

01168
7
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

RESPUESTA DE SISTEMAS FISICOS A SOLICITACIONES ALEATORIAS
(UNA REVISION DE ENFOQUES)

T E S I S

que para obtener
el Grado de Maestría en Ingeniería (Investigación de Operaciones)

presenta

Mirna Ireri Sánchez Gómez.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ASESOR: DR. GABRIEL AUVINET G.
Ciudad Universitaria MAYO 1991



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

CONTENIDO

pág.

1 CAPITULO UNO.

INTRODUCCION.....

2. CAPITULO DOS

1 ALGUNAS HERRAMIENTAS MATEMATICAS.....

1.1 Algebra Lineal.

Descomposición canónica de una aplicación lineal.....

Aplicación multilineal. Producto tensorial.....

1.2 Transposición.....

Espacios vectoriales en dualidad.....

Ejemplos de espacios vectoriales en dualidad.....

Ortogonalidad de un espacio vectorial.....

Aplicaciones lineales transponibles.....

Propiedades de la Transposición.....

Transformación de Fourier para las funciones.....

Transformación de funciones de distribuciones templadas.....

Transformación de Laplace.....

Formas semi-lineales, casi-lineales.....

1.3 Análisis funcional.....

Espacio de Hilbert.....

1.4. Repaso concerniente a la teoría de la medida y de la integración.....

Algebra de Boole y tribus.....

Conjunto generado por una familia de partes.....

Definición de una medida positiva.....

Medida inducida.....

Medidas en una recta.....

Medidas positivas acotadas sobre el espacio \mathbb{R}^n

Complementación de una tribu.....

Propiedad verdadera n-casi todas partes. Propiedad casi segura.....

Aplicaciones medibles.....

Notaciones $(f \in \mathcal{A})$, $(f \in \mathcal{C})$

Imagen de una medida.....

Medida sobre un espacio producto.....

Medida producto.....

Integral de Lebesgue.....

Definición.....

Algunas propiedades de la Integral de Lebesgue.....

Espacios de Hilbert complejos.....

Teorema de Plancherel.....

Espacios de Sobolev.....

2.	Principios de la teoría de la probabilidad.....	
2.1.	Postulados.....	
2.2.	Comentarios.....	
2.3.	Ejemplo de una viga sometida a sollicitación aleatoria.	
2.4.	Ejemplo de un oscilador.....	
2.5.	Principio de causalidad.....	
2.6.	Propiedad de transitividad para el cambio de espacios de probabilidad.....	
2.7.	Variables aleatorias con valores dentro de un espacio vectorial F	
2.8.	Función de repartición.....	
2.9.	Igualdad casi segura de variables aleatorias.....	
2.10.	Espacios de Lebesgue.....	
2.11.	Principio de reducción de causas.....	
2.12.	Principio de independencia.....	
2.13.	Aplicación a la construcción de espacios de probabilidad.	
2.14.	Principio de sumatoria de espacios de probabilidad..	
2.15.	Función característica y momentos.....	
2.16.	Propiedades de unicidad.....	
2.17.	Media, correlación, covarianza para una v.a. vectorial de segundo orden.....	
2.18.	Transformación lineal de una variable aleatoria de segundo orden.....	
2.19.	Transformación de Laplace de una distribución de una v.a. aleatoria vectorial.....	
2.20.	Distribuciones de probabilidad usuales.....	
2.21.	Distribución normal sobre un espacio vectorial.....	
2.22.	Relación entre la teoría de la probabilidad y la estadística.....	
2.23.	Descripción casi efectiva de distribuciones de probabilidad.....	
2.24.	Relación entre momentos y cumulantes.....	
2.25.	Definición.....	
2.26.	Definición.....	
2.27.	Polinomios de Hermite.....	
3.	Procesos estocásticos y campos aleatorios.....	
3.1.	Procesos estocásticos clásicos.....	
3.2.	Relación con la modelación estocástica.....	
3.3.	Función aleatoria.....	
3.4.	Sistemas de distribuciones marginales.....	
3.5.	Conjunto cilíndrico.....	
3.6.	Teorema de Kolmogoroff.....	
3.7.	Procesos de crecimientos independientes.....	
3.8.	Procesos de Poisson con media $\lambda(t)$	
3.9.	Procesos de Wiener normalizados, con valores dentro de un espacio Euclídeo.....	
3.10.	Procesos constantes por intervalos sobre R_+	
3.11.	Procesos con saltos Poissonianos sobre R_+	
3.12.	Procesos parámicos.....	
3.13.	Procesos de segundo orden.....	
3.14.	Media-central de un proceso.....	
3.15.	Autocorrelación-Covarianza.....	
3.16.	Expresiones con ayuda de coordenadas.....	

3.17	Lema.....
3.18	Propiedades de las funciones R y C
3.19	Proposición.....
3.20	Lema.....
3.21	Definiciones de R y C , si F es Euclidiano.....
3.22	Definición.....
3.23	Procesos estacionarios.....
3.24	Teorema de existencia de la medida espectral matricial
3.25	Forma matricial del teorema de existencia.....
3.26	Medida espectral de Poisson.....
3.27	Interpretación de las componentes de la medida espectral matricial.....
3.28	Momentos esperados.....
3.29	Función de densidad espectral.....
3.30	Transformación de procesos estocásticos.....
3.31	Transformación de función aleatoria por una aplicación continua.....
3.32	Transformación de funciones aleatorias definidas por la transformación integral lineal.....
3.33	Lema.....
3.34	Transformaciones de funciones aleatorias asociadas con la derivación.....
3.35	Transformación de procesos estocásticos continuos de segundo orden.....
3.36	Definición.....
3.37	Proposición.....
3.38	Nota.....
3.39	Representación integral de procesos estocásticos clásicos de segundo orden.....
3.40	Teorema.....
3.41	Medida espectral estocástica.....
3.42	Corolario 1.....
3.43	Corolario 2 (teorema de Shannon).....
3.44	Esperanzas condicionales y aplicaciones a los procesos.....
3.45	Definición de esperanza condicional.....
3.46	Ejemplos de esperanzas condicionales.....
3.47	Teorema de Jirine.....
3.48	Propiedades de las esperanzas condicionales.....
3.49	Definición de la probabilidad condicional.....
3.50	Definición de conjuntos.....
3.51	Martingales y sub-martingales.....
3.52	Propiedades de Markov.....
3.53	Pre-propiedad de Markov.....
3.54	Otras formulaciones de la pre-propiedad de Markov.....
3.55	Proposición.....
3.56	Ejemplo.....
3.57	Propiedad de transición.....
3.58	Definiciones complementarias.....
3.59	Proposición y definición de la propiedad de Markov.....
3.60	Tiempo de detención.....
3.61	Definición de la propiedad de Markov fuerte.....
3.62	Estadística sobre funciones aleatorias.....
3.63	Ejemplos de parámetros de una función aleatoria.....
3.64	Ejemplos de estimadores.....
3.65	Proposición.....

CAPITULO TRES

3. FILTRADO LINEAL Y ANALISIS ESPECTRAL.....

- 3.1 Transformación lineal de señales.....
 - Introducción.....
 - Definición de las transformaciones lineales consideradas.....
 - Transformaciones lineales con función núcleo.....
 - Transformaciones lineales con medidas de núcleo.....
 - Operador físicamente realizable.....
 - Estabilidad de un operador lineal.....
- 3.2 Filtro de convolución.....
 - Definición.....
 - Respuesta de frecuencia a los filtros de convolución.....
 - Transformación de exponenciales.....
 - Filtro de convolución físicamente realizable.....
 - Función de transferencia de los filtros de convolución físicamente realizables.....
- 3.3 Oscilador lineal de dimensión finita.....
 - Definición.....
 - Desacoplamiento de un oscilador de dimensión N
 - Lema y definición de la base modal y de coordenadas modales.....
- 3.4. Promedios de tiempo. Procesos aleatorios ergódicos....
 - Valores medios cuadrados.....
- 3.5. Funciones de densidad de probabilidad.....
 - Funciones de distribuciones de probabilidad.....
 - Descripción de ellos aleatorios en término de funciones de densidad de probabilidad.....
 - Propiedades de la función de autocorrelación.....
- 3.6. Respuesta a excitaciones aleatorias. Transformadas de Fourier.....
- 3.7. Funciones de densidad de potencia espectral.....
- 3.8. Estrechamiento de banda y ancho de banda para procesos aleatorios.....
 - Distribuciones de Rayleigh.....
- 3.9 Respuestas de sistemas lineales a excitaciones lineales estacionarias.....
- 3.10 Respuesta de sistemas de un grado de libertad a excitaciones aleatorias.....
- 3.11 Propiedades comunes de procesos aleatorios estacionarios.....
- 3.12 Funciones de correlación cruzadas de respuesta para sistemas lineales.....
- 3.13 Respuestas de sistemas de varios grados de libertad a excitaciones aleatorias.....

CAPITULO CUATRO

4. APLICACIONES.

- 4.1. Introducción a la interacción suelo-estructura.....
- 4.2. El fenómeno de la interacción en sistemas lineales...
- 4.3. Rigideces de los elementos elásticos equivalentes...

5. CONCLUSIONES.....

6. BIBLIOGRAFIA.....

CAPITULO UNO.

INTRODUCCION

En la actualidad, la Ciencia de los Sistemas ha ampliado su campo de aplicación a numerosas áreas de la ingeniería. La Teoría General de los Sistemas, como conjunto teórico multidisciplinario, ha hecho sumamente popular el concepto de *Sistema*. (Ochoa 1985) El Enfoque de Sistemas, o Teoría General de Sistemas Aplicada, es un punto de partida en el cual se asocia el concepto de Sistema al fenómeno observado con el objeto de captar sus peculiaridades y poder modelarlo u optimizarlo.

El generalista de sistemas, echa mano de diferentes métodos y técnicas en esa labor. La Investigación de Operaciones, como conjunto de herramientas útiles en el proceso de modelar y optimizar, ha cobrado gran importancia en las últimas décadas.

Dentro del campo de la ingeniería, la ingeniería civil ha estudiado multitud de eventos aleatorios que afectan las construcciones civiles. Ha sido preocupación importante de los ingenieros civiles considerar para el diseño económico y confiable, las características aleatorias de la naturaleza. Los sistemas físicos responden también en forma paritular. Para poder elaborar un diseño óptimo, debemos modelar aleatoriamente. Precisamente, la Investigación de Operaciones proporciona muchos elementos para dicho estudio aleatorio.

La mayoría de los sistemas en ingeniería civil, como construcciones mecánicas, marinas y aeronáuticas son estudiados con *modelos deterministas*; sin embargo, el *modelado aleatorio* tiene la ventaja de ser más realista.

Ejemplos de sistemas aleatorios son: vibraciones no lineales, turbulencias, sismos, olas y fatiga en elementos estructurales. La modelación matemática representa las acciones debidas a las sollicitaciones o fuerzas usuales; la respuesta a los modelos son soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias donde se tienen N grados de libertad finitos. Esto es impreciso para ciertas acciones, ya

que las funciones son aleatorias, por ejemplo, la acción del viento sobre las estructuras, donde la modelación aleatoria es físicamente admisible. Otro ejemplo es el oleaje, fenómeno por esencia aleatorio.

Como puede verse, el estudio de la mecánica aleatoria y su aplicación a sistemas de ingeniería civil, representa una aproximación al conocimiento de los fenómenos aleatorios para poder aplicar la modelación a un diseño óptimo de ingeniería.

El objetivo del presente trabajo es presentar, como una primera aproximación, los principios de la Mecánica Aleatoria, y las generalidades de la aplicación de los procesos estocásticos a la modelización; se considera entonces, la respuesta de los sistemas físicos a sollicitaciones aleatorias. Es pues, un nexo entre las técnicas matemáticas de la Investigación de Operaciones y la Ingeniería Civil propiamente dicha.

Un concepto básico en el estudio de fenómenos aleatorios en el campo de la ingeniería, es el de *MECANICA ALEATORIA*. Dentro de su estudio, por ejemplo, es importante el concepto de *fuerza oscilatoria aleatoria* definida para todo tiempo.

Los puntos principales que se abordarán en el trabajo, serán:

- a. una introducción a los aspectos matemáticos, estadísticos y probabilísticos que son necesarios para abordar el tratamiento aleatorio a problemas de ingeniería.
- b. un estudio de las oscilaciones aleatorias con la deducción de las ecuaciones que se usarán posteriormente.
- c. un ejemplo sobre la interacción suelo-estructura usando los conceptos descritos anteriormente, y su referencia a los reglamentos de construcción existentes.

CAPITULO SEGUNDO

ANTECEDENTES TEORICOS

1. ALGUNAS HERRAMIENTAS MATEMATICAS.

El presente capítulo tiene por objetivo presentar ciertas nociones matemáticas y repasar ciertos enunciados de la teoría de la medida.

1.1 Algebra lineal

\mathbb{R} = conjunto de los números reales

\mathbb{C} = conjunto de los números complejos

$K = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}$

Un espacio vectorial X , se llama un espacio vectorial real si $K = \mathbb{R}$ y se llama un espacio vectorial complejo, si $K = \mathbb{C}$. Se dice simplemente "un espacio vectorial", si K se define claramente en el contexto o bien, si es indiferente que K sea \mathbb{R} ó \mathbb{C} .

\mathbb{C}^X define la complejificación de un espacio vectorial real X . Por ejemplo, $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$. Si Y_1, Y_2 son dos subespacios vectoriales del espacio vectorial X , entonces:

$$Y_1 + Y_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in Y_1, x_2 \in Y_2\}$$

Una base algebraica de un espacio vectorial X , es un sistema $\{e_i\}$ de vectores $e_i \in X$, $i \in I$, tal que todo $x \in X$ puede escribirse como una combinación lineal finita de los e_i . El número de elementos de I se llama la dimensión de X .

El producto escalar de \mathbb{C}^n es el producto interno

El producto escalar de \mathbb{R}^n es el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

El espacio cociente $X / \text{Ker } l$ (un mero espacio vectorial), \bar{x} es el cociente de x por la relación de equivalencia $\{x \sim x' \Leftrightarrow x - x' \in \text{Ker } l\}$. (relación de equivalencia); este conjunto cociente es un espacio vectorial. La aplicación $\sigma : x \rightarrow \text{clase de } x = \bar{x} : X \rightarrow X / \text{ker } l$ se llama la **suryección canónica** σ . Del mismo modo, la aplicación $i : y \rightarrow y'$ de la imagen de l en Y , es la **inyección canónica** de la $\text{Im } l$ en Y . Finalmente, l es el producto de tres aplicaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma & & i & \\ X & \xrightarrow{\quad} & X / \text{ker } l & \xrightarrow{\quad} & \text{Im } l & \xrightarrow{\quad} & Y \\ x & \xrightarrow{\quad} & \bar{x} & \xrightarrow{\quad} & l(x) & \xrightarrow{\quad} & l(x) \end{array}$$

Este diagrama se llama la **descomposición canónica** de la aplicación lineal l . De una manera general, si X y Y son dos espacios vectoriales, entonces:

$L(X, Y)$ es el espacio de todas las aplicaciones lineales $X \rightarrow Y$

$X^* = L(X, K)$ como es el dual algebraico de X .

Una aplicación lineal biyectiva es llamada un **isomorfismo** de espacio vectorial.

3.1.2. Aplicaciones multilineales. Producto tensorial.

Sean X_1, \dots, X_n y Y unos espacios vectoriales, se dice que una aplicación f es:

$$f : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow Y$$

es **multilineal** si $f(x_1, \dots, x_i + \lambda x'_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)$ para todo $\lambda \in K$ y $x_i, x'_i \in X_i$.
 Si $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$ para algún i , se dice que f es **degenerada**.
 Si $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \neq 0$ para todo i , se dice que f es **no degenerada**.
 El espacio de todas las aplicaciones multilineales de $X_1 \times \dots \times X_n$ en Y se denota por $L_n(X_1, \dots, X_n, Y)$.

El producto tensorial de X_1, \dots, X_n es el espacio vectorial $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ que es el espacio de todas las aplicaciones multilineales de $X_1 \times \dots \times X_n$ en K .
 Si $X_1 = \dots = X_n = X$, se denota por $X^{\otimes n}$ el espacio vectorial $X \otimes \dots \otimes X$.

El producto tensorial de X y Y es el espacio vectorial $X \otimes Y$ que es el espacio de todas las aplicaciones bilineales de $X \times Y$ en K .
 Si $X = Y = K$, se denota por $K^{\otimes n}$ el espacio vectorial $K \otimes \dots \otimes K$.

los puntos designan la dualidad.

1.2.2. Ejemplos de Espacios en Dualidad.

a) Uno puede tomar: $X' = X^*$

b) Un espacio vectorial real X con un producto escalar, es la pareja formada por un espacio vectorial real X y por una aplicación bilineal $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, llamada *producto escalar* y se denota $\langle x, y \rangle$; es la aplicación tal que:

$$\forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\forall x \in X \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \Rightarrow x = 0$$

en este caso: $X' = X$

c) Sea J un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $\mathcal{C}^\infty(J)$ el espacio de aplicaciones \mathcal{C}^∞ (es decir, infinitamente derivables) de J en \mathbb{C} que son nulas fuera de un compacto de J . Un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es una colección de n enteros $\alpha_i \geq 0$. La longitud de α está definida por: $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, llamando $x = (x_1, \dots, x_n)$ al punto genérico de \mathbb{R}^n , se escribe:

$$(\partial_1)^{\alpha_1} (\partial_2)^{\alpha_2} \dots (\partial_n)^{\alpha_n}$$

$$\text{con } \partial_j = \partial / \partial x_j$$

Se dice que una sucesión (φ_j) de $\mathcal{C}^\infty(J)$ converge a una función φ si los φ_j son nulas fuera de una región compacta de J y si para todo multi-índice α :

$$\| \partial^\alpha \varphi_j \|_\infty = \max_{x \in J} | \partial^\alpha \varphi_j(x) | \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty$$

Imponiendo esta propiedad por el símbolo: $\varphi_j \rightarrow \varphi$

El espacio $\mathcal{C}^\infty(J)$ de distribuciones sobre J se define como el espacio de formas lineales T sobre $\mathcal{C}^\infty(J)$, tales que:

$$\langle \phi_j \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \langle T, \phi_j \rangle \rightarrow 0$$

entonces $D(\phi_j)$ y $D'(\phi_j)$ son espacios en dualidad.

d) De la misma forma, $\phi(\mathbb{R}^n)$ y $\phi'(\mathbb{R}^n)$ son dos espacios vectoriales en dualidad.

1.2.3. Ortogonalidad de un espacio vectorial X_α de X

Los espacios vectoriales X y X' estando en dualidad, el ortogonal de X' de un subespacio vectorial X_α en X se define por:

$$X_\alpha^\perp = \{ u \in X', \forall x \in X_\alpha, \langle x, u \rangle = 0 \}$$

es un subespacio vectorial de X' . Como X y X' juegan dos roles simétricos, uno puede definir de la misma forma, el ortogonal en X de un subespacio vectorial de X' .

1.2.4. Aplicaciones Lineales Transponibles.

a) Sean X y Y dos espacios vectoriales y sea $l: X \rightarrow Y$ una aplicación lineal. Uno define que la transpuesta algebraica $l^t: Y' \rightarrow X'$ se define por:

$$\forall v \in Y' \quad l^t(v) = v \circ l \quad (\text{composición})$$

o dicho de otra forma:

$$\forall x \in X, \forall v \in Y' \quad \langle x, l^t(v) \rangle = \langle l(x), v \rangle$$

b) Sean $X = X'$ y $Y = Y'$ dos espacios de espacios vectoriales en dualidad y sea l una aplicación lineal de $X \rightarrow Y$. Uno dice que l es una transposición de Y a X' o simplemente que l es una transposición si l^t es la l en X . La aplicación $l \rightarrow l^t$ inducida por l es llamada transposición de l .

1.2.5. Propiedades de la Transposición

1. Si l admite una transposición $l^t: Y' \rightarrow X'$ una puede definir a l^t como la transpuesta de l .

2. Si l es simétrica (es decir $l = l^t$) de un espacio vectorial en dualidad, entonces l mismo que se puede transponer $l^t = l$.

$$l = l^t \Rightarrow l = l^t \Rightarrow l = l$$

$$l^t = l$$

entonces m o l se puede transponer y su transpuesta es l' o m' .
 c) Tenemos $(I_m - l)^{-1} = \text{Ker } l'$. En efecto:

$$\begin{aligned} (I_m - l)^{-1} &= \{ n \in Y' : \forall x \in X, \langle l(x), n \rangle = 0 \} \\ &= \{ n \in Y' : \forall x \in X, \langle x, l'(n) \rangle = 0 \} \\ &= \{ n \in Y' : l'(n) = 0 \} = \text{ker } l' \end{aligned}$$

d) En particular: $((I_m - l)^{-1} = 0) \Rightarrow l'$ es inyectiva.

e) Sea X_α un subespacio de X , en dualidad con X'_α . Para toda $x \in X_\alpha$, $\xi \in X'$, tenemos:

$$\langle \xi, x \rangle = \langle \xi, i_\alpha x \rangle$$

ó ξ' se designa la imagen de ξ para la subyección canónica.

$$s_\alpha : X' \rightarrow X'_\alpha = X' / X_\alpha^\perp, \text{ por tanto } \xi' = \xi + X_\alpha^\perp$$

Se ve que: $\langle \xi', x \rangle = \langle \xi, i_\alpha x \rangle = \langle \xi', x \rangle$

Entonces, $\langle \xi', x \rangle$ es una forma bilineal sobre $X'_\alpha \times X_\alpha$ se ve fácilmente que es una dualidad. Además:

$$\forall x \in X_\alpha, \forall \xi \in X', \langle \xi, i_\alpha x \rangle = \langle \xi', x \rangle = \langle s_\alpha(\xi), x \rangle$$

donde la transpuesta de i_α es s_α y se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & X \\ & & \uparrow s_\alpha \\ X'_\alpha & \xrightarrow{s_\alpha} & X' \end{array}$$

... se llama l' a la aplicación lineal transpuesta de l .

... se llama l a la aplicación lineal transpuesta de l' .

... se llama l a la aplicación lineal transpuesta de l' .

a) La aplicaci3n-lineal siguiente:

$$C^\infty(J) \xrightarrow{\alpha} D'(J)$$

$$f \longmapsto (\rho \longmapsto \int f \rho \, dx)$$

es inyectiva. Se denota $C^\infty(J) \, dx$ a la imagen de esta aplicaci3n, y se identifica sistem3ticamente una funci3n $f \in C^\infty(J)$ con la distribuci3n $f \, dx$ que la define.

b) Se puede definir para toda k fija $\in \{1, \dots, n\}$ el operador $T \rightarrow \partial_k T$ de derivaci3n de las distribuciones con relaci3n a la k 'esima coordenada, de manera de prolongar la aplicaci3n $\alpha : f \, dx \mapsto (\partial_k f)$ en $C^\infty(J)$. Integrando por partes, tenemos que para toda funci3n de prueba ϕ :

$$\langle (\partial_k f) \, dx, \phi \rangle = \langle f \, dx, -\partial_k \phi \rangle$$

entonces la aplicaci3n $l : \phi \mapsto -\partial_k \phi$ de $D(J)$ es transponible. En efecto:

$$\langle l_\phi(T), \phi \rangle = \langle T, l\phi \rangle = \langle T, -\partial_k \phi \rangle$$

o $(\phi_j) \rightarrow 0 \Rightarrow (-\partial_k \phi_j) \rightarrow 0$ por tanto, utilizando la ecuaci3n anterior, tenemos $(\phi_j) \rightarrow 0 \Rightarrow \langle l_\phi(T), \phi_j \rangle \rightarrow 0$ siendo probado que $l_\phi(T)$ es una distribuci3n. Finalmente, se prolonga α a la transpuesta l . Se define de la misma forma todos los operadores sobre las distribuciones.

1.2.6. Transformaci3n de Fourier para las funciones

Para x y $u \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\langle x, u \rangle = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

Esto define una bilinealidad sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, para toda funci3n f sobre \mathbb{R}^n tal que la integral $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx$ est3 definida, la transformaci3n de Fourier de f es $\hat{f}(x)$ es la funci3n siguiente

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i\langle u, x \rangle} \, du$$

definida sobre \mathbb{R}^n $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

Se pueden demostrar las propiedades siguientes:

1) Si tenemos $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$

entonces,

$$f^{\wedge}(u) = f^{\wedge}_1(u_1) f^{\wedge}_2(u_2) \dots f^{\wedge}_n(u_n).$$

ó $f^{\wedge}_j(u_j)$ es la Transformada de Fourier en una variable:

$$f^{\wedge}_j(u_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(t) e^{-it u_j} dt.$$

Esta condición se cumple si las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_j|$ están definidas.

b) Si se tiene dos funciones f y g , definidas sobre \mathbb{R}^n tales que $f * g$ se define por la fórmula:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy.$$

y tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx, \int_{\mathbb{R}^n} |g| dx, \int_{\mathbb{R}^n} |f * g| dx$$

están definidas, entonces:

$$(f * g)^{\wedge}(u) = f^{\wedge}(u) g^{\wedge}(u).$$

c) La aplicación $f \rightarrow f^{\wedge}$ induce una aplicación lineal biyectiva $\phi \rightarrow \phi$ de $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $(\phi_k)_k \rightarrow 0 \Leftrightarrow (\phi^{\wedge}_k)_k \rightarrow 0$. La fórmula inversa se escribe $\phi = \mathbb{F}^{-1} \phi$ con:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\wedge}(u) e^{i(u,x)} du.$$

d) una inversión de integración fuertemente, para las funciones ϕ, ψ si:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \psi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\wedge} \psi^{\wedge} dx.$$

puede substituirse, para $f, g \in \mathbb{F}$ o más generalmente, por cualquier número de integrales convergentes.

1.7. Transformación de funciones de varias variables. Teoremas

La relación de la sección anterior establece:

$$\forall \varphi, \phi \in L', \langle \varphi, \phi dx \rangle = \langle \varphi, \phi dx \rangle$$

Ello significa que la transformada del operador $\alpha: \varphi \rightarrow \varphi^*$ de S es un operador lineal de S^* que incluye ϕdx en ϕdx , para toda $\phi \in S$. O si se prefiere, que α es transponible en un operador α' de S' . Además, α es biyectiva y α^{-1} es transponible en un operador de S' .

En consecuencia, α' es una biyección de S' con inversa $(\alpha^{-1})'$. Se "prolonga" la Transformada de Fourier usualmente en términos $\mathbb{F}T = \alpha'(T)$, por tanto, $T \in S'$ es:

$$\forall \varphi \in L, \langle \mathbb{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathbb{F}\varphi \rangle,$$

y usando una fórmula para la inversa $(\alpha^{-1})'$ llamada tradicionalmente \mathbb{F}^{-1} :

$$\forall \varphi \in S, \langle \mathbb{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathbb{F}^{-1}\varphi \rangle,$$

por ejemplo, $\langle \mathbb{F}(\delta_0), \varphi \rangle = \langle \delta_0, \mathbb{F}\varphi \rangle = \varphi(0) = \int \varphi(x) dx$. Por consecuencia, $\mathbb{F}\delta_0 = 1$ dx se puede demostrar que $\mathbb{F}(\delta_0, T) = -1$ $0, T(0)$, etc.

1.1.5. Transformación de Laplace

Si $f(t)$ es una función definida en \mathbb{R}_+ , y si para todo σ y tal que la integral $\int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma t} dt$ converge, se define la Transformación de Laplace $\mathbb{L}f$ por $\mathbb{L}f = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$, $\sigma = \text{Re } p > 0$.

$$\mathbb{L}f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

Esta función es holomorfa en el plano complejo $\text{Re } p > 0$. Una función $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ se llama función de tipo σ si $\int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$ para $\sigma > \sigma_0$ y la σ_0 se llama el tipo de f .

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-pt} dt$$

La integral $\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-pt} dt$ es S' por tanto, la transformada de Laplace de f se prolonga a S' por una cierta función $\mathbb{L}f$.

Para $T \in S'$ se define $\mathbb{L}T$ como la transformada de Laplace de T .

$$\mathbb{L}T = \int_0^\infty T(t) e^{-pt} dt$$

Los resultados de este párrafo muestran que las propiedades son en efecto, propiedades de continuidad.

Las nociones topológicas son a veces útiles cuando aluden a fenómenos aleatorios, en relación a la noción de medida (vease el párrafo siguiente). En efecto, para definir una repartición de masas en un espacio funcional X (o sobre X'), se debe definir la familia \mathcal{B} de las partes medibles de este espacio; \mathcal{B} se llama una tribu.

Frecuentemente, \mathcal{B} contiene una familia más pequeña de partes "cerradas para una cierta topología". Es más, la repartición de masa es una propiedad de regulación interior por ciertas partes formadas compactadamente conviene no utilizar dichas familias, y utilizar más generalmente las nociones topológicas.

Se utilizan así, las topologías del espacio vectorial que son definidas por las familias de semi-normas. El espacio se dice normado si está provisto de una sola norma. Un espacio vectorial normado completo, se llama espacio de Banach.

1.3.1. Espacio de Hilbert

Sea X un espacio vectorial real (resp. complejo) provisto de un producto escalar denotado (x, y) (resp. denotado $\langle x, y \rangle$). Así, la aplicación siguiente es una norma de X :

$$\|x\| = \begin{cases} (x, x)^{1/2} & \text{si } X \text{ es real} \\ \langle x, x \rangle^{1/2} & \text{si } X \text{ es complejo} \end{cases}$$

El X formado de este modo se denomina *espacio de Hilbert*.

1.4. Espacios de Hilbert asociados a la teoría de la medida y de la integración

Sea un espacio Ω y \mathcal{F} una familia de subconjuntos de Ω que forman una σ -álgebra. Sea μ una medida positiva finita sobre \mathcal{F} . Sea $L^1(\mu)$ el espacio de las funciones reales (o complejas) medibles y integrables respecto a μ . Este espacio es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx)$.

igual a $t^{-1/2}$ para $0 < t \leq 1$ no es integrable en el sentido de Riemann, y la integral:

$$\int_0^1 t^{-1/2} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 t^{-1/2} dt$$

que es solamente una Integral de Riemann generalizada.

La norma natural sobre espacio E de funciones integrables f sobre la parte P es la norma $\|f\|_{\infty} = \sup |f(x)|$, la norma es:

$$\|f\| = \int_P |f(x)| dx$$

pero, provisto de esta norma, el espacio E no está completo.

- Son numerosas las aplicaciones en física en las que se recurre a espacios de Hilbert. Por consecuencia, se introduce sobre el espacio vectorial de funciones cuadráticas de integrales en P, el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_P f(x) g(x) dx$$

y la norma correspondiente $\langle f, f \rangle^{1/2} = \|f\|_2$. La teoría elemental no nos permite identificar con "funciones", los elementos complementarios de E para la norma $\|f\|_2$.

- Sea f una aplicación de P en R, que sea nula salvo en una parte densoariable D de P. Por ejemplo, se pueda tomar el conjunto D de puntos de P donde todas las coordenadas son racionales. Entonces $f \in E$, mientras que "físicamente" f es integrable, lo que implica que la función que se tiene que recurrir a una función (con un significado)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_P f(x) g(x) dx = \int_P f(x) g(x) dx$$

en el sentido de Lebesgue, es la función f, que es integrable en el sentido de Lebesgue, y que es nula salvo en una parte densoariable D de P. En consecuencia, la función f es integrable en el sentido de Lebesgue, y que es nula salvo en una parte densoariable D de P.

En consecuencia, la función f es integrable en el sentido de Lebesgue, y que es nula salvo en una parte densoariable D de P. En consecuencia, la función f es integrable en el sentido de Lebesgue, y que es nula salvo en una parte densoariable D de P.

lo que significa el símbolo $\int_X f(x) dm(x)$.

Es necesario retomar enteramente la cuestión de la integración. De hecho, la idea de partida es la misma, pero debe generalizarse. Más precisamente, si se escribe:

$$\int_P f(x) dx = \sum_K f(x) m(P^K),$$

con $m(P^K) = |P^K|$, la condición inicial de la teoría es una "repartición de masas positivas sobre el conjunto conjunto X ". Matemáticamente, esta repartición está definida por una posibilidad de afectar a ciertas partes A de X , un número positivo $m(A)$, de manera que la aplicación $A \rightarrow m(A)$ sea aditiva. La propiedad aditiva denumerable es nueva en la Teoría de Lebesgue.

1.4.1. Algebra de Eoolle y Tribus

Una familia \mathcal{B} de partes de un conjunto X es una tribu si \mathcal{B} tiene las siguientes propiedades:

(A1) \mathcal{B} contiene \emptyset y X .

(A2) \mathcal{B} es estable por paso al complementario:

$$A \in \mathcal{B} \rightarrow [A = X \setminus A] \in \mathcal{B}$$

(A3) \mathcal{B} es estable para una reunión numerable, es decir que si A_1, A_2, \dots es una familia numerable de elementos de \mathcal{B} , entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

Una familia \mathcal{B} de partes de X es un Algebra de Eoolle si tiene las propiedades (A1), (A2) y (A3). \mathcal{B} es estable para una reunión numerable de partes de X que si A_1, A_2, \dots es una familia numerable de elementos de \mathcal{B} , entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

Resultado: \mathcal{B} es una algebra de Eoolle si y solo si \mathcal{B} es estable para una reunión numerable de partes de X que si A_1, A_2, \dots es una familia numerable de elementos de \mathcal{B} , entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

Definición:

- a) El conjunto \mathcal{a} de partes de $X = \mathbb{R}$ que son reuniones finitas de partes del tipo $] -\infty, \gamma[$, $[\alpha, \beta]$ y $]\gamma, +\infty[$ es una álgebra de Boole.
- b) Sea $I = \{a, b\}$ un intervalo acotado de \mathbb{R} . Entonces el conjunto \mathcal{a}_I de las trazas sobre I de los elementos de \mathcal{a} , es una álgebra de Boole.
- c) Sobre $X = \mathbb{R}^n$, el conjunto \mathcal{a}_n de partes que son reuniones finitas de partes $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ donde las A_i pertenecen a \mathcal{a}_I , es una álgebra de Boole.
- d) Naturalmente, para todo conjunto X , toda tribu \mathbb{B} sobre X está contenida en la tribu de todas las partes de X , y \mathbb{B} contiene la tribu de dos elementos (\emptyset, X) .

1.4.2. Conjunto generado por una familia de partes.

a) Sea F una familia cualquiera de partes de un conjunto fijo X . Existen tribus \mathbb{B} conteniendo a F ; por ejemplo, la familia de todas las partes de X . La intersección \mathbb{B} de todas las tribus es una tribu llamada *la tribu generada por F* .

b) Por ejemplo, la tribu boreliana \mathbb{B}_0 de un espacio topológico X es la tribu generada por los abiertos. Es por tanto la tribu más pequeña que contiene los abiertos de X .

c) Mostremos que la tribu boreliana \mathbb{B}_0 de \mathbb{R} coincide con la tribu \mathbb{B} generada por la álgebra de Boole \mathcal{a} descrita anteriormente. Notese que \mathbb{B}_0 es también generada por los cerrados. Los intervalos de tipo $] -\infty, \gamma[$, $[\alpha, \beta]$ y $]\gamma, +\infty[$ son las reuniones nombradas de intervalos cerrados con $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0$. Recíprocamente, todo intervalo abierto $]\alpha, \beta[$ es la reunión de intervalos $]\alpha + \frac{1}{n}, \beta[$ $n \in \mathbb{N}$. Como \mathbb{B}_0 está contenido dentro de la tribu \mathbb{B} generada por \mathcal{a} , resulta que $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0$.

1.4.3. Distribución en una tribu boreliana

Sea \mathcal{a} una álgebra de Boole en un conjunto X . Sea \mathbb{B} la tribu generada por \mathcal{a} . Sea \mathbb{B}_0 la tribu boreliana de X . Sea \mathbb{B}_1 la tribu generada por \mathbb{B}_0 . Sea \mathbb{B}_2 la tribu generada por \mathbb{B}_1 . Sea \mathbb{B}_3 la tribu generada por \mathbb{B}_2 . Sea \mathbb{B}_4 la tribu generada por \mathbb{B}_3 . Sea \mathbb{B}_5 la tribu generada por \mathbb{B}_4 . Sea \mathbb{B}_6 la tribu generada por \mathbb{B}_5 . Sea \mathbb{B}_7 la tribu generada por \mathbb{B}_6 . Sea \mathbb{B}_8 la tribu generada por \mathbb{B}_7 . Sea \mathbb{B}_9 la tribu generada por \mathbb{B}_8 . Sea \mathbb{B}_{10} la tribu generada por \mathbb{B}_9 . Sea \mathbb{B}_{11} la tribu generada por \mathbb{B}_{10} . Sea \mathbb{B}_{12} la tribu generada por \mathbb{B}_{11} . Sea \mathbb{B}_{13} la tribu generada por \mathbb{B}_{12} . Sea \mathbb{B}_{14} la tribu generada por \mathbb{B}_{13} . Sea \mathbb{B}_{15} la tribu generada por \mathbb{B}_{14} . Sea \mathbb{B}_{16} la tribu generada por \mathbb{B}_{15} . Sea \mathbb{B}_{17} la tribu generada por \mathbb{B}_{16} . Sea \mathbb{B}_{18} la tribu generada por \mathbb{B}_{17} . Sea \mathbb{B}_{19} la tribu generada por \mathbb{B}_{18} . Sea \mathbb{B}_{20} la tribu generada por \mathbb{B}_{19} . Sea \mathbb{B}_{21} la tribu generada por \mathbb{B}_{20} . Sea \mathbb{B}_{22} la tribu generada por \mathbb{B}_{21} . Sea \mathbb{B}_{23} la tribu generada por \mathbb{B}_{22} . Sea \mathbb{B}_{24} la tribu generada por \mathbb{B}_{23} . Sea \mathbb{B}_{25} la tribu generada por \mathbb{B}_{24} . Sea \mathbb{B}_{26} la tribu generada por \mathbb{B}_{25} . Sea \mathbb{B}_{27} la tribu generada por \mathbb{B}_{26} . Sea \mathbb{B}_{28} la tribu generada por \mathbb{B}_{27} . Sea \mathbb{B}_{29} la tribu generada por \mathbb{B}_{28} . Sea \mathbb{B}_{30} la tribu generada por \mathbb{B}_{29} . Sea \mathbb{B}_{31} la tribu generada por \mathbb{B}_{30} . Sea \mathbb{B}_{32} la tribu generada por \mathbb{B}_{31} . Sea \mathbb{B}_{33} la tribu generada por \mathbb{B}_{32} . Sea \mathbb{B}_{34} la tribu generada por \mathbb{B}_{33} . Sea \mathbb{B}_{35} la tribu generada por \mathbb{B}_{34} . Sea \mathbb{B}_{36} la tribu generada por \mathbb{B}_{35} . Sea \mathbb{B}_{37} la tribu generada por \mathbb{B}_{36} . Sea \mathbb{B}_{38} la tribu generada por \mathbb{B}_{37} . Sea \mathbb{B}_{39} la tribu generada por \mathbb{B}_{38} . Sea \mathbb{B}_{40} la tribu generada por \mathbb{B}_{39} . Sea \mathbb{B}_{41} la tribu generada por \mathbb{B}_{40} . Sea \mathbb{B}_{42} la tribu generada por \mathbb{B}_{41} . Sea \mathbb{B}_{43} la tribu generada por \mathbb{B}_{42} . Sea \mathbb{B}_{44} la tribu generada por \mathbb{B}_{43} . Sea \mathbb{B}_{45} la tribu generada por \mathbb{B}_{44} . Sea \mathbb{B}_{46} la tribu generada por \mathbb{B}_{45} . Sea \mathbb{B}_{47} la tribu generada por \mathbb{B}_{46} . Sea \mathbb{B}_{48} la tribu generada por \mathbb{B}_{47} . Sea \mathbb{B}_{49} la tribu generada por \mathbb{B}_{48} . Sea \mathbb{B}_{50} la tribu generada por \mathbb{B}_{49} . Sea \mathbb{B}_{51} la tribu generada por \mathbb{B}_{50} . Sea \mathbb{B}_{52} la tribu generada por \mathbb{B}_{51} . Sea \mathbb{B}_{53} la tribu generada por \mathbb{B}_{52} . Sea \mathbb{B}_{54} la tribu generada por \mathbb{B}_{53} . Sea \mathbb{B}_{55} la tribu generada por \mathbb{B}_{54} . Sea \mathbb{B}_{56} la tribu generada por \mathbb{B}_{55} . Sea \mathbb{B}_{57} la tribu generada por \mathbb{B}_{56} . Sea \mathbb{B}_{58} la tribu generada por \mathbb{B}_{57} . Sea \mathbb{B}_{59} la tribu generada por \mathbb{B}_{58} . Sea \mathbb{B}_{60} la tribu generada por \mathbb{B}_{59} . Sea \mathbb{B}_{61} la tribu generada por \mathbb{B}_{60} . Sea \mathbb{B}_{62} la tribu generada por \mathbb{B}_{61} . Sea \mathbb{B}_{63} la tribu generada por \mathbb{B}_{62} . Sea \mathbb{B}_{64} la tribu generada por \mathbb{B}_{63} . Sea \mathbb{B}_{65} la tribu generada por \mathbb{B}_{64} . Sea \mathbb{B}_{66} la tribu generada por \mathbb{B}_{65} . Sea \mathbb{B}_{67} la tribu generada por \mathbb{B}_{66} . Sea \mathbb{B}_{68} la tribu generada por \mathbb{B}_{67} . Sea \mathbb{B}_{69} la tribu generada por \mathbb{B}_{68} . Sea \mathbb{B}_{70} la tribu generada por \mathbb{B}_{69} . Sea \mathbb{B}_{71} la tribu generada por \mathbb{B}_{70} . Sea \mathbb{B}_{72} la tribu generada por \mathbb{B}_{71} . Sea \mathbb{B}_{73} la tribu generada por \mathbb{B}_{72} . Sea \mathbb{B}_{74} la tribu generada por \mathbb{B}_{73} . Sea \mathbb{B}_{75} la tribu generada por \mathbb{B}_{74} . Sea \mathbb{B}_{76} la tribu generada por \mathbb{B}_{75} . Sea \mathbb{B}_{77} la tribu generada por \mathbb{B}_{76} . Sea \mathbb{B}_{78} la tribu generada por \mathbb{B}_{77} . Sea \mathbb{B}_{79} la tribu generada por \mathbb{B}_{78} . Sea \mathbb{B}_{80} la tribu generada por \mathbb{B}_{79} . Sea \mathbb{B}_{81} la tribu generada por \mathbb{B}_{80} . Sea \mathbb{B}_{82} la tribu generada por \mathbb{B}_{81} . Sea \mathbb{B}_{83} la tribu generada por \mathbb{B}_{82} . Sea \mathbb{B}_{84} la tribu generada por \mathbb{B}_{83} . Sea \mathbb{B}_{85} la tribu generada por \mathbb{B}_{84} . Sea \mathbb{B}_{86} la tribu generada por \mathbb{B}_{85} . Sea \mathbb{B}_{87} la tribu generada por \mathbb{B}_{86} . Sea \mathbb{B}_{88} la tribu generada por \mathbb{B}_{87} . Sea \mathbb{B}_{89} la tribu generada por \mathbb{B}_{88} . Sea \mathbb{B}_{90} la tribu generada por \mathbb{B}_{89} . Sea \mathbb{B}_{91} la tribu generada por \mathbb{B}_{90} . Sea \mathbb{B}_{92} la tribu generada por \mathbb{B}_{91} . Sea \mathbb{B}_{93} la tribu generada por \mathbb{B}_{92} . Sea \mathbb{B}_{94} la tribu generada por \mathbb{B}_{93} . Sea \mathbb{B}_{95} la tribu generada por \mathbb{B}_{94} . Sea \mathbb{B}_{96} la tribu generada por \mathbb{B}_{95} . Sea \mathbb{B}_{97} la tribu generada por \mathbb{B}_{96} . Sea \mathbb{B}_{98} la tribu generada por \mathbb{B}_{97} . Sea \mathbb{B}_{99} la tribu generada por \mathbb{B}_{98} . Sea \mathbb{B}_{100} la tribu generada por \mathbb{B}_{99} .

$$m \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Para toda $A \in \mathcal{A}$, el número $m(A)$ es llamada la *medida* de A . Si $m(X) < \infty$, se dice que m es una *medida acotada*. Si $m(X) = 1$, se dice que m es una *medida de probabilidad* sobre (X, \mathcal{A}) (o simplemente una probabilidad). Si $m(X) = \infty$, se supondrá siempre que X es reunión de una serie de elementos de \mathcal{A} , de medida finita.

Nosotros admitimos que, dadas estas condiciones, toda medida positiva de \mathcal{A} , se prolonga de una manera única en una medida positiva sobre la tribu \mathcal{B} generada por \mathcal{A} .

Si \mathcal{B} es una tribu de partes de un conjunto X , si m es una medida positiva de \mathcal{B} , la tripleta (X, \mathcal{B}, m) se llame un *espacio medido*. Si $m(X) = 1$ se dice que (X, \mathcal{B}, m) es un *espacio probabilitado*.

1.4.4. Medida inducida.

Sea \mathcal{B} una tribu de partes de un conjunto X , y sea m una medida positiva sobre (X, \mathcal{B}) . Para toda parte B fija de X , perteneciente a la tribu \mathcal{B} , la restricción de m al conjunto B de partes del tipo $A \cap B$ donde A describe \mathcal{B} , es una medida positiva m_B sobre (B, \mathcal{B}_B) .

Se observa que estas definiciones nos permiten no solamente relacionar la medida de B involucrando en la teoría elemental con la integración, sino también de otras medidas involucradas en teoría de conjuntos.

1.5. Medida en los Reales

Sea m una medida positiva sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ involucrando una medida sobre \mathbb{R} . Entonces se dice que m es una medida de Lebesgue si m es una medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} .

Se sabe que una medida m sobre \mathbb{R} es una medida de Lebesgue si y sólo si m es una medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} .

La medida de Lebesgue m sobre \mathbb{R} es una medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} .

$\forall t_0$ positiva, $\forall (t_n)_{n \geq 1}$, $G(t_n) + G(t_0)$
 puesto que, siendo m σ -aditiva, se tiene:
 $G(t_0) = m([0, t_0]) = \lim_{n \rightarrow \infty} m([0, t_n]) = G(t_n)$

se puede demostrar lo recíproco.

Así, la medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$ que interviene en la teoría elemental de la integración está caracterizada por la función $G(t) = t$. Esta medida es denotada dt . La medida inducida sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es también denotada dt .

b) En el caso particular de una medida de probabilidad m sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$, $G(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t)$ es finito. En este caso, se prefiere caracterizar m por su función de repartición $F_m(t) = G(t) - G(-\infty)$. Por tanto:

$$F_m(t) = m(t) - \omega, t \in \mathbb{R}$$

Las funciones de repartición son así caracterizadas. Para que una función F sea la función de repartición de una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$, es necesario y suficiente que $F(t)$ sea creciente, continua y tienda a 0 si $t \rightarrow -\infty$, y tendiendo a 1 si $t \rightarrow +\infty$.
 -Si existe una función φ continua tal que:

$$\forall [\alpha, \beta] \in]-\infty, +\infty[\quad F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt$$

se dice que φ es la *densidad* de la distribución m , y se escribe $m \ll \varphi(t) dt$.

Por ejemplo, la medida gaussiana μ de media $\mu \in \mathbb{R}$ y de varianza $\sigma > 0$ es dada por densidad:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

En el caso de la medida de probabilidad m en \mathbb{R} , se dice que φ es la *densidad*.

La medida μ tiene δ_a como densidad en el punto $a \in \mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \delta_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a \end{cases}$$

Intuitivamente, es una masa igual a uno, concentrada en un punto α . La masa $\lambda > 0$, concentrada en un punto α , es denotada por $\lambda \delta_\alpha$. Asimismo, cualquiera que sean los puntos $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ de \mathbb{R} , y los números finitos, es posible definir: $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \delta_{\alpha_n}$

- La medida de Poisson de media $\lambda > 0$ es:

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$$

Es una medida de probabilidad puesto que $e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 1$

1.4.5. Medidas positivas acotadas sobre el espacio \mathbb{R}^n .

En el caso de medidas acotadas, todo el análisis del punto anterior sigue válido. Para todo punto $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, se denota a $Q(t)$ como "el cuadrante" formado por los puntos x de \mathbb{R}^n tales que $x_i \leq t_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. La función de repartición de la medida acotada m sobre \mathbb{R}^n , es la función de n variables:

$$F_m(t) = m(Q(t))$$

Proveando al conjunto \mathbb{R}^n de la relación de orden siguiente:

$t \leq t'$ si $t_i \leq t'_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Se observa que $t \leq t'$ y solamente si $Q(t) \subseteq Q(t')$.

Se pueden caracterizar las funciones de repartición de probabilidades sobre \mathbb{R}^n . Para ser una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ ser la función de repartición de una medida de probabilidad sobre \mathbb{R}^n , es necesario y suficiente que F sea continua a la izquierda en todos los ejes de cada coordenada, y satisficiera más y a la derecha de cada coordenada, siendo $a \geq 0$.

Por tanto, las propiedades de una función de repartición de probabilidad en \mathbb{R}^n son:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dF(x) + \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dF(x)$$

$$F(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = 0, \forall x_i < 0$$

Una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ que satisficiera las propiedades de \mathbb{R}^n es una función de repartición de probabilidad.

Sea m una medida positiva sobre (X, \mathcal{B}) . Se dice que \mathcal{B} está completa respecto a m si para toda $B \in \mathcal{B}$ despreciable respecto a m (i.e. $m(B)=0$), toda parte de X contenida en B pertenece a \mathcal{B} .

Si \mathcal{B} no está completa respecto a m , se introduce la familia \mathcal{B}' de las partes de X del tipo $B \cup N$ con $B \in \mathcal{B}$ y N contenido dentro de una parte despreciable $B' \in \mathcal{B}$. Se muestra que \mathcal{B}' es una tribu, y que escribiendo $m'(B \cup N) = m(B)$, se obtiene una medida positiva de \mathcal{B}' , que prolonga m . Se dice que \mathcal{B}' es el complemento de \mathcal{B} respecto de m . Por ejemplo, la tribu de Lebesgue de \mathbb{R} es la complementación de la tribu boreliana \mathcal{B}_0 de \mathbb{R} , respecto a la medida dt . Por comodidad, la prolongación de la medida dt sobre \mathcal{B}_0 , es denotada por dt : es la *medida de Lebesgue*.

1.4.3. Propiedad verdadera (m-casi) todas partes (propiedad c.p.) segura

Sea (X, \mathcal{B}, m) un espacio medible. Sean f_1, f_2, f_3, \dots las funciones definidas en X , con valores reales por ejemplo. Se dice que $(f_n(x))$ converge m-casi en todas partes hacia $f(x)$, si existe un conjunto N despreciable de X , tal que para toda $x \in X \setminus N$, la sucesión $(f_n(x))$ converge hacia el número $f(x)$. Se escribe:

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(x) \text{ m.c.p.}$$

Más concretamente, si se tiene una proposición lógica $P(x)$ en la cual interviene como parámetro un punto variable $x \in X$, se dice que $P(x)$ es verdadera m-casi en todas partes (v.c.p.) si existe una parte despreciable N de X tal que la proposición $P(x)$ es verdadera para todos $x \in X \setminus N$.

En el caso particular en que $P(x)$ es la proposición "la sucesión $(f_n(x))$ converge hacia $f(x)$ ", se dice que $f_n(x)$ converge m-casi en todas partes hacia $f(x)$ si y sólo si $f_n(x)$ converge m-casi en todas partes hacia $f(x)$.

1.4.4. Propiedad verdadera (m-casi) todas partes

Sea (X, \mathcal{B}, m) un espacio medible. Sean f_1, f_2, f_3, \dots las funciones definidas en X , con valores reales por ejemplo. Se dice que $(f_n(x))$ converge m-casi en todas partes hacia $f(x)$, si existe un conjunto N despreciable de X , tal que para toda $x \in X \setminus N$, la sucesión $(f_n(x))$ converge hacia el número $f(x)$. Se escribe:

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(x) \text{ m.c.p.}$$

El resultado de esta definición, es que la composición de dos aplicaciones medibles, es medible.

Ejemplos:

a) En el caso de que X y Y sean dos espacios topológicos, la expresión "la aplicación de $f : X \rightarrow Y$ es medible", da a entender que X y Y están provistos de tribus borelianas. Se observa entonces fácilmente que toda aplicación continua es medible. Más el recíproco es falso.

b) Sea B una tribu de partes de un conjunto X . Sea $X = E_1 \cup E_2 \cup \dots$ partición de X en una familia numerable de partes disjuntas $E_i \in B$. cualesquiera que sean los reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, escribamos $f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n$ donde k_n es la función indicatriz del conjunto E_n . Entonces para todo subconjunto C de \mathbb{R} , $f^{-1}(C)$ es una reunión cuando más numerable de partes E_n . Por tanto, f es medible. Estos dos ejemplos muestran que la clase de las aplicaciones medibles es una clase de funciones, que es muy adecuada a la teoría de la medida.

§ 10. Notaciones ($f < a$), ($f \in C$)

En el caso de que f sea una aplicación medible de X en \mathbb{R} , se define:

$$(f < a) = f^{-1}]-\infty, a[$$

que se puede considerar como una simplificación de escritura. Se dice que f es una simplificación de lenguaje ya sea ($f < a$) o sea ($f \in C$) el conjunto donde f es más pequeño que a ". Asimismo, si f es una aplicación medible de X en \mathbb{R} , si f es una aplicación medible de X en Y , $f^{-1}(C)$ es un conjunto medible ($f \in C$)

§ 11. Definición de una medida

Sea X un espacio topológico provisto de una tribu boreliana B . Una medida μ sobre B es una función $\mu : B \rightarrow [0, \infty]$ que satisface las propiedades:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de B , entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

tribu \mathcal{D}

$$(\mathbb{X}, \mathcal{B}, m) \xrightarrow{f} (\mathbb{Y}, \mathcal{C}) \xrightarrow{g} (\mathbb{Z}, \mathcal{D})$$

Si g es medible, sea m'' la imagen de m' para g . Así, para toda $D \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} m''(D) &= m'(g^{-1}(D)) = m(f^{-1}(g^{-1}(D))) \\ &= m(g \circ f)^{-1}(D) \end{aligned}$$

por tanto, m'' es también la imagen de m por $g \circ f$, de ahí:

$$(g \circ f)(m) = g(f(m))$$

(c) Adoptando las notaciones del punto a), consideremos una partición de X en dos partes medibles X_1 y X_2 . Denotemos f_i la aplicación $X_i \rightarrow Y$ definida por f , para $i = 1$ y 2 . Para toda parte medible C de Y en la sección:

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) &= (f^{-1}(C) \cap X_1) \cup (f^{-1}(C) \cap X_2) \\ &= f_1^{-1}(C) \cup f_2^{-1}(C) \end{aligned}$$

Por tanto, si m_i significa la medida inducida para m sobre X_i :

$$f(m) = f_1(m_1) + f_2(m_2)$$

Ejemplos:

(a) Para calcular la imagen de una medida para una aplicación $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

una técnica muy potente consiste, si f es monótona, en utilizar las

funciones de repartición. Se notará que si f es monótona sobre los

intervalos $X_1 =]-\infty, a]$ y $X_2 =]a, +\infty[$, entonces se puede

tratar como un proceso probabilístico al utilizar en un argumento de

medida (como el punto b) más adelante. Dado el caso de una función

monótona, el caso de aplicaciones biyectivas (estrictamente

monótonas) es un caso particular.

El resultado de este tipo de cálculo puede ser escrito de la forma

$(f(m))_x = \int_{-\infty}^x f'(t) m(dt)$, si f es derivable casi en todas partes.

En el caso de una función monótona, se puede escribir

$(f(m))_x = \int_{-\infty}^x f(t) m(dt)$, si f es derivable casi en todas partes.

En el caso de una función biyectiva, se puede escribir

$(f(m))_x = \int_{f^{-1}(x)} f(t) m(dt)$, si f es derivable casi en todas partes.

En el caso de una función monótona, se puede escribir

$(f(m))_x = \int_{-\infty}^x f(t) m(dt)$, si f es derivable casi en todas partes.

En el caso de una función biyectiva, se puede escribir

$(f(m))_x = \int_{f^{-1}(x)} f(t) m(dt)$, si f es derivable casi en todas partes.

En el caso de una función monótona, se puede escribir

$(f(m))_x = \int_{-\infty}^x f(t) m(dt)$, si f es derivable casi en todas partes.

En el caso de una función biyectiva, se puede escribir

$(f(m))_x = \int_{f^{-1}(x)} f(t) m(dt)$, si f es derivable casi en todas partes.

En el caso de una función monótona, se puede escribir

$(f(m))_x = \int_{-\infty}^x f(t) m(dt)$, si f es derivable casi en todas partes.

medible del conjunto producto. $X = X_1 \times X_2$ es una parte de X del tipo $C = A_1 \times A_2$ con $A_1 \in \mathbb{B}_1$ y $A_2 \in \mathbb{B}_2$. Notamos \mathbb{B} como la más pequeña tribu conteniendo todas las partes medibles de X . Observamos entonces que las dos proyecciones canónicas:

$$X_1 \times X_2 \xrightarrow{\pi_1} X_1 \quad X_1 \times X_2 \xrightarrow{\pi_2} X_2$$

$$x = (x_1; x_2) \longrightarrow x_1 \quad x = (x_1; x_2) \longrightarrow x_2$$

son medibles.

b) Si m es una medida positiva de \mathbb{B} , las dos medidas $m_1 = \pi_1(m)$ y $m_2 = \pi_2(m)$ son llamadas las *medidas marginales* de m . Se nota que la masa total de m_1 (o de m_2) es igual a la masa total de m . Por tanto, si m es una medida de probabilidad, m_1 y m_2 son también medidas de probabilidad.

c) Se define asimismo el producto de n espacios medibles (X_i, \mathbb{B}_i) . Si π_i define la i -ésima proyección canónica de $X = \prod_{i=1}^n X_i$ sobre X_i . Para toda medida m sobre (X, \mathbb{B}) , $\pi_i(m)$ es llamada la i -ésima distribución marginal.

d) Consideremos por ejemplo, la medida $\mu(x, y)$ o $d\mu$ definida por la densidad $\rho(x, y)$ sobre el espacio \mathbb{R}^2 . Las funciones de repartición de m_1 y m_2 son respectivamente:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t, y) dy; \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx$$

es: las funciones sigmoideas son continuas.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y) dx$$

entonces las medidas m_1 y m_2 tienen por densidad f_1 y f_2 respectivamente.

$m(X_1 \times X_2) = m_1(X_1) m_2(X_2) = 1$, por tanto m es una medida de probabilidad. Entonces $\pi_1(m) = m_1$, pues para toda $A_1 \in \mathcal{B}_1$: $(\pi_1(m))(A_1) = m(\pi_1^{-1}(A_1)) = m(A_1 \times X_2) = m(A_1) \times m(X_2) = m(A_1)$ más esto no es verdadero en general.

Más generalmente, sean n espacios medidos $(X_i, \mathcal{B}_i, m_i)$. Entonces se puede definir la *medida producto* m sobre $X = \prod_{i=1}^n X_i$ de medidas m_i . Esta medida es tal que para toda parte medible $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ de X , tenemos:

$$m(A) = \prod_{i=1}^n m_i(A_i).$$

Ejemplos de medidas producto.

Para $i = 1, 2, \dots, n$, sea $\varphi_i(x_i)$ una función continua positiva en \mathbb{R} ; φ_i es la densidad de la medida $m_i = \varphi_i dx_i$ y m_i es una medida de probabilidad si φ_i tiene una integral igual a uno. Entonces la función:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n)$$

sobre \mathbb{R}^n es continua y positiva. Sea I_j el producto de n_j intervalos acotados $I_j = (a_j, b_j]$. Se tiene:

$$\int_I \varphi(x) dx = \prod_{j=1}^n \int_{I_j} \varphi_j(x_j) dx_j$$

La medida $m = \varphi(x) dx$ de \mathbb{R}^n se por tanto (si) cual:

$$\forall I = \prod_{j=1}^n I_j \quad m(I) = \prod_{j=1}^n m_j(I_j)$$

Por consecuencia, la medida $\varphi(x) dx$ de \mathbb{R}^n es el producto de las medidas $\varphi_j(x_j) dx_j$.

Casos particulares:

- 1) Si todas las funciones φ_j valen 1, obtenemos, por la medida $\varphi(x) dx$ de \mathbb{R}^n es el producto de n medidas de Lebesgue dx_j .
- 2) Si todas las funciones φ_j tienen una integral igual a uno, la medida $\varphi(x) dx$ es una medida de probabilidad.

3.1.2. Aplicación de la medida

Si $\varphi(x)$ es una función continua positiva en \mathbb{R}^n y I es un producto de n intervalos acotados $I = \prod_{j=1}^n I_j$, entonces $\int_I \varphi(x) dx = \prod_{j=1}^n \int_{I_j} \varphi_j(x_j) dx_j$. Si $\varphi_j(x_j) = 1$, entonces $\int_I \varphi(x) dx = \prod_{j=1}^n \int_{I_j} 1 dx_j = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = m(I)$. Si $\varphi_j(x_j) = \delta(x_j - a_j)$, entonces $\int_I \varphi(x) dx = \prod_{j=1}^n \int_{I_j} \delta(x_j - a_j) dx_j = \prod_{j=1}^n 1 = 1$. Si $\varphi_j(x_j) = \delta(x_j - a_j)$, entonces $\int_I \varphi(x) dx = \prod_{j=1}^n \int_{I_j} \delta(x_j - a_j) dx_j = \prod_{j=1}^n 1 = 1$.

Integral (de Lebesgue):

$$\int_X f(x) m(x)$$

para ciertas funciones medibles f definidas sobre X , con valores reales.

1.4.15. Definición.

Una aplicación medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una función *escalonada* si existen elementos disjuntos E_1, E_2, \dots, E_n de medida finita de la tribu \mathcal{B} de X tales que:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j k_j(x);$$

donde k_j es la función indicatriz de E_j , y las f_j son constantes reales.

EL PRINCIPIO DE LA DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE LEBESGUE ES EL SIGUIENTE:

a. En una primera etapa, definimos la integral de una función escalonada:

$$\int_X \left(\sum_{j=1}^n f_j k_j(x) \right) m(x) = \sum_{j=1}^n f_j m(E_j)$$

Consideramos primero que esta definición no depende de la manera de escribir la suma anterior.

En una segunda etapa se define la integral de una función medible f sobre X con valores positivos reales:

$$\int_X f(x) m(x) = \sup \left\{ \int_X \phi(x) m(x) \mid \phi \text{ escalonada, } 0 \leq \phi \leq f \right\}$$

La integral para valores α :

Definimos la integral de una función medible f real, si f^+ y f^- son integrables:

$$\int_X f(x) m(x) = \int_X f^+(x) m(x) - \int_X f^-(x) m(x)$$

La integral de una función medible f real, si f^+ y f^- son integrables, se define como la diferencia de las integrales de f^+ y f^- .

$$\int_X f(x) m(x) = \int_X f^+(x) m(x) - \int_X f^-(x) m(x)$$

1.4.16. Algunas propiedades de la Integral de Lebesgue.

a) Teorema de la convergencia monótona: sea $(f_n)_n$ una sucesión creciente de funciones medibles que converge en todo punto de X hacia una función f medible. Entonces:

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

b) Toda función medible positiva $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ es el límite en todo punto de X de una sucesión creciente de funciones escalonadas.

c) Al combinar a) y b), obtenemos que si f y g medibles positivas tienen integrales finitas, entonces lo mismo ocurre con $f+g$ y λf para todo real $\lambda \geq 0$.

d) Para toda función medible f definida sobre Y , se tiene $|f| = f^+ + f^-$. Se observa entonces que $f = f^+ - f^-$ es integrable si y solamente si $|f|$ es integrable y:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

e) Sea f integrable positivo. Sea g medible tal que $|g| \leq f$. Entonces g es integrable y:

$$\left| \int_X g \, d\mu \right| \leq \int_X f \, d\mu.$$

f) El espacio L^1 de funciones integrables es un espacio vectorial sobre este espacio y la aplicación $f \mapsto \int_X |f| \, d\mu$ es una seminorma. Para completarlo la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} L^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \longrightarrow & \int_X |f| \, d\mu \end{array}$$

es una forma lineal sobre el espacio vectorial L^1 de f y $|f|$ es el cociente de L^1 por el espacio vectorial \mathcal{N} de f tales que $\int_X |f| \, d\mu = 0$. El espacio de Lebesgue L^1 es el cociente L^1 / \mathcal{N} .

$$\begin{array}{ccc} L^1 & \longrightarrow & L^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L^1 & \longrightarrow & L^1 \end{array}$$

El espacio L^1 es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$. El espacio L^1 es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$.

El espacio L^1 es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$. El espacio L^1 es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$.

m) es $\|f\|_p = (\int |f(x)|^p m(x) dx)^{1/p}$. Estos espacios son completos si la tribu \mathcal{B} es completa en relación a la medida m . Para $p < \infty$, el espacio de funciones escalonadas es denso dentro de $L^p(X, m)$. Definimos de la misma forma los espacios $L^p(X, m)$ complejos. Recordaremos que para $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, $f \in L^p(X, m)$ y $g \in L^{p'}(X, m)$ se tiene la desigualdad de Hölder:

$$\int |fg| m \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

Recordaremos ahora algunos teoremas útiles, las medidas consideradas se suponen σ -finitas.

g) Teorema de la integración con relación a una medida imagen. Con la notación usada anteriormente, una función medible $\phi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable con relación a $m' = f(m)$ si y solo si $\phi \circ f$ es integrable con relación a m . Además, $\int \phi m' = \int (\phi \circ f) m$.

h) Teorema de la convergencia dominada (de Lebesgue). Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles $f_n: (X, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$, y sea g una función integrable. Entonces si: $|f_n| \leq g$, m casi en todas partes para toda n , y si $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ casi en todas partes, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n m = \int f m$$

i) Teorema de Lebesgue-Fubini. Sean m (creciente) una medida σ -finita sobre el espacio medible (X, \mathcal{B}) resp. (Y, \mathcal{C}) . El espacio producto $Z = X \times Y$ está provisto de la medida producto $\mu = m \times n$. Entonces, para toda aplicación medible $f: Z \rightarrow [0, \infty]$, las aplicaciones parciales $f(x, \cdot) = f(x, y)$ y $f(\cdot, y) = f(x, y)$ son medibles y

$$\int f d\mu = \int \left(\int f(x, y) n(dy) \right) m(dx) = \int \left(\int f(x, y) m(dx) \right) n(dy)$$

para una aplicación medible $f: Z \rightarrow \mathbb{C}$ se tiene una relación análoga.

j) Teorema de Radon-Nikodym. Si ν es una medida σ -finita sobre el espacio medible (X, \mathcal{B}) y μ es una medida σ -finita sobre el mismo espacio (X, \mathcal{B}) tal que $\nu \ll \mu$, entonces existe una única función medible $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $d\nu = f d\mu$.

$$d\nu = f d\mu$$

Si ν es una medida σ -finita sobre el espacio medible (X, \mathcal{B}) y μ es una medida σ -finita sobre el mismo espacio (X, \mathcal{B}) tal que $\nu \ll \mu$, entonces existe una única función medible $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $d\nu = f d\mu$.

Si ν es una medida σ -finita sobre el espacio medible (X, \mathcal{B}) y μ es una medida σ -finita sobre el mismo espacio (X, \mathcal{B}) tal que $\nu \ll \mu$, entonces existe una única función medible $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $d\nu = f d\mu$.

$$\forall f \in L^2, \forall \epsilon > 0, \exists \rho \in \mathcal{D} \text{ tal que } \|f - \rho\|_2 \leq \epsilon$$

Si (ρ_n) designa una aproximación de δ_0 , podemos demostrar que $(\rho_n * \rho_n)$ tiende hacia ρ dentro de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, si $n \rightarrow \infty$. Como $\rho_n * \rho_n \in \mathcal{D}$, tenemos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho_n \in \mathcal{D} \text{ tal que } \|\rho - \rho_n * \rho_n\|_2 \leq \epsilon$$

Finalmente, combinando estas dos proposiciones se ve que \mathcal{D} es un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, la distribución templada:

$$L(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\rho \longmapsto \int f(x) \rho(x) dx$$

se denota $f dx$. El conjunto de estas distribuciones es denotado como $L^2(\mathbb{R}^n, dx) dx$.

1.4.18. Teorema de Plancherel.

La transformación de Fourier de distribuciones templadas induce una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$.

Más precisamente, para cualesquiera ϕ y $\psi \in L^2$:

$$\begin{aligned} (\phi, \psi) &= \int \phi(x) \overline{\psi(x)} dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} (\hat{\phi}, \hat{\psi}) \end{aligned}$$

Como \mathcal{D} es denso en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, L^2 lo es con mayor razón. Pasando al límite, se deduce que para cualesquiera f y $g \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$:

$$(f dx, g dx) = (2\pi)^{-n} (\hat{f}, \hat{g})$$

El producto escalar del primer miembro puede ser escrito también en términos de la $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ de f y g en $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$ de \hat{f} y \hat{g} mediante:

$$\|f dx\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_2^2$$

Es decir:

La transformación de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$.

El producto escalar del primer miembro puede ser escrito también en términos de la $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ de f y g en $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$ de \hat{f} y \hat{g} mediante:

$(f dx, g dx) = (2\pi)^{-n} (\hat{f}, \hat{g})$

$$\|f dx\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_2^2$$

4.19. Espacios de Sobolev.

Es a veces necesario utilizar en mecánica aleatoria los espacios Sobolev relativos a unos abiertos irregulares de \mathbb{R}^n .

2. PRINCIPIOS DE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD

Este capítulo es un repaso de los principios de la teoría de la probabilidad, para facilitar su empleo en la resolución de problemas de mecánica aleatoria.

2.1. Postulados.

a) En el estudio de un sistema (mecánico por ejemplo), sea Ω el conjunto donde cada elemento representa una combinación de estados cuyas causas no dependen del estado del sistema.

b) Se provee Ω con una tribu T cuyos elementos son llamados los eventos.

c) Se asigna al conjunto T una probabilidad P . La triada (Ω, T, P) se llama espacio probabilizado.

2.2. Comentarios.

Cada evento es una parte de Ω , y por tanto es un conjunto de combinaciones de estados de causas que influyen sobre el sistema.

Efectuar una prueba consiste en escoger un punto $\omega \in \Omega$. Se dice que el evento A se realiza al efectuar la prueba si $\omega \in A$; y se dice que A no se realiza si $\omega \notin A$; o, dicho de otra manera, si el evento $A^c = \Omega \setminus A$ se realiza.

Para todo evento A , el número $P(A)$ corresponde a la "frecuencia de realización" de A , al efectuarse pruebas independientes y sucesivas (también se le llama a $P(A)$ la *probabilidad* del evento A).

2.3. Ejemplo de una vida sometida a una sollicitación mecánica aleatoria

Si tenemos una vida de sección S , se puede considerar que la seguridad de la vida depende del esfuerzo normal N :

$$N = (\text{carga normal}) / S \text{ y de la resistencia elástica } R.$$

Definimos: $\Omega = \{ \mathbb{R}^2 \} = \{ (N, R) \in \mathbb{R}^2; R \text{ y } N \text{ reales} \}$ el event "sobrepasar la resistencia elastica", es la parte de Ω formada de los puntos de coordenadas N y R tales que $N \geq R$.

Si R y N toman valores determinadas R_m y N_m , entonces la probabilidad p sobre Ω se representa por la masa de Dirac sobre Ω , concentrada en el punto de coordenadas N_m y R_m .

Si al contrario, tenemos dispersiones, se puede representar la probabilidad como una repartición de masas positivas sobre $\Omega = \mathbb{R}^2$; la masa total de Ω siendo igual a uno.

Si tenemos los pares de valores $N_1 < N_2$ y $R_1 < R_2$, el área que se encuentra dentro del rectángulo R de \mathbb{R}^2 donde $N_1 < N < N_2$ y $R_1 < R < R_2$, representa la probabilidad del evento R ; sea:

$$P((N_1 < N < N_2 \text{ y } R_1 < R < R_2)) = \iint_R dP$$

2.4. Ejemplo de un oscilador.

Sean k , m y c constantes fijas. El oscilador de constantes k , m y c está en reposo para $t \leq 0$; si se le somete a una excitación $t \rightarrow x(t)$ para $t > 0$, donde la función x es un elemento desconocido de un espacio funcional X .

El estado del oscilador para todo instante, se describe por la función: $t \rightarrow y(t)$, solución del problema de valores iniciales:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = x(t) \\ \text{si } t = 0 \text{ } y(0) = y'(0) = 0$$

Los principios de probabilidad, nos conducen a tomar para el estudio del oscilador $\Omega = X$, definida de cierta probabilidad P .

Los postulados de la probabilidad conducen por tanto a:

a) Considerar como parámetros todas las variables (causas) que influyen sobre el estado del sistema en estudio.

b) A proveer el conjunto de causas de una medida de probabilidad.

Se examinarán entonces más a detalle los aspectos del sistema que nos interesan, estos aspectos siendo funciones de las causas.

2.5. Principio de causalidad.

Sea (Ω, \mathcal{T}, P) un espacio probabilizado que describe los aspectos aleatorios concernientes a las causas del estado de un cierto sistema.

Sea F un espacio combinación de consecuencias de elementos $\omega \in \Omega$.

Entonces existe una aplicación de f de Ω a F que asocia a toda combinación ω de estados de causas, una combinación $f(\omega)$ de consecuencias. Se provee F con una tribu \mathcal{F} tal que $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ para todo $B \in \mathcal{F}$.

Así cada elemento B de \mathcal{F} , proviene de un evento $f^{-1}(B)$ de Ω . Por coherencia a esta manera de definir una probabilidad P' sobre \mathcal{F} tal que:

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad P'(B) = P(f^{-1}(B))$$

Dicho de otra manera, dada una aplicación f de (Ω, \mathcal{T}, P) a F , el principio de causalidad conduce a proveer F de un atributo que hace que sea medible y proveer F de una probabilidad $P' = f(P)$. - la aplicación f se llama variable aleatoria (v.a.). - La probabilidad P' , es llamada la ley de la variable aleatoria f , o distribución de f . Esta ley se denota por $L(f)$.

Una consecuencia práctica es la siguiente. Partiendo de una situación de la que nos interesan todos los eventos $A \in \mathcal{T}$, si ahora nos interesa el evento $B \in \mathcal{F}$, entonces el espacio de probabilidad inicial (Ω, \mathcal{T}, P) se cambia por el nuevo espacio de probabilidad (F, \mathcal{F}, P') .

La propiedad anteriormente vista de transitividad de la imagen de una medida, da lugar a la propiedad siguiente:

2.6. Propiedad de transitividad para el cambio de espacio de probabilidad.

Supongamos que se tiene una primera variable aleatoria f con distribución P' sobre el conjunto F de F . Sea g una aplicación de F a G , sea \mathcal{G} un conjunto sobre G que hace que g sea medible. Entonces la ley de g , es decir $P'' = g \circ P'$, se tiene:

$$(\Omega, \mathcal{T}, P) \xrightarrow{f} (F, \mathcal{F}, P') \xrightarrow{g} (G, \mathcal{G}, P'')$$

Entonces, P'' coincide con la distribución de la variable aleatoria compuesta $h = g \circ f$.

Dicho de otra manera, uno obtiene la misma probabilidad F haciendo dos transformaciones sucesivas f y g ó la transformación compuesta.

2.7. Variables aleatorias con valores en un espacio vectorial F

Supongamos que F está provista de una topología que hace continuas las operaciones:

$$\lambda : x \rightarrow \lambda x \quad (x ; y) \rightarrow x + y$$

y de la tribu boreliana correspondiente. Si tenemos dos variables aleatorias f y g con valores dentro de F , tenemos que $f + g$ es la composición de las dos aplicaciones:

$$\Omega \rightarrow F \times F \quad \omega \rightarrow F \times F \rightarrow F \quad \omega \rightarrow (f(\omega) ; g(\omega)) \\ (y ; y') \rightarrow y + y'$$

Aparece así, que las variables aleatorias con valores dentro un espacio vectorial, forman un espacio vectorial.

2.8. función de repartición.

a) Sea f una variable aleatoria con valores dentro de $F = \mathbb{R}$ (regla $F = f(p)$). La función de repartición de f es la función definida sobre \mathbb{R} , con valores dentro del intervalo $[0,1]$ tal que:

$$F_f(a) = P(f \leq a) = \int_{-\infty}^a dP(\omega)$$

y se escribe simplemente como $F(a)$.

En el caso de que $F(x)$ admita una derivada Ψ se dice que $\Psi = dF(x)/dx$ es la densidad de la ley f y se escribe $F = \int \Psi(x) dx$.

El teorema siguiente caracteriza las funciones de repartición de distribuciones de probabilidad sobre \mathbb{R} .

TEOREMA.

Para que una función F sobre \mathbb{R} con valores dentro $[0,1]$, sea función de repartición de una ley de probabilidad P sobre \mathbb{R} ,

necesario y suficiente que $F(a)$ sea creciente, continua a la izquierda y tienda a +1 (resp. a cero) si a tiende a ∞ (resp. a $-\infty$).

Una ley de probabilidad P' sobre \mathbb{R} , se caracteriza por una función de repartición F por:

$$\forall a, P'((-\infty, a]) = \text{Sup}_n F(a - 1/n) \quad a < b \Rightarrow P'([a, b]) \\ = P'((-\infty, b]) - P'((-\infty, a]) = F(b) - F(a)$$

b) Sea f una variable aleatoria con valores dentro $F = \mathbb{R}^n$ de la $P' = f(p)$. Las nociones anteriores de función de repartición y de densidad se extienden de la manera siguiente del caso $n = 1$ al caso $n > 1$. Se llamarán f_1, \dots, f_n las n variables aleatorias escalares que son las componentes de f .

Para simplificar la escritura, una familia (a_1, \dots, a_n) de números reales se denota por a , y el evento " $f_1 < a_1, f_2 < a_2, \dots, f_n < a_n$ " se denota por simplicidad por " $f < a$ ". Entonces, la función de repartición de f es la función F_f definida sobre \mathbb{R}^n , con valores dentro del intervalo $[0, 1]$, tales que:

$$F_f(a) = P'(f < a) = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \dots \int_{-\infty}^{a_n} dP'(x_1, \dots, x_n)$$

cuando la derivada de orden n :

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_n} F_f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

es una función, se dice que Ψ es la densidad de la ley $f = (f_1, \dots, f_n)$, y se escribe:

$$P' = dF = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

las distribuciones de las variables aleatorias f_1, f_2, \dots, f_n . Se llaman las distribuciones marginales de P' . A P' se le llama la distribución conjunta de las variables aleatorias f_1, f_2, \dots, f_n .

Para simplificar la escritura, supondremos $n = 2$, aplicando propiedad de transitividad bajo las aplicaciones:

$$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \quad \omega \rightarrow (f_1(\omega), f_2(\omega)) \rightarrow (x_1, x_2)$$

donde la composición es $f_1 \circ f_2$.

La función de repartición F_f de f_1 es tal que:

$$F_f(x_1) = P'(f_1 \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} dP'(x_1, x_2)$$

Para el caso particular: $P' = \varphi(x_1, x_2)$ donde φ tiene derivado

respecto a x que f_1 tiene la densidad:

$$p_1(x) = \frac{d}{dx} F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dy$$

siendo rigurosos, habría que verificar en cada caso si la derivada es posible.

2.9. Igualdad casi segura de variables aleatorias.

Se dice que dos variables aleatorias f y $g: \Omega \rightarrow F$ son iguales casi seguramente si existe un evento $N \in \mathcal{I}$ de probabilidad nula tal que $f=g$ fuera de N .

En esta definición, N puede depender de f y g . Se nota que dos variables aleatorias son iguales casi seguramente, si tienen la misma distribución. Esto es porque se pueden confundir prácticamente tales variables.

Siendo más precisos, tenemos $L^0(\Omega, F)$ el espacio de variables aleatorias de Ω dentro F . Se llama R la relación de equivalencia:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ casi seguramente (c.s.)}$$

en lugar de considerar $L^0(\Omega, F)$, se considera su cociente por R :

$L^0(\Omega, F) = L^0(\Omega, F) / R$ y se confunde prácticamente una variable aleatoria y la clase de equivalencia correspondiente.

2.10. Espacios de Lebesgue L^p y L^p .

Sea $p \geq 1$ fija y sea F un espacio normado. Se dice que una variable aleatoria $f: \Omega \rightarrow F$ es de orden p , si:

$$E(\|f\|^p) = \int_{\Omega} \|f(\omega)\|^p dP(\omega) < \infty$$

acuerdo con lo visto anteriormente, esta integral se expresa directamente con la ayuda de la ley $\mu = P \circ f^{-1}$ de f :

$$E(\|f\|^p) = \int_{F} \|x\|^p d\mu(x)$$

El conjunto de variables aleatorias de orden p sobre Ω de valores dentro F es un espacio vectorial y se denota $L^p(\Omega, F)$. Haciendo cociente, se obtiene un espacio $L^p(\Omega, F)$ y la aplicación $f \mapsto L^p(\Omega, F)$ es una norma sobre este espacio.

Se utilizó la notación E para denotar la integral respecto a P .

medida de probabilidad. La escritura $E\{f\}^P$ se lee *esperanza de f* $\{P$.

La desigualdad de Hölder, permite mostrar que toda variable aleatoria de orden p , es de orden $q \leq p$. En particular, toda variable de segundo orden, es una variable de primer orden. Si $F = \mathbb{R}$, se escribe simplemente $L^p(\Omega)$ en lugar de $L^p(\Omega, \mathbb{R})$.

2.11. Principio de reducción de causas.

Supongamos que el espacio probabilitizado, Ω , sea la reunión de dos eventos disjuntos A_1 y A_2 de probabilidades no nulas. Si tenemos perteneciente a A_1 , entonces la probabilidad (Ω, \mathcal{T}, P) se reemplaza por $(A_1, \mathcal{T}_1, P_1)$ donde \mathcal{T}_1 es la familia de partes $A_1 \cap B$ de A_1 (B describe \mathcal{T}), y P_1 es la probabilidad así definida sobre:

$$P_1(B \cap A_1) = P(B \cap A_1) / P(A_1)$$

La probabilidad así obtenida sobre \mathcal{T}_1 se llama la probabilidad condicional dado A_1 (es decir, si A_1 se realiza) y se escribe:

$$P_1(B \cap A_1) = P(B \text{ si } A_1) = P(B/A_1)$$

2.12. Principio de Independencia.

a) Sea (Ω, \mathcal{T}, P) un espacio probabilitizado. Dos eventos A y $B \in \mathcal{T}$ llaman independientes, si: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Si $P(B) \neq 0$ de acuerdo a lo anterior, se obtiene entonces: $P(A/B) = P(A)$

Dicho de otra forma, si dos eventos son independientes, la probabilidad de uno de ellos no depende de que el otro se realice. Por la definición anterior, tenemos:

$$(C = \phi, A, A^c, \text{ o } \Omega; \text{ y } D = \phi, B, B^c, \text{ o } \Omega) \rightarrow P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$$

$$\text{Por ejemplo: } P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot P(B) \\ = P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A^c)$$

De esta manera, sigue la misma derivación rigurosa de la noción de independencia.

b) Se dice que las subfamilias $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ de \mathcal{T} tienen elemento

independientes si:

$$\forall B_i \in T_i \ (1 \leq i \leq n), \quad P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$$

En particular, n eventos A_1, A_2, \dots y A_n se dice que son independientes, si los conjuntos que engendran son independientes. Se vuelve a encontrar la definición anterior para $n = 2$, pero esta se complica más si $n > 2$.

c) Sean n variables aleatorias $f_i: \Omega \rightarrow F_i, (1 \leq i \leq n)$. La tribu T_i generada para f_i es el conjunto T formado para los eventos del tipo $f_i^{-1}(B_i)$ con B_i dentro de T_i .

Se dice que las variables f_i son independientes si los conjuntos T_1, T_2, \dots, T_n son independientes.

Introducimos la variable aleatoria $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ con valores dentro $F = \prod_{i=1}^n F_i$.

Sea Π_i la primera proyección canónica de cierto espacio producto sobre el primer factor. Si $F_i = f_i(p)$ define la regla de la variable aleatoria f_i , se pueden considerar las probabilidades P_1, P_2, \dots, P_n y así obtener el sistema de reglas marginales de $f(p)$.

Para eventos $B_1 \in T_1, \dots, B_n \in T_n$, se puede ver la independencia de la siguiente manera:

$$P\{f^{-1}(\cap_{i=1}^n B_i)\} = P\{\cap_{i=1}^n \Pi_i^{-1}(B_i)\} = \prod_{i=1}^n P\{B_i\}$$

Entonces, la regla conjunta P de las variables aleatorias independientes f_i es el producto de las reglas marginales.

Para el caso particular de que cada variable f_i admite una regla de densidad ϕ_i , entonces la regla conjunta admite una densidad:

$$\phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \phi_1(p_1) \cdot \phi_2(p_2) \cdot \dots \cdot \phi_n(p_n)$$

PROPOSICIONES

Sean dos variables aleatorias independientes f y g con valores reales o complejos. Entonces la variable aleatoria fg cumple propiedad:

$$E\{fg\} = E\{f\}E\{g\}$$

En efecto, sean P' y P'' las reglas de f y g , como f y g son de tipo

uno, entonces:

$$\int |x| dP'(x) + \int |y| dP''(y) < \infty$$

como f y g son independientes, la regla conjunta de f y g es $P' \times P''$.

Por el teorema de integración por relación a una medida imagen:

$$\begin{aligned} E(|fg|) &= \iint |x| |y| dP'(x) dP''(y) \\ &= \int |x| dP'(x) \int |y| dP''(y) = E(|f|) E(|g|) \end{aligned}$$

donde fg es de orden uno, y:

$$E(fg) = \iint x y dP'(x) dP''(y) = E(f) E(g)$$

2.13. Aplicación a la construcción de espacios de probabilidad.

Sean n espacios de probabilidad $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ suponga que dependen de un n sistemas de causas $\Omega = \prod \Omega_i$ de tipo $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Se nota que $\Omega_i = \{e_i\}$ es la i -ésima proyección canónica $w \rightarrow w_i$, proviene Ω del conjunto engendrado de las Ω_i . Si las Ω_i son variables aleatorias independientes una forja la probabilidad de p como producto de las probabilidades p_i .

Esta probabilidad es tal que:

$$P(B_1 \times \dots \times B_n) = P_1(B_1) \times \dots \times P_n(B_n)$$

Un caso particular muy relativas a un cierto sistema. Si $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ es el espacio de probabilidad del sistema, tendremos $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ de probabilidad:

$$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$$

2.14. Principio de suma de espacios de probabilidad.

Este es un principio "inferior" para la reducción del principio de reducción. Consideremos n espacios de probabilidad $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ con $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$.

El conjunto Ω puede ser dividido por conjunto \mathcal{T} por partes de tipo $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ de Ω , donde Ω_i describe \mathcal{T}_i . Necesitamos $\sum p_i = 1$. Entonces tenemos: $P(\Omega) = \sum P_i(\Omega_i) = \sum P_i(\Omega_i)$ es la probabilidad P sobre \mathcal{T} . El espacio (Ω, \mathcal{T}, P) así obtenido, puede ser considerado como una suma ponderada de espacios probabilísticos $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$.

Esto se usa en la práctica de la manera siguiente: Cada espacio $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ describe una cierta situación probabilista tal que para todo par (i, j) con $i \neq j$, los conjuntos de causas asociados a todo punto de Ω_i y a todo punto Ω_j son incompatibles.

Entonces, uno puede aglomerar estas n situaciones probabilista considerando una nueva situación más compleja, que contiene todas las situaciones aparte: para todo i , $p_i = p(\Omega_i)$ representa la probabilidad para una combinación de causas aparentes de Ω_i .

EJEMPLO:

Sea una partición de un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{T}, P) en eventos $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, tales que $p_i = p(\Omega_i) \neq 0$ para toda i . Tenemos $A_i \subset \Omega_i$ por aplicación del principio de reducción, uno obtiene un espacio reducido $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ con $P_i = P$ si Ω_i . Aglomerando los n espacios volviendo a encontrar el espacio de probabilidad de salida y la relación familiar:

$$\forall B \in \mathcal{T} \quad P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \text{ si } A_i) P(A_i)$$

La operación de sumatoria (o de aglomeración) de espacios probabilísticos se entiende naturalmente con el caso n ya presentado.

2.15. Función característica y momentos.

Sea F un espacio vectorial real de dimensión finita n . El dual F' de F es el espacio de formas lineales continuas sobre F y la acción de $l \in F'$ sobre $x \in F$ y se denota como $l(x)$ o $\langle l, x \rangle$.

En la práctica se confunde a menudo F y F' , utilizando las coordenadas x_1, \dots, x_n sobre F ; entonces $F \cong F' \cong \mathbb{R}^n$ y si l tiene componentes l_1, l_2, \dots, l_n se puede escribir $l(x) = l_1 x_1 + \dots + l_n x_n = \sum_{j=1}^n l_j x_j$.

Para estudiar los momentos y la función característica de una variable aleatoria de valores sobre F , no se debe de perder sistemáticamente la identificación $F \cong F' \cong \mathbb{R}^n$. Esto por dos razones, se debe una vez debería una exposición geométrica independiente de cambio de base.

La razón más importante es para introducir el caso de F de dimensión ∞ y volver a encontrar en el estudio de procesos de F .

sección 3. Cuando F es un espacio vectorial de dimensión infinita, se puede hacer la identificación anteriormente descrita.

DEFINICION.- Sea f una variable aleatoria con valores dentro de un espacio vectorial F . La función característica, f es la función siguiente, definida sobre F' : $u \rightarrow E(\exp(i\langle u, f \rangle))$

Por el teorema de integración, para la relación de una medida, se introduce la regla P' de f :

$$E(e^{i\langle u, f \rangle}) = \int_{x \in F} e^{i\langle u, x \rangle} dP'(x)$$

esto se puede escribir, utilizando las coordenadas sobre F como:

$$E(e^{i\langle u, f \rangle}) = E(e^{i\sum_{j=1}^n u_j f_j}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n u_j x_j} dP'(x_1, \dots, x_n)$$

La fórmula nos muestra que la función característica de una variable aleatoria vectorial, coincide con la Transformada de Fourier de la regla $P'(u)$.

NOTA.

a) La función característica de una variable aleatoria f , es la función característica de una cierta variable aleatoria. Se dice que f y f' son isonomas si tienen la misma distribución. Entonces, se puede observar que f y f' tienen la misma función característica.

b) De la sección 1, toda distribución temprea se caracteriza por su Transformada de Fourier. En consecuencia, la función característica de una variable aleatoria, es característica para una variable aleatoria como su regla.

2.16. Propiedades de unicidad.

a) toda función característica, es continua y derivable.

b) Sean f y g dos variables aleatorias con valores dentro de F . Entonces, $\exp(i\langle u, f \rangle)$ y $\exp(i\langle u, g \rangle)$ son para todo u , (fijas dentro de F') desde variables aleatorias con valores complejos. Aplicando anteriormente descrita, tenemos:

$$\begin{aligned} E(e^{i\langle u, f+g \rangle}) &= E(e^{i\langle u, f \rangle} e^{i\langle u, g \rangle}) \\ &= E(e^{i\langle u, f \rangle}) E(e^{i\langle u, g \rangle}) \end{aligned}$$

La función característica de la suma de dos variables aleatorias independientes, es el producto de las funciones características de las variables.

c) Sea l una aplicación lineal de F sobre G . F y G son de espacios vectoriales reales de dimensión finita. Si l' define la transpuesta de l , entonces la función característica de la variable aleatoria $g = l \circ f$ es la función siguiente, definida sobre G' : v
 $E(e^{i\langle v, l \circ f \rangle}) = E(e^{i\langle l'v, f \rangle})$

Dicho de otra forma, es suficiente reemplazar el argumento u sobre la Función característica de f por $l'v$.

EJEMPLO:

Sea a un vector constante de F . La variable aleatoria igual a a que tiene por función característica: $\exp i \langle a, u \rangle$. La función característica de $a + f$ es:

$$E(e^{i\langle a+f, u \rangle}) = e^{i\langle a, u \rangle} E(e^{i\langle f, u \rangle})$$

que es el producto de $\exp(i\langle a, u \rangle)$ con la función característica de f .

De la misma forma, para todo escalar λ , la variable aleatoria λf tiene la siguiente función característica:

$$E(e^{i\langle \lambda f, u \rangle}) = E(e^{i\langle f, \lambda u \rangle})$$

Donde para calcular la función característica de f , es suficiente reemplazar el argumento u por λu .

Veamos la relación Función característica y momentos. Usualmente, para todo multiíndice $j = (j_1, \dots, j_n)$ de orden n , el momento asociado a una probabilidad F sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, se define por integral siguiente:

$$m_j = \int_{\mathbb{R}^n} i^{j_1} x_1^{j_1} i^{j_2} x_2^{j_2} \dots i^{j_n} x_n^{j_n} dF(x_1, \dots, x_n)$$

si l es de orden p . Esta integral converge si:

$$|m_j| = |i^{j_1} x_1^{j_1} \dots i^{j_n} x_n^{j_n}| \leq |x_1|^{j_1} \dots |x_n|^{j_n} \leq \|x\|^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

entonces:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)^{j_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial u_n} \right)^{j_n} E(e^{i\langle u, f \rangle}) \Big|_{u=0} = i^{j_1} m_j$$

Se pueden definir los momentos m_j de las formas multilineales sobre F asociadas simultáneamente a F , de una manera independiente.

de como se elijan las coordenadas del espacio vectorial F . Así, si f es de orden k , se puede definir la forma k -lineal siguiente sobre F :

$$\begin{aligned}\phi_k(u_1, \dots, u_k) &= \int_{x \in F} \langle u_1, x \rangle \langle u_2, x \rangle \dots \langle u_k, x \rangle dP^*(x) \\ &= E(\langle u_1, f \rangle \langle u_2, f \rangle \dots \langle u_k, f \rangle).\end{aligned}$$

Los momentos m_j se pueden calcular con la ayuda de las formas multilineales ϕ_k . Así, por ejemplo para l y l' que se definen de 1 a n .

$$m_l = \int_{x \in F} x_l dP^*(x) = \phi_1(\hat{x}_l),$$

$$m_{ll'} = \int_{x \in F} x_l x_{l'} dP^*(x) = \phi_2(\hat{x}_l, \hat{x}_{l'}),$$

donde los últimos miembros \hat{x}_l definen los elementos de F^* , definidos por la forma coordenada $x = \langle x, x \rangle = x_l$ sobre F . Más generalmente para todo multíndice j , tenemos $|j| = \sum j_k$ y:

$$m_j = \phi_{|j|}(\underbrace{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_1}_{j_1 \text{ veces}}, \underbrace{\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_2}_{j_2 \text{ veces}}, \dots, \underbrace{\hat{x}_n, \dots, \hat{x}_n}_{j_n \text{ veces}})$$

2.17. Media, correlación, covarianza para una variable aleatoria vectorial de segundo orden.

a) La media de la variable aleatoria f , es el vector \bar{f} de 1 a n componentes m_l con $l \in \{1, \dots, n\}$. Esta media está definida para f usando la definición de momentos mencionada anteriormente, tenemos:

$$\bar{f}_l = \langle \hat{x}_l, \bar{f} \rangle = \int_{x \in F} x_l dP^*(x) = \int_{x \in F} \langle \hat{x}_l, x \rangle dP^*(x)$$

tomando esta vez desde $l \in \{1, \dots, n\}$ y que toda $u \in F^*$ es combinación de formas coordenadas \hat{x}_l , es posible escribirlo en forma de una sola relación no nula, donde intervienen las coordenadas:

$$\forall u \in F^*, \langle u, \bar{f} \rangle = \int_{x \in F} \langle u, x \rangle dP^*(x)$$

Decimos que la variable aleatoria está centrada si la media es nula, la media de f , es entonces denotada por:

$$\bar{f} = E(f),$$

puesto:

$$\forall u \in F^*, \langle u, \bar{f} \rangle = \int_{\omega \in \Omega} \langle u, f(\omega) \rangle dP(\omega)$$

b) El operador de correlación R de f , es la aplicación lineal de F sobre F , donde la matriz es $(m_{ll'})$, donde $m_{ll'}$ se define anteriormente con $l, l' \in \{1, \dots, n\}$. Entonces R con ϕ_2 se puede escribir de la

siguiente forma:

$$\langle R x_{l'}^{-1}, x_l^{-1} \rangle = \int_{x \in F} x_l x_{l'} dP^*(x) = \int_{x \in F} \langle x_l^{-1}, x \rangle dP^*(x)$$

En esta relación varían los índices l y $l' \in (1, \dots, n)$. Como todo elemento u y v de F , son combinación lineal de formas coordenadas x_l^{-1} , podemos deducir la relación siguiente donde intervienen las coordenadas:

$$\forall u \text{ y } v \in F, \langle R u, v \rangle = \int_{x \in F} \langle u, x \rangle \langle v, x \rangle dP^*(x)$$

El operador de correlación es entonces denotado:

$$R = E(f \otimes f),$$

pues tenemos:

$$\forall u \text{ y } v \in F, \langle R u, v \rangle = \int_{\Omega} \langle f(\omega), u \rangle \langle f(\omega), v \rangle dP(\omega)$$

y $f(\omega) \otimes f(\omega)$ define el operador lineal $u \rightarrow \langle f(\omega), v \rangle f(\omega)$

c) El operador de covarianza C de P^* es por definición, el operador de correlación de la variable aleatoria centrada $f - E(f)$, es pues, la aplicación lineal de F sobre F , tal que:

$$\forall u \text{ y } v \in F, \langle C u, v \rangle = \int_{\Omega} \langle f - f_0, u \rangle \langle f - f_0, v \rangle dP$$

desarrollando el segundo miembro de tenemos:

$$\forall u \text{ y } v \in F, \langle C u, v \rangle = \langle R u, v \rangle - \langle f_0, u \rangle \langle f_0, v \rangle.$$

Esta última igualdad entre formas bilineales, es equivalente a la igualdad siguiente entre operadores lineales, apoyada en la identidad de Leibniz:

$$C = R - f_0 \otimes f_0$$

Para una variable aleatoria de segundo orden f , con valores en F , la media $f_0 = E(f)$ y el operador de covarianza $C = R - f_0 \otimes f_0$ con $R = E(f \otimes f)$, son dos parámetros importantes.

CASO PARTICULAR: Supongamos que f es una variable aleatoria de segundo orden con valores dentro \mathbb{R} , de media μ . Entonces clásicamente la media es μ la varianza es σ^2 y el operador de covarianza es $C = \sigma^2 I$ (I es el operador identidad).

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(f^2) - \mu^2 = \int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu - \mu^2 \\ &= E((f - \mu)^2) = \int_{\mathbb{R}} (f - \mu)^2 d\mu = \sigma_2^2 \end{aligned}$$

La igualdad $\sigma^2 = \sigma_2^2$ entre números es en efecto, un caso particular de la covarianza entre operadores, en el caso de $\dim F = 1$ todo operador lineal de $F = \mathbb{R}$ sobre $F = \mathbb{R}$ se describe $u \rightarrow fu$,

es una característica para el número k .

2.18. Transformación lineal de una variable aleatoria vectorial de segundo orden

PROPOSICION. Sea f una variable aleatoria vectorial de segundo orden para valores sobre F y sea l una aplicación lineal de F sobre un espacio vectorial G de dimensión finita. Entonces:

a) la variable aleatoria $g = l \circ f$ teniendo por media $E(g) = l(E(f))$.

b) la variable aleatoria $g = l \circ f$ con operador de covarianza:

$$C_g = l C_f l'$$

NOTA.-

a) Estas fórmulas no funcionan en general para una aplicación l no lineal. Por ejemplo, si f es una variable aleatoria no idénticamente nula y de media cero:

$$E(f^2) = \int f^2 dP \neq 0 \neq (E(f))^2$$

b) tenemos una distribución de probabilidad μ sobre \mathbb{R} que se caracterize en general por todos sus momentos $m_p = \int x^p d\mu(x)$ si todos estos momentos existen. Si es que falta, tenemos la función característica μ se caracteriza para todas sus derivadas en el origen:

c) Sean f y g dos variables aleatorias centradas, de segundo orden no correlacionadas, tales que:

$$\forall u, v, \dots \in f, g, \dots, E(u \dots v \dots) = 0.$$

entonces:

$$C_{f+g} = C_f + C_g$$

esto se cumple si f y g son independientes. También tenemos:

$$E(f^2 g^2) = E(f^2) + E(g^2) + 2E(fg^2)$$

2.19. Transformada de Lejand de una distribución de una variable aleatoria vectorial.

PROPOSICION.- Utilizando las coordenadas x_1, \dots, x_n en el espacio vectorial F real de dimensión n , hacemos $x = (x_1, \dots, x_n)$ con $x \in \mathbb{R}^n$.

x_1, \dots, x_n y $y = y_1 \dots y_n \in \mathbb{R}^n$

a) Sea f una variable aleatoria con valores dentro F tal que existe $\epsilon > 0$ con:

$$E(e^{\epsilon \|x\|}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\epsilon \|x\|} dP(x) < \infty$$

con $P = f(p)$ y $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$. Tenemos $z_j = u_j + v_j$ y $z = (z_1, \dots, z_n)$. Entonces, la función:

$$z \longmapsto \phi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{j=1}^n z_j x_j} dP(x) = E(e^{\langle z, f \rangle})$$

estando definida para $\max_j |u_j| \leq \epsilon$. La función ϕ se desarrolla en series en la vecindad de un punto $0 + iv^0 \in F + iF$. La función característica $\hat{P}(v) = \phi(t + iv)$ es una función analítica.

b) En el caso particular en que la esperanza es verdadera para todo $\epsilon > 0$, $\phi(z)$ se define para todo $z \in F + iF$.

La función ϕ , es llamada la T transformada de Laplace de P .

DEFINICION. Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ una variable aleatoria con valores sobre \mathbb{R}^n , tal que para toda j , f_j toma valores positivos. (Se dice que f es una variable aleatoria discreta). Para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se tiene:

$$q_\alpha = p(f_1 = \alpha_1; f_2 = \alpha_2; \dots; f_n = \alpha_n)$$

Suponemos que existe $\epsilon > 0$, α tal que:

$$\sum_{\alpha} q_\alpha e^{\epsilon |\alpha|} = \sum_{\alpha} q_\alpha e^{\epsilon (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} < \infty$$

La función generatriz de la distribución P de f , es la función:

$$G(z) = \sum_{\alpha} q_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} \longmapsto G'(z) = \sum_{\alpha} q_\alpha (z^\alpha)^\alpha$$

definida para $\max_j |z_j| \leq \epsilon$.

PROPIEDADES:

a) La función es analítica para $\max_j |z_j| \leq \epsilon$.

b) La transformada de Laplace se expresa en los valores numéricos que le da la función que genera.

$$p(x) = P(x) = \dots$$

En efecto:

$$p(x) = \int e^{i \sum_{j=1}^n t_j x_j} dP(x) = \sum_{\alpha} q_\alpha (i t)^\alpha q_\alpha$$

o) Por el teorema de partes, con f_j cada miembro de $p(x) = \sum$

$q_{\beta}(1+z)^{\beta}$. Si hacemos $z = 0$, se obtienen las relaciones:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha_j} p^{-1}(z) \Big|_{z=0} = \sum_{\beta_j} \beta_j (\beta_j - 1) \dots (\beta_j - \alpha_j + 1) q_{\beta}$$

si extendemos esto a multiíndices $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, tales que $\beta_j > \alpha_j$

d) Sean dos variables aleatorias independientes f y g . Entonces la función generatriz de la distribución $f + g$ es el producto de las funciones generatrices de las distribuciones f y g .

2.20. Distribuciones de Probabilidad usuales.

1. DISTRIBUCION DE PASCAL.

Sea p un parámetro real, tal que $0 \leq p \leq 1$. La distribución de Pascal de parámetro p es la distribución de la variable aleatoria discreta donde la distribución de probabilidad se escribe $P^* = q \delta_0 + p \delta_1$ con $q = 1 - p$ y δ es la delta de Dirac en el punto a de \mathbb{R} . Se tiene inmediatamente que $E(f) = p$ y $E(f^2) = p$, donde $\sigma^2 = p \cdot q$. La función característica se escribe para toda $u \in \mathbb{R}$: $P(u) = p \exp(iu) + q$. Se nota que si $p \in (0, 1)$, los valores que puede tomar f con probabilidad no nula son 0 y 1.

2. DISTRIBUCION DE BERNOULLI O DISTRIBUCION BINOMIAL.

La distribución de Bernoulli de parámetros p y n es la distribución de la variable aleatoria discreta $f = \sum_{j=0}^n x_j$ donde las variables aleatorias x_j son independientes dentro del conjunto, cada variable aleatoria x_j tiene la misma distribución de Pascal de parámetro p . La distribución de p probabilidades f se escribe como:

$$P = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \delta_j \quad \text{con } q = 1 - p$$

La función característica se calcula entonces para todo $u \in \mathbb{R}$ como: $P(u) = (q + p \exp(iu))^n$ donde $E(f) = np$ y $\sigma^2 = np \cdot q$. Se recuerda que las variables x_j puede tomar i con probabilidades q si $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

3. DISTRIBUCION DE POISSON.

La distribución de Poisson de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$ es la distribución de la variable aleatoria discreta f donde la distribución de

probabilidad se escribe:

$$p_k = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(k!)^{-1} \lambda^k}{j!} e^{-\lambda} \delta_k$$

Su función característica es:

$p^*(u) = \exp(\lambda(e^{iu} - 1))$ entonces $E(f) = \lambda$ y $E(f^2) = \lambda(\lambda+1)$ por lo que $\sigma^2 = \lambda$.

Los valores que puede tomar f con una probabilidad no nula son los puntos de \mathbb{N} .

4. DISTRIBUCION EXPONENCIAL SIMETRICA.

Es la distribución P de la variable aleatoria f con valores dentro de \mathbb{R} , definida por la densidad de probabilidad:

$$p(x) = \frac{1}{2} \lambda \exp(-\lambda |x|)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Su función característica se escribe $p^*(u) = \lambda^2 (\lambda^2 + u^2)^{-1}$, $u \in \mathbb{R}$.

5. DISTRIBUCION DE CAUCHY.

La distribución de Cauchy de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$ es la distribución P de la variable aleatoria f con valores dentro de \mathbb{R} definida por la densidad:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \lambda (1 + \lambda^2 x^2)^{-1}$$

su función característica se escribe para $u \in \mathbb{R}$:

$$p^*(u) = \exp(-\lambda |u|).$$

6. DISTRIBUCION NORMAL UNIDIMENSIONAL NORMALIZADA.

Se llama distribución Gaussiana normalizada a la distribución P de variable aleatoria f con valores en \mathbb{R} definida por la densidad:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2\sigma^2)$$

La función característica es $\forall u \in \mathbb{R}$: $p^*(u) = \exp(-u^2 \sigma^2/2)$ de donde se deduce $E(f) = 0$, $\sigma^2 = E(f^2) = 1$. Entonces $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

7. DISTRIBUCION NORMAL UNIDIMENSIONAL NO NORMALIZADA.

La distribución P de la variable aleatoria f con valores en \mathbb{R} de densidad $p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2\sigma^2)$ es la distribución Gaussiana normalizada.

$q = \sigma^{-1}(f - m)$ de media nula y de varianza uno tiene una distribución normal reducida. P' es definida por la densidad:

$$p(x) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

La función característica es: $\forall u \in \mathbb{R}; P'(u) = \exp(ium - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2)$.
Entonces $P' = N(m, \sigma^2)$.

8. DISTRIBUCION χ^2

Es la distribución de la variable aleatoria $\chi^2 = \sum_{j=1}^n f_j^2$. Las variables aleatorias f_j son independientes y tienen una distribución normal reducida. Un cálculo simple muestra que para todo $u \in \mathbb{R}$, la función característica es: $p^{-1}(u) = (1 - 2i u)^{-n/2}$.

2.21. Distribución Normal sobre un espacio vectorial.

tenemos el teorema siguiente:

TEOREMA Y DEFINICION DE DISTRIBUCIONES NORMALES.

Sea m un elemento de un espacio vectorial F real de dimensión n .
Sea C una aplicación lineal de F en F , tal que $\langle Cu, u \rangle \geq 0$ y $\langle Cu, v \rangle = \langle C, u, v \rangle$ con $u, v \in F$. Entonces la función siguiente sobre F :

$$p(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle Cu, u \rangle\right)$$

es la transformada de Fourier de una distribución de probabilidad $\mu = N(m, C)$ sobre F , de media m y covarianza C , donde C es particular donde C es invertible y donde F euclidiano se identifica con \mathbb{R}^n , entonces μ tiene por densidad:

$$p(x) = (2\pi)^{-n/2} |\det C|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C^{-1}(x-m), x-m \rangle\right)$$

Este teorema puede ser escrito en forma matricial.

En efecto, supongamos que F euclidiano se identifica con \mathbb{R}^n de modo que sus coordenadas pertenecen a una base. Entonces μ es caracterizada por una matriz lineal

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

El operador C se caracteriza por una matriz cuadrada simétrica $t_c = c$:

$$\forall^t [u] = [u_1, \dots, u_n]; \quad t[u] [C] [u] \geq 0$$

el Teorema significa que la función:

$$\phi(u) = \exp(i t[u] [m] - 1/2 t[u] [C] [u])$$

es la Transformada de Fourier de la probabilidad $N([m], [C])$ tal que:

$$[m] = E([f]); \quad [C] = E([f]) - [m]^t [m]$$

Es más, si C es invertible, la probabilidad está dada por la densidad:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n/2} (\det[C])^{-1/2} \exp(-1/2 t[x-m][C]^{-1} [x-m])$$

COROLARIO. La imagen de una regla normal $N(m, c)$ con una aplicación lineal l es la regla normal $N(lm, l C l^t)$

Naturalmente, el Corolario se puede enunciar en su forma matricial: Sea l una aplicación $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con matriz $[L]$. Entonces la imagen con l de la distribución normal $N([m], [C])$ sobre \mathbb{R}^n es la distribución normal $N([L][m], [L][C][L])$ sobre \mathbb{R}^n .

2.22. Relación entre la teoría de la probabilidad y la Estadística.

Consideremos un sistema físico que admite un cierto modelo: el estado del sistema depende de un parámetro arbitrario ω descrito por el conjunto dado Ω . Este conjunto está naturalmente formado de un conjunto de partes τ . El estado del sistema en cuestión conduce de una cierta aplicación f y g , por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \tau \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \Omega \cdot \tau \longrightarrow (F, G) \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{array} \quad (2.22)$$

donde \mathbb{R}^n es un conjunto de partes del conjunto τ , los estados ω y ω' se pueden medir: recordemos que \mathbb{R} y \mathbb{R}^n están provistos siempre de sus conjuntos habituales.

La teoría de la probabilidad consiste en suponer dada una probabilidad p sobre Ω con valores en \mathbb{R} y producirse de esta manera con f y g una τ y \mathbb{R}^n entonces las propiedades de esta probabilidad son:

1. que puede ser otro modo, distinto, la teoría abstracta de

probabilidad y la teoría constructiva de la probabilidad, donde el objeto es: poner los métodos (teóricos, numéricos,...) para construir las aproximaciones de probabilidades ligadas con $f, g \circ f \dots$. Desde este libro, nos interesamos sobre todo en el segundo aspecto.

La teoría de la estadística procede en sentido inverso de la teoría de la probabilidad. Así, si el esquema:

$$(\Omega, \tau) \xrightarrow{f} (F, \mathcal{F}) \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad (**)$$

es de hecho la probabilidad P sobre Ω se supone desconocida; un observa si un evento se liga con $f, g \circ f$ se realiza después en pruebas sucesivas e independientes. Se utiliza esta información para F .
Ejemplo de estadística paramétrica.

Tomando $\Omega = \mathbb{R}$ y por f , tomando la aplicación $\omega \rightarrow \omega$ de \mathbb{R} en espacio Ω se provee de una probabilidad P_θ que depende de un parámetro θ desconocido (tomado de un conjunto fijo Θ).

Por ejemplo, $\Theta = \mathbb{R}^+$ y $P_\theta = \text{Poisson}(\theta)$. Uno dispone de una muestra de tamaño n y se tiene una serie $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ donde son resultados de n pruebas sucesivas independientes. El problema de estimar θ y de evaluar la calidad de la información. Por ejemplo, si para $P_\theta = \text{Poisson}(\theta)$ uno toma $\hat{\theta} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i$, se tiene que tener la habilidad para ver si la estimación no tiene sesgo; si está muy dispersa; si se puede construir intervalos de confianza, etc.

En la práctica, uno no puede estudiar teoría de la probabilidad sin estudiar los problemas de estadística correspondientes. En efecto si el sistema físico en estudio acepta un modelo y falta construir la probabilidad sobre Ω , antes de hacer un análisis de probabilidad permite el cálculo de probabilidades de eventos ligados a la muestra (o a un solo suceso), según las posibilidades de aplicar los métodos de estadística. A menudo se utiliza una medición más bien que otro caso.

Es importante examinar la siguiente teoría de la estadística: en la teoría de la regresión lineal. Nos permite estudiar la probabilidad P , así como los parámetros que determinan ciertos aplicaciones. Los modelos son más complicados que

$$(\Omega, \tau) \xrightarrow{f} (F, \mathcal{F}) \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad (**)$$

por ejemplo, tenemos p valores x_1, \dots, x_p con una variable $x \in \mathbb{R}$.
Midiendo los valores correspondientes de $y = ax + b + \epsilon$ con a y b
desconocidos. ϵ representa un error aleatorio con $N(0, v)$, la
dispersión v es desconocida. Tenemos los p números:

$$y_j = a x_j + b + \epsilon_j \quad (1 \leq j \leq p)$$

así el problema no es solamente estimar v , sino a y b .

b) El análisis de componentes principales, el análisis canónico, etc.
Son dos métodos extremadamente puestos en práctica por analistas
sumamente variados (psicólogos, economistas, geógrafos...)

Este análisis utiliza en general, la media y la covarianza de
ciertas variables aleatorias. Se nota que los métodos que no utiliza
los dos primeros momentos, son utilizados cuando los fenómenos son
extremadamente complicados y dónde usar las leyes de probabilidad es
discutible. Uno puede entonces formular estos métodos de análisis
usando las nociones de probabilidades, haciendo uso aparte de los métodos
de descripción de proximidades, dentro de espacios Euclidianos.

En conclusión, para estudiar un sistema físico con la ayuda de un
cierto modelo del tipo $(*N)$, por ejemplo, se debe tener precaución en
usar un modelo probabilista; o sea, introducir una cierta probabilidad
 P sobre un ensemble Ω de combinación de causas. En efecto, uno puede
mostrar en ciertos casos que esta introducción es lógica, los eventos
 Ω no pueden ser probabilizables.

De la misma forma, si una situación puede considerarse abstracta
(en teoría) como probabilizable, el análisis de un modelo
probabilístico no será fructífero si se dispone de estadísticas.
Este análisis es prácticamente posible; así, si un modelo probabilista
necesita de cálculos complicados, o de información no detallada sobre
la aplicación de métodos de regresión estadística, pueden ser más
eficaces.

2.2. El ejemplo de caso: el problema de distribuciones de
probabilidad.

Se entiende por descripción científica de una regla de probabilidades
todo el sistema de números, o todo lo grande permitido de cálculo

numéricos sobre cierta regla, dentro de un modelo probabilístico.

Esta descripción "efectiva", varía según la manera en que la reglas intervienen (o sean utilizadas) dentro de un modelo probabilista. Por ejemplo, ésta descripción puede ser:

- a) teórica (ejemplo: función característica, determinación de una regla normal por media y covarianza).
- b) efectuada con el uso de la de la función de repartición.
- c) O bien efectuados por la serie de nombres permitidos por el establecimiento de fórmulas aproximadas (momentos, cumulantes cuasi-momentos).

En lo que concierne a b), uno notará el empleo generalizado ordenaciones que modifican la situación profundamente y de permitir cálculos imposibles de efectuar o que llevan años. Ahora presentamos notación concisa, concerniente a cuasi-momentos y cumulantes.

DEFINICION DE CUMULANTES. Sea P una regla de probabilidad sobre \mathbb{R}^n que cumple la condición:

$$E (e^{c \|x\|}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{c \|x\|} dP(x) < \infty$$

con $P = (p)$ y $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$

Los cumulantes de P son los números k_α índices por los multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ no nulos tales que para suficientemente pequeños tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{j=1}^n z_j x_j} dP(x) = \exp \left(\sum_{\alpha \neq 0} k_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} \right).$$

Incluye otra manera, si $L(z) = (z)$ denota la transformada de Laplace de P , los números k_α son las derivadas en el origen de L función:

$$L_{\alpha} (L) (0) = \sum_{\alpha \neq 0} k_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!}$$

Se nota que éste logaritmo se define para z suficientemente pequeños con $\|z\| < \epsilon$.

2.14. Relación entre momentos y cumulantes.

Tenemos:

$$(LP') (z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{j=1}^n z_j x_j} dP(x) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!}$$

con la convención: $m_0 = \int (x)^0 dP(x) = 1$

y la relación siguiente entre momentos y cumulantes:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!} = \exp \left(\sum_{\alpha \neq 0} k_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!} \right),$$

la cual se puede escribir:

$$\sum k_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!} = \text{Log} \sum m_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!}$$

Las identidades entre series enteras permiten calcular m_{α} en función de k_{α} e inversamente; tenemos por ejemplo, los diez primeros términos para $d = 1$ dentro [1]. A fin de mantener la relación entre los cuasimomentos y el desarrollo de polinomios de Hermita de una probabilidad P , definimos la transformación θ .

2.25. Definición.

Sea μ una medida limitada sobre \mathbb{R}^n σ -finita que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\|\alpha\|} d|\mu| < \infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

para una cierta $\alpha > 0$. Para todo $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$\begin{aligned} & -1/2 \sum_{j=1}^n z_j^2 \\ (\theta \mu)(z) &= e^{-1/2 \sum_{j=1}^n z_j^2} \quad (\mu \circ \theta^{-1})(z) \end{aligned} \quad (2.25.1)$$

Lo definiremos la transformación de Laplace de μ :

$$(\mu \circ \theta^{-1})(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{j=1}^n z_j x_j} d\mu(x_1, \dots, x_n)$$

o dicho de otra forma:

$$(\mu \circ \theta^{-1})(z) = e^{-1/2 \sum_{j=1}^n z_j^2} (\theta \mu)(z) \quad (2.25.2)$$

y como la transformada de Laplace es inyectiva, la transformacion θ es inyectiva y en consecuencia, toda medida μ que cumple con la definicion anterior se caracteriza por la funcion analitica $\theta\mu$.

2.26. Definición.

Se llaman **quasimomentos** de una medida μ sobre \mathbb{R}^n que verifican la definicion anterior, los coeficientes del desarrollo en serie entera $\theta\mu$.

Estos son los números m_α indexados por los multíndices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que son tales que:

$$(\theta\mu)(z) = \sum_{\alpha} m_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!}.$$

La medida μ se caracteriza entonces por la familia de sus momentos.

2.27. Polinomios de Hermite.

a) La serie H_0, H_1, \dots de polinomios de Hermite normalizados se define por:

$$H_k(x) = (-1)^k (e^{-x^2/2})^{(k)} \quad e^{-x^2/2}.$$

o bien por funcion generatriz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x)}{k!} t^k = e^{-t^2/2 + tx}.$$

o bien los polinomios $H_k(x) = (-1)^k (e^{-x^2/2})^{(k)}$ forman una base ortogonal respecto al producto interno de $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ con $\mu = N(0,1)$.

La base generalizada de $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ está formada por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}$:

$$H_\alpha(x) = H_{\alpha_1}(x_1) H_{\alpha_2}(x_2) \dots H_{\alpha_n}(x_n).$$

Los polinomios $H_\alpha(x) = (-1)^{|\alpha|} (e^{-x^2/2})^{(\alpha)}$ forman una base ortogonal respecto al producto interno de $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ con $\mu = N(0, I)$ es la medida gaussiana normalizada sobre \mathbb{R}^n .

3. PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y CAMPOS ALEATORIOS.

Tenemos del capítulo anterior:

La modelación estocástica de una variable, toma sus valores dentro de un espacio medible (X, \mathcal{U}) , Y consiste en la noción de un espacio probabilidad (Ω, \mathcal{B}, P) y de una aplicación medible ξ de Ω con valores dentro de $X : \xi$, siendo una variable aleatoria.

Esto, puede aplicarse en el caso particular de n números reales aleatorios: en ése caso $X = \mathbb{R}^n$. Ahora consideremos en éste capítulo el caso más complicado, correspondiente intuitivamente al caso $n = \infty$. Por ejemplo, T define una parte abierta de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$

El elemento aleatorio, es una función numérica regularmente definida sobre T , con valores dentro de un espacio topológico F , por ejemplo, $F = \mathbb{R}^k$.

Esta función corresponde, por ejemplo, con una repartición de velocidad, o con un reparto de presión. Tal modelación estocástica es llamada, una función aleatoria.

Tenemos por ejemplo, el espacio $C(T, F) = X$ dos funciones continuas reales sobre T , de la topología de la convergencia uniforme sobre las partes compactas de T , y el conjunto Boreliano correspondiente: $U = T_{\mathcal{B}}(X)$.

En vista de lo anterior, es importante estudiar en éste capítulo las variables aleatorias con valores dentro del espacio de dimensión infinita $C(T, F)$.

Para toda la parte finita $i = (t_1, \dots, t_n)$ de T , componemos la variable aleatoria

$$\xi : \Omega \longrightarrow C(T, F)$$

con la aplicación lineal

$$\delta_i = (\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n}) : C(T, F) \longrightarrow F^n$$

$$p \longrightarrow (p(t_1), \dots, p(t_n))$$

se obtiene así una variable aleatoria

$$\xi_i = (\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) : \Omega \longrightarrow F^n$$

Estudiaremos en primer lugar, las familias

$$\{ \xi(t), t \in T \}$$

de variables aleatorias con valores dentro de un espacio F fijo; a tal familia se le llama *proceso estocástico*. Un Proceso Estocástico (PE) es una función aleatoria, es decir, una variable aleatoria con valores dentro de un espacio de trayectorias regulares.

3.1. Procesos estocásticos clásicos

DEFINICION. Sea T un conjunto de índices. Sea F un conjunto de estados, provistos de un conjunto B de partes. Un proceso estocástico dentro de T nos provee de los estados dados (F, B) relativos a un espacio de probabilidad (Ω, τ, P) es por definición, una aplicación $t \rightarrow \xi(t)$ de T dentro del espacio de variable aleatoria definido sobre Ω , con valores dentro de F .

De la misma manera que una función se denota indiferentemente por f ó $f(x)$, un PE se denota indiferentemente por ξ ó $\xi(t)$.

A menudo, a $F = \mathbb{R}^n$ se le llama un conjunto Boreliano. Si T es una parte de \mathbb{R}^n con $d > 1$, se puede decir que $\xi(t)$ es un *campo estocástico* sobre T ; se reserva la terminología "proceso estocástico", en el caso donde T es parte de \mathbb{R} ; en éste caso, t se interpreta como el tiempo.

3.2. Relación con la modelación estocástica.

En el caso particular donde cada variable aleatoria $\xi(t) : \Omega \rightarrow F$ se caracteriza por una aplicación medible bien precisa $\Omega \rightarrow F$, notamos $\xi(t)$, es un PE clásico definiendo una aplicación:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \Omega & \xrightarrow{\quad} & F^T \\ \omega & \xrightarrow{\quad} & (t \rightarrow \xi(t, \omega)). \end{array}$$

El espacio producto F^T , se interpreta como el espacio de funciones $T \rightarrow F$. Si F^T es llamada como tribu cilíndrica \mathcal{I}_C (se verá a continuación), entonces f es medible, y la variable aleatoria f caracteriza el proceso $\xi(t)$.

Se puede considerar que f modela un elemento aleatorio F^T . Más precisamente, f asocia con todo punto ω la función aleatoria $t \rightarrow \xi(t, \omega)$.

La regla de ésta función aleatoria, es la imagen de P por F , es decir, la regla de f .

Se dice que $f(\omega)$ es la trayectoria aleatoria asociada con ω y que intuitivamente las trayectorias aleatorias, elementos de F^T , son producto de los procesos estocásticos clásicos y toman en cuenta la medida de probabilidad $f(P)$.

Esto significa por ejemplo, que si G es una parte de F^T , de probabilidad nula, entonces la probabilidad para que la trayectoria $\in G$ es nula. De lo contrario, si $P(G) \neq 0$, el nombre $P(G)$ nos da la probabilidad para $f(\omega) \in G$ conforme al principio de probabilidad.

3.3. Función Aleatoria.

Desde el punto de vista práctico, ésta presentación matemática resulta insuficiente por dos razones: una variable aleatoria es seguramente una clase de funciones de equivalencia medible. Donde $I =$ todo $t \in T, \xi(t)$ se define seguramente, fuera de un ensamble N_t de probabilidad nula, donde la reunión de N_t se fuerza para que sea despreciable. Al observar las trayectorias, uno puede calcular las integrales que se escriben formalmente

$$\int_T \xi_t(\omega) m(t)$$

o con derivar la aplicación $t \rightarrow \xi_t(\omega)$,

ésto exige que la trayectoria sea integrable, o derivable. Esa es la razón por la que tenemos que reforzar la noción de proceso, regresando con la noción de función aleatoria evocada en la introducción de éste capítulo.

Nueva problemática.

Se nota que el empleo de la noción de proceso estocástico ó de función aleatoria, conducen a problemas prácticos y numéricos que necesitan de técnicas nuevas. En efecto, si un elemento aleatorio se modela por una variable aleatoria $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y si β es cierta aplicación $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, las técnicas de cálculo diferencial e integral usuales (cambiando las variables dentro de las integrales, integración por partes, fórmulas de cuadraturas), son usadas para evaluar la regla de $\beta \circ \alpha$ conociendo la regla de la variable α . Más de acuerdo con los

procesos \mathbb{R}^n , se reemplaza por un espacio de dimensión infinita y todas las técnicas evocadas, son más utilizadas. Faltan técnicas nuevas y en particular, técnicas que nos permitan el caso de dimensión finita. Las técnicas de reglas marginales son de éste tipo.

3.4. Sistema de Distribuciones Marginales.

Sea $\{ \xi(t), t \in T \}$ un proceso estocástico clásico, indexado dentro de T , con valores dentro de (F, B) .

a) Para toda parte no vacía finita

$$i = \{ t_1, \dots, t_n \} \text{ de } T,$$

el espacio $F^{|i|}$ es conocido como el *espacio producto*, con $|i|$ definiendo el número de elementos de i :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\xi_i} & F^{|i|} \\ \omega & \xrightarrow{\quad} & (\xi(t_1, \omega), \dots, \xi(t_n, \omega)) \end{array}$$

es una variable aleatoria, es decir, una clase de aplicación medible $\Omega \rightarrow F^{|i|}$.

Sea I el conjunto de partes finitas no vacías y no ordenadas de T . Cuando i describe I , el conjunto de reglas de probabilidad $\xi_i(P)$ es el sistema de reglas marginales de $\xi(t)$.

b) Sean $\xi(t)$ y $\xi'(t)$, dos procesos estocásticos clásicos indexados dentro del mismo ensamble T , dentro éstos estados, dentro del mismo ensamble (F, B) . Se dice que $\xi(t)$ y $\xi'(t)$ son *isínomos*, y se escribe $\xi(t) \cong \xi'(t)$ si $\xi(t)$ y $\xi'(t)$ admiten el mismo sistema de reglas marginales.

3.5. Conjunto cilíndrico en F^T .

Para toda $i \in I$ en una proyección canónica:

$$\begin{array}{ccc} F^T & \xrightarrow{\pi_i} & F^{|i|} \\ (x_t)_{t \in T} & \xrightarrow{\quad} & (x_t)_{t \in i} \end{array}$$

cada producto acabado $F^{|i|}$, es llamado del conjunto producto B_i . El conjunto cilíndrico $T_c(F^T)$ sobre F^T , es el conjunto engendrado por todas las aplicaciones π_i . Para todo $G_i \in B_i$, $\pi_i^{-1}(G_i)$ se llama un cilindro medible de F^T .

3.6. Teorema de Kolmogoroff.

Sea I el conjunto de partes finitas no nulas del ensamble T de índices. Sea F un espacio de estados, el cual es un espacio métrico separable completo. Entonces, para que un conjunto $\{m_i, i \in I\}$ de reglas de probabilidad sobre los espacios $F^{|i|}$ sean los sistemas de reglas marginales de un proceso estocástico $\xi(t)$ indexado dentro de T , que toma sus estados dentro de F , es necesario y suficiente que el sistema $\{m_i\}$ sea *coherente*, es decir, que toda pareja (i, i') de partes finitas no nulas de I , tales que $i \supset i'$, entonces $m_{i'}$ es la imagen de m_i para la aplicación:

$$\begin{aligned} F^i &\longrightarrow F^{i'} \\ (x_t)_{t \in i} &\longrightarrow (x_t)_{t \in i'} \end{aligned}$$

con el fin de hacer un ejemplo, hagamos una definición.

3.7. Procesos con crecimientos independientes.

Sea $\xi(t)$ un proceso definido sobre un intervalo $T = [a, b[$ de \mathbb{R} , con valores dentro de un espacio vectorial F complejo de dimensión k .

a) Para a_1 y $a_2 \in T$, $a_1 < a_2$, la variable aleatoria

$$\xi(a_2) - \xi(a_1)$$

se llama el crecimiento del proceso $\xi(t)$ sobre el intervalo $a_1, a_2 [$.

b) Se dice que $\xi(t)$ tiene un crecimiento independiente, si los crecimientos de $\xi(t)$ sobre dos intervalos disjuntos $[a_j, a_{j+1}[$ de T , sean de variables aleatorias independientes.

2.3.8. Procesos de Poisson con media $\lambda(t)$.

Sea λ una aplicación medible creciente, definida sobre $T = [0, +\infty[$ con valores positivos tal que $\lambda(0) = 0$. Entonces, existe un proceso $\pi(t)$ sobre T con valores reales, nula para $t = 0$, con crecimientos independientes y tales que para

$$I = [a_1, a_2[\subset T, \text{ el crecimiento } \pi(a_2) - \pi(a_1).$$

Dos procesos que satisfacen esta condición son *isonomes*; éstos son llamados "procesos de Poisson de media λ ". Un proceso de Poisson, usualmente se obtiene haciendo $\lambda(t) = t$.

3.9. Procesos de Wiener normalizados, con valores dentro de un espacio

Euclidiano.

Sea I un espacio Euclidiano: con $\dim F < \infty$. Entonces existe un proceso $W(t)$ sobre $T = [0, +\infty[$ con valores dentro de F , nulos para $t = 0$ con crecimientos independientes y tal que para todo intervalo

$$I = [t, t'] \subset T,$$

el crecimiento de W sobre I , da una regla normal centrada, de covarianza $(t' - t) I_d(F)$.

Los procesos que satisfacen esta condición, son *isonomos*: éstos son llamados los procesos de Wiener normalizados con valores dentro de F .

3.10. Procesos constantes por intervalos sobre \mathbb{R}^+ = $[0, +\infty[$

a) Consideremos una serie $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ estrictamente creciente, de números reales, tales que

$t_0 = 0$ y $(t_k) \uparrow \infty$. Sea $(Y_k)_{k=0}^{\infty}$ una serie de variables aleatorias.

Notamos por otra parte, que de acuerdo al Teorema de Kolmogoroff aplicado al caso $T = [0, 1, 2, \dots]$, se puede construir la serie $\xi(t)$ para toda k , la regla conjunta de variables y_0, y_1, \dots y y_k . Entonces uno puede considerar los procesos $\xi(t)$ sobre \mathbb{R}^+ tal que:

$$\xi(t) = y_k \quad \text{si} \quad t_k \leq t < t_{k+1}$$

Existe entonces, una serie fija de intervalos deterministas $[0, t_1[$, $[t_1, t_2[$, ... tales que los procesos $\xi(t)$ son constantes sobre cada uno de éstos intervalos.

b) Considerando ahora el caso de que los intervalos son aleatorios. Sea una fase de variables Y como se definieron anteriormente, relativos

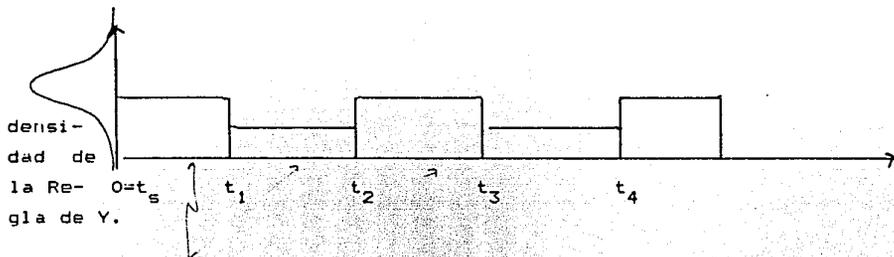
a un espacio de probabilidad Ω' . Consideremos ahora una serie $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ de aplicaciones medibles $\Omega' \rightarrow [0, +\infty[$ definido sobre el vector espacio de probabilidad Ω'' . Se puede entonces, introducir el espacio producto $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, llamado de la probabilidad producto P , y el proceso $\xi(t)$ sobre \mathbb{R}^+ tal que:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \xi(t) = Y_k \quad \text{si} \\ \sum_{j=1}^{k-1} X_j \leq t \leq \sum_{j=1}^k X_j$$

Donde en éste caso, $\xi(t)$ es constante dentro de intervalos aleatorios consecutivos. Hagamos un ejemplo:

3.11. Procesos con saltos Poissonianos sobre \mathbb{R}^+ .

Tenemos el caso particular donde las variables X_j son variables de Poisson independientes, de misma media. Se puede considerar, por ejemplo, el caso donde Y_k son independientes de la misma distribución. Los procesos así construidos pueden usarse para modelar una acción aleatoria de distribución dada, pero donde el valor cambia en ciertos instantes aleatorios es de aplicación en estados independientes y tiene una misma distribución de Poisson. Se obtienen trayectorias del tipo siguiente:



los intervalos en el proceso son constantes, en sus duraciones aleatorias X_1, X_2, \dots .

3.12. Procesos periódicos.

Un proceso $\xi(t)$ sobre \mathbb{R}^+ , por ejemplo, se dice que es *periódico*, de período $\theta > 0$, si los procesos $\xi(t)$ y $\xi(t+\theta)$ son *isonomes*.

3.13. Procesos de segundo orden.

Definimos anteriormente F , con la complejidad de un espacio Eucladiano F_e , donde la dimensión forzosamente finita, se denota por n . Donde relacionamos F_e con una fase ortonormal, el producto escalar dentro de F , se escribe

$$(z, z') = \sum_{j=1, \dots, k} z_j^- z_j'.$$

Un proceso $\xi(t)$ definido sobre un conjunto T , y con valores dentro de F , se dice de 2° orden, si todas las variables aleatorias son de 2° orden.

Si T es un espacio topológico, el proceso de segundo orden $\xi(t)$ es una aplicación continua de T dentro del Espacio de Hilbert $L^2(\Omega, F)$. Así pues, $\forall t_0$, ésto significa que $E(\|\xi(t) - \xi(t_0)\|^2)$ tiende a

cero, si t tiende a t_0 . Así pues, si utilizamos las coordenadas dentro de F , $\xi(t)$ tiene componentes $\xi_j(t)$, $1 \leq j \leq n$ y

$$E(|\xi(t) - \xi(t_0)|^2) = \sum_{j=1}^n E(|\xi_j(t) - \xi_j(t_0)|^2).$$

Aparece así que un proceso de segundo orden $\xi(t)$ es continuo, si y solamente si, cada uno de sus componentes, es un proceso continuo de segundo orden escalar.

3.14. Media - Central de un proceso.

a) La media de un proceso, $\xi(t)$ de segundo orden sobre T , con valores dentro de F , es la función siguiente, definida sobre T , con valores dentro de F :

$$t \longrightarrow E(\xi(t)).$$

b) El proceso: $n(t) = \xi(t) - E(\xi(t))$.

se llama *proceso centrado dedido* de ξ .

Centrar un proceso de 2º orden es pues, sustraer el proceso igual, idénticamente con la función determinista $t \rightarrow E(\xi(t))$. Se nota que $n(t)$ tiene media nula: se dice que el proceso $n(t)$ es un proc centrado.

3.15. Autocorrelación - Covarianza.

a) La función de autocorrelación de un proceso de segundo orden $\xi(t)$, definida sobre T , con variables dentro de I , es la función seguramente definida sobre $T \times T$ con valores dentro de: $F \otimes F^{-}$:

$$R(t, t') = E(\xi(t) \otimes \xi(t')).$$

b) La función de covarianza de $\xi(t)$ es por definición, la función de autocorrelación del proceso centrado:

$$n(t) = \xi(t) - E(\xi(t));$$

$$C(t, t') = E((\xi(t) - E(\xi(t))) \otimes (\xi(t') - E(\xi(t'))))$$

Si tenemos más procesos, se escribe C_ξ en lugar de C , y R_ξ en lugar de R .

3.16. Expresiones con la ayuda de coordenadas

Si utilizamos coordenadas dentro de F , para toda t fija, el elemento aleatorio $\xi(t)$ de F , puede identificarse con el elemento

$$(\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)) \in \mathbb{C}^n.$$

Dicho de otra manera, la fase de $\xi(t)$, equivale con la base de n procesos con valores complejos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad.

a) La media de procesos $\xi(t)$, es una colección de n funciones con valores complejos sobre T ; sea:

$$t \rightarrow (E(\xi(t)))_j = E(\xi_j) = E(\xi_j(t)).$$

b) La función de autocorrelación $R(t, t')$, se caracteriza por n^2 funciones:

$$R_{j,j'}(t, t') = E(\xi_j(t) \xi_{j'}(t'))$$

con valores complejos.

En efecto, si (e_1, \dots, e_n) definen una fase ortonormal de F_2 , el proceso $\xi(t)$ puede escribirse:

$$t \rightarrow \xi(t) = \sum_1^n \xi_j(t) e_j.$$

Consecuentemente, tendremos:

$$\begin{aligned} R(t, t') &= E\left(\left(\sum_j \xi_j(t) e_j\right) \otimes \sum_{j'} \xi_{j'}(t') e_{j'}\right) \\ &= \sum_{j,j'} e_j \otimes e_{j'} E(\xi_j(t) \xi_{j'}(t')) \\ &= \sum_{j,j'} R_{j,j'}(t, t') e_j \otimes e_{j'}. \end{aligned}$$

Así tenemos que las funciones $R_{j,j'}$ son los n^2 componentes de la función vectorial $R(t, t')$:

$$(R(t, t'))_{j,j'}(t, t')$$

c) Para obtener una escritura matricial de ésta función, se identifica $F \otimes F^{-}$ con un espacio de operadores lineales, así pues, con un espacio de matrices:

$$\begin{aligned} F \otimes F^{-} &\longrightarrow \text{End } F \cong M_n \\ u \otimes v^{-} &\longrightarrow (x \rightarrow (v, x) u). \end{aligned}$$

Tomando éstas condiciones, las fórmulas anteriores pueden escribirse en su forma matricial:

$$[R(t, t')] = E[\xi(t) \xi(t')^*],$$

o por convención, el segundo miembro es:

$$E \left(\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t')^* & \dots & \xi_n(t')^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} E(\xi_1(t) \xi_1(t')^*) & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ E(\xi_n(t) \xi_n(t')^*) & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Se dice que un elemento $M \in F \otimes F^{-}$, es positivo, si el operador correspondiente de $\text{End } F$ es hermitiano positivo:

$$\forall z \in F \quad (Mz, z) = (z, Mz) \geq 0.$$

En términos de coordenadas, esto se escribe:

$$M_{jj'} = M^{-}_{jj'} \quad \text{y para} \\ z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} : \sum_{j,j'=1}^n z_j \bar{z}_{j'} M_{jj'} \geq 0.$$

Se nota $\tau \rightarrow \tau^*$ la aplicación dentro de $F \otimes F^{-}$, la cual corresponde con la aplicación:

$$M \rightarrow M^* \text{ dentro de } \text{End } F.$$

3.17. Lema.

La forma bilineal:

$$F \times F^{-} \rightarrow \mathbb{C} \quad u \quad v^{-} \rightarrow (v, u).$$

definida por la propiedad universal del producto tensorial, con la forma lineal:

$$\text{tr} \\ F \otimes F^{-} = \text{End } F \rightarrow \mathbb{C}$$

la cual coincide con la traza usual de operadores. Para todo endomorfismo $a \geq 0$, con $\text{tr}(a) \geq 0$.

Es urgente mostrar que para todo $a \in \text{End } F$ y para todo cambio de una base ortonormal de F_e , tenemos:

$$\text{tr } a = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

Por linealidad, es suficiente mostrar que $a = u \otimes v^{-}$. Con lo anterior, tenemos que el término en general de a , es: $a_{jj} = u_i \bar{v}_j$.

6

$$\sum_{j=1}^n a_{jj} = \sum_{j=1}^n u_j \bar{v}_j = (v, u).$$

Finalmente, si a es positiva:

$$(e_j, a(e_j)) = a_{jj} \geq 0, \text{ para toda } j. \quad \text{O } \text{tr}(a) \geq 0.$$

3.18. Propiedades de las funciones R y C .

a) Igualando las trazas de los dos miembros de:

$$R(t, t') = E(\xi(t) \otimes \xi(t'))$$

se tiene:

$$\text{tr } R(t, t') = E(\langle \xi(t') | \xi(t) \rangle).$$

b) Para t y $t' \in T$, tenemos $R(t, t')^* = R(t, t')$. En efecto, si

tenemos $u, v \in F$:

$$\begin{aligned} (R(t, t')^* u, v) &= (u, R(t, t') v) = (u, E[\xi(t) (\xi(t'), v)]) \\ &= E((u, \xi(t)) (\xi(t'), v)). \end{aligned}$$

entonces:

$$(R(t', t) u, v) = (E \xi(t') (\xi(t), u), v).$$

$$\begin{aligned} &= E((\xi(t), u) (\xi(t'), v)) = \\ &= E((u, \xi(t)) (\xi(t'), v)) \end{aligned}$$

c) Para todo $t \in T$, $R(t, t)$ es *hermitiano* positivo. En efecto, con a) $R(t, t)$ es *hermitiano*. Es más, $R(t, t)$ es positivo:

$$(R(t, t) u, u) = E(|u, \xi(t)|^2) \geq 0.$$

d) Suponiendo que F se obtiene por la complejización de la suma de dos espacios Euclidianos, es decir, $F = F_1 \oplus F_2$. Entonces $\xi(t)$ se caracteriza por la pareja formada por un proceso $\xi_1(t)$ con valores dentro de F_1 , y un proceso $\xi_2(t)$ con valores dentro de F_2 . Calculando $R(t, t')$, es cómodo utilizar la escritura matricial de $R(t, t')$. Haciendo una descomposición por bloques:

$$R(t, t') = E \left(\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t')^* & \xi_2(t')^* \end{bmatrix} \right).$$

entonces:

$$R(t, t') = \begin{bmatrix} R_1(t, t') & E(\xi_1(t) \xi_2(t')^*) \\ E(\xi_2(t) \xi_1(t')^*) & R_2(t, t') \end{bmatrix}$$

e) Tenemos la relación siguiente, entre: función media, función de autocorrelación, y función de covarianza:

$$C(t, t') = E((\xi(t) - E(\xi(t))) \otimes (\xi(t') - E(\xi(t'))),$$

siendo

$$C(t, t') = R(t, t') - E(\xi(t) \otimes E(\xi(t'))).$$

f) Se nota $\xi^*(t)$ la restricción del proceso $\xi(t)$ con una parte T' de T . Entonces, se obtiene la función de autocorrelación y la función de covarianza de $\xi^*(t)$ restringidas de T' la función de correlación y la función de covarianza de $\xi(t)$. Esto resulta directamente de la definición.

g) Sea G un espacio *hermitiano* de dimensión m y sea L una aplicación lineal $F \rightarrow G$, donde la adjunta se denota por L^* . Entonces, los procesos $\eta(t) = L \cdot \xi(t)$ con media $L(E \xi(t))$ y por función de autocorrelación:

$$R_{\eta}(t, t') = L R_{\xi}(t, t') L^{\circ}$$

En efecto, para u y $v \in G$:

$$\begin{aligned} (u, R_{\eta}(t, t') v) &= (u, E(L \xi(t) (L \xi(t'), v))) \\ &= (u, L E(\xi(t) (\xi(t'), L^{\circ} v))) = \\ &= (u, L R_{\xi}(t, t') L^{\circ} v). \end{aligned}$$

La proposición siguiente, nos permite reconocer muy simplemente que un proceso de segundo orden es continuo.

3.19. Proposición.

Un proceso de segundo orden, es continuo si y sólo si, su función de autocorrelación es continua.

3.20. Lema.

Sea $(x_l)_{l=1}^{\infty}$ una serie de vectores de un espacio de Hilbert complejo H tal que la serie doble de productos escalares (x_l, x_m) tienden hacia un límite a si l y m tienden hacia el infinito. Entonces, la serie (x_l) converge hacia un límite x , tal que $\|x\|^2 = a$.

En efecto:

$$\begin{aligned} \|x_m - x_l\|^2 &= (x_m - x_l, x_m - x_l) = \\ &= (x_m, x_m) + (x_l, x_l) - 2 \operatorname{Re}(x_m, x_l) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como H es completo, (x_l) converge y $(x_l, x_m) \rightarrow \|\lim x_l\|^2$

3.20. Definición de R y C si F es Euclidiano.

Sea el caso, que es fácil de suprimir la barra en la definición anterior:

$$R(t, t') = E(\xi(t) \otimes \xi(t')).$$

Naturalmente, todo proceso con valores dentro de un espacio Euclidiano F , es por fuerza un valor dentro de la complejificación de F .

3.21. Definición.

Un proceso estocástico definido sobre un conjunto T , con valores dentro de un espacio Euclidiano F , se llama *Gaussiano*, si para toda parte finita no vacía $i = (t_1, \dots, t_n)$ de T , la variable $\xi_i = (\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ tiene una distribución Gaussiana sobre F^n .

Se dice así, que $\xi(t)$ es un proceso Gaussiano real. En el caso de que F es Hermitiano de dimensión n , se puede considerar como Euclidiano de dimensión $2n$, proveyendo F de un producto escalar real $2 \operatorname{Re}(z, z')$. Un proceso Gaussiano con valores dentro de este espacio Euclidiano se llama *proceso Gaussiano Complejo*.

Se mantienen las características de medias y covarianzas de procesos de 2o. orden.

3.22. Teorema.

Sea T un conjunto y F la complejificación de un espacio Euclidiano F_0 .

a) Para todo proceso de segundo orden definido sobre T con valores dentro de F , para toda parte finita no nula $i = (t_1, \dots, t_n)$ de T , el operador M_i de $F^{|i|}$ donde la descomposición por bloques hecha para $C(t_j, t_k)$, es autoadjunta positiva.

b) Recíprocamente, sea m una función de T dentro de F , y sea $C(t, t')$ una función definida sobre $T \times T$ con valores dentro de $F \otimes F^-$, tal que $\forall i = (t_1, \dots, t_n) \subset T$, el operador M_i de $F^{|i|}$ donde la descomposición por bloques está definida por las $C(t_j, t_k)$ es autoadjunta positiva. Entonces, existe un proceso Gaussiano de media m y de covarianza C .

Ejemplos.

a) Sea $W(t)$ un proceso de Wiener normalizado sobre $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ con valores dentro de un espacio Euclidiano F_0 . Para $0 \leq t < t'$ las variables aleatorias $W(t)$ y $\Delta = W(t') - W(t)$ son independientes, centradas. Donde la función de covarianza C de un proceso de Wiener es tal que:

$$\begin{aligned} C(t, t') &= E(W(t) \otimes W(t')) = E(W(t) \otimes (W(t) + \Delta)) \\ &= E(W(t) \otimes W(t) + 0) = t \operatorname{Id}(F_0) \end{aligned}$$

ó:

$$C(t, t') = \operatorname{Id}(F_0) \times \min(t, t').$$

recíprocamente, se puede ver que esta función verifica las condiciones del Teorema anterior, donde la aplicación de este Teorema hace nueva demostración de la existencia de procesos de Wiener.

b) Sea μ una medida positiva sobre \mathbb{R} . La función

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iut} d\mu(u)$$

es tal que para toda n , para todo sistema $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ de n números reales, en los que tenemos los reales λ_i :

$$\sum_{j,j=1}^n \lambda_j \lambda_k R(t_j - t_k) = \int \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{i u t_j} d\mu u \geq 0.$$

donde existe un proceso Gaussiano sobre \mathbb{R} de media nula y de covarianza $R(t-t')$. Por ejemplo, de acuerdo al Teorema anterior, existe un proceso Gaussiano centrado sobre \mathbb{R} , donde la covarianza es la función $\exp -\alpha |t-t'|$. Tal proceso es a veces llamado un *proceso de Ornstein Uhlenbeck*.

3.23. Procesos Estacionarios.

Sea G un conjunto de transformación de un conjunto T , tal que G contiene la transformación idéntica, y tal que G es estable por composición. Sea $\xi(t)$ un proceso estocástico indexado dentro de T .

a) Se dice que $\xi(t)$ es estacionario en relación con G si para todo $g \in G$ el proceso $\xi(gt)$ es *isonomo* con proceso $\xi(t)$.

b) Si $\xi(t)$ es de segundo orden, se dice que $\xi(t)$ estacionario de media, de orden dos si el proceso $\xi(t)$ y $\xi(gt)$ admiten mismos momentos de orden uno y dos para todo $g \in G$:

Entonces, para todo $t, t' \in T$ y todo $g \in G$:

$$\begin{aligned} E(\xi(gt)) &= E(\xi(t)), \\ R(gt, gt') &= R(t, t'). \end{aligned}$$

Entonces, un proceso estacionario de segundo orden es estacionario en media del orden dos, porque las dos distribuciones de probabilidad son iguales sobre \mathbb{R}^n y tiene los mismos momentos de orden uno y dos. Lo recíproco es válido para los procesos Gaussianos.

En el caso particular, que $T = \mathbb{R}^+$ y G es el grupo de translaciones positivos $t \rightarrow t+h$, con $h \geq 0$, las relaciones anteriores se escriben:

$$\begin{aligned} E(\xi(t+h)) &= E(\xi(t)), \\ R(t+h, t'+h) &= R(t, t'), \end{aligned}$$

Dicho de otra manera, la media de un proceso estacionario sobre \mathbb{R}^+ es una función constante sobre \mathbb{R}^+ , teniendo que $C(t, t')$ y $R(t, t')$ no dependen de la diferencia $t-t'$. Se puede escribir entonces:

$$R(t, t') = R(t-t') = E(\xi(t) \otimes \xi(t'))$$

Empleando una convención análoga para la función de covarianza. Con las mismas propiedades para los procesos estacionarios sobre \mathbb{R} ; donde en éste caso, G es el grupo de todas las translaciones $t \rightarrow t+h$, h real.

Aplicaciones.

a) un proceso de Wiener es estacionario, pues la covarianza $\min(t, t')$ no es una función de $t-t'$.

b) Un proceso de Ornstein Uhlenbeck es estacionario.

3.24. Teorema de existencia de la medida espectral matricial.

Para que una función continua $R(t) : t \in \mathbb{R}^d \rightarrow \text{End}(F)$ sea una función de autocorrelación de un proceso $\xi(t)$ continuo de segundo orden sobre \mathbb{R}^d con valores dentro de F , estacionario con medias de orden dos, es necesario y suficiente que la distribución templada $m = (2\pi)^{-d} \mathcal{F} R$, sea una medida positiva sobre \mathbb{R}^d con valores dentro de $\text{End}(F)$.

De acuerdo con la fórmula de inversión de Fourier $R = \mathcal{F}^{-1} m$, es decir:

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, t \rangle} m(u) = R(t).$$

ó m es llamada la medida espectral matricial del proceso ξ .

Tomando las ordenadas sobre F , relativas con una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de F , uno obtiene la forma equivalente al Teorema:

3.25. Forma matricial del Teorema de Existencia.

Para que una función $R(t) = \{R_{jj'}(t)\}_{jj'} : \mathbb{R}^d \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n)$ sea la función de autocorrelación de proceso continuo de segundo orden $\xi(t) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^n$, de componentes $\xi_j(t)$ y es necesario y suficiente que exista una colección de medidas complejas $m_{jj'}$ sobre \mathbb{R}^d , tales que:

(i) para todo Boreliano A de \mathbb{R}^d , la matriz de coeficientes $m_{jj'}(A)$ sea positiva.

(ii) Sean j y $j' = 1, 2, \dots, n$. R_{jj} es factor de $(2\pi)^{-d}$ entonces, la Transformada de Fourier inversa de m_{jj} es:

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, t \rangle} m_{jj'}(u) = R_{jj'}(t).$$

Las medidas m_{jj} son llamadas *espectrales*; por $j \neq j'$, $m_{jj'}$ es llamada la *medida inter-espectral*.

3.26. Medida espectral de Poisson.

Las nociones, siguen del Teorema. En componentes, la medida

vectorial m con aplicación en la traza: $\text{tr}: \text{End } F \rightarrow \mathbb{C}$ se obtiene por linealidad la medida limitada por valores complejos, definida sobre \mathbb{R}^d denotada por $\text{tr } m$. Como se vió, si $u \geq 0 \Rightarrow \text{tr } u \geq 0$. Como m es una medida positiva, por lo tanto, $\text{tr } m$ es una medida positiva; y tr de m es

la medida espectral de Poisson. Tenemos que:

$$\text{tr} [E (\xi (t+h) \otimes \xi (h))] = E [(\xi (h) , \xi (t+h))].$$

En consecuencia, igualando las trazas tenemos:

$$\forall t, \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, t \rangle} (\text{tr } m) (u) = E [(\xi (h) , \xi (t+h))].$$

Esto en forma de componentes se escribe:

$$\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, t \rangle} m_{jj} (u) = \sum_{j=1}^n E (\xi_j (h) \xi_j (t+h)).$$

En el caso particular, $t = 0$ tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\text{tr } m) (u) = E (\| \xi (h) \|^2).$$

El segundo miembro, se llama la Poissoniana del proceso $\xi (t)$. Esta última fórmula significa que la Poissoniana de un proceso $\xi (t)$ es igual a la Área total bajo la curva de $\text{tr } m$; esto es porque se le llama

de ese modo. En el caso particular de un proceso escalar, $F = \mathbb{C}$, tenemos $\text{tr } m = m$.

3.27. Interpretación de las componentes de la medida espectral matricial m .

Si se nombran las aplicaciones de n procesos $\xi_1 (t) , \dots , \xi_n (t)$ sobre \mathbb{R}^d con valores reales, relativos al mismo espacio de pruebas (Ω, \mathcal{F}, P) , de manera que el proceso vectorial:

$$\xi (t) = (\xi_1 (t) , \dots , \xi_n (t)),$$

las cuales, verifican las hipótesis del teorema anterior. En el caso de que (e_1 , \dots , e_n) definen la base canónica de \mathbb{R}^n , la medida espectral m , admite la descomposición anterior.

a) Para $j = 1, \dots, n$, la medida m_{jj} es la medida espectral del proceso $\xi_j (t)$ estacionario de media de orden dos, continuo de segundo orden. La medida de Poisson se escribe:

Dicho de otra forma, la Poissoniana del proceso vectorial $x(t)$ es la suma de las componentes del Poissoniano.

b) En el caso de un proceso escalar $\xi_1(t)$, de media $E(\xi_1(t)) = C_1$ y con $\xi_1(t) = C_1 + \zeta'(t)$ o $\zeta''(t)$ está centrada. Se ve entonces, que la Poissoniana de $\xi_1(t)$ es la suma de C_1^2 del proceso constante C_1 y de la Poissoniana del proceso $\zeta'(t)$.

3.28. Momentos Esperados.

Sea $\xi(T)$ un proceso definido sobre \mathbb{R} , con valores dentro de \mathbb{R} continuo de segundo orden, estacionario de media de orden dos. Si $m(\omega)$ define la medida espectral de Poisson, sea K un entero > 0 , tal que la integral siguiente converge:

$$M_k = \int_{\mathbb{R}} \omega^k m(\omega).$$

M_k se llama el momento espectral de orden K . Como m es par, M_k es nulo para k impar. La siguiente fórmula nos permite calcular los momentos esperados (si es que existen) en función de las derivadas en el origen de la función de autocorrelación $R(\tau)$:

$$i^k M_k = \frac{d^k}{d\tau^k} R(0).$$

de una manera general, la función $R(\tau)$ admite un número de derivadas continuas, por lo tanto, se dice que el proceso es regular.

3.29. Función de densidad espectral.

Estas nociones siguen del Teorema. En el caso de que la medida espectral matricial $m(u)$ admita una densidad con relación con la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^d , esta densidad es llamada la función de densidad espectral, y se escribe:

$$m(u) = S(u) du.$$

o $u \in \mathbb{R}^d$. $S(u)$ es una función definida sobre \mathbb{R}^d con valores dentro de $\text{End}(F)$ entonces se escribe por la inversa de Fourier:

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, S(u) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\langle u, t \rangle) R(t) dt.$$

de la misma forma, utilizando las coordenadas de F y si $m(u)$ admit una densidad tenemos:

$$m_{jj'}(u) = S_{jj'}(u) du.$$

si esta ecuación se verifica en las cuales j y j' , la función con

valores complejos S_{ij} con las componentes de s es:

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, S_{ij}(u) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\langle u, t \rangle) R_{ij}(t) dt.$$

Nota. - Si el proceso $\xi(t)$ tiene una media $\mu = E(\xi(t)) \in F$ no nula, la medida espectral matricial no admite paso de densidad. En efecto sea el proceso centrado $\xi'(t)$ tal que $\xi(t) = \xi'(t) + \mu$. Entonces, $\forall t \in \mathbb{R}^d$ la función de autocorrelación se escribe:

$$R_{\xi}(t) = R_{\xi'}(t) + \mu \otimes \mu^{-}$$

con:

$$R_{\xi'}(t) = E(\xi'(h+t) \otimes \xi'(h))$$

3.30. Transformación de procesos estocásticos.

Sea $\xi(t)$ un proceso estocástico continuo de segundo orden definido sobre un espacio abierto T de \mathbb{R}^d , con valores dentro de la complicación F de un espacio Euclidiano de dimensión n . Se va a definir las fórmulas que permiten asociar con $\xi(t)$ un proceso $\eta(t)$ definido sobre un espacio abierto T' de $\mathbb{R}^{d'}$ con valores dentro de la complicación F' de un espacio euclidiano de dimensión n' . A fin de probar estas fórmulas, consideremos el caso particular de que exista una variable aleatoria:

$$\beta: (\Omega, \tau, P) \longrightarrow C(T, F)$$

tal que para todo $t \in T$, $\xi(t)$ se obtiene en componentes β con la aplicación lineal $\delta_t: \varphi \rightarrow \varphi(t)$. El espacio $C(T, F)$ de aplicaciones continuas $T \rightarrow F$ es llamado la *topología de la convergencia compacta*, y de la tribu boreliana asociada. En el caso particular consideremos. la transformación está definida por una aplicación medible:

$$\alpha: C(T, F) \longrightarrow C(T', F').$$

Donde el proceso η , asociado con ξ es tal que para toda $t' \in T'$:

$$\eta(t') = \omega \rightarrow (\alpha \circ \beta)(t')$$

veamos ejemplos de tales transformaciones.

3.31. Transformación de función aleatoria por una aplicación continua

$$\phi: F \rightarrow F'.$$

En el caso particular, de $T = T'$ y la aplicación α asociada a toda $\rho \in C(T, F)$ la función $\phi \circ \rho$. Tenemos $\rho_{\omega} = \beta(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Entonces, el proceso transformado de proceso $\xi(t) = \varphi_\omega(t)$ es el proceso $\eta(t) = \phi(\varphi_\omega(t))$. En consecuencia, el proceso transformado de $\xi(t)$ es en este caso: $\eta(t) = \phi(\xi(t))$.

3.32. Transformación de funciones aleatorias definidas por la transformación integral lineal:

$$\alpha \quad \varphi \longrightarrow \varphi(t') = \int_{t \in T} Q(t', t) \varphi(t) \mu(t).$$

ó Q es una aplicación continua $T' \times T \rightarrow L(F, F')$ con la medida μ sobre T es nula, excepto en una compacta K de T . En efecto, la hipótesis de que el proceso $\xi(t) = \delta_t \cdot \beta : \omega \rightarrow \varphi_\omega(t)$ es continuo de segundo orden. Estas hipótesis muestran que $\forall t' \in T'$, la variable $\eta(t')$ es la integral de la función en $L^2(\Omega, \mathcal{F}')$, relacionados con μ :

$$\eta(t') = \int_{t \in K} Q(t', t) \xi(t) \mu(t).$$

En efecto, puede faltar nos tocar ésta relación para toda t' fija $\in T'$, se puede simplificar la notación poniendo $f(t) = Q(t', t)$ y denotando η_0 la variable $\eta(t')$. De la integral definida, anteriormente, tenemos:

$$\forall \omega \in \Omega \quad \eta_0(\omega) = \int_{t \in K} f(t) \varphi_\omega(t) \mu(t).$$

con la propiedad, resulta:

3.33. Lema.

Sea μ una medida positiva sobre un compacto k , y sea (Ω, τ, P) un espacio de probabilidad. Para toda aplicación continua $t \rightarrow g(t, \cdot)$ de k sobre $L^2(\Omega)$, la integral vectorial:

$$I = \int_k g(t, \cdot) \mu(t).$$

es tal que $I(\omega) = \int_k g(t, \omega) \mu(t)$, es cierta

3.34. Transformaciones de funciones aleatorias asociadas con la derivación.

Modificando un poco el esquema anterior, y dando a α y β las aplicaciones medibles:

$$(\Omega, \tau, P) \xrightarrow{\beta} C^1(T) \xrightarrow{\alpha = \partial_j} C(T).$$

a $C^1(T)$ se le llama la topología de la convergencia compacta para las funciones y así, sus derivadas primeras y $\alpha \partial_j = \partial/\partial t_j$ definen el

operador de derivación siguientes de la j -ésima vector de base b_j de \mathbb{R}^d , $1 \leq j \leq d$. Entonces, $\alpha = \partial_j$ transforma el proceso $\xi(t) = \sum_{i=1}^d \delta_i \cdot \theta_j \cdot \beta$. Suponiendo que $t \rightarrow \xi(t)$ es continuo con valores dentro de $L^2(\Omega)$ y que para toda t fija $\in T$: $h^{-1}(\xi(t + hb_j) - \xi(t))$ tiende a un límite $\eta_j(t) \in L^2(\Omega)$.

Se deduce con estas hipótesis:

$$\eta_j(t) = \xi_j(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(\xi(t + hb_j) - \xi(t)).$$

3.35. Transformación de procesos estocásticos continuos de segundo orden.

Si $\xi(t)$ es un proceso estocástico continuo de segundo orden, se quiere saber si se puede asociar una variable aleatoria β con valores dentro de un espacio funcional, como se hizo anteriormente. Entonces, se puede definir como se dice la transformación de la variable β . De las fórmulas de la sección anterior, que nos definen directamente la transformación de un proceso estocástico definido por la variable β . Esto motiva las definiciones siguientes:

3.36. Definición.

Sea $\xi(t)$ un proceso continuo de segundo orden, definido sobre con valores en F .

a) Sea ϕ una función medible $F \rightarrow F'$. El proceso $t \rightarrow \phi \circ \xi(t)$ es llamado la transformada de $\xi(t)$ para ϕ .

b) Sea $Q(t', t)$ una función continua $T' \times T \rightarrow L(F, F')$. Entonces, el proceso $(t) : t' \rightarrow \eta(t') = \int_T Q(t', t) \xi(t) \mu(t)$ es llamada la transformada del proceso $\xi(t)$ por la transformación integral definida en la sección anterior. Suponiendo que la integral existe como integral de Riemann generalizada.

c) Finalmente, si $T = T' = \mathbb{R}^d$, $j \in \{1, \dots, d\}$, suponemos que para toda $t \in T$, el cociente $h^{-1}(\xi(t + hb_j) - \xi(t))$ tiende a un límite dentro $L^2(\Omega, F)$ si $h \rightarrow 0$. Viendo este límite

$$\partial_j^2 \xi(t) = \frac{(\partial_j^2 \xi)}{(\partial_j^2 t)}(t).$$

se dice que el proceso $t \rightarrow \partial_j^2 \xi(t)$, es la derivada de procesos de segundo orden $\xi(t)$ relacionado con la j -ésima coordenada y que el proceso (t) admite una derivada parcial de media de orden dos.

Se nota que todas estas definiciones son funciones, si los procesos construidos $\phi(\xi(t))$, $\eta(t')$ y $\partial^j \xi(t)$, son procesos de segundo orden, así como si los procesos $\phi(\xi(t))$ no son forzosamente de segundo orden. La proposición siguiente, es una condición necesaria y suficiente nos permite reconocer si un proceso de segundo orden dado, admite una derivada parcial en media de orden dos, expresando así la función de autocorrelación de $\partial^j \xi(t)$ en función de estas $\xi(t)$.

3.37. Proposición.

Sea T un espacio abierto de \mathbb{R}^d y $j \in \{1, \dots, d\}$. Sea $\xi(t)$ un proceso de segundo orden con valores complejos definidos sobre T , de función de autocorrelación $R(t, t')$. Para que $\xi(t)$ permita una derivada parcial en media de orden dos en relación con la coordenada t_j , es necesario y suficiente que para todo $t \in T$, el límite siguiente exista:

$$\lim_{h, h' \rightarrow 0} h^{-1} h'^{-1} (R(t+h b_j, t+h' b_j) - R(t+h b_j, t) - R(t, t+h' b_j) + R(t, t')).$$

Si es así, $\frac{\partial R}{\partial t_j}(t, t')$,

existe, y para todo $(t, t') \in T \times T$, el límite siguiente existe:

$$\lim_{h, h' \rightarrow 0} h^{-1} h'^{-1} (R(t+h b_j, t'+h' b_j) - R(t+h b_j, t') - R(t, t'+h' b_j) + R(t, t')).$$

nótese, $\frac{\partial^2 R}{\partial t_j \partial t'_j}(t, t')$

este límite es:

$$\begin{aligned} R_{\partial^j \xi \partial^j \xi}(t, t') &= \frac{\partial^2 R}{\partial t_j \partial t'_j}(t, t'); \quad R_{\partial^j \xi, \xi}(t, t') = \\ &= \frac{\partial R}{\partial t_j}(t, t'). \end{aligned}$$

3.38. Nota.

Se puede demostrar que si la función $R(t, t')$, es

doblemente continua y derivable sobre $T \times T$, entonces, para todo $(t, t') \in T \times T$, el límite definido existe y es igual a la cantidad

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t \partial t'}(t, t'). \quad \text{en cálculo diferencial.}$$

$\frac{\partial^2 R}{\partial t \partial t'}$

Ejemplo de aplicación de la demostración anterior.

Un proceso de Wiener con valores dentro de \mathbb{R} , no es jamás un proceso de segundo orden derivable en media cuadrática.

En efecto, $R(t, t') = \min(t, t')$ y para $h < h'$:

$$\begin{aligned} h^{-2} h'^{-2} (R(t+h, t+h') - R(t+h, t) - R(t, t+h') + R(t, t)) \\ = h^{-2} h'^{-2} [t+h - t - t + t] = h'^{-2}. \end{aligned}$$

Aplicando lo anterior, con procesos de segundo orden estacionarios de media de orden dos, se obtiene:

Corolario 1.

Un proceso $\xi(t)$ estacionario de media de orden dos, definido sobre el límite, es un proceso de segundo orden, derivable si y solamente, si el límite siguiente existe para todo real t :

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-2} h'^{-2} (R(t+h, t+h') - R(t+h, t) - R(t, t+h') + R(t, t')).$$

Denotando el límite $R''(t)$:

$$\begin{aligned} R_{\xi, \xi}''(t, t+h) &= -R''(h). \\ R_{\xi, \xi}''(t+h, t) &= R''(h). \end{aligned}$$

Corolario 2

Sea $\xi(t)$ un proceso estacionario de media de orden dos, continuo de segundo orden, definido sobre \mathbb{R} con valores dentro de \mathbb{R} , donde la medida espectral de Poisson $m(u)$ admite un momento espectral de orden dos. Entonces, el proceso $\xi(t)$ admite una derivada de media de orden dos, donde la medida espectral de Poisson, es: $U^2 m(u)$.

En efecto, tenemos: $\int_{\mathbb{R}} \exp(iut) m(u) = R(t)$, ó

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(iut) u^2 m(u) = -R''(t).$$

3.39. Representación integral de procesos estocásticos clásicos de segundo orden.

Sea (U, ν, m) un conjunto U , provisto de una medida positiva m sobre la tribu \mathcal{U} de partes de U . Se dice que una función determinista

$f(t)$ definida sobre T admite una representación integral, si existe una función $g(t, u)$ sobre $T \times U$, tal que para todo t , $g(t, \cdot)$ es integrable en relación con m , tal que:

$$f(t) = \int_U g(t, u) m(u).$$

En el caso particular que U es un conjunto despreciable, la integral es la suma:

$$f(t) = \sum_{k \in U} g_k(t) m_k.$$

De tales representaciones integrales, o su forma en serie, son muy útiles en análisis matemáticos y sus aplicaciones, desarrollando de una función siguiente de funciones propias, desarrollando de una función en series de Fourier ó en integrales de Fourier:

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, f(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} (F f)(\omega) e^{i\langle \omega, t \rangle} d\omega.$$

En este caso, la Transformada de Fourier $(F f)$ tiene en cada aplicación un significado bien preciso. El fin de esta sección es obtener representaciones análogas a la integral:

$$\xi(t) = \int_U g(t, u) M(u).$$

En el caso de que $\xi(t)$ es un proceso estocástico de segundo orden sobre T , con valores dentro de la complicación F de un espacio euclidiano F de dimensión n . Donde para todo t fijo de T , $\xi(t) \in L^2(\Omega, F)$ es un elemento de un espacio vectorial de dimensión infinita.

De la fórmula anterior, $g(t, u)$ es una función con valores escalares. Donde es necesario reemplazar la medida m que interviene en la integral por un estado matemático nuevo llamado *medida espectral estocástica*, que asocia a todo $\beta \in U$, una variable aleatoria vectorial $M(\beta)$.

La representación integral de procesos, como todo proceso de segundo orden, se escribe: $\xi(t) = E(\xi(t)) + \xi'(t)$ ó $\xi'(t)$ está centrado, se supone en esta sección, que $\xi(t)$ está centrada.

3.40. Teorema.

Supongamos que existe una medida positiva m sobre (U, \mathcal{U}) con valores dentro $\text{End } F$ y para todo $t \in T$, una función con valores complejos $g(t, u) = g(t, \cdot) \in L^2(U, \mathcal{U}; m)$ tal que la función de autocorrelación del proceso $\xi(t)$ admite la representación integral:

$$R(t, t') = \int_U g(t, u) g(t', u) m(u)$$

Se supone así, que t describe T , las funciones $g(t, \cdot)$ engendran un sub-espacio vectorial L_0 denso de $L^2(U, \text{tr } m)$. Entonces, la aplicación lineal:

$$L_0 \xrightarrow{\eta} L^2(\Omega, F).$$

$$\sum_{k=1}^N f_k g(t_k, \cdot) \rightarrow \sum_{k=1}^N f_k \xi(t_k),$$

se prolonga por continuidad, en una isometría biyectiva nombrada M .

$$L^2(U, \text{tr } m) \xrightarrow{M} L_2(\xi).$$

ó $L_2(\xi)$ es el subespacio vectorial asherido de $L_2(\Omega, F)$, engendrado por las variables $\xi(t)$, t describe T .

3.41. Medida espectral estocástica.

a) La aplicación $L^2(U, \text{tr } m) \xrightarrow{M} L_2(\xi)$ es llamada *medida espectral estocástica* y es cierta para toda $f \in L^2(U, \text{tr } m)$:

$$M(f) = \int_U f(u) M(u).$$

de esta manera, si I_B es la función indicatriz de un element cualquiera de la tribu \mathcal{U} , ponemos: $M(B) = M(I_B)$

b) La medida espectral estocástica M tiene las propiedades siguientes:

Si los ensambles B_k son disjuntos:

$$M\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} M(B_k).$$

Sean B y $B' \in \mathcal{U}$, la integral escrita de tal manera que conver

$$E(M(B) \otimes M(B')) = m(B \cap B').$$

igualando las trazas de los dos miembros, tenemos:

$$(M(B'), M(B)) = (\text{tr } m)(B \cap B').$$

Finalmente, la representación integral, nos da:

$$\forall t \in T, \xi(t) = \int_U g(t, u) M(u).$$

$$B \cap B' = \emptyset \Rightarrow M(B) \perp M(B').$$

3.42. Corolario 1

Si $\xi(t)$ es un proceso centrado, continuo de segundo orden, definido sobre \mathbb{R}^d , estacionario de media de orden dos, $\xi \neq 0$, tenemos:

$$R(t, t') = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, t-t' \rangle} m(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, t \rangle} e^{-i\langle u, t' \rangle} m(u)$$

Por otra parte, las funciones $\exp(i\langle t, \cdot \rangle)$ son densas en $L^2(\mathbb{R}^d, tr m)$ pero si $f \in L^2(\mathbb{R}^d, tr m)$ es ortogonal con todas las funciones $\exp(i\langle t, \cdot \rangle)$, esto significa $\int f m = 0$; donde f es nula por todo. Como $m \neq 0$, esto da $f = 0$. Por lo que tenemos:

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \zeta(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, t \rangle} M(u)$$

Ejemplo:

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_N$ una serie de números > 0 y sean $u(1), \dots, u(N)$ una familia de números reales distintos. Sea $\zeta(t)$ un proceso centrado continuo de segundo orden estacionario de media de orden dos, definido sobre el límite y tal que la traza de su medida estructural m , está dada por:

$$tr m = \sum_{k=1}^N \alpha_k \delta_{u(k)}$$

Entonces, la medida espectral estocástica M está centrada sobre $U_{k=1}^N$ ($u(k)$). M se caracteriza por el hecho de N variables aleatorias;

$X_k = M(\{u_k\}) \in L^2(\Omega, F)$ con $\alpha_k = E(\|X_k\|^2)$, entonces:

$$\forall t \text{ real. } \zeta(t) = \sum_{k=1}^N e^{i\langle t, u(k) \rangle} X_k$$

Esta relación significa que el proceso $\zeta(t)$ es una combinación lineal con coeficientes aleatorios de funciones armónicas $\exp(i\langle t, u(k) \rangle)$ donde las pulsaciones describen la parte de \mathbb{R} que está cargada por la medida espectral de Poisson. Las relaciones

$$E(\|\zeta(t)\|^2) = \int_{\mathbb{R}} tr m = \sum \alpha_k = \sum_{k=1}^N E(\|X_k\|^2).$$

comentan que el proceso de Poisson $\zeta(t)$ es una suma de términos, que corresponden con diversas pulsaciones $u(k)$ que aparecen en la descomposición del proceso. Así, el Corolario 1 precisa la relación $E(\|\zeta(t)\|^2) = \int_{\mathbb{R}} tr m$.

3.43. Corolario 2. (Teorema de Shannon)

Sea $\zeta(t)$ un proceso continuo de segundo orden estacionario en media de orden dos, con valores complejos, donde la medida espectral de Poisson en m está concentrada sobre el intervalo cerrado $[-B, +B]$. Entonces, $\zeta(t)$ se determina de la manera siguiente si conectamos los valores de ζ con puntos $n\pi/B$, para $n=0, +1, \dots$

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(Bt - n\pi)}{Bt - n\pi} \zeta\left(\frac{n\pi}{B}\right)$$

3.44. Esperanzas condicionales y aplicaciones a los procesos.

Teorema y Definición de esperanzas condicionales.

Sea (Ω, τ, P) un espacio de probabilidad, y sea τ' una sub tribu de τ . Denotamos P' la restricción de P con τ' . Entonces, para todo $g \in L_{P'}^1(\Omega)$ existe una sola clase $h \in L_{P'}^1(\Omega)$ tal que:

$$\forall B \in \tau', \int_B g P = \int_B h P'.$$

Esta clase denotada $h = E(g | \tau')$ ó $E^{\tau'} g$ es llamada la esperanza condicional de g relacionada con τ' .

En efecto, para ver que la clase h es única si h' y h'' verifican la ecuación anterior, con $h = h' - h''$ cumplen $\int_B h P = 0$ para toda $B \in \tau'$, con $h = 0$ P' -asi seguramente. Para $g \geq 0$, la existencia de h resulta del Teorema de Radon.Nikodym. La existencia de h en general resulta por linealidad, poniendo $g = g^+$ y g^- , las funciones g^+ y $g^- \in L_{P'}^1(\Omega)$ son positivas. La definición precedente se puede extender en el caso g tiene valores dentro de un espacio Euclidiano: h con valores dentro de F .

3.45. Definición de la esperanza condicional.

Sea f una aplicación medible de espacio de probabilidad (Ω, τ, P) con valores dentro de un espacio medible (X, ν) , y sea $\tau' = f^{-1}(\nu)$ la sub tribu de τ engendrada para f . Sea $Q = f_*(P)$ la distribución de f , entonces, para toda $g \in L_Q^1(X)$, existe una sub clase $h \in L_{P'}^1(\Omega)$, tal que

$$\forall B \in \nu, \int_B h_*(Q) = \int_{f^{-1}(B)} g P.$$

Nótese P' la restricción de P con τ' y denotamos h el elemento de $L_{P'}^1(\Omega)$ que verifica la definición anterior con $h = h_*(f)$. En el caso particular con la condición en relación con la tribu engendrada por una variable aleatoria $f: \Omega \rightarrow X$ se escribe $h = E(g|f)$ y tenemos: $h = E(g|f^{-1}(\nu))$.

Es más, tanto h como h_* son llamadas las esperanzas condicionales de g con relación a f .

3.46. Ejemplos de esperanzas condicionales.

a) El intervalo $\Omega = [0, 3]$ está formado por su conjunto Boreliano τ

y la medida de Lebesgue dt. Sea τ' la sub-tribu de τ engendrada para la partición definida para los tres subintervalos:

$$I_1 = [0, 1[, I_2 = [1, 2[\text{ y } I_3 = [2, 3[$$

Entonces, para todo $g \in L^1_{\mathcal{P}}(\Omega)$, la esperanza condicional $E(g|\tau')$ es definida por la función $h: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es constante para cada intervalo I_j y que es igual a $\int_{I_j} g dt$ sobre

$$I_j, \quad j = 1, 2 \text{ y } 3.$$

b) Aplicando la segunda definición de esperanza condicional, en el caso particular con f una variable aleatoria con valores en $X = \mathbb{R}^n$, provista de una tribu Boreliana. La distribución conjunta Q' de f y g , es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, donde imágen para la primera proyección canónica $\pi_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ hace la distribución Q de $f: Q = \pi_1(Q')$. Con la integral para todo $g \in L^1_{\mathcal{P}}(\Omega)$, existe una sola h_- tal que:

$$\forall B_- = \text{boreliano de } \mathbb{R}^n, \int_{B_-} h_-(x) Q(x) = \int \pi_1^{-1}(B_-) g Q'(x, y).$$

Por ejemplo, suponemos que Q' nos da una densidad continua estrictamente positiva $\rho'(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^{n+1}, dx dy)$. Con $\alpha = \pi_1(\alpha')$ una pequeña densidad

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x, y) dy. \quad \text{y da:}$$

$$h_-(x) = (E^f g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{\rho'(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x, y) dy} dy.$$

Donde $h_-(x)$ puede interpretarse en éste caso particular, como el valor medio de una distribución de probabilidad μ_x sobre \mathbb{R} , de densidad:

$$d_x(y) = \rho'(x, y) / \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x, y) dy.$$

Esta distribución $\mu_x = \int d_x(y) dy$ es llamada la distribución de g sachant que $f = x$.

3.47. Teorema de Jirina.

Sea Q' una distribución de probabilidad sobre el producto $X \times Y$ de dos espacios métricos completos separables. Sea $Q = \pi_1(Q')$ la imágen de Q' para la primera proyección canónica. Entonces, existe una familia (μ_x) de dos distribuciones de probabilidad sobre Y indexadas en X únicamente fuera de un conjunto Q -despreciable de X , tales que para todo $m \in L^1_{\mathcal{Q}}(X \times Y)$, la función $x \rightarrow \int_Y m(x, y) \mu_x(y) dy$ es

Q-integrable:

$$\iint_{X \times Y} m(x, y) Q'(x, y) = \int_X Q(x) \int_Y m(x, y) \mu_x(y).$$

Se dice entonces, que (μ_x) es una desintegración de Q, y se escribe:

$$Q'(x, y) = \int_X \delta_x(x) \otimes \mu_x(y) Q(x').$$

3.48. Propiedades de las esperanzas condicionales.

- a) La condicional $g \rightarrow E^{\tau_1} g$ es una aplicación lineal $L_{P_1}^1(\Omega) \rightarrow L_{P_1}^1(\Omega)$ que transforma toda función $g \geq 0$, en una función positiva.
- b) Si τ_2 es una sub-tribu de τ_1 , $\tau_1 \subset \tau$: $E^{\tau_2}(E^{\tau_1} g) = E^{\tau_2} g$.
- c) Se h es una función esencialmente limitada y medible, en relación con τ_1 : $E^{\tau_1}(gh) = h(E^{\tau_1} g)$.
- d) Para toda $p \in [1, +\infty]$, la aplicación lineal E^{τ_1} induce una contracción: $L_{P_1}^p(\Omega) \rightarrow L_{P_1}^p(\Omega)$. Es más, para $p = 2$, E^{τ_1} coincide con 1 proyección ortogonal de $L_{P_1}^2(\Omega)$ de imagen $L_{P_1}^p(\Omega)$.
- e) Sea H un sub-espacio formado de $L^2(\Omega)$, tal que toda parte finita de H proporciona una función Gaussiana centrada. Suponiendo que τ_1 es el conjunto engendrado por los elementos del subespacio formado H_1 de H. Entonces, para toda $g \in H$, $E^{\tau_1} g$ es la proyección ortogonal de g sobre los subespacios H_1 de H.

Este resultado es muy interesante, porque de una manera global, la esperanza condicional de $g \in L_{P_1}^2(\Omega)$ en relación con el conjunto τ_1 , engendra un sub-espacio formado de cualquier K de $L_{P_1}^2(\Omega)$ es la proyección ortogonal de g sobre los subespacios de $L_{P_1}^2(\Omega)$ formado por los elementos medibles con relación a τ_1 .

3.49. Definición de la probabilidad Condicional $P(\xi \in A | \xi_1)$.

Sea τ_1 un subconjunto de τ y sea ξ una variable aleatoria $(\Omega, \tau, P) \rightarrow (X, \cdot)$. Para todo elemento $A \in \cdot$, tenemos:

Q-integrable:

$$\iint_{X \times Y} m(x, y) Q'(x, y) = \int_X Q(x) \int_Y m(x, y) \mu_X(y).$$

Se dice entonces, que (μ_X) es una desintegración de Q, y se escribe:

$$Q'(x, y) = \int_X \delta_{x'}(x) \otimes \mu_{x'}(y) Q(x').$$

3.48. Propiedades de las esperanzas condicionales.

a) La condicional $\rightarrow E^{\tau_1} g$ es una aplicación lineal $L_{P_1}^1(\Omega) \rightarrow L_{P_1}^1(\Omega)$ que transforma toda función $g \geq 0$, en una función positiva.

b) Si τ_2 es una sub-tribu de $\tau_1 \subset \tau$: $E^{\tau_2}(E^{\tau_1} g) = E^{\tau_2} g$.

c) Se h es una función esencialmente limitada y medible, en relación con τ_1 : $E^{\tau_1}(gh) = h(E^{\tau_1} g)$.

d) Para toda $p \in [1, +\infty]$, la aplicación lineal E^{τ_1} induce una contracción: $L_{P_1}^p(\Omega) \rightarrow L_{P_1}^p(\Omega)$. Es más, para $p = 2$, E^{τ_1} coincide con la proyección ortogonal de $L_{P_1}^2(\Omega)$ de imagen $L_{P_1}^p(\Omega)$.

e) Sea H un sub-espacio formado de $L^2(\Omega)$, tal que toda parte finita de proporciona una función Gaussiana centrada. Suponiendo que τ_1 es el conjunto engendrado por los elementos del subespacio formado H_1 de H. Entonces, para toda $g \in H$, $E^{\tau_1} g$ es la proyección ortogonal de g sobre los subespacios H_1 de H.

Este resultado es muy interesante, porque de una manera global, la esperanza condicional de $g \in L_{P_1}^2(\Omega)$ en relación con el conjunto τ_1 , engendra un sub-espacio formado de cualquier K de $L_{P_1}^2(\Omega)$ es la proyección ortogonal de g sobre los subespacios de $L_{P_1}^2(\Omega)$ formado por los elementos medibles con relación a τ_1 .

3.49. Definición de la probabilidad Condicional $P(\xi \in A | \xi_1)$.

Sea τ_1 un subconjunto de τ y sea ξ una variable aleatoria $(\Omega, \tau, P) \rightarrow (X, \nu)$. Para todo elemento $A \in \nu$, tenemos:

$$p(\xi \in A | \tau_1) = E(\prod_{\xi \in A} | \tau_1).$$

ó $\prod_{\xi \in A}$ define la función indicatriz del evento $\{\xi \in A\} = \{\omega \in \Omega, \xi(\omega) \in A\}$.

Para el caso particular, en que τ_1 es el conjunto engendrado por

n variables reales ξ_1, \dots, ξ_n , tenemos:

$$P(\xi \in A \mid \xi_1, \dots, \xi_n) = E\left(\prod_{\xi \in A} \xi \mid \xi_1, \dots, \xi_n\right).$$

Con las convenciones precedentes, esta esperanza condicional puede identificarse con una función sobre \mathbb{R}^d , denotada:

$$(u_1, \dots, u_n) \rightarrow P(\xi \in A \mid \xi_1 = u_1, \dots, \xi_n = u_n).$$

3.50. Definición de conjuntos \mathbb{F}_s , $\mathbb{F}_{0,s}$, $\mathbb{F}_{s,\infty}$

Aplicando las nociones precedentes, sea un proceso estocástico $\xi(t)$ definido sobre $[0, +\infty[$ con valores en \mathbb{R}^n , con la ayuda de un espacio de probabilidad (Ω, τ, P) . Para toda pareja (s, t) de términos tales que $s \leq t$, tenemos:

\mathbb{F}_s = conjunto generado por ξ_u

$\mathbb{F}_{s,t}$ = conjunto engendrado por las variables ξ_u , $s \leq u \leq t$.

$\mathbb{F}_{s,\infty}$ = conjunto engendrado por las variables ξ_u , $u \geq s$.

Como $\mathbb{F}_{0,s}$ representa la familia de eventos definidos por el pasado del instante s de un proceso, es natural condicionar $\xi(t)$ con las variables lées de $\xi(t)$, relacionando esta tribu de paso con el instante $s \leq t$.

3.51. Martingales y sub-martingales.

Una martingala es un proceso real $\xi(t)$ tal que se cumple en cualquier instante s y t con $0 \leq s \leq t$.

$$E(\xi_t \mid \mathbb{F}_{0,s}) = \xi_s.$$

(y submartingala $E(\xi_t \mid \mathbb{F}_{0,s}) \geq \xi_s$).

las variables aleatorias ξ_t se suponen integrables.

Como todo apostador con fortuna limitada, un jugador que utiliza una martingala está interesado con las fluctuaciones de su fortuna ξ_t .

Esto es en particular interesante para las distribuciones de variables aleatorias $\min_{s \leq t} \xi_s$ y $\max_{s \leq t} \xi_s$. Se puede tener una información sobre esta distribución por desigualdades de martingalas:

$$\forall \lambda > 0, \quad P(\max_{s \leq t} \xi_s \geq \lambda) \leq \lambda^{-\alpha} E(|\xi_t|^\alpha).$$

3.52. Propiedades de Markov.

El estudio natural de procesos que siguen la propiedad de Markov.

es llamado "procesos de Markov"

3.53. Pre-Propiedad de Markov.

(o propiedad estricta de Markov). Sea (Ω, \mathcal{Z}, P) un espacio de probabilidad, un conjunto T totalmente ordenado de parámetros llamados instantes, y un espacio de estados denotado \mathbb{R}^n , éste no cambia si \mathbb{R}^n es un conjunto límite o despreciable.

Se dice que los procesos $\{ \xi(t), t \in T \}$ con valores en \mathbb{R}^n tiene la pre-propiedad de Markov si para toda k , y para toda familia $(k+1)$ instantes $s_1 < s_2, \dots, s_k < t$ las probabilidades condicionales de un evento relacionadas con ξ_t en relación con los conjuntos engendrados por $\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_k}$, con relación a los conjuntos generados ξ_{s_k} , son iguales. Dicho de otra forma, para todo boreliano A de \mathbb{R}^n .

$$P(\xi_t \in A \mid \xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_k}) = P(\xi_t \in A \mid \xi_{s_k}).$$

3.54. Otras formulaciones de la pre-propiedad de markov

a) Para todo entero k , y para toda familia de $(k+1)$ instantes $s_1 < s_2, \dots, s_k < t$, y para casi todo $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^{nk}$ con relación a $\mathbb{L}(\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_k})$ la igualdad siguiente de distribuciones condicionales:

$$\mathbb{L}(\xi_t \mid \xi_{s_1} = u_1, \dots, \xi_{s_k} = u_k) = \mathbb{L}(\xi_{s_k} = u_k).$$

Desde el punto de vista práctico, decir que (ξ_t) tiene la pre-propiedad de Markov, significa que para todo instante s_n considerado como instante presente, $\forall t > s_n$ el conocimiento de ξ_t en la observación ξ_{s_n} no aumenta, si se le añade a la observación de procesos, un instante cualquiera pasado.

b) El conjunto del pasado con el instante s , se define como el conjunto engendrado por las variables $\xi(t)$ para $t \leq s$. La pre-propiedad de Markov es cierta para todo Boreliano A de \mathbb{R}^n y para todo par de instantes $s \leq t$:

$$P(\xi_t \in A \mid \mathcal{F}_{0,s}) = P(\xi_t \in A \mid \mathcal{F}_s).$$

3.55. Proposición.

Siendo $(\xi_t)_{t \geq 0}$, un proceso con valores en \mathbb{R}^n , que sigue la prepropiedad de Markov, tenemos: $\mu_t =$ distribución de ξ_t , $\mu_{s,t} =$ la distribución conjunta de ξ_s y ξ_t, \dots para las $0 \leq s < t$ fijas, tenemos $p(s, x, t, \cdot)$ la distribución condicional ξ_t si $\xi_s = x$: se llama a esta distribución definida por $\mu_{s,t}$ caso todo x es tal que para todo Boreliano A de \mathbb{R}^n y $0 \leq r < t$:

$$P(\xi_t \in A \mid \xi_s = x, r \leq s \leq t) = p(s, x, t, A).$$

a) Entonces, para $0 \leq r < s < t$, o para μ_r casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, la relación Chapman-Kolmogoroff:

$$p(r, x, t, A) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} p(r, x, s, dy) p(s, y, t, A).$$

b) Para todo m , para toda serie constante $0 \leq t_1 < \dots < t_m$, y para toda familia de Borelianos B_1, \dots, B_m de \mathbb{R}^n , tenemos:

$$P(\xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \dots, \xi(t_m) \in B_m).$$

$$= \int_{x_1 \in B_1} \mu_1(x_1) \int_{x_2 \in B_2} p(t_1, x_1, t_2, dx_2) \dots$$

$$\dots \int_{x_{m-1} \in B_{m-1}} p(t_{m-2}, x_{m-2}, t_{m-1}, dx_{m-1}) p(t_{m-1}, x_{m-1}, t_m, B_m)$$

3.56. Ejemplo.

a) Para un proceso de Wiener con valores en \mathbb{R}^n , tenemos

$W_t = (W_t - W_s) + W_s$, la diferencia $(W_t - W_s)$ es independiente de W_s . Consecuentemente, para $0 \leq s < t$:

$$p(s, x, t, dz) = (2\pi(t-s))^{-n/2} e^{-|z-x|^2/2(t-s)} dz.$$

es una medida Gaussiana de media x y de covarianza $(t-s)$ Id (\mathbb{R}^n) . Resumiendo la relación de Champan-Kolmogoroff se traduce en este caso en la propiedad siguiente de semi-grupos de medidas Gaussianas:

$$q_{t-r} = q_{s-r} * q_{t-s}$$

b) Para un proceso de Poisson $(\pi_t)_{t \geq 0}$ sobre \mathbb{R}^+ ($\pi_t - \pi_s$) es independiente de π_s para $0 \leq s < t$. En consecuencia, $p(s, x, t, \cdot)$ es δ_0 : para x no entera positiva y para $x = k =$ entera ≥ 0 : $(s, k, t, \cdot) =$ medida deducida de una distribución de Poisson de media $(t-s)$, por la traslación k .

3.57. Probabilidad de transición.

Una familia de probabilidades de transición sobre \mathbb{R}^n (relativa con

un proceso sobre \mathbb{R}^+) la base de una familia de probabilidades $p(x, s, t, \cdot)$ sobre \mathbb{R}^n , depende de tres parámetros $0 \leq s < t < \infty$ y $x \in \mathbb{R}^n$ siguiendo las dos propiedades siguientes:

a) La aplicación $x \rightarrow p(s, x, t, A)$ es medible para s y t reales y A borelianos fijos.

b) Tenemos para $r < s < t$ la ecuación de Chapman-Kolmogoroff:

$$p(r, x, t, A) = \int_{\mathbb{R}^n} p(r, x, s, dy) p(s, y, t, A)$$

3.58. Definiciones complementarias.

a) Se dice que un sistema de probabilidades de transición es homogéneo con relación al tiempo, si:

$$P(s, x, t, A) = p \text{ en } (0, x, t-s, A)$$

los cuales son $0 \leq s < t$, y que sea el Boreliano A .

b) Se dice que un proceso (ξ_t) sobre \mathbb{R}^+ con valores en \mathbb{R}^n admite el sistema de probabilidades de transición $p(s, x, t, \cdot)$ si $\forall 0 \leq s < t$ y para casi todo x en relación con la distribución ξ_s , $p(s, x, t, \cdot)$ es la distribución condicional de ξ_t siendo $\xi_s = x$. Dicho de otra forma, para todo Boreliano A de \mathbb{R}^n :

$$P(\xi_t \in A | \xi_s) = p(s, \xi_s(\cdot), t, A).$$

$$P(\xi_r \in B_r, \xi_s \in B_s, \xi_t \in B_t).$$

$$= \iint_{B_r \times B_s} \mu_{r,s}(x, y) (\delta_{x,y} \otimes p(s, y, t, B_t)).$$

$$= \int_{B_r} \mu_r(x) \int_{B_s} p(r, x, t, dy) p(s, y, t, B_t).$$

Naturalmente, si (ξ_t) es estacionario, el sistema de probabilidades de transición, es homogéneo.

3.59. Proposición y definición de la propiedad de Markov.

Siendo $(s, x, t) \rightarrow p(s, x, t, \cdot)$ una familia de probabilidades de transición sobre \mathbb{R}^n con $0 \leq t < \infty$.

a) Entonces, para todo $s \geq 0$, y toda distribución de probabilidad μ_s sobre \mathbb{R}^n , existe un proceso $(\xi_t)_{t \geq s}$ con valores en \mathbb{R}^n , tal que la distribución inicial de ξ_s sea μ_s , admitiendo dos medidas $p(s, x, t, \cdot)$, $s \leq t \leq t'$, como sistemas de probabilidades de transición.

b) Todo proceso $(\xi_t)_{t \geq s}$ que siguen estas propiedades es tal que

$\forall t \geq s, \forall h > 0$ es cierto para todo Boreliano A de \mathbb{R}^n .

$$P(\xi(t+h) \in E \mid \mathcal{F}_\lambda, s \leq \lambda \leq t) = p(t, \xi_t(\cdot), t+h, A).$$

Esta propiedad es llamada la propiedad de Markov. Como el segundo miembro es medible en relación con la sub tribu engendrada por \mathcal{F}_t , tenemos seguramente la unicidad de la esperanza condicional.

$$P(\xi(t+h) \in A \mid \mathcal{F}_\lambda, s \leq \lambda \leq t) = P(\xi(t+h) \in A \mid \mathcal{F}_t) \\ = p(t, \xi_t(\cdot), t+h, A).$$

Así, la propiedad de Markov incluye la prepropiedad de Markov.

3.60. Tiempo de detencion.

Sea $(\xi_t, t \geq 0)$ un proceso definido relativo con un espectro de probabilidad (Ω, τ, P) . Para todo $s \geq 0$ fijo, un tiempo τ_s de parada, es una variable aleatoria con valores en $[s, +\infty]$ tal que para todo $t \geq s$, el conjunto $\{\tau \leq t\}$ pertenece al conjunto \mathcal{F}_t generado por todas las variables ξ_u para $s \leq u \leq t$. En el caso particular $s = 0$, se dice que τ es un tiempo de parada.

3.61. Definición de la propiedad de Markov fuerte.

Siendo $(\xi_t)_{t \geq 0}$ un proceso que sigue la propiedad de Markov, que admite las probabilidades de transición p . Se dice que $(\xi_t)_{t \geq 0}$ sigue la propiedad de Markov fuerte si $\forall s \geq 0$ que tiene el tiempo de paro τ y con $h > 0$ y el Boreliano A:

$$P(\xi(\tau+h) \in A \mid \mathcal{F}_{\tau}) = p(\tau, \xi_\tau(\cdot), \tau+h, A).$$

con:

$$\mathcal{F}_{\tau} = \{A \in \mathcal{F}_{\infty} \mid \forall t \geq s, A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_{\tau}\}$$

3.62. Estadísticas sobre funciones aleatorias.

En la práctica, la modelación de un sistema físico se hace por funciones aleatorias. El análisis matemático y numérico de la modelación, nos dan distribuciones aproximadas de variables aleatorias que nos dan grandes parámetros de salida de estas variables aleatorias. Los valores obtenidos, dependen de:

- Los parámetros que caracterizan las funciones aleatorias de entrada.
- Los parámetros que caracterizan la modelación del sistema físico.

Por ejemplo, sea un proceso $\xi(t)$ centrado, de media de orden

dos, continuo de segundo orden definido sobre \mathbb{R} , con valores complejos, donde la medida espectral de Poisson se denota por m .

Este proceso de filtrado por un filtro donde la respuesta al impulso μ es una medida acotada. Tenemos: $\xi \rightarrow \eta = \mu * \xi$. y la variancia de seÑal de salida, es:

$$\sigma_{\eta}^2 = \int_{\mathbb{R}} |H(\omega)|^2 m(\omega).$$

En esta fórmula, m depende de la seÑal de entrada, tenemos que la transformada de Fourier de μ , no depende del filtro.

Se puede obtener una buena precisión y es fácil estimar con suficiente precisión los parámetros concernientes al signo de entrada. En el caso particular a este sistema y en el caso de estimar σ_{η}^2 , este parámetro es la medida espectral de Poisson m .

Para efectuar el modelado de la seÑal de entrada, se dispone de elevados experimentos de trayectorias. El problema es utilizar esto para construir la estimación de parámetros de la distribución de la función aleatoria: este es un caso particular de métodos de estadística paramétrica.

3.63. Ejemplos de parámetros de una función aleatoria.

Sea F la complejificación de un espacio Euclidiano F_0 de dimensión n .

Una función aleatoria es modelada por una variable aleatoria:

$$(\Omega, \tau, P) \xrightarrow{\alpha} X = C(\mathbb{R}^d, F).$$

Se supone que el proceso asociado $\xi_j(t) = \delta_{j\alpha}$, es estacionario de media de orden dos, continua de segundo orden.

Entonces, los números siguientes, dependen de la distribución de α : los componentes de orden j de la media: $\{E \xi_j(t)\}_j = E(\xi_j(t))$, El valor del término h de la componente de orden $(j,k) \in \{1, \dots, n\}^2$ de la función de autocorrelación:

$$R_{jk}(h) = E(\xi_j(t+h) \xi_k(t)).$$

La componente de orden (j,k) de la medida espectral matricial de densidad continua S_{jk} :

$$m_{jk}(\omega) = S_{jk}(\omega) d\omega.$$

con valor de esta densidad S_{jk} en un punto $\omega \in \mathbb{R}^d$, Si D^0 es una parte Boreliana de \mathbb{R}^d :

$$\text{Prob}(\xi(t) \in D^0).$$

Relacionando estos parámetros, se pueden construir los

estimadores. Si N es el número de pruebas independientes, el estimador es definido por una aplicación ϕ medible sobre X^N . En la práctica ϕ es continuo, la variable aleatoria $\phi \circ (\alpha^N)$ es llamada a veces, un estadístico.

3.64. Ejemplos de estimadores.

Se define $Q(t)$ por la parte de \mathbb{R}^d formado por los puntos $t = (t_1, \dots, t_d)$ tales que $\max_{j=1..d} |t_j| \leq T$. En el caso de la función aleatoria:

$$(\Omega, \tau, P) \xrightarrow{\alpha} X = C(\mathbb{R}^d, F).$$

Se observa simplemente una trayectoria $\varphi(t)$ es natural estimar los parámetros estimados en la sección anterior de la manera siguiente: utilizando los medios adecuados de φ sobre la parte $Q(t)$ de \mathbb{R}^d .

a) Se estima $E \xi(t)$ por el valor de la función:

$$\varphi \longrightarrow |Q(T)|^{-1} \int_{t \in Q(T)} \varphi_j(t) dt.$$

b) la función de autocorrelación $R_{jk}(h)$ es estimada por la media:

$$\varphi \longrightarrow |Q(T)|^{-1} \int_{t \in Q(T)} \varphi_j(t+h) \varphi_k(t) dt.$$

c) Si la medida interespectral de una densidad continua, esta densidad es estimada para toda $T > 0$ por la media siguiente $Q(T)$:

$$\varphi \rightarrow |Q(T)|^{-1} (2\pi)^{-d} \int_{t \in Q(T)} e^{-i\langle \omega, t \rangle} \varphi_j(t) dt \int_{t' \in Q(T)} e^{i\langle \omega, t' \rangle} \varphi_k(t')$$

d) Se puede estimar la probabilidad de $\xi(t) \in Q'$ por la proporción:

$$r_T = |M_T| / |Q(T)|,$$

con M_T es el conjunto de $t \in Q(T)$ tales que $\varphi(t) \in Q'$.

Como la trayectoria observada de φ es aleatoria, cada uno de estos resultados es aleatorio. Resulta entonces que las variables aleatorias (y las estadísticas) correspondientes a estos estimadores, se experimentan de la manera siguiente en función de los procesos $\xi(t) = \delta_t \circ \alpha$ asociados con la función aleatoria α .

3.65. Proposición.

a) La variable aleatoria obtenida componiendo α con la aplicación a) de la sección anterior, es:

$$m_T = |Q(T)|^{-1} \int_{Q(T)} \xi_j(t) dt.$$

b) la variable aleatoria componiendo α con b) de la sección anterior, es:

$$R_{j,k,T}(h) = \left| Q(t) \right|^{-1} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \xi_j(t) \xi_k(t) dt.$$

c) La variable obtenida componiendo α con c), es:

$$S_{j,k,t}(\omega) =$$

$$(2\pi)^{-d} \left| Q(t) \right|^{-1} \int_{t \in \alpha(t)} e^{-i\langle \omega, t \rangle} \xi_j(t) dt \int_{t' \in \alpha(t')} e^{i\langle \omega, t' \rangle} \xi_k(t') dt'$$

El Teorema de Fubini nos permite entonces, calcular la media y la varianza de estas variables aleatorias de segundo orden, el cual nos permite calcular parámetros importantes:

EJEMPLO:

Una función aleatoria con valores reales de la variable real t se modela por una variable aleatoria

v.a. $\alpha : \Omega \rightarrow C(\mathbb{R})$ tal que el proceso asociado $\xi(t) = \delta_t \circ \alpha$ es estacionario en media de orden dos, continua de segundo orden. Se estima la media m por la variable:

$$m_T = (2T)^{-1} \int_{-T}^{+T} \xi(t) dt.$$

Conociendo esto, es fácil calcular su varianza $v(t)$ y ver que la función aleatoria es ergódica en media, si la función de covarianza $C(t)$ del proceso $\xi(t)$ es integrable en módulo. Conociendo C , se puede determinar T , tal que:

$$P_b = (|m_T - m| < 10^{-1}) \leq 0.99$$

Solución :

$$E(m_T) = (2\pi)^{-1} E \int_{-T}^{+T} \xi(t) dt.$$

$$= (2T)^{-1} \int_{-T}^{+T} E(\xi(t)) dt = (2T)^{-1} 2T m = m.$$

Donde la variable aleatoria m_T permite estimar m . La dispersión o error es:

$$\xi'(t) = \xi(t) - m:$$

$$v(t) = E [(m_T - m)^2].$$

$$= (4T^2)^{-1} E \left(\int_{-T}^{+T} \xi'(t) dt \int_{-T}^{+T} \xi'(u) du \right).$$

$$= (4T^2)^{-1} \iint_{\Delta(T)} C(t-u) dt du,$$

con $A(T)$ define el cuadrado de $|t|$ y $|u| \leq T$.

$$v(T) = T^{-1} \int_0^{2T} ((1-u/2T)) C(u) du.$$

El Teorema de Lebesgue muestra que $v(T)$ tiende a cero cuando T tiende a ∞ si $C(t)$ es integrable. La desigualdad de Tchebychev hecha para toda $a > 0$:

$$v(T) = \int_{\Omega} (m_T - m)^2 dP \geq a^2 \text{Pb} (|m_T - m| \geq a).$$

$$\text{Pb} (|m_T - m| \geq a) \leq a^{-2} v(T).$$

$$a^{-2} v(T) \leq 0,01$$

CAPITULO TRES

FILTRADO LINEAL Y ANALISIS ESPECTRAL

El estudio de vibraciones de numerosos sistemas físicos reales, nos conducen a problemas no lineales. La linealización nos conduce a una solución aproximada satisfactoria. La otra parte del problema estocástico de vibraciones no lineales, es resolver los casos límite, los cuales nos van a ayudar a construir una solución.

Hay en la práctica muchos problemas de vibraciones lineales cuyo interés de estudio ya pasó. Sin embargo, los resultados concernientes a las oscilaciones lineales estocásticas son importantes en la práctica, hoy.

Aún en el caso de dimensión infinita, los métodos presentados sirven para resolver problemas de dimensión finita.

Vibraciones aleatorias (consideraciones generales)

Anteriormente, en vibraciones se podían distinguir tres tipos de funciones de excitación llamadas:

Armónicas.

periódicas.

no periódicas o transitorias.

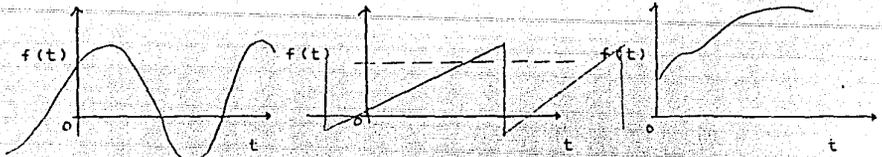


fig.

La característica común, es que su valor se puede predecir para cualquier tiempo t ; esto implica que las funciones son DETERMINISTAS. La respuesta de sistemas a excitaciones deterministas, es también determinista.

Para sistemas lineales, no es difícil expresar la respuesta de cualquier excitación determinista en forma completa con una integral de convolución.

La teoría de sistemas no lineales, no está todavía bien desarrollada y la respuesta a excitaciones arbitrarias no se puede expresar mediante una integral de convolución, sino que se utiliza para expresar la respuesta mediante integración numérica.

Hay muchos fenómenos físicos, sin embargo, que no se pueden describir en el tiempo: como por ejemplo, el alto de las olas en un mar encrespado, la intensidad de un temblor, etc.

La implicación, es que el valor para algún tiempo futuro de las variables que describen el fenómeno, no se pueden predecir.

Si la intensidad de un temblor se mide como función del tiempo, entonces los datos para un temblor serán diferentes para uno que para otro; las razones para la diferencia, son muchas y variada y ellas tienen que ver poco o nada, con la medida de los instrumentos. La principal razón, puede ser que hay muchos factores que lo afectan.

Los fenómenos que no se pueden predecir para un instante de tiempo futuro, se llaman no deterministas y se les llama aleatorios..

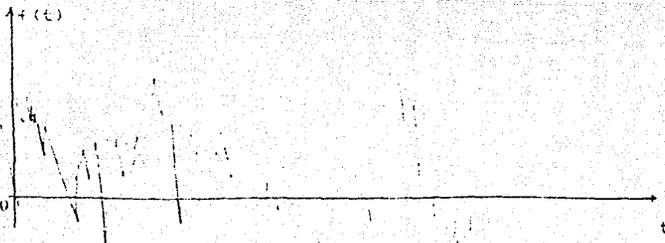


fig.

La respuesta de un sistema a una excitación aleatoria, es también un fenómeno aleatorio.

Muchos fenómenos aleatorios exhiben un cierto patrón, en el sentido de que los dos datos pueden ser descritos en fenómenos de ciertos patrones. Esta característica de fenómenos aleatorios, es llamada *regularidad estadística*. Si la excitación presenta regularidad estadística, también la respuesta.

En tales casos, es más factible describir la excitación y la respuesta en términos de probabilidad de ocurrencia antes de buscar una descripción determinista.

En este capítulo, desarrollaremos las herramientas de la aproximación estadística para el análisis de vibración y el uso de estas herramientas para derivar la respuesta de sistemas lineales a excitaciones aleatorias.

4.1. Transformación lineal de señales.

4.1.1. Introducción.

En Física, las cantidades que se miden, son todas reales. Sin embargo, la necesidad de cálculo, obliga a escribir las cantidades reales, como la parte real de las cantidades complejas; por lo tanto, vamos a reemplazar el Espacio Euclidiano por un Espacio Complejo.

A lo largo de este capítulo, d , d' , m y n son enteros estrictamente positivos y finitos, T y T' son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^d y $\mathbb{R}^{d'}$, respectivamente; F y G es la complejificación de los espacios Euclidianos F_e y G_e respectivamente, de dimensión m y n . $L(F, G)$, es el espacio vectorial de aplicaciones lineales continuas de F en G .

El producto escalar de F , define una forma bilineal $F \times F$ que prolonga en una forma bilineal compleja $F \times F$ y que se denota $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Utilicemos una Base Ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de F , de tal manera, que toda f de F se escribe:

$$f = \sum_{j=1}^m f_j e_j$$

y para f y f' tenemos $F \langle f, f' \rangle = \sum_{j=1}^m f_j f'_j$. En forma análoga para el espacio G , existe una base ortonormal G_e , denotada $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$. Así, uno puede reemplazar el espacio $L(F, G)$, por un espacio de matrices complejas, de n líneas y m columnas, o sea, las componentes del operador.

Todos los elementos de $A = u \times v$ serán considerados como operadores lineales de F , donde la matriz A tiene elementos $[A]_{j1} = (e_j, Ae_1)$

4.1.2. Definición de las transformaciones lineales consideradas.

Los sistemas físicos considerados, son definidos por:

- i. Un espacio vectorial X de funciones o de distribuciones
 $X: T \rightarrow F$, llamada la señal de entrada.
- ii. Por un espacio vectorial Y de funciones, o de distribuciones
 $Y: T' \rightarrow G$, llamada la señal de salida.
- iii. Por una distribución $Q: T' \times T \rightarrow L(F, G)$, tal que la transformación se denota como: Q , con $x \in X$ tal que asocia una señal $y = Q \cdot x$. Tal transformación, se define informalmente como:

$$y_{t'} = \int_{t \in T} Q(t', t) x_t dt$$

integral definida y linealmente continua de x a y . Si $Q = q(t', t) dt' dt$ con $q(t', t)$ una función y si x es una función, tenemos:

$$y(t') = \int_{t \in T} q(t', t) x(t) dt$$

La función Q se llama la función núcleo de la transformación: $Q: X \rightarrow Y$ y usando las bases ortonormales $\{e_j\}$ de F_e y $\{e'_j\}$ de G_e . El núcleo Q se caracteriza por $n \times m$ distribuciones Q_{ij} que para toda $i \in \{1, n\}$:

$$y_i = \sum_{j=1}^m Q_{ij} x_j$$

si la distribución Q_{ij} es nula, la transformación Q_{ij} es nula. Se puede demostrar que toda transformación:

$$D: (T, F) \rightarrow (T', G)$$

no tiene un solo núcleo, por lo tanto, escribiremos:

si $Q = q(t', t) dt' dt$:

$$(Q \cdot x)_i(t') = \sum_{j=1}^m \int_{t \in T} q_{ij}(t', t) x_j(t) dt$$

4.1.3. Transformaciones lineales con función núcleo.

Si tenemos la transformación lineal: $Q : x \rightarrow y = Qx$, en las cuales la función núcleo se auxilia de las bases ortonormales de F_e y G_e ; por lo tanto, existen $n \times m$ funciones localmente integrables $T' \times T \rightarrow L(F, G)$, tales que: $Q = \int q_{ij}(t', t) dt' dt$. Se puede definir entonces par

toda $t' \in T'$, una función medible $y(t') = \int_{t \in T} q_{ij}(t', t) \phi_j(t) dt$, donde ϕ_j

4.1.4. Transformaciones lineales con medidas de núcleo.

En un caso más general, $Q = \mu_{t'}(t) \times dt'$ con $\mu_{t'}$, una medida $T \rightarrow L(F, G)$ dependiente del parámetro $t' \in T'$, por lo tanto:

$$y(t') = \int_{t \in T} \mu_{t'}(t) \times (t)$$

esto es, viendo el caso particular cuando la función núcleo es:

$$\mu_{t'}(t) = q(t', t) dt$$

4.1.5. Operador físicamente realizable.

Definición.

Consideremos una transformación lineal $Q :$

$$D \subset (\mathbb{R}, F) \longrightarrow D' \subset (\mathbb{R}, G)$$

definida por una distribución núcleo: $Q \in D(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, L(F, G))$; un operador es físicamente realizable, si el soporte de la distribución es continua dentro del mismo espacio $t \leq t'$.

Para el caso particular de una medida del núcleo $\mu_{t'}(t) dt$ significa que para todos los reales t' , la medida de soporte es continua en todo el espacio $t \leq t'$; donde la transformación lineal correspondiente Q' , se escribe como:

$$Q' : x \longrightarrow y(t') = \int_{-\infty}^{t'} \mu_{t'}(t) \times (t)$$

Esto físicamente significa, que para toda señal x de entrada, el valor de la señal de salida en un instante t' , no depende de los valores

de x en los valores pasados $t \leq t'$; o dicho de otra manera, una transformación es físicamente realizable, si no anticipa el pasado.

4.1.6. Estabilidad de un operador lineal

Definición.

Un operador lineal Q , se dice que es estable si transforma toda señal acotada, en una señal acotada. Y se dice que es exponencialmente estable si transforma toda señal exponencialmente decreciente, en una señal exponencialmente decreciente.

4.2. Filtro de convolución.

4.2.1. Definición.

Una transformación lineal Q' asociada a una distribución núcleo Q de $T' \times T$ con valores $L(F, G)$, se llama *filtro de convolución* de $T = t' = \mathbb{R}^d$ si existe una distribución templada $s \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^d, L(F, G))$, tal que $Q' t' = s * t' - t'$, donde s se llama la *respuesta al impulso* del filtro Q' .

Si tomamos las coordenadas de F y G , existen $n \times m$ distribuciones templadas s_{ij} tales que: $(Q' t', t')_{ij} = (s_{ij} * t' - t')_{ij}$; de una manera general, uno puede aprovechar los *operadores de convolución* para una combinación lineal de traslación, tal que las combinaciones lineales de las Deltas de Dirac formen un subespacio denso en el espacio de las distribuciones.

4.2.2. Respuesta en frecuencia a los filtros de convolución.

Respuesta a excitaciones aleatorias. Transformadas de Fourier.

En vibraciones aleatorias, es conveniente describir la excitación y la respuesta, en términos de funciones en el dominio de la frecuencia. Se demuestra en el Anexo A, que una función periódica de período T , se puede representar por series de Fourier, o sea, series infinitas de funciones armónicas de frecuencias $p\omega_0$ ($p = 0$,

$\pm 1, \pm 2, \dots$), donde $\omega_0 = 2\pi/T$, es la frecuencia fundamental. En periodos T aproximadamente infinitos, la función será no periódica. En el proceso, se hacen las frecuencias ω_0 cada vez más cerradas, hasta que llegamos al continuo; en tal tiempo, las series de Fourier se hacen integrales de Fourier:

$$f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (w) e^{iwt} dw \text{ (representación de la integral de Fourier).}$$

con: $* F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$ (transformada de Fourier).

entonces, tendremos (apéndice A) que la respuesta del sistema a un excitación arbitraria (no periódica) también puede ser escrita en forma de Transformadas de Fourier pares, como sigue:

$$\text{con 2) } x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-iwt} dt.$$

$$\text{con 1) } x(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(w) e^{iwt} dw.$$

* Ésta integral existe si $f(t)$ satisface las condiciones de Dirichlet's en $-\infty < t < \infty$ y si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$,

es convergente; \rightarrow si no es convergente, la Transformada

de Fourier necesariamente no existe; ejemplo:

$f(t) = \sin \alpha t$, donde la integral es convergente.

donde la Transformada de Fourier de la respuesta, es:

$$X(w) = g(w) F(w) \quad \text{con } g(i\omega) = \frac{1}{A \sqrt{1 - (w/w_n)^2 + (w/w_d)^2}}$$

la cual, es el producto de la frecuencia de respuesta y la Transformada de Fourier de la excitación. (Entradas F 's, salidas x 's). Para obtener el sistema de respuestas en función del tiempo, hay que evaluar 1), que nos puede dar una integral complicada en el plano de los complejos. Por lo tanto, las integrales de Fourier son de gran valor. Esto es cierto cuando la excitación es no determinista, como en el caso de vibraciones aleatorias.

NOTA:

ξ = viscous damping factor (factor de amortiguamiento).

w_n = frecuencia natural de undamped (no amortiguado).

Apéndice (A):

Ya concluimos que $f(t)$ representa una función de excitación; entonces, la respuesta del sistema puede ser escrito en la forma:

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} G_p C_p e^{ip\omega_0 t},$$

donde g_p es la frecuencia de respuesta de frecuencia asociada con

frecuencia $p\omega_0$:

$$f(t) = 1/T \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p e^{ip\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

$$C_p = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ip\omega_0 t} dt, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}$$

$$= 2i \sin \omega t$$

2i

La transformada de Fourier es una herramienta útil para utilizar los operadores de convolución, ya que transforma la convolución en productos.

Definición.

La respuesta en frecuencia de un filtro de convolución definido en la sección anterior, es la Transformada de Fourier s^* de la respuesta a impulso $s \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d, L(F,G))$. s^* es una distribución de \mathbb{R}^d , con valores en $L(F,G)$. Esto es:

$$s^*(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \omega, t \rangle} s(t) dt$$

Más generalmente, si x es una distribución acotada $s^* x$, en un sentido donde la Transformada de Fourier está hecha por:

$$(s^* x)^* = s^* x^*$$

4.2.3. Transformación de exponenciales.

Para toda $a \in \mathbb{R}^d$, consideremos la señal $x(t) = (\exp i \langle a, t \rangle) x f$ con $f \in F$ tal que la transformada de Fourier de $t \rightarrow \exp i \langle a, t \rangle$ es $(2\pi)^{-d} \delta_a$; en consecuencia, si la Transformada de Fourier es una función continua, el producto de s^* y x^* se define y escribe:

$$s^* x^* = (2\pi)^{-d} \delta_a s^*(\omega) f$$

La Transformada de Fourier inversa, se escribe como: $s^* x = s^*(a) x$; por consiguiente, $s^*(a)$ se interpreta físicamente como el factor de amplificación de la señal de entrada $x(t) = (\exp i \langle a, t \rangle) x f$.

Así, una cosa de importancia física en la teoría de la

Transformada de Fourier, es que las combinaciones lineales de las señales exponenciales forman un subespacio denso de $\rho'(\mathbb{R}^d)$. En consecuencia, $s^* x$ es nula, si s' es nula en un vecindad de a ; y $s^* x$ es grande, si s' es grande en la vecindad de a .

4.2.4. Filtro de convolución físicamente realizable.

Proposición.

Sea $a \in \rho(\mathbb{R}, 1(F,G))$. Entonces, el operador definido por $x \mapsto s^* x$, es físicamente realizable si solamente el soporte de la distribución s existe para $t \geq 0$.

Para el caso de la función de respuesta del impulso: $s = h(t) dt$, el filtro s^* es físicamente realizable, si: para $t \rightarrow h(t)$, es idénticamente nulo para $t < 0$; entonces, tenemos para $t' \in \mathbb{R}$:

$$g(t') = \int_0^{\infty} h(t) f(t'-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t'-t) f(t) dt$$

4.2.5. Función de transferencia de filtros de convolución físicamente realizables.

Definición.

Sea s^* un filtro de convolución físicamente realizable, definido por la respuesta al impulso $s \in \rho'(\mathbb{R}, L(F,G))$, donde el soporte solo toma valores para $t \geq 0$; entonces, la función de transferencia del filtro, es la transformada de Laplace $p \mapsto s''(p)$ de s , la cual se define en el espacio Real de $p > 0$ de la variable compleja $p = a + i b$.

Tenemos que utilizando las coordenadas de F y G , las $n \times m$ distribuciones s_{ij} que caracterizan s , por una transformada de Laplace definida para $a > 0$ por la relación:

$$s''_{ij}(p) = \langle s_{ij}, e^{-pt} \rangle.$$

Uno puede poner $p = 0 + i\omega$ como la respuesta en frecuencia del filtro $s'(\omega) = s''(0 + i\omega)$. Si se pregunta el caso de que $a_0 = 0$ es la más pequeña de las a_j ; tal que la ecuación anterior nos da una manera de definir $s'(\omega)$ a partir de $s''(p)$, calculando el límite:

$\lim_{a \rightarrow 0} s''(a + i\omega)$ para un espacio de distribución.

4.3. Oscilador lineal de dimensión finita.

En esta sección, pondremos que A , B y C , son tres *endomorfismos* de F_e , y A es estrictamente positivo. Así, A , B y C , son operadores lineales simétricos para todo $f \in F_e$; en fin, X y Y son funciones sobre \mathbb{R} de la variable t , con valores en F_e .

4.3.1. Definición

Todo sistema físico regido por una ecuación diferencial:

$$A y'' + B y' + C y = x$$

se llama un *oscilador lineal de dimensión m* . Si $B = 0$, se dice que el oscilador no es amortiguado. Si tenemos una base ortonormal de F_e , la ecuación anterior se puede escribir en la forma de un sistema diferencial:

$$\sum_{j=1}^m (A_{ij} y_j'' + B_{ij} y_j' + C_{ij} y_j) = x_i, \quad \text{con } i=1, \dots, m,$$

o en forma matricial:

$$[A] [y''] + [B] [y'] + [C] [y] = [x]$$

en el caso de que la dimensión de F_e sea igual a 1, se trata de un oscilador simple. Si A , B y C , son tales que $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, entonces nuestra ecuación, es una ecuación diferencial ordinaria.

Si el segundo miembro es nulo, se lo llama *respuesta libre* del oscilador. En caso contrario, se lo llama *respuesta forzada*.

Para el caso general $m > 1$, uno necesita estudiar el caso común $m = 1$. Es posible ver que existe una base F_e , la cual *diagonaliza* los operadores A , B y C , dándonos m osciladores simples *desacoplados*.

4.3.2. Desacoplamiento de un oscilador de dimensión N

Si el operador A es estrictamente positivo, en el espacio vectorial F_e , dado por el producto escalar $\langle f, f \rangle_A = \langle A f, f \rangle$, existe una base ortogonal $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$, de F_e , la cual diagonaliza $L = A^{-1}C$. Los números $\|\phi_j\|_A^2 = \langle A \phi_j, \phi_j \rangle = a_j$, son dos números estrictamente positivos, tal que ω_j^2 es el valor propio mayor que cero de L asociado al vector propio

$$\phi_j \quad A^{-1} C \phi_j = \omega_j^2 \phi_j.$$

4.3.3. Lema y definición de la base modal y de coordenadas modales.

Promedios de conjuntos. Procesos aleatorios estacionarios.

Consideremos un experimento que consiste en medir el desplazamiento del tren de aterrizaje de un aeroplano sobre un camino rugoso y denotamos por $x_1(t)$ una realización, correspondiente a este desplazamiento.

Consideremos en otra realización, el mismo aeroplano sobre el mismo camino sinuoso, bajo condiciones similares; entonces, le asociamos el tiempo $x_2(t)$ que en general es diferente a $x_1(t)$, porque puede haber una pequeña variación en la presión en la llanta, las condiciones del viento pueden ser un poco diferentes, etc.

Ahora, asumamos que el experimento se repite varias veces y se grafican las correspondientes realizaciones:

$$x_k(t) \quad k = 1, 2, \dots$$

Estas realizaciones son generalmente diferentes entre sí y se puede concluir que las razones para la diferencia son muy complejas y no todos los factores que afectan son tomados en cuenta, o no son completamente entendidos. Esto implica que las realizaciones no se pueden expresar explícitamente en términos de funciones conocidas del tiempo.

Reconocemos que el desplazamiento que estamos considerando, se puede conocer como **FENOMENO ALEATORIO**, los cuales son comunes en el medio físico y su tratamiento matemático puede dar resultados promedios, cuando los datos poseen cierta regularidad.

Un individual historial en el tiempo $x_k(t)$ que describe un fenómeno aleatorio se llama *realización*, y la variable $x_k(t)$, se llama *variable aleatoria*. La colección Φ de conjuntos de todas las posibles realizaciones, que pueden resultar del experimento, se conocen como *procesos aleatorios* o *procesos estocásticos* y se denotan por $\{x_k(t)\}$.

Nota: $x_k(t)$ se pueden tomar como componentes de un vector y en ese caso (braces), ensambles denota un fenómeno aleatorio y no un vector.

El desplazamiento del tren de aterrizaje juega el papel de una excitación a la que el aeroplano está sujeto. Como la excitación no es

determinista, la pregunta es: Cómo calcular la respuesta del sistema?

Una aproximación sencilla, puede ser calcular la respuesta para cada realización en el ensamble, lo cual no es muy eficiente, porque puede haber cientos de ellas en el proceso aleatorio y el manejo de datos puede ser prohibitivo.

Por otra parte, si la excitación es un problema aleatorio, la respuesta es también un proceso aleatorio; de tal manera, que tendremos la misma dificultad en manejar los datos de respuesta. En suma, esto nos da la pregunta de: cómo interpretar resultados?

Una forma más eficiente de describir la excitación y respuesta a procesos aleatorios, que se presenta de una manera más deseable.

Para éste fin, es necesario abandonar la descripción de excitación, y respuesta en términos del tiempo, en favor de una descripción basada en ciertos promedios; éstos promedios, se llaman *estadísticos*. Cuando éstos tienden a límites reconocibles, cuando el número de realizaciones, el proceso aleatorio se dice que exhibe una *regularidad estadística*.

Asumimos nuestro proceso, consistente de n realizaciones $x_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$) y calculamos valores promedio a lo largo de la colección de realizaciones que se llaman *promedios del conjunto*.

El valor medio del proceso aleatorio, a un tiempo dado $t=t_1$, es un promedio de los valores de todas las realizaciones, dándoles igual peso:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=1}^n x_k(t_1).$$

Otro tipo de promedio de conjunto, se obtiene del producto de los valores instantáneos de la realización a dos tiempos:

$t = t_1$ y $t = t_1 + \tau$ y dividiendo entre el número de realizaciones, y se llama *función de autocorrelación*.

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=1}^n x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau).$$

determinista, la pregunta es: Cómo calcular la respuesta del sistema?

Una aproximación sencilla, puede ser calcular la respuesta para cada realización en el ensamble, lo cual no es muy eficiente, porque puede haber cientos de ellas en el proceso aleatorio y el manejo de datos puede ser prohibitivo.

Por otra parte, si la excitación es un problema aleatorio, la respuesta es también un proceso aleatorio; de tal manera, que tendremos la misma dificultad en manejar los datos de respuesta. En suma, esto nos da la pregunta de: cómo interpretar resultados?

Una forma más eficiente de describir la excitación y respuesta procesos aleatorios, que se presenta de una manera más deseable.

Para éste fin, es necesario abandonar la descripción de excitación y respuesta en términos del tiempo, en favor de una descripción basada en ciertos promedios; éstos promedios, se llaman estadísticos. Cuando éstos tienden a límites reconocibles, cuando el número de realizaciones, el proceso aleatorio se dice que exhibe una regularidad estadística.

Assumimos nuestro proceso, consistente de n realizaciones $x_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$) y calculamos valores promedio a lo largo de la colección de realizaciones que se llaman *promedios del conjunto*. El valor medio del proceso aleatorio, a un tiempo dado $t=t_1$, es un promedio de los valores de todas las realizaciones, dándoles igual peso:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1).$$

Otro tipo de promedio de conjunto, se obtiene del producto de los valores instantáneos de la realización a dos tiempos:

$t = t_1$ y $t = t_1 + F$ y dividiendo entre el número de realizaciones, y se llama *función de autocorrelación*.

$$R_x(t_1, t_1 + F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) x_k(t_1 + F).$$

se llama DEBILMENTE ESTACIONARIO) y

$$\mu_x(t_1) = \mu_x = \alpha_t \text{ y } R \text{ depende de } F. \text{ Si todos los posibles promedios}$$

estacionario.

3.4. Promedios de tiempo. Procesos aleatorios ergódicos.

(falta) μ y R , generalmente requieren un número grande de realizaciones. Bajo ciertas circunstancias, es posible detener el mismo valor medio y R de $(x_k(t))$ usando una sola "representativa" función sample, y promediando a lo largo del tiempo t , se les llama *promedios en el tiempo* ó *promedios temporales*.

El valor medio temporal, se define:

$$\mu_k(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) dt.$$

y la función temporal de autocorrelación:

$$R_x(k, F) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) x_k(t+T) dt.$$

Si el proceso $(x_k(t))$ es estacionario, y si el valor medio temporal y $R_x(k, F)$ son los mismos, independientemente de las realizaciones pasadas, $x_k(t)$ sobre los cuales se calcularon ésto promedios, entonces, el proceso se llama *ergódico*.

$$\rightarrow \mu_k(k) = \mu_x = \text{cte.}$$

$$R_x(k, F) = R_x(F).$$

Cualquier proceso ergódico, es necesariamente un proceso estacionario, pero un proceso estacionario no es necesariamente ergódico.

El asumir *ergodicidad*, permite el uso de solamente una realización, para calcular promedios al describir un proceso aleatorio dado, en lugar de usar el ensemble completo. La complicación, es que la realización escogida sea representativa del proceso aleatorio completo. El subíndice k , identifica las realizaciones particulares usadas y ya no se va a usar.

Muchos procesos aleatorios asociados con fenómenos físicos, son ergódicos. Si un proceso no es ergódico, pero meramente estacionario, entonces, nosotros debemos de trabajar con el conjunto promedio en lugar de tiempos promedios.

3.4.1. Valores medios cuadrados.

Nos dan una medida de la energía asociada con la vibración descrita por la variable. La definición de $\mu_k(t)$, es:

La raíz positiva se llama *raíz cuadrada media*, ó (rcm).

Para un proceso ergódico μ_x , la raíz cuadrada media es constante. En este caso, μ_x puede llamarse la *componente estadística* de $x(t)$ y $x(t) = \mu_x$, la *componente dinámica*.

Nos interesa el valor medio cuadrado de la componente dinámica llamada *variancia*:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \mu_x]^2 dt$$

La raíz cuadrada positiva, es la *desviación estándar*.

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \mu_x^2$$

3.5. Funciones de densidad de probabilidad.

Información concerniente a las propiedades de las variables aleatorias, se pueden obtener de las funciones de densidad de probabilidad.

$$\text{Prob} [x(t) < x] = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \sum_i \Delta t_i = P(x).$$

3.5.1. Función de distribución de probabilidad.

Propiedades:

- monótona creciente.
- $P(-\infty) = 0$.
- $0 \leq P(x) \leq 1$.
- $P(\infty) = 1$.

Función de densidad de probabilidad.

$$f P(x) = \frac{d P(x)}{dx}$$

$$\rightarrow P(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$$

Esta tiene interés especial de acuerdo al límite central. (Si la v.e. es la suma de un número de v.e. independientes, ninguna de las cuales contribuyen significativamente a la suma, la distribución es normal o Gaussiana:

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi \text{ "función de error".}$$

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$$

Otra distribución importante es la "distribución de Rayleigh", definida por:

$$P(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$P(x) = \begin{cases} x e^{-x^2/2} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Muchas veces, se necesita la densidad de probabilidad $P(x)$, asociada con la variable aleatoria $x = x(y)$, siendo $P(y)$ conocida:

$$P(y) = \int_{y_1} \left[\frac{P(x)}{|dx/dy|} \right]_{y=y_1}$$

donde y_1 son todos los valores de y , correspondientes a $x(y)$.

3.5.2. Descripción de datos aleatorios en términos de funciones de densidad de probabilidad.

Si tenemos una realización en el tiempo $x(t)$ de un proceso aleatorio estacionario, es conveniente reducirla a una función de densidad de probabilidad $P(x)$. Esto se hace convirtiendo la función $x(t)$ en una señal de voltaje y alimentando ése en "analog amplitude probability density analyte". Si tenemos la función de densidad $P(x)$, varios promedios se pueden calcular.

Consideremos un valor de una señal real θ , como una función continua $g(x)$ de la variable aleatoria $x(t)$. Por definición, la esperanza matemática de $g(x)$ o valor esperado, es:

$$E[g(x)] = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) P(x) dx.$$

Si

$$g(x) = x \rightarrow$$

$$E(x) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx.$$

- Media cuadrada de x o $E(x^2)$ y su raíz cuadrada es: la raíz med. cuadrada.

- La variancia de x , es:

$$\text{momento de inercia contra } \sigma_x^2 + \bar{x}^2 = (x^2 \text{ de Área}).$$

- y su raíz cuadrada, es la desviación estándar (radio de giro) (σ)

-Normal no estandarizada:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

3.53. Propiedades de la función de autocorrelación.

La función de autocorrelación nos da información acerca de la dependencia del valor de una variable aleatoria en un tiempo, sobre el valor de la variable en otro tiempo.

a) La autocorrelación, es una función par de τ .

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

b) El máximo valor de la función de autocorrelación, se obtiene en:

$$\tau = 0$$

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|.$$

pero como es $R_x(0)$, el máximo valor de la función de autocorrelación, es igual al valor cuadrado medio.

$$R_x(0) = \overline{x^2}$$

c) Si $x(t)$ es periódico $\rightarrow R_x(\tau)$ es periódico.

\rightarrow un valor máximo de $R_x(\tau)$ no solo es $\tau = 0$, sino también en valores que son múltiplos enteros del período.

3.6. Respuesta a excitaciones aleatorias. Transformadas de Fourier.

En vibraciones aleatorias, es conveniente describir la excitación y la respuesta, en términos de funciones en el dominio de la frecuencia.

Se demostró en el Anexo A, que una función periódica de período T , se puede representar por series de Fourier, o sea, series infinitas de funciones armónicas de frecuencias $p\omega_0$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), donde $\omega_0 = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental. En períodos T aproximadamente infinitos, la función será no periódica. En el proceso se hacen las frecuencias $p\omega_0$ cada vez más cerradas, hasta que llegan al continuo: en tal tiempo, las series de Fourier se hacen integrales de Fourier.

$f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ (representación de la integral de Fourier).

Esta integral existe si f(t) satisface las condiciones de Dirichlet's en $-\infty < t < \infty$ y si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$, es convergente; \rightarrow si no es convergente, la Transformada de Fourier necesariamente no existe; ejemplo:

f(t) = sen α t, la integral es divergente.

Si f(t) representa una función de excitación, entonces, la respuesta del sistema puede ser escrito en la forma:

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} G_p C_p e^{ipv_0 t}$$

donde G_p es la frecuencia de respuesta asociada con la frecuencia $p\omega_0$. Entonces, tenemos:

$$f(t) = 1/T \sum_{-\infty}^{\infty} C_p e^{ipv_0 t}, \quad v_0 = 2\pi/T$$

$$C_p = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ipv_0 t} dt, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

entonces, tendremos que la respuesta del sistema a una excitación arbitraria (no periódica) también puede ser escrita en la forma de Transformadas de Fourier pares, como sigue:

$$\text{con 2) } x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\text{con 1) } x(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

donde la transformada de Fourier de la respuesta, es:

$$X(\omega) = a(\omega) F(\omega) \quad \text{con } a(i\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + i^2 (\omega/\omega_n)}$$

la cual es el producto de la frecuencia de respuesta y la Transformada de Fourier de la excitación. (entradas F's, salidas X's).

Para obtener el sistema de respuestas en función del tiempo, hay que considerar que podemos obtener una integral complicada en el plan de los complejos. Por lo tanto, las integrales de Fourier son de gran valor. Esto es cierto cuando la excitación es no determinista como es el caso de vibraciones aleatorias.

3.7. Funciones de densidad de potencia espectral.

La función de autocorrelación nos da información acerca de una variable aleatoria en el dominio del tiempo y la función de densidad de potencia espectral, nos da la misma información en el dominio de la

Para procesos aleatorios ergódicos, la función de densidad de potencia espectral, no nos da esencialmente información proporcionada por la función de autocorrelación; en ciertas aplicaciones, la primera forma es más conveniente que la segunda.

Si tenemos la función representativa $f(t)$ de un proceso aleatorio ergódico ($f(t)$), su autocorrelación es:

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t+\tau) dt.$$

entonces, definimos función de densidad de potencia espectral

$S_f(\omega)$ como la Transformada de Fourier de $R_f(\tau)$:

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

o la autocorrelación se puede obtener en la forma de la Transformada de Fourier inversa:

$$R_f(\tau) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

para entender el significado físico, se hace $\tau = 0$:

$$R_f(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega.$$

Si $f(t)$ es un voltaje, el valor cuadrado medio representa la potencia media disipada en un resistor de 1Ω ; por lo tanto, $S_f(\omega) / 2\pi$ da la potencia media total de $f(t)$ y $f f(\omega) / 2$ es la función de densidad de potencia espectral ó el espectro de densidad de potencia de $f(t)$. La función $S_f(\omega)$ también se conoce como la densidad espectral media cuadrada.

$S_f(\omega)$ tiene ciertas propiedades que pueden usarse para la evaluación de promedios de manera muy fácil:

Propiedades:

- $S_f(\omega)$ nunca es negativa. $S_f(\omega) \geq 0$.
- $S_f(\omega) = S_f(-\omega)$ o sea, es una función par por eso:

$$\rightarrow S_f(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_f(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

entonces:

$$\rightarrow R_f(\tau) = 1/\pi \int_0^{\infty} S_f(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Estas dos últimas ecuaciones son llamadas las Ecuaciones Wiener-Khinchin y excepto por un factor de dos, se parecen a las transformadas en coseno de Fourier.

$$\rightarrow R_f(0) = 1/\pi \int_0^{\infty} S_f(\omega) d\omega.$$

la cual es útil para calcular el valor medio cuadrado de un proceso aleatorio estacionario si la densidad de potencia espectral es

8. Estrechamiento de banda y ancho de banda para procesos aleatorios.

La densidad espectral media cuadrada $\hat{F}_f(w)$ nos da una medida de la representación de frecuencias dadas en un proceso aleatorio, nos limitaremos a procesos aleatorios ergódicos, los cuales se identifican por la forma de la densidad de potencia espectral.

En particular, nosotros distinguimos entre procesos de banda angosta y ancha.

Un proceso de banda angosta se caracteriza porque $S_f(w)$ tiene valores significativos, solamente centrados alrededor de una pequeña banda de frecuencia p centrada alrededor de la frecuencia correspondiente al máximo.

Una realización representativa de este proceso, contiene solamente un rango estrecho de frecuencias.

En el caso de procesos de banda ancha, $S_f(w)$ tiene muchos valores a lo largo de una banda ancha de frecuencias, cuyo ancho es del mismo orden de magnitud que la frecuencia central de la banda; una realización de este proceso, contiene un número grande de frecuencias.

En los dos extremos encontramos $S_f(w)$ en dos funciones delta simétricamente colocados, correspondientes a una función sinusoidal y un $S_f(w)$ uniforme, correspondiente a una función en la cual todas las funciones están igualmente representadas; el primero será aleatorio si el ángulo de fase está aleatoriamente distribuido, y el segundo, llamado ruido blanco si la frecuencia de banda es infinita, habiendo de ruido blanco ideal.

No es posible dar expresiones analíticas para las funciones de densidad de probabilidad asociadas con procesos de banda angosta, de banda ancha y ruido blanco. Sin embargo, se acercan a aproximaciones Gausianas.

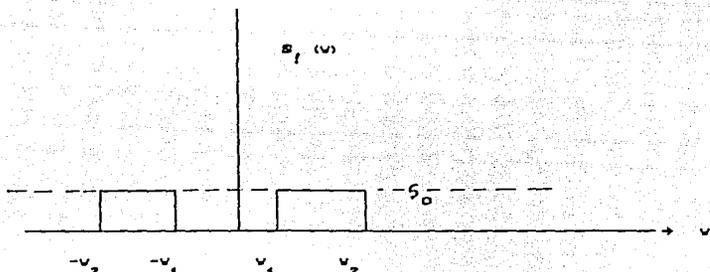
La función de autocorrelación de un proceso de banda angosta aparece como una función coseno de amplitud que decae; un proceso de banda ancha aparece como un pulso angosto que decae rápidamente a cero.

En el límite, cuando el ancho de la banda de frecuencia, crece indefinidamente, la función de autocorrelación se reduce al ruido blanco que tiene la forma:

$\delta(\tau) = \dots$

con $\delta(\tau)$ es la función delta de Dirac.

Un proceso aleatorio más realista, es el ruido blanco de banda limitada:



donde w_1, w_2 , se conocen como intersecciones inferior y superior de frecuencia, respectivamente; nos puede servir como una aproximación razonable para el espectro de densidad de potencia de un proceso de banda ancha:

$$R_f(\tau) = \frac{S_0}{\pi} \frac{\sin w_2 \tau - \sin w_1 \tau}{\tau}$$

Es necesario desarrollar una expresión para la densidad o potencia espectral de un proceso derivado. En particular, es de interés obtener una expresión $S_f(w)$ de un proceso estacionario $f'(t)$, suponiendo $S_f(w)$ del proceso estacionario $f(t)$ se conoce, para lo cual tenemos:

$$\frac{d^2 R_f(\tau)}{d\tau^2} = -R_f(\tau).$$

donde $R_f(\tau)$ es la función de autocorrelación derivada del proceso $f'(t)$, entonces:

$$\frac{d^2 R_f(\tau)}{d\tau^2} = -1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} w^2 S_f(w) e^{i w \tau} dw.$$

entonces:

$$R_f(\tau) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_f(w) e^{i w \tau} dw.$$

donde S_f es la densidad de potencia espectral de f' , entonces concluimos:

En un proceso estacionario con valor medio cero, y haciendo $\tau = 0$,
 $\gamma_f^2 = R_f(0) = E(f^2) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega$.

donde σ_f es la desviación estándar. Similarmente:

$$\gamma_{f^2} = R_{f^2}(0) = E[f^2] = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_f(\omega) d\omega.$$

Características del proceso de banda angosta:

a) La frecuencia media o frecuencia esperada ω_0 , se define:

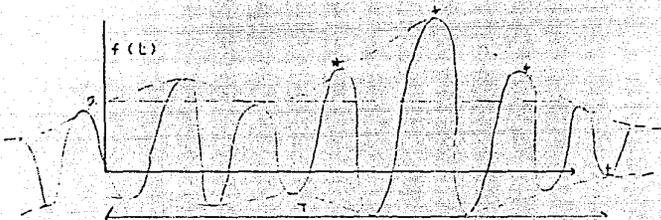
$$\omega_0 = 2\pi \nu_0 = \gamma_{f^2} / \gamma_f = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_f(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega} \right\}^{1/2}$$

b) se puede mostrar que para un proceso aleatorio estacionario de banda angosta, la función de densidad de probabilidad de la envoltura, es:

$$P(a) = a/\gamma_f^2 e^{-a^2/2\gamma_f^2}$$

3.8.1 Distribución Rayleigh.

c) la densidad de probabilidad de los máximos está también dada por la distribución de Rayleigh:



3.9. Respuestas de sistemas lineales a excitaciones aleatorias estacionarias

Se sabe que la respuesta $x(t)$ de un sistema lineal a una excitación arbitraria $f(t)$ se puede escribir en la forma de una integral de convolución.

$$x(t) = \int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda.$$

donde $g(t)$ es el impulso de respuesta y $f(t) = 0$ para $t < 0$ y está definida para $t > 0$; por lo tanto, la ecuación anterior de respuestas de $x(t)$ sólo para $t > 0$. Las variables aleatorias no se restringen a tiempos positivos, por tanto:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda.$$

donde $g(t-\lambda)$ es cero para $t < \lambda$.

por tanto:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda.$$

la cual es simétrica en $f(t)$ y $g(t)$, o sea:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) f(t-\lambda) d\lambda.$$

Sea $X(\omega)$ la Transformada de Fourier de $x(t)$, entonces:

$$X(\omega) = G(\omega) F(\omega)$$

→ la frecuencia de respuesta $G(\omega)$ puede ser identificada como la Transformada del impulso de respuesta.

La convolución de $f(t)$ y $g(t)$ y el producto $G(\omega) F(\omega)$ representan una Transformada de Fourier par; esto es el Teorema de convolución con dominio en el tiempo.

Las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier excitación arbitraria $f(t)$; a nosotros nos interesa el caso en el cual la excitación es de la forma de un proceso aleatorio estacionario ($f(t)$) cuya respuesta ($x(t)$) será también estacionario. Ahora calculemos los estadísticos para la respuesta del proceso aleatorio, dadas las estadísticas correspondientes para la excitación del proceso aleatorio. En un proceso aleatorio estacionario:

$$E[f(t-\lambda)] = E[f(t)] = \text{cte.}$$

$$E[x(t)] = g(0) E[f(t)] = \text{cte.}$$

"Valor medio de la respuesta a una excitación de la forma de un proceso aleatorio estacionario, es constante y proporcional al valor medio del proceso de excitación."

La función de autocorrelación de la respuesta, es:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1) g(\lambda_2) F_f(\tau + \lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$$

la cual no depende de t , corroborando "si para un sistema lineal, la excitación es un proceso aleatorio estacionario, entonces, la respuesta es también un proceso aleatorio estacionario".

La información sobre la respuesta se puede obtener más fácilmente calculando primero $S_x(\omega)$, si se conoce la densidad de potencia espectral de la excitación.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} [1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega') |G(\omega)|^2 e^{i\omega'\tau} d\omega'] d\tau$$

entonces:

$$* S_x(\omega) = |G(\omega)|^2 S_f(\omega).$$

$$R_x(\tau) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

constituyen la transformada de Fourier par.

De la ecuación (*) concluimos que en el caso de un sistema de un grado de libertad con poco amortiguamiento para el cual la frecuencia de respuestas tiene un pico en:

$w = w_n (1 - 2 \zeta^2)^{1/2}$, si la función de densidad de potencia espectral de la excitación representa un proceso aleatorio de banda ancha, entonces, la función de densidad de potencia espectral de la respuesta es un proceso aleatorio de banda angosta, donde ζ es el factor de amortiguamiento, y w_n es la frecuencia de oscilación no amortiguada. El valor medio cuadrado de la respuesta de un proceso aleatorio, es:

$$R_x(0) = E [x^2(t)] = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2 S_f(w) dw.$$

Conclusión si el sistema es lineal y la excitación es un proceso aleatorio estacionario \rightarrow la densidad espectral media cuadrada de la respuesta, la función de autocorrelación y el valor cuadrado medio se pueden calcular conociendo $S_f(w)$ y la magnitud de $|G(w)|$ de la frecuencia de respuesta.

"Si la excitación del proceso aleatorio es Gaussiana y el sistema es lineal, entonces el proceso aleatorio de respuesta, es también Gaussiano. Esto implica que para procesos estacionarios, la distribución de probabilidad de la respuesta está completamente definida por el valor medio de respuesta y el valor cuadrado medio.

Las relaciones y conclusiones anteriores son válidas si el proceso no es estacionario, pero ergódico. La única diferencia donde los promedios serán promedios en el tiempo, calculados usando una realización representativa.

Lo anterior, funciona si no es estacionario, pero si ergódico. La diferencia es que con ergódicos, los procesos promedios, son promedios en el tiempo calculados usando una realización representativa en lugar de promedios de ensamble a lo largo de las realizaciones.

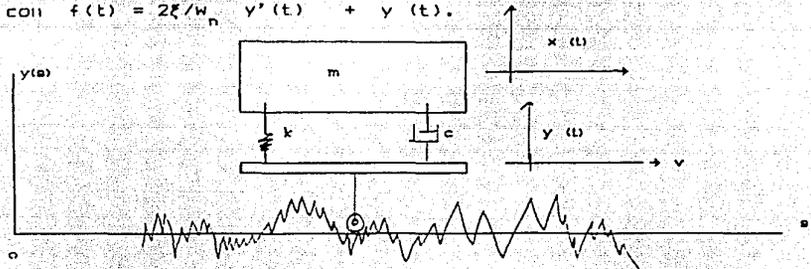
3.10. Respuesta de sistemas de un grado de libertad a excitaciones aleatorias.

Consideremos un sistema masa-amortiguado-resorte (mass-damper-spring) que se mueve con una velocidad uniforme v en un camino rugoso, tal que su soporte le imparte un movimiento vertical

(fig.), Si el camino rugoso se describe por la variable aleatoria $y(s)$, entonces el movimiento vertical del soporte es $y(t)$, donde $t = s/v$, por tanto, la ecuación diferencial del movimiento para la masa m , es:

$$x''(t) + 2\xi\omega_n x'(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 f(t).$$

con $f(t) = 2\xi/\omega_n y'(t) + y(t)$.



$f(x)$ es una excitación equivalente al desplazamiento en la cual ξ es factor de amortiguamiento y ω_n es la frecuencia de oscilación no amortiguada.

Asumimos que el proceso aleatorio asociado con $f(t)$ es ergódico y Gaussiano, tal que la respuesta $x(t)$ es también un proceso ergódico Gaussiano; por tanto, la excitación y respuesta estarán bien descritas por el valor medio y el valor cuadrado medio.

Para un proceso estacionario, el valor medio es constante podemos asumir sin quitar generalidad que ésta constante es cero.

$$E[f(t)] = 0 \rightarrow E[v(t)] = 0.$$

Esto es porque una componente de la excitación constante nos da una componente constante de la respuesta.

Ahora, podemos calcular varios estadísticos básicos que describan proceso aleatorio de respuesta, tal como la función de autocorrelación la densidad de potencia espectral y el valor medio cuadrado. Esto requiere conocimiento de ciertas estadísticas que describan el proceso aleatorio de la excitación. Consideremos dos casos relacionados, llamados el ruido blanco ideal y el ruido blanco de banda limitada.

Ya se indicó en la sección que la función de autocorrelación correspondiente a la densidad de ruido blanco de potencia espectral $S_f(\omega) = S_0$, es:

$$R_f(\tau) = S_0 \delta(\tau),$$

donde $\delta(\tau)$ es la delta de Dirac; el impulso de respuesta del sistema

de un grado de libertad, tiene la forma:

$$g(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \text{sen } \omega_d t u(t)$$

donde la función unitaria de salto $u(t)$, es tal que $g(t) = 0$ para $t < 0$. Entonces, nos queda la función de autocorrelación:

$$R_x(\tau) = \frac{S_0 \omega_n^4}{\omega_d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau + \lambda_1 - \lambda_2) e^{-\xi \omega_n (\lambda_1 + \lambda_2)} \times \text{sen } \omega_d \lambda_1 \text{sen } \omega_d \lambda_2 u(\lambda_1) u(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$$

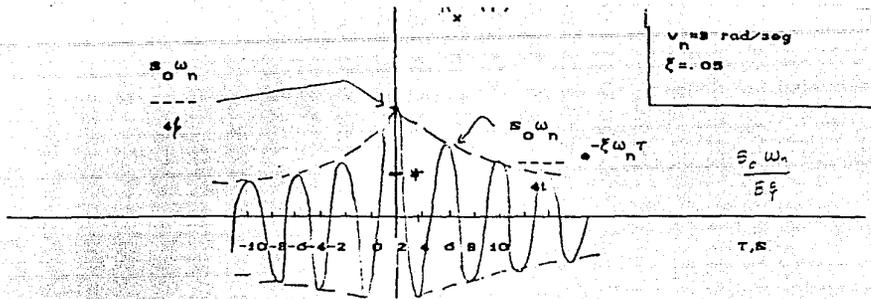
$$R_x(\tau) = \frac{S_0 \omega_n^4}{\omega_d^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(\tau + \lambda_1 - \lambda_2) e^{-\xi \omega_n (\lambda_1 + \lambda_2)} \times \text{sen } \omega_d \lambda_1 \text{sen } \omega_d \lambda_2 d\lambda_1 d\lambda_2$$

En nuestra evaluación de $R_x(\tau)$, asumimos que $\tau > 0$. El valor de $R_x(-\tau)$ puede ser obtenido usando el hecho de que la autocorrelación es una función par de τ . Debido a la naturaleza de la función δ , si integramos con respecto a λ_2 , obtenemos:

$$R_x(\tau) = \frac{S_0 \omega_n^4}{\omega_d^2} \int_0^{\infty} e^{-\xi \omega_n (\tau + 2\lambda_1)} \text{sen } \omega_d (\tau + \lambda_1) d\lambda_1$$

$$R_x(\tau) = \frac{S_0 \omega_n^4}{\omega_d^2} e^{-\xi \omega_n \tau} (\text{sen } \omega_d \tau \int_0^{\infty} e^{-2\xi \omega_n \lambda_1} \text{sen } \omega_d \lambda_1 \cos \omega_d \lambda_1 d\lambda_1 + \cos \omega_d \tau \int_0^{\infty} e^{-2\xi \omega_n \lambda_1} \text{sen }^2 \omega_d \lambda_1 d\lambda_1) \quad \tau > 0$$

La gráfica de la función de autocorrelación es:



pero el valor de las integrales usando las tablas, queda:

$$R_x(\tau) = \frac{S_0 \omega_n}{4\xi} e^{-\xi \omega_n \tau} \left[\cos \omega_d \tau + \frac{\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} \sin \omega_d \tau \right] \quad \tau > 0$$

usando el efecto que $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$, podemos escribir directamente:

$$R_x(\tau) = \frac{S_0 \omega_n}{4\xi} e^{-\xi \omega_n |\tau|} \left[\cos \omega_d \tau - \frac{\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} \sin \omega_d \tau \right] \quad \tau < 0$$

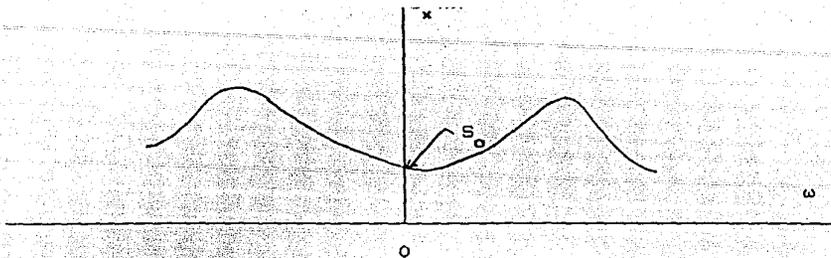
La función de autocorrelación se grafica en la figura anterior para el caso de poco amortiguamiento. Es fácil ver que la función de autocorrelación de respuesta, es de un proceso de banda angosta.

La densidad de potencia espectral de la respuesta, es fácil de obtener. Sabemos que:

$$S_f(\omega) = S_0 \quad \text{y obtenimos:}$$

$$S_x(\omega) = |G(\omega)|^2 S_f(\omega) = \frac{S_0}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\xi(\omega/\omega_n))^2}$$

La densidad de potencia espectral de la respuesta, se muestra en la siguiente figura. Otra vez, concluimos que la gráfica $S_x(\omega)$ con ω , es típico de un proceso de banda angosta.



El valor medio cuadrado, puede obtenerse de dos formas: haciendo $\tau = 0$ en $R_x(\tau)$, o integrando $S_x(\omega)$ con respecto a ω .

$$R_x(0) = E[x^2(t)] = \frac{S_0 \omega_n}{4\xi}$$

entonces,

$$R_x(0) = E[x^2(t)] = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$$

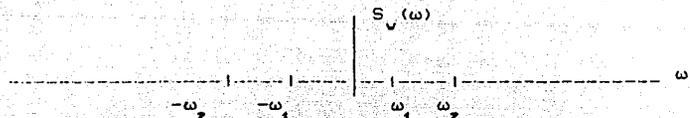
La integración de esta ecuación puede hacerse convirtiendo la variable real ω en una variable compleja y la integral de línea real en un contorno integral en un plano complejo, lo cual puede ser evaluado por el teorema del Residuo, y nos da:

$$R_x(0) = \frac{S_0 \omega_n}{4\xi}$$

Como el proceso aleatorio es Gaussiano con valor medio cero, el valor cuadrado medio es suficiente para determinar la forma de la función de densidad de probabilidad de la respuesta; entonces, haciéndolo, es posible evaluar la probabilidad de la respuesta $x(t)$ de exceder un desplazamiento dado. El valor medio cuadrado, también determina la función de densidad de probabilidad de la distribución de Rayleigh, distribución para la envoltura y picos de la respuesta.

Cuando la densidad de potencia espectral de la respuesta es en la forma de ruido blanco de banda limitada con frecuencia de corte ω_1 y ω_2 respectivamente, la respuesta de densidad de potencia espectral tiene la forma mostrada en la figura siguiente. Entonces, si el sistema tiene

muy poco amortiguamiento y la banda de frecuencia de excitación $\omega_1 < \omega < \omega_2$ incluye la frecuencia del sistema natural ω_n así como su ancho de banda $\Delta\omega = 2\xi\omega_n$ y el ancho de banda de la excitación es grande comparada con el ancho de banda del sistema, el valor medio cuadrado de la respuesta, -la cual es igual al área bajo la curva $S_x(\omega)$ contra ω dividida por 2π -, puede estar aproximada por $S_0\omega_n/4\xi$.



Entonces, bajo estas circunstancias, si asumimos el ruido blancoideal, nos da excelentes resultados; nosotros observamos que mientras $S_f(\omega)$ es plana, $S_x(\omega)$ no lo es y su efecto tiene un pico angosto en la vecindad de $\omega = \omega_n$ para poco amortiguamiento. Mientras que el espectro de respuesta tiene el valor S_0 para frecuencias relativamente pequeñas y se desvanece por frecuencias muy grandes como se ve en la figura anterior. Este comportamiento puede atribuirse a $|G(\omega)|$, la cual prescribe la cantidad de energía transmitida por el sistema a varias frecuencias. Entonces, el sistema lineal considerado actúa como un filtro lineal. Para un sistema con poco amortiguamiento el sistema puede considerarse como un filtro de banda angosta.

3.11. Propiedades conjuntas de procesos aleatorios estacionarios.

Consideremos dos procesos aleatorios arbitrarios $(x_k(t))$ y $(y_k(t))$ estacionarios. El objetivo, es calcular ciertos promedios en conjunto. En particular, calcular el valor medio en el tiempo t_1 arbitrario t_1 , como sigue:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=1}^n x_k(t_1) \quad \mu_y(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=1}^n y_k(t_1)$$

Para un proceso aleatorio arbitrario, el valor medio para diferentes tiempos $t_1 \neq t_2$, es diferente.

$$\mu_x(t_1) \neq \mu_x(t_2) \quad \mu_y(t_1) \neq \mu_y(t_2)$$

Luego, se calculan las funciones de covarianza a tiempos fijos arbitrarios t_1 y $t_1 + \tau$, como sigue:

$$C_x(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x_k(t_1) - \mu_x(t_1)][x_k(t_1 + \tau) - \mu_x(t_1 + \tau)]$$

$$C_y(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_k(t_1) - \mu_y(t_1)][y_k(t_1 + \tau) - \mu_y(t_1 + \tau)]$$

$$C_{xy}(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x_k(t_1) - \mu_x(t_1)][y_k(t_1 + \tau) - \mu_y(t_1 + \tau)]$$

Los valores de las funciones de covarianza dependen en general, de los tiempos t_1 y $t_1 + \tau$.

Para proveer una descripción más detallada del proceso aleatorio de orden mayor, las estadísticas serán calculadas, estas envuelven los valores de las realizaciones evaluadas en tres o más tiempos tales como: $t_1, t_1 + \tau, t_1 + \sigma$, etc. Por razones de espacio, no se explican ahora.

En el caso especial en el cual los valores medios $\mu_x(t_1)$ y $\mu_y(t_1)$ y las funciones de covarianza $C_x(t_1, t_1 + \tau)$, $C_y(t_1, t_1 + \tau)$ y $C_{xy}(t_1, t_1 + \tau)$, no dependen de t_1 , los procesos aleatorios $\{x_k(t)\}$ y $\{y_k(t)\}$, se dice que son débilmente estacionarios. En otro caso, no son estacionarios. Entonces, para procesos aleatorios débilmente estacionarios, los valores medios son constantes

$$\mu_x(t_1) = \mu_x = \text{constante} \quad y$$

$$\mu_y(t_1) = \mu_y = \text{constante}$$

y las funciones de covarianza dependen del tiempo τ

$$C_x(t_1, t_1 + \tau) = C_x(\tau),$$

$$C_y(t_1, t_1 + \tau) = C_y(\tau),$$

$$C_{xy}(t_1, t_1 + \tau) = C_{xy}(\tau).$$

Si todas las estadísticas posibles son independientes de t_1 , entonces los procesos aleatorios $\{x_k(t)\}$ y $\{y_k(t)\}$, se dice que son fuertemente estacionarios. Para procesos aleatorios normales o Gaussianos, por lo tanto, los promedios de orden mayor se pueden derivar de los valores medios y funciones de covarianza; se sigue que par

procesos aleatorios Gaussianos anchos, estacionalidad implica también estacionalidad fuerte. Porque nuestro interés es primeramente en procesos aleatorios normales, no es necesario calcular estadísticas de orden mayor y los procesos aleatorios que nos referiremos, son

meramente estacionarios si los valores medios y las funciones de covarianza no cambian en variaciones del tiempo t_1 .

El resto de esta sección, se encarga exclusivamente de procesos aleatorios estacionarios.

Los promedios de conjuntos se pueden calcular convenientemente en términos de funciones de densidad de probabilidad. Para este fin, se introducirá la notación:

$x_1 = x_k(t)$, $x_2 = x_k(t+\tau)$, $y_1 = y_k(t)$, $y_2 = y_k(t+\tau)$, donde x_1 , x_2 representan variables aleatorias para el proceso aleatorio estacionario ($x_k(t)$). Entonces, las densidades de probabilidad conjunta $P(x_1, x_2)$, $P(y_1, y_2)$, $P(x_1, y_2)$, son independientes de t . En vista de ésto, el valor medio puede escribirse como:

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1) dx_1 = \text{cte.}$$

$$\mu_y = E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} y_1 p(y_1) dy_1 = \text{cte.}$$

y la función de correlación tiene las expresiones:

$$R_x(\tau) = E[x_1 x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$R_y(\tau) = E[y_1 y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 p(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

$$R_{xy}(\tau) = E[x_1 y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 p(x_1, y_2) dx_1 dy_2$$

donde $R_x(\tau)$ y $R_y(\tau)$ representan las funciones de autocorrelación y $R_{xy}(\tau)$ es la función de correlación cruzada. Por lo tanto, las funciones de covarianza se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} C_x(\tau) &= E[(x_1 - \mu_x)(x_2 - \mu_x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_x)(x_2 - \mu_x) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= R_x(\tau) - \mu_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_y(\tau) &= E[(y_1 - \mu_y)(y_2 - \mu_y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y_1 - \mu_y)(y_2 - \mu_y) p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= R_y(\tau) - \mu_y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= E[(x_1 - \mu_x)(y_2 - \mu_y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) p(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \\ &= R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y \end{aligned}$$

concluimos que las funciones de covarianza son idénticas a las funciones de correlación, solamente cuando el valor medio es cero. Si C_{xy} es cero $\forall \tau$, se dice que los procesos no están relacionados; esto pasa sólo si la función $R_{xy}(\tau)$ es igual a cero para toda τ , y si alguno μ_x ó μ_y son iguales a cero.

$$\begin{aligned} \text{Definamos } x_1 &= x_k(t-\tau), \quad x_2 = x_k(t) \\ y_1 &= y_k(t-\tau) \quad \text{y} \quad y_2 = y_k(t) \end{aligned}$$

eso implica que $p(x_1, x_2)$, $p(y_1, y_2)$, $p(x_1, y_2)$ son independientes del tiempo, por lo tanto:

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau), \quad R_y(-\tau) = R_y(\tau)$$

donde la función de correlación cruzada satisface

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$$

entonces:

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|, \quad R_y(0) \geq |R_y(\tau)|$$

en contraste, $R_{xy}(\tau)$ no necesariamente tiene un máximo en $\tau = 0$. La función correlación cruzada puede establecerse considerando:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \pm y_2)^2 p(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 p(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \pm 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 p(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_2^2 p(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \\ & = R_x(0) \pm 2 R_{xy}(\tau) + R_y(0) \geq 0 \end{aligned}$$

donde la desigualdad es válida, porque la primera integral no puede ser negativa. Nótese que la dependencia del tiempo τ aparece sólo cuando las variables con diferentes subíndices son tomadas en cuenta. De la ecuación anterior, tenemos:

$$1/2 [R_x(0) + R_y(0)] \geq |R_{xy}(\tau)|$$

por lo tanto, considerando la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x_1 \pm y_2}{(R_x(0))^{1/2} (R_y(0))^{1/2}} \right|^2 p(x_1, y_2) dx_1 dy_2$$

la cual es también positiva, se puede demostrar:

$$[R_x(0) R_y(0)] \geq |R_{xy}(\tau)|^2$$

Por lo anterior, se concluye que las propiedades de correlación de dos procesos aleatorios estacionarios $\{x_k(t)\}$ y $\{y_k(t)\}$ pueden describirse por las funciones de correlación $R_x(\tau)$, $R_y(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ y $R_{yx}(\tau)$ los cuales se necesitan evaluar para valores mayores o iguales a cero.

En este punto, es posible introducir densidades de potencia espectral y densidades cruzadas espectrales, asociadas con los dos procesos aleatorios $x_k(t)$ y $y_k(t)$. Esto se dará en la siguiente sección en el contexto de procesos aleatorios ergódicos.

3.12 Funciones de correlación cruzadas de respuesta para sistemas lineales.

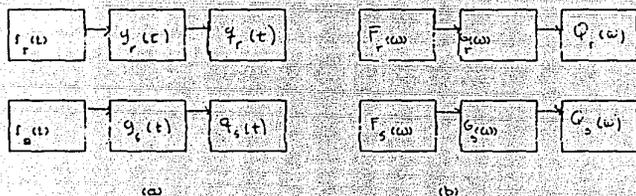
tiempo por los impulsos de respuesta $g_r(t)$ y $g_s(t)$ y en el dominio de las frecuencias por las respuestas de frecuencias $G_r(\omega)$ y $G_s(\omega)$, las cuales son las transformadas de Fourier de la forma:

$$G_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_r(t) e^{-i\omega t} dt \quad G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_s(t) e^{-i\omega t} dt$$

La relación entre las excitaciones $f_r(t)$ y $f_s(t)$ y las correspondientes respuestas $q_r(t)$ y $q_s(t)$ pueden darse en la forma de diagrama de bloques de la siguiente figura, mientras que entre las transformadas de la excitación $F_r(\omega)$ y $F_s(\omega)$ y las correspondientes transformadas de respuestas $Q_r(\omega)$ y $Q_s(\omega)$ se pueden dar en la forma de diagrama de bloques, donde $F_r(\omega)$ es la Transformada de Fourier de $f_r(t)$, etc.

Asumimos que los procesos de excitación y de respuesta son ergódicos, la función de correlación cruzada entre los procesos de respuesta $q_r(t)$ y $q_s(t)$ puede escribirse de la forma:

$$R_{q_r q_s}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} q_r(t) q_s(t+\tau) dt$$



pero, para sistemas lineales, la relación entre la excitación y la respuesta, puede expresarse en términos de la integral de convolución. Entonces, tenemos:

$$q_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\lambda_r) f_r(t-\lambda_r) d\lambda_r$$

$$q_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_s(\lambda_s) f_s(t-\lambda_s) d\lambda_s$$

donde λ_r y λ_s son las variables mudas correspondientes, combinando las ecuaciones anteriores y cambiando el orden de integración, obtenemos:

$$R_{q_r q_s}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_r(\lambda_r) f_r(t-\lambda_r) d\lambda_r \right] \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_s(\lambda_s) f_s(t+\tau-\lambda_s) d\lambda_s \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\lambda_r) g_s(\lambda_s) \times \left[\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f_r(t-\lambda_r) f_s(t+\tau-\lambda_s) dt \right] d\lambda_r d\lambda_s$$

como los procesos de excitación son ergódicos y estacionarios,

reconocemos:

$$\begin{aligned} & \left[\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f_r(t-\lambda_r) f_s(t+\tau-\lambda_s) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f_r(t) f_s(t+\tau+\lambda_r-\lambda_s) dt \\ &= R_{f_r f_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s) \end{aligned}$$

es la función de correlación cruzada entre el proceso de excitación. Entonces:

$$R_{q_r q_s}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\lambda_r) g_s(\lambda_s) R_{f_r f_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s) d\lambda_r d\lambda_s$$

que representa una expresión que relaciona la función de correlación cruzada entre el proceso de respuesta y la función de correlación cruzada en el proceso de excitación y de respuesta en el dominio del tiempo.

Ahora, nos interesa una en el dominio de las frecuencias. Para est:

fin, tomamos la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación anterior. Pero la Transformada de $R_{q_r q_s}(\tau)$, es la función de densidad espectral cruzada asociada con el proceso de respuesta $q_r(t)$ y $q_s(t)$. É:

$$\begin{aligned} S_{q_r q_s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{q_r q_s}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\lambda_r) g_s(\lambda_s) R_{f_r f_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s) d\lambda_r d\lambda_s \right] d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R_{f_r f_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s)$ puede expresarse como la Transformada de Fourier inversa:

$$R_{f_r f_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_{f_r f_s}(\omega) e^{-i\omega(\tau+\lambda_r-\lambda_s)} d\omega$$

donde $S_{f_r f_s}(\omega)$ es la función de densidad espectral cruzada asociada con el proceso de excitación $f_r(t)$ y $f_s(t)$. Insertando estas ecuaciones en $G_r(\omega)$ y $G_s(\omega)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} S_{q_r q_s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\lambda_r) g_s(\lambda_s) \right. \\ &\quad \times \left. \left[1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_{f_r f_s}(\omega) e^{+i\omega(\tau+\lambda_r-\lambda_s)} d\omega \right] d\lambda_r d\lambda_s \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_{f_r f_s}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_r(\lambda_r) e^{-i\omega\lambda_r} d\lambda_r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} g_s(\lambda_s) e^{-i\omega\lambda_s} d\lambda_s \right] e^{-i\omega\tau} d\omega \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_{f_r f_s}(\omega) G_r^*(\omega) G_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right] d\tau \end{aligned}$$

donde $G_r^*(\omega) = G_r(-\omega)$ es el complejo conjugado de $G_r(\omega)$. Entonces,

tenemos:

$$\begin{aligned}
 S_{q_r q_s}(\omega) &= S_{r_r}(\omega) S_{s_s}(\omega) S_{r_s}(\omega) \\
 R_{q_r q_s} &= 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_r q_s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} G_r^*(\omega) G_s(\omega) S_{r_r}(\omega) e^{i\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

y representa una Transformada de Fourier par. La expresión $S_{q_r q_s}(\omega)$ relaciona las funciones de densidad espectral cruzada, asociada con la excitación y los procesos de respuesta en el dominio de la frecuencia.

3.13 Respuesta de sistemas de varios grados de libertad a excitaciones aleatorias.

Las ecuaciones de movimiento de sistemas amortiguados de n grados de libertad se pueden escribir en forma matricial de la forma:

$$[m] \ddot{x}(t) + [c] \dot{x}(t) + [k]x(t) = F(t)$$

donde $[m]$, $[c]$ y $[k]$ son matrices de $n \times n$, simétricas, llamadas de *inercia*, de *amortiguamiento* y de *rigidez*, respectivamente. El vector n -dimensional $\{x(t)\}$ contiene las coordenadas generalizadas $x_i(t)$, mientras que el vector n -dimensional $\{F(t)\}$ contiene las fuerzas asociadas generalizadas $F_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). Nos interesa el caso en los cuales la excitación $F_i(t)$ representan procesos ergódico-aleatorios, de lo cual sigue que la respuesta $x_i(t)$ son también procesos aleatorios ergódicos.

La respuesta general de sistemas amortiguados de n grados de libertad, con excitaciones externas, no pueden obtenerse realmente, solo cuando la excitación es determinista. La dificultad está en el efecto de que el análisis clásico modal puede generalmente usarse para el sistema de ecuaciones presentado.

Sin embargo, en el caso de que la matriz de amortiguamiento es una combinación lineal de las matrices de inercia y rigidez, la matriz modal asociada con el sistema lineal no amortiguado, puede usarse como la transformación lineal desacoplada del sistema de ecuaciones.

Similarmente, cuando el amortiguamiento es muy pequeño, una aproximación razonable puede tenerse ignorando los términos de amortiguamiento en las ecuaciones de transformación. Por simplicidad, veremos el caso en el cual la matriz modal clásica $[u] = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ asociada con el sistema no amortiguado puede usarse como la matriz de transformación de esa correlación. Entonces, la solución:

$$x(t) = [u]^{-1} q(t)$$

donde las componentes $q_r(t)$ ($r=1,2,\dots,n$) del vector $q(t)$ por coordenadas generalizadas consistentes de combinaciones lineales de procesos aleatorios $x_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). Insertando en la ecuación de movimientos y premultiplicando el resultado por $[u]^T$, y usando las relaciones de ortonormalidad:

$$[u]^T [m] [u] = [1] \quad [u]^T [k] [u] = [\omega^2]$$

asumiendo que:

$$[u]^T [c] [u] = [2\xi\omega]$$

donde $[2\xi\omega]$ es la matriz diagonal, obtenemos el juego de ecuaciones independientes para las coordenadas naturales:

$$q_r''(t) + 2\xi_r\omega_r q_r'(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \omega_r^2 f_r(t) \quad r=1,2,\dots,n$$

donde $[2\xi\omega]$ es el factor de amortiguamiento asociado con el r th modo.

ω_r es la r th frecuencia del sistema no amortiguado:

$$f_r(t) = \sum_{i=1}^n 1/\omega_r^2 u_{ri} F_i(t) = 1/\omega_r^2 \{u\}_r^T \{F(t)\} \quad r=1,2,\dots,n$$

y la fuerza aleatoria generalizada, en la cual $\{u\}_r$ representa el r th vector modal del sistema no amortiguado. Note que $f_r(t)$ actualmente tiene unidades $LM^{1/2}$, donde L denota longitud y M denota masa.

Nuestro primer objetivo es calcular la función de correlación cruzada entre las dos funciones de respuesta.

Con este fin, introducimos la transformada de Fourier de $q_r(t)$ y $f_r(t)$ respectivamente, en la forma:

$$Q_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q_r(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{i=1}^n 1/\omega_r^2 u_{ri} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(t) e^{-i\omega t} dt$$

entonces, transformando los dos lados de la ecuación de coordenadas naturales, obtenemos:

$$Q_r(\omega) (-\omega^2 + i2\xi_r\omega_r + \omega_r^2) = \omega_r^2 F_r(\omega) \quad r=1,2,\dots,n$$

esta ecuación puede resolverse para $Q_r(\omega)$, con el resultado:

$$Q_r(\omega) (-\omega^2 + i2\xi_r\omega_r + \omega_r^2) = \omega_r^2 F_r(\omega) \quad r=1,2,\dots,n$$

donde:

$$G_r(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i2\xi_r\omega_r + \omega_r^2} \quad r=1,2,\dots,n$$

$$G_r(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i2\xi_r\omega_r + \omega_r^2} \quad r=1,2,\dots,n$$

es la respuesta de frecuencia asociada con el r th modo natural.

Ahora vamos a calcular la función de correlación cruzada entre los procesos de respuesta $x(t)$ y $x(t)$. Pero, cualesquiera G

elementos $x_i(t)$ y $x_j(t)$ y el vector respuesta, se obtiene en la forma:

$$x_i(t) = \sum_{r=1}^n u_{ir} q_r(t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j(t) = \sum_{s=1}^n u_{js} q_s(t) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Note que la función de correlación cruzada $R_{x_i x_j}(\tau)$ entre el proceso de respuesta $x_i(t)$ y $x_j(t+\tau)$ envuelve el producto de estos procesos, diferentes índices modos r y s fueron usados. Entonces:

$$\begin{aligned} R_{x_i x_j}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) x_j(t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n u_{ir} u_{js} q_r(t) q_s(t+\tau) dt \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n u_{ir} u_{js} R_{q_r q_s}(\tau) \end{aligned}$$

donde:

$$R_{q_r q_s}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} q_r(t) q_s(t+\tau) dt$$

es la función de correlación cruzada entre las respuestas generalizadas $q_r(t)$ y $q_s(t)$. Pero la función de correlación cruzada $R_{q_r q_s}(\tau)$ se relaciona la función de densidad espectral cruzada $S_{f_r f_s}(\omega)$ por

la ecuación de la sección anterior. Entonces nos queda:

$$R_{x_i x_j}(\tau) = 1/2\pi \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n u_{ir} u_{js} \int_{-\infty}^{\infty} G_r^*(\omega) G_s(\omega) S_{f_r f_s}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

en general, como que no hemos dado la función de densidad espectral cruzada $S_{f_r f_s}(\omega)$ entre las excitaciones generalizadas $f_r(t)$ y $f_s(t)$, pero la función de densidad espectral cruzada $S_{F_i F_j}(\omega)$ entre las excitaciones $F_i(t)$ y $F_j(t)$. Esto no presenta dificultad particular, porque estas dos no están correlacionadas. Para este fin expresemos $S_{f_r f_s}$ como la transformada de Fourier:

$$S_{f_r f_s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_r f_s}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

donde $R_{f_r f_s}(\tau)$ es la función de correlación cruzada entre las excitaciones generalizadas $f_r(t)$ y $f_s(t)$, de donde podemos escribir:

$$\begin{aligned} R_{f_r f_s}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f_r(t) f_s(t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n 1/\omega_r^2 1/\omega_s^2 u_{ir} u_{js} f_r(t) f_s(t+\tau) dt \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n 1/\omega_r^2 1/\omega_s^2 u_{ir} u_{js} \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} F_r(t) F_s(t+\tau) dt \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n 1/\omega_r^2 1/\omega_s^2 u_{ir} u_{js} R_{F_r F_s}(\tau) \end{aligned}$$

donde:

$$R_{F_i F_j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} F_i(t) F_j(t+\tau) dt$$

es la función de correlación cruzada entre las fuerzas $F_i(t)$ y $F_j(t)$. Introduciendo esta ecuación en $S_{f_i f_j}(\omega)$, tenemos:

$$\begin{aligned} S_{f_i f_j}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1/\omega_r^2 1/\omega_s^2 u_{ir} u_{js} R_{F_i F_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1/\omega_r^2 1/\omega_s^2 u_{ir} u_{js} \int_{-\infty}^{\infty} R_{F_i F_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1/\omega_r^2 1/\omega_s^2 u_{ir} u_{js} S_{F_i F_j}(\omega) \end{aligned}$$

donde:

$$S_{F_i F_j}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{F_i F_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

es la función de densidad espectral cruzada entre los procesos de excitación $F_i(t)$ y $F_j(t)$. Para dos realizaciones, $F_i(t)$ y $F_j(t)$ describen variables aleatorias estacionarias; la función $S_{F_i F_j}(\omega)$ puede obtenerse de manera análoga a la densidad espectral cruzada analizada. La función de correlación cruzada entre los procesos aleatorios $x_i(t)$ y $x_j(t)$ se obtiene introduciendo $S_{f_i f_j}(\omega)$ en

$R_{x_i x_j}$ presentada anteriormente.

Para $j=1$, la función de respuesta de correlación cruzada se reduce a la función de autocorrelación:

$$R_{x_i}(\tau) = 1/2\pi \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n u_{ir} u_{is} \int_{-\infty}^{\infty} G_r^*(\omega) G_s(\omega) S_{f_r f_s}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

haciendo $\tau = 0$, obtenemos el valor medio cuadrado:

$$R_{x_i}(0) = 1/2\pi \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n u_{ir} u_{is} \int_{-\infty}^{\infty} G_r^*(\omega) G_s(\omega) S_{f_r f_s}(\omega) d\omega$$

asociado con el proceso aleatorio de respuesta $x_i(t)$.

Asumimos por simplicidad que los valores medios de los procesos de respuesta $x_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) son iguales a cero. Por lo tanto, la raíz cuadrada positiva del valor cuadrado medio $R_{x_i}(0)$ representa la desviación estándar σ_{x_i} asociada con la función de densidad de probabilidad de $x_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). Entonces, si el proceso de excitación es Gaussiano, el proceso de respuesta es también Gaussiano con la función de densidad de probabilidad $p(x_i)$ está completamente definida por σ_{x_i} .

Entonces, concluyendo esta sección, se prueba el interés de formular el problema en notación matricial. Entonces, reconociendo que

Hay $n \times n$ funciones de correlación cruzada $R_{x_i x_j}(\tau)$ correspondientes a todo par de índices i y j , podemos introducir la matriz de correlación de la respuesta:

$$[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \langle x(t) \rangle \langle x(t+\tau) \rangle^T dt$$

pero ya tenemos la relación entre $\langle x(t) \rangle$ y $\langle q(t) \rangle$, entonces escribimos:

$$\langle x(t+\tau) \rangle^T = \langle q(t+\tau) \rangle^T [u]^T$$

insertando esta ecuación $\langle x(t) \rangle = [u] \langle q(t) \rangle$ en $[R_x(\tau)]$ para obtener:

$$\begin{aligned} [R_x(\tau)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} [u] \langle q(t) \rangle \langle q(t+\tau) \rangle^T [u]^T dt \\ &= [u] \left[\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \langle q(t) \rangle \langle q(t+\tau) \rangle^T dt \right] [u]^T \\ &= [u] [R_q(\tau)] [u]^T. \end{aligned}$$

donde:

$$[R_q(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \langle q(t) \rangle \langle q(t+\tau) \rangle^T dt$$

es la matriz de correlación de respuestas asociadas con las coordenadas $q_r(t)$ ($r=1,2,\dots,n$). Denotando por $[G(\omega)]$ la matriz diagonal de la frecuencia de las funciones de respuesta, podemos escribir la matriz de correlación de la forma:

$$[R_q(\tau)] = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [G_r^*(\omega)] [S_f(\omega)] [G(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega$$

donde $[S_f(\omega)]$ es la matriz de $n \times n$ de excitación espectral asociada con las fuerzas generalizadas $f_r(t)$. La matriz $[S_f(\omega)]$ puede escribirse como la Transformada de Fourier de la matriz de correlación de la excitación $[R_f(\tau)]$ asociada con $f(t)$ como sigue:

$$[S_f(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [R_f(\tau)] e^{i\omega\tau} d\tau$$

pero $[R_f(\tau)]$ tiene la forma:

$$[R_f(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \langle f(t) \rangle \langle f(t+\tau) \rangle^T dt$$

donde $\langle f(t) \rangle$ es el vector de fuerzas generalizadas $f_r(t)$.

Considerando las ecuaciones de $f_r(t)$, tenemos:

$$\langle f(t) \rangle = [\omega^2]^{-1} [u] \langle F(t) \rangle \quad \langle f(t+\tau) \rangle = \langle F(t+\tau) \rangle^T [u]^T [\omega^2]^{-1}$$

e introduciendo en $[R_f(\tau)]$, tenemos:

$$\begin{aligned} [R_f(\tau)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} [\omega^2]^{-1} [u] \langle F(t) \rangle \langle F(t+\tau) \rangle^T [u]^T [\omega^2]^{-1} dt \\ &= [\omega^2]^{-1} [u] \left[\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \langle F(t) \rangle \langle F(t+\tau) \rangle^T dt \right] [u]^T [\omega^2]^{-1} \\ &= [\omega^2]^{-1} [u] [R_F(\tau)] [u]^T [\omega^2]^{-1} \end{aligned}$$

en el cual

$$[R_F(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} (F(t)) (F(t+\tau))^T dt$$

es la matriz de correlación asociada con las fuerzas $F_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). Introduciendo $[R_F(\tau)]$, en $[S_f(\omega)]$, tenemos:

$$\begin{aligned} [S_f(\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [\omega^2]^{-1} [U] [R_F(\tau)] [U]^T [\omega^2]^{-1} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= [\omega^2]^{-1} [U] \int_{-\infty}^{\infty} [R_F(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau [U]^T [\omega^2]^{-1} \\ &= [\omega^2]^{-1} [U] [S_F(\omega)] [U]^T [\omega^2]^{-1} \end{aligned}$$

donde:

$$[S_F(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [R_F(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

es la matriz espectral de la excitación asociada con las fuerzas $F_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). La matriz $[S_f(\omega)]$ se puede evaluar en forma análoga a la densidad espectral cruzada analizada. La matriz de correlación de la respuesta se obtiene introduciendo $R_f(\tau)$ en $R_x(\tau)$. Lo que resulta, es:

$$[R_x(\tau)] = 1/2\pi [u] \int_{-\infty}^{\infty} [G^*(\omega)] [S_f(\omega)] [G(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega [u]^T$$

donde $[S_f(\omega)]$ está dado por la ecuación anterior.

Si denotamos como $[u]_i$ al i ésimo renglón de la matriz modal $[u]$, o sea:

$$[u]_i = [u_{i1} \ u_{i2} \ \dots \ u_{in}]$$

la función de autocorrelación asociada con el proceso aleatorio de respuesta $x_i(t)$, se puede escribir en la forma:

$$[R_{x_i}(\tau)] = 1/2\pi [u]_i \int_{-\infty}^{\infty} [G^*(\omega)] [S_f(\omega)] [G(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega [u]_i^T$$

si $\tau = 0$, se reduce al valor medio cuadrado:

$$[R_{x_i}(0)] = 1/2\pi [u]_i \int_{-\infty}^{\infty} [G^*(\omega)] [S_f(\omega)] [G(\omega)] d\omega [u]_i^T$$

CAPITULO CUATRO

APLICACIONES

El objetivo del presente capítulo, es presentar una aplicación de los conceptos desarrollados en capítulos precedentes. Dentro del campo de la ingeniería civil, existen diferentes campos de estudio donde se consideran las sollicitaciones aleatorias sobre estructuras.

Especialmente, la mecánica de suelos y la ingeniería estructural, han desarrollado estudios al respecto. En nuestro país, las disposiciones reglamentarias para la construcción comienzan a revisar exhaustivamente los aspectos aleatorios de fenómenos que como los sismos, afectan las construcciones.

4.1 Introducción a la interacción suelo-estructura.

El Reglamento de construcciones del Distrito Federal (1987) incluye revisiones completas sobre la respuesta posible de las estructuras a los sismos, y en particular, a la interacción dinámica suelo-estructura.

A partir de los sismos de 1985, nuestro país se vió en necesidad de formular Normas Técnicas Complementarias para diseño por sismo () para el Reglamento de construcciones del Distrito Federal (1987). De esta manera, se comienza a considerar en Reglamentos, la interacción dinámica suelo-estructura en el diseño sísmico.

Estas normas técnicas complementarias consideran el efecto de dicha interacción en el periodo y modo fundamentales de vibración y con ello, modifican los espectros de diseño. Así, dichas normas reconocen los efectos en el amortiguamiento y en el factor de ductilidad. Existen unas Normas complementarias para el diseño de cimentaciones que señalan algunas consideraciones sobre la interacción suelo-estructura: la posibilidad de falla de la cimentación ante eventos sísmicos.

La Ciudad de México está asentada sobre arcillas muy deformables. A consecuencia de ello, se presentan dos fenómenos notables: la enorme amplificación de las ondas que llegan al valle muy selectiva en función de los periodos dominantes de cada sitio

Mena, et.al, 1985; Romo y See, 1986), y por otro lado, la interacción suelo-estructura, que alcanza niveles muy superiores a los usuales en otras ciudades del mundo (Reséndiz y Roesset, 1986). Ambos, están relacionados, pues la interacción dinámica provoca que las respuestas de los sistemas físicos (suelo-estructura) sean excepcionalmente elevadas cuando los periodos naturales de vibración, modificados por la interacción, se acercan a los dominantes del terreno. Adicionalmente, la interacción aumenta el amortiguamiento del sistema y reduce su ductilidad.

4.2. El fenómeno de la interacción en sistemas lineales.

Se llama interacción dinámica suelo-estructura al conjunto de efectos producidos en la estructura y en el suelo por el hecho que este último es deformable bajo cargas dinámicas. Por ser las normas que nos ocupan el primer documento nacional de carácter reglamentario que exige tener en cuenta explícitamente la interacción, se buscó que las disposiciones correspondientes fueran especialmente sencillas.

Vale la pena aquí solo hacer notar que la energía total que se disipa por comportamiento histérico de un sistema sujeto a temblor depende poco de cuál sea el subsistema que la disipe y para nuestro estudio se supone que el suelo en las inmediaciones de los cimientos de la estructura se mantiene esencialmente en el rango lineal.

La primera simplificación que con ese propósito se hizo, fue suponer que los cimientos se desplazan como si fueran infinitamente rígidos, a pesar de que en algunos casos son significativas las deformaciones dinámicas que sufren. Con tal simplificación los cimientos poseen seis grados de libertad. Puede elegirse que sean tres de traslación y tres de rotación. De los primeros tomaremos un vertical y otros dos horizontales, ortogonales entre sí, en las direcciones en que se analiza el sistema, considerando los otros tres como rotaciones respecto a ejes orientados en esas mismas direcciones.

Se puede despreciar el grado de libertad de los desplazamientos verticales, que son pequeños con respecto a las aceleraciones horizontales; esto, dado que no provocan en las estructuras efectos comparables. De la misma manera, puede despreciarse el grado de libertad por rotación con respecto a un eje vertical; esto, simplifica el modelado. Dado lo anterior, quedan en cada una de las dos direcciones

ortogonales de análisis, un grado de libertad en traslación horizontal y uno de rotación con respecto a un eje perpendicular a la dirección que se analiza. Dado que el sistema es ideal, estos grados están *desacoplados* si elegimos los ejes de rotación coincidentes con los ejes principales de la superficie de apoyo de la estructura.

Existen algunas zonas (II y III, transición y lacustre, respectivamente) de la Ciudad de México en que se reconoce la interacción suelo-estructura, pues los temblores más intensos son de banda estrecha. En estas condiciones se obtienen resultados muy precisos sustituyendo el suelo por una masa virtual fija al cimiento y suponiendo éste ligado a una caja rígida mediante resortes y amortiguadores. La masa virtual y sus momentos polares de inercia son funciones decrecientes del periodo dominante más largo del terreno en el sitio de interés. Para dichas zonas, entonces, es pequeño el aumento en precisión que se obtiene al introducir la masa virtual; en consecuencia, por sencillez, no se le considera en esta aplicación. El sistema a analizar en dos direcciones horizontales queda representado por la fig. 5.1 Si se desea analizar el sistema resultante en cada una de estas direcciones mediante un método paso a paso que tenga en cuenta explícitamente no sólo el amortiguamiento por radiación (que se debe a la energía que la estructura devuelve al terreno), sino también el amortiguamiento interno de la estructura y su comportamiento no lineal.

El sistema de la fig. 1 no tiene modos naturales clásicos de vibración (por el tipo de amortiguamiento que lo caracteriza): está aún en el rango lineal. Sus modos de vibración no necesariamente existen en el dominio real, sino en el complejo. Para lograr el análisis modal, supondremos que en el rango lineal el sistema sí posee los modos mencionados; para ello, el cálculo de los modos naturales de vibración y el de sus coeficientes de participación, debe realizarse suprimiendo temporalmente los amortiguadores de liga y el amortiguamiento interno de la estructura, incluyendo después el grado de amortiguamiento de cada modo natural y finalmente, combinando las respuestas modales.

Si deseamos calcular el grado de amortiguamiento ξ del modo fundamental, puede suponerse que todo producto de segundo orden de los amortiguamientos de la estructura, el suelo y los dos amortiguadores de la fig. 1, es despreciable comparado con la unidad, lo que en la práctica siempre es cierto. De acuerdo a ello, y a partir de la

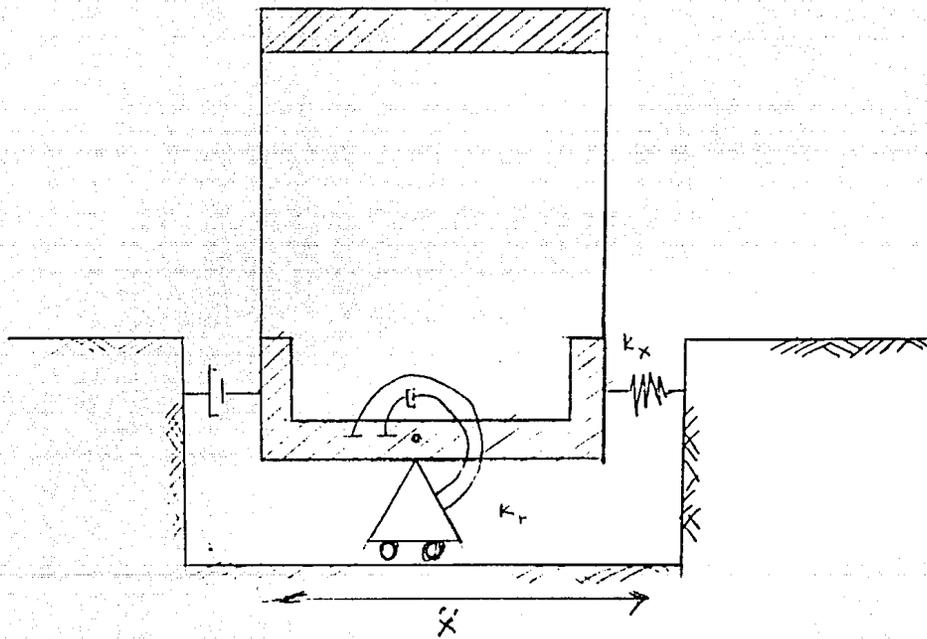


Fig. 1 Sistema suelo-estructura equivalente.

ecuación 5.1, se puede escribir:

$$\xi = (T_0/T)^2 \xi_0 + [1 - (T_0/T)^2] \xi_s + \xi_r \quad (5.2)$$

donde T es el periodo fundamental de vibración (ecuación 5.1.) del sistema suelo-estructura, T_0 y ξ_0 son, respectivamente, los valores que tendrían T y ξ si la estructura descansara en base firme, ξ_r = grado de amortiguamiento por radiación, y ξ_s = grado de amortiguamiento interno del suelo.

Dando valores, por ejemplo a: $T_0/T = 0.7$, $\xi_0 = 0.05$, $\xi_r = 0.02$ y $\xi_s = 0.02$, tenemos que $\xi = 0.055$.

Según se especifica en las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de construcciones del DDF (1987), para el diseño sísmico basado en análisis estático, basta con el conocimiento del periodo fundamental de vibración. Cuando el análisis se basa en análisis modal, en cambio, debe tenerse en cuenta la modificación que por interacción experimenta el modo fundamental de la estructura. Independientemente del método de análisis que se vaya a utilizar, deben cuantificarse las rigideces de los elementos que en la fig. 1 se han representados como resortes elásticos.

4.3. Rigideces de los elementos elásticos equivalentes.

Las rigideces de los resortes equivalentes, son:

$$K_{xx} = 11 \frac{GR}{x}$$

con radio equivalente $R_x = (A/\pi)^{1/2}$

donde: A = Área.

I = momento de inercia de rotación.

$$K_{rr} = 7 \frac{GR^3}{r}$$

donde: $R_r = (4I/\pi)^{1/4}$

G es el módulo de rigidez del suelo, en este caso, $G = 400 \text{ T/m}^2$.

G debe determinarse mediante pruebas dinámicas o de laboratorio, y a falta de tales determinaciones, debe calcularse a partir de la relación:

$$G = 2 \left(\frac{H}{T_0} \right)^2 \quad (5.5)$$

esto, de acuerdo al Reglamento de construcciones del DDF (Normas técnicas complementarias para diseño por sismo, G está en tons/m^2 , H en metros y T_0 es el periodo dominante más largo del sitio, en segundos. Si se desconoce H o T_0 , se propone tomar el valor más desfavorable de G entre 400 y 900 tons/m^2 .

Basándonos en el modelo, supongamos que tenemos los siguientes datos:

tenemos un cubo con las siguientes características:

peso volumétrico $\gamma = 2.5 \text{ ton/m}^3$,

masa $m = 1 \text{ ton}$.

volumen $V = 1 \text{ T} / 2.5 \text{ T/m}^3 = 0.4 \text{ m}^3$

lado $l = (\text{vol})^{1/3} = .7368 \text{ m.}$

semi altura $h_0 = l/2 = .3684 \text{ m.}$

Área $l^2 = .5429 \text{ m}^2$,

momento de inercia:

El momento de inercia de un cubo con un eje que pasa por el centro (ver figura 2), es el siguiente:

$$I = \rho \int r^2 dx dy dz = \rho \int \int \int (x^2 + y^2) dx dy dz =$$

$$= \rho \int \int \int_{-L/2}^{-L/2}^{-L/2}^{L/2} (x^2 + y^2) dx dy dz =$$

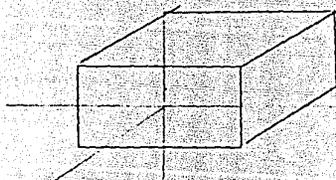
$$= \rho \int \int \int_{-L/2}^{-L/2}^{-L/2}^{L/2} x^2 dx dy + \int \int \int_{-L/2}^{-L/2}^{-L/2}^{L/2} y^2 dx dy$$

$$= \int 2 \rho L \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$2 \rho L / 3 \left[\frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{8} \right] = L \rho L^4 / 6$$

pero $\rho = M/V = M/L^3$.

$$\rightarrow I = 1/6 M L^2. \text{ fig. 2}$$



pero para el caso que nos interesa (fig. 1), tenemos que usar el Teorema de los ejes paralelos:

$$I = I_{CM} = M (L/2)^2 = ML^2/4 + ML^2/4$$

$$\rightarrow I = 5/12 ML^2 = 226.2 \text{ kg m}^2$$

Vamos a tomar como factor de amortiguamiento: $\zeta_r = 0.05$

Los radios equivalentes, son:

$$R_x = (A/\pi)^{1/2} = .4157 \text{ m.},$$

$$R_r = (4I/\pi)^{1/4} = 4.1196 \text{ m.},$$

Tomamos como coeficiente de rigidez:

$G = 400 \text{ T/m}^2$; por lo tanto, dos coeficientes de rigidez, son:

$$K_{xx} = 11 GR_x = 1829080$$

$$K_{rr} = 7 GR_r^3 = 195780316$$

El modelo del sistema, de la fig. 1 es:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + kx = f,$$

donde la matriz de inercia, es:

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ m l_1 & m l_1^2 + I_r \end{pmatrix}$$

y la matriz de rigidez:

$$k = \begin{pmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{rr} \end{pmatrix}$$

f = respuesta sísmica, en nuestro caso, ruido blanco.

$$M = \begin{pmatrix} (1000) & 0 \\ ((.3684)(1000)) & ((.3684)(1999)) \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 1829.080 & 0 \\ 0 & (7356499.86)(226.2)^{3/4} \end{pmatrix}$$

Para desacoplar el sistema, resolvemos el problema de eigenvalores:

$$|k_{ij} - w^2 m_{ij}| = 0$$

donde nuestras matrices de masa y rigidez, son:

$$M = \begin{bmatrix} 1000 & \\ & 3684000 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 1829080 & \\ & 195780316 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1829.080 - w^2 1000 & -w^2 368400 \\ -w^2 368400 & 19578316 - w^2 361.92 \end{bmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante, tenemos:

$$(1829.080 - w^2 1000) (1957831.6 - w^2 361.92) - (w^2 368400)^2 = 0$$

y haciendo los productos:

$$3.58 \times 10^{19} - w^2 661980633 - w^2 19578316000 + w^4 361920 - w^4 1.357 \times 10^{11} = 0$$

reduciendo términos:

$$-1.3571819 \times 10^{11} w^4 - 2.02 \times 10^{10} w^2 + 3.58 \times 10^{19} = 0,$$

$$-1.351819 \times 10^{11} w^4 - 2.02 \times 10^{10} w^2 + 3.58 \times 10^{19} = 0,$$

que nos da la siguiente ecuación:

$$w^4 + .148637 w^2 - 263.76 = 0,$$

Para resolverla hacemos el siguiente cambio de variable:

$$w^2 = x. \quad \rightarrow \quad w = (x)^{1/2}$$

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

el sistema queda:

$$x^2 + 148837 x - 263.78 = 0$$

con solución:

$$x = \frac{-148837 \pm \sqrt{(148837)^2 - 4(263.78)}}{2}$$

$$x = \frac{-148837 \pm 32.48}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 16.1655 \\ x_2 = -16.3144 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, la frecuencia de los modos normales de vibración es:

$$w_1 = 4.0206$$

$$w_2 = -4.0206$$

$$w_3 = i(4.039)$$

$$w_4 = i(-4.0309)$$

y la matriz de frecuencia cuadrada, es:

$$[w^2] = \begin{pmatrix} 16.1655 & 0 \\ 0 & -16.3144 \end{pmatrix}$$

ahora, construyamos los eigen vectores:

$$[k] \{u\}_r = w_r^2 [m] \{u\}_r \quad , \quad r = 1, 2, \dots, n$$

y haciéndolo para cada modo de vibración:

$$(k_{11} - v_1^2 m_{11}) u_{1r} + (k_{12} - v_1^2 m_{12}) u_{2r} = 0$$

$$(k_{21} - v_1^2 m_{21}) u_{1r} + (k_{22} - v_1^2 m_{22}) u_{2r} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

si $r = 1$, (1)

$$(k_{11} - v_1^2 m_{11}) u_{11} + (k_{12} - v_1^2 m_{12}) u_{21} = 0$$

si $r = 2$, (2)

$$(k_{11} - v_2^2 m_{11}) u_{12} + (k_{12} - v_2^2 m_{12}) u_{22} = 0$$

si $r = 1$, (3)

$$(k_{21} - v_1^2 m_{21}) u_{11} + (k_{22} - v_1^2 m_{22}) u_{21} = 0$$

$$\text{si } r = 2, \quad (4)$$

$$(k_{21} - v_2 m_{21}) u_{12} + (k_{22} - v_2 m_{22}) u_{22} = 0$$

$$[1829080 - 16.1655(1000)] u_{11} + [(-16.1655)(968400)] u_{21} = 0$$

$$(1) \quad 1812914.5 u_{11} - 5955370.2 u_{21} = 0$$

$$[(1829080 + [16.9144)(1000)] u_{12} + [(16.9144) (968400)] u_{22} = 0$$

$$(2) \quad 1845994.4 u_{12} + 6010724.96 u_{22} = 0$$

$$(\quad 3 \quad) \quad [(-16.1655)(968400)] u_{11} + [(195780916 - (16.1655)(961.90)] u_{21} = 0$$

$$- 5955370.2 u_{11} + 1957744654 u_{21} = 0$$

$$[(16.9144)(968400)] u_{12} + [(195780916 + (16.9144)(961.91)] u_{22} = 0,$$

$$(4) \quad 6010724.96 u_{12} + 195786220.5 u_{22} = 0$$

$$(1) \quad 1812914.5 u_{11} - 5955370.2 u_{21} = 0$$

$$(2) \quad 1845994.4 u_{17} + 6010724.96 u_{22} = 0$$

como el problema es homogéneo, sólo se puede resolver:

$$\text{de (3)} \quad u_{21} = \frac{595537.2 u_{11}}{195774465.4} = 0.00304 u_{11}$$

para un elemento de un vector modal, dado en términos del otro:

$$\rightarrow \langle u \rangle_1 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.00304 \end{Bmatrix}$$

$$\text{de (4)} \quad u_{22} = \frac{6010724.96 u_{12}}{195786220.5} = -0.0307 u_{12}$$

$$\langle u \rangle_2 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.0307 \end{Bmatrix}$$

ahora, normalizando los modos, tenemos:

$$\text{con: } \langle u \rangle_1 = \alpha_1 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.0304 \end{Bmatrix} \quad \langle u \rangle_2 = \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.0307 \end{Bmatrix}$$

aplicando las ecuaciones de normalización:

$$\langle u \rangle_r^T [m] \langle u \rangle_r = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\langle u \rangle_1^T [m] \langle u \rangle_1 = \alpha_1^2 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.0304 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 10000 & 3684000 \\ 3684000 & 961.02 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.0304 \end{Bmatrix} = 1$$

$$\alpha_1^2 \begin{Bmatrix} 1 & .0304 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 10000 & 3684000 \\ 3684000 & 961.02 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.0304 \end{Bmatrix} = 1$$

$$\alpha_1^2 \begin{Bmatrix} 12199.36 & 368411.0024 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.0304 \end{Bmatrix} = 1$$

$$\alpha_1^2 29\ 999.0545 = 1, \quad \alpha_1^2 = 4.2737 \times 10^{-5}, \quad \alpha_1^2 = .0005$$

$$\langle u \rangle_2^T [m] \langle u \rangle_2 = \alpha_2^2 \begin{Bmatrix} 1.0000 & -0.0307 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 10000 & 3684000 \\ 3684000 & 961.02 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.0307 \end{Bmatrix} = 1$$

$$= \alpha_2^2 \begin{Bmatrix} -10\ 909.88 & 368\ 388.8891 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.0307 \end{Bmatrix} = 1$$

$$= \alpha_2^2 = 1, \quad \alpha_2^2 = -.0010, \quad -999.0589$$

$$\alpha_2 = i (.0310)$$

Entonces, los eigenvectores normalizados quedan:

$$\langle u \rangle_1 = \begin{Bmatrix} 0.0005 \\ 0.0002 \end{Bmatrix} \quad \langle u \rangle_2 = i \begin{Bmatrix} 0.0310 \\ -0.0001 \end{Bmatrix}$$

donde la matriz modal, es:

$$[w] = \begin{bmatrix} .0005 & i .0310 \\ .0002 & i -.0001 \end{bmatrix}$$

La matriz espectral de excitación, es:

$$[S_F(\omega)] = \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de excitación asociada con las coordenadas normales:

$q_1(t)$ y $q_2(t)$ es:

$$s_f(\omega) = (\omega)^{2-1} \text{ru} [s_r(\omega) \text{ru}] (\omega)^{2-1}$$

Las funciones de respuesta en frecuencia asociadas con las coordenadas normales, tienen la forma:

$$q_r(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_r)^2 + i2\zeta_r \omega/\omega_r} \quad , \quad r = 1,2$$

haciendo cálculos:

$$s_f(\omega) = \begin{vmatrix} .06100 & 0 \\ 0 & -.0613 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} .0005 & i.0316 \\ .0002 & i-.001 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} .0005 & 0.0002 \\ i.0316 & -i.001 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} .0610 & 0 \\ 0 & -.0613 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} .0004 & i.002 \\ -1.226 \times 10^{-5} & 1.0000613 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_0.0005 & s_0.0002 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} .0610 & 0 \\ 0 & -.0613 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} .0004 & i.002 \\ -1.226 \times 10^{-5} & 1.0000613 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_0.0004 & -s_0.1.226 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 1.0 \times 10^{-7} & -s_0 4.0004 \times 10^{-9} \\ s_0 -4.004 \times 10^{-9} & +s_0 1.5031 \times 10^{-10} \end{vmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA.

- ALCANTARA NOLASCO, Leonardo. *Estudios sobre los efectos de interacción suelo-estructura en las estaciones de registro de aceleraciones del D.F. que registraron los sismos de 1985*. Tesis Maestría en Mecánica de Suelos. UNAM. DEPEFI. 1989.
- ARFKEN, George. *Mathematical methods for physicists*. academic press International edition 1970
- AUVINET., Gabriel *Apuntes del Curso Procesos Estocásticos*. UNAH División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, 1989, México.
- BARTLE., Robert. *The integral of Lebesgue*. John Wiley & Sons, Inc. 1966.
- BENJAMIN, J.A. - CORNELL, C.A. *Probability, statistics and decision for civil engineers*. Mc Graw Hill. Book Company, New York 1983
- DDF Departamento del Distrito Federal. *Reglamento de Construcciones del DDF*. México 1987.
- DDF Departamento del Distrito Federal. *Reglamento de Construcciones de DDF*. México 1987. *Normas técnicas complementarias para diseño por sismo*. 1987.
- DDF Departamento del Distrito Federal. *Reglamento de Construcciones del DDF*. México 1987. *Normas técnicas complementarias para el diseño de cimentaciones*.
- GAZETAS, G. *Analysis of machine foundation vibrations: state of the art*. Journal of soil dynamics and earthquake engineering, vol. 2, No.1. pp.2-42. 1983
- HAHN, G.J. - SHAPIRO, S.S. *Statistical models in engineering* John Wiley and Sons Inc., New York. 1980
- HORSTMANN SOFTWARE Design. *Chiwriter The scientific/multifont word processor for the IBM-PC (and compatibles)*. 1989
- JAIME, A. RESENDIZ, D. y ROMO, M.P. *El subsuelo del valle de México: propiedades dinámicas y zonificación*. Ingeniería. 1987.
- KREE, Paul-SOIZE, Christian. *Mécanique aléatoire* Dunod. 1983 Paris.
- MEIROVITH, Leonard. *Elements of vibrations analysis*. Mc. Graw Hill International Editions. 1986 Nueva York
- OCHOA R., Felipe. *El método de los Sistemas*. Cuadernos de Sistemas DEPEFI-UNAM 1986.
- FAPOLIS, A *Probability, random variables and stochastic processes*. Mc Graw Hill Book Company New York 1965.

RASCON, O. *Fundamentos de la Teoría de Probabilidades*. DEPMI-UNAM. 1983.

ROMO, M.P. y SEED, H.B. *Soil-structure interaction in a random seismic environment* Tesis Doctoral Universidad de California Berkeley, 1976.

ROMO, M.P. AGUILAR, J. MOTA, O y TERAN, A. *Intensidad del sismo de 1985 en la Ciudad de México* Memorias Simposio Nacional de Ingeniería Sísmica, Ixtapa, Zih. nov. 1986.

ROMO P., Miguel-VILLARRAGA, Manuel R. *Modelo teórico del comportamiento sísmico de presas (El Infiernillo)*. UNAM Instituto de Ingeniería. Series del II. No. 518. 1989.

ROSENBLUETH; Emilio-RESENDIZ N., Daniel. UNAM Instituto de Ingeniería. *Disposiciones reglamentarias de 1987 para tener en cuenta la interacción suelo-estructura*. Series del Instituto de Ingeniería UNAM. No. 509. enero 1988. México.

ROSENBLUETH, E.-SINGH, S.K., ORDAZ, M., SANCHEZ-SESMA, F.J. *Factores Q para ordenadas espectrales de estructuras*. Instituto de Ingeniería UNAM. 1987.

SPIEGEL, Murray. *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. Mc Graw Hill. México 1969.

SPIEGEL, Murray. *Análisis Vectorial. Teoría y problemas*. Mc Graw Hill. México 1969.