIS

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERIA
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
como requisito para obtener
el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA
(HIDRAULICA)



CIUDAD UNIVERSITARIA
(junio,1991)

## 1. INTRODUCCION

La formulación matemática de la mayoria de los problemas en ingenieria involucran tasas de cambio con respecto a dos o más variables independientes, de lo cual se obtienen ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Un ejemplo de lo anterior son los problemas de flujo potencial los cuales implican la solución de las ecuaciones de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ y $\nabla^2 \psi = 0$, donde $\phi$ = potencial y $\psi$ = líneas de corriente. La ecuación de Laplace es una ecuación de tipo elíptica.

La solución de las ecuaciones diferenciales debe satisfacerse en cada punto **x, y** del area **S** dentro de una curva cerrada **C** y satisfacer ademas ciertas condiciones en la frontera de esta curva **C** (fig 1.1). Estas condiciones son llamadas ***condiciones de frontera***.

Desafortunadamente, sólo se han resuelto analiticamente un número muy limitado de ciertos tipos de EDP y la utilidad de estas soluciones está restringida a problemas tales que puedan satisfacerse las condiciones de frontera. Esto elimina muchos problemas en los cuales las condiciones de frontera son muy difíciles de satisfacer. En tales casos los métodos numéricos son el único medio de solución. De los métodos numéricos disponibles para resolver ecuaciones diferenciales, el de diferencias finitas es uno de los que más frecuentemente se emplean. Estos métodos aproximan las derivadas en un punto con cocientes de diferencias sobre un pequeño intervalo, esto es, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ se reemplaza por $\frac{\delta \phi}{\delta x}$, donde $\delta x$ es pequeño.

En estos métodos ( fig 1.1) el área de integración de la EDP, esto es, el área **S** limitada por la curva cerrada **C**, está cubierta por una malla rectangular formada por dos conjuntos de líneas , un conjunto paralelo a *OX* y el otro paralelo a *OY*; encontrándose una solución aproximada a la ecuación diferencial en los puntos de intersección $P_{11}$, $P_{12}$,...,$P_{ij}$, de las líneas paralelas. Esta solución se obtiene aproximando la ecuación diferencial parcial sobre el area **S** con ***n*** ecuaciones algebráicas que involucran los valores de $\phi$ en los ***n*** puntos de la malla dentro de la curva **C**. La aproximación consiste en reemplazar cada derivada de la ecuación diferencial en los puntos $P_{i,j}$ por una aproximación en diferencias finitas en términos de los valores de $\phi$ en el punto, de los puntos vecinos y de las fronteras; y en escribir para cada uno de los ***n*** puntos internos de la malla una ecuación algebráica que aproxima la ecuación diferencial. Con este proceso se obtienen ***n*** ecuaciones algebráicas para los ***n*** $\phi_{1,1}$, $\phi_{1,2}$, ..., $\phi_{i,j}$ desconocidos. La precisión en el resultado se puede mejorar ya sea, al incrementar el número de puntos de la malla o al incluir términos de corrección en la aproximación de las derivadas.

Este tipo de mallas presenta dos problemas: ( i ) no siempre es posible un refinamiento local de la malla, y ( ii ) la frontera del modelo númerico algunas veces representa muy pobremente a la frontera física. Debido a ( i ), ocasionalmente se usa un tamaño de malla muy pequeño en todo el dominio del modelo, cuando es necesario sólo en una parte de este. Por causa de ( ii ), se pueden introducir errores numéricos severos.

Para reducir estas dificultades se recomienda usar sistemas curvilíneos ajustados a las fronteras.

La solución númerica de las EDP requiere que la región física se discretice en un conjunto de puntos o volúmenes elementales (celdas). La discretización de la región física requiere organizarse de tal modo que la solución sea eficiente, es decir, debe ser fácil identificar los puntos vecinos al punto de cálculo; ademas.debe adecuarse a las fronteras de la región en tal forma que las condiciones de frontera sean representadas con precisión. Esta organización se hace con un sistema coordenado escogido previamente, como el de la fig 1.2.

El interés en los sistemas coordenados que se ajustan a las fronteras, generados númericamente surge de esta necesidad de organizar la discretización de regiones físicas arbitrarias. Una malla generada númericamente es un conjunto organizado de puntos formado por la intersección de la líneas de un sistema de coordenadas curvilíneas ajustadas a un cuerpo. La característica principal de tales sistemas es que coincide una línea coordenada con cada segmento de la frontera de la región física. El uso de la intersección de líneas coordenadas para definir los puntos de la malla provee una estructura organizacional que permite, después de que las ecuaciones diferenciales de interés han sido transformadas, que todos los cálculos sean hechos en una malla cuadrada fija.

Esta malla no presenta el problema de que la simulación computacional esté restringida a ciertas formas de frontera, y permité codigos generales en los cuales la forma de la frontera se especificada más simplemente.

## 1.1 SISTEMAS DE COORDENADAS AJUSTADAS A LAS FRONTERAS

### 1.1.1 Conceptos basicos

Considérese por ejemplo un sistema coordenado cilíndrico bidimensional que cubre la región anular entre dos circulos concéntricos, fig 1.3. En este caso, las coordenadas curvilíneas $(r, \theta)$ varían en el intervalo $[r_1, r_2]$ y $[0, 2\pi]$, respectivamente. Estas coordenadas curvilíneas están relacionadas con las coordenadas $(x, y)$ por medio de las ecuaciones de transformación

$$x(r, \theta) = r\cos\theta \qquad (1.1)$$
$$y(r, \theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La transformación inversa está dada por

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.2)$$
$$\theta(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Una de las coordenadas curvilíneas, $r$, es constante en cada una de las fronteras físicas, mientras que la otra coordenada $\theta$, varía monotónicamente alrededor de cada una de las fronteras.

Este sistema puede ser representado como un rectángulo en el cual las dos fronteras físicas corresponden a los lados inferior y superior del rectangulo de la fig 1.4.

Las coordenadas curvilíneas $(r, \theta)$ se pueden normalizar en el intervalo $[0,1]$ introduciendo las nuevas coordenadas curvilíneas $(\xi, \eta)$ donde

$$\xi = \frac{\theta}{2\pi} \quad , \qquad \eta = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \qquad (1.3)$$

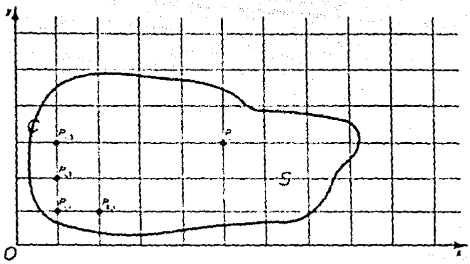


Fig. 1.1

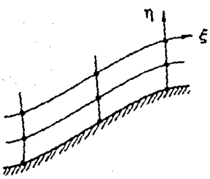


Fig 1.2

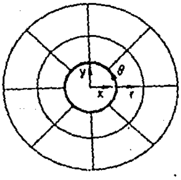


Fig 1.3

Las relaciónes de transformación son en este caso

$$x(\xi,\eta) = [\, r_1 + ( r_2 - r_1 )\eta \,] \cos(2\pi\xi)$$
$$y(\xi,\eta) = [\, r_1 + ( r_2 - r_1 )\eta \,] \operatorname{sen}(2\pi\xi)$$

donde ahora tanto $\xi$ como $\eta$ varían en el intervalo $[0,1]$. Este es un mapeo de la región anular entre los dos círculos en el espacio físico, en un cuadrado unitario en el espacio trasformado, esto es, cada punto $(x,y)$ de la región anular corresponde a uno y sólo un punto $(\xi,\eta)$ en el cuadrado unitario de la fig 1.5.

La base ( $\eta=0$) y la parte superior ( $\eta=1$ ) del cuadrado corresponden, respectivamente, al círculo interior $r=r_1$ y al exterior $r=r_2$. Los lados verticales del cuadrado, $\xi=0$ y $\xi=1$, corresponden, respectivamente, a $\theta=0$ y $\theta=2\pi$. Para la solución de un problema físico en estos lados del cuadrado unitario en el espacio transformado no se especifican condiciones de frontera, ya que estos lados son coincidentes, como se ilustra en la fig 1.6.

Conceptualmente, se puede considerar que la región física se cortó en la linea $\theta=0$ y $2\pi$, y luego se deformó en un rectángulo para formar la región transformada.

La correspondencia de los puntos en las fronteras coincidentes (indicada por las líneas punteadas ) en la región transformada se ilustra con el par de puntos encerrados en un pequeño círculo.

Estos conceptos tan simples pueden extenderse a configuraciones bidimensionales más complicadas, con la característica principal de que una de las coordenadas curvilíneas es constante en una frontera ( como lo fue r en el ejemplo anterior), mientras la otra varía monotónicamente a lo largo de esa frontera ( como lo fue $\theta$ ). La transformación al rectángulo se logra haciendo que la coordenada que varía tenga la misma dirección y rango en cada una de las dos fronteras opuestas ( como $\theta$ varía entre o y $2\pi$ ), fig 1.7. Con esto se logra que el espacio físico se transforme en un rectángulo, sin importar la forma de la región física.

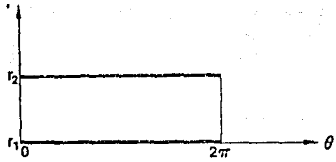



Fig. 1.4

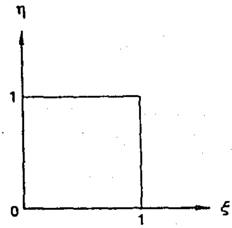



Fig 1.5

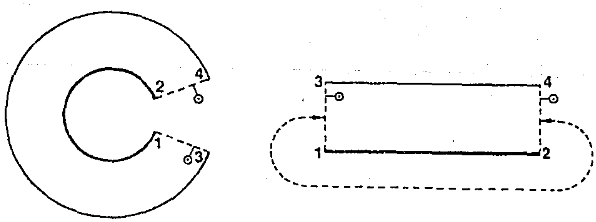



Fig. 1.6

Se ha empleado coordenadas cilíndricas $(r,\theta)$ en el ejemplo mostrado para definir la transformación entre las coordenadas curvilíneas $(\xi,\eta)$ y las coordenadas cartesianas $(x,y)$ debido a la familiaridad que se tienen en el manejo de las coordenadas cilíndricas, pero en general tal coordenadas intermedias no aparecerán. El enunciado general para una configuración cualquiera, como la mostrada sería:

Encontrar $\xi\ (x,y)$ y $\eta\ (x,y)$ en la región anular limitada por las curvas $x^2+y^2=r_1^{\,2}$ y $x^2+y^2=r_2^{\,2}$, sujeta a las condiciones de frontera

$$\eta = 0 \quad \text{en} \quad x^2+y^2=r_1^{\,2}$$

$$\eta = 1 \quad \text{en} \quad x^2+y^2=r_2^{\,2}$$

y con una variación monotónica de $\xi$ sobre $[0,1]$ en $x^2+y^2=r_1^2$ y $x^2+y^2=r_2^2$ con el mismo sentido de dirección en cada una de esa dos curvas. como se muestra en la fig 1.8.

También se puede tratar el problema inverso, esto es, encontrar $x\ (\xi,\eta)$ y $y\ (\xi,\eta)$ en el cuadrado unitario en el espacio transformado ( $0\le\xi\le1$, $0\le\eta\le1$), sujeto a las condiciones de frontera

$x\ (\xi,0)$ y $y\ (\xi,0)$ especificados en $\eta=0$
tal que $x^2(\xi,0) + y^2(\xi,0) = r_1^2$

$x\ (\xi,1)$ y $y\ (\xi,1)$ especificados en $\eta=1$
tal que $x^2(\xi,1) + y^2(\xi,1) = r_2^2$

y con periodicidad en $\xi$: $\quad x\ (1+\xi,\ \eta) = x\ (\xi,\eta)$

$$y\ (1+\xi,\ \eta) = y\ (\xi,\eta)$$

1.1.2. Generalización

La idea básica de un sistema de coordenadas curvilíneas que se ajustan a un cuerpo es que las líneas coordenadas coincidan con cada segmento de la frontera, de manera análoga a la forma en la cual líneas coordenadas de radio constante coinciden con círculos en el sistema coordenado cilíndrico del ejemplo anterior. La otra coordenada curvilínea, que corresponde a la coordenada angular en el sistema cilíndrico, varía a lo largo del segmento de frontera y lo hace monotónicamente; debe ser claro que la coordenada curvilínea que varía a lo largo de un segmento de frontera debe tener la misma dirección y rango de variación sobre dos segmentos opuestos, como por ejemplo, la variable angular que varía de 0 a $2\pi$ sobre los dos círculos en coordenadas cilíndricas.

Con los valores de las coordenadas curvilíneas especificados en la frontera, lo que sigue es generar valores de las coordenadas en el interior de la región en cuestión, a partir de los valores en las fronteras. Debe haber una correspondencia única entre las coordenadas curvilíneas y las cartesianas ( o cualquier otras coordenadas empleadas como base), esto es, el mapeo de la región física hacia la región transformada debe ser uno a uno, por lo que a cada punto en la región física corresponde uno y sólo un punto en la región transformada y viceversa. Las líneas coordenadas de la misma familia no se deben cruzar, y líneas de diferente familia no se deben de cruzar más de una vez.

En este capítulo se considerará una región bidimensional.

A. Problema de valores de frontera en la región física

La generación de un sistema de coordenadas curvilíneas puede tratarse como sigue: una vez que se han especificado las coordenadas curvilíneas en las fronteras, esto es, $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$ en las curvas de frontera $\Gamma$, se generan los valores, $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$ en la región limitada por $\Gamma$. Este es un problema clásico de valores de frontera en la región física con las coordenadas curvilíneas $(\xi,\eta)$ como las variables dependientes y las coordenadas cartesianas $(x,y)$ como las variables independientes, ver fig 1.9.

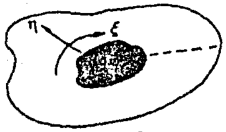



Fig 1.7

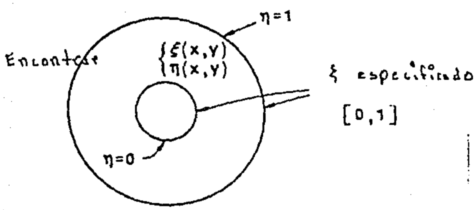



Fig 1.8

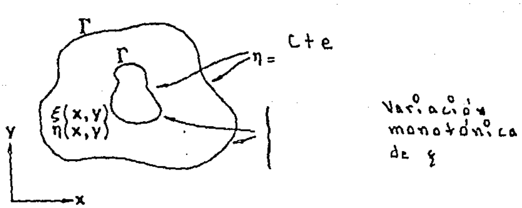



Fig 1.9

B. Problema de valores de frontera en la región transformada

El problema de valores de frontera en el espacio transformado es el de generar los valores de las coordenadas cartesianas físicas, $x(\xi,\eta)$ y $y(\xi,\eta)$ en la región transformada apartir de los valores de $x(\xi,\eta)$ y $y(\xi,\eta)$ especificados en las fronteras del espacio transformado; las fronteras en este caso estan formadas por segmentos en que $\xi$ o $\eta$ son constantes, es decir, líneas horizontales o verticales, fig 1.10. No es necesario especificar valores de frontera en los lados izquierdo y derecho de la región transformada dado que esas fronteras son coincidentes una con otra como lo indican las líneas punteadas en la misma figura.

### 1.1.3. Configuración de regiones transformadas

Dado que las fronteras de las regiones transformadas están compuestas de segmentos de líneas horizontales o verticales, que corresponden a segmentos de las fronteras físicas en las que una coordenada curvilínea es constante, la configuración del sistema coordenado resultante depende de como se hace la correspondencia de las fronteras, esto es, como se configura la región transformada. A continuación se dan algunos ejemplos de diferentes configuraciones, que permiten inferir configuraciones más complicadas.

A. Regiones conectadas simplemente

Una región conectada simplemente formada por cuatro curvas, se transforma en un rectángulo, fig 1.11. De manera similar una región con forma de L puede permanecer con esta forma en la región transformada, fig 1.12.

La generalización de estas ideas a regiones más complicadas, sería por ejemplo una región transformada compuesta de bloques rectangulares como la de la fig 1.13.

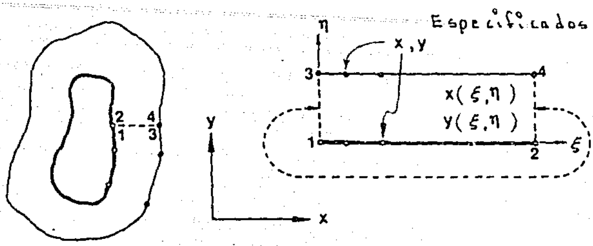



Fig 1.10

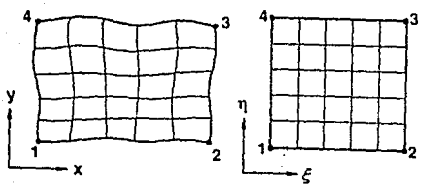



Fig 1.11

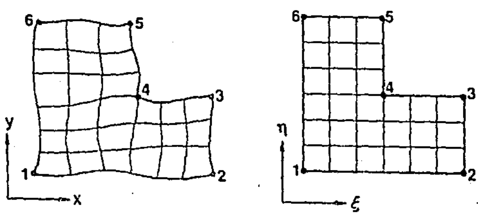



Fig 1.12

B. Regiones multiplemente conectadas

Cuando hay obstaculos en el interior de la región, esto es, cuando hay fronteras interiores, existen aún más alternativas para configurar la región transformada. Una posibilidad es la de mantener la conectividad de la región transformada igual a la de la región física, como se muestra en la fig 1.14. Sin embargo, la región transformada se podria hacer una región simplemente conectada por medio de un corte en la región física como se muestra en la fig 1.15.

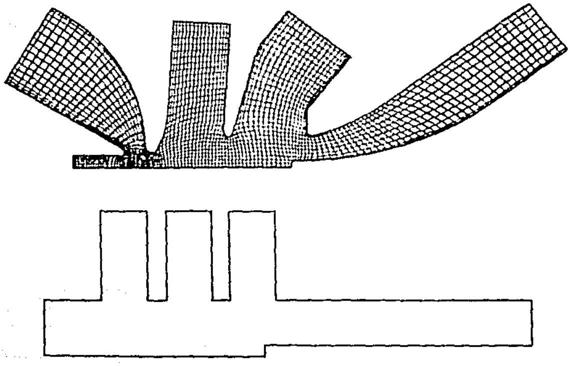


Fig 1.13

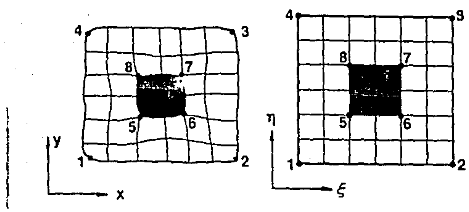



Fig 1.14

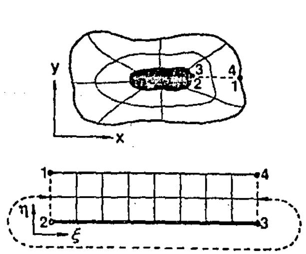



Fig 1.15

El objetivo de este trabajo es presentar algunos métodos para la generación de mallas curvilíneas, y el uso de estas mallas para la solución numérica de las EDP de la hidrodinámica a superficie libre en dos dimensiones.

En el cap 2 se desarrollan las relaciones de transformación de un sistema de coordenadas cartesiano a otro sistema curvilíneo; a manera de ejemplo se transforman las ecuaciones de la hidrodinámica. En los caps 3, 4 y 5 se describen los métodos de generación de mallas algebraicos, elípticos y ortogonales, respectivamente. En el cap 6 se describen brevemente las mallas compuestas. Empleando los conceptos de los capítulos anteriores, en el cap 7 se desarrolla un ejemplo, y finalmente en el cap 8, se dan las conclusiones, destacando los alcances y limitaciones del trabajo.

## 2. RELACIONES DE TRANSFORMACION

En este capitulo se desarrollan las relaciones de transformación de coordenadas cartesianas a un sistema curvilíneo general. Salvo que se indique, el material de este capitulo se tomó de Thompson ***et al*** [1985].

COORDENADAS CURVILINEAS

Sean $(x,y,z)$ las coordenadas rectangulares de un punto P, expresadas en funcion de las variables $(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ de cualquier sistema coordenado, en la forma

$$x = x\ (\xi^1,\xi^2,\xi^3)\ ;\ y = y\ (\xi^1,\ \xi^2.\xi^3)\ ;\ z = z\ (\xi^1,\ \xi^2,\xi^3)$$

Por cada punto del espacio pasan tres superficies $\xi^i\ (x,y,z)$=cte. $(i = 1,2,3)$ llamadas ***superficies coordenadas.*** Sus intersecciones son las ***líneas coordenadas,*** caracterizadas por que a lo largo de ellas varía una sola de las coordenadas $\xi^i$ fig 2.1. Las tangentes a las líneas coordenadas y las normales a las superficies coordenadas son los vectores base del sistema coordenado.

## 2.1 VECTORES BASE

### A. Covariantes

Considérese una línea coordenada a lo largo de la cual varía solo la coordenada $\xi$, fig 2.2. El vector tangente a la línea coordenada de la fig 2.2 está dada por

$$\frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \xi} = \underset{\sim}{r}_{\xi}$$

cuando las coordenadas aparecen como subindice se indica derivación parcial. Estos vectores tangentes a las tres líneas coordenadas se les llama vectores base **covariantes** del sistema curvilíneo

$$\underset{\sim}{a}_i = \underset{\sim}{r}_{\xi^i} \qquad (i = 1,2,3) \qquad (2.1)$$

donde las tres coordenadas curvilíneas son representadas por $\xi^i$, y el subindice $i$ indica el vector base correspondiente a la coordenada $\xi^i$.

### B. Contravariante

Un vector normal a una superficie coordenada en la cual la coordenada $\xi$ es constante está dada por $\nabla\xi$, fig 2.3. Estos vectores normales a las tres superficies coordenadas son los tres vectores base contravariantes del sistema coordenado curvilíneo,

$$\underset{\sim}{a}^i = \nabla \xi^i \qquad ( i = 1,2,3 ) \qquad (2.2)$$

La fig 2.4 ilustra los dos tipos de vectores base.

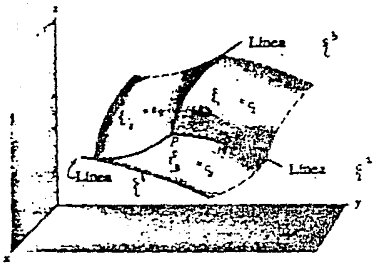

Linea $\xi^3$
Linea $\xi^2$
Linea $\xi^1$
P
x
y
z

Fig 2.1

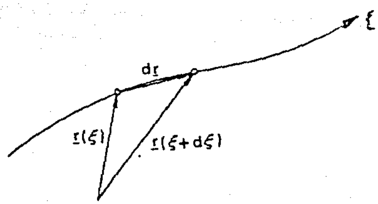

$\xi$
$d\underline{r}$
$\underline{r}(\xi)$
$\underline{r}(\xi+d\xi)$

Fig. 2.2

## 2.2 RELACION ENTRE COVARIANTES Y CONTRAVARIANTES

A. Vectores Base

Los vectores base contravariantes pueden expresarse en terminos de los vectores base covariantes como

$$a^i = \nabla\xi^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\, a_j \times a_k \qquad (i,j,k \text{ cíclicos}) \qquad (2.3)$$

donde $\sqrt{g}$ es el Jacobiano de la transformación, que es igual a

$$\sqrt{g} = a_1 \cdot (a_2 \times a_3) \qquad (2.4)$$

Cualquier función vectorial $\underset{\sim}{A}$ puede expresarse en términos de cualquiera de los vectores base como

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{i=1}^{3} (a^i \cdot \underset{\sim}{A})\, a_i \qquad (2.5)$$

o también

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{i=1}^{3} (a_i \cdot \underset{\sim}{A})\, a^i \qquad (2.6)$$

donde las cantidades $A^i = a^i \cdot \underset{\sim}{A}$ y $A_i = a_i \cdot \underset{\sim}{A}$ son los componentes contravariantes y covariantes, respectivamente, del vector $\underset{\sim}{A}$.

## 2.3 Elementos diferenciales

### A. Tensor métrico covariante

El incremento diferencial de un vector de posición, no necesariamente a lo largo de una línea coordenada, está dado por

$$d\underset{\sim}{r} = \sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{r}_{\xi^i} \; d\xi^i = \sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{a}_i \; d\xi^i$$

El incremento de una longitud de arco a lo largo de una curva en el espacio está dado por

$$( ds )^2 = | d\underset{\sim}{r} |^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{a}_j \; d\xi^i \; d\xi^j$$

por lo que el incremento de longitud de arco depende de los nueve productos punto, $\underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{a}_j$, ( i= 1,2,3 ) y ( j= 1,2,3 ), los cuales forman el llamado tensor métrico covariante

$$g_{ij} = \underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{a}_j = g_{ji} \qquad ( i= 1,2,3 ) \text{ y } ( j= 1,2,3 ) \tag{2.7}$$

por lo que $( ds )^2$ puede escribirse como

$$( ds )^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} g_{ij} \; d\xi^i \; d\xi^j \tag{2.8}$$

### B. Tensor métrico contravariante

Los componentes del tensor métrico contravariante son los productos punto del vector base contravariante

$$a^i \cdot a^j = g^{ij} = g^{ji} \qquad ( i = 1,2,3) \quad ( j = 1,2,3) \tag{2.9}$$

C. Elemento diferencial de longitud de arco

Un incremento de longitud de arco, sobre una línea coordenada en la cual varia $\xi^i$ está dado por

$$ds^i = | r_{\xi^i} | d\xi^i = | a_i | d\xi^i = \sqrt{g_{ii}}\ d\xi^i \qquad (2.10)$$

I. Elemento diferencial de área

Un incremento de área en una superficie coordenada en que $\xi^i$ es constante está dada por

$$dS^i = | \underset{\sim}{r}_{\xi^j} \times \underset{\sim}{r}_{\xi^k} |\ d\xi^j\ d\xi^k \qquad (i,j,k) \qquad (2.11)$$

donde i,j,k son cíclicos

D. Elemento diferencial de volumen

Un incremento de volumen está dado por

$$dV = \underset{\sim}{r}_{\xi^i} \cdot ( \underset{\sim}{r}_{\xi^j} \times \underset{\sim}{r}_{\xi^k} )\ d\xi^i\ d\xi^j\ d\xi^k \qquad (i,j,k \text{ cíclicos})$$

$$= \underset{\sim}{a}_1 \cdot ( \underset{\sim}{a}_2 \times \underset{\sim}{a}_3 )\ d\xi^1\ d\xi^2\ d\xi^3 \qquad (2.12)$$

## 2.4 OPERADORES DE DERIVADAS

Las expresiones para los operadores de derivadas tales como el gradiente, la divergencia, el rotacional, el laplaciano, etc, se obtienen aplicando el teorema de la divergencia a un incremento de volumen diferencial limitado por superficies coordenadas. El teorema de la divergencia de Gauss establece que,

$$\int\int\int_V \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{A}\ d V = \int\int_S \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{n}\ ds \qquad (2.13)$$

Donde $\underset{\sim}{A}$ es cualquier tensor o función vectorial, $\underset{\sim}{n}$ es el vector unitario normal dirigido hacia afuera de la superficie cerrada S, que encierra al volumen V.

A partir de la ec. 2.11 para un elemento diferencial de superficie unitario:

$$\underset{\sim}{n}\, dS^{i} = \pm\, \underset{\sim}{a}_j \times \underset{\sim}{a}_k \; d\xi^{j}\, d\xi^{k} \tag{2.14}$$

Considerando un elemento diferencial de volumen, $\delta V$, limitado por seis caras paralelas a las superficies coordenadas, como se muestra en la fig 2.4, se tiene usando las ecs. 2.12 Y 2.14 en la 2.13

$$\iiint_{\delta V} (\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{A})\, \underset{\sim}{a}_1 \cdot (\underset{\sim}{a}_2 \times \underset{\sim}{a}_3)\; d\xi^{1}\, d\xi^{2}\, d\xi^{3} =$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left[ \iint_{\delta S^{i}_{+}} \underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{a}_j \times \underset{\sim}{a}_k)\; d\xi^{j} d\xi^{k} - \iint_{\delta S^{i}_{-}} \underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{a}_j \times \underset{\sim}{a}_k)\; d\xi^{j} d\xi^{k} \right] \tag{2.15}$$

donde la notación $\delta S^{i}_{+}$ y $\delta S^{i}_{-}$ indica los elementos de superficie en las dos caras opuestos en que $\xi^{i}$ es constante.

Divergencia

Cuando el elemento diferencial de volumen tiende a cero, se obtiene la expresión para la divergencia

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{3} \left[ (\underset{\sim}{a}_j \times \underset{\sim}{a}_k) \cdot \underset{\sim}{A} \right]_{\xi^{i}} \tag{2.16}$$

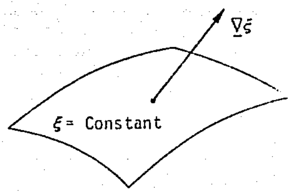
donde (ec 2.4) $\sqrt{g} = \underset{\sim}{a}_1 \cdot (\underset{\sim}{a}_2 \times \underset{\sim}{a}_3)$

El jacobiano, tambien se puede evaluar como

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det\left| g_{ij} \right|} \tag{2.16a}$$

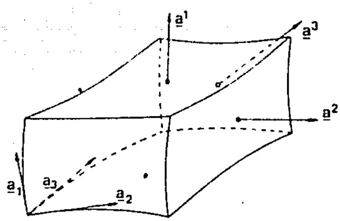
desarrollando la derivada

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{3} \left[ (\underset{\sim}{a}_j \times \underset{\sim}{a}_k)_{\xi^{i}} \cdot \underset{\sim}{A} + (\underset{\sim}{a}_j \times \underset{\sim}{a}_k) \cdot A_{\xi^{i}} \right]$$



$\underline{\nabla}\xi$
$\xi$ = Constant


Fig 2.3



$\underline{a}^1$
$\underline{a}^3$
$\underline{a}^2$
$\underline{a}_1$
$\underline{a}_3$
$\underline{a}_2$


Fig 2.4

La derivada del producto cruz es

$$\sum_{i=1}^{3} \left( \tilde{a}_j \times \tilde{a}_k \right)_{\xi^i} = \sum_{i=1}^{3} \left( \tilde{r}_{\xi^j} \times \tilde{r}_{\xi^k} \right)_{\xi^i} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{r}_{\xi^j \xi^i} \times \tilde{r}_{\xi^k} + \sum_{i=1}^{3} \tilde{r}_{\xi^j} \times \tilde{r}_{\xi^k \xi^i}$$

Debido a que los indices son ciclicos el último término de la suma se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{r}_{\xi^j} \times \tilde{r}_{\xi^k \xi^i} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{r}_{\xi^i} \times \tilde{r}_{\xi^j \xi^k} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{r}_{\xi^k} \times \tilde{r}_{\xi^i \xi^j}$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{3} \left( \tilde{a}_j \times \tilde{a}_k \right)_{\xi^i} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{r}_{\xi^j \xi^i} \times \tilde{r}_{\xi^k} + \sum_{i=1}^{3} \tilde{r}_{\xi^k} \times \tilde{r}_{\xi^i \xi^j}$$

Recordando la identidad $A \times B = - B \times A$ se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{3} \left( \tilde{a}_j \times \tilde{a}_k \right)_{\xi^i} = 0 \tag{2.17}$$

por tanto la divergencia tambien se puede escribir como

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{3} \left( \tilde{a}_j \times \tilde{a}_k \right) \cdot \tilde{A}_{\xi^i} \tag{2.18}$$

Aunque las ecs 2.16 y 2.18 son equivalentes, puede ser que la representación númerica de esas formas no sea equivalente. A la ec 2.16 se le designa como forma **conservativa**, y a la forma de la ec 2.18, en la cual se ha desarrollado la derivada del producto,es llamada forma **no conservativa.** Recordando que la cantidad $(\tilde{a}_j \times \tilde{a}_k)$ representa un incremento de área, entonces $(\tilde{a}_j \times \tilde{a}_k) \cdot \tilde{A}$ es un flujo a través del área. La diferencia entre la forma conservativa y la no coservativa es que el área que se usa en la representación numérica del flujo en la forma conservativa, ec 2.16, es el área de los lados individuales del elemento de volumen, pero en la forma no conservativa, se usa un área comun que se evalua en el centro del elemento de volumen.

OPERADORES DIFERENCIALES

Existen tanto formas conservativas como no conservativas de todos los operadores diferenciales. Para la deducción de todos operadores ver Thompson *et al* (1982).

2.5.1 Forma Conservativa

A. Divergencia

Sustituyendo la ec 2.3 en la ec 2.16 se tiene

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{3} \left( \sqrt{g}\, \underset{\sim}{a}^{i} \cdot \underset{\sim}{A} \right)_{\xi^{i}} \tag{2.19}$$

B. Rotacional

$$\nabla \times \underset{\sim}{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{3} \left( \sqrt{g}\, \underset{\sim}{a}^{i} \times \underset{\sim}{A} \right)_{\xi^{i}} \tag{2.20}$$

C. Gradiente

$$\nabla A = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{3} \left( \sqrt{g}\, \underset{\sim}{a}^{i} A \right)_{\xi^{i}} \tag{2.21}$$

D. Laplaciano

$$\nabla^{2} A = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left[ \underset{\sim}{a}^{i} \cdot \left( \sqrt{g}\, \underset{\sim}{a}^{j} A \right)_{\xi^{j}} \right]_{\xi^{i}} \tag{2.22}$$

2.5.2 Forma no conservativa

A. Gradiente

$$\nabla A = \sum_{1}^{3} \underset{\sim}{a}^{i} A_{\xi^{i}} \tag{2.23}$$

B. Divergencia

$$\nabla \cdot A = \sum_{1}^{3} \underset{\sim}{a}^{i} \cdot A_{\xi^{i}} \tag{2.24}$$

C. Rotacional

$$\nabla \times \underset{\sim}{A} = \sum_{1}^{3} \underset{\sim}{a}^{i} \times \underset{\sim}{A}_{\xi^{i}} \tag{2.25}$$

D. Laplaciano

$$\nabla^{2} A = \sum_{1}^{3} \sum_{1}^{3} \underset{\sim}{a}^{i} \cdot \underset{\sim}{a}^{i} \; A_{\xi^{i}} A_{\xi^{i}} + \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{a}^{i} \cdot ( \underset{\sim}{a}^{i} )_{\xi^{i}} A_{\xi^{i}} \tag{2.26}$$

El laplaciano, también se puede escribir como

$$A = \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} g^{ii} \; A_{\xi^{i} \xi^{i}} + \sum_{i=1}^{3} ( \nabla^{2} \xi^{i} ) \; A_{\xi^{i}} \tag{2.26b}$$

## 2.6. DERIVADAS NORMALES Y TANGENCIALES

Las derivadas tangenciales y normales a las superficies coordenadas son necesarias, por ejemplo, en las fronteras y se obtienen a partir de los vectores base.

A. Tangentes a las lineas coordenadas

Dado que los vectores base covariantes son tangentes a las lineas coordenadas, la derivada tangencial en una línea coordenada en la cual $\xi^{i}$ varía es,

$$(A)_{i}^{i} = \frac{\underset{\sim}{a}_{i}}{| \underset{\sim}{a}_{i} |} \cdot \underset{\sim}{\nabla} \; A \tag{2.27}$$

B. Normal a superficies coordenadas

Tambien, dado que los vectores base contravariantes son normales a las superficies coordenadas, la derivada normal a una superficie coordenada en la cual $\xi^{i}$ es constante es,

$$(A)_{n}^{i} = \frac{\underset{\sim}{a}^{i}}{| \underset{\sim}{a}^{i} |} \cdot \underset{\sim}{\nabla} \; A \tag{2.28}$$

2.7. FORMAS BIDIMENSIONALES

En dos dimensiones se supone que la dirección $X_3$ es invariante. Sea la siguiente notación para las coordenadas,

$$X_1 = X, \quad X_2 = Y, \quad \xi^1 = \xi, \quad \xi^2 = \eta$$

A. Elementos metricos

Los vectores base, ec 2.1, son,

$$\underset{\sim}{a}_1 = \underset{\sim}{r}_\xi = i\, x_\xi + j\, y_\xi$$

$$\underset{\sim}{a}_2 = \underset{\sim}{r}_\eta = i\, x_\eta + j\, y_\eta$$

$$\underset{\sim}{a}_3 = \underset{\sim}{a}^3 = k \tag{2.29}$$

Los componentes métricos covariantes, empleando 2.7, son

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{\xi\xi} = x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ g_{22} &= g_{\eta\eta} = x_\eta^2 + y_\eta^2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

El Jacobiano es dado por

$$\sqrt{g} = x_\xi\, y_\eta - x_\eta\, y_\xi \tag{2.31}$$

Los vectores base contravariantes, ec 2.3, son,

$$\underset{\sim}{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} ( i\, y_\eta - j\, x_\eta ) \tag{2.32}$$

$$\underset{\sim}{a}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} ( - i\, y_\xi + j\, x_\xi )$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \tag{2.33}$$

También,

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{\sqrt{g}}; \quad \xi_y = \frac{-x_\eta}{\sqrt{g}}; \quad \eta_x = \frac{-y_\xi}{\sqrt{g}}; \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \tag{2.34}$$

1. Relaciones de transformación

- Divergencia

Sea el vector $\underset{\sim}{A}$ con componentes

$$\underset{\sim}{A} = A_1 \, i + A_2 \, j$$

La versión conservativa es,

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \left( y_\eta A_1 - x_\eta A_2 \right)_\xi + \left( -y_\xi A_1 + x_\xi A_2 \right)_\eta \right] \qquad (2.35)$$

y la no conservativa,

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ y_\eta (A_1)_\xi - x_\eta (A_2)_\xi - y_\xi (A_1)_\eta + x_\xi (A_2)_\eta \right] \qquad (3.36)$$

- Gradiente

Conservativo

$$A_x = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ (y_\eta A)_\xi - (y_\xi A)_\eta \right] \qquad (2.37)$$

$$A_y = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ -(x_\eta A)_\xi + (x_\xi A)_\eta \right] \qquad (2.38)$$

No conservativo

$$A_x = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( y_\eta A_\xi - y_\xi A_\eta \right) \qquad (2.39)$$

$$A_y = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( - x_\eta A_\xi + x_\xi A_\eta \right) \qquad (2.40)$$

- Rotacional

Conservativo

$$\nabla \times A = \frac{k}{\sqrt{g}} \left[ \left( y_\eta A_2 + x_\eta A_1 \right)_\xi - \left( y_\xi A_2 + x_\xi A_1 \right)_\eta \right] \qquad (2.41)$$

No conservativo

$$\nabla \times A = \frac{k}{\sqrt{g}} \left[ y_\eta (A_2)_\xi + x_\eta (A_1)_\xi - y_\xi (A_2)_\eta - x_\xi (A_1)_\eta \right] \qquad (2.42)$$

Laplaciano
conservativo

$$\sqrt{g}\ \nabla^2 A = \{ [\frac{1}{\sqrt{g}} y_\eta [ ( y_\eta A )_\xi - ( y_\xi A )_\eta ]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{g}} x_\eta [ - (x_\eta A)_\xi + ( x_\xi A )_\eta ] \}_\xi$$

$$+ \{ - \frac{1}{\sqrt{g}} y_\xi [(y_\eta A)_\xi - ( y_\xi A )_\eta ]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{g}} x_\xi [ -( x_\eta A )_\xi + ( x_\xi A )_\eta ] \}_\eta \qquad (2.43)$$

No conservativo

$$\nabla^2 A = \frac{1}{g} [ ( x_\eta^2 + y_\eta^2 ) A_{\xi\xi} - 2 ( x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta ) A_{\xi\eta}$$

$$+ (x_\xi^2 + y_\xi^2 ) A_{\eta\eta} ] + (\nabla^2 \xi) A_\xi + (\nabla^2 \eta ) A_\eta \qquad (2.44)$$

## 2.8. COORDENADAS CURVILINEAS ORTOGONALES

Los sistemas de coordenadas ortogonales producen menos términos adicionales en las ecuaciones diferenciales parciales del problema físico y por tanto reducen la cantidad de cálculo requerido, por lo que se prefiere emplear coordenadas curvilíneas ortogonales en dos dimensiones. Las relaciones de transformación de este capítulo se tomaron de Malver (1986).

Sean $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ vectores unitarios tangentes en las direcciones de las líneas coordenadas $\xi,\eta$ respectivamente.

### 2.8.1 Componentes físicas de un vector

Las componentes físicas de un vector relativo a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales son simplemente las componentes cartesianas tangentes a las curvas en un conjunto local de ejes coordenados, fig 2.5. Si $V_k$ representa las componentes cartesianas rectangulares de $\mathbf{V}$ en el sistema cartesiano fijo, las componentes físicas en el sistema curvilíneo son representadas por $V\langle r\rangle$ .

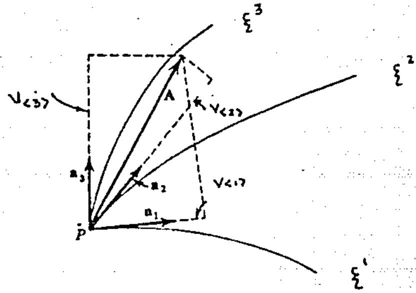



Fig. 2.5

2.8.2 Derivadas de vectores base unitarios en coordenadas ortogonales

$$\frac{\partial\ e_m}{\partial\ x^m} = -\ \frac{1}{h_n}\ \frac{\partial\ h_m}{\partial\ x^n}\ e_n \quad ; \tag{2.45a}$$

Si $m \neq n$

$$\frac{\partial\ e_m}{\partial\ x^n} = +\ \frac{1}{h_m}\ \frac{\partial\ h_n}{\partial\ x^m}\ e_n \tag{2.45b}$$

donde $h_1 = \sqrt{g_{\xi\xi}} = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}$ ; $h_2 = \sqrt{g_{\eta\eta}} = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}$

$x^1 = \xi$ ; $x^2 = \eta$

2.8.3 Relaciones de transformación del sistema ortogonal

- Gradiente

De un escalar

$$\nabla A = \sum_r e_r\ \frac{1}{h_r}\ \frac{\partial\ A}{\partial\ x^r} \tag{2.46}$$

De un vector V

$$\nabla V = \left(\ \sum_n e_n\ \frac{1}{h_n}\ \frac{\partial}{\partial\ x^n}\ \right) V \tag{2.47}$$

- Divergencia

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\ h_2\ V_{<1>}\ ) + \frac{\partial}{\partial\ x^2}(\ h_1\ V_{<2>}\ )\right] \tag{2.48}$$

- Rotacional

$$\nabla \times V = \sum_n \sum_m \frac{1}{h_n}\ \frac{\partial\ V_{<m>}}{\partial\ x^n}\ e_n \times e_m + \sum_n \left[\sum_{m\neq n} \frac{V_{<m>}}{h_n}\ e_n \times \left(\frac{1}{h_m}\ \frac{\partial h_n}{\partial\ x^m}\ e_n\right)\right]$$

$$-\ \frac{V_{<1>}}{h_1}\ e_1 \times \left[\ \frac{1}{h_2}\ \frac{\partial h_1}{\partial\ x^2}\ e_2\ \right]$$

$$-\ \frac{V_{<2>}}{h_2}\ e_2 \times \left[\ \frac{1}{h_1}\ \frac{\partial\ h_2}{\partial\ x^1}\ e_1\ \right] \tag{2.49}$$

2.9 Aplicación

Transformación de las ecuaciones de la hidrodinámica para un flujo horizontal bidimensional a superficie libre en coordenadas cartesianas, a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales fijas.

- Continuidad

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \qquad (2.50)$$

- Cantidad de movimiento en $x$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial}{\partial x}(h+z) + g\frac{u(u^2+v^2)^{1/2}}{h\,c^2} - \gamma V = 0$$

........ (2.51)

- Cantidad de movimiento en $y$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial}{\partial y}(h+z) + g\frac{v(u^2+v^2)^{1/2}}{hc^2} + \gamma U = 0$$

........ (2.52)

donde
- $h$ tirante
- $g$ gravedad
- $u$ velocidad en dirección $x$
- $v$ velocidad en dirección $y$
- $C$ coeficiente de Chezy
- $z$ cota del fondo con respecto a un nivel de referencia
- $\gamma$ fuerza de Coriolis

- Continuidad

la ec de continuidad se puede escribir como

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{V}h = 0$$

donde $\bar{V} = iu + jv$

Aplicando la ec. 2.48 se obtiene

$$\nabla \cdot V h = \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi} g_{\eta\eta}}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sqrt{g_{\eta\eta}} \; \tilde{u} h \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sqrt{g_{\xi\xi}} \; \tilde{v} h \right) \right]$$

Por lo que la ecuación de continuidad en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ ( \tilde{u} \; h ) \sqrt{g_{\eta\eta}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ ( \tilde{v} \; h ) \sqrt{g_{\xi\xi}} \right\}$$

donde $g_* = g_{\xi\xi} g_{\eta\eta}$

- Cantidad de movimiento

La representación de un vector en dos sistemas o más tiene la misma forma.

$$\underset{\sim}{V} = \sum_r V_r \, i_r = \sum_r V_{<r>} \, e_r$$

$$\underset{\sim}{V} = i_1 \, V_1 + i_2 \, V_2 \qquad \text{Cartesiano}$$

$$\underset{\sim}{V} = e_1 \, V_{<1>} + e_2 \, V_{<2>} \qquad \text{Curvilíneo ortogonal}$$

En las ecs de cantidad de movimiento los tres primeros términos corresponden a la aceleración. La aceleración en cualquier sistema está dada por

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V$$

donde en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$a = \begin{bmatrix} a_{<1>} \; e_1 \\ a_{<2>} \; e_2 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left( V_{<1>} \; e_1 \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( V_{<2>} \; e_2 \right) \end{bmatrix}$$

El gradiente de un vector **V**, es un tensor de segundo orden. Un tensor de segundo orden es una función vectorial lineal que en un determinado conjunto de vectores, asocia el valor de la función de un vector, a otro vector.

$$\nabla \cdot V h = \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi} g_{\eta\eta}}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sqrt{g_{\eta\eta}} \ \tilde{u} h \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sqrt{g_{\xi\xi}} \ \tilde{v} h \right) \right]$$

Por lo que la ecuación de continuidad en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ ( \tilde{u} \ h ) \sqrt{g_{\eta\eta}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ ( \tilde{v} \ h ) \sqrt{g_{\xi\xi}} \right\}$$

donde $g_* = g_{\xi\xi} g_{\eta\eta}$

- Cantidad de movimiento

La representación de un vector en dos sistemas o más tiene la misma forma.

$$\underset{\sim}{V} = \sum_r V_r \ i_r = \sum_r V_{<r>} \ \mathbf{e}_r$$

$$\underset{\sim}{V} = i_1 \ V_1 + i_2 \ V_2 \qquad \text{Cartesiano}$$

$$\underset{\sim}{V} = \mathbf{e}_1 \ V_{<1>} + \mathbf{e}_2 \ V_{<2>} \qquad \text{Curvilíneo ortogonal}$$

En las ecs de cantidad de movimiento los tres primeros términos corresponden a la aceleración. La aceleración en cualquier sistema está dada por

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + v \ .\nabla \ v$$

donde en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$a = \begin{bmatrix} a_{<1>} \ \mathbf{e}_1 \\ a_{<2>} \ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left( V_{<1>} \ \mathbf{e}_1 \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( V_{<2>} \ \mathbf{e}_2 \right) \end{bmatrix}$$

El gradiente de un vector **V**, es un tensor de segundo orden. Un tensor de segundo orden es una función vectorial lineal que en un determinado cónjunto de vectores, asocia el valor de la función de un vector, a otro vector.

La matriz de las componentes cartesianas rectangulares de $\nabla \mathbf{V}$ es

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

aplicando la ec 2.48

$$V \cdot \nabla V = \sum_m V_{<m>} \mathbf{e}_m \cdot \left[ \left( \sum_k \mathbf{e}_k \frac{1}{h_k} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) ( V_{<k>} \mathbf{e}_k ) \right]$$

$$V \cdot \nabla V = \sum_k \sum_m \left[ \frac{V_{<k>}}{h_k} \frac{\partial V_{<m>}}{\partial x^k} \mathbf{e}_m + \frac{V_{<k>} V_{<m>}}{h_k} \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^k} \right]$$

por lo que

$$a_{<1>} \mathbf{e}_1 = \frac{\partial V_{<1>}}{\partial t} \mathbf{e}_1 + \frac{V_{<1>}}{h_1} \frac{\partial V_{<1>}}{\partial x^1} \mathbf{e}_1 + \frac{V_{<1>}}{h_1} \frac{\partial V_{<2>}}{\partial x^1} \mathbf{e}_2$$
$$+ \frac{V_{<2>}}{h_2} \frac{\partial V_{<1>}}{\partial x^2} \mathbf{e}_1 + \frac{V_{<2>}}{h_2} \frac{\partial V_{<2>}}{\partial x^2} \mathbf{e}_2$$
$$+ \frac{V_{<1>} V_{<1>}}{h_1} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^1} + \frac{V_{<1>} V_{<2>}}{h_1} \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^1}$$
$$+ \frac{V_{<2>} V_{<1>}}{h_2} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^2} + \frac{V_{<2>} V_{<2>}}{h_2} \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^2}$$

aplicando 2.45a y 2.45b, y multiplicando por $\mathbf{e}_1$ ambos miembros, y recordando que $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ y $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$

$$a_{<1>} = \frac{\partial V_{<1>}}{\partial t} + \frac{V_{<1>}}{h_1} \frac{\partial V_{<1>}}{\partial x^1} + \frac{V_{<2>}}{h_2} \frac{\partial V_{<1>}}{\partial x^2}$$

$$\frac{V_{<1>} V_{<2>}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - \frac{V^2_{<2>}}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1}$$

si $V_{<1>} = \tilde{u}$ y $V_{<2>} = \tilde{v}$

$$a_{<1>} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{u}\,\tilde{v}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\sqrt{g_{\xi\xi}}}{\partial \eta}$$
$$- \frac{\tilde{v}^2}{\sqrt{g_{*}}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g_{\xi\xi}}}{\partial \xi}$$

aplicando 2.46

$$\frac{\partial}{\partial x}(h+z) = \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (h+z)$$

- Coriolis

Debido a la rotación de la tierra se tiene que toda particula en movimiento experimenta una aceleración complementaria, llamada aceleración de Coriolis.

Sea un punto material P que se desplaza con la velocidad **V**, fig 2.6, sea $\omega$ la velocidad angular de rotación de la tierra y $\varphi$ la latitud. El valor de la aceleración complementaria de Coriolis es,

$$a_c = 2 \mathbf{V} \omega \operatorname{sen} \varphi$$

Por ejemplo, para un punto a 32.5° latitud Norte, se tiene

$$a_c = 2 * 7.3E-5 * \operatorname{sen} 32.5^{\circ} * \mathbf{V}$$

$$a_c = 7.84\ E-5\ \mathbf{V}$$

Se observa, pues, que el valor de esta aceleración es variable según la latitud y la velocidad del punto material considerado, siendo esta, la velocidad en el sistema de coordenadas que se está utilizando, por lo que la magnitud de la fuerza de Coriolis en la dirección $\xi$ del sistema curvilíneo es $2\ \omega \operatorname{sen} \varphi\ \tilde{V}$.

- Fricción

La fricción esta dada por g h Sfx, fig 2.7

donde g = gravedad

h = tirante

$Sf_x$ componente de $F_f$ en el eje horizontal (si la sumatoria de fuerzas es el eje vertical se tiene $Sf_v$ )

$$\cos \theta = \frac{Sfx}{F_f}$$

$$Sfx = \cos \theta\ F_f$$

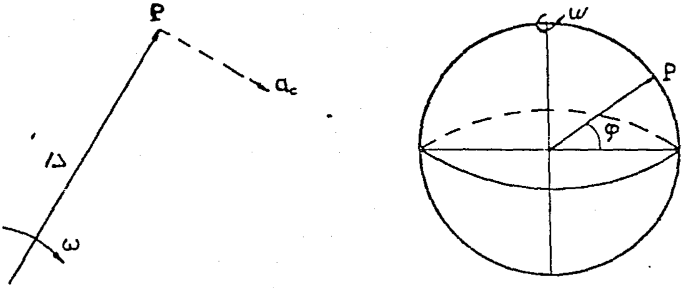



Fig. 2.6

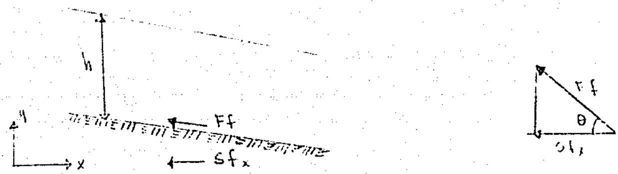



Fig 2.7

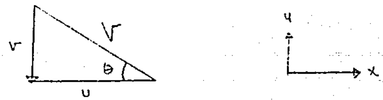



Fig 2.8 a

de la formula de Chézy se tiene que la velocidad media en un flujo es

$$V = C\sqrt{h\,F_f}$$

donde C = factor de resistencia al flujo

por lo que $F_f = \dfrac{V^2}{C^2\,h}$

$$\cos\theta = \frac{u}{V}, \text{ fig 2.8a}$$

por lo que

$$Sf_x = \frac{V^2}{C^2\,h} \cdot \frac{u}{V} = \frac{u\,V}{C^2\,h}$$

donde $V = \sqrt{u^2 + v^2}$

$$Sf_x = \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2\,h}$$

en coordenadas curvilineas ( $\xi$, $\eta$ ), fig 2.8b y fig 2.8c

$$Sf_\xi = \cos\psi\,F_f$$

$$\cos\psi = \frac{u}{V}$$

$$Sf_\xi = \frac{V^2}{C^2\,h} \cdot \frac{\tilde{u}}{V} = \frac{\tilde{u}\,V}{C^2\,h}$$

por lo que

$$Sf_\xi = \frac{\tilde{u}\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{C^2\,h}$$

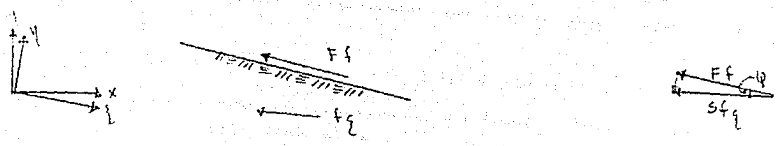


Fig 2.8 b

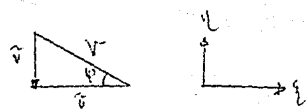


Fig 2.8 c

debido a que la malla es fija

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$$

Finalmente, las ecuaciones de la hidrodinámica en coordenadas curvilineas ortogonales son

Continuidad

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\tilde{u}\ h)\ \sqrt{g_{\eta\eta}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ (\tilde{v}\ h)\ \sqrt{g_{\xi\xi}} \right\}$$

........... (2.53 )

Cantidad de movimiento en $x$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{u}\ \tilde{v}}{\sqrt{g_*}} \frac{\sqrt{g_{\xi\xi}}}{\partial \eta}$$

$$- \frac{\tilde{v}^2}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial \sqrt{g_{\xi\xi}}}{\partial \xi} + \frac{\text{grav.}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial}{\partial \xi} (h + z)$$

$$- \text{grav.} \frac{\tilde{u}\ (\tilde{u} + \tilde{v})^{1/2}}{h\ C^2} - \gamma\ \tilde{v} = 0 \qquad (2.54)$$

Cantidad de movimiento en $y$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{u}\ \tilde{v}}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial \sqrt{g_{\eta\eta}}}{\partial \xi}$$

$$- \frac{\tilde{u}^2}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial \sqrt{g_{\xi\xi}}}{\partial \eta} + \frac{\text{grav.}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial}{\partial \eta} (h + z) + \text{grav.} \frac{\tilde{v}\,(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^{1/2}}{C^2\ h} + \gamma\tilde{u} = 0$$

...................... (2.55 )

## 3 SISTEMAS DE GENERACION ALGEBRAICA

La generación de valores en el interior de una región, en función de los valores en las fronteras, puede hacerse por medio de la interpolación de estos valores en las fronteras; estos procedimientos de generación de coordenadas se denominan sistemas de generación algebráica. En estos métodos $\underset{\sim}{r}(\xi,\eta)$ es dado como una funcion de las coordenadas curvilineas. La evaluación de la función de interpolación para valores constantes de las coordenadas curvilíneas (líneas de $\xi$ y $\eta$) define al sistema coordenado.

### 3.1. Interpolación unidireccional

La interpolación unidireccional es aquella que se lleva a cabo solamente en la dirección de una coordenada curvilínea. El vector coordenado cartesiano $\underset{\sim}{r}$ es una función de la coordenada involucrada en la interpolación, ya que, la interpolación unidireccional es fundamentalmente entre puntos. Estos puntos pueden estar en curvas o superficies que sean fronteras, y en este sentido, la interpolación puede considerarse entre esas curvas o superficies. Existen muchos métodos de interpolación líneal, Thompson [1985]. De estos destacan los siguientes:

a. Interpolación de Lagrange

Este es el tipo de interpolación unidireccional más simple. Esta basado en aproximar una función entre puntos con polinomios. En la forma lineal se tiene, con $0<\xi<I$, fig 3.1.

$$\underset{\sim}{r}(\xi) = \left[1 - \frac{\xi}{I}\right] \underset{\sim}{r}_1 + \frac{\xi}{I} \underset{\sim}{r}_2 \qquad (3.1)$$

En la ec. 3.1, $\underset{\sim}{r}_1 = \underset{\sim}{r}(0)$ y $\underset{\sim}{r}_2 = \underset{\sim}{r}(I)$, por lo que $\underset{\sim}{r}(\xi)$ está definido en terminos de los dos valores en las fronteras $\underset{\sim}{r}_1$ y $\underset{\sim}{r}_2$. Los puntos de la malla se localizan en valores enteros sucesivos de $\xi$ entre 0 a I. Una familia de líneas de la malla serán líneas rectas conectando los correspondientes puntos de la frontera.

La forma general de la interpolación de Lagrange es

$$\underset{\sim}{r}(\xi) = \sum_{n=1}^{N} \phi n \left[\frac{\xi}{I}\right] \underset{\sim}{r}_n \qquad (3.2)$$

Con N=2, se obtienen los coeficientes de la ec 3.1, esto es

$$\phi_1 \left[\frac{\xi}{I}\right] = 1 - \frac{\xi}{I} \qquad \text{y} \qquad \phi_2 \left[\frac{\xi}{I}\right] = \frac{\xi}{I}$$

La función de interpolación relaciona biunívocamente $\underset{\sim}{r}$ en los N puntos, $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N = I$, fig 3.2.

Los puntos interiores, $r_n$ para $n=2,3,\ldots N-1$, no son necesariamente puntos de la malla, ya que los puntos de la mallas se definen evaluando la fórmula de interpolación en valores enteros sucesivos de $\xi$; en este caso son simplemente parámetros adicionales que sirven para controlar la distribución de los puntos. El propósito de la inclusión de los puntos interiores en la generación de la malla no es incrementar la exactitud de la interpolación como normalmente es el caso, sino controlar la distribución de los puntos.

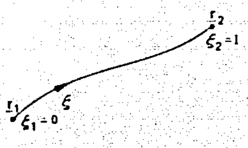



Fig 3.1

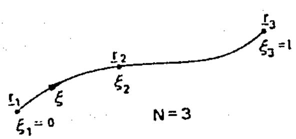



Fig 3.2

B. Interpolación de Hermite

La interpolacion de Lagrange relaciona sólo valores de la función. Es posible sin embargo relacionar tanto valores de la función, $\underset{\sim}{r}$, como valores de la primera derivada de esta, $\underset{\sim}{r}' = \underset{\sim}{r}_{\xi}$, usando la interpolación de Hermite definida como

$$\underset{\sim}{r}(\xi) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) \underset{\sim}{r}_n + \sum_{n=1}^{N} \psi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) \underset{\sim}{r}_n' \qquad (3.3)$$

donde los polinómios de la interpolación de Hermite están definidos $0 \leq \xi \leq I$. Estos polinomios se pueden obtener a partir de la interpolación de Lagrange como

$$\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) = \left[1 - 2\,\phi_n'\left(\frac{\xi_n}{I}\right)\left(\frac{\xi - \xi_n}{I}\right)\right] \phi_n^2\left(\frac{\xi}{I}\right) \qquad (3.4a)$$

$$\psi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) = \left(\frac{\xi - \xi_n}{I}\right) \phi_n^2\left(\frac{\xi}{I}\right) \qquad (3.4b)$$

donde $\phi_n'$ indica diferenciación del polinomio con respecto al argumento. $\xi / I$.

con N=2 se tiene

$$\phi_1\left(\frac{\xi}{I}\right) = \left[1 - 2\,\phi_1'\left(\frac{\xi_1}{I}\right)\left(\frac{\xi - \xi_1}{I}\right)\right] \phi_1^2\left(\frac{\xi}{I}\right)$$

Para $\xi_1 = 0$

$$\phi_1'\left(\frac{\xi_1}{I}\right) = \left(1 - \frac{\xi}{I}\right)_{\xi/I} = 0 - 1 = 1$$

$$\phi_1^2\left(\frac{\xi}{I}\right) = \left(1 - \frac{\xi}{I}\right)^2$$

$$\phi_1\left(\frac{\xi}{I}\right) = \left(1 + 2\,\frac{\xi}{I}\right)\left(1 - \frac{\xi}{I}\right)^2$$

$$\phi_2\left[\frac{\xi}{I}\right] = \left[1-2\,\phi_2'\left[\frac{\xi_2}{I}\right]\left[\frac{\xi-\xi_2}{I}\right]\right]\phi_2^2\left[\frac{\xi}{I}\right]$$

Para $\xi_2 = I$

$$\phi_2^2\left[\frac{\xi}{I}\right] = \left[\frac{\xi}{I}\right]^2$$

$$\phi_2'\left[\frac{\xi_2}{I}\right] = \left[\frac{\xi}{I}\right]_{\xi/I} = 1$$

$$\phi_2\left[\frac{\xi}{I}\right] = \left[1-2(1)\left[\frac{\xi-I}{I}\right]\right]\left[\frac{\xi}{I}\right]^2$$

$$= (3-2\,\xi/I)\,(\xi/I)^2$$

$$\psi_1\left[\frac{\xi}{I}\right] = \left[1-\frac{\xi}{I}\right]^2\frac{\xi}{I}$$

$$\psi_2\left[\frac{\xi}{I}\right] = \left[\frac{\xi}{I}-1\right]\left[\frac{\xi}{I}\right]^2$$

La funcion relaciona los dos valores en las fronteras, $r_1$ y $r_2$, y la primera derivada, $\dot{r}_1$ y $\dot{r}_2$, en las dos fronteras, fig 3.3.

Obviamente, es posible la extension de la interpolación polinomial para utilizarla con derivadas de alto orden. El grado del polinomio se incrementa con cada condición adicional, o punto, o derivada que se incluye en la relación.

Los polinomios de alto grado exhiben considerable oscilación, por lo que no son muy utilizados para la generación de mallas. La forma general incluye relacionar puntos interiores, los cuales pueden ser usados para controlar el espaciamiento de las líneas coordenadas, ya que la primera derivada, $\dot{r} = r_\xi$, es una medida del espaciamiento de los puntos de la malla. Como con la interpolación de Lagrange, estos puntos interiores pueden o no ser puntos de la malla.

Es también posible omitir puntos de cualquiera de las sumas de la ec 3.3 por lo que $\underset{\sim}{r}$ y su primera derivada no se relacionan en todos los puntos ( llamada interpolación deficiente de Hermite). Así con n=2 y el termino n=1 omitido de la segunda suma, se relacionan los dos valores de la frontera, pero la primera derivada sólo se incluira en la frontera $\xi$ = I.

## 3.2 INTERPOLACION MULTIDIRECCIONAL

La interpolación unidireccional no garantiza que líneas de una misma familia no se crucen; para mejorar esto se recomienda hacer la interpolación en todas las direcciones.

### 3.2.1 Interpolacion Transfinita

En dos direcciones se puede tener individualmente en cada dirección curvilínea una función de interpolación de Lagrange lineal, fig 3.4

$$\underset{\sim}{r}\ (\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{2} \phi_n \left[ \frac{\xi}{I} \right] \underset{\sim}{r}\ (\xi_n,\eta) \qquad (3.5a)$$

y

$$\underset{\sim}{r}\ (\xi,\eta) = \sum_{k=1} \psi_k \left[ \frac{\eta}{J} \right] \underset{\sim}{r}\ (\xi,\eta_k) \qquad (3.5b)$$

Esta interpolación es llamada transfinita y relaciona la función en toda la frontera definida por $\xi$=0 y $\xi$=I en la primera ecuación, y en la segunda a la frontera definida por $\eta$=0 y $\eta$=J.

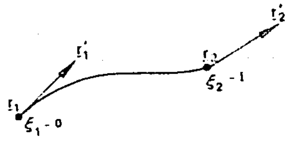



Fig 3.3

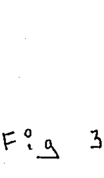



Fig 3.4

El producto de la ecs 3.5a y 3.5b da

$$\underset{\sim}{r}\,(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)\,\psi_k\left(\frac{\eta}{J}\right)\,\underset{\sim}{r}\,(\xi_n,\eta_k) \tag{3.6}$$

donde $\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta_k)$ relaciona la función en las cuatro esquinas, pero no en toda la frontera. fig 3.5

La suma de la ecs 3.5a y 3.5b da

$$S(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{2}\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta) + \sum_{k=1}^{2}\psi_k\left(\frac{\eta}{J}\right)\underset{\sim}{r}(\xi,\eta_k) \tag{3.7}$$

Cuando esta suma se evalua en la frontera $\xi=0$ se obtiene

$$S\,(0,\eta) = \underset{\sim}{r}\,(0,\eta) + \sum_{k=1}^{2}\psi_k\left(\frac{\eta}{J}\right)\underset{\sim}{r}\,(0,\eta_k) \tag{3.8}$$

lo cual no se ajusta a la la frontera $\xi=0$ debido al segundo término de la derecha el cual es una interpolación entre los extremos de esa frontera. fig 3.6. Efectos similares ocurren en las demás fronteras; así, la discrepancia en la frontera $\xi=I$ es

$$\sum_{k=1}^{2}\psi_k\left(\frac{\eta}{J}\right)\underset{\sim}{r}\,(0,\eta_k)$$

La discrepancia en las fronteras se elimina restando de $\underset{\sim}{S}(\xi,\eta)$ una función formada por la interpolación de las discrepancias entre las dos fronteras

$$\underset{\sim}{R}\,(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{2}\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)\left[\sum_{k=1}^{2}\psi_k\left(\frac{\eta}{J}\right)\underset{\sim}{r}\,(\xi_n,\eta_k)\right] \tag{3.9}$$

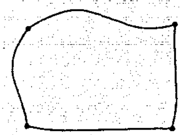


Fig 3.5

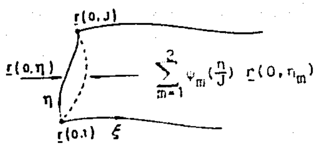



Fig 3.6

Esta última es la ec 3.6, que como se dijo, relaciona la función en las cuatro esquinas. Por tanto la forma de la interpolación transfinita que relaciona la función en toda la frontera es

$$\underset{\sim}{F}(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{2}\phi_n\left[\frac{\xi}{I}\right]\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta)+\sum_{k=1}^{2}\psi_k\left[\frac{\eta}{J}\right]\underset{\sim}{r}(\xi,\eta_k)$$

$$-\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\phi_n\left[\frac{\xi}{I}\right]\psi_k\left[\frac{\eta}{J}\right]\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta_k) \qquad (3.10)$$

La forma general de la interpolación transfinita es

$$\underset{\sim}{F}(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{N}\phi_n\left[\frac{\xi}{I}\right]\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta)+\sum_{k=1}^{K}\psi_k\left[\frac{\eta}{J}\right]\underset{\sim}{r}(\xi,\eta_k)$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\phi_n\left[\frac{\xi}{I}\right]\psi_k\left[\frac{\eta}{J}\right]\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta_k) \qquad (3.11)$$

mientras que el producto tensor es

$$\underset{\sim}{r}(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\phi_n\left[\frac{\xi}{I}\right]\psi_k\left[\frac{\eta}{J}\right]\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta_k) \qquad (3.12)$$

la ec 3.11 se puede reescribir como

$$\underset{\sim}{r}(\xi,\eta)=\sum_{m=1}^{M}\psi_k\left[\frac{\eta}{J}\right]\underset{\sim}{r}(\xi,\eta_k)+$$

$$\sum_{n=1}^{M}\phi_n\left[\frac{\xi}{I}\right]\left[\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta)-\sum_{k=1}^{K}\psi_k\left[\frac{\eta}{J}\right]\underset{\sim}{r}(\xi_n,\eta_k)\right] \qquad (3.13)$$

El primer término es el resultado de la interpolación unidireccional en la direccion $\eta$, y el termino del paréntesis es la diferencia entre los valores especificados en las líneas $\xi=\xi_n$ y el resultado de la interpolación unidireccional en esas líneas. La interpolación transfinita bidireccional se puede realizar por medio de dos interpolaciones unidireccionales; primero se realiza la interpolación unidireccional en una dirección, por decir $\eta$, en todo la región física, llamando al resultado $\underset{\sim}{F}_1(\xi, \eta)$

$$\underset{\sim}{F}_1 ( \xi, \eta ) = \sum_{k=1}^{K} \psi_k \left(\frac{\eta}{J}\right) \underset{\sim}{r} ( \xi, \eta_k ) \tag{3.14a}$$

Despues se interpola la discrepancia en las líneas $\xi=\xi_n$ en toda la región física en la otra dirección, llamando al resultado $\underset{\sim}{F}_2(\xi, \eta)$

$$\underset{\sim}{F}_2 (\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \left(\frac{\xi}{I}\right) \left[ \underset{\sim}{r}(\xi_n, \eta) - \underset{\sim}{F}_1 (\xi_n, \eta) \right] \tag{3.14b}$$

y luego se suman $\underset{\sim}{F}_1$ y $\underset{\sim}{F}_2$

$$\underset{\sim}{r} (\xi, \eta) = \underset{\sim}{F}_1 (\xi, \eta) + \underset{\sim}{F}_2 (\xi, \eta) \tag{3.14c}$$

La interpolación transfinita se da como condición inicial de los sistemas de generación elípticos.

## 4. SISTEMAS DE GENERACION ELIPTICOS

Como se mencionó en el cap 3, la generación de valores en el interior de una región, en función de los valores en la frontera, puede hacerse de varias maneras; por ejemplo, por interpolación. Sin embargo, la solución de tal problema de valores de frontera es un problema clásico de EDP, por lo que es lógico suponer que las coordenadas son la solución de un sistema de EDP.

Si los puntos se especifican en toda la frontera, las ecuaciones diferenciales deben ser elípticas, mientras que si sólo se especifican en una parte de la frontera las ecuaciones serán parabólicas o hiperbólicas.

Una propiedad importante de los sistemas de EDP como un método para la generación de sistemas coordenados, es que permiten generar mallas para cualquier configuración sin cruces de las líneas de la misma familia, lo cual no se puede garantizar con métodos de interpolación.

a. Sistemas de Laplace

El sistema diferencial parcial elíptico más simple es el sistema de Laplace.

$$\nabla^2 \xi^i = 0 \qquad ( i = 1,2 ) \qquad (4.1)$$

Con este sistema de generación las líneas coordenadas tienden a estar igualmente espaciadas en ausencia de curvaturas de la frontera, pero se pegarán más sobre fronteras convexas y se espaciarán más sobre fronteras cóncavas, como se muestra en la fig 4.1.

b. Sistemas de Poisson

El control de la distribución de las líneas coordenas en la region física puede lograrse por medio de la generalización del sistema elíptico a las ecuaciones de Poisson.

$$\nabla^2 \xi^i = P^i \qquad ( i=1,2 ) \qquad (4.2a)$$

donde $P^i = g^{kk} P_k$

en el cual las ***funciones de control*** $P^i$ ($P^1 = P$ y $P^2 = Q$) controlan el espaciamiento y orientación de las líneas coordenadas.

Con valores negativos de la función de control Q, las líneas $\xi$ tiendan a moverse en la dirección del decrecimiento de $\eta$, mientras que con valores negativos de P, las lineas $\eta$ tiendan a moverse en la dirección del decrecimiento de $\xi$, fig. 4.2. Con los puntos fijos en la frontera, las líneas $\eta$ no pueden cambiar la intersección con la frontera: el efecto de la función de control P en este caso es cambiar el angulo de intersección en la frontera, causando que las líneas se inclinen en la dirección del decrecimiento de $\xi$.

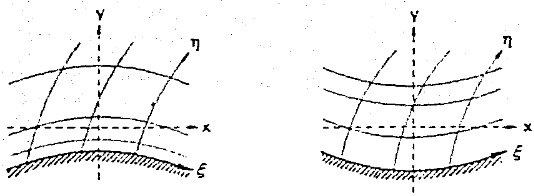
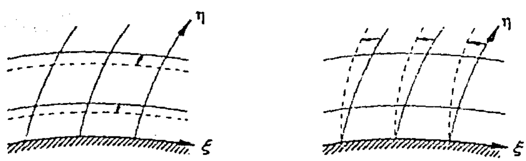



Fig 4.1




Q < 0        P < 0

Fig 4.2

De la ec 4.2a puede deducirse que el sistema de generación está definido como

$$\nabla^2 \xi^i = g^{kk} P_k \qquad (4.2b)$$

El laplaciano puede escribirse, ec 2.26b, como

$$\nabla^2 \underset{\sim}{r} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g^{ij} \underset{\sim}{r}_{\xi^i \xi^j} + \sum_{i=1}^{2} (\nabla^2 \xi^j) \underset{\sim}{r}_{\xi^j} \qquad (4.3)$$

sustituyendo 4.2b en 4.3

$$\nabla^2 \underset{\sim}{r} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g^{ij} \underset{\sim}{r}_{\xi^i \xi^j} + \sum_{k=1}^{2} g^{kk} P_k \underset{\sim}{r}_{\xi^k} \qquad (4.4)$$

como $\underset{\sim}{r} = i x + j y$

$$\nabla^2 \underset{\sim}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (ix + jy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (ix + jy) = 0$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g^{ij} \underset{\sim}{r}_{\xi^i \xi^j} + \sum_{k=1}^{2} g^{kk} P_k \underset{\sim}{r}_{\xi^k} = 0 \qquad (4.5)$$

Esta es la ecuación diferencial parcial elíptica cuasilineal que se resuelve para generar el sistema coordenado. Desarrollando

$$g^{11} r_{\xi\xi} + g^{12} r_{\xi} r_{\eta} + g^{21} r_{\xi} r_{\eta} + g^{22} r_{\eta\eta} + g^{11} P_1 r_{\xi} + g^{22} P_2 r_{\eta} = 0$$

recordando que

$$g^{11} = -\frac{g_{22}}{g} \; ; \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \; ; \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}$$

se llega a

$$\frac{g}{g} r_{\xi\xi} - \frac{g_{12}}{g} r_{\xi} r_{\eta} - \frac{g_{12}}{g} r_{\xi} r_{\eta} + \frac{g_{11}}{g} r_{\eta\eta} + \frac{g_{22}}{g} P r_{\xi} + \frac{g_{11}}{g} Q r_{\eta} = 0$$

agrupando términos

$$g_{22} (r_{\xi\xi} + P\, r_{\xi}) + g_{11} (r_{\eta\eta} + Q\, r_{\eta}) - 2\, g_{12}\, r_{\xi}\, r_{\eta} = 0 \qquad (4.6)$$

Esta es la forma bidimensional del sistema de generación mas simple, con sólo dos funciones de control.

4.1 Atracción a líneas y/o puntos coordenados

La atracción de líneas coordenadas a otras líneas coordenadas o puntos, se puede lograr por medio de las siguientes funciones de control:

$$P(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{sign}(\xi-\xi i) \exp(-ci\, |\xi - \xi i| \qquad (4.7)$$

$$- \sum_{i=1}^{M} bi \operatorname{Sign}(\xi - \xi i) \exp\{-di\, [(\xi-\xi i)^2 + (\eta-\eta i)^2]^{1/2}\}$$

se tiene una ecuación análoga para $Q(\xi,\eta)$, con $\xi$ y $\eta$ intercambiados (aqui el subíndice identifica una línea particular $\xi$ y no debe ser confundido con el superíndice usado para referirse a líneas coordenadas en general).

En la función P, el efecto de la amplitud ai es atraer líneas $\xi$ hacia la linea $\xi i$, mientras el efecto de la amplitud bi es atraer lineas $\xi$ hacia el punto ( $\xi i$, $\eta i$ ), fig 4.3

Nótese que esta atracción a un punto es una atracción de líneas $\xi$ a un punto que está en otra linea $\xi$, y como tal actúa normal a la linea $\xi$. No hay atracción de las líneas $\eta$ a este punto por la función P. El efecto de la atracción decrece con la distancia al sitio de atracción de acuerdo a los factores ci y di. Este decrecimiento depende en el primer término sólo de la distancia de $\xi$ a la línea $\xi i$, por lo que que toda la línea $\xi$ es atraída a toda la línea $\xi i$. Sin embargo, en el segundo término, el decrecimiento depende tanto de la distancia $\xi$, como de la distancia $\eta$ al punto de atracción ( $\xi i$, $\eta i$ ), por lo que el efecto no es el mismo en toda la línea $\xi$. Con la inclusión de la función que cambia el signo, la atracción ocurre en ambos lados de la línea $\xi$, o el punto ($\xi i$, $\eta i$), según sea el caso.

4.2 Determinacion iterativa

Un sistema de generación eliptica de segundo orden permite ya sea, la localización de los puntos en la frontera, o la especificación de la pendiente de la línea coordenada en la frontera, pero no ambas cosas. Sin embargo, es posible iterativamente ajustar las funciones de control en el sistema de control de tipo Poisson hasta lograr, no solamente una pendiente deseada, sino tambien la localización de los puntos en las fronteras, fig 4.4

El poder especificar la pendiente de las líneas coordenadas en la frontera permite generar mallas con ortogonalidad en la frontera. Esta característica es importante en mallas segmentadas, para poderlas ensamblar con continuidad de pendiente.

Debido a la ortogonalidad en las fronteras, la ec 4.6 se reduce a la siguiente ecuación en la frontera

$$|\underset{\sim}{r}_\eta|^2 \; (\underset{\sim}{r}_{\xi\xi} + P\, \underset{\sim}{r}_\xi) + |\underset{\sim}{r}_\xi|^2 \; (\underset{\sim}{r}_{\eta\eta} + Q\, \underset{\sim}{r}_\eta) = 0 \qquad (4.8)$$

Haciendo el producto punto de $\underset{\sim}{r}_\xi$ y $\underset{\sim}{r}_\eta$ , y usando la condición de ortogonalidad ( $\underset{\sim}{r}_\xi \cdot \underset{\sim}{r}_\eta = 0$), se obtienen las dos ecuaciones siguientes para las funciones de control en la frontera

$$P = - \frac{r_\xi \cdot r_{\xi\xi}}{|\underset{\sim}{r}_\xi|^2} - \frac{\underset{\sim}{r}_\xi \cdot \underset{\sim}{r}_{\eta\eta}}{|\underset{\sim}{r}_\eta|^2} \qquad (4.9a)$$

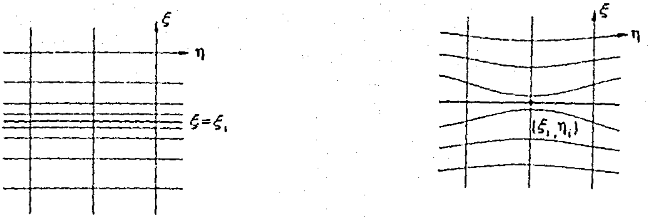



Fig 4.3

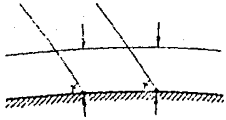


Fig 4.4

$$Q = -\frac{\underset{\sim}{r}_\eta \cdot \underset{\sim}{r}_{\eta\eta}}{|\underset{\sim}{r}_\eta|^2} - \frac{\underset{\sim}{r}_\eta \cdot \underset{\sim}{r}_{\xi\xi}}{|\underset{\sim}{r}_\xi|^2} \qquad (4.9b)$$

La solución iterativa, es como sigue

( 1 ) Supóngase valores de las funciones de control en la frontera.

( 2 ) Resuelva la ec 4.6 para generar la malla en el interior de la región y la 4.8 en las orillas.

( 3 ) Evalue $r_\xi$, $r_{\xi\xi}$, $r_\eta$ y $r_{\eta\eta}$ de los resultados del paso 2. La evaluación de $r_\eta$ y $r_{\eta\eta}$ en fronteras de línea $\eta$, y $r_\xi$ y $r_{\xi\xi}$ en fronteras de línea $\xi$ se hacen usando diferencias de un lado.

( 4 ) Evaluar las funciones de control usando la ec 4.9. Las funciones de control en el interior de la región se obtienen por interpolación de los valores de la frontera. Los pasos (2) y (4) se repiten hasta lograr convergencia.

## [illegible]. SISTEMAS ORTOGONALES

Los sistemas coordenados ortogonales producen menos terminos adicionales en las EDP transformadas , y asi reducen la cantidad de cálculo requerido.

En soluciones numéricas, el concepto de ortogonalidad, esto es, que los coeficientes métricos fuera de la diagonal se hacen cero cuando se evalúan numéricamente (ver cap 2), es por lo general más importante que la estricta ortogonalidad analítica.

Hay básicamente dos tipos de sistemas de generación ortogonal. Los basados en la construcción de un sistema ortogonal a partir de un sistema no ortogonal, y los que involucran solucionar EDP en el interior de una región.

El primero involucra la construcción de trayectorias ortogonales en un sistema dado no ortogonal. El primer paso, es fijar un conjunto de líneas, ya sea $\eta$ o $\xi$, y el segundo, mantener fijo solamente un extremo del otro conjunto de líneas, y el otro extremo moverlo libremente hasta lograr ortogonalidad. Con estos métodos solamente se puede especificar la distribución de los puntos en tres fronteras.

## 5.1 Formulación general

En coordenadas ortogonales, los elementos del tensor métrico fuera de la diagonal son cero, esto es, $g_{ij} = g^{ij} = 0$ para $i \neq j$, por lo que entonces el jacobiano, ec 2.16a, es

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}\; g_{22}} \qquad (5.1)$$

Por conveniencia, se define

$$\sqrt{g_{ii}} = h_i \qquad ( i = 1,2 )$$

El Laplaciano de las líneas coordenadas es, Thompson *et al* [1985],

$$\nabla^2 \xi^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{h_j}{h_i}\right) \qquad i = 1,2 \qquad (5.2)$$

[illegible]) son cíclicos

De la ec 4.3 se tiene que

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g^{ij}\, \underset{\sim}{r}_{\xi^i \xi^j} + \sum_{i=1}^{2} (\nabla^2 \xi^i)\, \underset{\sim}{r}_{\xi^i} = 0 \qquad (5.3)$$

Sustituyendo 5.2 en 5.3

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g^{ij}\, \underset{\sim}{r}_{\xi^i \xi^j} + \sum_{1}^{2} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{h_j}{h_i}\right)\right] \underset{\sim}{r}_{\xi^i} = 0$$

cuando $i \neq j$, $g^{ij} = 0$ ; cuando $i = j$, $g^{ii} = \dfrac{g_{jj}}{g}$

por lo que en el primer término de la ecuación sólo es necesaria una sumatoria, quedando la ecuación anterior como

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{h_j}{h_i}\right)\right] \underset{\sim}{r}_{\xi^i} + \sum_{i=1}^{2} \sqrt{g}\, \frac{g_{jj}}{g}\, \underset{\sim}{r}_{\xi^i \xi^i} = 0$$

El coeficiente del segundo término de la ecuación, tambien se puede escribir como

$$\sqrt{g}\;\frac{g_{jj}}{g} = \sqrt{g}\,\frac{g_{jj}}{g}\cdot\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{g\;g_{jj}}{g\sqrt{g}} = \frac{g_{jj}}{\sqrt{g}} = \frac{h_j^{\,2}}{h_i\;h_j} = \frac{h_j}{h_i}$$

Por lo que la ecuación anterior queda

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi^{i}}\left(\frac{h_j}{h_i}\right)\underset{\sim}{r}_{\xi^{i}} + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{h_j}{h_i}\right)\underset{\sim}{r}_{\xi^{i}\xi^{i}} = 0$$

Desarrollando las sumatorias

$$\frac{\partial}{\partial\;\xi^{1}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\underset{\sim}{r}_{\xi^{1}} + \frac{\partial}{\partial\;\xi^{2}}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)\underset{\sim}{r}_{\xi^{2}} + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)r_{\xi^{1}\xi^{1}} + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)r_{\xi^{2}\xi^{2}} = 0$$

Agrupando términos se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial\;\xi^{1}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\underset{\sim}{r}_{\xi^{1}} + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)r_{\xi^{1}\xi^{1}} + \frac{\partial}{\partial\xi^{2}}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)\underset{\sim}{r}_{\xi^{2}} + \frac{h_1}{h_2}\,\underset{\sim}{r}_{\xi^{2}\xi^{2}} = 0$$

Finalmente

$$\frac{\partial}{\partial\;\xi^{1}}\left(\frac{h_2}{h_1}\,\underset{\sim}{r}_{\xi^{1}}\right) + \frac{\partial}{\partial_{\xi^{2}}}\left(\frac{h_1}{h_2}\,\underset{\sim}{r}_{\xi^{2}}\right) = 0 \qquad (5.4)$$

Esta es la ecuacion fundamental para la generación de una malla ortogonal.

Sustituyendo la ec 5.1 en la 5.2, se tiene que

$$\nabla^{2}\;\xi^{1} = \frac{1}{\sqrt{g}}\;\frac{\partial}{\partial\;\xi^{1}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\;\frac{\partial}{\partial\;\xi^{1}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \frac{1}{h_1h_2}\;\frac{\partial}{\partial\xi^{1}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)$$

por lo que despejando $h_1h_2$

$$\frac{\partial}{\partial\xi^{1}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = h_1\;h_2\nabla^{2}\;\xi^{1}$$

De manera semejante para la otra coordenada

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left[\frac{h_1}{h_2}\right] = h_1 h_2 \nabla^2 \xi^2 \qquad (5.6)$$

Sustituyendo 5.5 y 5.6 en 5.4

$$h_1 h_2 \nabla^2 \xi^1 \underset{\sim}{r}_{\xi^1} + \frac{h_2}{h_1} \underset{\sim}{r}_{\xi^1\xi^1} + h_1 h_2 \nabla^2 \xi^2 \underset{\sim}{r}_{\xi^2} + \frac{h_1}{h_2} \underset{\sim}{r}_{\xi^2\xi^2} = 0$$

agrupando términos,

$$h_1 h_2 \nabla^2 \xi^1 \underset{\sim}{r}_{\xi^1} + h_1 h_2 \nabla^2 \xi^2 \underset{\sim}{r}_{\xi^2} + \frac{h_2}{h_1} \underset{\sim}{r}_{\xi^1\xi^1} + \frac{h_1}{h_2} \underset{\sim}{r}_{\xi^2\xi^2} = 0$$

multiplicando por $h_1 \; h_2$

$$h_1^2 h_2^2 \,(\nabla^2 \xi^1 \underset{\sim}{r}_{\xi^1} + \nabla^2 \xi^2 \underset{\sim}{r}_{\xi^2}) + h_2^2 \underset{\sim}{r}_{\xi^1\xi^1} + h_1^2 \underset{\sim}{r}_{\xi^2\xi^2} = 0$$

recordando que $h_1 = \sqrt{g_{11}}$ y $h_2 = \sqrt{g_{22}}$, finalmente se obtiene,

$$g_{11} g_{22} (\nabla^2 \xi^1 \underset{\sim}{r}_{\xi^1} + \nabla^2 \xi^2 \underset{\sim}{r}_{\xi^2}) + g_{22} \underset{\sim}{r}_{\xi^1\xi^1} + g_{11} \underset{\sim}{r}_{\xi^2\xi^2} = 0 \qquad (5.7)$$

Esta ecuación es otra forma de generación de coordenadas planas ortogonales.

Las dos opciones que se tienen para generar la malla son: ( i ) especificar $h_2/h_1$ como una función conocida de $\xi, \eta$. Para cualquier valor constante de $h_2/h_1$, la ec 5.2 se reduce a las ecuaciones de Laplace $\Delta^2 \xi = 0$, $\Delta^2 \eta = 0$ y la ec 5.7 a

$$g_{22} \underset{\sim}{r}_{\xi\xi} + g_{11} \underset{\sim}{r}_{\eta\eta} = 0$$

ii) Otra opción es calcular $h_2/h_1$ iterativamente. En este caso los valores de $h_2/h_1$ son actualizados iterativamente al cambiar sus valores en la frontera bajo la condición de ortogonalidad $g_{12} = 0$.

$\sqrt{g_{11}}$ se puede interpretar físicamente como la distancia entre dos líneas coordenadas consecutivas de $\xi$=constante y $\sqrt{g_{22}}$ la distancia entre dos líneas de $\eta$=const, fig 5.1, por lo que $h_2/h_1$ es la relación del tamaño local de la malla.

La diferencia entre (i) y (ii) es que si se especifica $h_2/h_1$ no se puede hacer una distribución arbitraria de puntos en la frontera.

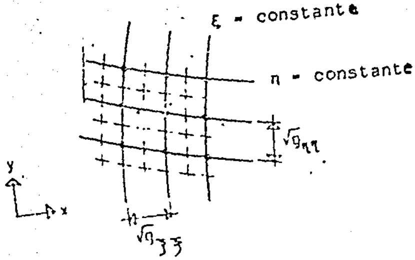



FIG 5.1

## 6. MALLAS COMPUESTAS

Aunque no se trabajó en el tema, se da una breve descripcion de este.

Cuando se tienen regiones con geometrías muy complejas, el problema se puede simplificar notablemente diviendo la región física en subregiones y generando un sistema de coordenadas dentro de cada una. El sistema coordenado total se forma uniendo los subsistemas. Esta segmentación se ilustra en la fig 6.1

La localización de las interfaces entre las subregiones es arbitraria, ya que las interfaces no son fronteras reales. Estas interfaces pueden fijarse, es decir, especificar completamente su localización como en el caso de fronteras físicas verdaderas, o dejar que el procedimiento de generación de la malla las localice. También, se puede buscar que las líneas de la malla tengan en la interface continuidad completa, o aceptar discontinuidad, o que ni siquiera se encuentren, fig 6.2. Tanto en estos ejemplos como en los siguientes, las líneas sólidas representan líneas de la malla, mientras que las líneas pünteadas corresponden a las interfaces entre los bloques.

Entre más continuidad se pierde en una línea, se requerirá un tratamiento más complejo en la aplicación numérica.

Los lados de una subregión o bloque pueden considerarse como fronteras en las cuales se especifican los puntos coordenados, y/o los ángulos de intersección de las líneas, como se hace con las fronteras verdaderas, o estos lados pueden considerarse como un par de fronteras coincidentes.

No hay reglas para dividir en bloques, en general se divide buscando facilitar la parte numérica.

A. Regiones conectadas simplemente

Por ejemplo, una región en forma de L como la de la fig 1.12, se puede segmentar en tres bloques, con los lados de bloques adyacentes formando pares de fronteras coincidentes, fig 6.3, o en dos bloques, con una porción de un lado de un bloque coincidiendo con un lado completo de otro bloque, fig 6.4.

B. Regiones multiplemente conectadas

La configuración de la fig 1.14 se puede segmentar en cuatro bloques, fig 6.5.

C. Regiones embebidas

Donde es más útil el concepto de segmentación es en la construcción de sistemas coordenados embebidos. En estos sistemas los bloques necesitan estar físicamente adyacentes sólo en el campo físico; no así en el campo computacional que sólo es una estructura de cálculo, fig 6.6.

En Thompson ***et al*** (1985), se muestran múltiples aplicaciones de estas técnicas.

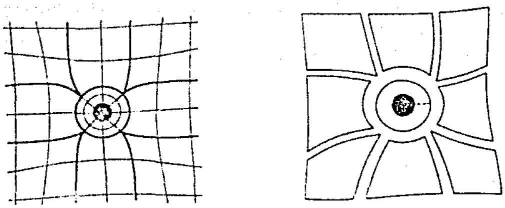


Fig. 6.L

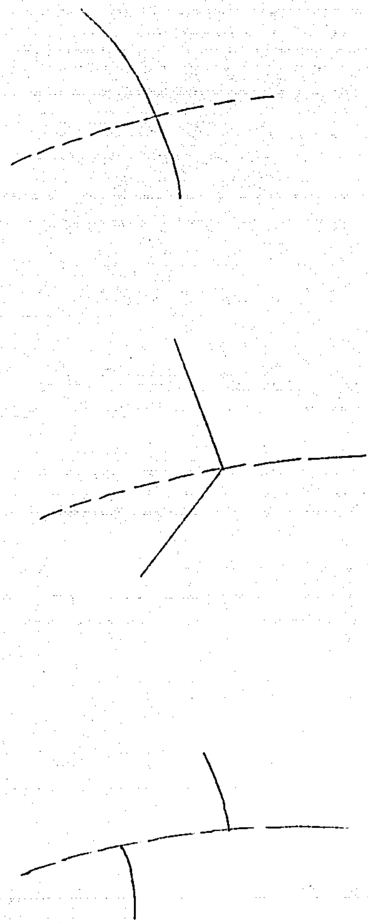


Fig 6.2

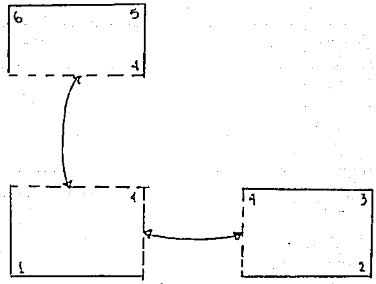



Fig 6.3

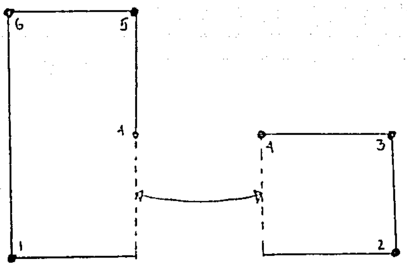



Fig 6.4

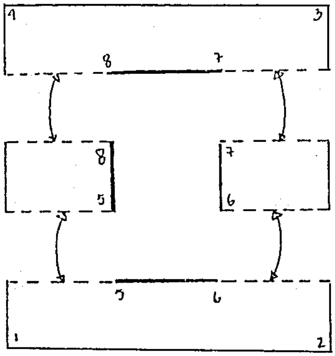



Fig 6.5

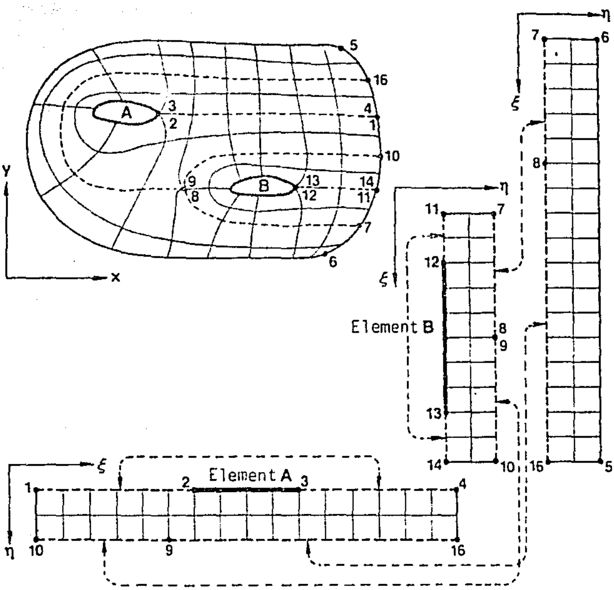



Fig 6.6

# 7. APLICACIONES

## 7.1 Generación de mallas

Aplicando los métodos de generación de mallas mencionados en los capítulos anteriores, se generaron los siguientes tipos de mallas para un tramo de río. En este caso se trata del tramo de 22 Km del río Colorado, aguas arriba del puente carretero Mexicali-San Luis Río Colorado.

I. Malla elíptica sin funciones de control. fig 7.1.

En la construcción de esta malla se utilizó como condición inicial la malla algebráica. Para definir las orillas de la malla se utilizaron los datos proporcionados por la CNA.

Debido a la tendencia de suavidad que presentan los operadores laplacianos, en la ausencia de funciones de control, las líneas coordenadas tienden a estar igualmente espaciadas, sin importar la distribución de puntos en la frontera. En esta malla no hay ortogonalidad. Se emplea la ec 4.6 y P y Q igual a cero.

II. Malla elíptica con funciones de control, fig 7.2.

Debido a que en este caso, interesaba conocer los efectos de la corriente en las margenes del río, se utilizó para la distribución de los puntos de las orillas verticales, una distribución exponencial, lo cual ayuda a pegar las líneas a las orillas horizontales. Con este mismo fin, se utilizaron las funciones de control P y Q, ecs 4.9a y 4.9b respectivamente, y la ec 4.6.

III. Malla ortogonal, fig 7.3.

Para la construcción de esta malla se utilizó el método mencionado en el cap 5, con las ecs 5.7 y 5.2. En este método se hace una distribución arbitraria de puntos en las fronteras y la función $h_2/h_1$, la cual es la relación de la forma de malla, se calcula iterativamente, hasta lograr convergencia. Se tomo una malla elíptica sin funciones de control, como condición inicial.

Debido a que la malla construida inicialmente mostraba aun una considerable desviación de la ortogonalidad, principalmente en algunos puntos donde la orilla tiene gran curvatura, se modificó la distribución inicial de estos puntos, con el fin de mejorar la ortogonalidad.

En algunos casos, solamente se corría un punto de la orilla, manteniendo fijos todos los demas puntos; con esta modificación se construia nuevamente la malla. En otros casos se corrian los dos puntos extremos de una línea coordenada. En este proceso se hicieron del orden de 20 mallas, hasta llegar a la que se presenta en este ejemplo.

Durante la construcción de esta malla, también se calcularon los coeficientes de transformación que se necesitan en la solución numérica.

## 7.2 Ejemplo

Utilizando la malla ortogonal y el esquema de Cruickshank-Berezowsky para la solución de las ecuaciones de la hidrodinámica a superficie libre en dos dimensiones, se obtuvo el campo de velocidades del tramo del rio Colorado ya mencionado, fig 6.4. Los cálculos se hicieron considerando como elevación de la superficie libre aguas abajo 31m y que entra un gasto de 1200 $m^3/s$ aguas arriba.

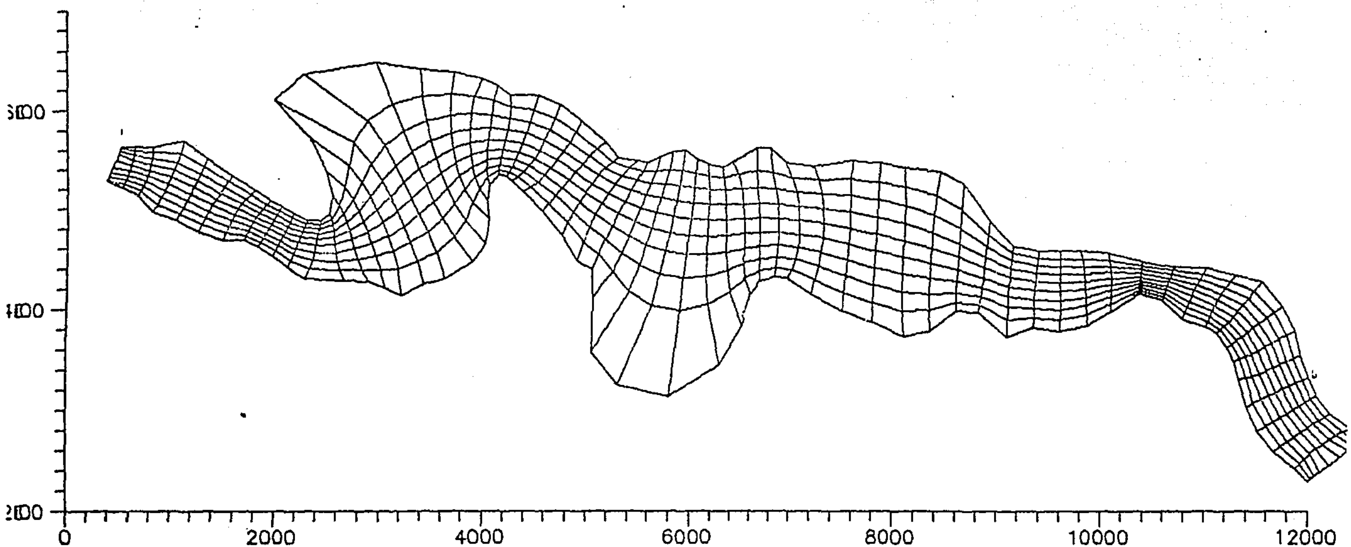


FIG 7.1 MALLA ELIPTICA SIN FUNCIONES DE CONTROL

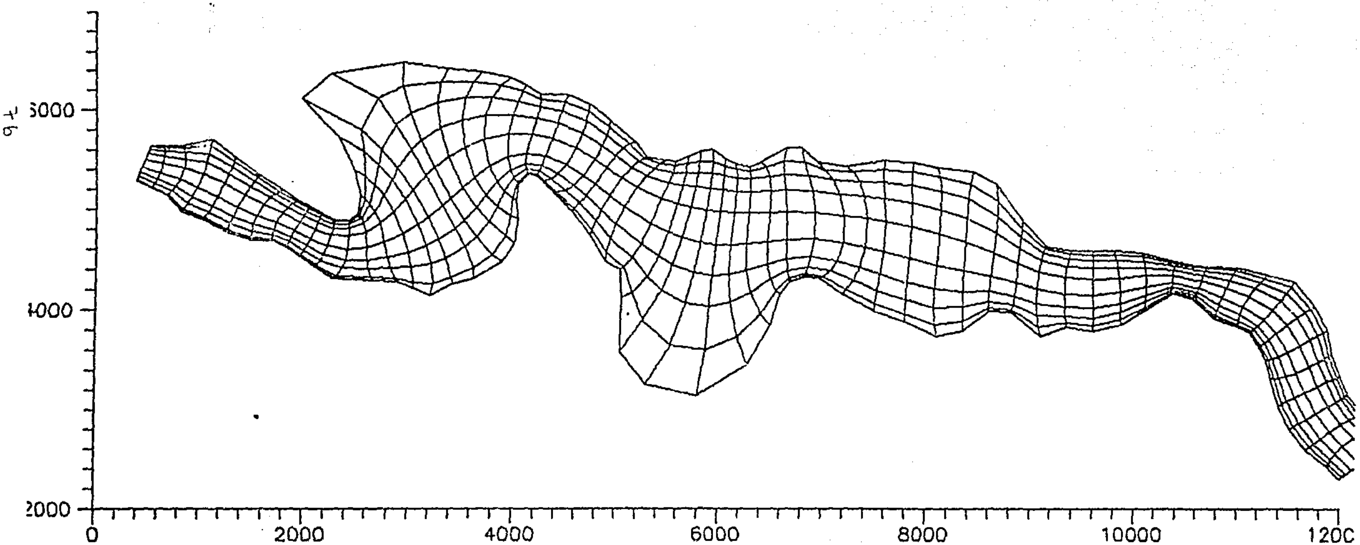



FIG 7.2 MALLA ELIPTICA CON FUNCIONES DE CONTROL

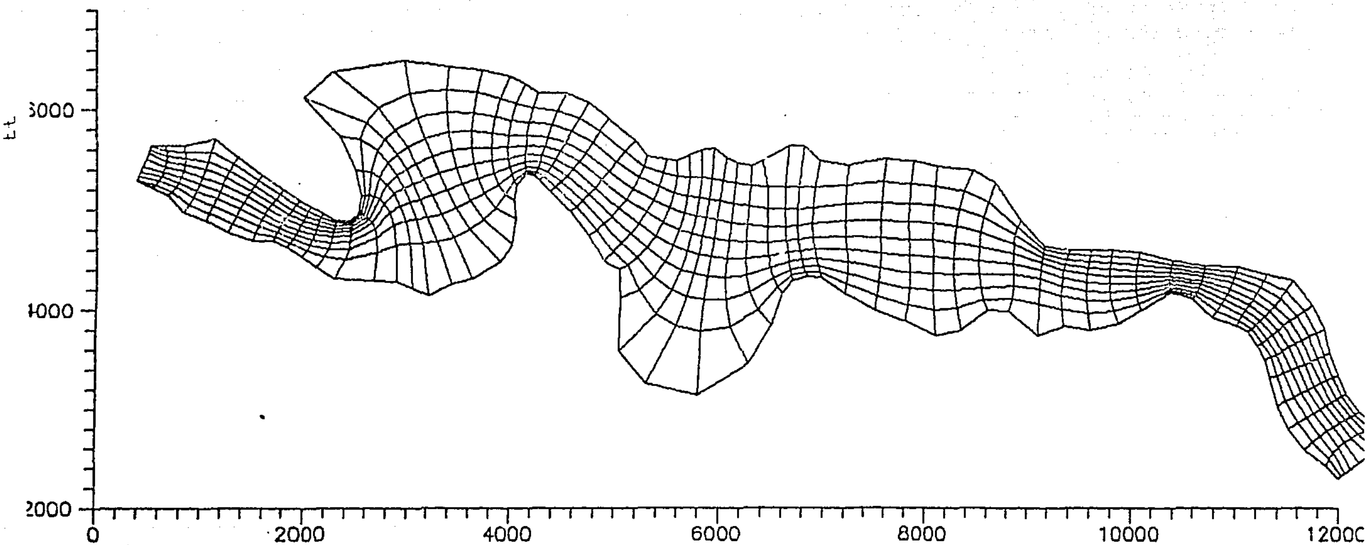
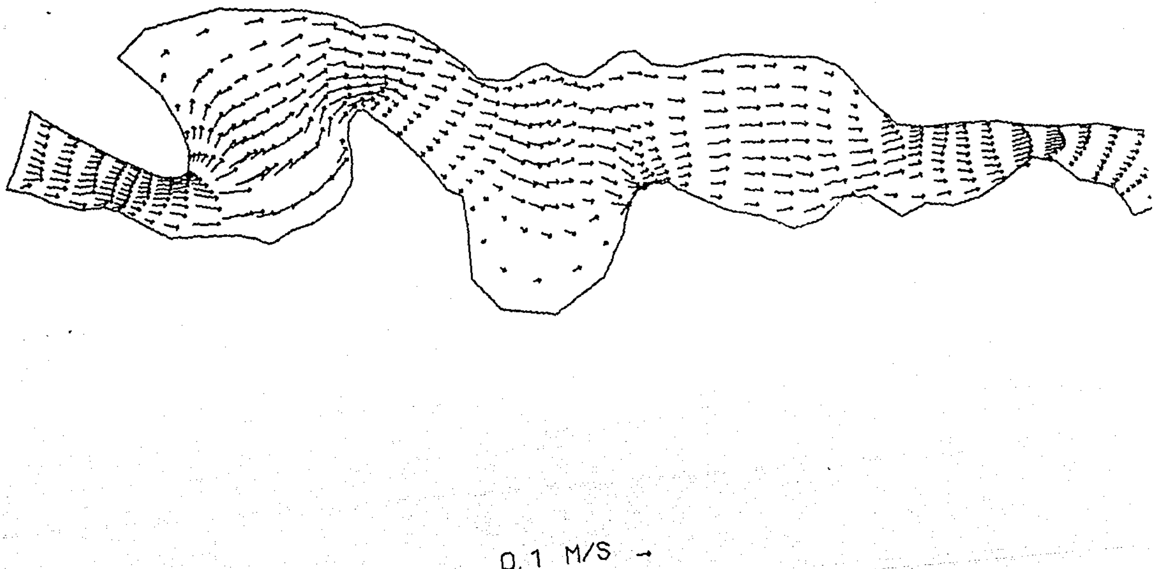



FIG 7.3 MALLA ORTOGONAL


0.1 M/S

APENDICE A.1

## ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS DE LAS ECUACIONES DEL FLUJO EN DOS DIMENSIONES EN COORDENADAS CURVILINEAS

La mayoría de los esquemas en diferencias finitas para el flujo en dos dimensiones se construyen empleando volúmenes de control distintos para cada ecuación, esto es, las variables h, u y v se ubican en puntos distintos en el plano; aquí se emplea el esquema de Berezowsky para flujo en dos dimensiones, el cual es una generalización del esquema de Cruickshank-Berezowsky para flujo unidimensional. Este esquema se adapto a coordenadas curvilíneas.

La variable dependiente que aparece en la derivada temporal de las ecs 2.50, 2.51 y 2.52 quede al centro del volumen de control respectivo por lo que hay un volumen de control para la ecuación de continuidad y otro para la dinámica. Así, en la ec 2.50 se utiliza el volumen de control de la fig A.1, en el que la H aparece al centro del volumen de control y los gastos en los extremos; el cambio en el tiempo del nivel H es resultado del flujo neto de líquido en el volumen de control. En el volumen de control de la ecuación dinámica en x, fig A.3, aparece la velocidad al centro y los niveles en los extremos.

En diferencias finitas la ecuación de continuidad, ec 2.50, se escribe como,

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ u\, h \sqrt{g_{\eta\eta}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{ v h \sqrt{g_{\xi\xi}} \right\} = 0$$

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^{n}}{\Delta t} + \frac{u_{if}^{n+1}\, h_{if}^{n} \sqrt{g_{\eta\eta}}_{\,if} - u_{li}^{n+1}\, h_{li}^{n} \sqrt{g_{\eta\eta}}_{\,li}}{\sqrt{g_{*ci}}} +$$

$$+ \frac{v^{n+1}_{ik}\, h^{n}_{ik} \sqrt{g_{\xi\xi}}_{\,ik} - v^{n+1}_{bi}\, h^{n}_{bi} \sqrt{g_{\xi\xi}}_{\,bi}}{\sqrt{g_{*}}_{\,ci}} = 0 \qquad (A.1)$$

donde se ha considerado el volumen de control de la fig A.1

La ecuación de cantidad de movimiento en x, ec 2.51, se expresa en diferencias finitas, considerando el volumen de control de la fig A.3

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{g}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{u}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} +$$

$$\frac{g\, u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h^2} - \Omega v + \frac{u\, v}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{g_{\xi\xi}} - \frac{v^2}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{g_{\eta\eta}} = 0 \qquad (A.2)$$

$$\frac{u^{n+1}_{if} - u^{n}_{if}}{\Delta t} + \frac{g}{\sqrt{g_{\xi\xi}}_{\,if}} \left[ \psi \left( H^{n+1}_{f} - H^{n+1}_{i} \right) + (1-\psi) \left( H^{n}_{f} - H^{n}_{i} \right) \right]$$

$$\frac{u^{n+1}_{if}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}_{\,if}} \left[ \frac{u^{n}_{fo} - u^{n}_{li}}{2} \right] + \frac{\bar{v}^{n}_{if}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}_{\,if}} \left[ \frac{u^{n}_{kp} - u^{n}_{br}}{2} \right]$$

$$+ g\, u^{n+1}_{if} \frac{\sqrt{u^2_{if} + \bar{v}^2_{if}}}{(C\, h^{n}_{if})^2} - \Omega\, \bar{v}^{n}_{if} + \frac{u^{n+1}_{if}\, \bar{v}^{n}_{if}}{\sqrt{g_{*}}_{\,if}} \left[ \frac{\sqrt{g_{\xi\xi}}_{\,kp} - \sqrt{g_{\xi\xi}}_{\,br}}{2} \right]$$

$$- \frac{(\bar{v}^{n}_{if})^2}{\sqrt{g_{*}}_{\,if}} \left[ \frac{\sqrt{g_{\eta\eta}}_{\,fo} - \sqrt{g_{\eta\eta}}_{\,li}}{2} \right] = 0 \qquad (A.3)$$

donde por ejemplo

$$h^{n}_{if} = ( H^{n}_{i} + H^{n}_{f} )/2 - Z_{if}$$

$$\bar{v}^{n}_{if} = ( v^{n}_{ik} + v^{n}_{fp} + v^{n}_{bi} + v_{rf} ) / 4$$

Factorizando

$$u_{if}^{n+1}\left[1+\Delta t CUX + g\Delta t\frac{\sqrt{u_{if}^{2}+\overline{v}_{if}^{2}}}{(C\ h_{if}^{n})^{2}} + \frac{\overline{v}_{if}^{n}\ \Delta t}{\sqrt{g_{**if}}}\left(\frac{\sqrt{g_{\xi\xi}}_{kp} - \sqrt{g_{\xi\xi}}_{br}}{2}\right)\right]$$

$$+\frac{g\ \Delta t}{\sqrt{g_{\xi\xi if}}}\left[\psi\ (H_{f}^{n+1} - H_{i}^{n+1}) + (1-\psi)(H_{f}^{n} - H_{i}^{n})\right] +$$

$$+\frac{\Delta t\ \overline{v}_{if}^{n}}{\sqrt{g_{\eta\eta_{if}}}}\left[\frac{u_{kp}^{n} - u_{br}^{n}}{2}\right] - \Omega\Delta t\ \overline{v}_{if}^{n} - \Delta t\frac{(\overline{v}_{if}^{n})^{2}}{\sqrt{g_{**if}}}\left[\frac{\sqrt{g_{\eta\eta}}_{fa} - \sqrt{g_{\eta\eta}}_{li}}{2}\right]$$

$$- \quad u_{if}^{n} = 0$$

Donde

$$CUX = \frac{u_{fa}^{n} - u_{li}^{n}}{2\sqrt{g_{\xi\xi if}}}$$

Sea

$$fric_{if} = \left[1+\ \Delta t CUX + g\Delta t\frac{\sqrt{u_{if}^{2}+\overline{v}_{if}^{2}}}{(C\ h_{if}^{n})^{2}} + \frac{\overline{v}_{if}^{n}\ \Delta t}{\sqrt{g_{**if}}}\left(\frac{\sqrt{g_{\xi\xi}}_{kp} - \sqrt{g_{\xi\xi}}_{br}}{2}\right)\right]$$

Entonces

$$u_{if}^{n+1} = -\frac{g\ \Delta t}{fric_{if}\sqrt{g_{\xi\xi\ if}}}\left[\psi\ (H_{f}^{n+1} - H_{i}^{n+1}) + (1-\psi)(H_{f}^{n} - H_{i}^{n})\right] +$$

$$-\frac{\Delta t\ \overline{v}_{if}^{n}}{fric_{if}\sqrt{g_{\eta\eta_{if}}}}\left[\frac{u_{kp}^{n} - u_{br}^{n}}{2}\right] + \frac{\Omega\ \Delta t\ \ \overline{v}_{if}^{n}}{fric_{if}}$$

$$+\ \Delta t\frac{\overline{v}_{if}^{2}}{fric_{if}\ \ \sqrt{g_{**if}}}\left[\frac{\sqrt{g_{\eta\eta}}_{fa} - \sqrt{g_{\eta\eta}}_{li}}{2}\right] + \frac{u_{if}^{n}}{fric_{if}}$$

Sea

$$S_{if} = \frac{g\ \Delta\ t}{fric_{if}\sqrt{g_{\xi\xi_{if}}}}$$

Por tanto

$$u_{if}^{n+1} = -\ S_{if}\left[\psi\ (H_f^{n+1} - H_i^{n+1})\right] - S_{if}\left[\ (1-\psi)\ (H_f^{n} - H_i^{n})\ \right]$$

$$-\ \frac{\Delta t\ \bar{v}_{if}^{\ n}}{fricc_{if}}\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta_{if}}}}\left[\frac{u_{kp}^{n} - u_{br}^{n}}{2}\right] - \Omega - \bar{v}_{if}^{\ n}\left[\frac{\sqrt{g_{\eta\eta\ fo}} - \sqrt{g_{\eta\eta\ li}}}{2\sqrt{g_{*if}}}\right]\right\}$$

$$+\ \frac{u_{if}^{n}}{fric_{if}} \tag{A.4}$$

se define

$$T_{if} = S_{if}\left[\ (1-\psi)\ (H_f^{n} - H_i^{n})\ \right] -$$

$$\frac{\Delta t\ \bar{v}_{if}^{\ n}}{fricc_{if}}\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta_{if}}}}\left[\frac{u_{kp}^{n} - u_{br}^{n}}{2}\right] - \Omega - \bar{v}_{if}^{\ n}\left[\frac{\sqrt{g_{\eta\eta\ fo}} - \sqrt{g_{\eta\eta\ li}}}{2\sqrt{g_{*if}}}\right]\right\}$$

$$+\ \frac{u_{if}^{n}}{fric_{if}}$$

la ec A.4 queda

$$u_{if}^{n+1} = -\ S_{if}\left[\psi\ (H_f^{n+1} - H_i^{n+1})\right] - T_{if} \tag{A.5}$$

De igual manera, la velocidad entre los elementos l e i, fig A.4, es

$$u_{li}^{n+1} = - S_{li} \left[ \psi \left( H_i^{n+1} - H_l^{n+1} \right) \right] - T_{li} \qquad (A.6)$$

donde

$$T_{li} = S_{li} \left[ (1-\psi)( H_i^n - H_l^n ) \right] -$$

$$\frac{\Delta t \, \overline{v}_{li}^{\,n}}{fricc_{li}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta_{li}}}} \left[ \frac{u_{ok}^n - u_{ab}^n}{2} \right] - \Omega - \overline{v}_{li}^{\,n} \left[ \frac{\sqrt{g}_{\eta\eta\, if} - \sqrt{g}_{\eta\eta\, zl}}{2\sqrt{g_{*li}}} \right] \right\}$$

$$+ \frac{u_{li}^n}{fric_{li}}$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN Y

Haciendo un desarrollo similar al de cantidad de movimiento en X, y utilizando la fig A.5, la ec 2.52 se expresa en diferencias finitas como

$$v_{ik}^{n+1} = - S_{ik} \left[ \psi \left( H_k^{n+1} - H_i^{n+1} \right) \right] - T_{ik} \qquad (A.7)$$

donde

$$T_{ik} = S_{ik} \left[ (1-\psi)( H_k^n - H_i^n ) \right] -$$

$$\frac{\Delta t \, \overline{u}_{ik}^{\,n}}{fricc_{ik}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi_{ik}}}} \left[ \frac{v_{fp}^n - v_{lo}^n}{2} \right] + \Omega - \overline{u}_{ik}^{\,n} \left[ \frac{\sqrt{g}_{\xi\xi ke} - \sqrt{g}_{\xi\xi bi}}{2\sqrt{g_{*ik}}} \right] \right\}$$

$$+ \frac{v_{ik}^n}{fric_{ik}}$$

$$S_{ik} = \frac{g\ \Delta t}{fric_{ik}\ \sqrt{g_{\eta\eta}}_{ik}}$$

$$fric_{ik} = 1 + \Delta t \frac{v^{n}_{ke} - v^{n}_{bi}}{2\sqrt{g_{\eta\eta}}_{ik}} + \frac{g\ \Delta t \sqrt{\overline{u}^{2}_{ik} + v^{2}_{ik}}}{h^{2}_{ik}\ C^{2}} + \frac{\overline{u}^{n}_{ik}\ \Delta t}{\sqrt{g_{*}}_{ik}} \left[ \frac{\sqrt{g_{\eta\eta}}_{fp} - \sqrt{g_{\eta\eta}}_{lo}}{} \right]$$

De igual manera, la velocidad entre el elemento b e i, fig A.6, es

$$v^{n+1}_{bi} = - S_{bi} \left[ \psi\ (H^{n+1}_{i} - H^{n+1}_{b}) \right] - T_{bi} \qquad (A.8)$$

Sustituyendo en la ec A.1, las 4 velocidades dadas por las ecs A.4 ... A.7

$$\frac{H^{n+1}_{i} - H^{n}_{i}}{\Delta t} +$$

$$\frac{(-S_{if}\,[\psi(H^{n+1}_{f} - H^{n+1}_{i}) - T_{if})h^{n}_{if}\sqrt{g_{\eta\eta}}_{if} - (-S_{li}\,[\psi(H^{n+1}_{i} - H^{n+1}_{l}) - T_{li})h^{n}_{li}\sqrt{g_{\eta\eta}}_{li}}{\sqrt{g_{*}}_{ci}}$$

$$\frac{(-S_{ik}\,[\psi(H^{n+1}_{k} - H^{n+1}_{i}) - T_{ik})h^{n}_{ik}\sqrt{g_{\xi\xi}}_{ik} - (-S_{bi}\,[\psi(H^{n+1}_{i} - H^{n+1}_{b}) - T_{bi})h^{n}_{bi}\sqrt{g_{\xi\xi}}_{bi}}{\sqrt{g_{*}}_{ci}} = 0$$

(A.9)

Definiendo por conveniencia las siguientes variables

$$AUX1 = \frac{h^{n}_{if} \sqrt{g_{\eta\eta\, if}}}{\sqrt{g_{*ci}}} \quad ; \qquad AUX2 = \frac{h^{n}_{li} \sqrt{g_{\eta\eta\, li}}}{\sqrt{g_{*ci}}}$$

$$AUX3 = \frac{h^{n}_{ik} \sqrt{g_{\xi\xi\, ik}}}{\sqrt{g_{*ci}}} \quad ; \qquad AUX3 = \frac{h^{n}_{bi} \sqrt{g_{\xi\xi\, bi}}}{\sqrt{g_{*ci}}}$$

Agrupando terminos

$$H^{n+1}_{i} \; [\, 1/\Delta t + S_{if}\, \psi\, AUX1 + S_{li}\, \psi\, AUX2 + S_{ik}\, \psi\, AUX3 + S_{bi}\, \psi\, AUX4 \,]$$

$$H^{n+1}_{f}\, S_{if}\, \psi\, AUX1 - H^{n+1}_{l}\, S_{li}\, \psi\, AUX2 - H^{n+1}_{k}\, S_{ik}\, \psi\, AUX3 - H^{n+1}_{b}\, S_{bi}\, \psi\, AUX4$$

$$= \frac{H^{n}_{i}}{\Delta t} - T_{if}\, AUX1 - T_{li}\, AUX2 - T_{ik}\, AUX3 - T_{bi}\, AUX4 \qquad (A.10)$$

En esta ecuación se obtiene únicamente como incognitas los niveles H en el elemento $i$ y en sus vecinos, es decir, se tiene 5 incógnitas. Al obtener una ecuación como la A.10 para cada elemento de la malla, se forma un sistema de ecuaciones con $H_n$ incógnitas que corresponden a N elementos de la malla. El sistema de ecuaciones tiene la ventaja de tener las incognitas en bandas lo que facilita su solución. Además, la matriz de coeficientes es simetrica por lo que se construye fácilmente.

Una vez calculados los niveles, las velocidades en el instante $(n+1)\ \Delta t$ se obtienen con las ecs A.4 a A.7.

Condiciones de frontera. En general hay dos tipos de condiciones de frontera: Niveles o flujo. Si el nivel en algun elemento es conocido, en las ecs A.10 el término $H_x$ pasa al lado de los términos independientes. Si alguno de los flujo es conocido, dicho flujo pasa al lado de los términos conocidos.

CONTINUIDAD

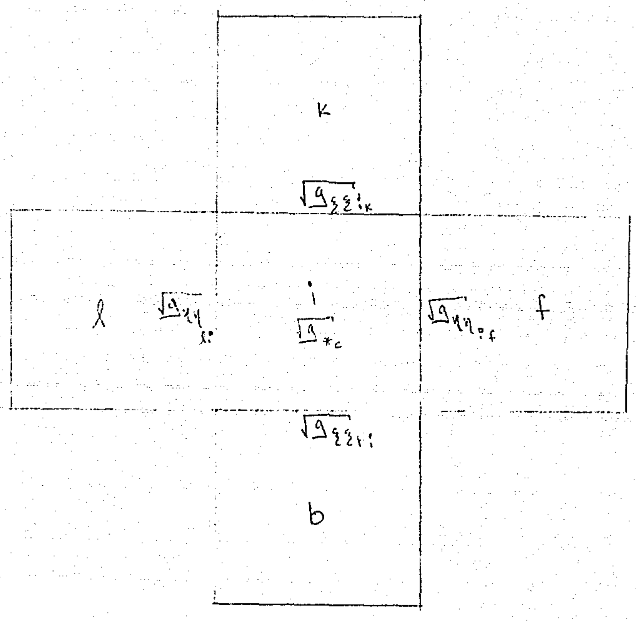



FIG. A.1

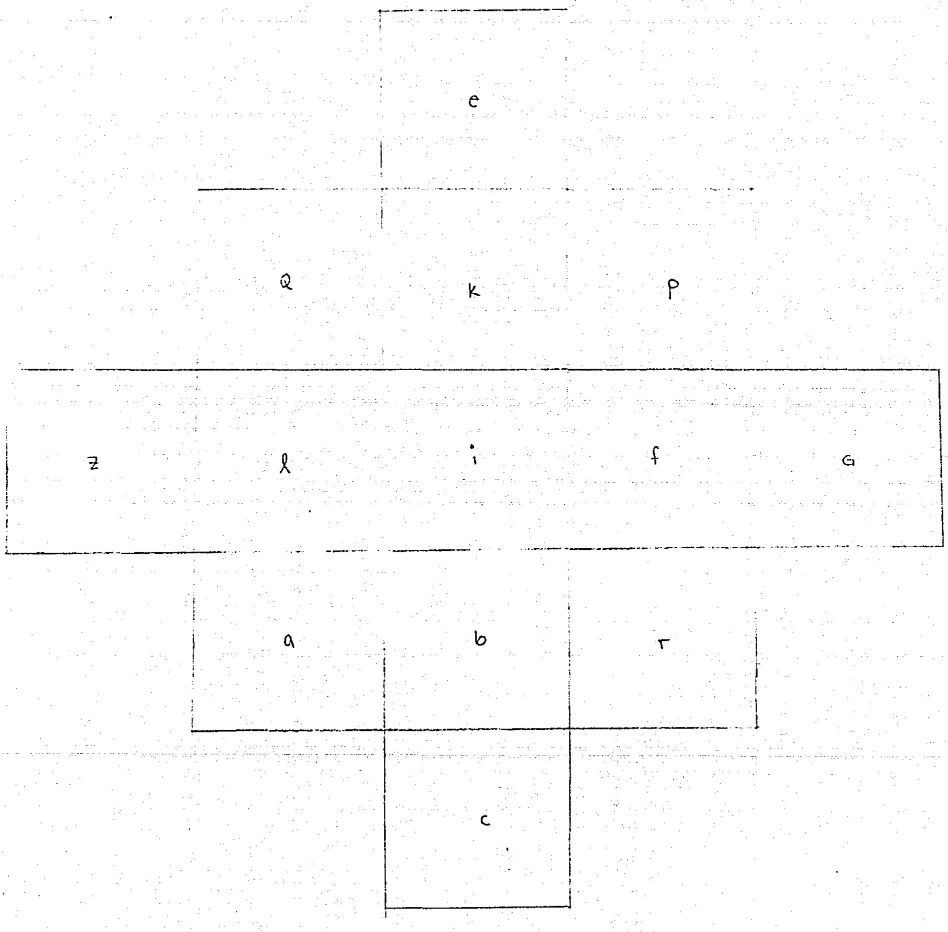



FIG A.2

SIMBOLOGIA UTILIZADA EN VOLUMES DE CONTROL

CANTIDAD DE MOV. EN X

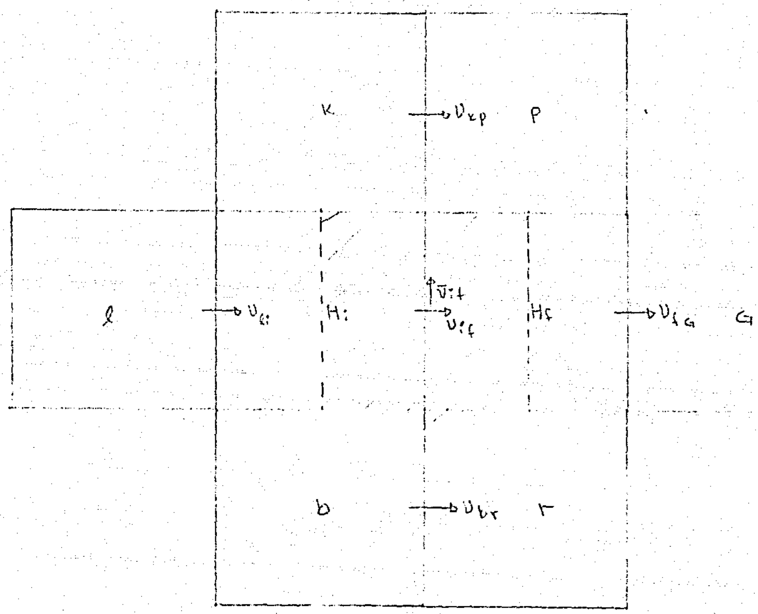



FIG A.3

CANTIDAD DE MOV. EN X

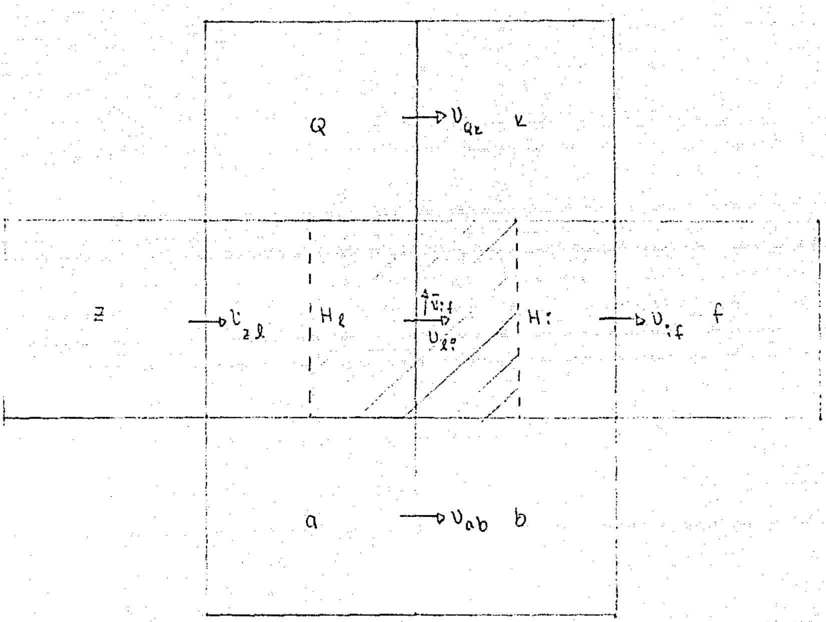
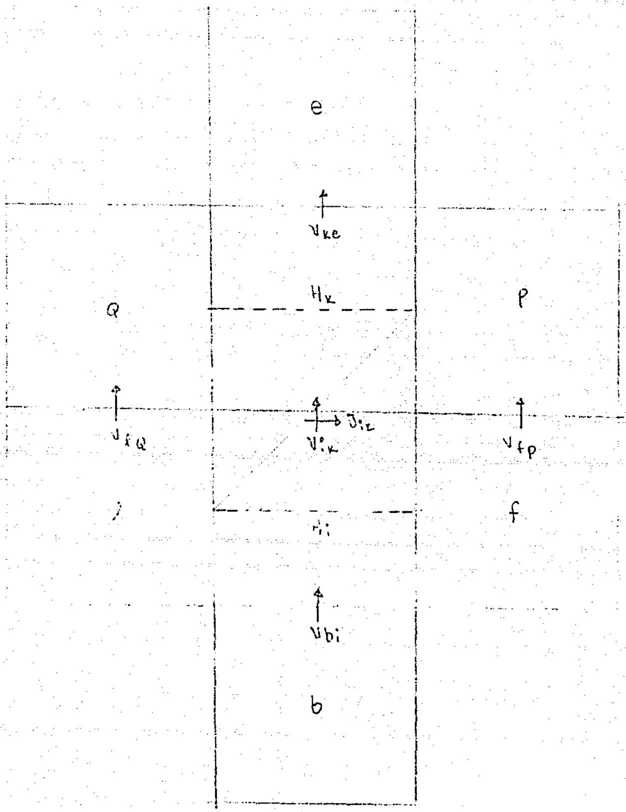
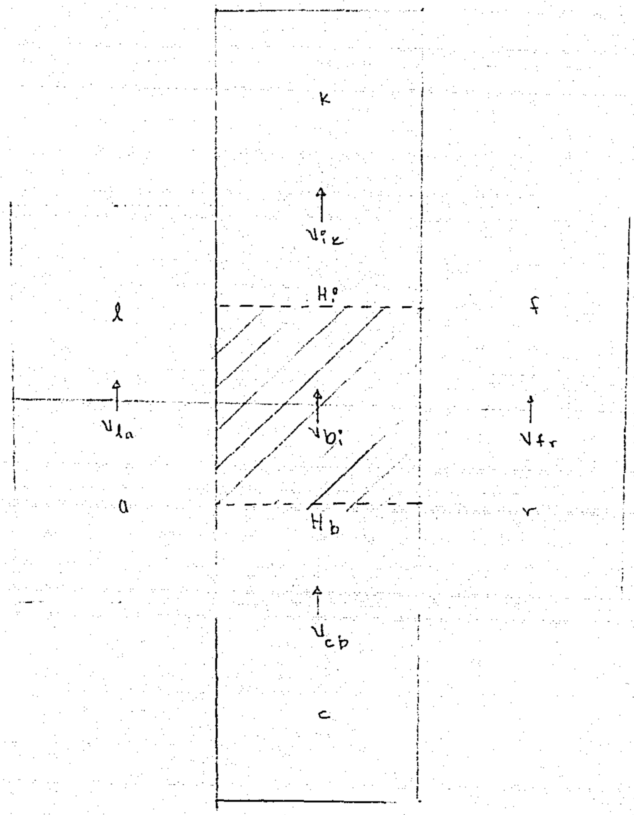



FIG A.4




LANTIDAD DE MOV. EN Y

FIG A.5




CANTIDAD DE MOV. EN Y

FIG A.6

APENDICE A.2

## TRANSFORMACION DE UN VECTOR DEL SISTEMA CURVILINEO AL SISTEMA CARTESIANO

Cualquier vector $\tilde{V}$ del sistema coordenado curvilineo se puede proyectar en los ejes del sistema cartesiano x-y, multiplicando este vector $\tilde{V}$ por los vectores base unitarios del sistema cartesiano, es decir,

$$u(x,y) = \tilde{V}(\xi,\eta) \cdot e_x \qquad \text{(A.2.1)}$$

siendo el vector base unitario $e_x$, ver Wylie(1984), igual a

$$e_x = \frac{\bar{r}_x}{|\bar{r}_x|} \qquad \text{(A.2.2)}$$

donde

$$\bar{r}_x = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} e_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x} e_\eta$$

$$|\bar{r}_x| = \sqrt{\bar{r}_x^{\,2}} = \sqrt{(e_\xi \xi_x + e_\eta \eta_x) \cdot (e_\xi \xi_x + e_\eta \eta_x)}$$

$$= \sqrt{\xi_x^{\,2} + \eta_x^{\,2}}$$

Por lo que

$$e_x = \frac{\xi_x e_\xi + \eta_x e_\eta}{\sqrt{\xi_x^{\,2} + \eta_x^{\,2}}} \qquad \text{(A.2.3)}$$

Por otro lado $\tilde{V} = \tilde{u}\, e_\xi + \tilde{v}\, e_\eta$ (A.2.4)

Sustituyendo las ecs A.2.3 Y A.2.4 en A.2.1, se obtiene,

$$u(x,y) = \frac{\xi_x e_\xi + \eta_x e_\eta}{\sqrt{\xi_x^{\,2} + \eta_x^{\,2}}} \cdot (e_\xi \tilde{u} + e_\eta \tilde{v})$$

$$= \frac{\xi_x \tilde{u} + \eta_x \tilde{v}}{\sqrt{\xi_x^2 + \eta_x^2}} \qquad (A.2.5)$$

De la ec 2.34 se tiene que

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \; ; \; \xi_y = - \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \; ; \; \eta_x = - \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \; ; \; \eta_y = \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \qquad (A.2.6)$$

Sustituyendo A.2.6 en A.2.5, resulta

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y_\eta^2 + y_\xi^2}} \left[ \tilde{u}\, y_\eta - \tilde{v}\, y_\xi \right] \qquad (A.2.7)$$

De la misma manera,

$$v(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x_\eta^2 + x_\xi^2}} \left[ - \tilde{u}\, x_\eta + \tilde{v}\, x_\xi \right] \qquad (A.2.8)$$

## 8.Conclusiones

El problema de la representación de las fronteras que presentan los métodos en diferencias finitas, el cual no es tan grave en otros métodos como el del elemento finito, queda solucionado con las mallas curvilineas; aunque esto signifique trabajar más en la construcción de estas mallas, principalmente en las mallas ortogonales, en las cuales es relativamente dificil obtener la ortogonalidad cuando se tiene un número reducido de puntos en la frontera. La opción en estos casos es aceptar una cierta desviación de la ortogonalidad, o incrementar el número de puntos en la frontera, lo cual significa aumentar el número de incognitas. En el ejemplo que se trabajó en el cap 7 se optó por la primera opción.

Aunque los resultados obtenidos, son en general satisfactorios, aun queda mucho por aprender en el manejo de estos métodos, por ejemplo, en el de mallas compuestas en el cual no se trabajó.

Debido a que con las mallas ortogonales, se tienen menos términos adicionales en las ecuaciones de la hidrodinámica, que con las mallas no ortogonales, se recomienda utilizar mallas ortogonales; aunque quedaria por probar que resultados se obtienen con las mallas no ortogonales, ya que, si bien es cierto que adicionan más términos en las ecuaciones de la hidrodinámica, estas mallas son más sencillas de construir.

BIBLIOGRAFIA


Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi y C. Wayne Mastin (1985), ***Numerical Grid Generation***, Elsevier Science Publishing Co., Inc.

J B.J.M. Willemse, G.S. Stelling and G.K. Verboom (1986), ***Solving the shallow water equations with an orthogonal coordinate transformation***, publicación No. 536 de Delft Hydraulics Communication.

Malvern E. Lawrence (1986), ***introduction to the mechanics of a continuos medium***, prentice- Hall Inc.

Berezowsky, M y Jimenes A (1989), ***flujo no permanente en rios***, cap 6 del Manual de Hidraúlica fluvial, editado por la CNA.

Thompson, Joe F (1984), ***grid generation Techniques in Computational Fluid Dynamics***, AIIAA Journal 1505.

Sokolnikoff, I (1986), ***análisis tensorial***. limusa.