

30
27



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Soluciones Exactas a Tiempo Finito
para un Problema de Difracción por
Ruptura

Tesis

Que para obtener el título de

Matemático

Presenta

Humberto Fernando Pérez Pérez

México, D. F. 1991

FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

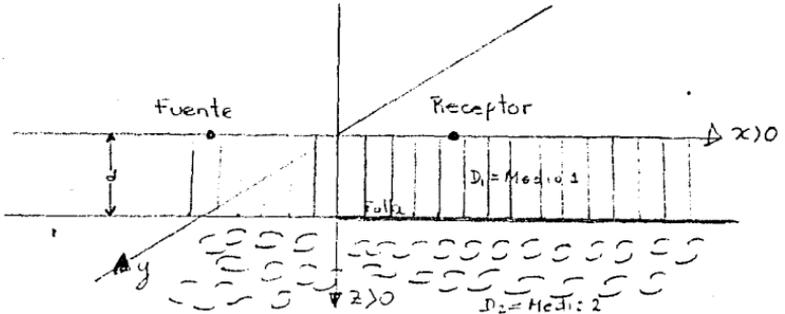
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción.....	pag 1
Capitulo 1.....	pag 3
Capitulo 2.....	pag 7
Capitulo 3.....	pag 19
Capitulo 4.....	pag 26
Conclusiones.....	pag 28
Bibliografía.....	pag 29

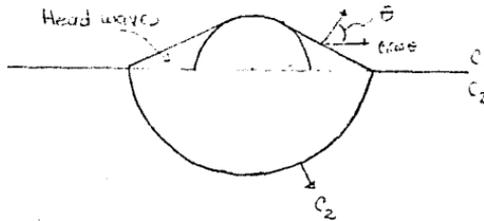
INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es el de encontrar una solución al problema de propagación de ondas SH (acústicas) en la geometría que se ilustra en la figura



En particular se quiere estudiar el campo difractado por la falla al incidir sobre ella las ondas provocadas por una fuente puntual. Con desarrollo temporal dado por $f(t)$. El problema es pues mixto de valores iniciales y de frontera.

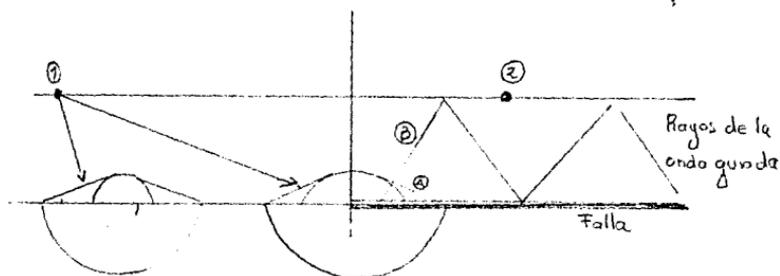
El hecho de que haya un contraste entre los medios se refleja en la existencia de dos velocidades de propagación. Dado que $c_1 < c_2$ se presenta el fenómeno de "Head Waves" cuyos frentes típicos se ilustran en la figura



La existencia de la falla provoca un campo difractado. Este campo depende de las ondas de cuerpo y Head waves incidentes sobre la falla. Estas a su vez provocan ondas de cuerpo

y Head. La región comprendida entre la falla y la superficie libre actúa como una guía de ondas y las ondas difractadas se guían por ese conducto.

Una situación típica se muestra en la figura haciendo un corte bidimensional



En este caso si la fuente está en 1 provoca ondas de intercara que viajan hacia la falla. Al difractarse provocan ondas de cuerpo C, Head waves A, y ondas guiadas B que se observaran en el punto 2 a diferentes tiempos de llegada.

De este esquema se espera que las ondas que llegan a 2 a consecuencia de la difracción y desde luego al número de rebotes en la intercara de los medios que hayan tenido. En este trabajo se da una descomposición exacta de la solución del problema en términos de una representación integral de la solución. Esta representación es en términos de una suma finita; sobre el número de rebotes posibles, de integrales que representan a los diferentes componentes del campo.

El ingrediente fundamental es la representación de la solución para el problema de dos semi-espacios con propiedades diferentes en cuya intercara se tiene una falla semi-infinita. Este problema se transforma en un problema Wiener-Hopf cuya solución se obtiene en términos de una integral conocida. Usando esta solución se resuelve el problema general (con la superficie libre) en términos de las reflexiones de las ondas generadas por el problema de semiespacios. La respuesta da una solución en términos de una integral conocida.

El trabajo está organizado de la forma siguiente. En el primer capítulo se formulan las ecuaciones y se plantea el problema a resolver. En el segundo se obtiene la representación de la solución usando la técnica Wiener-Hopf. El tercer capítulo se dedica al estudio del problema de los semiplanos y a una descripción de los posibles tipos de ondas. El último capítulo da la solución del problema planteado al principio de la tesis en términos de rebotes sucesivos de la solución estudiada en el tercer capítulo.

CAPITULO 1

El problema de la propagación y difracción de ondas acústicas se plantea en términos de la ecuación de las ondas que es consecuencia de la estacionariedad de la integral

$$\iint \frac{\rho}{2} \left(\frac{\delta u}{\delta t} \right)^2 - \mu (\nabla u)^2 dx dy dz dt$$

Consideremos un sólido homogéneo sujeto a una tensión y en el que ignoramos pequeñas vibraciones transversales cerca de la posición de equilibrio. Suponemos que el movimiento es pequeño en el sentido de que las potencias de la función u y sus derivadas pueden ser despreciadas comparadas con potencias altas (de orden mayor que dos).

La energía cinética del sólido está dada por la integral

$$\frac{1}{2} \int \rho \left(\frac{\delta u}{\delta t} \right)^2 dv$$

donde ρ es la densidad del sólido.

Como la energía potencial de u es proporcional al incremento en la longitud con la longitud en el resto, el factor de proporcionalidad es igual a la tensión. La energía potencial toma la forma

$$\frac{1}{2} \int \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dv$$

El principio del mínimo nos lleva a encontrar una función $u(x, t)$ para la cual

$$J = \frac{1}{2} \int_L \int_V \rho \frac{\partial u}{\partial t}^2 - \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dv dt$$

sea mínimo en la clase de funciones continuas $u(x, t)$ las cuales tengan primera derivada continua a pedazos y sean cero en el origen y en el extremo final. Aplicando la ecuación de Euler a $J(x, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t)$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial u_t} \right) = 0$$

$$F = \frac{1}{2} (\rho u_1^2 - \mu (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2))$$

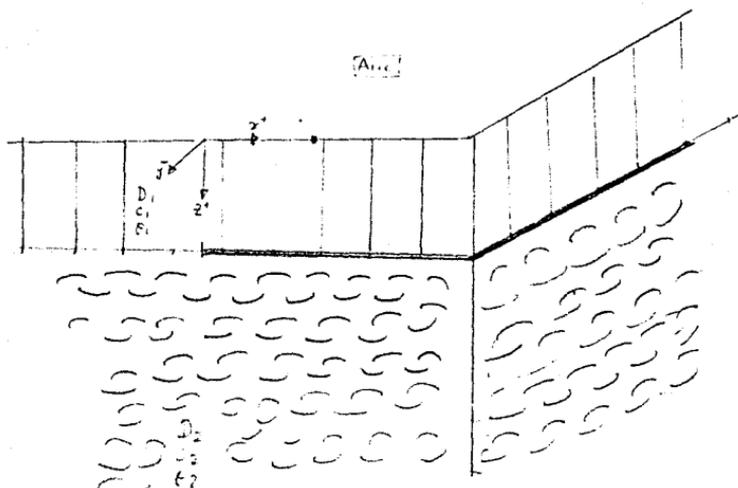
entonces de la ecuación de Euler tenemos

$$-\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

que es la ecuación de onda en tres dimensiones.

$$\Delta u - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Geometría del problema .



Se considera una capa de espesor d (denotada por D_1) sobre un semi-espacio infinito D_2 con una falla semi-infinita entre la frontera de estos dos materiales ; digamos en $x \geq 0, z = d$.

Como se observa en la figura se consideran dos medios, D_1 que es una capa uniforme sobre el semi-espacio D_2

entre los dos medios esta el plano semi-infinito
el otro semiplano es la falla.

Las constantes que caracterizan las propiedades acústicas son :

ρ

la densidad volumetrica de masa, en el sistema internacional $\frac{kg}{m^3}$

 κ

la compresibilidad se mide $\frac{seg^2}{kgm}$

la velocidad compresional de onda esta dada por:

$$c = \left(\frac{1}{\sqrt{\rho\kappa}} \right)$$

Tenemos para cada uno de los medios diferentes densidades, compresibilidades y velocidades:

$$\rho = \begin{cases} \rho_1 & \text{en } D_1 \\ \rho_2 & \text{en } D_2 \end{cases}$$

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_1 & \text{en } D_1 \\ \kappa_2 & \text{en } D_2 \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} c_1 & \text{en } D_1 \\ c_2 & \text{en } D_2 \end{cases}$$

Sean la presión y la velocidad funciones tales que :

$$P(x, y, z, t) = p$$

$$\vec{V}(x, y, z, t) = (V_1, V_2, V_3)$$

Tenemos que la ecuación que controla la propagación de las ondas acústicas en cada medio esta dada por :

$$\Delta u - c \left(\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \right) = 0$$

El campo de ondas acústicas con la geometría del problema es descrito en términos de la presión acústica p y la velocidad de la partícula v . En el interior de los dominios D_1 y D_2 estas cantidades deben satisfacer las ecuaciones acústicas libres de fuentes.

Denotamos en los diferentes medios:

$$p = p_1 \text{ en } D_1$$

CAPÍTULO 2

La idea para resolver el problema es tomar transformadas de Laplace en la variable t , y de Fourier en x, y . Debido a las condiciones sobre la falla se obtiene una ecuación funcional en la variable de Fourier correspondiente a x . Esta ecuación es la que se resuelve usando la técnica de Wiener-Hopf. Una vez resuelta esta ecuación el problema es el de calcular la transformación inversa.

Introduciremos la transformada de Laplace de la presión como

$$\hat{p}(x, y, z, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p(x, y, z, t) dt.$$

La que es una función analítica para $Re s$ suficientemente grande y positiva. Es conveniente introducir la transformada de Fourier de la siguiente forma

$$\tilde{p}(\alpha, \beta, z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(x, y, z, s) e^{s(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

donde α y β son imaginarios
y su transformación inversa

$$\hat{p}(x, y, z, s) = \left(\frac{s^2}{2\pi i} \right) \int_{-i\infty}^{i\infty} d\beta \int_{-i\infty}^{i\infty} \tilde{p}(\alpha, \beta, z, s) e^{-s(\alpha x + \beta y)} d\alpha \quad s \in R^+.$$

Transformaremos las ecuaciones acústicas de fuente libre. Esto lo haremos usando la transformación (13) en las ecs (6) y (7) obteniendo

$$\nabla \hat{p} + \rho(\hat{s}\hat{v} - \hat{v}(x, y, z, 0)) = 0$$

$$\nabla \cdot \hat{v} + \kappa(\hat{s}\hat{p} - p(x, y, z, 0)) = 0.$$

Podemos obtener las ecuaciones para la velocidad en la siguiente forma:

Ahora ya podemos transformar las ecs. () y () por la transformación (14) y resulta

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{p} + \rho s \tilde{v} - \rho \iint_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{v}(x, y, z, t) e^{s(\alpha x + \beta y)} dx dy &= 0 \\ \nabla \cdot \tilde{v} + \kappa s \tilde{p} - \kappa \iint_{-\alpha}^{\alpha} e^{s(\alpha x + \beta y)} dx dy &= 0 \end{aligned}$$

Como en las condiciones de frontera asumimos que la fuente empieza a actuar en el tiempo $t=0$, y no hay ni presión ni desplazamiento inicial, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{p} + \rho s \tilde{v} &= 0 \\ \nabla \cdot \tilde{v} + \kappa s \tilde{p} &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\nabla \tilde{p} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \end{pmatrix} e^{-s(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

Tomemos la primera componente

$$\left(\nabla \tilde{p} \right)_x = -s \alpha \tilde{p}$$

Análogamente para la segunda componente

$$\left(\nabla \tilde{p} \right)_y = -s \beta \tilde{p}$$

y

$$\nabla v = \left(-s \alpha \tilde{v}_x, -s \beta \tilde{v}_y, \frac{\delta \tilde{v}_z}{\delta z} \right).$$

Entonces las ecuaciones transformadas se pueden escribir

$$\begin{aligned} -s \tilde{p} (\alpha \hat{i} + \beta \hat{j}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \hat{k} + \rho s \nabla \tilde{v} &= \vec{0} \\ -s \alpha \tilde{v}_x - s \beta \tilde{v}_y + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \kappa s \tilde{p} &= 0 \end{aligned}$$

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Eliminando \tilde{v}_x y \tilde{v}_y de la siguiente manera: despejemos v_x de la primera componente de (102) y multiplicandola por α

$$\alpha \tilde{v}_x = \frac{\alpha^2 p}{\rho} \quad (1)$$

Despejemos v_y de la segunda componente en (102) y multiplicandola por β

$$\beta \bar{v}_y = \frac{\beta^2}{\rho} \bar{p}. \quad (105)$$

Usando estos resultados tenemos una ecuación ordinaria en z que es la misma para el medio estratificado la diferencia es en las condiciones de frontera

$$\alpha \bar{v}_z + \beta \bar{v}_y = \frac{\beta}{\rho} (\alpha^2 - \beta^2). \quad (1)$$

Se obtiene para la presión

$$-s \left[\frac{\hat{p}}{c} (\alpha^2 + \rho^2) \right] + \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} + \kappa s \hat{p} = 0$$

Entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones de primer orden en z en el cual \hat{p} y v_z son variables desconocidas.

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \epsilon s \hat{v}_z = 0$$

$$\frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} + \frac{s}{c^2} \{ \alpha^2 + \rho^2 - \kappa c \} \hat{p} = 0$$

Este sistema lo podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon s \\ \frac{s}{c^2} \{ \alpha^2 + \rho^2 - \kappa c \} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{v}_z \end{pmatrix}$$

encontrando los valores propios

$$\lambda = +s \sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 - \kappa \rho)}.$$

Como

$$c = \left(\frac{1}{\sqrt{\beta \kappa}} \right)$$

entonces

$$\rho \kappa = \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Denotemos

$$\gamma_i = \sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{c_i^2}}$$

obtenemos los vectores propios

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$s\gamma x - \rho s y = 0.$$

Entonces

$$\left(\frac{\gamma}{\rho}\right) = y.$$

Por lo tanto los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_i}{\rho} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma_i}{\rho} \end{pmatrix}$$

en D_i $i=1,2$.

Entonces la solución es

$$\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = A_i^+ e^{-s\gamma_i z} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_i}{\rho} \end{pmatrix} + A_i^- e^{s\gamma_i z} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma_i}{\rho} \end{pmatrix} \text{ en } D_i, i=1,2$$

Observemos que $e^{s\gamma(z-d)}$ es también solución de la ecuación diferencial. Por lo tanto la solución en D_1 la podemos escribir

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = A_1^+ e^{-s\gamma_1 z} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_1}{\rho} \end{pmatrix} + A_1^- e^{s\gamma_1(z-d)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_1}{\rho} \end{pmatrix}$$

en la región D_2

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = A_2^+ e^{-s\gamma_1(z-d)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_2}{\rho} \end{pmatrix}$$

ya que el campo decrece a cero cuando $z \rightarrow +\infty$.

En estas ecuaciones $A_1^+ = A(\alpha, \beta, s)$ e introducimos

$$Y_i = \left(\frac{\gamma_i}{\rho} \right)$$

$$\gamma_i = \sqrt{-(\alpha_2 + \beta_2) + \frac{1}{c_i^2}}$$

con parte real de γ_i mayor que cero.

Quedan por determinar A_1^+ , A_1^- y A_2^+ .

Utilizando las condiciones de frontera

Utilizando la continuidad de la presión en $z=d$. Tenemos que en términos de las variables transformadas

$$A_1^+ e^{-\gamma_1 d} + A_1^- e^{+\gamma_1 d} = A_2^+$$

La condición de frontera en $z=0$ de continuidad de la presión nos da

$$A_1^+ + A_1^- = \hat{p}(s) e^{s(\alpha x_1 + \beta y_1)}. \quad (1)$$

Estas ecuaciones expresan las incógnitas en términos de la variable A_2^+ . Ahora las condiciones sobre la falla son las que determinan $A_2^+(\alpha, \beta, s)$.

Recordemos que si $x > 0$ $\lim_{z \rightarrow 0} p(z, x, y, t) = 0$ y como supondremos

$$p(0, x, y) = \int_G \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} A_2^+(\alpha, \beta, s) e^{(\alpha x + \beta y)s} e^{st} ds d\alpha d\beta$$

entonces $A_2(\alpha, \beta, s)$ tiene que ser analítica como función de α para $\text{Re} \alpha > 0$ y de caer a cero cuando $\alpha \rightarrow \infty$ en ese semiplano.

Por otra parte tenemos que cuando $x < 0$ $v_{1z} = v_{2z}$ y ahora utilizaremos esta condición para encontrar una segunda restricción sobre A_2^+ .

La condición de continuidad $H(x, y) = v_{1z} - v_{2z} = 0$ para $x < 0$ y $z=d$ nos dice que la transformada de Fourier de H denotada por H^L es analítica para $\text{Re} \alpha \leq 0$. Tenemos que es posible usando la representación de $v_{1z} = \frac{\partial p_1}{\partial z}$, $v_{2z} = \frac{\partial p_2}{\partial z}$, obtener la ecuación:

$$H^L(\alpha, \beta, s) = Y_1 [A_1^+ e^{-\gamma_1 d} - A_1^-] - Y_2 A_2^+ \quad \text{para } \text{Re} \alpha = 0.$$

Utilizando ahora las expresiones para A_1^+ y A_1^- en términos de A_2^+ y la intensidad de la fuente \hat{p} obtenemos después de manipular

$$T\bar{p}e^{-\gamma d} - A_2^+ (1 + Re^{-2\gamma_1 d}) = \frac{H\bar{b} [1 - e^{-2\gamma_1 d}]}{\rho_1(Y_1 + Y_2)} \quad \text{para } Re\alpha > 0.$$

Esta ecuación funcional para A_2^+ y H^L es debida a la diferencia en condiciones de frontera sobre la falla en $x > 0$ y $x < 0$.

El problema se ha transformado en el problema de encontrar dos funciones analíticas A_2^+ y H^L en dos semiplanos respectivamente que satisfacen una relación sobre una curva.

Este es el típico problema Wiener Hopf que fue utilizado por primera vez en los años 40 por Schwinger y Copson para estudiar este tipo de problema.

A continuación describiremos la versión de la técnica Wiener Hopf que sera utilizada en la determinación de H^L y A_2^+ . El problema a resolver es el de encontrar funciones $\Phi_+(\alpha)$ y $\Psi_-(\alpha)$ analíticas para $Re\alpha \leq 0$ y $Re\alpha \geq 0$ que satisfacen

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)\Psi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0 \quad Re = 0$$

donde $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ son funciones analíticas de α conocidas. Para resolver este problema observemos que si $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = \frac{K_+(\alpha)}{K_-(\alpha)}$ donde $K_+(\alpha)$ es analítica para $Re\alpha \leq 0$, $K_-(\alpha)$ es analítica para $Re\alpha \geq 0$, entonces tenemos que la ecuación para Φ_+ y Ψ_- puede escribirse como

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) + \frac{K_-(\alpha)C(\alpha)}{B(\alpha)} = 0$$

Si el cociente $\frac{K_-(\alpha)C(\alpha)}{B(\alpha)}$ se puede escribir como $C_+(\alpha) + C_-(\alpha)$ tendremos que

$$K_+(\alpha)\Phi_+ + C_+(\alpha) = -K_-(\alpha)\Psi_- - C_-(\alpha).$$

De aqui tenemos que la función $K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + C_+(\alpha)$ continua para $Re\alpha > 0$ o la función $-K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) - C_-(\alpha)$. Si estas funciones están libres de polos y son acotadas al infinito (o decrecen a cero en casos especiales) tendremos que por el teorema de Liouville la función

$$K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) - C_-(\alpha) = 0$$

y con continuación analítica

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + C_+(\alpha) = 0.$$

Esto determina Ψ_- y Φ_+ en términos de descomposiciones conocidas. Resta por determinar K_+ y K_- así como C_+ y C_- . En varios problemas puede hacerse por inspección. Estos dan lugar a soluciones cerradas simples. En nuestro caso la factorización no es explícita y ahora procederemos a encontrarla.

Queremos encontrar la factorización $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = \frac{K_+}{K_-}$ donde K_+ y K_- no tienen ceros en sus semiplanos de analiticidad. Suponiendo que $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = G(\alpha) \neq 0$ en $\text{Re } \alpha = 0$ tenemos que

$$\text{Ln } G(\alpha) = \text{Ln } K_+ - \text{Ln } K_-$$

de aquí que el problema se transforma en el de escribir una función analítica como la sumada dos funciones analíticas en $\text{Re } \alpha \leq 0$ y $\text{Re } \alpha \geq 0$.

Esto puede hacerse usando la integral de Cauchy.

Definimos pues

$$\text{Ln } k_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Ln } G(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \quad \text{para } \text{Re } \alpha > 0$$

$$\text{Ln } k_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Ln } G(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \quad \text{para } \text{Re } \alpha < 0$$

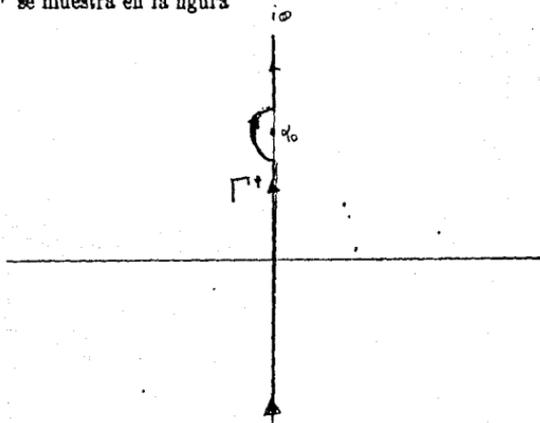
siempre que $|\text{Ln } G(\alpha)| \rightarrow 0$ si $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Con $\text{Re } \alpha > 0$ tenemos que

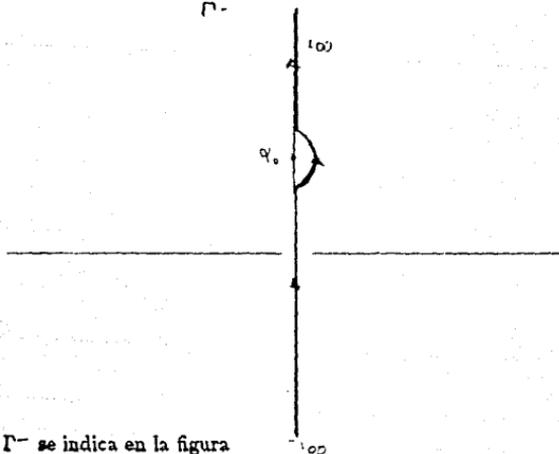
si $\alpha \rightarrow \alpha_0$ con $\text{Re } \alpha_0 = 0$, $\text{Re } \alpha > 0$

$$\text{Ln } k_+(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\text{Ln } G(\alpha')}{\alpha' - \alpha_0} d\alpha'$$

donde Γ^+ se muestra en la figura



$$y \quad \text{Ln } k.(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} \frac{\text{Ln } G(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha'$$



donde Γ^- se indica en la figura

de donde se sigue

$$\int_{\Gamma} K_+(\alpha) - \int_{\Gamma} K_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(\alpha')}{\alpha' - \alpha_0} d\alpha' = \ln G(\alpha_0)$$

Esta fórmula nos proporciona K_+ y K_- en términos de la integral de una función conocida. De la misma manera procedemos para C_+ y C_- .

Es fácil de convencerse que la factorización de Wiener Hopf nos da una solución al problema buscada en forma cerrada y fácil de interpretar. Por esto el problema se transforma en una colección de problemas más simples.

Observemos que si Res es grande los términos $e^{-\gamma_1 d}$ son despreciables y podemos desarrollar la solución en potencias descendientes de $e^{-2\gamma_1 d}$. Esto corresponde a considerar los rebotes sucesivos de las ondas en la intercara.

Tomemos pues

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^+$$

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^-$$

y obtenemos una sucesión de problemas de Wiener Hopf.

A orden cero tenemos

$$T \bar{P}^i e^{-\gamma_1 d} - G_{0+} = \frac{H_0^-}{\rho_1(Y_1 + Y_2)}$$

esta ecuación corresponde al problema de dos semiplanos excitados por una fuente a distancia d . No hay influencia de la superficie libre.

A orden n tenemos igualando potencias de $e^{-(2n+1)\gamma_1 d}$

$$G_n^+ + \frac{H_n^-}{\epsilon_i(Y_1 + Y_2)} = \left\{ \frac{H_{n-1}^-}{\epsilon_i(Y_1 + Y_2)} - G_{n-1}^+ \right\} e^{-2\gamma_1 d}$$

que corresponde al problema del semiplano excitado por las fuentes a orden $n-1$ es decir la $n-1$ ésima reflexión

Observamos que es suficiente una sola factorización de la ecuación homogénea y a cada paso hay que factorizar la fuente que proviene del n-ésimo rebote.

Es conveniente reescribir la ecuación a orden cero de la forma

$$G_0^+ + \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2) \gamma_1} H_0^- = T \hat{P}_1 e^{-\beta \delta_1 d} = R_0 \quad k = \frac{\frac{\delta_2}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1}}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$$

y las siguientes como :

$$G_n^+ + \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2) \gamma_1 \frac{k_+}{k_-}} H_n^- = R_n$$

Es claro que $K = 1$ si $\alpha = \infty$. La factorización de γ_1 se obtiene por inspección como

$$\gamma_1^+ = \sqrt{-\Omega_1(\beta) - \alpha}$$

$$\gamma_1^- = \sqrt{-\Omega_1(\beta) + \alpha} \quad , \quad \Omega_1(\beta) = \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \beta^2}$$

La factorización de K no es explícita y está dada en términos de

$$\ln k_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \frac{k(\alpha')}{c}}{\alpha - \alpha'} d\alpha' \quad , \quad \ln k_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln k(\alpha')}{\alpha - \alpha'} d\alpha'$$

utilizando la técnica descrita en la sección anterior tenemos que

$$G_0^+ K + \gamma_1^+ + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{H_0^-}{\gamma_1^-} k_- = R_0 \gamma_1^+ K_+$$

Basta ahora factorizar los lados derechos de la forma $R_n^+ + R_n^-$. Usando las condiciones asintóticas tenemos que

$$G_n^+ = \frac{R_n^+}{k^+ \gamma_1^+}$$

$$H_n^- = \frac{R_n^- \gamma_1^-}{k^-} \frac{c_1 + c_2}{\rho_2}$$

Una vez determinados G_n^+ y H_n^- se calculan las correspondientes A_{1n}^+ y A_{1n}^- que nos representan el campo difractado en la región $0 < z < d$.

Para esto basta recordar que

$$A_1^+ = \text{en términos de } (A_2 = \sum G_n^+)$$

$$A_1^- = \text{en términos de } A_2$$

(las expresiones que da son demasiado complicadas).

Tenemos pues que

$$v_z^{(1)} = \hat{p}_z^{(1)} = \sum$$

todo en términos de las H_n^- , también podemos expresarlo todo en términos de G_n^+ .

Una vez obtenidas las expresiones para v_n solo resta tomar la transformada inversa para encontrar el campo. Esto implica calcular integrales triples en α, β, s , de funciones en principios conocidas para así determinar el campo.

En detalle se desea, calcular

$$u_n(x, y, 0, t) = \int_{p=-100}^{p+100} \int_{-100}^{100} \int_{-100}^{100} \left(\frac{s}{j\pi}\right)^2 \tilde{u}_n(\alpha, \beta, s) e^{-s\alpha x - s\beta y} d\alpha d\beta ds$$

donde \tilde{u}_n es una función conocida en principio.

Tenemos expresiones para $Re\alpha \leq 0$ y $Re\alpha \geq 0$ para la \tilde{u}_n .

Es conveniente escribir las expresiones para v_n en términos de la fuente original. Esto se logra utilizando la expresión

$$\tilde{v}_{1n} = \tilde{v}_{12}^{(n-1)} e^{-2s\delta_1 d} - 2\gamma_1 G_{n-1}^R e^{-s\delta_1 d}$$

donde

$$G_{n-1}^R = P V \int$$

y

$$\tilde{v}_i(z) =$$

Aquí se resuelve la recursión y se obtiene el términos general en la forma

CAPÍTULO 3

El propósito de este capítulo es el de examinar la inversión de las transformadas. Aquí estudiaremos en detalle el caso $n=1$ para entender que representan los términos de la solución. En detalle tenemos que estudiar la integral

$$\left(\frac{s}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\beta} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha d} \left[-2\gamma_1 e^{-\gamma_1(\alpha)d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(\alpha', \beta) \hat{P}(s) e^{-s(\alpha'x_s + \beta y_s) - s(\alpha_1(\alpha')d)}}{\alpha' - \alpha} \frac{d\alpha'}{k_1^p \gamma_1^n} \right] d\alpha d\beta.$$

Es conveniente reordenar la integral en la forma

$$-2\hat{P}(s) \left(\frac{s}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\beta(\gamma_1 - \gamma_2)} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[\alpha_1 \gamma_1 + \gamma_1(\alpha)d]} \frac{T(\alpha', \beta) e^{-s[-\alpha'x_s + \gamma_1(\alpha)d]}}{\alpha' - \alpha} \frac{d\alpha'}{k_1^p \gamma_1^n} d\alpha' \right] d\alpha d\beta$$

Consideremos ahora la integral dentro del parentesis rectangular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1(\alpha, \beta) e^{-s[\alpha_1 \gamma_1 + \gamma_1(\alpha)d]} P_1 \gamma \int \frac{T(\alpha', \beta) e^{-s[-\alpha'x_s + \gamma_1(\alpha)d]}}{\alpha' - \alpha} \frac{d\alpha'}{k_1^p \gamma_1^n} d\alpha' d\alpha$$

Estas integrales pueden convertirse en una sola usando el método de Cagniard. Este método consiste en hacer un cambio de variable en la α de suerte tal que el exponente

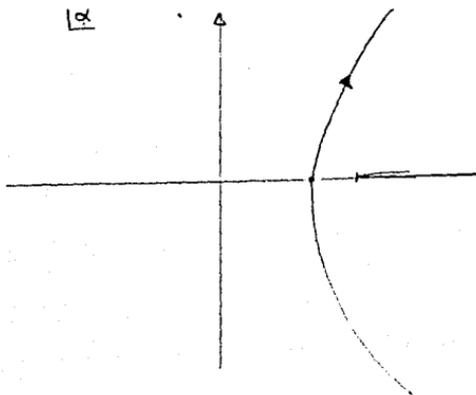
$$\alpha X + \delta(\omega) d = \alpha X + \left(\frac{1}{k_1} - \alpha^2 + \beta^2 \right)^{1/2} = \tau$$

Una vez logrado esto tenemos

$$\int_{\Gamma} Y_1(k(\tau), \rho) PV \left\{ \frac{T(\alpha, \rho) e^{-s[-\alpha'k_1 + \delta_1(\omega)d]}}{\alpha' - \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha(\tau)}{\partial \tau} e^{-s\tau} d\tau \right.$$

$$\left. \Gamma = \alpha(\tau) \right\}$$

donde C es el contorno parametrizado por $\alpha(\tau) = \frac{x\tau + izd \sqrt{\tau^2 - (t_{00}^d)^2}}{(x^2 + 4d^2)}$ con $t_{00}^d \leq \tau < \infty$ que se ilustra en la figura para $x > 0$



Si el contorno C se encuentra a la izquierda de las singularidades que son los puntos rama en (*), se tiene que el contorno C cruza en el eje real para τ_0^d de aquí se tiene que

$$\tau_0^d = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4d^2}}{2}$$

$$\int_{\Gamma} Y_1 PV \left\{ \frac{T(\rho) e^{-s[-\alpha'k_1 + \delta_1(\omega)d]}}{\alpha' - \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha(\tau)}{\partial \tau} e^{-s\tau} d\tau \right. = 4i \int_{\tau_0^d}^{\infty} \left[Y_1 PV \left\{ \frac{T(\rho) e^{-s[-\alpha'k_1 + \delta_1(\omega)d]}}{\alpha' - \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\omega'}{d\tau} \frac{d\tau}{(\tau^2 + 4d^2)^{1/2}} \right\} e^{-s\tau} d\tau \right.$$

Esta última integral es la transformada de Laplace de la función $\left[\right] = \alpha(\tau)$

$$\left\{ Y_{1,PV} \right\} T \frac{e^{-s[-\alpha'x_s + \delta_1(\alpha')d]}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \frac{d \tau (t^2 - t_p^2)^{-1/2}}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_{d(\tau)} \left\{ \begin{array}{l} \text{para } \tau \geq \tau_p \\ \text{para } \tau \leq \tau_p \end{array} \right.$$

Esta observación nos da el tiempo de la primera llegada $\tau(\beta)$ como función de la x y las velocidades de

$$\tau_p = \frac{x \Omega_1(\beta)}{(x^2 + d^2)^{1/2}}$$

Este cambio de variable permite eliminar dos de las integrales quedando la respuesta final como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau_p}^{\infty} Y_{1,PV} \left\{ T \frac{e^{-s[-\alpha'x_s + \delta_1(\alpha')d]}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \frac{\tau (t^2 - t_p^2)^{-1/2}}{(x^2 + d^2)^{1/2}} d\tau \right\} e^{-s\tau} \left[e^{-s\beta(y-4s)} d\beta \right]$$

Este resultado indica que el campo total es la superposición de los campos para diferentes números de onda β .

Es conveniente deformar el contorno para la variable β antes de calcular la transformada de Laplace Inversa.

Es conveniente cambiar de variable en la forma

$$\tau = \omega \tau_p$$

y obtener

$$\int_{b_p}^{\infty} \int_{\tau_p}^{\infty} Y_{1,PV} \left\{ T \frac{e^{-s[-\alpha'x_s + \delta_1(\alpha')d]}}{\alpha' - \omega} d\alpha' \frac{\omega \tau_p (\omega^2 \tau_p^2 - t^2)^{-1/2}}{(x^2 + d^2)^{1/2}} d\tau \right\} e^{-s\tau} \left[e^{-s\beta(y-4s)} d\beta \right]$$

ahora puede usarse el contorno de Cagniard

$$\left[\frac{\omega \Omega_1(\beta)}{(x^2 + d^2)^{1/2}} x + \beta(y-4s) \right] = \mathcal{L}$$

y obtener que

$$\int_{\mathcal{C}_p} \left[\int_1^{\infty} d\tau d\beta = \int_1^{\infty} \left[\int_1^{\infty} \frac{d\beta(t)}{dt} e^{-st} d\alpha \right] \right]$$

$$x_p = \frac{1}{\tau'} = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

De aqui podemos tomar la transformada inversa para la velocidad que esto se escribe como

$$\int_{\mathcal{C}_p} \hat{p}(s) \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \gamma_{PV} \left\{ \frac{T e^{-s[\alpha'x + \gamma(\omega')d]}}{\alpha' - \alpha'} d\alpha' \frac{\gamma(\tau^2 - t_{sp}^2)^{-1/2}}{(x^2 + d^2)^{-1/2}} 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial p(z)}{\partial z} \right) e^{-st} d\tau dt \right.$$

En la forma

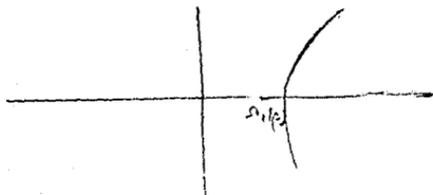
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t P(t-\tau) \left[\int_1^{\infty} \gamma_{PV} \left\{ \frac{T e^{-s[\alpha'x + \gamma(\omega')d]}}{\alpha' - \alpha'} d\alpha' \frac{\gamma(\tau^2 - t_{sp}^2)^{-1/2}}{(x^2 + d^2)^{-1/2}} 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial p(z)}{\partial z} \right) H(\tau - t_p) d\tau \right. \right]$$

Estas expresiones fueron obtenidas cuando el contorno de Cagniard de la variable α pasa por la singularidad.

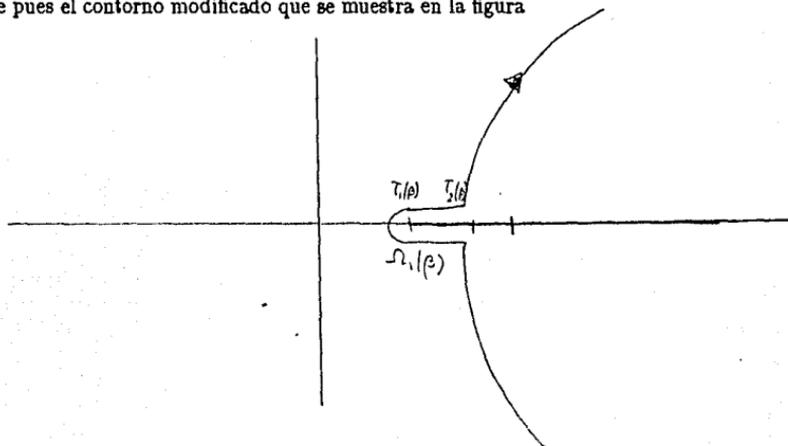
Hay casos en donde el punto de observación esta colocado una posición que satisface

$$1 < \frac{x}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \sqrt{c_1/c_2} < \frac{c_2}{c_1}$$

En este caso el contorno de Cagniard intersecta al corte rama tal como se ve en la figura



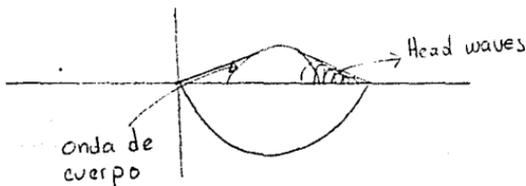
Es claro que la integral sobre el eje imaginario no se puede deformar a este contorno se escoge pues el contorno modificado que se muestra en la figura



y la integral se compone en dos contribuciones en la forma

$$2 \int_{\tau_1(\beta)}^{\tau_2(\beta)} \left(\gamma, \text{PV} \int \frac{T e^{-i[-\omega' x_c + \delta_1(\omega') d]} d\omega'}{\alpha' - \alpha} \frac{\tau(\tau^2 - t_c^2)^{1/2}}{(\tau^2 + d^2)^{1/2}} d \right) e^{-s\tau} d\tau + 2 \int_{\tau_1(\beta)}^{\infty} (\quad) e^{-s\tau} d\tau$$

De aqui resulta claro que $\tau_1 < \tau_2$ y que la contribución del corte entre $\tau_1(\beta)$ y $\tau_2(\beta)$ llega antes de la contribución de la segunda integral. Las ondas que llegan al tiempo τ_1 se llaman "Head waves". Estas se provocan por la presencia de la intercara y se muestran en la figura



CAPITULO 4

Usando los resultados obtenidos en el capítulo anterior estudiaremos el campo difractado completo. La solución general del problema esta dada por

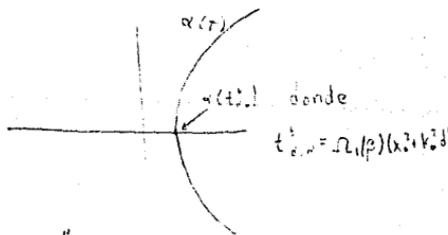
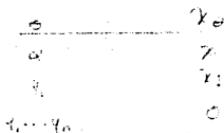
$$\hat{U}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_i(\rho) z^{-s\rho(1+\nu)} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}^d(\beta, \gamma, \tau_1, \dots, \tau_n, \alpha) z^{-s(\alpha x - \gamma y, \tau_1)} z^{-s[\beta, \alpha]k_0 d} z^{-s \sum_{j=1}^n \tau_j} \delta_i(\rho, \tau_1, \dots, \tau_n) d\beta d\gamma d\tau_1 \dots d\tau_n d\alpha$$

Ahora la argumentación es análoga a la que se hizo para el caso $n=0$.

Se invierten las integrales usando el método de Cagniard y supondremos que no se generan Head wave. En este caso introduciremos los cambios de variable

$$x \cos \theta + \delta_i(\rho) k_0 d = \tau \epsilon$$

donde ϵ esta definido por



Obteniéndose

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\rho(1+\nu)} \int_{\alpha(\tau)}^{\beta} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_3}^{\tau_n} \hat{A}^d(\beta, \tau, \tau_1, \dots, \tau_n) e^{-s(\tau + \sum_{j=1}^n \tau_j)} \frac{\partial \alpha(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \dots d\beta d\tau_1 \dots d\tau_n d\tau$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\rho(1+\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}^d(\beta, \tau, \tau_1, \dots, \tau_n) z^{-s(\tau + \sum_{j=1}^n \tau_j)} \text{Im} \left(\frac{\partial \alpha(\tau)}{\partial \tau} \dots \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \right) d\beta d\tau_1 \dots d\tau_n d\tau$$

Es claro que la expresión de orden $m+1$ es cero si $t < t_{m+1}^b$.

Esto nos provee de una solución en forma finita para tiempos finitos.

Esta fórmula tiene una interpretación en términos de reflexiones.

La amplitud

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{I_1} \int_{I_2} \dots \int_{I_m} \tilde{\lambda}^\alpha(\text{Jacobiano}) e^{-s\alpha x} dq_0 dq_1 \dots d\alpha$$

tiene la información sobre los Head waves generados en reflexiones sucesivas. El contorno de Cagniard en α puede intersectar una singularidad de la amplitud. Esto quiere decir que la última reflexión generó una Head wave.

A partir de la fórmula es posible decir el tipo de interacciones que dan origen al campo medido. Esto se hace reduciendo las integrales sobre los intervalos I_j a integrales sobre el contorno de Cagniard apropiado.

Una vez hecha esta reducción es posible dar una expresión en el tiempo para el campo difractado (cuando no hay Head waves) manipulando la expresión general como se indica a continuación.

æ

CONCLUSIONES

En este trabajo se construye una solución exacta al problema de difracción por una falla sumergida en un medio verticalmente estratificado.

La solución se escribe en términos de reflexiones sucesivas de la solución para dos semiespacios. No es posible escribir analíticamente la solución pero la fórmula revela su estructura y se pueden calcular algunos aspectos de la dinámica.

En particular se identifican exactamente los tiempos de llegada de las ondas de cuerpo y las Head waves.

La solución obtenida muestra el proceso como una superposición de cuatro procesos elementales de difracción que son reflexión de una onda de cuerpo que genera ondas de cuerpo, reflexión de ondas de cuerpo que generan Head waves y reflexión de una head wave que generan head waves.

Para calcular las amplitudes a los primeros tiempos de llegada puede hacerse un desarrollo asintótico para $s \rightarrow \infty$. Esto no ilustra nada nuevo sobre la naturaleza cualitativa de la solución.

Un problema que no ha sido estudiado en la literatura es el de factorización aproximadas para cada ecuación de Wiener Hopf. Aquí el problema es el de encontrar una factorización aproximada Para $e^{-s\tau_1 d} = F_+(\alpha) + F_-(\alpha)$. Disponiendo de esta aproximación se podría encontrar una solución analítica aproximada.

En resumen la solución descrita en este trabajo provee una comprensión del tipo de fenómenos que se pueden observar en el caso de ondas generadas por una fuente puntual que son guiadas y reflejadas por la falla y las diferencias de densidades en los medios.

BIBLIOGRAFIA

- [1]—Achenbach, J.D. "Wave propagation in elastic solids". North Holland Publishing Company, 1975.
- [2]—Achenbach, J.D., Gantesen, A.K. and McMaken, H. "Ray Methods for waves in elastic solids". Pitman Advanced Publishing Program Number 14 (Pitman, New York, 1982).
- [3]—Cloux, R. Du. "Pulsed electromagnetic radiation from a line source in the presence of a semi-infinite screen in the plane interface of two different media". Wave Motion 456 (1984).
- [4]—De Hoop, A.T. "A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems". Appl Sci. Res B8, 349 (1960).
- [5]—De Hoop, A.T. "Pulse electromagnetic radiation from a line source in a two-media configuration". Radio Sci. 14, 253 (1979).
- [6]—Fung, Y.C. "Foundations of solid mechanics". Prentice Hall, 1968.
- [7]—Graff, K.F. "Wave motion in elastic solids". Oxford University Press, 1975.
- [8]—Hechstadt, H. "Integral equations". Pure and Applied Mathematics (Wiley Interscience, New York, 1973).
- [9]—Hijden, V.D. "Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media". North Holland series in applied mathematics and mechanics, 1987.
- [10]—Kooij, D.J. and Quak, D. "Three-dimensional scattering of impulsive acoustic waves by a semi-infinite crack in the plane interface of a half-space and a layer". Journal of Math Physics. 29(7), July 1988. æ