

62.  
2 ef.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

FACULIAD DE CIENCIAS.

TRANSFERENCIA DE RADIACION Y  
CUBIERTAS VEGETALES.

T E S I S.

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A:

OSCAR CASIMIRO SANCHEZ M:

MEXICO D . F .

1 9 9 1.



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## ÍNDICE

### INTRODUCCIÓN

#### CAPÍTULO I. Principios físicos fundamentales.

- I.1 Naturaleza del fenómeno de dispersión de radiación electromagnética (REM).
- I.2 Distintos tipos de dispersión de REM.
- I.3 Solución al problema de dispersión.
  - I.3.1 Dispersión de Mie.
  - I.3.2 Dispersión por partículas muy grandes.
  - I.3.3 Dispersión de Rayleigh.
- I.4 Ecuación de transferencia radiativa (ETR).
- I.5 Otra expresión para la ETR.
- I.6 Referencias.

#### CAPÍTULO II Transferencia radiativa y percepción remota.

- II.1 Relación entre transferencia radiativa y P.R.
- II.2 Superficies reflectoras.
- II.3 Otras cantidades radiométricas.
- II.4 Referencias.

#### CAPÍTULO III Función fase y métodos de solución de la ETR.

- III.1 La función fase.
- III.2 Métodos de solución de la ETR.
  - III.2.1 Métodos analíticos exactos.
  - III.2.2 Métodos numéricos.
  - III.2.3 Métodos aproximados.
- III.3 Referencias.

#### CAPÍTULO IV Aplicación de la transferencia de radiación a cubiertas vegetales en la región reflectiva.

- IV.1 Generalidades.
  - IV.1.1 Propiedades espectrales de las hojas.
  - IV.1.2 Propiedades ópticas del dosel.
- IV.2 Resumen de modelos de reflectancia en vegetación.
- IV.3 Referencias.

#### CAPÍTULO V Un método de solución de la ETR en vegetación.

- V.1 Hipótesis preliminares.
- V.2 Construcción de la función fase.

V.3 Normalización de la función fase.

V.4 Planteo y solución de la ETR.

V.5 Condiciones de frontera.

V.6 Orientación de las hojas.

V.7 Cálculo de la reflectancia.

V.8 Resultados

V.8.1 Datos de entrada.

V.8.2 Aplicación del método.

V.8.3 Comportamiento asintótico.

V.9 Conclusiones y comentarios finales.

V.10 Referencias.

V.11 Tablas y gráficas.

**APÉNDICES.**

## INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de tesis, se pretende desarrollar un mecanismo para aplicar la teoría de la transferencia radiativa a una cubierta vegetal caracterizada por parámetros tales como la profundidad óptica, el albedo de dispersión simple y la distribución de orientación de las hojas.

El estudio de la transferencia de radiación es importante pues está vinculado a muchas ramas de la ciencia entre las que se encuentra el aprovechamiento de los recursos naturales y la relación yace en el empleo de las técnicas de percepción remota.

En virtud del auge cobrado por el empleo de la percepción remota en el estudio de los recursos naturales, han sido desarrollados métodos para estudiar la interacción de la radiación electromagnética, en gran parte del espectro, con atmósferas planetarias, cuerpos de agua, cubiertas vegetales y distintos tipos de terreno.

La cantidad radiométrica de mayor uso en percepción remota es la reflectancia y en el caso de cubiertas vegetales la importancia de calcular reflectancias radica en que permite predecir mecanismos fotosintéticos y también propicia la inversión de modelos de radiación para estimar características de la cubierta vegetal de las cuales no se tenga información, así también se pueden estimar ciertas condiciones fisiológicas como el nivel de crecimiento, salud, etc.

Por otro lado los procesos radiativos en cubiertas vegetales, a gran escala, tienen un fuerte impacto en las características físicas y químicas de la atmósfera puesto que varios ciclos químicos ( $H_2O$ ,  $CO_2$ , por ejemplo) están íntimamente ligados al balance de energía y su componente radiativa a través de la biosfera. La absorción de radiación en doseles vegetativos es elemento primordial en los procesos de fotosíntesis y está directamente relacionado a la fijación de carbono atmosférico en la vegetación. Biólogos, ecólogos y agrónomos están profundamente

interesados en el entendimiento de los procesos radiativos dentro de los doseles vegetativos.

Los objetivos de éste trabajo son:

- a). Realizar una investigación bibliográfica de las técnicas empleadas en el estudio de la transferencia radiativa en atmósferas planetarias y, principalmente, cubiertas vegetales, en la región reflectiva del espectro electromagnético.
- b). Resolver la ecuación de transferencia radiativa para vegetación, poniendo énfasis en la identificación de los parámetros fundamentales de la teoría (profundidad óptica, albedo de superficie, etc.) con propiedades de la cubierta vegetal como el índice de área foliar, distribución de la orientación de las hojas, entre otras y destacando la importancia de la formulación de la función fase apropiada al medio bajo estudio.
- c). Aplicar el método desarrollado en el inciso anterior a una cubierta vegetal bien caracterizada con el fin de evaluar si tal método es apropiado.

La presentación de este trabajo de tesis es como sigue:

En el capítulo I se hace una breve introducción al estudio del problema de dispersión y el planteamiento general de la ecuación de transferencia radiativa, en el capítulo II se describe la relación entre la transferencia radiativa y la percepción remota, definiéndose, además, cantidades radiométricas y términos de uso común como la función de distribución de reflectancia bidireccional.

Posteriormente, en el capítulo III se presenta una revisión breve de los métodos de solución de la ecuación de transferencia radiativa en atmósferas planetarias, el capítulo IV contiene una revisión de las propiedades y modelos de radiación de la vegetación distinguiendo las propiedades individuales de las hojas de las propiedades del dosel vegetativo.

El capítulo V, parte medular del trabajo, presenta un método de solución de la ecuación de transferencia radiativa para vegetación, enfatizando procedimientos tales como la construcción de la función fase y su normalización, cosa que en otros trabajos

consultados no se lleva a cabo. El dosel objeto del trabajo en este capítulo se simplifica a fin de facilitar su manejo matemático, por ejemplo, el dosel se supone estratificado en planos paralelos, contiene una sola especie, y preliminarmente se considera una sola capa, las hojas se suponen superficies lambertianas y sus caras ópticamente indistinguibles, aunque se muestra la manera en que la teoría permite distinguirlas. Para los cálculos se incluye la radiación incidente difusa del cielo.

El método se probó con un cultivo de frijol de soya con información detallada obtenida de la literatura.

El capítulo V contiene también los resultados y las conclusiones del trabajo. Se encontró que el método concuerda parcialmente con los datos observados tomados de la literatura, y mejor con el comportamiento observado por otros autores.

## CAPÍTULO I

### PRINCIPIOS FÍSICOS FUNDAMENTALES.

#### I.1. Naturaleza del fenómeno de dispersión.

Cuando un átomo o molécula extrae energía de una onda electromagnética (OEM) que incide sobre él y reemite una porción de esa energía se dice que dispersa o esparce esa radiación. Clásicamente esto se explica diciendo que la OEM incidente polariza los átomos o moléculas de un material haciéndolos vibrar con mayor amplitud conforme la frecuencia de la OEM se aproxima a la frecuencia de resonancia del átomo o molécula [Hecht y Zajac (1977) p41] produciendo entonces un patrón de radiación de forma dipolar. De esta manera se pueden explicar fenómenos como la reflexión, transmisión, refracción y difracción. Cuando el fenómeno de dispersión se presenta a nivel molecular, debido a su mayor masa, los osciladores resuenan en regiones del espectro de menor energía, por ejemplo el infrarrojo (IR) y las amplitudes vibracionales son relativamente pequeñas, además, se pueden presentar varios modos de vibración.

Debido a que la energía extraída de la OEM, por el átomo o molécula, es proporcional a la amplitud de la oscilación, ésta alcanza su máximo en la frecuencia de resonancia. Si el material es un gas muy rarificado la energía dispersada será mayor conforme la frecuencia de la OEM incidente se aproxime a la de resonancia, en consecuencia, la energía absorbida por el medio será cada vez menor e insignificante.

#### I.2 Distintos tipos de dispersión.

Si a la dispersión se le contempla como un proceso en el cual se altera la distribución espacial de la radiación se puede entonces empezar a clasificar las distintas modalidades que presenta éste fenómeno. Si el patrón de radiación que presenta el medio o partícula dispersora muestra que la dispersión es mayor en algunas direcciones que en otras entonces la dispersión se denomina ANISOTRÓPICA en caso contrario si la radiación se dispersa en la



misma cantidad en cualquier dirección la dispersión es entonces ISOTRÓPICA.

Por otro lado si el proceso de dispersión se presenta acompañado de absorción dentro del medio al proceso conjunto se le conoce como EXTINCIÓN.

Cuando se trata de la dispersión originada por una sola partícula se habla de DISPERSIÓN SIMPLE, y cuando la OEM es dispersada por dos o más se tiene DISPERSIÓN MÚLTIPLE.

La característica física que más afecta la dispersión de radiación electromagnética (REM) por una partícula (o un conjunto de ellas) es su tamaño en relación con la longitud de onda de la REM. Una partícula se considera grande si su mínima dimensión es mucho mayor que la longitud de onda de la REM incidente sobre ella (o por lo menos comparable) y se considera pequeña si su máxima dimensión es menor o igual que el producto de la longitud de onda de la REM por  $(0.2/n)$  donde  $n$  es el índice de refracción de la partícula [Hottel y Sarofim (1967) p392], aunque los criterios varían, en especial, para definir el tamaño de las partículas intermedias.

### I.3 Solución del problema de dispersión.

En principio, el patrón de radiación, indicativo del proceso de dispersión, puede ser obtenido resolviendo las ecuaciones de Maxwell de la Teoría Electromagnética para las condiciones de frontera impuestas por las diferentes formas geométricas de las partículas, pero sólo se han calculado soluciones para unas pocas formas simples (esferas, capas esféricas, cilindros, cilindros infinitos, capas cilíndricas, etc.) ya que la solución se vuelve extremadamente complicada para otras formas y aún para las ya mencionadas antes las soluciones son difíciles de evaluar.

Existen, sin embargo, soluciones limitantes cuando las partículas son muy grandes o muy pequeñas, siendo necesario usar ecuaciones de Maxwell sólo para partículas de tamaño intermedio (comparable a la longitud de onda de la REM), éstas soluciones limitantes varían del empleo de la óptica geométrica al de la transferencia de radiación.

### I.3.1 Dispersión de Mie.

La dispersión originada por partículas de tamaño comparable a la longitud de onda se conoce como dispersión de Mie, en honor de Gustav Mie (1869-1957) quien en 1908 usó las ecuaciones de Maxwell para calcular la dispersión en medios formados por partículas esféricas de cualquier tamaño. La dispersión de Mie da lugar a patrones de radiación altamente anisotrópicos. Un gran número de partículas de Mie de igual tamaño puede originar una gran cantidad de colores dispersados como ocurre con el polvo arrojado en una erupción volcánica cuando se eleva a grandes alturas en la atmósfera. El mismo fenómeno de dispersión de Mie puede presentarse en suspensiones coloidales y metálicas, polvo interestelar, niebla, nubes, corona solar, etc. [Hecht y Zajac (1977) p255].

### I.3.2 Dispersión por partículas muy grandes.

Ahora bien, si la partícula es muy grande, obstruirá una radiación igual a la que incide sobre el área proyectada normal al haz primario. Esta radiación sufrirá reflexión, transmisión, refracción y absorción de forma tal que sólo es necesario emplear la óptica geométrica para calcular la distribución espacial de la radiación. De acuerdo con la óptica geométrica, la REM puede pensarse como formada por rayos localizados que viajan en línea recta, siendo ésta una aproximación asintótica que se hace más válida conforme la longitud de onda se hace más pequeña. En partículas grandes el proceso de dispersión se ve acentuado por el fenómeno de difracción, por ésta causa el patrón de radiación puede presentar un estrecho lóbulo en la dirección de incidencia y contener una energía igual a la que incide sobre la sección transversal de la partícula (principio de Babinet). Nuevamente si la partícula no es suficientemente grande habrá que usar la solución rigurosa de las ecuaciones de Maxwell. La componente de difracción debe ser añadida a la de reflexión y refracción (formalmente deben añadirse las amplitudes y no las intensidades [Hottel y Sarofim (1967) p392]).

Las partículas grandes pueden ser difusas, especulares, transparentes u opacas en distintos grados (ver secc. II.2).

### I.3.3 Dispersión de Rayleigh.

En lo que respecta a las partículas pequeñas, usualmente ocurre que si su máxima dimensión es menor que  $0.2/\lambda$  veces la longitud de onda de la REM incidente entonces la intensidad del campo eléctrico y el ángulo de fase a través de la partícula son iguales a los de la radiación incidente, esto facilita el cálculo de la radiación dispersada. La dispersión por partículas pequeñas recibe el nombre de dispersión de Rayleigh, en honor de Lord Rayleigh (1824-1919), quien dedujo clásicamente que la forma del patrón de radiación dispersada depende de la cuarta potencia de la frecuencia de la REM incidente. Ya sea que el medio dispersor sea sólido, líquido o gaseoso, dispersará en longitudes de onda cortas, como el azul, aunque sea débilmente; sin embargo, es más notable en gases que en sólidos o líquidos, ya que en éstos últimos el esparcimiento lateral se ve reducido debido al mayor orden que presentan sus partículas, éste orden tiende a reforzar la dispersión en la dirección hacia adelante, así, el patrón de la radiación dispersada adquiere una forma simétrica con respecto a la dirección de incidencia [Hecht y Zajac (1977) p255].

Para aplicaciones de Percepción Remota, y en general de transferencia de radiación, se requiere conocer la forma en que las propiedades radiativas de una partícula se convierten en las propiedades radiativas de un medio dispersor, esto es, un problema de dispersión múltiple. Lo anterior se consigue integrando las propiedades individuales de una partícula, mediante una función de distribución de las partículas, de densidad y de tamaños, sobre todo el volumen del medio, aunque, es necesario garantizar la no interferencia de las partículas entre sí. Según la definición de la teoría de la transferencia radiativa la interacción de la REM con un medio material se estudia cuantitativamente pero en un nivel fenomenológico (sin más detalles que el color, dispersión, absorción o polarización de la REM) lo que excluye cuestiones de interferencia y difracción, o coherencia y espín [Preisendorfer (1965) pp 3-4].

El mejor modo de estudiar la interacción de REM con un medio material es mediante la ecuación de transferencia radiativa (ETR).

#### I.4 Ecuación de transferencia de radiación (ETR).

Antes de deducir la ETR se definen algunas cantidades que intervienen en ella y otros conceptos importantes.

**-INTENSIDAD DE RADIACIÓN:** Es una cantidad escalar que se define como la cantidad de energía ( $dE\nu$ ) radiante, en un intervalo de frecuencias ( $\nu, \nu+d\nu$ ), que fluye a través de un elemento de área ( $dA$ ), en una dirección inclinada un ángulo ( $\theta$ ) con respecto a la normal exterior a  $dA$  y confinada a un ángulo sólido elemental ( $d\omega$ ), es decir, un cono de radiación, durante un tiempo ( $dt$ ) (ver figura I.1); esto es:

$$I\nu = dE\nu / (\cos\theta \, dA \, d\nu \, d\omega \, dt) \quad (1.1)$$

donde  $I\nu$  es la intensidad (a veces llamada radiancia) en un intervalo de frecuencias, es decir, intensidad espectral [Chandrasekhar (1960) p1].

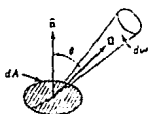


FIG. I.1 Cono de radiación

**-FLUJO NETO DE RADIACIÓN:** (Irradiancia) Es una cantidad vectorial que se define a partir de la intensidad  $I\nu$  como:

$$\pi F\nu = \int_{4\pi} I\nu \cos\theta \, d\omega \quad (1.2)$$

en donde la integral se calcula sobre todo el ángulo sólido ( $4\pi$ ) y no es otra cosa que la razón de flujo de energía radiante a través de un elemento de área ( $dA$ ) por unidad de área y por unidad de intervalo de frecuencia [Chandrasekhar (1960) p2]. El flujo neto es un vector porque su signo determina el sentido en que la radiación neta atraviesa el elemento de área.

**-COEFICIENTES DE ABSORCIÓN, DISPERSIÓN, EMISIÓN Y EXTINCIÓN:** Un haz colinado que atraviesa un medio absorbente y dispersor se atenua

parcialmente por la absorción y parcialmente por cualquier deflexión de la dirección de propagación del haz, el tamaño del decremento en la intensidad espectral del haz está dado por [Hottel y Sarofim (1967) p378]:

$$-dI_v = K_v I_v dl \quad (1.3)$$

para un pequeño espesor ( $dl$ ) en la dirección de propagación y donde  $I_v$  es la intensidad incidente sobre el medio.

$K_v$  es el coeficiente de absorción en ausencia de dispersión; o bien, el coeficiente de dispersión en ausencia de absorción y también puede ser la atenuación total o coeficiente de extinción en presencia de absorción y dispersión, en éste último caso se suele escribir:  $K_v = \sigma + \alpha$  en donde  $\sigma$  es el coeficiente de dispersión y  $\alpha$  es el coeficiente de absorción. El coeficiente de extinción se puede expresar también como  $K_v = K_v \rho$  en donde  $K_v$  es el coeficiente por unidad de masa de extinción y  $\rho$  es la densidad del material. Lo anterior se aplica a los otros coeficientes.

-PROFUNDIDAD ÓPTICA: Es el espesor del material pero en términos de las propiedades ópticas del medio. Para un espesor pequeño ( $dl$ ) en la dirección de propagación, el incremento en la profundidad óptica se define como:  $dt = K_v dl$ , es decir, depende del espesor físico y del coeficiente de extinción que lo convierte en una cantidad espectral. También puede aparecer en forma integral:  $\tau = \int_a^b K_v(l) dl$  [Liou (1980) p22].

-ALBEDO: El albedo para dispersión simple es la fracción de la radiación incidente que ha cambiado de dirección al interaccionar con el medio material y se expresa como:  $w_o = \sigma/K$  en donde  $\sigma$  es el coeficiente de dispersión y  $K$  el de extinción [Hottel y Sarofim (1967) p411].

-FUNCIÓN FASE: Función adimensional necesaria y suficiente para describir la distribución angular de la radiación múltiplemente dispersada. Será tratada con mayor amplitud en el capítulo III.

La forma de la ecuación de transferencia que más conviene al estudio de atmósferas, cuerpos de agua y cuerpos vegetales es la ecuación de transferencia para medios estratificados en planos

paralelos en la que se asume que el medio es homogéneo en dos direcciones ortogonales y todas las variables de interés presentan cambios sólo en una tercera dirección.

La ecuación de transferencia para las condiciones antes mencionadas se deduce de la siguiente manera [Liou (1980) p177]: Sea  $dz$  una capa del medio dispersor, considerando a  $z$  la única dimensión en que el medio cambia (ver figura 1.2).

Sea  $nF_0$  el flujo monocromático neto incidente sobre el medio que proviene en una dirección definida como  $-\Omega(-\mu_0, \phi_0)$  siendo  $\mu_0$  el coseno del ángulo solar zenital ( $\theta_0$ ) y  $\phi_0$  el ángulo solar azimutal, ambos determinan la posición de la fuente de radiación, que para el caso de una atmósfera planetaria, es el sol; (el signo (-) que acompaña a la dirección indica que ésta es siempre hacia abajo).

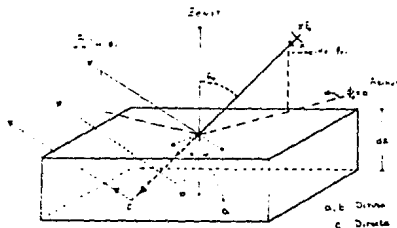


FIG. 1.2 Transferencia de radiación a través de medios en capas de caras plano paralelas: a) extinción, b) dispersión múltiple y c) dispersión simple de radiación directa.

Pensemos ahora en la intensidad de radiación monocromática,  $I(z, \Omega)$ , que emerge del medio en la dirección  $\Omega(\mu, \phi)$ ; ésta se verá [Liou (1980) pp177]:

a). REDUCIDA debido a la dispersión simple y absorción en el medio, o sea que:

$$dI(z, \Omega) = -K N I(z, \Omega) dz / \cos\theta \quad (1.4)$$

en donde  $K$  es el coeficiente de extinción medio de las partículas de la atmósfera y  $N$  es el número total de partículas por unidad de volumen.

b). AUMENTADA por dispersión múltiple dentro del medio, esto es, por

la radiación que estando contenida en un elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  es dispersada en la dirección  $\Omega'$  ( $\mu', \phi'$ ), es decir:

$$dI(z, \Omega) = \sigma N \frac{dz}{\cos\theta} \int_{4\pi} I(z, \Omega') P(\Omega, \Omega') / 4\pi d\Omega' \quad (1.5)$$

en donde  $\sigma$  es el coeficiente de dispersión medio para las partículas de la atmósfera,  $N$  es el número total de partículas por volumen y  $P(\Omega, \Omega')$  es la función fase. Al integrar sobre todo el ángulo sólido se toman en cuenta todas las contribuciones de radiación dispersada de  $\Omega'$  a  $\Omega$ .

c). AUMENTADA, también, por la dispersión simple de la radiación solar directa de dirección  $-\Omega_0$ , esto se evalúa suponiendo que  $F(z)$  es el flujo radiativo al nivel  $z$  proveniente directamente de la fuente y entonces, como en b):

$$dI(z, \Omega) = \sigma N dz / \cos\theta F(z) P(\Omega, -\Omega_0) / 4\pi \quad (1.6)$$

$F(z)$  se puede calcular de la ley de Beer-Bouguer-Lambert [ver por ejemplo Liou (1980) p20]:

$$F(z) = \pi F_0 \exp(-1/\mu_0 \int_z^\infty K(z') N(z') dz') \quad (1.17)$$

pero por la definición de profundidad óptica (pág. anterior):

$$F(z) = \pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0) \quad (1.8)$$

d). AUMENTADA nuevamente por emisión de radiación de cuerpo negro en equilibrio con la temperatura local [Hottel y Sarofim (1967) p411] lo cual produce un término:

$$dI(z) = j N I dz \quad (1.9)$$

en donde  $j$  es el coeficiente de emisión del material. Éste término representa la inclusión de la energía térmica y no se toma en cuenta cuando se está trabajando con longitudes de onda suficientemente cortas, pues en atmósferas planetarias, la temperatura a la que se encuentra el medio no es congruente con la temperatura de emisión de cuerpo negro correspondiente al Sol y aunque puede existir algún traslape entre las curvas de emisión del planeta y de la fuente de radiación lo más probable es que su contribución no sea significativa (ver apéndice A§1 y A§2).

Combinando todo lo anterior y cambiando  $\cos\theta$  por  $\mu$  se obtiene:

$$dI(z, \Omega) = -KN I(z, \Omega) dz/\mu + \sigma N dz/\mu \int_{4\pi} I(z, \Omega') P(\Omega, \Omega') / 4\pi d\Omega' + \sigma N dz/\mu \pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0) P(\Omega, -\Omega_0) / 4\pi \quad (1.10)$$

manipulando algebraicamente, lo anterior se convierte en:

$$\mu dI(z, \Omega) / (K N dz) = -I(z, \Omega) + \sigma/K \int_{4\pi} I(z, \Omega') \mathcal{P}(\Omega, \Omega') / 4\pi d\Omega' + \sigma/K \pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0) \mathcal{P}(\Omega, -\Omega_0) / 4\pi \quad (1.11)$$

pero como  $\sigma/K = \omega_0$  y  $d\tau = -KNdz$  (el signo menos es por la geometría del problema ya que  $\tau$  y  $z$  se miden en direcciones opuestas) entonces la expresión final para la ETR es:

$$\mu dI(\tau, \Omega) / d\tau = I(\tau, \Omega) - \mathcal{J}(\tau, \Omega) \quad (1.12)$$

en donde el último término se conoce como FUNCIÓN FUENTE y agrupa la dispersión múltiple dentro del medio y la componente directa, o sea que:

$$\mathcal{J}(\tau, \Omega) = \omega_0 / 4\pi \int_{4\pi} I(z, \Omega') \mathcal{P}(\Omega, \Omega') d\Omega' + \omega_0 / 4\pi \pi F_0 \mathcal{P}(\Omega, -\Omega_0) \exp(-\tau/\mu_0) \quad (1.13)$$

La función fuente puede contener la contribución por energía térmica en caso de que ésta se presente.

### 1.5 Otra expresión para la ETR.

Si se define el ÁNGULO DE DISPERSIÓN como el ángulo entre el haz incidente y el dispersado se tendrá que, según la figura I.3, y de acuerdo con la geometría esférica (ver apéndice B§1):

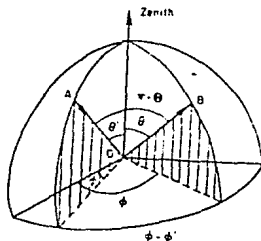


FIG. I.3 Geometría de la dispersión

$$\Omega \cdot \Omega' = \cos \theta = \mu \mu' + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\phi' - \phi) \quad (1.14)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión,  $\Omega = (\mu, \phi)$  es la dirección del haz incidente, como vector en coordenadas esféricas y  $\Omega' = (\mu', \phi')$



es la dirección del haz dispersado. Ahora, la función fase, que caracteriza el proceso de dispersión, dependerá directamente de los cambios en la dirección del haz dispersado  $\gamma$ , en consecuencia, del ángulo de dispersión; es decir, el argumento de la función fase es en realidad  $\cos\theta$ . Esto significa que la función fase puede ser expandida en una serie finita de polinomios de Legendre:

$$P(\cos \theta) = \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\cos \theta) \quad (1.15)$$

donde las  $\omega_l$  son un conjunto de  $N+1$  constantes obtenidas a partir de:

$$\omega_l = \frac{2l+1}{4\pi} \int_{\Omega} P(\cos\theta) P_l(\mu) d\mu \quad (1.16)$$

y  $\omega_0$  es 1.

Tomando en cuenta (1.14) y (1.15) y el teorema de adición para armónicos esféricos [Liou (1980) Apéndice G p367 ó cualquier texto de métodos matemáticos] se puede escribir:

$$P(\mu, \phi; \mu', \phi') = \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi' - \phi) \quad (1.17)$$

en donde  $\omega_l^m = (2-\delta_{0,m}) \omega_l \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$  ( $l=m, \dots, N, 0 < m < N$ )  
 con  $\delta_{0,m}$  = delta de Kronecker y  $P_l^m$  son los polinomios asociados de Legendre.

La intensidad también se puede expresar en una serie de la forma:

$$I(\tau; \mu, \phi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\phi' - \phi) \quad (1.18)$$

combinando (1.12), (1.13), (1.17) y (1.18) y haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de  $\cos m(\theta' - \theta)$  y de los polinomios de Legendre [Liou (1980) Apéndice G] se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^m(\tau, \mu)}{d\tau} &= I^m(\tau, \mu) - (1 + \delta_{0,m}) \frac{\omega}{4} \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_1^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\ &\quad - \frac{\omega}{4\pi} \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0) \end{aligned} \quad (1.19)$$

que en realidad representa un conjunto de  $N+1$  ecuaciones para  $I^m$  cuyas soluciones pueden ser agrupadas en la expresión (1.18). La

ec. (1.19) es una expresión de la ETR (1.12) que permite aplicar varios métodos de solución (ver cap.III).

La solución de la ETR proporciona la intensidad del campo de radiación. Ésta intensidad puede ser usada para obtener los flujos radiativos que a su vez se usan para obtener otras cantidades radiativas de sumo interés como pueden ser absorciones, reflectancias, transmitancias o calentamientos locales. Todo lo anterior en combinación con el principio de conservación de la energía proporciona las vías para el estudio de la transferencia de radiación en un medio material.

En el siguiente capítulo se describe abreviadamente la metodología y la fundamentación de la teoría de la transferencia radiativa en su aplicación a la Percepción Remota.

#### I.6 Referencias.

- 1.Chandrasekhar, S. (1960) *Radiative Transfer*, Dover, New York.
- 2.Hecht, E., Zajac, A. (1977) *Optica*, Fondo Educ. Inter.
- 3.Hottel,H.C., Sarofim,A.F. (1967) *Radiative Transfer*, Mc.Graw Hill, New York.
- 4.Liou, K.N. (1980) *An introduction to Atmospheric Radiation*, Academic Press, New York.
- 5.Preisendorfer, R.W. (1965) *Radiative Transfer on Discrete Spaces*, Pergamon Press.

## CAPÍTULO II

### TRANSFERENCIA RADIATIVA Y PERCEPCIÓN REMOTA

#### II.1 Relación entre transferencia radiativa y percepción remota.

La fundamentación de las técnicas de percepción remota (P.R.) está constituida por la teoría de la transferencia radiativa.

Se entiende por percepción remota a la obtención de información acerca de un objeto sin estar en contacto físico con él, empleando para ello la radiación electromagnética que incluye luz, calor y ondas de radio y quedan excluidas las señales eléctricas, magnéticas, gravitatorias y de otros campos de fuerza por considerarse medidas aeronómicas [Sabins (1978) p1].

En Percepción Remota la más detallada información relacionada con la composición y estado de un medio material, frecuentemente se obtiene de mediciones de radiación dispersada que son usadas para alimentar algún modelo de inversión capaz de proporcionar valores de parámetros importantes del medio, es decir, si la teoría de transferencia radiativa describe las radiancias e irradiancias en un medio material, a partir de sus parámetros, y las técnicas de percepción remota miden las radiancias, se sigue que resulta particularmente útil combinarlas [Smith (1983) p64].

Las mediciones se pueden realizar a través de una amplia gama de sensores que pueden ser fotográficos (que emplean lentes) y no-fotográficos [Girard (1975) p18], o bien, pueden ser pasivos (que sólo son receptores) o activos (que son a la vez receptores y emisores). Naturalmente la primer técnica de P.R. usada fué la fotografía aérea y después se emplearon el Infra-rojo (IR) térmico y las microondas (inclusive por satélite). De este modo, las bandas de percepción remota son (ver apéndice A52): fotográfica (UV fotográfico de 0.3 a 0.4  $\mu\text{m}$ , visible de 0.4 a 0.7  $\mu\text{m}$  e IR fotográfico de 0.7 a 0.9  $\mu\text{m}$ ), IR térmico (de 3 a 5  $\mu\text{m}$  y de 8 a 14  $\mu\text{m}$  y radar (de 0.3 a 300 cm) [Sabins (1978) p5].

En la figura II.1 se muestra el proceso de obtención de datos en P.R. y su relación con la T.T.R.

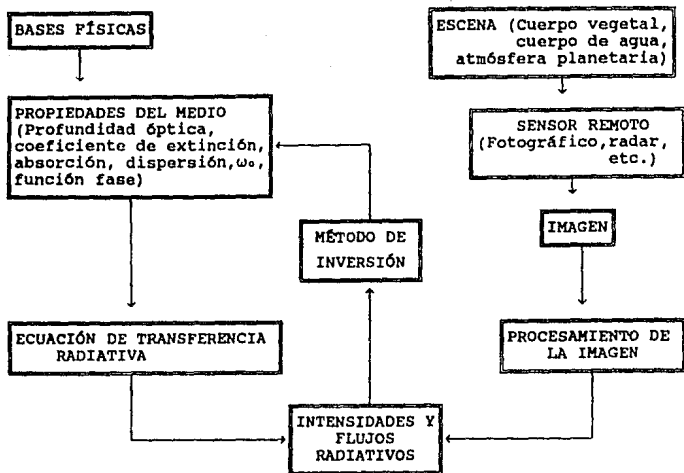


FIG.II.1 Relación entre Percepción Remota y Transferencia Radiativa

## II.2 Superficies reflectoras.

La manera en que la superficie de una partícula interacciona con la radiación está determinada por la función fase, sin embargo, es necesario aclarar alguna terminología por su uso común.

Considerando la dispersión de la radiación por una partícula se dice que puede ser: *opaca* ó *transparente* (total o parcialmente), de modo que un *reflector perfecto* es una partícula que refleja el 100% de la radiación que sobre ella incide; *absorbentes* o *no-absorbentes* (total ó parcialmente); así, una partícula se considera *blanca* si su absorción es nula y, consecuentemente, dispersa toda la radiación incidente; *negra* cuando absorbe toda la radiación incidente y *gris* si su absorción es independiente de la longitud de onda. Si se piensa en la superficie de la partícula, es decir, la interfase, la partícula puede ser *especular*, *lambertiana* o algún término intermedio. Una partícula es un reflector especular

si un haz de radiación al incidir sobre su superficie es reflejado con un ángulo igual al de incidencia (como un espejo) con respecto a la normal a la superficie. Una partícula que no es especular se considera difusa. Ahora bien, si la intensidad reflejada por la superficie de una partícula es independiente del ángulo de incidencia y el flujo reflejado es proporcional al área aparente de observación (área  $\cdot$  coseno del ángulo entre la normal a la superficie y la dirección de observación) entonces la partícula es un reflector lambertiano o difusor perfecto. Se pueden revisar los conceptos en Hottel y Sarofim (1967) p23 y Cap 12 y Özi ik (1973) p39 entre otros.

Por otro lado, la intensidad reflejada por una superficie puede tener dos componentes: una difusa (por dispersión en el medio) y otra especular (por reflexión sobre la superficie), del mismo modo, la intensidad transmitida puede ser difusa (que es dispersada por el medio) y directa o especular (que no interaccionó con el medio o sólo sufrió una reflexión especular).

### II.3 Otras cantidades radiométricas.

Además de la intensidad y el flujo radiativos son de uso extendido cantidades como la reflectancia y otras que se definen a continuación:

Se denominan *reflectividad*, *transmisividad*, y *absortividad* a la fracción de la radiación incidente que ha sido reflejada, transmitida y absorbida por la superficie de una partícula, respectivamente.

Se denomina *reflectancia parcial* a la razón entre la intensidad reflejada a un ángulo  $(\theta_r, \phi_r)$  y la intensidad de un difusor perfecto blanco.

Para medios estratificados en planos paralelos (ver fig II.2) la REFLECTANCIA se define como la razón entre el flujo hemisférico total hacia arriba en el tope del medio  $F^{\uparrow}(\tau=0)$  y el flujo neto incidente normal a la superficie  $\pi|\mu_0|F_0$ , a ésta cantidad se le suele llamar *albedo planetario* o, simplemente, *albedo*; mientras que, la TRANSMITANCIA es la razón entre el flujo hemisférico total

hacia abajo en el fondo del medio  $F_{\lambda}(\tau=\tau_1)$  y el flujo neto incidente, o sea que:

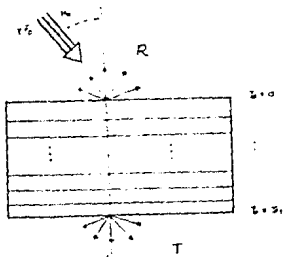


FIG. II.2 Reflectancia y transmitancia hemisféricas en un medio estratificado en planos paralelos.

$$R = F^{\uparrow}(\tau=0) / \pi |\mu_0| F_0 \quad (2.1)$$

y

$$T = F_{\lambda}(\tau=\tau_1) / \pi |\mu_0| F_0 \quad (2.2)$$

la ABSORCIÓN (A) del medio se obtiene de las dos expresiones anteriores combinadas con:

$$R + T + A = 1 \quad (\text{conservación de la energía}) \quad (2.3)$$

En este trabajo las propiedades de una partícula individual serán referidas por el sufijo *-ividad*, por otro lado, las propiedades de un medio difusor tendrán como sufijo *-ancia*.

Existe una diferencia entre radiación que interactúa con un elemento de superficie y radiación que interactúa con un elemento de volumen y es que en la primera se habla de la radiación incidente que proviene de un hemisferio  $\Omega=2\pi$  y en la segunda de radiación en toda la esfera  $\Omega=4\pi$ .

La *Función de Distribución de Reflexión Espectral* o *Función de Reflexión* simplemente (también llamada por algunos autores *factor de reflectancia*) es la propiedad fundamental que gobierna el comportamiento reflectivo de un elemento de una escena captada por un sensor remoto, para establecer su definición considérese (ver fig.II.3) un haz monocromático de radiación incidente sobre un

elemento de área  $dA$ :

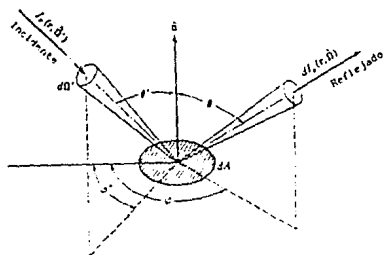


FIG. II.3 Símbolos de la Función de Distribución de Reflexión espectral.

$$I\nu(r, \Omega') d\Omega' \quad (2.4)$$

donde  $r$  es el vector de posición de  $dA$ . La cantidad de energía radiante que incide sobre  $dA$  por unidad de tiempo, por unidad de área y por unidad de frecuencia es:

$$I\nu(r, \Omega') \cos\theta' d\Omega' \quad (2.5)$$

la intensidad de radiación reflejada en una dirección  $\Omega$  cualquiera es  $I\nu(r, \Omega)$  que es una parte de la radiación incidente sobre  $dA$ . Las dos intensidades se relacionan a través de [Özi ik, 1973 p36]:

$$I\nu(r, \Omega', \Omega) = \frac{I\nu(r, \Omega)}{I\nu(r, \Omega') \cos\theta' d\Omega'} \quad (2.6)$$

Por otro lado, si se considera la radiación total incidente sobre  $dA$  se tiene que (ver fig.II.4):

$$\int_{\Omega'=2\pi} I\nu(r, \Omega') \cos\theta' d\Omega' \quad (2.7)$$

es la radiación incidente por unidad de tiempo, área y frecuencia proveniente de todas direcciones, la expresión anterior multiplicada por el factor  $1/\pi$  es equivalente a la radiación incidente sobre  $dA$  por unidad de tiempo, área, ángulo sólido (en estereoradianes) y frecuencia; se puede entonces definir la *Función de Distribución de Reflectancia Bidireccional* como:

$$FDRB = \frac{I\nu(r, \Omega)}{\frac{1}{\pi} \int_{\Omega' = 2\pi} I\nu(r, \Omega') \cos\theta' d\Omega'} \quad (2.8)$$

tomando en cuenta la definición de flujo radiativo (ec. 1.2) se puede escribir:

$$FDRB = \frac{\pi I\nu(r, \Omega)}{F_{TOT. INC.}} \quad (2.9)$$

esta es la función de reflectancia que será empleada en el Cap. V.

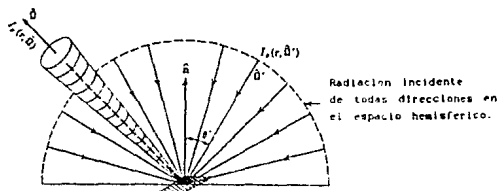


FIG. II.4 Símbolos de la FDRB

Puede afirmarse que la FDRB es la reflectancia en función de dos direcciones angulares la zenital y la azimutal. En términos de la FDRB y su equivalente para transmisión se pueden expresar otras cantidades radiativas como pueden ser el flujo y la intensidad, es decir, si se conocen la función de reflexión y la de transmisión para un medio en dispersión múltiple no se resuelve directamente la ecuación de transferencia radiativa para encontrar el campo de radiación sino que, se emplean ciertos principios físicos y formulaciones matemáticas en lo que se conoce como Método de los Principios de Invariancia [Chandrasekhar (1960) CapIV, Hottel y Sarofim (1967) p125, Lenoble (1977) Cap 1 y Liou (1980) Cap6] entre otros.

En el siguiente capítulo se resumirán algunos métodos de solución de la ETR.



## II.4 Referencias

1. Chandrasekhar, S. (1960) *Radiative Transfer*, Dover, New York.
2. Girard, C.M., Girard, M.C. (1975) *Applications de la Télédétection a l'étude de la Biosphere*, Collection "Sciences Agronomiques", Masson et C.<sup>ie</sup> Editeurs, Paris.
3. Hottel, H.C., Sarofim, A.F. (1967) *Radiative Transfer*, Mc. Graw Hill, New York.
4. Lenoble, J. (1977) (Editor) *Standard Procedures to Compute Atmospheric Radiative Transfer in a Scattering Atmosphere*, IAMAP, Boulder, Co.
5. Liou, K.N. (1980) *An Introduction to Atmospheric Radiation*, Academic Press, New York.
6. Özı ik, M.N. (1973) *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*, A Wiley Intersciences Publication.
7. Sabins, F. (1978) *Remote Sensing: Principles and Interpretation*, W.H. Freeman & Company, San Francisco.
8. Smith, J. (1983) *Matter-Energy in the Optical Region*, en: *Manual of Remote Sensing (Vol.I, Chapter 3)*, (Colwell, R.N. Editor), American Society of Photogrametry, The Sheridan Press, U.S.A.

CAPÍTULO III  
FUNCIÓN FASE Y MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE LA ETR.

III.1 La función fase.

Para resolver la ETR se requiere información acerca del albedo de dispersión simple, de la posición angular de la fuente de radiación y de la función fase.

La función fase es la distribución espacial que adquiere la radiación dispersada por una partícula simple o por un sistema de partículas (medio material); es el patrón de la radiación dispersada, si no se conoce, no se puede resolver la ETR.

En otras palabras, la función fase describe la distribución angular de la energía dispersada por una partícula o un medio. Se define de manera tal que aparezca normalizada a la unidad y además el argumento de la función fase es siempre el coseno del ángulo de dispersión.

En estos términos se puede pensar que la función fase indica cuál es la probabilidad de que un fotón proveniente de una dirección  $\Omega'(\mu', \phi')$ , sea dispersado en la dirección  $\Omega(\mu, \phi)$ .

La función fase, por ser una función de distribución de probabilidad, debe satisfacer las siguientes propiedades:

1)  $0 \leq P(\Omega, \Omega') \leq 1$  (3.1)

2) Condición de normalización:

$$\int_{4\pi} P(\Omega, \Omega') / 4\pi \, d\Omega' = 1 \quad (3.2)$$

para el caso conservativo, o bien:

$$\int_{4\pi} P(\Omega, \Omega') / 4\pi \, d\Omega' = \omega_0 < 1 \quad (3.3)$$

para el caso no conservativo [Chandrasekhar (1960) p6].

Esta condición establece que cualquier fotón proveniente de la dirección  $\Omega$  emerge con seguridad en alguna dirección  $\Omega'$ , a menos que se presente absorción, en cuyo caso, la probabilidad de hallar un fotón después de interactuar con la materia es igual al albedo de dispersión simple. Posteriormente, en este mismo capítulo, se citarán algunas aproximaciones empleadas en la función fase para

poder resolver el problema de la transferencia radiativa.

### III.2 Métodos de solución de la ETR.

Los métodos empleados para resolver la ETR se han clasificado en tres grupos: métodos analíticos exactos, métodos numéricos y métodos aproximados [Lenoble (1977) p2]:

#### III.2.1 Métodos analíticos exactos.

Son aquellos en que los resultados son producidos en forma analítica cerrada, aunque suelen requerir procedimientos numéricos que involucran alguna aproximación. Sin embargo son útiles para entender la estructura matemática y el comportamiento general de las soluciones pero, aunque es difícil usarlos para una atmósfera real. Como ejemplo se pueden citar el método de eigenfunción singular [McCormick y Ku er (1973)] y las técnicas de Wiener-Hopf [Williams (1973)].

#### III.2.2 Métodos numéricos.

Estos métodos están diseñados para ser implementados en una computadora; proporcionan resultados de cualquier aproximación deseada si no hay restricción en el tiempo de computación. Son los más usados y toman en cuenta las características reales de la atmósfera. Por ejemplo se citan:

- Método de los armónicos esféricos [Canosa y Peñafiel (1973)].
- Método de ordenadas discretas [Chandrasekhar (1960) CapII, Liou (1973), Stamnes y Swanson (1981)].
- Método de iteración de Gauss-Seidel [Braslau y Dave (1973)].
- Método de los órdenes sucesivos de dispersión [Bellman et al. (1972), Van de Hulst (1970)].
- Método de Añadir [Hansen (1969) y Liou (1980) Cap6].
- Método de Montecarlo [Plass y Kattawar (1968)].

#### III.2.3 Métodos aproximados.

Son métodos que emplean simplificaciones para reducir en gran medida el tiempo de computación, y a veces, hasta eliminarlo. Se caracterizan por llevar a una simplificación grande ya sea de una

atmósfera real, o bien, del problema de transferencia radiativa en general. Su utilidad depende de la variable que se pretende conocer y de la aproximación deseada. Algunos de estos métodos incluyen aproximaciones de la función fase, otros son en realidad modelos del campo de radiación y otros más involucran aproximaciones severas de características físicas del medio. En el presente trabajo se emplean métodos aproximados para resolver la ETR en un sistema que contiene un cuerpo vegetal, por esta razón, se incluye una breve descripción de los métodos aproximados más empleados en estudios atmosféricos pues éstos suelen aplicarse también a sistemas que incluyen cuerpos vegetales y cuerpos de agua. La utilidad de un método aproximado se evalúa en función del tamaño del intervalo de aplicabilidad en variables como la profundidad óptica ( $\tau$ ), el albedo de dispersión simple ( $\omega_0$ ) y el ángulo de incidencia; además, como comparación, cuando no se dispone de datos experimentales, se usan los resultados de uno o varios métodos numéricos. La razón de lo anterior radica en que, en ocasiones, no hay disponibilidad de datos experimentales, como en el caso del estudio de las atmósferas de otros planetas.

#### III.2.4 Algunos métodos aproximados.

Entre los métodos aproximados más empleados se pueden encontrar:

-Método de dos haces [Schuster (1905), Sagan y Pollack (1967)]: En este método (llamado también Método de Schuster-Schwarzschild) se resuelve la ETR (ec. 1.12) empleando un procedimiento similar al método de ordenadas discretas promediando la variable  $\mu$  en el intervalo  $(-1,0)$  y luego en el intervalo  $(0,1)$  lo cual ocasiona que la radiancia ( $I$ ) se separe en sólo dos componentes: hacia arriba (upward) y hacia abajo (downward), ambas dependientes de  $\tau$  (y no de  $\Omega$ ), que aparecen acopladas en un par de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, es posible desacoplarlas para encontrar la  $I$  total que será la suma de  $I$  hacia arriba e  $I$  hacia abajo con las apropiadas condiciones de frontera. El método da buenos resultados ( $\approx 2\%$ ) comparado con las observaciones, para capas delgadas ( $\tau \leq 1$ ) de

material dispersor homogéneo conservativo a incidencia normal; ha sido usado para  $\omega_0$  altos ( $\approx 1$ ) y sobre todo a incidencia normal ya que a incidencia muy oblicua la aproximación es mala. El método puede ser ampliado para usarse no sólo en dos haces sino en 4, 6 ó 12 ya que en realidad 2-haces es la versión más simplificada del método de ordenadas discretas. El método de 2-haces ha sido empleado con éxito en el estudio de la transferencia de radiación en cuerpos de agua [Lemus et al. (1983), Lemus y Gay (1984)-1, Lemus y Gay (1984)-2].

-Aproximación de Wiesrose [Wiesrose y Shadmon (1984)]: Este método está diseñado para aplicarse a atmósferas con nubes de aerosol con dispersión múltiple no conservativa y autoemisión de las partículas que absorben. Tiene la misma fundamentación que el de Dos Haces sólo que en la función fuente (ver sección I.4) se incluye un término con la distribución de frecuencias de Planck. Comparada con otros modelos esta aproximación concuerda bien para profundidades ópticas bajas ( $\approx 0.1$ ) pero difiere más de 20% para profundidades ópticas por encima de 3.

-Método de Perturbación: Se aplica, por lo general, a capas inhomogéneas de una atmósfera con la condición de que solamente las variaciones del albedo de dispersión simple ( $\omega_0$ ) con  $\tau$  (profundidad óptica) sean significativas, es decir, que las variaciones de la función fase con  $\tau$  no son tomadas en cuenta. En este método se supone que las características ópticas de la atmósfera inhomogénea, incluido el campo de radiación, pueden ser simuladas a partir de un  $\omega_0$  independiente de  $\tau$  al cual se le perturba con una cantidad  $a(\tau)$ , mucho menor que 1, de modo que  $\omega(\tau)$ , que es el albedo variable, quede expresado como una serie de perturbaciones a  $\omega_0$ , donde, generalmente es suficiente con utilizar 2 términos. Estas perturbaciones se reflejan en otras variables radiativas y así se puede resolver el problema de transferencia radiativa, ver por ejemplo Fymat y Abhyankar (1969). Para el caso de la dispersión de Rayleigh este método sólo precisa de 5 ó 6 iteraciones para alcanzar los resultados observados. El método de perturbación se puede aplicar directamente a la ETR perturbando la intensidad

[Deuzé et al. (1973)].

-Aproximación de Eddington : Consiste en proponer un campo de radiación de la forma:

$$I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau) \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (3.4)$$

es decir, una componente isotrópica y una componente anisotrópica. Esta aproximación arroja mejores resultados cuando la  $\tau$  es más o menos grande ( $>8$ ) excepto para incidencia muy oblicua, de manera semejante a lo que ocurre con el método de dos haces sólo que en la aproximación de Eddington el orden de error es menor (quizá en un factor de 3) [Irvine (1968)], el error se calcula con respecto a los resultados obtenidos mediante un método numérico. Cuando el ángulo de incidencia se acerca a  $\pi/2$  la reflectividad del material debe crecer lo cual no se predice apropiadamente por esta aproximación, sin embargo, da buenos resultados cuando hay poca absorción ( $\omega \approx 1$ ). El uso de la aproximación de Eddington puede extenderse a atmósferas inhomogéneas [Shettle y Weinman (1970)] siempre y cuando se puedan dividir en un número finito de capas internamente homogéneas. Una aproximación de este tipo se emplea en este trabajo para estudiar la transferencia de radiación en sistemas que incluyen cuerpos vegetales.

-Aproximación  $\delta$ -Eddington: Esencialmente esta aproximación está formada por una aproximación  $\delta$  combinada con una aproximación Eddington sólo que  $\delta$ -Eddington se aplica a atmósferas altamente anisotrópicas que presenten en la función fase un "pico" muy marcado en alguna dirección [Joseph et al. (1976)]. Una aproximación  $\delta$  consiste en remover el pico de dispersión de la función fase separándolo por medio de una  $\delta$  de Dirac y aprovechar después las propiedades de integración de la  $\delta$  para normalizar la función fase [Potter (1970)]. La función fase se expresa entonces como la suma de dos partes: una que contiene al pico, modelada con la  $\delta$  y otra, con el pico removido, modelada con una aproximación Eddington (aunque puede usarse otro tipo de aproximación). Los flujos radiativos calculados mediante aproximación  $\delta$  para distintos ángulos de incidencia ( $0^\circ$ -  $80.8^\circ$ ) dan una aproximación del 1% en general para varios valores de  $\tau$  y de  $\omega$ , lo mismo que con la

aproximación de Eddington para ángulos de incidencia que difieren en menos de 5° del ángulo de incidencia rasante, la aproximación no es buena. Se recomienda que cuando el valor absoluto del factor de asimetría de la función fase (momento de primer orden) es menor que 1/2 no es necesario usar una aproximación  $\delta$ -Eddington pues la aproximación Eddington es suficiente [Wiscombe y Joseph (1977)]. Esta aproximación ha sido usada también en medios que incluyen cuerpos de agua [Lemus y Gay (1985)].

Otras aproximaciones a la función fase.

-Función fase isotrópica: Es la más simple y su interés es más bien de tipo teórico:  $P(\cos \theta) = \omega_0$  donde  $\omega_0$  es el albedo de dispersión simple.

-Función fase de Rayleigh: La apropiada para describir la dispersión de Rayleigh (ver secc. I.3.3 de este trabajo)

$$P(\cos \theta) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta).$$

-Aproximación de Henyey-Greenstein: Empleada para atmósferas con nubes, tiene la forma matemática:

$$P(\cos \theta) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}$$

en donde  $g$  es el factor de asimetría (definido como el primer momento de la función fase). Como las partículas que forman las nubes suelen ser más grandes que la longitud de onda de la REM en el visible, se tiene un pico muy pronunciado en la dirección hacia adelante a causa de la difracción de Fraunhofer [Hansen (1969)] y la función fase de Henyey-Greenstein se usa para modelarlo. Esta aproximación fué usada en un principio para modelar el polvo interestelar [Henyey y Greenstein (1941)].

Existen otras aproximaciones (ver por ejemplo Kagiwada y Kalaba, (1967)) pero su empleo no es muy frecuente. Una comparación más detallada entre distintos métodos aproximados se puede hallar en Lenoble (1977) Cap4.

Paralelamente a los diferentes tipos de métodos de solución existen los llamados métodos de inversión que son empleados en el estudio de la transferencia radiativa. Su utilidad radica en el

cálculo de parámetros de interés ( $\tau$ ,  $\omega_0$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ , u otros) propios de un medio material, apoyándose en un conjunto de datos suficientemente confiables, calculados u observados, de una variable radiativa importante (intensidad, flujo, reflectancia, etc). Para su aplicación, un proceso de inversión precisa de un método de solución de la ETR apropiado al medio que se estudie y a los parámetros que se deseen invertir. A grandes rasgos, un método de inversión aplicado a atmósferas planetarias consiste en el uso de cantidades radiativas de interés (flujo, intensidad, reflectancia, etc.) obtenidas por la vía experimental, para calcular el valor numérico de alguna propiedad intrínseca de la atmósfera. Fundamentalmente un método de inversión es de tipo numérico pues requiere de la aplicación reiterada de algún tipo de solución del problema de la transferencia radiativa. Existen muchas aplicaciones de métodos de inversión en atmósferas (ver por ejemplo Fymat y Zuev (1978), Twomey (1977)).

### III.3 Referencias.

1. Bellman, R., Ueno, S., Vasudevan, R. (1972) *Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry : I. Finite Order Scattering and Transmission Functions*, Math. Biosci. 14, 235-254.
2. Braslau, N., Dave, J.V. (1973) *Effect of Aerosols on the Transfer of Solar Energy through Realistic Model Atmospheres*, J. Appl. Meteor. 12, 601-615 y Parte II J. Appl. Meteor. 12, 616-619.
3. Canosa, J., Peñafiel, H.R. (1973) *A Direct Solution of the Radiative Transfer Equation: Application to Rayleigh and Mie Atmospheres*, J. Quant. Spectro. Rad. Trans. 13, 21-39.
4. Chandrasekhar, S. (1960) *Radiative Transfer*, Dover, New York.
5. Deuzé, J.L., Devaux, C., Herman, M. (1973) *Utilisation de la Methode des Harmoniques Spheriques dans le Calculs de Transfer Radiatif. Extension au Cas de Couches Diffusantes d'Absorption*, Nouv. Rev. d'Optique 4, 307-314.
6. Fymat, A.L., Abhyankar, K.D. (1969) *Theory of Radiative Transfer in Inhomogeneous Atmospheres: I*, Astroph. J. 158, 315-324.
7. Fymat, A.L., Zuev, V.E. (1978) *Remote Sensing of the Atmosphere: Inversion Methods and Applications*, Elsevier, New York.



8. Hansen, J.E. (1969) *Radiative Transfer by Doubling very Thin Layers*, *Astroph. J.* 155, 565-573.
9. Henyey, L.G., Greenstein, J.L. (1941) *Diffuse Radiation in the Galaxy*, *Astroph. J.* 93, 70.
10. Irvine, W.M. (1968) *Multiple Scattering by Large Particles II. Optically Thick Layers*, *Astroph. J.* 52, 823-834.
11. Joseph, J.H., Wiscombe, W.J., Weinman, J.A. (1976) *The Delta-Eddington Approximate Method for Radiative Flux Transfer*, *J. Atmos. Sci.* 33, 2452-2459.
12. Kagiwada, H., Kalaba, R. (1967) *Multiple Anisotropic Scattering in Slabs with Axially Symmetric Fields*, Mem. RM 5245-PR, The Rand Corporation.
13. Lemus, L., Gay, C., Camacho, S. (1983) *Two-Stream Computations of Water-Body Reflectances*, *Geofísica Internacional* 22-3, 237-250.
14. Lemus, L., Gay, C. (1984)-1 *Radiative Transfer in a Water-Body: Reflectance Computations*, *Arch. Met. Geoph. Biocl., Ser. B* 34, 384-393.
15. Lemus, L., Gay, C. (1984)-2 *Water-Body Reflectances: Dependence on Optical Depth*, *Arch. Met. Geoph. Biocl., Ser. B* 35, 137-145.
16. Lemus, L., Gay, C. (1985) *Remote Sensing Methods Based on the Delta-Eddington Approximation*, *Advanced Technology for Monitoring and Processing Global Environmental Data (Proceedings of the International Conference of the Remote Sensing Society and the Center for Earth Resources Management)*, pp 91-98, Univ of London.
17. Liou, K.N. (1973) *A Numerical Experiment on Chandrasekhar's Discrete Ordinate Method for Radiative Transfer: Application to Cloudy and Hazy Atmospheres*, *J. Atmos. Sci.* 30, 1303-1326.
18. Liou, K.N. (1980) *An Introduction to Atmospheric Radiation*, Academic Press, New York.
19. McCormick, N.J., Kuscer, I. (1973) *Singular Eigenfunctions Expansions in Neutron Transport Theory*, *Adv. Nuc. Sci. Tech.* 7, 181-182.
20. Plass, G.N., Kattawar, G.W. (1968) *Monte Carlo Calculations of Light Scattering from Clouds*, *Appl. Opt.* 7, 415-419.
21. Potter, J.F. (1970) *The Delta-function Approximation in Radiative*

- Transfer Theory, *J. Atmos. Sci.* 27, 943-949.
22. Sagan, C., Pollack, J.B. (1967) *Anisotropic Nonconservative Scattering and the Clouds of Venus*, *J.G.R.* 72, 469-477.
  23. Schuster, A. (1905) *Radiation through Foggy Atmospheres*, *Astroph. J.* 21, No. 1.
  24. Shettle, E.P., Weinman, J.A. (1970) *The Transfer of Solar Irradiances through Inhomogeneous Turbid Atmospheres Evaluated by Eddington's Approximation*, *J. Atmos. Sci.* 27, 1048-1055.
  25. Stamnes, K., Swanson R.A. (1981) *A New Look at the Discrete Ordinate Method for Radiative Transfer Calculations in Anisotropically Scattering Atmospheres*, *J. Atmos. Sci.* 38, 387-399.
  26. Twomey, S. (1977) *Introduction to the Mathematics Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurements*, Elsevier, New York.
  27. Van de Hulst, H.C. (1970) *High-Order Scattering in Diffuse Reflection from a Semi-infinite Atmosphere*, *Astron. Astroph.* 9, 374-379.
  28. Weisrose, S.A., Shadmon, G. (1984) *Radiative Transfer Calculation through an Aerosol Cloud*, *J. Quant. Spectros. Rad. Trans.* 31, 63-70.
  29. Williams, M.M.R. (1973) *The Wiener-Hopf Technique; an Alternative to the Singular Eigenfunction Method*, *Adv. Nuc. Sci. Tech.* 7, 283-327.
  30. Wiscombe, W.J., Joseph, J.H. (1977) *The Range of Validity of the Eddington Approximation*, *Icarus* 32, 362-377.

## CAPÍTULO IV

### APLICACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE RADIACIÓN A CUBIERTAS VEGETALES.

#### IV.1 Generalidades de la transferencia de radiación en vegetación.

El comportamiento de un cuerpo vegetal frente a la REM depende fundamentalmente de la longitud de onda de ésta radiación, ya que los elementos radiativamente activos de un vegetal, por ejemplo, las hojas, responden de manera muy variable a radiaciones de distintas longitudes de onda.

Dentro del espectro de radiación terrestre (ver apéndice A52) se pueden distinguir las regiones reflectiva (onda corta) y térmica (onda larga) para la interacción de la radiación con la materia. En este trabajo, se maneja sólo la región reflectiva.

El uso de la teoría de la transferencia de radiación y de ecuaciones de balance de energía en una cubierta vegetal queda justificado si existen suficientes dispersores como para constituir un medio y, consecuentemente, propiedades ópticas como la coherencia de fase pueden ser ignoradas [Smith (1983) p62].

El principal problema que se presenta al aplicar la teoría de la transferencia radiativa a cubiertas vegetales es la relación de las variables físicas, propias del método de solución empleado, con las variables biológicas, propias de la especie vegetal; como por ejemplo la profundidad óptica con el índice de área foliar (área total de las hojas de un cuerpo vegetal por unidad de área de terreno), o bien, los coeficientes de dispersión con la orientación y área de las hojas. Sin embargo, identificaciones del tipo de las anteriores son indispensables cuando se aplican técnicas de percepción remota (P.R.), puesto que en estos casos la clave de su utilización es relacionar los observables de P.R. con características de la escena estudiada.

El observable de mayor trascendencia en P.R. es la función de distribución de reflectancia bidireccional (FDRB), definida en el capítulo II; con ella y un método de solución apropiado se pueden inferir, a través de un proceso de inversión, en principio, características de una cubierta vegetal que tengan que ver con su

status, identidad o condición como: índice de área foliar, biomasa (la masa bruta de un cuerpo vegetal por unidad de área de terreno), especies, nivel de desarrollo, plagas, enfermedades, etc, o procesos tales como la actividad fotosintética o el grado de evapotranspiración. [Smith (1983) p64].

La información proporcionada por las técnicas de P.R. se ha usado no sólo en combinación con la teoría de la transferencia radiativa, sino que, empíricamente las propiedades biofísicas de un cuerpo vegetal se pueden relacionar con razones aritméticas entre las radiancias de los canales espectrales de un sensor remoto, llamadas índices de vegetación [Asrar (1985), etc.].

En cubiertas vegetales la emisividad es muy alta ( $\approx 0.95$ ) en el intervalo de 8-14 micrómetros y algo menor en el intervalo 3-5.5 micrómetros [Smith (1983) p94], sin embargo en la región del espectro importante para este trabajo la emisividad puede ser despreciada (ver apéndice A§1); en cualquier caso, la reflectancia puede presentar variaciones quizá de más de 200% debidas a dependencias angulares y/o de polarización.

Algunas propiedades tanto de las hojas individuales como en su conjunto se presentan a continuación.

#### IV 1.1 Propiedades espectrales de las hojas.

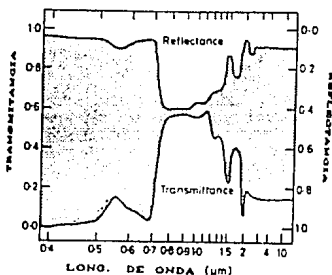


FIG. IV.1 Reflectancia, transmitancia y absorción de una hoja verde típica (sombreado indica absorción) [Grace (1983) p22]

Las hojas transmiten y reflejan, de modo muy acentuado, en el visible y en el infra-rojo cercano (ver apéndice A§2) y el ojo humano parece estar bien adaptado para resolver pequeñas diferencias entre propiedades ópticas de hojas de diferentes especies lo que hace suponer que en otros tiempos debió ser cuestión de sobrevivencia tener una buena visión en la región del verde ( $\lambda \approx 550 \text{ nm}$ ) [Stanhill (1981)].

En la figura IV.1 se muestran las propiedades espectrales de una hoja típica.

En el visible con un mínimo entre 500 y 600 nm, esto es, en la región del verde, se presenta alta absorción determinada por la presencia de clorofilas a y b (que tienen picos de absorción en el azul y el rojo), por otros pigmentos como carótenos y xantofila y, además, por su estructura interna todo lo cual ocasiona que la hoja aparezca casi opaca [Girard y Girard (1975)]. En la región ultravioleta hay una gran absorción debida a muchos tipos de moléculas incluyendo agua. Dentro de la hoja la radiación interacciona con los organelos de la estructura interna de modo que la profundidad óptica puede ser grande, lo que provoca que la absorción crezca y, consecuentemente, la reflectancia y la transmitancia decrecen. La diferencia entre los índices de refracción del agua líquida (1.33) y el aire (1.00), en los espacios intercelulares dentro de la hoja, provoca una gran reflexión interna en cada interfase [Gates et al. (1965)].

En la región del infra-rojo cercano (0.7-1.35  $\mu\text{m}$ ) existe un brusco descenso en la absorción que es atribuido a la dispersión múltiple dentro de la hoja. Casi la mitad de la radiación solar incidente está en esta región (ver apéndice A§2). A longitudes de onda más grandes, infra-rojo medio e infra-rojo lejano, existe fuerte absorción por el agua líquida y las hojas son prácticamente opacas por lo que casi no reflejan ni transmiten radiación.

De acuerdo con el tipo de hoja, se pueden presentar diferencias en la reflectancia. Si una hoja está en estado maduro su reflectancia en el visible tiende a decrecer mientras que su reflectancia en el cercano infra-rojo tiende a crecer, además, la senescencia (pérdida de la capacidad de producir biomasa) produce

valores más altos en el visible y más bajos en el infra-rojo. Por otro lado, se afirma que en 6 longitudes de onda, seleccionadas entre 0.8 y 2.6  $\mu\text{m}$ , la respuesta espectral contra la humedad relativa de las hojas y la densidad específica de la hoja ( $\text{mg}/\text{cm}^2$ ) presentan alta correlación [Carlson et al. (1971)]. Otros factores son: varias clases de enfermedades, tipo de nutrientes, salinidad, etc.

El haz y el envés de una hoja pueden presentar diferencias en sus propiedades ópticas pero no suelen ser mayores del 10% en las hojas de árboles comunes [Birkebak y Birkebak (1964)].

El efecto de polarización de la luz por las hojas se ha medido para una variedad de especies [Egan (1970)] y en general se tiene que el porcentaje de polarización decrece conforme la longitud de onda crece y está relacionado con la humedad. También se ha usado la polarización para clasificación de especies [Curran (1982)-1].

El comportamiento óptico de las hojas reviste especial interés cuando se relaciona con adaptaciones de tipo ecológico como la pubescencia (vellos que cubren algunas plantas como las cactáceas) [Gates (1980)].

En relación al patrón de radiación de una hoja individual se sabe que, a incidencias no normales y en longitudes de onda de fuerte absorción, la función de reflectancia bidireccional muestra contribuciones grandes de la componente especular, (ver cap II secc.2), que son mayores conforme mayor es el ángulo de incidencia, mientras que la transmitancia semeja mucho un patrón lambertiano. Sin embargo en longitudes de onda 750-2000 nm tanto la reflectancia como la transmitancia tienen una forma casi lambertiana, además, se reparten casi equitativamente la radiación dispersada. En longitudes de onda más allá de 2000 nm las hojas no son ni perfectamente especulares ni perfectamente difusas. La estructura interna de la hoja es lo que explica lo anterior [Brece y Holmes (1971)].

Otra propiedad de las hojas que se suele manejar en la literatura es la *reflectancia infinita* ( $R_\infty$ ), la cual es un valor

asintótico de la reflectancia que se presenta cuando el espesor óptico de las hojas se hace infinito; se ha encontrado que no hay cambios significativos en la reflectancia cuando se colocan 8 ó más hojas, una sobre otra, bajo un haz luminoso cuya longitud de onda yaza en el intervalo de 0.8-1.3  $\mu\text{m}$  mientras que para el visible y más allá de 1.5  $\mu\text{m}$  la  $R_{\infty}$  se alcanza con sólo 2 hojas, naturalmente, en el caso de hojas maduras y sanas [Allen y Richardson (1968)]. Existe un trabajo acerca de las propiedades ópticas de varias especies vegetales [Gausman y Allen (1973)] en el que se proporcionan los valores del coeficiente de dispersión, el coeficiente de absorción y la reflectividad infinita en 7 longitudes de onda distintas (0.55-2.2  $\mu\text{m}$ ). Estos datos fueron rearrreglados [Pinker y Joseph (1987)] en dos categorías: plantas de hojas delgadas (frijol de soya, durazno, sorgo, caña de azúcar, maíz) y plantas de hojas gruesas (adelfa, árbol del hule, uva de gato, alheña y crin). Las diferencias encontradas entre estas dos categorías indican que las hojas delgadas tienen coeficientes de absorción y dispersión más bajos y la  $R_{\infty}$  es ligeramente más baja en las hojas gruesas excepto en la región fotosintéticamente activa del espectro (PAR) que abarca de 0.4-0.7  $\mu\text{m}$ .

#### IV 1.2 Propiedades ópticas del canopy o dosel.

Se denomina dosel o canopy a la parte de una cubierta vegetal que contiene a las hojas y otros elementos activos frente a la radiación. Las propiedades ópticas del dosel son una consecuencia de: las propiedades ópticas de las hojas, las del suelo, las de la atmósfera bajo la cual se desarrolla la planta, las de la fuente de radiación y las del detector o aparato de medida; además influyen, las posiciones de la fuente y el detector y la estructura del dosel (orientación y densidad de las hojas). Todos estos elementos deben ser tomados en cuenta en cualquier modelo de reflectancia de una cubierta vegetal, ya que, la reflectancia puede cambiar con el ángulo solar zenital y la posición del observador; cambia también si el suelo absorbe o dispersa en la longitud de onda que se trabaje o si los vegetales están o no plantados en surcos; también varía para distintos estados de desarrollo de un vegetal. Por

ejemplo, para vegetación alta, como un bosque de coníferas, se tiene una baja reflectividad solar sólo por la forma de aguja de sus hojas y la forma cónica o cilíndrica de la planta.

En general la vegetación se comporta como si fuera una sola superficie compuesta, pues, refleja más radiación si el ángulo de incidencia es mayor, como sucede al amanecer y al atardecer, lo cual es evidente en las plantas cuyas hojas son casi horizontales [Grace (1983) p24]. En el caso de tener una mezcla de especies las propiedades ópticas del dosel serán la suma de las propiedades ópticas de cada especie, y ya combinadas, determinarán la reflectancia de la cubierta vegetal; lo anterior es válido también si se incluyen, junto con las hojas, los efectos de los tallos u otros elementos de una planta, aunque generalmente, por su poca superficie, no se toman en cuenta. Se han deducido perfiles de área de la superficie de elementos de un dosel de pinos tales como: agujas, conos, corteza, brotes o retoños. La corteza y los brotes resultaron ser  $1/20$  y  $1/8$  del máximo estacional del área de las agujas a la misma altura dentro del dosel [Haldin (1985)].

Muchas especies tienen además la propiedad de orientar sus hojas de tal manera que presenten la máxima superficie frente a la radiación solar (heliotropismo) [Schutt et al. (1985) y Verstraete (1987)].

En general, además de los ya citados, existen muchos trabajos acerca de las propiedades de hojas [Coulson (1965), etc.] y doseles de plantas [Egbert y Ulaby (1972), etc.].

#### IV.2 Breve resumen de modelos de reflectancia en vegetación.

Los modelos de reflectancia en vegetación se concentran en dos tipos: modelos de hojas individuales y modelos de reflectancia de doseles. Para el desarrollo de esta tesis no interesan los modelos de la estructura interna de las hojas sino los modelos de la función fase de una hoja individual (forma geométrica del lóbulo de reflexión y de transmisión) y los modelos de reflectancia para doseles de los cuales citaremos algunos.

La mayoría de los modelos se han desarrollado para el caso de una dimensión y un dosel en planos paralelos, aunque, la



abstracción correspondiente a una dimensión no funciona si la cubierta vegetal no es completa. Sin embargo, en estos casos los detalles más destacados de la cubierta vegetal se tratan con apego a la óptica geométrica. Los modelos de doseles contemplan varios porcentajes de cubierta vegetal estructurados agrícola o naturalmente.

El trabajo pionero en modelos de reflectancia, de más de un parámetro, para doseles fué desarrollado por Allen, Gayle y Richardson [Allen et al. (1970)] apoyados en la teoría de Kubelka-Munk [Kubelka y Munk (1931)] y de Duntley [Duntley (1942)], para ser aplicado a cultivos, relacionando los parámetros correspondientes a las radiancias difusas hacia arriba y hacia abajo y la radiancia especular de manera empírica con los coeficientes de absorción y dispersión. En realidad se trata de una aplicación del Método de Dos Haces (ver Cap III).

Existen otros trabajos (inclusive, anteriores al de Allen, Gayle y Richardson) que sólo modelan el coeficiente de extinción a través de la ley de Beer-Bouguer (modelos de un parámetro o modelos de penetración) aplicado a una gran variedad de plantas (frijol de soya, maíz, arroz, etc) y para varias bandas del espectro electromagnético [Allen et al. (1969), etc.]

Otros modelos y métodos son:

-Método de Ordenadas Discretas. Fué usado [Wienman y Guetter (1972)] en el estudio de la reflectancia de un cultivo de maíz, combinado con la atmósfera, empleando los mismos valores empíricos para los coeficientes de absorción, dispersión hacia atrás y dispersión hacia delante que emplearon Allen, Gayle y Richardson. Para aplicar éste método se usaron 4 puntos de cuadratura; además, para modelar la radiancia se emplea la aproximación de Eddington (ver capIII).

-Aproximación  $\delta$ -Eddington. Esta aproximación fué usada [Pinker y Joseph (1987)] bajo el criterio de que es más apropiada que las variantes del método de dos haces en virtud de que las plantas presentan fuertes picos hacia atrás en las bandas de reflexión.

Para los casos en que  $|g| > 1/2$  ( $g$  es el factor de asimetría definido como el momento de primer orden de la función fase) se considera alta anisotropía recomendándose el uso de la aproximación  $\delta$ -Eddington y si  $|g| < 1/2$  la anisotropía es baja pudiéndose usar la aproximación de Eddington o alguna otra aproximación de tipo Dos Haces [Wiscombe y Joseph (1977)].

El procedimiento usado es comparar las cantidades análogas en las formulaciones de Allen, Gayle y Richardson y la aproximación de Eddington como lo hicieron Wienman y Guetter (1972), es decir, igualando los coeficientes de las ecuaciones diferenciales y cuidando que la variable vertical y las componentes del flujo sean las mismas, para así obtener expresiones de los parámetros de una formulación en términos de los parámetros de la otra. Se usa un medio compuesto de 1 capa de atmósfera y 11 capas de vegetación para probar el modelo con todos los parámetros ópticos evaluados a una longitud de onda de 1  $\mu\text{m}$ . Los resultados del trabajo de Pinker y Joseph no son concluyentes en el sentido de que no dispusieron de datos experimentales confiables con los cuales comparar sus resultados.

-Método de Monte-Carlo. Este método fué aplicado [Smith y Oliver (1974)] con hojas modeladas por la distribución de su inclinación. También se ha encontrado [Szwarcbaum y Shaviv (1976)] que el método de Monte-Carlo, permite la inclusión de características del dosel como dos caras distintas y orientación no aleatoria de las hojas. La desventaja en el uso de este método radica en la gran cantidad de ensayos que conlleva la simulación. Recientemente [Antyufeev y Marshak (1990)] han empleado el método de Monte-Carlo en vegetación con énfasis en la estimación estadística del campo de radiación y la simulación de una cadena de Markov (para las trayectorias de cada fotón) y fué probado con un dosel hipotético.

-Método de Añadir. Ha sido usado [Cooper et al. (1982)] para calcular la radiancia de una cubierta vegetal modelando las hojas como lo hacen Smith y Oliver (1974). También se ha usado [Eom y Fung (1984)] el método Adding para desarrollar un modelo de dispersión en la banda Ku (1.7-2.4 cm) de la región de radar,

modelando las hojas como pequeños discos dieléctricos e incluyendo los efectos de polarización en la función fase.

-Modelo de Ross y Nilson [Ross y Nilson (1975)]. Se resuelve la ecuación de transferencia empleando una distribución aleatoria de las hojas y un perfil de distribución del número de hojas por unidad de volumen, además, una función fase propia para una hoja individual. Se usa un modelo de dos haces para la radiancia y se asume un carácter lambertiano para el suelo. Este modelo ha sido reformulado [Nilson y Ruusk (1989)] para incluir, además de la dispersión simple y múltiple del dosel y del suelo, la reflexión especular de las hojas y el fenómeno del halo luminoso ("hot spot" en inglés) del dosel. Debido a la carencia de valores experimentales simultáneos de todos los parámetros que alimentan el modelo, Nilson y Ruusk lo han validado empleando una combinación de datos tomados de la literatura y datos estimados por la inversión del modelo mismo. En estos términos las reflectancias calculadas y medidas muestran una desviación estandar promedio de 0.0017 (en el rojo) y 0.0053 (IR cercano) cuando la variable es el nivel de desarrollo del cultivo.

-Modelo de Verstraete [Verstraete (1987), (1988)]. Se trata de un modelo de transferencia de radiación que incluye las componentes directa y difusa de la radiación para calcular la absorción y dispersión en el visible y el infra-rojo cercano. Verstraete incluye en su modelo como condiciones de frontera un flujo incidente compuesto por la radiación solar directa y la radiación difusa proveniente de la atmósfera (skylight), también incluye el flujo proveniente del suelo como condición de frontera inferior. El modelo está adaptado para varias capas caracterizadas por distintos índices de área foliar y distintas condiciones de frontera. Comparado con datos experimentales correspondientes a un bosque de nogal americano el modelo subestima la reflectancia (4.2% contra 6.4%) lo cual es atribuible a la posición de la fuente o a cambios en la inclinación de las hojas. El mismo trabajo incluye una comparación con otros modelos de reflectancia con los cuales muestra gran acuerdo. No calcula reflectancia bidireccional sino

promedios hemisféricos y, por razones de simplicidad, deja de lado la anisotropía de la reflectancia de un cuerpo vegetal pero, en cambio, abarca la diferenciación entre el haz y envés de las hojas y la posibilidad de incluir efectos tales como heliotropismo e inhomogeneidad en la dirección vertical de las hojas.

-Modelo de Gutschick y Wiegel [Gutschick y Wiegel (1984)]. Este modelo calcula la reflectancia a partir de una ecuación integral exacta para un dosel isotrópico. Comparado con el modelo de Suits (ver adelante) este modelo proporciona resultados semejantes para la reflectancia, dependiente del ángulo zenital únicamente, excepto cuando el flujo incidente es puramente difuso. En términos generales las diferencias entre los dos modelos son pequeñas ( $\approx 0.5\%$ ) aunque para la comparación se usaron valores teóricos. Se supone, además, que las hojas son reflectores lambertianos lo mismo que el suelo. En el mismo artículo se desarrolla una extensión a un dosel de características más generales, que permite una función fase anisotrópica para el dosel y variaciones en el azimut, sin embargo no se proporcionan resultados numéricos.

-Modelo de Suits [Suits (1972)-1]. El dosel vegetativo se estudia utilizando las ecuaciones de Duntley [Duntley (1942)] pero para describir los 5 parámetros involucrados (coeficientes de extinción y de dispersión hacia atrás del flujo difuso, coeficientes de dispersión hacia atrás, dispersión hacia adelante y de extinción para flujo especular) se usa una aproximación que consiste en suponer que el dosel está formado sólo por paneles horizontales y verticales (éstos últimos orientados aleatoriamente en el azimut), es decir, que el área de una hoja se descompone en tres proyecciones (una horizontal y dos verticales). Los 5 parámetros de Duntley dependen además de la densidad del follaje, de la posición de la fuente y de la reflectividad y transmisividad individuales de las hojas. El modelo permite la inclusión de varias capas de follaje con distintas características ópticas y también varias especies en una misma capa. El modelo de Suits es en realidad una aproximación de dos haces que permite calcular el flujo en cualquier nivel del dosel a través de un modelo de penetración y

también permite la inclusión de luz difusa de la atmósfera (skylight) en la frontera superior.

El flujo radiativo que se calcula con este modelo depende de la posición del observador por lo que se puede calcular una reflectancia bidireccional. El modelo fué probado con un cultivo hipotético de un mes de desarrollo con un suelo lambertiano gris de 10% de reflectancia, a un ángulo zenital solar de  $45^\circ$  y las hojas fueron supuestas como reflectores lambertianos. Sin embargo, el dosel presentó una reflectancia no-lambertiana con cierta variación azimutal atribuible a la variación de las proporciones observadas del área de las proyecciones verticales en relación al flujo especular [Suits (1972)-2]. El modelo ha sido extendido para incluir los efectos de la estructura agrícola del terreno (surcos) [Suits (1983)] y para aplicarse a cuerpos de agua [Suits (1984)]

-Modelo SAIL [Verhoef (1984)]. Es una versión mejorada del modelo de Suits para incluir la dispersión de hojas arbitrariamente inclinadas (SAIL por sus siglas en inglés), en el que se considera un dosel homogéneo estratificado en planos paralelos de extensión infinita con hojas planas de extensión azimutal aleatoria. En este modelo se formulan las eficiencias de extinción y dispersión (que incluyen la información acerca de la orientación de las hojas) para poder calcular los respectivos coeficientes que a su vez son incorporados a las ecuaciones diferenciales del modelo de Suits. El modelo SAIL es probado en el visible y el IR cercano usando como principales datos de entrada el índice de área foliar y una función de distribución de la inclinación de las hojas, se encuentra con esto que la reflectancia bidireccional de un dosel de trigo calculada con el modelo SAIL es más realista que la calculada con el modelo de Suits pues elimina el vértice en  $\theta=0^\circ$  (punto de nadir) que éste último presenta. Las discrepancias más grandes entre ambos modelos se tienen cuando el ángulo zenital solar o el ángulo de observación del nadir es menor de  $45^\circ$ .

En lo que respecta a los métodos de inversión en vegetación se han logrado invertir el modelo de Suits [Goel y Strebel (1984)], el modelo SAIL [Goel y Thompson (1984)], el modelo Nilson y Kuusk

[Nilson y Kuusk (1989)] y un modelo para cubiertas boscosas modeladas como series de conos con superficie lambertiana y suelo lambertiano también [Strahler y Li (1981)].

#### IV.3 Referencias

##### Índices de vegetación:

1. Asrar, G., Kanemasu, E.T., Yoshida, M. (1985) *Estimates of Leaf Area Index from Spectral Reflectance of Wheat Under Different Cultural Practices and Solar Angle*, Rem. Sens. of Envir. 17, 1-11.
- Clevers, J.G.P.W. (1989) *The Application of a Weighted Infrared-red Vegetation Index for Estimating Leaf Area Index by Correcting for Soil Moisture*, Rem. Sens. of Envir. 29(1), 25-37.
- Curran, P.J. (1982)-2 *Multispectral Photographic Remote Sensing of Green Vegetation Biomass and Productivity*, Photogram. Eng. and Remote Sensing 48(2), 243-250.
- Dusek, D.A., Jackson, R.D., Musick, J.T. (1985) *Winter Wheat Vegetation Indices Calculated from Combinations of Seven Spectral Bands*, Rem. Sens. of Envir. 18(3), 255-267.
- Hardisky, M.A., Smart, R.M., Klemas, V. (1983) *The Influence of Soil Salinity, Growth Form and Leaf Moisture on the Spectral Radiance of Spartina Alterniflora Canopies*, Photogram. Eng. And Remote Sensing 49(1), 77-83.
- Huete, A.R., Jackson, R.D., Post, D.F. (1985) *Spectral Response of a Plant Canopy with Different Soil Backgrounds*, Rem. Sens. of Envir. 17, 37-53.
- Perry, C.R., Lautenschlager, L.F. (1984) *Functional Equivalence of Spectral Vegetation Indices*, Rem. Sens. of Envir. 14, 169-182. (Contiene una amplia descripción de varios índices de vegetación).
- Rudorff, B.F.T., Batista, G.T. (1990) *Spectral Response of Wheat and its Relationship to Agronomic Variables in the Tropical Region*, Rem. Sens. of Envir. 31(1), 53-63.

##### Propiedades de hojas individuales:

2. Coulson, K.L., Bouricius, G.M., Gray, E.L. (1965) *Optical Reflection Properties of Natural Surfaces*, J. Geophys. Res. 70(18), 4601-4611.
- Coulson, K.L. (1966) *Effects of Reflection Properties of Natural Surfaces in Aerial Reconnaissance*, Appl. Opt. 5(6), 905-917.
- Gates, D.M., Keegan, H.J., Schleter, J.C., Weidner, V.R. (1965) *Spectral Properties of Plants*, Appl. Opt. 4(1), 11-20.
- Gausman, H.W., Allen, W.A., Cárdenas, R., Richardson, A.J. (1970) *Relation of Light Reflectance to Hystological and Physical Evaluations of Cotton Leaf Maturity*, Appl. Opt. 9, 545-552.
- Tucker, C.J., Garrat, M.W. (1977) *Leaf Optical System Modeled as a Stochastic Process*, Appl. Opt. 16(3), 635-642.
- Woolley, J.T. (1971) *Reflectance and Transmittance of Light by leaves*, Plant Physiol. 47, 656-662.

Propiedades de doseles o canopies:

3. Egbert, D.D., Ulaby, F.T. (1972) *Effect of Angles of Reflectivity*, Photogram. Eng. and Rem. Sens. 38(6), 556-564.
- Kimes, D.S., Smith, J.A., Ranson, K.J. (1980) *Vegetation Reflectance Measurements as a Function of Solar Zenith Angle*, Photogram. Eng. and Rem. Sens. 46, 1563-1571.
- Kimes, D.S., Newcomb, W.W., Schutt, J.B., Pinter, P.J., Jackson, R.D. (1984) *Directional Reflectance Factor Distributions of a Cotton Row Crop*, Int. J. Rem. Sens. 5(2), 263-277.
- Kriebel, K.T. (1978) *Measured Spectral Bidirectional Reflection Properties of Four Vegeted Surfaces*, Appl. Opt. 17(2), 253-259.
- Tucker, C.L. (1977) *Spectral Estimation of Grass Canopy Variables*, Rem. Sens. of Emvir. 6, 11-26.

Modelos de un parámetro o modelos de penetración:

4. Allen, W.A., Gausman, H.W., Richardson, A.J., Thomas, J.R. (1969) *Interaction of Isotropic Light with a Compact Plant*, J. Opt. Soc. Am. 59, 1376-1379.
- Cowan, I.R. (1968) *The Interception and Absortion of Radiation*

in Plant Stands, *J. of Appl. Ecology* 5, 367-379.

- Gallo, K.P., Daughtry, C.S.T. Bauer, M.E. (1985) *Spectral Estimation of Absorbed Photosynthetically Active Radiation in Corn Canopies*, *Rem. Sens. of Envir.* 17(2), 221-232.

Referencias generales:

5. Allen, W.A., Richardson, A.J. (1968) *Interaction of Light with a Plant Canopy (Proc. 5th Symp. on Remote Sensing of Environment)*, Univ. of Michigan (Ann Arbor), 219-232.
6. Allen, W.A., Gayle, T., Richardson, A.J. (1970) *Plant Canopy Irradiance Specified by the Duntley Equations*, *J. Opt. Soc.* 60, 372-376.
7. Antyufeev, V.S., Marshak, L.A. (1990) *Monte Carlo Method and Transport Equation in Plant Canopies*, *Rem. Sens. of Envir.* 31(3), 183-191.
8. Birkebak, R., Birkebak, R. (1964) *Solar Radiation Characteristics of Tree Leaves*, *Ecology* 34(3), 646-649.
9. Breece, H.T., Holmes, R.A. (1971) *Bidirectional Scattering Characteristics of Healthy Green Soybean and Corn Leaves in Vivo*, *Appl. Opt.* 10(1), 119-127.
10. Carlson, R.E., Yarger, D.N., Shaw, R.H. (1971) *Factors Affecting the Spectral Properties of Leaves with Special Emphasis on Leaf Water Status*, *Agron. J.* 63, 186-189.
11. Cooper, K., Smith, J.A., Pitts, D. (1982) *Reflectance of a Vegetation Canopy using the Adding Method*, *Appl. Opt.* 21(21).
12. Curran, P.J. (1982)-1 *Polarized Visible Light as an Aid to Vegetation Classification*, *Rem. Sens. of Envir.* 12(6), 491-499.
13. Duntley S.Q. (1942) *Optical Properties of Diffusing Materials*, *J. Opt. Soc. Amer.* 32, 61-70.
14. Egan, W.G. (1970) *Optical Stokes Parameters for Farm Crop Identification*, *Rem. Sens. of Envir.* 1, 165-180.
15. Eom, H.J., Fung, A.K. (1984) *A Scatter Model for Vegetation up to Ku Band*, *Rem. Sens. of Envir.* 15, 185-200.
16. Gates, D.M. (1980) *Biophysical Ecology*, Springer-Verlag, New York.
17. Gausman, H.W., Allen, W.A. (1973) *Optical Parameters of Leaves*



- of 30 Plant Species, *Plant Physiol.* 52, 57-62.
18. Girard, C.M., Girard, M.C. (1975) *Applications de la Télédétection à l'étude de la Biosphère*, Collection "Sciences Agronomiques", Masson et C<sup>ie</sup> Editeurs, Paris.
  19. Goel, N.S., Strebel, D.E. (1983) *Inversion of Vegetation Canopy Reflectance Models for Estimating Agronomic Variables. I. Problem Definition and Initial Results Using the Suits Model*, *Rem. Sens. of Envir.* 13, 487-507.
  20. Goel, N.S., Thompson, R.L. (1984) *Inversion of Vegetation Canopy Reflectance Models for Estimating Agronomic Variables. IV. Total Inversion of the SAIL Model*, *Rem. Sens. of Envir.* 15, 237-253.
  21. Grace J. (1983) *Plant-Atmosphere Relationships*, "Outline Studies in Ecology", Chapman and Hall, London and New York.
  22. Gutschick, V.P., Wiegand, F.W. (1984) *Radiation Transfer in Vegetative Canopies and other Layered Media: Rapidly Solvable Exact Integral Equation not Requiring Fourier Resolution*, *J. Quant. Spectros. Rad. Trans.* 11, 71-82.
  23. Haldin, S. (1985) *Leaf and Bark Area Distribution in a Pine Forest*. En: *The Forest-Atmosphere Interaction (Proc. of the Forest-Environmental Measurements Conference)*, D. Reidel Publishing Co., pp684, Oak Ridge Tennessee.
  24. Kubelka, P., Munk, F. (1931) *Z. Tech. Physik* 12, 593.
  25. Nilson, T., Kuusk, A. (1989) *A Reflectance Model for the Homogeneous Plant Canopy and its Inversion*, *Rem. Sens. of Envir.* 27, 157-167.
  26. Pinker, R.T., Joseph, J.H. (1987) *Use of the Delta-Eddington Approximation in Treatment of Radiative Transfer in Plant Canopies*, (Preprint) *Rem. Sens. of Envir.*
  27. Ross, J., Nilson, T. (1975) *Radiative Exchange in Plant Canopies*, in *Heat and Mass Transfer in the Biosphere*.
  28. Ross, J. (1981) *The Radiation Regime and Architecture of Plant Stands*, W. Junk (publishers), The Hague.
  29. Schutt, J.B., Kimes, D.S., Newcomb, W.W. (1985) *Effect of Heliotropism on the Bidirectional Reflectance of Irrigated Cotton*, *Rem. Sens. of Envir.* 17, 13-25.
  30. Smith, J.A., Oliver, R.E. (1974) *Effects of Changing Canopy Directional Reflectance on Feature Selection*, *Appl. Opt.* 13,

1599-1604.

31. Smith, J.A. (1983) *Matter-Energy Interaction in the Optical Region*, en: *Manual of Remote Sensing (Vol.I, Chapter 3)* (Colwell, R.N. Editor) American Society of Photogrametry, The Sheridan Press, U.S.A.
32. Stanhill, G. (1981) *The Size and Significance of Difference in the Radiation Balance of Plants and Plant Communities*. In *Plants and their Atmospheric Environment*, 21<sup>st</sup> Symposium of the British Ecological Society, (Grace, J., Ford, E.D. and Jarvis, P.G., eds.), 57-74, Blackwell Scientific Publications, Oxford.
33. Strahler, A.H., Li, X. (1981) *An Invertible Coniferous Forest Canopy Reflectance Model*, Proc. Fifteenth Int. Symp. on Rem. Sens. of Envir. Ann Arbor MI.
34. Suits, G.H. (1972)-1 *The Calculation of the Directional Reflectance in a Vegetative Canopy*, Rem. Sens. of Envir. 2, 117-125.
35. Suits, G.H. (1972)-2 *The Cause of Azimuthal Variations in Directional Reflectance of Vegetative Canopies*, Rem. Sens. of Envir. 2, 175-182.
36. Suits, G.H. (1983) *Extension of a Uniform Canopy Reflectance Model to Include Row Effects*, Rem. Sens. of Envir. 13, 113-129.
37. Suits, G.H. (1984) *A Versatil Directional Reflectance Model for Natural Water Bodies, Submerged Objects and Moist Beach Sands*, Rem. Sens. of Envir. 16, 143-156.
38. Szwarcbbaum, I., Shaviv, G. (1976) *A Monte-Carlo Model for the Radiation Field in Plant Canopies*. Agric. Meteorol. 17, 333-352.
39. Verhoef, W. (1984) *Light Scattering by Leaf Layers with Application to Canopy Reflectance Modeling: The SAIL Model*, Ra. Sens. of Envir. 16(2), 125-141.
40. Verstraete, M.M. (1987) *Radiation Transfer in Plant Canopies: Trasmision of Direct Solar Radiation and the Role of Leaf Orientation*, J. Geophys. Res. 92, 10985-10995.
41. Verstraete, M.M. (1988) *Radiation Transfer in Plant Canopies: Scattering of Solar Radiation and Canopy Reflectance*, J. Geophys. Res. 93, 9483-9494.
42. Weinman, J.A., Guetter, P.J. (1971) *Penetration of Solar Irradiances through the Atmosphere and Plant Canopies*, J. Appl.

Meteor. 11, 136-140.

43. Wiscombe, W.J., Joseph, J.H. (1977) *The Range of Validity of the Eddington Approximation*, Icarus 37, 362-377.

## CAPÍTULO V

### UN MÉTODO DE SOLUCIÓN DE LA E.T.R. PARA VEGETACIÓN.

Se requiere un modelo de reflectancia para un dosel vegetativo que involucre un método semianalítico de solución de la E.T.R.

Un modelo de reflectancia para vegetación abarca los aspectos siguientes:

- Características ópticas de los elementos dispersores individuales (hojas, tallos, brotes, etc.).
- Características de la estructura del dosel (porcentaje de terreno cubierto por vegetación, homogeneidad, etc.).
- Características ópticas del suelo (albedo, existencia de surcos, etc.).
- Características de la fuente de radiación.
- Características del campo de radiación producido por el dosel, que son lo que genera el modelo.

La inclusión de los aspectos anteriores lleva a suposiciones cuyo fin es facilitar el manejo matemático de todos los detalles del dosel.

#### V.1 Hipótesis preliminares.

A fin de simplificar las características del dosel vegetativo que se desea modelar se asume que:

i).-El dosel es un medio dispersor estratificado en planos paralelos de propiedades homogéneas, llamados capas, con una extensión horizontal infinita. El modelo desarrollado en este capítulo emplea una capa solamente pero puede ser ampliado para incluir más capas.

ii).-El dosel, para efectos de dispersión de REM, está compuesto únicamente por hojas que, a su vez, son consideradas como superficies planas lambertianas con caras ópticamente indistinguibles. La interacción de las hojas con la REM se supone descriptible a través de la teoría de la transferencia radiativa (ver secc. I.3).

iii).-Las hojas están orientadas aleatoriamente en azimut y su

orientación zenital es descrita por una función de distribución.

iv).-La radiación incidente sobre el dosel es de dos tipos: *directa*, un haz monocromático colimado de radiación de intensidad constante y *difusa*, un campo isotrópico de radiación producido por la dispersión de la atmósfera (*skylight*) de intensidad constante.

v).-El suelo es un reflector lambertiano que no presenta surcos.

## V.2 La función fase

El modo en que una hoja interacciona con la radiación queda determinada por su función fase. Sean  $n$  el vector normal unitario a la superficie de la hoja que determina su orientación,  $\hat{n}$  y  $\hat{n}$  los vectores unitarios que señalan la dirección de incidencia y la posición del observador, respectivamente, con respecto a un marco de referencia externo. La geometría de la situación queda representada en la figura V.1:

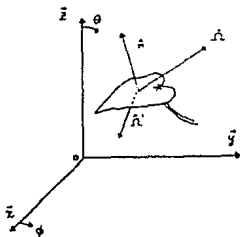


FIG. V.1 Geometría de la dispersión de REM por una hoja.

Se definen:  $\theta$ ,  $\theta'$  y  $\theta_1$  como los ángulos zenitales de: observación, incidencia y orientación de la normal  $n$  respectivamente; y  $\phi$ ,  $\phi'$  y  $\phi_1$  como las posiciones azimutales correspondientes. De este modo se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{n} &= (\text{sen}\theta\text{cos}\phi, \text{sen}\theta\text{sen}\phi, \text{cos}\theta) \\ \hat{n}' &= (\text{sen}\theta'\text{cos}\phi', \text{sen}\theta'\text{sen}\phi', \text{cos}\theta') \\ n &= (\text{sen}\theta_1\text{cos}\phi_1, \text{sen}\theta_1\text{sen}\phi_1, \text{cos}\theta_1)\end{aligned}\quad (5.1)$$

De acuerdo con la hipótesis ii) la fracción de la radiación incidente dispersada por la hoja es proporcional a  $|\hat{n}' \cdot n|$  y la

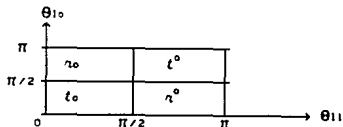
fracción de radiación dispersada en la dirección del observador es proporcional a  $|\hat{\Omega} \cdot \mathbf{n}|$ . Además, las propiedades ópticas de una hoja quedan determinadas por:  $r$  (= reflectividad) y  $t$  (= transmisividad), cantidades que casi siempre aparecen normalizadas a la unidad en la literatura; el problema que se presenta ahora es determinar en qué casos se observa radiación dispersada por reflexión y en qué casos por transmisión. Si se supone por un momento que las caras de la hoja son distinguibles por sus propiedades ópticas, se puede entonces decir que las reflectividades vistas por el haz ( $r^\circ$ ) y por el envés ( $r_o$ ) son diferentes y las transmisividades vistas por el haz ( $t_o$ ) y el envés ( $t^\circ$ ) también lo son, la ocurrencia de cada caso queda determinada por los signos de las proyecciones entre los vectores  $\mathbf{n}$ ,  $\hat{\Omega}'$  y  $\hat{\Omega}$ :

caso	signo de $\hat{\Omega}' \cdot \mathbf{n}$	signo de $\hat{\Omega} \cdot \mathbf{n}$
$r^\circ$	-	+
$r_o$	+	-
$t^\circ$	-	-
$t_o$	+	+

Proponiendo que:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{n} &= \cos \theta_{10} \\ \hat{\Omega}' \cdot \mathbf{n} &= \cos \theta_{11} \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde  $\theta_{10}$  y  $\theta_{11}$  son los ángulos que forma la normal a la hoja con la dirección de observación y la dirección de la radiación incidente, respectivamente, entonces los casos anteriores se pueden obtener en términos de combinaciones de ángulos:



como puede verse, para una dirección fija de observación sólo pueden observarse simultáneamente  $r^\circ$  y  $t_o$ , o bien,  $r_o$  y  $t^\circ$ . De esta manera, la función fase para una hoja está dada por:

$$P(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}, \mathbf{n}) = \frac{r}{\pi} |\hat{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| |\hat{\Omega} \cdot \mathbf{n}|$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \tau^{\circ} \text{ y } t^{\circ} & \text{si } |\hat{\Omega} \cdot \mathbf{n}| > 0 \\ &= r_0 \text{ y } t^{\circ} & \text{si } |\hat{\Omega} \cdot \mathbf{n}| < 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

el factor  $1/\pi$  se agrega debido a que, para un reflector lambertiano perfecto, en una sola dirección zenital el 100% del factor de dispersión es  $1/\pi$  de tal modo que, la suma de los factores en todas las direcciones zenitales en un hemisferio sea la unidad:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} d\theta = 1 \quad (5.4)$$

Para construir la función fase del dosel se necesitan, aparte de la función fase para una hoja, una función de distribución de la orientación de las normales a las hojas del dosel:  $f(n)$ , de cuya naturaleza trata la sección V.5.

El perfil del coeficiente de extinción, necesario para implementar un modelo con capas, puede depender del área de una hoja y de la densidad de hojas presente en el dosel en lo que se llama distribución del área de las hojas, sin embargo, como se aclara en la sección V.4, la profundidad óptica incluye al coeficiente de extinción.

Así, la función fase para el dosel vegetativo es:

$$P(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}, n) = f(n) P(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}, n) \quad (5.5)$$

### V.3 Normalización de la función fase.

Para normalizar la función fase se usará la condición establecida en cap.III secc.1.

Normalizar la función fase equivale a verificar que la probabilidad de que un fotón, proveniente de una dirección cualquiera  $\hat{\Omega}'$ , incidente sobre la superficie de una hoja, sea dispersado en alguna dirección  $\hat{\Omega}$  es igual a la unidad, caso conservativo, o al albedo de dispersión simple. Por esta razón la integración se realiza sobre  $\Omega$  y no sobre  $\Omega'$ , es decir:

$$\int_{\Omega} P(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}, n) d\Omega = 4\pi \quad (5.6)$$

En (5.5) se observa que el único factor de la función fase que

depende de  $\Omega$  es  $P(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}, n)$  y éste, a su vez, sólo depende de  $\Omega$  en el factor  $|\hat{\Omega} \cdot n|$ , es decir, solamente se necesita normalizar la función fase para una hoja ya que  $f(n)$  se normaliza por separado. Por otro lado, la región de integración es la región donde está definida la función fase por lo que se determinará primero la región de integración.

Sea  $\hat{\Omega}' \cdot n = -1$  una dirección de incidencia arbitrariamente escogida a modo de poder normalizar, lo cual significa que se fija una dirección de incidencia y una posición de  $n$ . Se tiene entonces que se observa  $\alpha^\circ$  y  $\iota^\circ$  variando  $\Omega$ .

Se observa  $\alpha^\circ$  cuando  $\hat{\Omega} \cdot n > 0$  y  $\iota^\circ$  cuando  $\hat{\Omega} \cdot n < 0$ . Por otro lado un producto punto es siempre menor o igual que 1 y mayor o igual que -1, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha^\circ: & 0 \leq \hat{\Omega} \cdot n \leq 1 \\ \iota^\circ: & -1 \leq \hat{\Omega} \cdot n \leq 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

la igualdad con 1 implica observación de la hoja por el zenit, la igualdad con -1 implica observación de la hoja por el nadir y la igualdad con 0 implica observación a ángulo rasante que, para el caso de un reflector lambertiano, significa no interacción con la REM. Usando (5.1) y (5.7) se obtiene (ver apéndice B § 1):

$$\begin{aligned} \alpha^\circ: & 0 \leq \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\phi - \phi_1) \leq 1 \\ \iota^\circ: & -1 \leq \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\phi - \phi_1) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

para simplificar la notación se definen:

$$\begin{aligned} a &= \cos\theta_1 \\ b &= \sin\theta_1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por otro lado, para vegetación se establece que el ángulo zenital de la orientación de  $n$  y el ángulo cenital solar están acotados:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta_1 \leq \pi/2 \\ \pi/2 &\leq \theta_0 \leq \pi \end{aligned} \quad (5.10)$$

pues se asume que las hojas generalmente no orientan su cara superior hacia abajo y que la radiación proveniente del sol no incide por debajo del dosel. De acuerdo con lo anterior se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a \leq 1 \\ 0 &\leq b \leq 1 \\ -1 &\leq \cos\theta_0 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

manipulando las desigualdades (5.8), considerando (5.9)-(5.11) y



definiendo:

$$\begin{aligned}\mu &= \cos\theta \\ \psi &= \phi - \phi_1\end{aligned}\quad (5.12)$$

se obtiene (ver apéndice B§2):

$$-b \leq \mu \leq b \quad (5.13)$$

para los casos  $\alpha^\circ$  y  $\ell^\circ$ , además:

$$\begin{aligned}\text{caso } \alpha^\circ: & \quad 0 \leq |\psi| \leq x(\mu) \\ \text{caso } \ell^\circ: & \quad x(\mu) \leq |\psi| \leq \pi\end{aligned}\quad (5.14)$$

donde: 
$$x(\mu) = \arccos \left( -\frac{a\mu}{b\sqrt{1-\mu^2}} \right) \quad (5.15)$$

es el valor umbral del ángulo azimutal que divide reflexión de transmisión, lo que define los intervalos de integración para la normalización de la función fase. Una representación gráfica del dominio de la función fase se encuentra en la figura V.2.

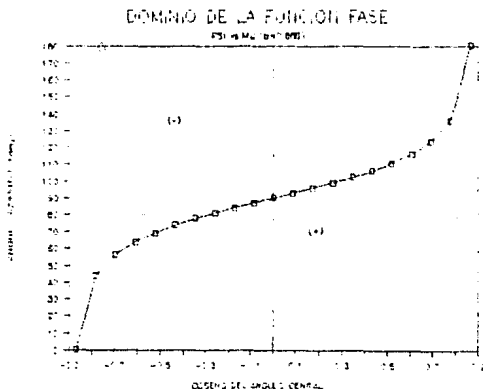


FIG. V.2 Dominio de la función fase  $P(\mu, \psi)$ . La región  $-\pi \leq \psi \leq 0$  es simétrica. (+) indica dispersión hacia atrás y (-) hacia adelante

De esta manera la normalización de la función fase se plantea a través de la integral:

$$\frac{\alpha^{\circ}}{\pi} \left( \int_b^b \int_0^{x(\mu)} P(\mu, \psi) d\psi d\mu + \int_b^b \int_{x(\mu)}^0 P(\mu, \psi) d\psi d\mu \right) +$$

$$\frac{\iota^{\circ}}{\pi} \left( \int_{-b}^b \int_{x(\mu)}^{\pi} P(\mu, \psi) d\psi d\mu + \int_{-b}^b \int_{-\pi}^{-x(\mu)} P(\mu, \psi) d\psi d\mu \right) = 4\pi b \omega_0 \quad (5.16)$$

donde  $P(\mu, \psi) = a\mu + b\sqrt{1-\mu^2} \cos\psi$  (5.17)

La simetría de la función fase (ver figura V.2) hace que las integrales entre paréntesis, correspondientes a  $\alpha^{\circ}$ , sean iguales lo mismo que las correspondientes a  $\iota^{\circ}$ , por lo que sólo se calcularán dos integrales. Llevando a cabo las integraciones se obtiene (ver apéndice B53):

$$\frac{1}{\pi} (\alpha^{\circ} + \iota^{\circ}) \frac{\pi}{2} (1-a^2) = 2\pi b \omega_0 \quad (5.18)$$

la relación anterior se puede reescribir como:

$$(\alpha^{\circ} + \iota^{\circ}) (1-a^2) = 4\pi b \omega_0 \quad (5.19)$$

el factor  $(1-a^2)$  depende de la orientación de la hoja por lo que se puede afirmar, sin pérdida de generalidad y para fines de normalización, que una orientación fija de la hoja es:

$$a = \cos\theta_1 = 0$$

$$b = \sin\theta_1 = 1$$

es decir, una hoja vertical. Por todo lo anterior se tiene:

$$\omega_0 = \alpha^{\circ} + \iota^{\circ}$$

el factor  $4\pi$  no es necesario si se definen  $\alpha^{\circ}$  y  $\iota^{\circ}$  como hemisféricas. La última relación expresa el valor más alto de la fracción de radiación dispersada por una hoja pero por efecto de la orientación de la hoja  $\omega_0$  puede ser menor que  $\alpha^{\circ} + \iota^{\circ}$  como puede verse en (5.19).

#### V.4. Planteamiento y solución de la ETR.

La ETR a ser resuelta es la ec (1.12) pero usando los desarrollos en serie de Legendre para la función fase y de Fourier coseno para la intensidad (ver secc. 1.5) y con las condiciones de frontera que se explican más adelante (ver secc. V.5). En la ec. (1.12) las variables son:  $\mu$  ( $= \cos\theta$ ),  $\phi$  y  $\tau$ , es decir, los ángulos zenital y azimutal correspondientes a la posición del observador y la profundidad óptica. Esta última depende del coeficiente de extinción (ver secc. I.4). Para el caso de un dosel vegetativo, el coeficiente de extinción depende del área que las hojas presentan ante la radiación. El área total por unidad de volumen se conoce en la literatura como distribución del área de la hoja y es una cantidad que generalmente depende de la altura (ha sido modelada a través de distribuciones beta de probabilidad (Meyers y Paw (1986))), por lo tanto, esta cantidad varía como el coeficiente de extinción y  $\tau$  en la ETR ya incluye la información correspondiente al tamaño y número de las hojas, es decir,  $\tau$  está basado en un modelo de penetración.

Por otro lado, la función fase que aparece en la ETR ya debe incluir la distribución de la orientación de las hojas  $f(n)$ , pues la ETR se aplica a todo el dosel.

El mecanismo para la solución de la ETR para doseles vegetativos es el mismo que en la secc. I.5 pero es necesario tomar en consideración que el dominio de la función fase no es  $4\pi$  sino  $4\pi b$ , sin embargo, es posible hacer un cambio de variable tal que las manipulaciones algebraicas necesarias para el desarrollo de ésta y las secciones subsecuentes de este capítulo se simplifiquen un poco, el cambio consiste en definir una nueva variable  $\mu^*$ :

$$\mu = b \mu^* \quad (5.20)$$

de modo que si  $-b \leq \mu \leq b$  entonces  $-1 \leq \mu^* \leq 1$ . Así se tiene que las ecs. (1.15)-(1.19) pueden reescribirse en términos de  $\mu^*$ . En adelante usaremos simplemente  $\mu$  en lugar de  $\mu^*$ , para facilitar la escritura de las ecuaciones.

La ec. (1.19) es, en realidad, el conjunto de ecuaciones, una para cada componente  $m$ , del campo de radiación y para construir el

campo de radiación total se emplea (1.18). En este trabajo, como una aproximación se resuelve (1.19) para 2 componentes  $m=0$  y  $m=1$  de la serie de Fourier correspondiente a la intensidad.

#### V.4.1. Caso $m=0$ (independencia azimutal).

La componente de orden 0 del campo de radiación se calcula a través de la aproximación de Eddington (ver secc. III.2.4):

$$I^0(\tau, \mu) = i_0^0(\tau) + \mu i_1^0(\tau) \quad (5.21)$$

introduciendo (5.21) en (1.19) con  $m=0$  y desacoplando, se obtienen (ver apéndice B§4):

$$\frac{d^2}{d\tau^2} i_0^0 = k^2 i_0^0 - \eta e^{-\tau/\mu_0} \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} i_1^0 = k^2 i_1^0 + \vartheta e^{-\tau/\mu_0} \quad (5.23)$$

cuyas soluciones son:

$$i_0^0(\tau) = A_0^0 e^{k\tau} + B_0^0 e^{-k\tau} + C_0^0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (5.24)$$

$$i_1^0(\tau) = A_1^0 e^{k\tau} + B_1^0 e^{-k\tau} + C_1^0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (5.25)$$

donde:

$$k^2 = 3(1 - \omega\omega_0^0) (1 - \omega\omega_1^0/3)$$

$$\eta = \frac{3}{4} [\omega\omega_0^0(1 - \omega\omega_1^0/3) + \omega\omega_1^0/3] F_0$$

$$\vartheta = \frac{3}{4} [(1 - \omega\omega_0^0)\omega\omega_1^0\mu_0 + \omega\omega_0^0/\mu_0] F_0$$

$$C_0^0 = -\frac{\eta}{\frac{1}{\mu_0^2} - k^2}$$

$$C_1^0 = \frac{\vartheta}{\frac{1}{\mu_0^2} - k^2}$$

$$A_1^0 = \frac{kA_0^0}{1 - \omega\omega_1^0/3}$$

$$B_1^0 = \frac{-kB_0^0}{1 - \omega\omega_1^0/3} \quad (5.26)$$

las constantes restantes se determinan mediante el uso de las condiciones de frontera en la sección V.5 y los coeficientes de la serie de Legendre se calculan como se indica al final de esta misma sección.

V.4.2. Caso  $m=1$ .

Para la componente de orden 1 del campo de radiación se emplea la aproximación  $P_L$  [Lenoble (1977) Cap3] que consiste en expresar el campo de radiación como:

$$I^m(\tau, \mu) = \sum_{l=m}^L (2l+1) P_l^m(\mu) i_l^m(\tau) \quad (5.27)$$

con  $L=2j-1+m > N$  para  $j$  entero y  $N$  la misma de (1.17). Para  $m=1$  se tiene (tomando sólo los dos primeros términos):

$$I^1(\tau, \mu) = 3P_1^1(\mu) i_1^1(\tau) + 5P_2^1(\mu) i_2^1(\tau) \quad (5.28)$$

sustituyendo (5.28) en (1.19) con  $m=1$  y desacoplando se obtienen (ver apéndice B§5):

$$\frac{d^2}{dt^2} i_1^1 = p^2 i_1^1 - c e^{-\tau/\mu_0} \quad (5.29)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} i_2^1 = p^2 i_2^1 - \xi e^{-\tau/\mu_0} \quad (5.30)$$

cuyas soluciones son:

$$i_1^1(\tau) = A_1^1 e^{p\tau} + B_1^1 e^{-p\tau} + C_1^1 e^{-\tau/\mu_0} \quad (5.31)$$

$$i_2^1(\tau) = A_2^1 e^{p\tau} + B_2^1 e^{-p\tau} + C_2^1 e^{-\tau/\mu_0} \quad (5.32)$$

con:

$$p^2 = (5-3\omega\omega_2^1)(1-\omega\omega_1^1/3)$$

$$c = [(5-3\omega\omega_2^1)\omega\omega_1^1/3 P_1^1(-\mu_0) - \omega\omega_2^1 P_2^1(-\mu_0)/\mu_0] \frac{F_0}{4}$$

$$\xi = [(1-\omega\omega_1^1/3)\omega\omega_2^1 P_2^1(-\mu_0) - \omega\omega_1^1/3 P_1^1(-\mu_0)/\mu_0] \frac{F_0}{4}$$

$$C_1^1 = -\frac{c}{\frac{1}{\mu_0^2} - p^2}$$

$$C_2^1 = -\frac{\xi}{\frac{1}{\mu_0^2} - p^2}$$

$$A_2^1 = \frac{pA_1^1}{5-3\omega\omega_2^1}$$

$$B_2^1 = \frac{-pB_1^1}{5-3\omega\omega_2^1} \quad (5.33)$$

las constantes restantes se calculan a partir de las condiciones de frontera.

Los coeficientes del desarrollo en serie de Legendre de la función fase, 4 solamente, se calculan por medio de (1.16) usando

(5.5); de este modo se tiene que (ver apéndice B53):

$$\begin{aligned} \omega\omega_0^0 &= \omega_0 = f(n) (\tau^0 + t^0) (1-a^3) \\ \omega\omega_1^0 &= \omega\omega_1^1 = \omega_1 = f(n) (\tau^0 - t^0) 2ab^2 \\ \omega\omega_2^1 &= \frac{\omega_2}{3} = f(n) (\tau^0 + t^0) \frac{5}{24} \frac{-2a^4 - 5a^3 + 6a^2 + 4a - 13}{1+a} \end{aligned} \quad (5.34)$$

#### V.5. Condiciones de frontera.

Se imponen dos condiciones de frontera sobre el campo de radiación: en la frontera superior del dosel (tope) y en la frontera inferior (fondo); en el tope del dosel se exigirá que el campo de radiación sea un campo isotrópico correspondiente a la radiación difusa (*skylight*) e incidente en la dirección hacia abajo:

$$I(0, \mu, \phi) = I_0 \quad \text{si } -1 \leq \mu \leq 0 \quad (5.35)$$

y en el fondo el campo de radiación estará formado por tres componentes: la radiación difusa transmitida a través del dosel ( $I_d$ ), la radiación directa que no interaccionó con el dosel ( $I_0$ ) y la difusa (*skylight*) que tampoco interaccionó con el dosel ( $I'$ ), todas estas componentes inciden sobre el suelo y son reflejadas hacia arriba nuevamente por lo que:

$$I(\tau_1, \mu, \phi) = A_7 (I_d + I_0 + I') \quad \text{si } 0 \leq \mu \leq 1 \quad (5.36)$$

donde  $A_7$  es la reflectividad del suelo supuesto lambertiano (hipótesis  $v$ ) y  $\tau_1$  es el espesor óptico total del dosel.

Las condiciones de frontera se aplican a los flujos radiativos de la siguiente manera [Liou (1980) Cap6]:

$$F^{\leftarrow}(\tau=0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{-1} I(0, \mu, \phi) \mu \, d\mu \, d\phi \quad \mu \leq 0 \quad (5.37)$$

$$F^{\rightarrow}(\tau=\tau_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I(\tau_1, \mu, \phi) \mu \, d\mu \, d\phi \quad 0 \leq \mu \quad (5.38)$$

Para la intensidad  $I(\tau, \mu, \phi)$  expresada en los dos primeros términos de su desarrollo en serie de Fourier coseno:

$$I(\tau, \mu, \phi) = I^0(\tau, \mu) + I^1(\tau, \mu) \cos(\phi - \phi_0) \quad (5.39)$$

se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\phi_0$  (posición en

el azimut de la fuente) es 0 y con  $\psi = \phi - \phi_0$ : se tiene que:

$$\cos(\phi - \phi_0) = \cos(\psi + \phi_1) \quad -\pi \leq \psi \leq \pi \quad (5.40)$$

Para poder hallar el valor de las constantes que restan de la sección anterior se procede como sigue:

Caso  $m=0$ . Sustituyendo (5.40) en (5.39) y el resultado en (5.37) y por otro lado empleando (5.35) en (5.37) se obtiene, después de usar (5.21) (ver apéndice B§6):

$$i_0^0(0) - \frac{2}{3} i_1^0(0) = I_s \quad (5.41)$$

Por otro lado se tiene que el flujo difuso transmitido por el dosel hasta el fondo es:

$$F_d = F_0(\tau = \tau_1) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{-1} I(\tau_1, \mu, \psi) \mu \, d\mu \, d\psi \\ = \pi \left[ i_0^0(\tau_1) - \frac{2}{3} i_1^0(\tau_1) \right] \quad (5.42)$$

además, la componente del flujo directo que llega al suelo sin interaccionar con el dosel es  $\pi F_0 e^{-\tau_1/\mu_0}$  en la dirección correspondiente a  $\mu_0$  (ver secc. I.4), por lo que, el flujo incidente sobre el suelo horizontal es:

$$F_0 = \mu_0 \pi F_0 e^{-\tau_1/\mu_0} \quad (5.43)$$

y finalmente, el flujo de la radiación difusa (*skylight*) que no interaccionó con el dosel es:

$$F_s = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 I_s e^{-\tau_1/\mu_0} \mu \, d\mu \, d\psi = \pi I_s \, 2E_3(\tau_1) \quad (5.44)$$

donde  $E_3(\tau_1)$  representa la integral exponencial de orden 3, así que, combinando (5.36), (5.38) y (5.42)-(5.44) y, alternativamente, sustituyendo (5.39) en (5.38), usando (5.21), se obtiene que (ver apéndice B§6):

$$i_0^0(\tau_1) + \frac{2}{3} i_1^0(\tau_1) = A_7 [i_0^0(\tau_1) - \frac{2}{3} i_1^0(\tau_1) + \mu_0 F_0 e^{-\tau_1/\mu_0} + I_s \, 2E_3(\tau_1)] \quad (5.45)$$

combinando ahora (5.41) y (5.45) y usando (5.24)-(5.26) se obtiene un sistema de ecuaciones para  $A_0^0$  y  $B_0^0$  cuya solución lleva a que (ver apéndice B§7):

$$\begin{aligned}
A_0^o &= \frac{1}{\Delta_0} \{ A [1-A_7 - (1+A_9) a_0] e^{-k\tau_1} \\
&\quad - (1+a_0) [ B - (1-A_9) C_0^o - \frac{2}{3} (1+A_9) C_1^o ] e^{-\tau_1/\mu_0} \} \\
B_0^o &= \frac{1}{\Delta_0} \{ (1-a_0) [ B - (1-A_9) C_0^o - \frac{2}{3} (1+A_9) C_1^o ] e^{-\tau_1/\mu_0} \\
&\quad - A [1-A_9 + (1+A_9) a_0] e^{k\tau_1} \} \quad (5.46)
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= (1-a_0) [1-A_7 - (1+A_9) a_0] e^{-k\tau_1} - (1+a_0) [1-A_9 + (1+A_9) a_0] e^{k\tau_1} \\
A &= I_s - (C_0^o - \frac{2}{3} C_1^o) \\
B &= A_9(\mu_0 F_0 + I_s \frac{2E_2(\tau_1)}{e^{-\tau_1/\mu_0}}) \\
a_0 &= \frac{2}{3} \frac{k}{1-\omega\omega_1^0/3} \quad (5.47)
\end{aligned}$$

Caso  $m=1$ . Para trabajar este caso se aplica el operador:

$$G^*( ) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} [ ] \mu \cos(\psi + \phi_1) d\psi d\mu$$

alternativamente a (5.35) y (5.39), obteniéndose, después de usar (5.28) (ver apéndice B§8):

$$i_1^1(0) - \frac{15}{16} \pi i_2^1(0) = 0 \quad (5.48)$$

Similarmente, aplicando el operador  $G^*( )$  a (5.36) y aplicando a (5.39) el operador:

$$G^*( ) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} [ ] \mu \cos(\psi + \phi_1) d\psi d\mu$$

se obtiene (ver apéndice B§8):

$$i_1^1(\tau_1) + \frac{15}{16} \pi i_2^1(\tau_1) = A_9 [i_1^1(\tau_1) - \frac{15}{16} \pi i_2^1(\tau_1)] \quad (5.49)$$

combinando (5.48) y (5.49) con (5.31)-(5.33) se obtiene un sistema de ecuaciones en  $A_1^1$  y  $B_1^1$  cuya solución es (ver apéndice B§9):



$$A_1^1 = \frac{1}{\Delta_1} \left( C [1-A_0 - (1+A_0) a_1] e^{-p\tau_1} + (1+a_1) D e^{-\tau_1/\mu_0} \right)$$

$$B_1^1 = \frac{1}{\Delta_1} \left( (a_1-1) D e^{-\tau_1/\mu_0} - C [1-A_0 + (1+A_0) a_1] e^{p\tau_1} \right) \quad (5.50)$$

con:

$$\Delta_1 = (1-a_1) [1-A_0 - (1+A_0) a_1] e^{-p\tau_1} - (1+a_1) [1-A_0 + (1+A_0) a_1] e^{p\tau_1}$$

$$C = -C_1^1 + \frac{15}{16} \pi C_2^1$$

$$D = (1-A_0) C_1^1 + (1+A_0) \frac{15}{16} \pi C_2^1$$

$$a_1 = \frac{15}{16} \pi \frac{p}{5-3\omega\omega_2^1} \quad (5.51)$$

con todo lo tratado en esta sección queda determinado el campo de radiación, lo que sigue es mostrar como se introducen distintas funciones de distribución de la orientación de las hojas.

#### V.6. Orientación de las hojas.

La inclusión en el modelo de una función de la orientación de las hojas se lleva a cabo a través de los coeficientes del desarrollo en serie de Legendre de la función fase, esto es, las  $\omega$ 's. El mecanismo es el siguiente: se propone una  $f(n)$ , se le normaliza restringiendo su dominio al hemisferio superior (pues las hojas no se orientan hacia abajo) y se promedian sobre ella los valores de las  $\omega$ 's.

Para fines de aplicación se seleccionan de la literatura disponible 4 funciones de orientación que tienen la particularidad de ser isotrópicas en el azimut. Las constantes de normalización y los valores correspondientes de las  $\omega$ 's se citan por separado a continuación y los detalles del cálculo se proporcionan en el apéndice B§10:

#### 1). Función de distribución aleatoria [Verstraete (1987)]:

$$f(\mu_1, \phi_1) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{con } \mu_1 = a = \cos\theta_1.$$

$$\text{Normalización: } C = 1$$

$$\langle \omega_0 \rangle = \frac{3}{4} (\gamma^0 + t^0)$$

$$\langle \omega_1 \rangle = \frac{1}{2} (\gamma^0 - t^0)$$

$$\left\langle \frac{\omega_2}{3} \right\rangle = -(\gamma^0 + t^0) \frac{5}{12} (1 + 4 \ln 2)$$

2). Función de distribución semiuniforme [Verstraete (1987)]:

$$f(\mu_1, \phi_1) = \frac{1}{2\pi} \delta(\mu_1 - \mu_1^0)$$

con  $\delta$ =delta de Dirac centrada en  $\mu_1 = \mu_1^0$ .

Normalización:  $C = 1$

$$\langle \omega_0 \rangle = (\gamma^0 + t^0) (1 - \mu_1^0)$$

$$\langle \omega_1 \rangle = (\gamma^0 - t^0) 2\mu_1^0 (1 - \mu_1^0)$$

$$\left\langle \frac{\omega_2}{3} \right\rangle = (\gamma^0 + t^0) \frac{5}{24} \frac{g(\mu_1^0)}{1 + \mu_1^0}$$

donde  $g(\mu) = -2\mu^4 - 5\mu^3 + 6\mu^2 + 4\mu - 13$ .

3). Función de distribución coseno1 [Goel y Strebel (1983)]:

$$f(\theta_1, \phi_1) = 1 + \cos(\theta_1 - \theta^0)$$

siendo  $\theta^0$  la moda de la distribución.

Normalización:  $C = 1 + \frac{1}{2} \cos \theta^0 + \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \theta^0$

$$\langle \omega_0 \rangle = \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \left[ \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \cos \theta^0 + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{15} \right) \operatorname{sen} \theta^0 \right]$$

$$\langle \omega_1 \rangle = \frac{\gamma^0 - t^0}{C} 2 \left[ \frac{1}{4} + \frac{2}{15} \cos \theta^0 + \frac{1}{5} \operatorname{sen} \theta^0 \right]$$

$$\left\langle \frac{\omega_2}{3} \right\rangle = \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \left( \frac{-5}{24} \right) \left[ 2 (1 + 4 \ln 2) + \left( \frac{173}{20} - 8 \ln 2 \right) \cos \theta^0 - \left( \frac{161}{15} + \frac{41}{16} \pi \right) \operatorname{sen} \theta^0 \right]$$

4). Función de distribución coseno2 [Goel y Strebel (1983)]:

$$f(\theta_1, \phi_1) = 1 + \cos 2(\theta_1 - \theta^0)$$

$\theta^0$  es la moda de la distribución.

Normalización:  $C = 1 - \frac{1}{3} \cos 2\theta^0 + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 2\theta^0$

$$\langle \omega_0 \rangle = \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \left[ \frac{2}{4} - \frac{5}{12} \cos 2\theta^0 + 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\pi}{32} \right) \operatorname{sen} 2\theta^0 \right]$$

$$\langle \omega_1 \rangle = \frac{\gamma^0 - t^0}{C} 2 \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \cos 2\theta^0 + \frac{\pi}{16} \operatorname{sen} 2\theta^0 \right]$$

$$\left\langle \frac{\omega_2}{3} \right\rangle = \frac{1^0 + t^0}{C} \left( \frac{-s}{24} \right) [2 (1 + 4 \ln 2) + (8 \ln 2 - \frac{837}{90}) \cos 2\theta^0 + 2 \left( \frac{151}{15} - \frac{5}{2} \pi \right) \sin 2\theta^0]$$

Concluido lo anterior, se dispone ya de todos los elementos necesarios para probar el modelo, sólo resta establecer la manera en que se emplean las distintas componentes de la intensidad para generar una reflectancia bidireccional, lo cual se muestra en la siguiente sección.

#### V.7. Cálculo de la reflectancia.

Siguiendo un procedimiento similar al empleado en la literatura [ver por ejemplo Shettle y Weinman (1970) y Joseph et. al. (1976)] se calculan:

-Reflectancia hemisférica:

$$R = \frac{F^*(\tau=0)}{F_{TOT}} \quad (5.52)$$

en donde: 
$$F^*(\tau=0) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} I(0, \mu, \psi) \mu \, d\mu \, d\psi \quad (5.53)$$

y el flujo incidente total o global es la suma del flujo solar directo y el flujo difuso skylight en el tope del dosel, es decir:

$$F_{TOT} = \pi \mu_0 F_0 + \pi I_s \quad (5.54)$$

-Transmitancia hemisférica:

$$T = \frac{F_d + F_b + F_s}{F_{TOT}} \quad (5.55)$$

siendo  $F_d$ ,  $F_b$  y  $F_s$  las mismas de la sección V.5.

-Absorción a través del dosel:

$$A = \frac{F_{net}(\tau=0) - F_{net}(\tau=\tau_1)}{F_{TOT}} \quad (5.56)$$

con: 
$$F_{net}(\tau=0) = F_{\leftarrow}(\tau=0) - F_{\rightarrow}(\tau=0)$$

$$F_{net}(\tau=\tau_1) = F_{\leftarrow}(\tau=\tau_1) - F_{\rightarrow}(\tau=\tau_1)$$

que a su vez se calculan por medio de (5.37), (5.38), (5.53) y (5.42).

-Balance de energía:

$$R + (1-A_g) T + A = 1 \quad (5.57)$$

-Función de reflectancia bidireccional:

$$FRBD = \frac{\pi I(O, \mu, \psi)}{F_{TOT}} \quad (5.58)$$

## V.8. Resultados.

Para trabajar el método desarrollado en las secciones precedentes de este capítulo se ha procedido de la siguiente manera:

- Se determinan los datos de entrada que se usarán en los cálculos tomando en consideración la información disponible en la literatura [Goel y Strebel (1983)].
- Se aplica el método a los datos a que se tiene acceso (ver tabla 1.1).
- Se estudian el comportamiento asintótico y el espectral.

### V.8.1. Datos de entrada.

-Características de la fuente de radiación:

Flujo global incidente (difuso+directo). Como consecuencia de que el dato experimental a que se tuvo acceso es la fracción del flujo difuso (*skylight*) al directo (SKYL) se tiene:

$$SKYL = \frac{\pi I_s}{\pi \mu_o F_o} \quad (5.59)$$

de modo que:

$$F_{TOT} = \pi \mu_o F_o + \pi I_s = (1+SKYL) \pi \mu_o F_o$$

$$y \quad I_s = SKYL \mu_o F_o \quad (5.60)$$

se fija entonces  $F_o=1$ , un flujo incidente arbitrario pues las cantidades a calcular aparecen siempre divididas entre el flujo incidente, por lo tanto los parámetros de entrada para el flujo incidente global son:  $F_o(=1)$  y SKYL.

Posición de la fuente. El ángulo azimutal solar puede tomarse con valor 0 (en atención a la hipótesis  $v$ ) sin que se afecten los cálculos (así se trabajó en las secciones precedentes de este capítulo) pero el ángulo zenital solar es muy importante por lo que otro parámetro de entrada es:  $\mu_o$ .

-Características del dosel:

La especie, desde luego, es la principal característica de un dosel, pero para probar el modelo se necesita saber la profundidad óptica, la reflectividad y transmisividad hemisféricas individuales (espectrales) que se usan para el cálculo de las constantes  $\omega$  (ver secc. V.6) y el tipo de distribución de orientación de las hojas que se desee probar, ésta última con sus propios parámetros (zenit y azimut de la moda de la distribución, por ejemplo), por lo tanto las propiedades del dosel que deben conocerse son:  $\tau_1$ ,  $\tau^\circ$ ,  $l^\circ$  y  $f(n)$ .

-Caraterísticas del suelo:

Únicamente la reflectividad hemisférica espectral se emplea como dato de entrada:  $A_g$ .

-Características del observador:

Posición del observador: los ángulos  $\theta$  y  $\psi$ .

En la mayoría de la literatura consultada se trabaja con el índice de área foliar, en lugar de la profundidad óptica, como dato experimental. El índice de área foliar (L) se transforma en la profundidad óptica mediante la relación [Verhoef 1984] (ver apéndice B§11):

$$\tau(L, \theta_p, \theta_0) = \frac{2}{\pi} L \left[ \cos \theta_p \left( x(\theta_p, \theta_0) - \frac{\pi}{2} \right) + \tan \theta_0 \operatorname{sen} \theta_p \operatorname{sen} x(\theta_p, \theta_0) \right] \quad (5.61)$$

donde:

$\theta_0$  = ángulo solar zenital

$\theta_p$  =  $\arccos(\langle \cos \theta_1 \rangle)$ ,

con:

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = \int_0^{\pi/2} \cos \theta_1 \int_0^{2\pi} f(n) \operatorname{sen} \theta_1 \, d\phi_1$$

$$x(\theta_p, \theta_0) = \arccos \left( - \frac{\cos \theta_0 \cos \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \theta_1} \right) \quad (\text{ver ec. 5.15})$$

Una muestra de la variación de  $\tau$  con  $\theta_1$  y con  $\theta_0$  se proporciona en la tabla 1.3 y la correspondiente gráfica IV.

### V.8.2. Aplicación del método.

Los datos experimentales más detallados disponibles en la literatura [Goel y Strebel (1983)] se presentan en las tablas 1.1 junto con las correspondientes reflectancias calculadas a través del método desarrollado en las secciones anteriores. Los datos observados y calculados se presentan las gráficas I.

Todos los datos están divididos en 5 grupos que corresponden a distintos parámetros de entrada:

-Grupo A: Baja elevación solar ( $\theta_0=61-62^\circ$ ), que para efectos de los cálculos se tomó como  $61.5^\circ$ , zenit de observación alto ( $\theta_v=60^\circ$ ) y azimut relativo ( $\psi_v$ ) de observación variable.

-Grupo B: Elevación solar baja ( $\theta_0=60-62^\circ$  tomado como  $61^\circ$ ), zenit de observación bajo ( $\theta_v=7^\circ$ ) y azimut relativo ( $\psi_v$ ) de observación variable.

-Grupo C: Alta elevación solar ( $\theta_0=30-31^\circ$  tomado como  $30.5^\circ$ ),  $\theta_v=7^\circ$  y  $\psi_v$  variable.

-Grupo D:  $\theta_0=30-31^\circ$ ,  $\theta_v=60^\circ$  y  $\psi_v$  variable.

-Grupo E:  $\theta_0=62-63^\circ$ ,  $\theta_v$  variable y  $\psi_v=169^\circ$ .

La tabla 1.1 incluye los datos tomados de otros autores y los resultados obtenidos aplicando el método en cuestión. Las gráficas I.A-I.E corresponden a la tabla 1.1. Además, en la tabla 1.1 los datos citados para las reflectancias calculadas ( $R_C$ ) son los promedios de reflectancia para 4 longitudes de onda (800,900,1000 y 1100 nm), empleando los datos de la tabla 1.5 como datos de entrada. Los errores relativos se calculan todos con respecto a lo datos observados y los errores relativos promedio por grupo son calculados sumando el valor absoluto de los errores relativos y dividiendo entre el número de datos del grupo.

Como se observa en las gráficas I, los valores de la reflectancia que mejor reproducen los datos observados son los correspondientes a la distribución de orientación de las hojas FDL=3, es decir, la distribución  $\cos \theta_0$  y aún en este caso aparecen subestimadas las reflectancias. Por esta razón se calculan otra vez las reflectancias bidireccionales pero dejando libre el valor de  $\omega_0$ , con el fin de poder hacer ajustes. Lo anterior equivale a multiplicar el valor de  $\omega_0$  que normalmente se obtiene en los cálculos, por una constante de ajuste. Los datos obtenidos de

este modo se presentan en la tabla 1.1 como reflectancias ajustadas y, combinados con los otros datos, en las gráficas I las cuales están ordenadas en relación al grupo de estudio (A, B, C, D o E). En la tabla 1.1 se proporcionan también los valores ajustados de  $\omega_0$  correspondientes a cada grupo de estudio.

La tabla 1.2 relaciona la profundidad óptica del dosel con el grupo y con la función de distribución de la orientación de las hojas (FDL) según la ec. (5.61), los valores de  $\omega_0$  citados ahí son los no ajustados, que no dependen del grupo.

La tabla 1.4 contiene las reflectancias hemisféricas calculadas con  $\omega_0$  ajustado y no ajustado.

En las gráficas I se puede observar que las FDL correspondientes a aleatoria, semiuniforme y coseno<sup>2</sup> presentan la misma forma geométrica, particularmente las dos últimas distribuciones, pero la diferencia fundamental entre FDL coseno<sup>1</sup> y las demás es que la gráfica de la primera es cóncava y las demás son convexas.

De todos los grupos de estudio el que posee el mejor error relativo por grupo, para los cálculos con albedos no ajustados, es el grupo A para FDL: aleatoria, semiuniforme y coseno<sup>2</sup>; para FDL coseno<sup>1</sup> el mejor es el grupo B, el error relativo por grupo se encuentra con el grupo C para las distribuciones: aleatoria, semiuniforme y coseno<sup>2</sup>, el peor grupo para FDL coseno<sup>1</sup> es el D. Casi todos los errores relativos encontrados son negativos lo que habla de una subestimación sistemática de las reflectancias observadas.

Para el caso de los albedos de dispersión simple ajustados se encuentra que el mejor error relativo promedio está en el grupo B y el peor en el D.

De la tabla 1.2 se puede observar que, para un índice de área foliar de 2.87, la profundidad óptica más alta que se calculó se encuentra en el grupo E ( $\theta_0$  alto) para el caso en que la distribución es aleatoria, y la más baja para los grupos C y D ( $\theta_0$  bajo) con distribución aleatoria.

### V.8.3. Comportamiento asintótico.

Los datos observados de la tabla 1.1 son empleados para hacer las siguientes verificaciones con la distribución  $f(n)=\text{coseno}1$ : a)  $SKY=0$  y  $Fo=0$ , b)  $SKY=0$  y  $Fo \neq 0$ , c)  $Ag=1$ , d)  $Ag=0$ , e)  $L=0$  y f)  $L=8$ . Los resultados de estas verificaciones se consignan en la tabla 2.1 y las gráficas II.

Se observa que si el flujo incidente es puramente difuso, caso a), el campo dispersado es independiente del azimut para  $\theta_v$  fija (gráficas II.A-II.D) pero es creciente con  $\theta_v$  para una  $\psi_v$  fija (gráfica II.E).

Si el flujo incidente es solamente directo, caso b), las reflectancias calculadas son más bajas que las presentadas en las gráficas I como observadas, pero el contorno de la curva de reflectancia es muy semejante.

Cuando  $Ag=1$ , caso c), las reflectancias se elevan principalmente en el grupo C y no tanto en los grupos A y E.

Cuando el albedo de superficie  $Ag$  es cero, caso d), las reflectancias no varían demasiado comparadas con las obtenidas cuando se usan los valores verdaderos pues un  $L=2.87$ , como el usado, puede ser considerado alto.

Para el caso e) se observa que el campo dispersado es isotrópico y de intensidad semejante al valor del albedo de superficie, como era de esperarse. En el caso f) se tiene que a  $L=8$  se alcanza prácticamente el valor de la reflectancia infinita ( $R_\infty$ ) de la que se habla en la sección IV.1.1, el valor más alto de  $L$  que el sistema VAX J400, usado para los cálculos, aceptó fué  $L=43.318113$ .

Por último, se calcula la reflectancia bidireccional para posiciones fijas de la fuente y del observador en distintas longitudes de onda (500-2000 nm) usando los valores de reflectividad y transmisividad individuales de las hojas de frijol de soya obtenidas en la literatura [Smith (1983)] y empleando la distribución de orientación  $\text{coseno}1$ . Los resultados así obtenidos se muestran en la tabla 2.2 y en la gráfica III, la cual puede ser comparada con la figura IV.1.



## V.9. Conclusiones y comentarios finales.

El método de solución de la ecuación de transferencia radiativa para vegetación mostrado en este trabajo, produce en general reflectancias subestimadas con respecto a las observadas, una razón para que esto ocurra es que los datos observados pueden tener algún tipo de sobre-estimación, como se comenta en el trabajo de Goel y Strebel (1983). Sin embargo no se tuvo acceso a datos observados más confiables que indicaran los ángulos zenital y azimutal de observación y además los valores precisos de la radiación difusa incidente.

La reflectancia de un dosel vegetativo es más baja que la de sus hojas individuales a causa de la arquitectura del dosel y del ángulo de incidencia solar [Oke (1978) p110], lo cual se puede entender observando la variación de una propiedad importante del dosel como es su profundidad óptica en la gráfica IV. La profundidad óptica está relacionada con la cantidad de radiación atrapada dentro del dosel.

Una reflectancia típica para doseles de menos de 1 m de altura es de 0.18-0.25, para el caso de cobertura vegetal total y al mediodía, pues por la mañana y por la tarde las reflectancias son mayores ya que  $\theta_0$  es mayor; es decir, la reflectancia presenta un patrón en forma de "U" a lo largo del día lo cual ha sido explicado en los siguientes términos: para onda corta la composición de la luz es función del camino óptico en la atmósfera y las hojas presentan marcadas variaciones espectrales en su reflectividad y transmisividad individuales. Además, para altitudes solares grandes es mayor la cantidad de radiación atrapada por el dosel y consecuentemente, es menor la radiación reflejada. Es posible, también, que la humedad altere la reflectancia por las mañanas y las tardes y no tanto al mediodía, o bien, que las plantas mismas alteren la orientación de sus hojas para atenuar o aumentar la cantidad de radiación que reciban.

Tomando en cuenta lo anterior, los valores para  $\omega_0$  no ajustado de las reflectancias hemisféricas, caen dentro de lo aceptable como puede verse en la tabla 1.4 mientras que para las correspondientes al caso de  $\omega_0$  ajustado las reflectancias hemisféricas son

considerablemente altas, lo que hace suponer que las reflectancias con albedo no ajustado son las correctas. Sin embargo, la subestimación de las reflectancias bidireccionales que se presenta puede ser causada por la isotropía de la función fase individual de las hojas supuesta en este trabajo, lo que sólo es válido cuando la incidencia es normal [Breece y Holmes (1971)].

Las ventajas del método pueden ser resumidas como sigue:

- Cálculo de reflectancias como función del zenit y azimut de observación.
- Posibilidad de incluir una función fase individual de las hojas acorde a la especie en cuestión.
- Capacidad para estudiar campos anisotrópicos de radiación en vegetación.
- Inclusión de la radiación difusa incidente (*skylight*).
- Inclusión de propiedades espectrales del suelo.
- Cálculo de la profundidad óptica del dosel independientemente del cálculo de la reflectancia.
- Manejo por separado de la función de distribución de orientación de las hojas, lo que permite ensayar con más distribuciones.
- Permite el estudio del comportamiento asintótico.
- No requiere de gran tiempo de cómputo.
- No es una simulación sino que se apoya en bases físicas.
- En general, se puede usar la formulación de la teoría de la transferencia radiativa para calcular las cantidades de interés en otras áreas de aplicación.

Entre las limitaciones más destacadas del método se encuentran:

- No toma en cuenta la existencia de surcos, lo cual es inocuo si el índice de área foliar es suficientemente alto.
- No toma en cuenta la existencia de "hot spot" que es importante para el caso de fotografía área.
- No toma en cuenta la existencia de una capa de cera en la superficie de las hojas que ocasiona que la reflectancia individual sea muy alta para ángulos de incidencia muy oblicuos.
- Por ser esencialmente una aproximación de Eddington refleja sus desventajas ( $\tau$  alta, incidencia no muy oblicua, etc.)
- No funciona para longitudes de onda largas.

- El método no ha sido trabajado en su totalidad, por ejemplo:
- Se puede estudiar el efecto de incluir un término más en las series.
  - Verificar el método con el trabajo de otros autores usando los datos de entrada adecuados.
  - Extender el método para incluir el efecto de la cutícula de la hoja usando para ello una aproximación  $\delta$ .
  - Probar con otras funciones fase individuales para elevar los valores de las reflectancias obtenidos con funciones fase isotrópicas.
  - Extender el método para incluir varias capas multiespecies.

#### V.10. Referencias.

1. Breece, H.T., Holmes, R.A. (1971) *Bidirectional Scattering Characteristics of Healthy Green Soybean and Corn Leaves in Vivo*, Appl. Opt. 10(1), 119-127.
2. Goel, N.S., Strelbel, D.E. (1983) *Inversion of Vegetation Canopy Reflectance Models for Estimating Agronomic Variables. I. Problem Definition and Initial Results Using the Suits' Model*, Rem. Sens. of Envir. 13, 487-507.
3. Joseph, J.H., Wiscombe, W.J., Weinman, J.A. (1976) *The Delta-Eddington Approximate Method for Radiative Flux Transfer*, J. Atmos. Sci. 33, 2452-2459.
4. Lenoble, J. (1977) (Editor) *Standard Procedures to Compute Atmospheric Radiative Transfer in a Scattering Atmosphere*, IAMAP, Boulder, Co.
5. Oke, T.R. (1978) *Boundary Layer Climates*, Methuen & Co. L.T.D. London.
6. Shettle, E.P., Weinman, J.A. (1970) *The Transfer of Solar Irradiances through Inhomogeneous Turbid Atmosphere Evaluated by Eddington's Approximation*, J. Atmos. Sci. 27, 1048-1055.
7. Smith, J. (1983) *Matter-Energy in the Optical Region*, en: *Manual of Remote Sensing (Vol. I, Chapter 3)*, (Colwell, R.N. Editor), American Society of Photogrametry, The Sheridan Press, U.S.A.
8. Verhoef, W. (1984) *Light Scattering by Leaf Layers with Application to Canopy Reflectance Modeling: The SAIL Model*, Rem.

Sens. of Envir. 16(2), 125-141.

9. Verstraete, M.M. (1987) *Radiation Transfer in Plant Canopies: Transmission of Direct Solar Radiation and the Role of Leaf Orientation*, J. Geophys. Res. 93, 9483-9494.

## V.11 Tablas y gráficas.

### SIMBOLOGIA

THO =  $\theta_0$  = áng. zenital de incidencia de la radiación directa (deg)

THV =  $\theta_v$  = áng. zenital de observación (deg).

THL =  $\theta^*$  = áng. zenital promedio de orientación de las hojas (deg).

PSI =  $\psi_v$  = áng. azimutal de observación (deg).

Wo = albedo de dispersión simple.

Fo = flujo directo incidente.

SKYL = fracción del flujo difuso incidente al directo =  $\frac{\pi I_s}{\pi \mu_0 F_0}$

TAU =  $\tau$  = profundidad óptica del medio.

LAI = L = índice de área foliar.

LDO = longitud de onda.

Ag = albedo de superficie (del terreno).

FDL = función de distribución de orientación de las hojas.

FDL 1 = distribución aleatoria.

FDL 2 = distribución semiuniforme.

FDL 3 = distribución coseno1.

FDL 4 = distribución coseno2.

RHI =  $r^0$  = reflectividad individual espectral de las hojas.

THI =  $t^0$  = transmisividad individual espectral de las hojas.

Ro = reflectancia bidireccional observada.

Rc = reflectancia bidireccional calculada.

Rhem = reflectancia hemisférica calculada.

E.R. = error relativo de Rc =  $\frac{Rc-Ro}{Ro}$

E.R.P.G. = error relativo promedio por grupo (tomando los valores absolutos de los E.R. para evitar compensaciones).

TABLAS DE CALCULO DE REFLECTANCIAS

Tabla 1.1: REFLECTANCIAS OBSERVADAS, CALCULADAS Y AJUSTADAS

Espectro: Fra. del de soro      Longitud de onda: banda de 850-1100 nm      Los Rn han sido llevados de Onel y Strebel (1983)

Todas las Rn han sido calculadas promediando sobre 4 longitudes de onda: 850, 900, 1000 y 1100

GRUPO A	SKTL	F01	Rn	Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)	E.R. Re (F01-1)
THW-A1	13	0.4451	0.4585	-0.2028	0.4453	-0.1055	0.2116	-0.4764	0.4411	-0.2819	0.5291	-0.1686	0.5391	-0.1808
THW-A2	27	0.3824	0.5448	-0.0663	0.2206	-0.1110	0.1854	-0.7172	0.5488	-0.0434	0.4730	-0.1973	0.4730	-0.1973
THW-A3	79	0.2568	0.5874	0.0550	0.2554	-0.0024	0.1452	-0.7373	0.2884	0.0271	0.4434	-0.2032	0.4434	-0.2032
	0.2204	102	0.5078	0.5884	0.1291	0.2543	0.0925	-0.1418	0.5897	0.1613	0.4417	-0.1301	0.4417	-0.1301
	0.2319	124	0.2528	0.5421	0.0310	0.2347	-0.0173	0.1898	-0.6790	0.5428	0.0341	0.4773	-0.0918	0.4773
	0.2319	146	0.3438	0.4420	-0.1503	0.4483	-0.1754	0.2103	-0.4129	0.4445	-0.1459	0.3323	-0.0117	0.3323
FRPO	0.2319	169	0.3303	0.3526	-0.1593	0.3549	-0.3550	0.2675	-0.3140	0.3543	-0.3524	0.6193	0.1253	0.6193
					0.1581		0.1519		0.4642		0.1564		0.1300	0.1300
GRUPO B	0.2176	12	0.4740	0.3548	-0.2505	0.3649	-0.2270	0.3272	-0.2916	0.3427	-0.2381	0.4824	0.4824	0.4824
THW-B1-A2	0.2176	12	0.4793	0.3755	-0.2165	0.3859	-0.1949	0.2274	-0.3149	0.3812	-0.2044	0.4710	-0.0172	0.4710
THW-B7	0.2176	58	0.4595	0.3951	-0.1402	0.4024	-0.1239	0.3172	-0.3097	0.4004	-0.1782	0.4590	-0.0511	0.4590
	0.2268	79	0.4998	0.4608	-0.1980	0.4672	-0.1853	0.3111	-0.3775	0.4643	-0.1872	0.4522	-0.0932	0.4522
	0.2176	103	0.4614	0.4079	-0.1723	0.4057	-0.1132	0.3131	-0.3214	0.4003	-0.1155	0.4542	-0.0141	0.4542
	0.2268	124	0.4634	0.3915	-0.1351	0.3992	-0.1385	0.3169	-0.3181	0.3970	-0.1432	0.4590	-0.0117	0.4590
	0.2281	146	0.4891	0.3747	-0.2338	0.3849	-0.2131	0.2242	-0.2348	0.3804	-0.2222	0.4839	-0.0434	0.4839
FRPO	0.2281	139	0.4744	0.3523	-0.2575	0.3457	-0.2291	0.3349	-0.2914	0.3582	-0.2449	0.4817	0.0154	0.4817
					0.1974		0.1777		0.3205		0.1855		0.0248	0.0248
GRUPO C	0.1684	3	0.4722	0.2918	-0.3870	0.3054	-0.3332	0.2097	-0.3884	0.2990	-0.3667	0.4724	0.0004	0.4724
THW-C1	0.1684	40	0.4468	0.3188	-0.2906	0.3248	-0.2482	0.2747	-0.3850	0.3239	-0.2948	0.4549	0.0187	0.4549
THW-C7	0.1702	53	0.4542	0.3235	-0.2909	0.3325	-0.2711	0.2705	-0.4071	0.3205	-0.2753	0.4498	-0.0140	0.4498
	0.1684	95	0.4391	0.3327	-0.2423	0.3404	-0.2247	0.2657	-0.3948	0.3394	-0.2265	0.4438	0.0108	0.4438
	0.1702	98	0.4441	0.3321	-0.2223	0.3398	-0.2348	0.2656	-0.4019	0.3390	-0.2364	0.4438	-0.0007	0.4438
	0.1684	130	0.4445	0.3224	-0.2779	0.3314	-0.2573	0.2716	-0.3918	0.3294	-0.2622	0.4511	0.0103	0.4511
	0.1702	143	0.4240	0.3146	-0.2614	0.3249	-0.2373	0.2784	-0.3320	0.3217	-0.2449	0.4540	0.0704	0.4540
FRPO	0.1702	170	0.4722	0.3938	-0.3040	0.3071	-0.2724	0.2871	-0.3701	0.3710	-0.2870	0.4705	0.1184	0.4705
					0.2877		0.2649		0.3804		0.2718		0.0799	0.0799
GRUPO D	0.1677	3	0.2314	0.2567	-0.5149	0.2650	-0.5013	0.2408	-0.4448	0.2417	-0.5075	0.3557	0.3557	0.3557
THW-D1	0.1677	42	0.2192	0.2926	-0.2819	0.2914	-0.2425	0.1844	-0.4930	0.2997	-0.2329	0.4455	-0.1420	0.4455
	0.1684	52	0.2097	0.4187	-0.1721	0.4037	-0.2016	0.1502	-0.7031	0.4224	-0.1443	0.4246	-0.1603	0.4246
	0.1675	87	0.4789	0.4652	-0.0234	0.4415	-0.0738	0.1238	-0.7415	0.4488	-0.0210	0.3845	-0.1930	0.3845
	0.1674	79	0.4974	0.4617	-0.0288	0.4625	-0.0734	0.1244	-0.7382	0.4473	-0.0211	0.3981	-0.1671	0.3981
	0.1675	132	0.4545	0.4088	-0.1003	0.3953	-0.1302	0.1554	-0.6561	0.4129	-0.0915	0.4252	-0.0441	0.4252
	0.1674	142	0.4311	0.3809	-0.1168	0.3713	-0.1388	0.1714	-0.6073	0.3850	-0.1070	0.4554	0.0547	0.4554
FRPO	0.1674	173	0.4449	0.2771	-0.3883	0.2782	-0.3746	0.2324	-0.4777	0.2750	-0.3793	0.5434	0.2218	0.5434
					0.1992		0.1843		0.2820		0.1907		0.1319	0.1319
GRUPO E	0.2331	0	0.4448	0.3450	-0.2279	0.3603	-0.1936	0.3449	-0.2244	0.3512	-0.2140	0.4993	0.1087	0.4993
THW-E1-A3	0.2281	7	0.4744	0.3570	-0.2425	0.3705	-0.2190	0.3409	-0.2812	0.3630	-0.2348	0.4879	0.0235	0.4879
	0.2294	15	0.4368	0.3470	-0.1598	0.3465	-0.1316	0.3109	-0.4003	0.3473	-0.1464	0.4752	0.0880	0.4752
	0.2294	22	0.4644	0.3779	-0.1976	0.3824	-0.1762	0.3227	-0.3021	0.3785	-0.1851	0.4617	-0.0039	0.4617
	0.2304	30	0.4364	0.3464	-0.1399	0.3481	-0.1202	0.3117	-0.2841	0.3814	-0.1789	0.4443	0.0177	0.4443
	0.2304	45	0.4614	0.3772	-0.1927	0.3772	-0.1828	0.2904	-0.3765	0.3772	-0.1879	0.4080	-0.1141	0.4080
FRPO	0.2319	60	0.5503	0.3744	-0.3957	0.3570	-0.3512	0.2799	-0.5064	0.3543	-0.3489	0.3688	-0.3299	0.3688
					0.2149		0.1864		0.3147		0.2023		0.0992	0.0992

=====  
 Todas las medidas angulares estan dadas en grados =>=

TABLA 1.2: RELACION ENTRE LA PROFUNDIDAD OPTICA DEL DOSEL Y LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE LA ORIENTACION DE LAS HOJAS

\*\*\*\*\*  
 PROFUNDIDAD OPTICA (TAU)  
 \*\*\*\*\*

GRUPO	FOL=1	FOL=2	FOL=3	FOL=4
A	3.059	2.89	2.541	2.574
B	3.002	2.841	2.607	2.547
C	1.437	1.775	2.187	2.297
D	1.437	1.775	2.187	2.297
E	5.178	2.993	2.714	2.637

---

Mo	0.7418	0.7552	0.7434	0.7478
----	--------	--------	--------	--------

\*\*\*\*\*

TABLA 1.3:TAU vs ANGULO ZENITAL SOLAR con distintos inclinaciones promedio THL  
 \*\*\*\*\*  
 PROFUNDIDAD OPTICA (TAU)  
 \*\*\*\*\*

TH0	THL=5	THL=30	THL=45	THL=60	THL=85
5	0.996	0.866	0.707	0.500	0.037
10	0.996	0.866	0.707	0.500	0.126
20	0.996	0.866	0.707	0.500	0.238
30	0.996	0.866	0.707	0.500	0.370
40	0.966	0.866	0.707	0.577	0.535
50	0.966	0.866	0.740	0.736	0.758
60	0.996	0.866	0.914	1.008	1.100
70	0.996	1.055	1.320	1.548	1.743
80	0.996	1.890	2.593	3.143	3.597
85	0.966	3.680	5.165	6.310	7.249

\*\*\*\*\*  
 TH0 y THL de micras en grados decimales (deg)

TABLE 1.4: REFLECTANCIAS HEMISFERICAS  
CALCULADAS CON DISTINTOS W<sub>0</sub> Y FDL

Para W<sub>0</sub> no ajustado los valores de W<sub>0</sub> son citados en la tabla 1.2 y para W<sub>0</sub> ajustado ver tabla 1.1.

*****					
GRUPO A		TH <sub>0</sub> =61-62		THU=60	
PSI	FDL=1	FDL=2	FDL=3	FDL=4	AJUST
33	0.3118	0.3240	0.3130	0.3166	0.7296
57	0.3118	0.3240	0.3130	0.3167	0.7296
79	0.3113	0.3235	0.3125	0.3162	0.7293
102	0.3113	0.3240	0.3130	0.3167	0.7296
124	0.3113	0.3235	0.3125	0.3162	0.7293
146	0.3113	0.3235	0.3125	0.3162	0.7293
169	0.3113	0.3235	0.3125	0.3162	0.7293
GRUPO B		TH <sub>0</sub> =60-62		THU=7	
13	0.3107	0.3228	0.3119	0.3155	0.4298
32	0.3107	0.3228	0.3119	0.3155	0.4298
58	0.3107	0.3228	0.3119	0.3155	0.4298
79	0.3103	0.3224	0.3115	0.3151	0.4294
103	0.3107	0.3228	0.3119	0.3155	0.4298
124	0.3103	0.3224	0.3115	0.3151	0.4294
144	0.3107	0.3224	0.3114	0.3151	0.4294
169	0.3107	0.3224	0.3114	0.3151	0.4294
GRUPO C		TH <sub>0</sub> =30-31		THU=7	
5	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.4102
40	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.4102
53	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.4102
85	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.4102
98	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.4102
130	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.4102
143	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.4102
172	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.4102
GRUPO D		TH <sub>0</sub> =30-31		THU=60	
3	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.6253
42	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.6253
52	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.6254
97	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.6253
97	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.6254
132	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.6253
142	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.6254
173	0.2597	0.2711	0.2621	0.2655	0.6254
GRUPO E		TH <sub>0</sub> =62-63		PSI=16°	
THU					
0	0.3139	0.3241	0.3150	0.3187	0.4340
7	0.3140	0.3243	0.3152	0.3190	0.4342
15	0.3140	0.3243	0.3153	0.3190	0.4342
22	0.3140	0.3242	0.3152	0.3189	0.4342
30	0.3139	0.3242	0.3152	0.3189	0.4341
45	0.3139	0.3242	0.3152	0.3189	0.4341
60	0.3139	0.3241	0.3151	0.3189	0.4341

\*\*\*\*\*  
TH<sub>0</sub>, THU y PSI estan dados en grados sexagesimales (deg).

TABLA 1.9: CARACTERISTICAS DE DOSEL DE  
FRIJOL DE SOYA

\*\*\*\*\*  
 ALTURA: h=101.9 cm  
 INDICE DE AREA FOLIAR: LAI=2.87  
 INCLINACION PROMEDIO: THL=51.8°  
 ALBEDO DE SUPERFICIE (BANDA 800-1100 nm):  
 Ag=0.2095 GRUPOS A,B,E  
 Aq=0.2411 GRUPOS C,D

-----  
 REFLECTIVIDAD Y TRANSMISIVIDAD  
 INDIVIDUALES ESPECTRALES:

LDO (nm)	RHI	THI
800	0.4570	0.4989
900	0.4530	0.5119
1000	0.4660	0.5284
1100	0.4595	0.5216

\*\*\*\*\*





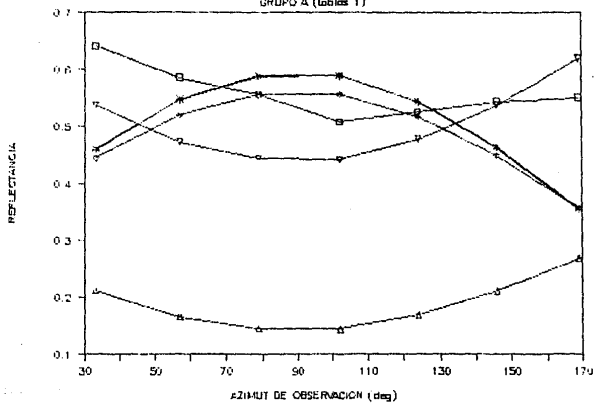
TABLE 3.2 COMFORTAMIENTO ESPECTRAL

RH: F41 has sido tomado de Smith (1967)  
 Rhem: Es un valor calculado para el tipo de  
 suelo de uso particular correspondiente al GRUPO  
 R1 con PSI-58. Auto. SHELTON, LAI-F y F41-73

LLO (mm)	F41	Iel	Rhem	R
500	0.109	0.100	0.0430	0.0521
550	0.111	0.152	0.0414	0.0739
600	0.113	0.207	0.0397	0.0470
650	0.115	0.264	0.0380	0.0923
700	0.118	0.325	0.0364	0.1198
750	0.121	0.387	0.0347	0.1504
800	0.124	0.451	0.0330	0.1767
850	0.127	0.518	0.0313	0.2071
900	0.130	0.587	0.0296	0.2371
950	0.133	0.658	0.0279	0.2687
1000	0.136	0.731	0.0262	0.2974
1050	0.139	0.806	0.0245	0.3274
1100	0.142	0.883	0.0228	0.3565
1150	0.145	0.961	0.0211	0.3857
1200	0.148	1.041	0.0194	0.4150
1250	0.151	1.122	0.0177	0.4444
1300	0.154	1.205	0.0160	0.4735
1350	0.157	1.290	0.0143	0.5027
1400	0.160	1.377	0.0126	0.5316
1450	0.163	1.466	0.0109	0.5604
1500	0.166	1.557	0.0092	0.5891
1550	0.169	1.650	0.0075	0.6177
1600	0.172	1.745	0.0058	0.6461
1650	0.175	1.842	0.0041	0.6744
1700	0.178	1.941	0.0024	0.7024
1750	0.181	2.042	0.0007	0.7301
1800	0.184	2.145	0.0000	0.7574
1850	0.187	2.250	0.0000	0.7844
1900	0.190	2.357	0.0000	0.8110
1950	0.193	2.466	0.0000	0.8373
2000	0.196	2.577	0.0000	0.8632
2050	0.199	2.690	0.0000	0.8887
2100	0.202	2.805	0.0000	0.9138
2150	0.205	2.922	0.0000	0.9384
2200	0.208	3.041	0.0000	0.9625
2250	0.211	3.162	0.0000	0.9861
2300	0.214	3.285	0.0000	1.0092
2350	0.217	3.410	0.0000	1.0318
2400	0.220	3.537	0.0000	1.0539
2450	0.223	3.666	0.0000	1.0755
2500	0.226	3.797	0.0000	1.0966

## REFLECTANCIAS OBSERVADAS Y CALCULADAS

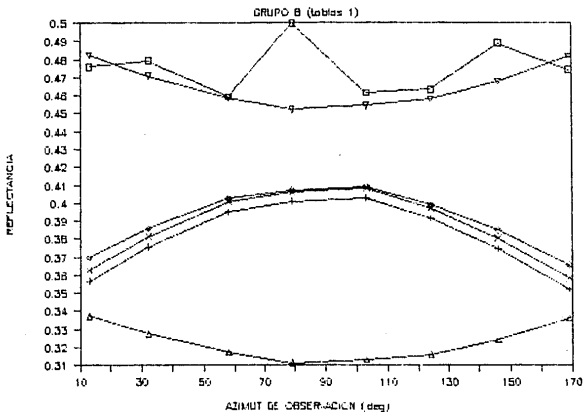
GRUPO A (Tabla 1)



GRAFICA I.A Reflectancias para el GRUPO A:  $THO=61-62^\circ$ ,  $THV=60^\circ$   
 □ OBSERV. + FDL.1 ∇ FDL.2 △ FDL.3 × FDL.4 ∇ AJUST.

(Tabla 1.1)

# REFLECTANCIAS OBSERVADAS Y CALCULADAS

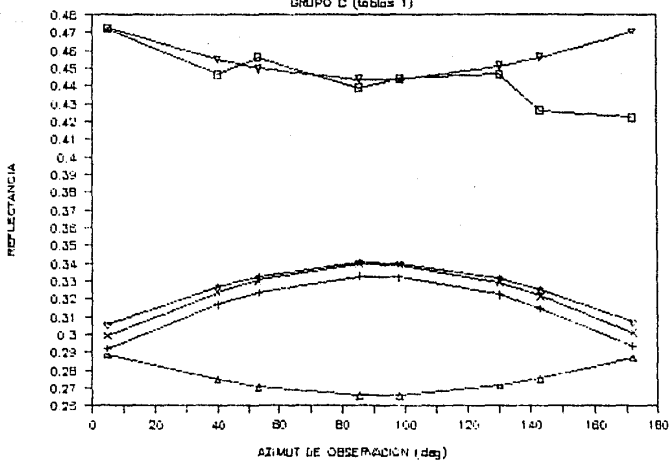


GRAFICA I.B Reflectancias para el GRUPO B: TH0=60-62°, THV=7°  
 □ OBSERV. + FDL.1 v FDL.2 Δ FDL.3 x FDL.4 ∇ AJUST.

(Tabla 1.1)

## REFLECTANCIAS OBSERVADAS Y CALCULADAS

GRUPO C (tablas 1)



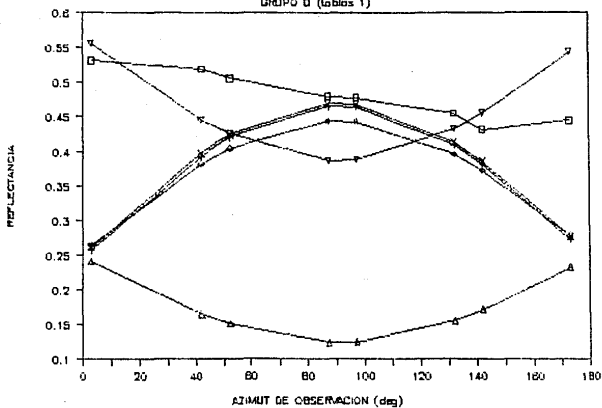
GRAFICA I.C Reflectancias para el GRUPO C: TH0=30-31°, THV=7°

□ OBSERV. + FDL.1 ▽ FDL.2 △ FDL.3 x FDL.4 ▽ AJUST.

(Tabla 1.1)

## REFLECTANCIAS OBSERVADAS Y CALCULADAS

GRUPO D (Tabla 1)

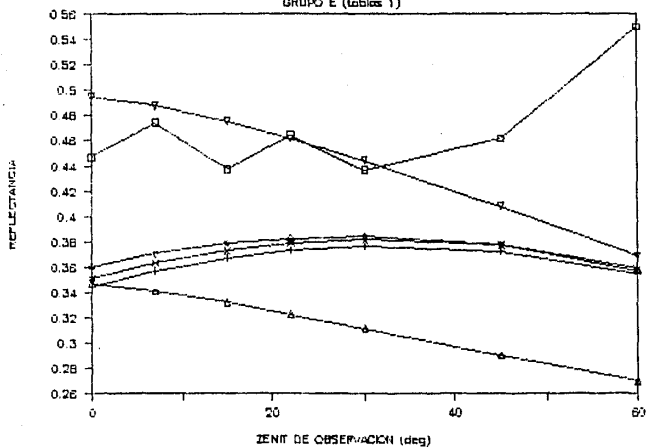
GRAFICA I.D Reflectancias para el GRUPO D:  $THO=30-31^\circ$ ,  $THV=60^\circ$ 

□ OBSERV. + FDL.1 ▽ FDL.2 △ FDL.3 × FDL.4 ▽ AJUST.

(Tabla 1.1)

## REFLECTANCIAS OBSERVADAS Y CALCULADAS

GRUPO E (Tabla 1)



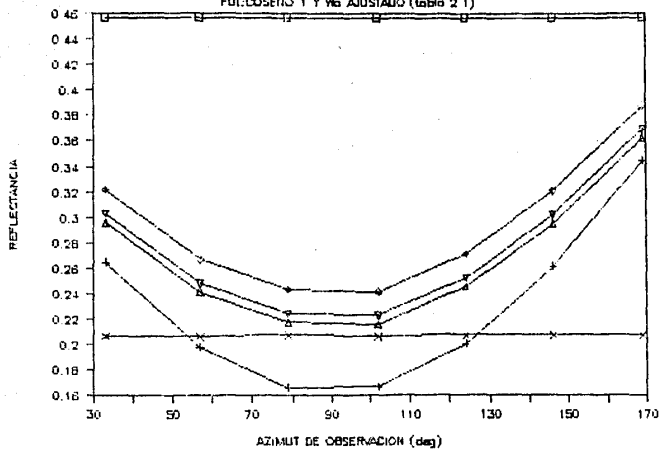
GRAFICA I.E Reflectancias para el GRUPO E: THO=62-63°, PSI=169°

□ OBSERV. + FDL.1 ∇ FDL.2 Δ FDL.3 × FDL.4 ∇ AJUST.

(Tabla 1.1)

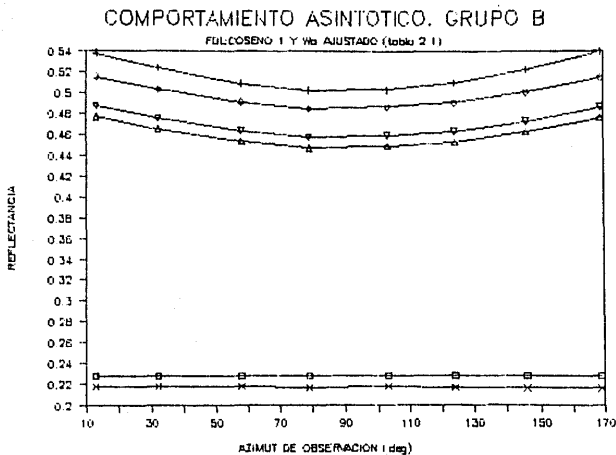
## COMPORTAMIENTO ASINTOTICO. GRUPO A

FDI: COSENO  $\theta$  Y  $W_0$  AJUSTADO (Tabla 2.1)



**GRAFICA II.A** Reflectancias especiales para el GRUPO A:  $TH_0=61-62^\circ$ ,  $THV=6$   
 □ DIFUSA + DIRECTA    ▽ Ag=1    △ Ag=0    x LAI=0    \* LAI=8  
 (Tabla 2.1)

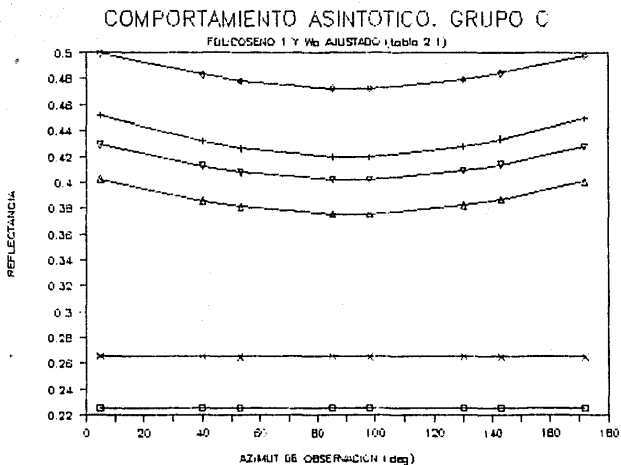




GRAFICA II.B Reflectancias especiales para el GRUPO B:  $TH_0=60-62^\circ$ ,  $THV=7$

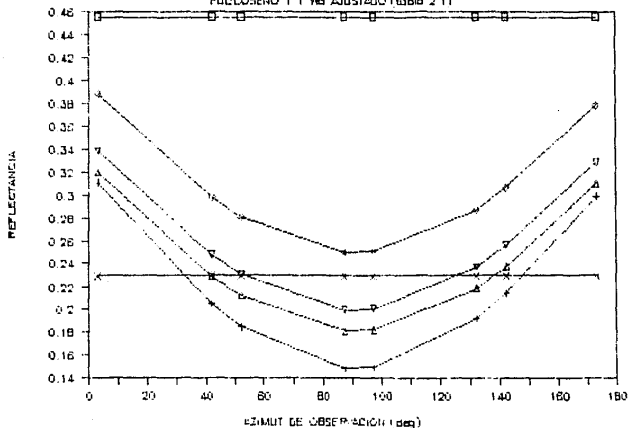
□ DIFUSA + DIRECTA    ▽ Ag=1    △ Ag=0    × LAI=0    ▽ LAI=8

(Tabla 2.1)



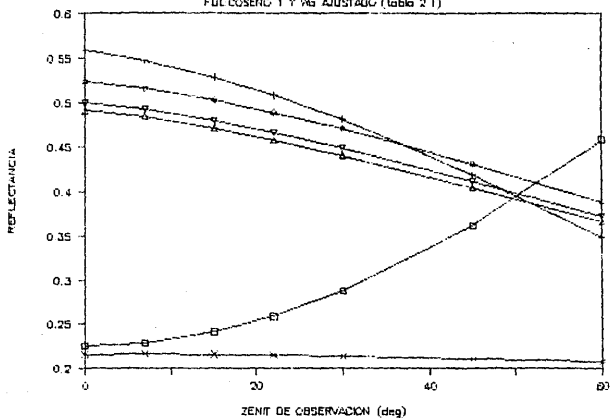
**GRAFICA II.C** Reflectancias especiales para el GRUPO C:  $\theta_{HO}=30-31^\circ$ ,  $\theta_{HV}=7^\circ$   
 o DIFUSA + DIRECTA ∇  $A_g=1$  Δ  $A_g=0$  x  $LAI=0$  ∇  $LAI=8$   
 (Tabla 2.1)

## COMPORTAMIENTO ASINTOTICO. GRUPO D

FOLIOSENO 1 Y  $V_{th}$  AJUSTADO (Tabla 2.1)GRAFICA II.D Reflectancias especiales para el GRUPO D:  $TH_0=30-31^\circ$ ,  $THV=6$ □ DIFUSA + DIRECTA ∇  $A_g=1$  △  $A_g=0$  × LAI=0 √ LAI=8

(Tabla 2.1)

## COMPORTAMIENTO ASINTOTICO. GRUPO E

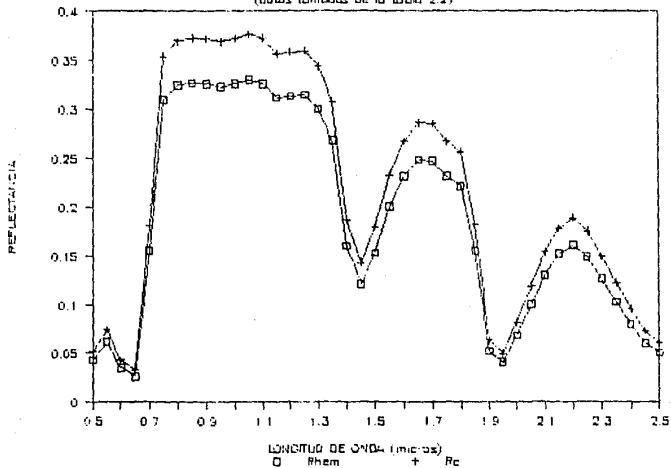
FDL COSENO 1 Y  $\theta_0$  AJUSTADO (Tabla 2.1)

GRAFICA II.E Reflectancias especiales para el GRUPO E:  $\theta_0=62-63^\circ$ ,  $\text{PSI}=1$   
 □ DIFUSA + DIRECTA ▽ Ag=1 △ Ag=0 × LAI=0 ◇ LAI=8

(Tabla 2.1)

# COMPORTAMIENTO ESPECTRAL

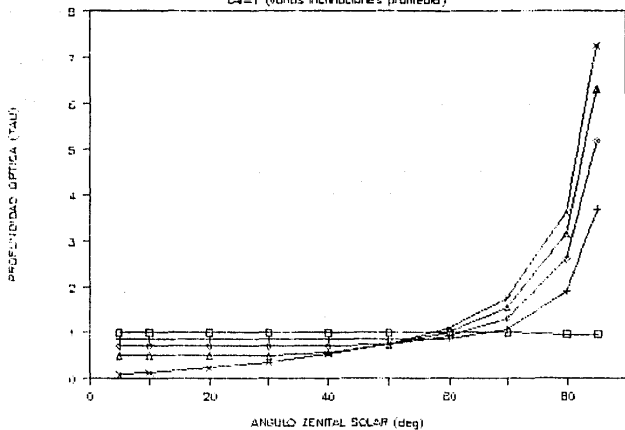
(datos tomados de la tabla 2.2)



GRAFICA III. Variación espectral para frijol de soya con  $PSI=58^\circ$ ,  $A_g=0$ ,  $SKYL=0$ ,  $LAI=8$ ,  $FDL=1$  (tabla 2.2).

## TAU VS ANGULO ZENITAL SOLAR

LW=1 (varias inclinaciones promedio)



GRAFICA IV. Profundidad óptica en función del ángulo cenital solar para varias inclinaciones promedio de las hojas THL:

□ THL=5° + THL=30° ∇ THL=45° Δ THL=60° × THL=85°

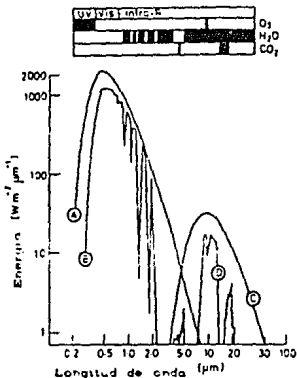
## APÉNDICE A

A§1. Para la temperatura media que la superficie de la Tierra presenta, que es de unos 280K, usando la ley de desplazamiento de Wien para la longitud de onda máxima alcanzada por la radiación emitida por un cuerpo negro de temperatura T:

$$\lambda_m = a/T \quad \text{con } a=0.2897 \text{ cm K}$$

se ve que para longitudes de onda de 500 a 2500 nm las temperaturas de emisión se encuentran entre 5800 y 11600 K, que son temperaturas que no se encuentran en la superficie de la Tierra, por ésta razón las componentes por emisión no contribuyen significativamente al balance de energía en la región reflectiva del espectro electromagnético.

A§2. La figura siguiente muestra la distribución espectral de la energía de radiación en las regiones ultravioleta, visible e infra-roja del espectro electromagnético.



- A. Es el flujo solar en el exterior de la atmósfera de la Tierra.  
 B. Es el flujo solar en la superficie después de ser atenuado por los gases atmosféricos.  
 C. Es la curva típica de emisión en onda larga de la superficie.  
 D. Es la radiación de onda larga que abandona la Tierra después de ser atenuada por los gases atmosféricos.

Las regiones sombreadas en la parte superior de la figura representan las bandas de absorción de los principales gases atmosféricos.

## APÉNDICE B

B§1. Sean:

$$\begin{aligned}\hat{n} &= (\text{sen}\theta \cos\phi, \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \cos\theta) \\ \hat{n}' &= (\text{sen}\theta' \cos\phi', \text{sen}\theta' \text{sen}\phi', \cos\theta') \\ n &= (\text{sen}\theta_1 \cos\phi_1, \text{sen}\theta_1 \text{sen}\phi_1, \cos\theta_1)\end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \hat{n} \cdot \hat{n}' = \text{sen}\theta \text{sen}\theta' \cos\phi \cos\phi' + \text{sen}\theta \text{sen}\theta' \text{sen}\phi \text{sen}\phi' + \cos\theta \cos\theta' \\ &= \text{sen}\theta \text{sen}\theta' (\cos\phi \cos\phi' + \text{sen}\phi \text{sen}\phi') + \cos\theta \cos\theta' \\ &= \text{sen}\theta \text{sen}\theta' (\cos(\phi' - \phi)) + \cos\theta \cos\theta'\end{aligned}$$

Definiendo  $\mu = \cos\theta$ ,  $\mu' = \cos\theta'$ ,  $\text{sen}\theta = \sqrt{1-\mu^2}$  y  $\text{sen}\theta' = \sqrt{1-\mu'^2}$ :

$$\cos\theta = \mu\mu' + (1-\mu^2)^{1/2} (1-\mu'^2)^{1/2} \cos(\phi' - \phi)$$

Similarmente:

$$\cos\theta_{10} = \hat{n}' \cdot n = \mu'\mu_1 + (1-\mu'^2)^{1/2} (1-\mu_1^2)^{1/2} \cos(\phi - \phi_1)$$

$$\cos\theta_{11} = \hat{n}' \cdot n = \mu'\mu_1 + (1-\mu'^2)^{1/2} (1-\mu_1^2)^{1/2} \cos(\phi' - \phi_1).$$

B§2. Intervalos de variación de  $\mu$  y  $\psi$ .

Sean  $a = \cos\theta_1$ ,  $b = \text{sen}\theta_1$  y  $\psi = \phi - \phi_1$ , con:

$$0 \leq a \leq 1$$

$$0 \leq b \leq 1$$

entonces:

$$\text{Caso } 1^\circ: 0 \leq a\mu + b\sqrt{1-\mu^2} \cos\psi \leq 1 \Rightarrow -a\mu \leq b\sqrt{1-\mu^2} \cos\psi \leq 1-a\mu$$

$$\Rightarrow \frac{-a\mu}{b\sqrt{1-\mu^2}} \leq \cos\psi \leq \frac{1-a\mu}{b\sqrt{1-\mu^2}}$$



$$\rightarrow \arccos\left(\frac{1-a\mu}{b\sqrt{1-\mu^2}}\right) \leq |\psi| \leq \arccos\left(\frac{-a\mu}{b\sqrt{1-\mu^2}}\right)$$

el sentido de las desigualdades se cambia porque arccoseno es decreciente en el intervalo de  $\psi$  que es, a lo sumo,  $0-\pi$ . Por otro lado, para que  $\arccos x$  esté definido se necesita que  $|x| \leq 1$ . por lo tanto:

$$1) \left| \frac{1-a\mu}{b\sqrt{1-\mu^2}} \right| \leq 1 \rightarrow (1-a\mu)^2 \leq b^2(1-\mu^2) \rightarrow 1-2a\mu^2+(a^2+b^2)\mu^2 \leq b^2$$

$$\rightarrow (a^2+b^2)-2a\mu+\mu^2 \leq b^2 \rightarrow (a-\mu)^2 \leq 0 \rightarrow \mu=a \rightarrow \arccos\left(\frac{1-a\mu}{b\sqrt{1-\mu^2}}\right)=0$$

$$2) |-a\mu| \leq |b\sqrt{1-\mu^2}| \rightarrow a^2\mu^2+b^2\mu^2 \leq b^2 \rightarrow \mu^2 \leq b^2 \rightarrow -b \leq \mu \leq b$$

si se define:  $x(\mu) = \arccos\left(\frac{-a\mu}{b\sqrt{1-\mu^2}}\right) \rightarrow 0 \leq |\psi| \leq x(\mu)$

Caso  $l^\circ$ : Se procede de modo semejante al anterior y se encuentra que:

$$x(\mu) \leq |\psi| \leq \pi$$

B§3. Normalización de la función fase y cálculo de las constantes  $\omega$  del desarrollo en serie de Legendre.

Normalizar la función fase (ec. 5.17) equivale a encontrar  $\omega_0$ . Del capítulo V sección 3 se tiene:

$$\frac{\pi^2}{\pi} \left( \int_{-b}^b \int_0^{x(\mu)} P(\mu, \psi) \, d\psi \, d\mu + \int_{-b}^b \int_{x(\mu)}^0 P(\mu, \psi) \, d\psi \, d\mu \right) + \frac{\pi^2}{\pi} \left( \int_{-b}^b \int_{x(\mu)}^{\pi} P(\mu, \psi) \, d\psi \, d\mu + \int_{-b}^b \int_{-\pi}^{-x(\mu)} P(\mu, \psi) \, d\psi \, d\mu \right) = 4\pi b \omega_0 \quad (5.16)$$

donde  $P(\mu, \psi) = a\mu + b\sqrt{1-\mu^2} \cos\psi \quad (5.17)$

Haciendo los cálculos tomando en cuenta la simetría de la función fase y que en la región que corresponde a  $l^\circ$   $P(\mu, \psi)$  es

negativa, se tiene:

$$\int_b^b \int_0^{x(\mu)} P(\mu, \psi) d\psi d\mu + \int_b^b \int_{x(\mu)}^0 P(\mu, \psi) d\psi d\mu = 2 \int_b^b \int_0^{x(\mu)} P(\mu, \psi) d\psi d\mu. \quad (\text{B.3.1})$$

para  $\gamma^\circ$  y:

$$\int_b^b \int_{x(\mu)}^\pi P(\mu, \psi) d\psi d\mu + \int_b^b \int_{-\pi}^{-x(\mu)} P(\mu, \psi) d\psi d\mu = 2 \int_b^b \int_{x(\mu)}^\pi |P(\mu, \psi)| d\psi d\mu. \quad (\text{B.3.2})$$

para  $t^\circ$ .

Llevando a cabo las integraciones para  $\gamma^\circ$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_b^b \int_0^{x(\mu)} P(\mu, \psi) d\psi d\mu &= \int_b^b \int_0^{x(\mu)} (a\mu + b\sqrt{1-\mu^2}) \cos\psi d\psi d\mu = \\ a \int_b^b \mu x(\mu) d\mu + b \int_b^b \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen} x(\mu) d\mu &= a A + b B \end{aligned} \quad (\text{B.3.3})$$

integrando A por partes tomando en cuenta la definición de  $x(\mu)$  del apéndice B§2 y usando la fórmula:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 px}{q+r\cos^2 px} dx = \frac{1}{pr} \sqrt{\frac{q+r}{q}} \arctan\left(\sqrt{\frac{q}{q+r}} \tan px\right) - \frac{x}{r} \quad (\text{F.1})$$

se obtiene que:  $A = \frac{\pi}{2} a(1-a)$

Para integrar B, se considera que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha}$$

y que para  $0 \leq \alpha \leq \pi$  se tiene  $\operatorname{sen} \alpha \geq 0$ , encontrándose que:

$$B = \frac{\pi}{2} b$$

por lo tanto:

$$a A + b B = \frac{\pi}{2} \left[ a^2(1-a) + b^2 \right] = \frac{\pi}{2} (1-a^3) \quad (\text{B.3.4})$$

para  $t^\circ$  se obtienen resultados semejantes ya que, en la región de  $t^\circ$ ,  $|P(\mu, \psi)| = -P(\mu, \psi)$ :

$$\begin{aligned} \int_b^b \int_{x(\mu)}^\pi |P(\mu, \psi)| d\psi d\mu &= a \int_b^b \int_{x(\mu)}^\pi (-\mu) d\psi d\mu \\ &+ b \int_b^b \int_{x(\mu)}^\pi (-\sqrt{1-\mu^2}) [\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} x(\mu)] d\psi d\mu \end{aligned}$$

$$= a \int_b^b \mu x(\mu) d\mu + b \int_b^b \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen} x(\mu) d\mu$$

la expresión anterior es la misma que (B.3.3), por lo tanto, considerando (B.3.4):

$$2\pi b \omega_0 = \frac{1}{\pi} (\gamma^0 + \iota^0) \frac{\pi}{2} (1-a^2) \quad (5.18)$$

de donde se obtiene  $\omega_0$ .

Para obtener las otras  $\omega$ 's se recuerda, del capítulo I sección 4:

$$\omega_1 = \frac{2l+1}{4\pi} \int_{\Omega} P(\cos \theta) P_1(\mu) d\Omega \quad (1.16)$$

Entonces, para calcular  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y tomando en cuenta la simetría y el dominio de la función fase, es necesario resolver:

$$\omega_1 = \frac{2(1)+1}{4\pi b} 2 \int_b^b \int_0^{\pi} f(n) P(\mu, \psi) P_1\left(\frac{\mu}{b}\right) d\psi d\mu \quad (B.3.5)$$

$$\omega_2 = \frac{2(2)+1}{4\pi b} 2 \int_b^b \int_0^{\pi} f(n) P(\mu, \psi) P_2\left(\frac{\mu}{b}\right) d\psi d\mu \quad (B.3.6)$$

y, por razones semejantes a las empleadas en el cálculo de  $\omega_0$ :

$$\omega_1 = \frac{3}{4\pi b} 2f(n) \int_b^b \left( \int_0^{\gamma^0} \int_0^{x(\mu)} P(\mu, \psi) d\psi + \iota^0 \int_{x(\mu)}^{\pi} |P(\mu, \psi)| d\psi \right) \frac{\mu}{b} d\mu$$

$$\omega_2 = \frac{5}{4\pi b} 2f(n) \int_b^b \left( \int_0^{\gamma^0} \int_0^{x(\mu)} P(\mu, \psi) d\psi + \iota^0 \int_{x(\mu)}^{\pi} |P(\mu, \psi)| d\psi \right) \frac{1}{2} \left( \frac{3\mu^2}{b^2} - 1 \right) d\mu$$

después de consultar la tabla T, al final del apéndice B§11.

Desglosando:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \frac{3}{4\pi b} 2f(n) \int_b^b & \underbrace{\left( \int_0^{\gamma^0} \int_0^{x(\mu)} (a\mu + b\sqrt{1-\mu^2} \cos\psi) d\psi \right)}_{a_1} \frac{\mu}{b} d\mu \\ & + \iota^0 \int_{x(\mu)}^{\pi} \underbrace{\left( a\mu + b\sqrt{1-\mu^2} \cos\psi \right) d\psi}_{b_1} \frac{\mu}{b} d\mu \end{aligned} \quad (B.3.7)$$

$$\omega_2 = \frac{5}{4\pi B} 2 f(n) \int_b^b \left( \underbrace{\int_0^{x(\mu)} (a\mu + b\sqrt{1-\mu^2}) \cos\psi \, d\psi}_{a_1} + \int_b^{\pi-x(\mu)} \underbrace{|(a\mu + b\sqrt{1-\mu^2}) \cos\psi| \, d\psi}_{b_1} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{3\mu^2}{b^2} - 1 \right) d\mu \quad (\text{B.3.8})$$

Se tiene entonces:

$$a_1 = a\mu \, x(\mu) + b\sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen}x(\mu)$$

$$b_1 = -a\mu(\pi-x(\mu)) - b\sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen}(\pi-x(\mu)) = -a\mu x(-\mu) + b\sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen}x(\mu)$$

ya que  $\pi-x(\mu)=x(\mu)$  como puede verse en la Fig.V.2. Integrando  $a_1$  y  $b_1$ :

$$\begin{aligned} \int_b^b a_1 \frac{\mu}{b} \, d\mu &= \frac{a}{b} \int_b^b \mu^2 x(\mu) \, d\mu + \int_b^b \sqrt{1-\mu^2} \mu \operatorname{sen}x(\mu) \, d\mu \\ &= \frac{a}{b} \frac{\pi}{3} b^3 + 0 = \frac{\pi}{3} a b^2 = - \int_b^b b_1 \frac{\mu}{b} \, d\mu \quad (\text{B.3.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_b^b a_1 \frac{1}{2} \left( \frac{3\mu^2}{b^2} - 1 \right) d\mu &= \frac{3a}{2b^2} \int_b^b \mu^3 x(\mu) \, d\mu + \frac{3}{2b} \int_b^b \sqrt{1-\mu^2} \mu^2 \operatorname{sen}x(\mu) \, d\mu \\ &\quad - \frac{a}{2} \int_b^b \mu x(\mu) \, d\mu - \frac{b}{2} \int_b^b \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen}x(\mu) \, d\mu \\ &= \frac{3a}{2b^2} \left( \frac{\pi}{4} b^4 - \frac{\pi}{8} (a-1)(a^2+a-4) \right) + \frac{3}{2b} \frac{\pi}{8} b^3 - \frac{a}{2} \frac{\pi}{2} a(1-a) - \frac{b}{2} \frac{\pi}{2} b \\ &= \frac{\pi}{16} \left( \frac{-2a^4 - 5a^3 + 6a^2 + 4a - 13}{1+a} \right) = \int_b^b b_1 \frac{1}{2} \left( \frac{3\mu^2}{b^2} - 1 \right) d\mu \quad (\text{B.3.10}) \end{aligned}$$

Después de introducir (B.3.9) y (B.3.10) en (B.3.7) y (B.3.8), se obtiene:

$$\omega_1 = f(n) (\alpha^0 - \alpha^0) 2ab^2$$

$$\frac{\omega_2}{3} = f(n) (\alpha^0 + \alpha^0) \frac{5}{24} \frac{-2a^4 - 5a^3 + 6a^2 + 4a - 13}{1+a}$$

que son las expresiones contenidas en (5.34). El factor  $1/4\pi b$  ha sido omitido pensando en que ya está incluido si  $\alpha^0$  y  $\alpha^0$  son

hemisféricas.

B§4. Componente de orden  $m=0$ .

La aproximación de Eddington para la componente de orden  $m=0$  en la intensidad es:

$$I^0(\tau, \mu) = i_0^0(\tau) + \mu i_1^0(\tau) \quad (5.21)$$

y la ecuación de transferencia a ser resuelta es:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^m(\tau, \mu)}{d\tau} = I^m(\tau, \mu) - (1 + \delta_{0,m}) \frac{\omega}{4} \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\ - \frac{\omega}{4\pi} \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0) \end{aligned} \quad (1.19)$$

en donde se toma  $m=0$ . Además, es necesario tomar en cuenta lo siguiente: según el apéndice B§2 el intervalo de variación de  $\mu$  es  $(-b, b)$ , sin embargo, cambiando la variable  $\mu$  por otra ( $\mu^*$ ) que varíe en el intervalo  $(-1, 1)$  es posible recuperar la forma de la ec (1.19), es decir, si  $\mu = b\mu^*$  y se escribe todo en términos de  $\mu^*$ , o bien, de  $\mu$  para simplificar, la ec. (1.19) no cambia, entonces:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^0(\tau, \mu)}{d\tau} = \mu \left( \frac{d}{d\tau} i_0^0(\tau) + \mu i_1^0(\tau) \right) \\ = i_0^0 + \mu i_1^0 - (1 + \delta_{0,0}) \frac{\omega}{4} \sum_{l=0}^N \omega_l^0 P_l^0(\mu) \int_{-1}^1 P_l^0(\mu') I^0(\tau, \mu') d\mu' \\ - \frac{\omega}{4\pi} \sum_{l=0}^N \omega_l^0 P_l^0(\mu) P_l^0(-\mu_0) \pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0) \end{aligned} \quad (B.4.1)$$

usando las propiedades de la tabla T (ver después del apéndice B§11) y reduciendo:

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{d}{d\tau} i_0^0(\tau) + \mu i_1^0(\tau) \right) = i_0^0 + \mu i_1^0 - \omega (\omega_0^0 i_0^0 + \omega_1^0 i_1^0 P_1^0(\mu) \frac{1}{2}) \\ - \frac{\omega}{4\pi} \sum_{l=0}^N \omega_l^0 P_l^0(\mu) P_l^0(-\mu_0) \pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0) \end{aligned} \quad (B.4.2)$$

tomando  $\int_{-1}^1 \dots d\mu$  en ambos lados de (B.4.2) se obtiene, después de reducir y de usar la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre (ver tabla T al final del apéndice B§11):

$$\frac{d}{d\tau} i_1^0 = 3 i_0^0 (1 - \omega \omega_0^0) - \frac{3}{4} \omega \omega_0^0 F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{B.4.3})$$

y, similarmente, tomando  $\int_1^1 \mu [ ] d\mu$ :

$$\frac{d}{d\tau} i_0^0 = i_1^0 (1 - \omega \omega_1^0/3) + (\omega \omega_1^0/4) F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{B.4.4})$$

calculando la derivada con respecto a  $\tau$  de (B.4.4) y combinando el resultado con (B.4.3) se obtiene:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} i_0^0 = 3 \underbrace{(1 - \omega \omega_0^0) (1 - \omega \omega_1^0/3)}_{k^2} i_0^0 - \frac{3}{4} \underbrace{(\omega \omega_0^0 (1 - \omega \omega_1^0/3) + \omega \omega_1^0/3)}_{\eta} F_0 e^{-\tau/\mu_0}$$

que es la ecuación (5.22).

De modo análogo, derivando (B.4.3) y combinando con (B.4.4):

$$\frac{d^2}{d\tau^2} i_1^0 = 3 \underbrace{(1 - \omega \omega_0^0) (1 - \omega \omega_1^0/3)}_{k^2} i_1^0 + \frac{3}{4} \underbrace{((1 - \omega \omega_0^0) \omega \omega_1^0 \mu_0 + \omega \omega_0^0 / \mu_0)}_{\eta} F_0 e^{-\tau/\mu_0}$$

que es la ecuación (5.23). Las 4 constantes que aparecen en (5.26) se obtienen sustituyendo directamente las soluciones propuestas (5.24) y (5.25) en (5.22) y (5.23) respectivamente y aplicando el criterio de que las exponenciales:  $e^{-\tau/\mu_0}$ ,  $e^{k\tau}$  y  $e^{-k\tau}$  son linealmente independientes.

#### B§5. Componente de orden $m=1$ .

En este caso el procedimiento es completamente análogo al anterior, aunque es necesario emplear aquí los polinomios asociados de Legendre  $P_1^1$  (ver tabla T pág. APEND-19).

Después de sustituir (5.28) en (1.19) y reduciendo se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\tau} (3 P_1^1(\mu) i_1^1 + 5 P_2^1(\mu) i_2^1) &= 3 P_1^1(\mu) i_1^1 + 5 P_2^1(\mu) i_2^1 \\ &- \omega (\omega_1^1 P_1^1(\mu) i_1^1 + 3 \omega_2^1 P_2^1(\mu) i_2^1) \\ &- \frac{\omega}{4\pi} \sum_{j=1}^N \omega_j^1 P_j^1(\mu) P_j^1(-\mu_0) \pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0) \end{aligned} \quad (\text{B.5.1})$$

aplicando el operador  $\int_1^1 P_1^1(\mu) [ ] d\mu$  en ambos lados de (B.5.1) y

usando las fórmulas de recurrencia de la tabla T, se obtiene:

$$\frac{d}{d\tau} i_2^1 = i_1^1 (1 - \omega\omega_1/3) - \omega\omega_1/12 P_1^1(-\mu_0) F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (B.5.2)$$

y, de manera semejante, tomando  $\int_1^1 P_2^1(\mu) [ ] d\mu$  se encuentra que:

$$\frac{d}{d\tau} i_1^1 = i_2^1 (5 - 3\omega\omega_2^1) - \omega\omega_2^1/4 P_2^1(-\mu_0) F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (B.5.3)$$

derivando y combinando como en el apéndice anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} i_1^1 &= (5 - 3\omega\omega_2^1) (1 - \omega\omega_1/3) i_1^1 \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad p^2 \quad \quad \quad \\ &- \underbrace{((5-3\omega\omega_2^1)\omega\omega_1/3 P_1^1(-\mu_0) - \omega\omega_2^1 P_2^1(-\mu_0)/\mu_0) \frac{F_0}{4}}_c e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} i_2^1 &= (5 - 3\omega\omega_2^1) (1 - \omega\omega_1/3) i_2^1 \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad p^2 \quad \quad \quad \\ &- \underbrace{((1-\omega\omega_1/3)\omega\omega_2^1 P_2^1(-\mu_0) - \omega\omega_1/3 P_1^1(-\mu_0)/\mu_0) \frac{F_0}{4}}_\zeta e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned}$$

que son, respectivamente, las ecuaciones (5.29) y (5.30). Las 4 constantes de la ecuación (5.33) son obtenidas de manera muy similar a la empleada para obtener (5.26).

#### B§6. Condiciones de frontera para $m=0$ .

Para la condición de frontera superior ( $\tau=0$ ), las ecuaciones con las que se va operar se listan a continuación:

$$I^0(\tau, \mu) = i_0^0(\tau) + \mu i_1^0(\tau) \quad (5.21)$$

$$I(0, \mu, \phi) = I_s \quad \text{si } -1 \leq \mu \leq 0 \quad (5.35)$$

$$F^*(\tau=0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{-1} I(0, \mu, \phi) \mu d\mu d\phi \quad \mu \leq 0 \quad (5.37)$$

$$I(\tau, \mu, \phi) = I^0(\tau, \mu) + I^1(\tau, \mu) \cos(\phi - \phi_0) \quad (5.39)$$

$$\cos(\phi - \phi_0) = \cos(\psi + \phi_1) \quad -\pi \leq \psi \leq \pi \quad (5.40)$$

combinando (5.37), (5.39) y (5.40):

$$F^*(\tau=0) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{-1} (I^0(0, \mu) + I^1(0, \mu) \cos(\psi + \phi_1)) \mu d\mu d\psi$$

e, introduciendo (5.21):

$$\begin{aligned}
 F_{\kappa}(\tau=0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{-1} (i_0^{\circ}(0) + i_1^{\circ}(0)\mu + I^1(0, \mu) \cos(\psi + \phi_1)) \mu \, d\mu \, d\psi \\
 &= 2\pi i_0^{\circ}(0) \frac{1}{2} + 2\pi i_1^{\circ}(0) \left(-\frac{1}{3}\right) + \int_0^{-1} I^1(0, \mu) (\underbrace{\text{sen}(\pi + \phi_1) - \text{sen}(-\pi + \phi_1)}_0) \mu \, d\mu \\
 &= \pi (i_0^{\circ}(0) - \frac{2}{3} i_1^{\circ}(0)) \quad (B.6.1)
 \end{aligned}$$

Ahora, introduciendo (5.35) en (5.37):

$$F_{\kappa}(\tau=0) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{-1} I_s \mu \, d\mu \, d\psi = 2\pi I_s \frac{1}{2} = \pi I_s \quad (B.6.2)$$

combinando (B.6.1) y (B.6.2) se obtiene (5.41):

$$i_0^{\circ}(0) - \frac{2}{3} i_1^{\circ}(0) = I_s \quad (5.41)$$

Para la condición de frontera inferior ( $\tau=\tau_1$ ), se tiene:

$$I^0(\tau, \mu) = i_0^{\circ}(\tau) + \mu i_1^{\circ}(\tau) \quad (5.21)$$

$$I(\tau_1, \mu, \phi) = A_{\tau}(I_d + I_D + I') \quad \text{si } 0 \leq \mu \leq 1 \quad (5.36)$$

$$F^{\lambda}(\tau=\tau_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I(\tau_1, \mu, \phi) \mu \, d\mu \, d\phi \quad 0 \leq \mu \quad (5.38)$$

$$I(\tau, \mu, \phi) = I^0(\tau, \mu) + I^1(\tau, \mu) \cos(\phi - \phi_0) \quad (5.39)$$

$$F_d = \pi [i_0^{\circ}(\tau_1) - \frac{2}{3} i_1^{\circ}(\tau_1)] \quad (5.42)$$

$$F_D = \mu_0 \pi F_0 e^{-\tau_1/\mu_0} \quad (5.43)$$

$$F_s = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 I_s e^{-\tau_1/\mu_0} \mu \, d\mu \, d\psi = \pi I_s 2E_3(\tau_1) \quad (5.44)$$

combinando (5.21), (5.38) y (5.39):

$$\begin{aligned}
 F^{\lambda}(\tau=\tau_1) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (i_0^{\circ}(\tau_1) + i_1^{\circ}(\tau_1)\mu + I^1(\tau_1, \mu) \cos(\psi + \phi_1)) \mu \, d\mu \, d\psi \\
 &= 2\pi i_0^{\circ}(\tau_1) \frac{1}{2} + 2\pi i_1^{\circ}(\tau_1) \left(\frac{1}{3}\right) + \int_0^1 I^1(\tau_1, \mu) (\underbrace{\text{sen}(\pi + \phi_1) - \text{sen}(-\pi + \phi_1)}_0) \mu \, d\mu \\
 &= \pi (i_0^{\circ}(\tau_1) + \frac{2}{3} i_1^{\circ}(\tau_1)) \quad (B.6.3)
 \end{aligned}$$

por otro lado, el flujo radiativo que incide sobre el suelo consta de 3 partes, como puede verse en (5.36), el flujo difuso transmitido, el flujo directo que no interacciona con el dosel y el



flujo de la radiación skylight que tampoco interacciona con el dosel, entonces, (5.38) toma la forma:

$$F^n(\tau=\tau_1) = A_g (F_d + F_b + F_s) \quad (\text{B.6.4})$$

tomando en cuenta (5.42)-(5.44) y empleando (B.6.3) se obtiene:

$$i_0^\circ(\tau_1) + \frac{2}{3} i_1^\circ(\tau_1) = A_g (i_0^\circ(\tau_1) - \frac{2}{3} i_1^\circ(\tau_1)) + \mu_0 F_0 e^{-\tau_1/\mu_0} + I_s 2E_3(\tau_1) \quad (\text{5.45})$$

### B57. Cálculo de $A_0^\circ$ y $B_0^\circ$ .

Sustituyendo en (5.41) y (5.45) las soluciones propuestas a las ecuaciones (5.22) y (5.23), que son las ecuaciones (5.24) y (5.25), se obtiene después de agrupar términos semejantes y reducir:

$$\left(1 - \frac{2}{3} \frac{k}{1 - \omega \omega_1^\circ/3}\right) A_0^\circ + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{k}{1 - \omega \omega_1^\circ/3}\right) B_0^\circ = I_s - (C_0^\circ - \frac{2}{3} C_1^\circ) \quad (\text{B.7.1})$$

$$\begin{aligned} \left(1 - A_g + \frac{2}{3} \frac{k}{1 - \omega \omega_1^\circ/3} (1 + A_g)\right) e^{k\tau_1} A_0^\circ + \left(1 - A_g - \frac{2}{3} \frac{k}{1 - \omega \omega_1^\circ/3} (1 + A_g)\right) e^{-k\tau_1} B_0^\circ \\ = \left(A_g \mu_0 F_0 - C_0^\circ (1 - A_g) - \frac{2}{3} C_1^\circ (1 + A_g)\right) e^{-\tau_1/\mu_0} \end{aligned} \quad (\text{B.7.2})$$

(B.7.1) y (B.7.2) constituyen el sistema cuya solución es (5.46).

### B58. Condiciones de frontera para $m=1$ .

Se emplean los operadores y las ecuaciones citados a continuación:

$$G^<( ) = \int_0^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} [ ] \mu \cos(\psi + \phi_1) d\psi d\mu \quad (\text{B.8.1})$$

$$G^>( ) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} [ ] \mu \cos(\psi + \phi_1) d\psi d\mu \quad (\text{B.8.2})$$

$$I^1(\tau, \mu) = 3P_1^1(\mu) i_1^1(\tau) + 5P_2^1(\mu) i_2^1(\tau) \quad (\text{5.28})$$

$$I(0, \mu, \phi) = I_s \quad \text{si } -1 \leq \mu \leq 0 \quad (\text{5.35})$$

$$I(\tau_1, \mu, \phi) = A_g (I_d + I_b + I_s') \quad \text{si } 0 \leq \mu \leq 1 \quad (\text{5.36})$$

$$I(\tau, \mu, \phi) = I^0(\tau, \mu) + I^1(\tau, \mu) \cos(\phi - \phi_0) \quad (\text{5.39})$$

Aplicando (B.8.1) a (5.35) se obtiene, para la condición de frontera superior ( $\tau=0$ ):

$$G_{\kappa}(0) = \int_0^{-1} [I_s] \mu \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\psi+\phi_1) d\psi d\mu = 0 \quad (\text{B.8.3})$$

y, con (5.39), cambiando  $\phi$  por  $\psi$ , se obtiene:

$$G_{\kappa}(0) = \int_0^{-1} I^{\circ}(0, \mu) \mu \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\psi+\phi_1) d\psi}_{0} d\mu + \int_0^{-1} I^1(0, \mu) \mu \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\psi+\phi_1) d\psi}_{\pi} d\mu$$

introduciendo (5.28):

$$G_{\kappa}(0) = \pi \left[ 3i_1^1(0) \int_0^{-1} P_1^1(\mu) \mu d\mu + 5i_2^1(0) \int_0^{-1} P_2^1(\mu) \mu d\mu \right] \quad (\text{B.8.4})$$

para calcular las integrales es necesario usar las relaciones de recurrencia de la tabla T (pág. APEND-19), obteniéndose:

$$G_{\kappa}(0) = \pi \left[ i_1^1(0) \int_0^{-1} P_2^1(\mu) d\mu + i_2^1(0) \left( 3 \int_0^{-1} P_1^1(\mu) d\mu + 2 \int_0^{-1} P_3^1(\mu) d\mu \right) \right]$$

usando los resultados de la tabla T:

$$G_{\kappa}(0) = \pi \left( i_1^1(0) - \frac{15}{16} \pi i_2^1(0) \right) \quad (\text{B.8.5})$$

combinando (B.8.3) y (B.8.5) resulta (5.48).

$$i_1^1(0) - \frac{15}{16} \pi i_2^1(0) = 0 \quad (\text{5.48})$$

Para la condición de frontera inferior ( $\tau=\tau_1$ ) se procede de la misma manera que en apéndice B56 se asume que:

$$G^{\circ}(\tau_1) = A_g G_{\kappa}(\tau_1) \quad (\text{B.8.6})$$

como en (B.6.4).

Ahora, (B.8.1) aplicado a (5.36) ocasiona que la radiación directa ( $I_0$ ) resulte ser 0 debido a  $\cos(\psi+\phi_1)$ , lo mismo sucede con  $I_s$ , la difusa *skylight*, por lo tanto, sólo queda, como flujo radiativo hacia abajo:

$$G_{\kappa}(\tau_1) = \pi \left( i_1^1(\tau_1) - \frac{15}{16} \pi i_2^1(\tau_1) \right) \quad (\text{B.8.7})$$

es decir, la misma forma que  $G_{\kappa}(0)$ .

Por otro lado, aplicando (B.8.2) a (5.39):

$$G^n(\tau_1) = \int_0^1 I^0(\tau_1, \mu) \mu \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\psi + \phi_1) d\psi d\mu + \int_0^1 I^1(\tau_1, \mu) \mu \int_{\pi}^{\pi} \cos^2(\psi + \phi_1) d\psi d\mu$$

↑ 0 ↑
↑ π ↑

del mismo modo que en el apéndice B§6:

$$G^n(\tau_1) = \pi (I_1^1(\tau_1) + \frac{15}{16} \pi I_2^1(\tau_1)) \quad (B.8.8)$$

combinando (B.8.6), (B.8.7) y (B.8.8) se llega a:

$$I_1^1(\tau_1) + \frac{15}{16} \pi I_2^1(\tau_1) = Ag \left( I_1^1(\tau_1) - \frac{15}{16} \pi I_2^1(\tau_1) \right) \quad (5.49)$$

### B§9. Cálculo de $A_1^1$ y $B_1^1$ .

Como en el apéndice B§7: sustituyendo las soluciones (5.31) y (5.32) en (5.48) y (5.49), respectivamente, y agrupando se tiene que:

$$\left( 1 - \frac{15}{16} \pi \frac{P}{5-3\omega\omega_1^2} \right) A_1^1 + \left( 1 + \frac{15}{16} \pi \frac{P}{5-3\omega\omega_1^2} \right) B_1^1 = -C_1^1 + \frac{15}{16} \pi C_2^1 \quad (B.9.1)$$

$$\begin{aligned} & \left( 1 - Ag + (1+Ag) \frac{15}{16} \pi \frac{P}{5-3\omega\omega_1^2} \right) e^{p\tau_1} A_1^1 + \left( 1 - Ag - (1+Ag) \frac{15}{16} \pi \frac{P}{5-3\omega\omega_1^2} \right) e^{p\tau_1} B_1^1 \\ & - \left( (1-Ag) C_1^1 + (1+Ag) \frac{15}{16} \pi C_2^1 \right) e^{-\tau/\mu_0} \quad (B.9.2) \end{aligned}$$

entonces, (5.50) es la solución al sistema formado por (B.9.1) (B.9.2).

### B§10. Las distribuciones FDL.

Las 4 distribuciones que se trabajan son:

- FDL:1 Aleatoria:  $f(n) = 1/2\pi$
- FDL:2 Semiuniforme:  $f(n) = \frac{1}{2\pi} \delta(\mu_1 - \mu_1^*)$
- FDL:3 Coseno 1:  $f(n) = 1 + \cos(\theta_1 - \theta^*)$
- FDL:4 Coseno 2:  $f(n) = 1 + \cos 2(\theta_1 - \theta^*)$

Para normalizar todas las distribuciones se emplea el operador:

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIB. UNAM

$$c = \int_0^{\pi/2} f(n) \operatorname{sen}\theta_1 d\theta_1 \quad (\text{B.10.1})$$

las constantes obtenidas para cada distribución ya se citaron en la sección V.6.

Para encontrar los valores de las  $\omega$ 's pesados por las distintas  $f(n)$  se aplica el operador:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} [ \quad ] f(n) d\phi_1 d\mu_1 \quad (\text{B.10.2})$$

a cada una de las constantes de la ec (5.34), usando  $f(n)$  normalizada:

$$\begin{aligned} \omega\omega_0^0 &= \omega_0 = f(n) (\alpha^0 + \ell^0) (1 - a^2) \\ \omega\omega_1^0 &= \omega\omega_1^1 = \omega_1 = f(n) (\alpha^0 - \ell^0) 2ab^2 \\ \omega\omega_2^1 &= \frac{\omega_2}{3} = f(n) (\alpha^0 + \ell^0) \frac{5}{24} \frac{-2a^4 - 5a^3 + 6a^2 + 4a - 13}{1+a} \end{aligned} \quad (\text{5.34})$$

en donde  $a = \mu_1 = \cos\theta_1$  y  $b = \sqrt{1 - a^2} = \operatorname{sen}\theta_1$

-FDL:1 Aleatoria. En este caso las integraciones son inmediatas:

$$\begin{aligned} \langle \omega_0 \rangle &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi} (\alpha^0 + \ell^0) (1 - a^2) da \int_0^{2\pi} d\phi_1 = (\alpha^0 + \ell^0) \frac{3}{4} \\ \langle \omega_1 \rangle &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi} (\alpha^0 - \ell^0) 2a(1 - a^2) da \int_0^{2\pi} d\phi_1 = (\alpha^0 - \ell^0) \frac{1}{2} \\ \langle \frac{\omega_2}{3} \rangle &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi} (\alpha^0 + \ell^0) \frac{5}{24} \frac{-2a^4 - 5a^3 + 6a^2 + 4a - 13}{1+a} da \int_0^{2\pi} d\phi_1 \\ &= (\alpha^0 + \ell^0) \frac{5}{24} \int_0^1 \left( -2a^3 - 3a^2 - 9a + 5 - \frac{8}{a-1} \right) da = -(\alpha^0 + \ell^0) \frac{5}{12} (1 + 4\operatorname{Ln}2). \end{aligned}$$

-FDL:2 Semiuniforme.

En éste caso las integraciones también son inmediatas, basta con recordar la propiedad de la  $\delta$  de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (\text{B.10.3})$$

-FDL:3 Coseno 1. En este caso las integraciones se pueden llevar a cabo cambiando la variable  $\mu_1$  a  $\theta_1$ , entonces, asumiendo independencia azimutal:

$$\langle \omega_0 \rangle = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos(\theta_1 - \theta^*)}{C} \right) (\gamma^0 + t^0) (1 - \cos^3 \theta_1) \sin \theta_1 \, d\theta_1$$

desarrollando se obtiene:

$$= \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \cos^3 \theta_1 + \cos \theta^* \cos \theta_1 + \sin \theta^* \sin \theta_1 + \cos \theta^* \cos^4 \theta_1 + \sin \theta^* \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \right) \sin \theta_1 \, d\theta_1$$

y, recurriendo a alguna tabla de integrales, se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \omega_0 \rangle &= \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \theta^* + \frac{\pi}{4} \sin \theta^* - \frac{1}{5} \cos \theta^* + \frac{2}{15} \sin \theta^* \right) \\ &= \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \cos \theta^* + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{15} \right) \sin \theta^* \right) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \langle \omega_1 \rangle &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos(\theta_1 - \theta^*)}{C} \right) (\gamma^0 - t^0) 2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_1 \, d\theta_1 \\ &= \frac{\gamma^0 - t^0}{C} 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta_1 \sin^3 \theta_1 + \cos \theta^* \sin^3 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + \sin \theta^* \sin^4 \theta_1 \cos \theta_1) \, d\theta_1 \\ &= \frac{\gamma^0 - t^0}{C} 2 \left( \frac{1}{4} + \cos \theta^* \left( \frac{1}{5} (1 - \frac{1}{3}) \right) + \sin \theta^* \left( \frac{1}{5} \right) \right) \end{aligned}$$

reduciendo se obtiene el resultado buscado. Para  $\omega_2$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle \omega_2 \rangle &= \frac{5}{24} \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(\theta_1 - \theta^*)) \left( -2 \cos^3 \theta_1 - 3 \cos^2 \theta_1 + 9 \cos \theta_1 - 5 - \frac{8}{\cos \theta_1 - 1} \right) \sin \theta_1 \, d\theta_1 \end{aligned}$$

manipulando algebraicamente se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \omega_2 \rangle &= \frac{5}{24} \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \int_0^{\pi/2} (-1) \left( 2 \cos^3 \theta_1 + 3 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos \theta_1 + 5 + \frac{8}{\cos \theta_1 + 1} + \cos \theta^* (2 \cos^3 \theta_1 + 3 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos \theta_1 + 5 + \frac{8}{\cos \theta_1 + 1}) \cos \theta_1 \right) \end{aligned}$$

$$+ \operatorname{sen}^{\circ} \left( 2\cos^3\theta_1 + 3\cos^2\theta_1 - 9\cos\theta_1 + 5 + \frac{8}{\cos\theta_1+1} \right) \operatorname{sen}\theta_1 \, d\theta_1$$

con ayuda de una tabla de integrales y realizando operaciones aritméticas se obtiene el resultado buscado:

$$\langle \omega_2 \rangle = \frac{\lambda^{\circ} + t^{\circ}}{C} \left( \frac{-5}{24} \right) \left[ 2 (1 + 4\ln 2) + \left( \frac{173}{20} - 8\ln 2 \right) \cos\theta^{\circ} \right. \\ \left. - \left( \frac{161}{15} + \frac{41}{16} \pi \right) \operatorname{sen}\theta^{\circ} \right]$$

-FDL:4 Coseno 2. Las integraciones aquí no son más difíciles que para distribución anterior:

Como:

$$f(n) = \frac{1 + \cos 2(\theta_1 - \theta^{\circ})}{C} = \frac{1 + (2\cos\theta_1 - 1)\cos 2\theta^{\circ} + 2\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1\operatorname{sen} 2\theta^{\circ}}{C}$$

entonces:

$$\langle \omega_0 \rangle = \frac{\lambda^{\circ} + t^{\circ}}{C} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3\theta_1) (1 + (2\cos\theta_1 - 1)\cos 2\theta^{\circ} \\ + 2\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1\operatorname{sen} 2\theta^{\circ}) \operatorname{sen}\theta_1 \, d\theta_1 \\ = \frac{\lambda^{\circ} + t^{\circ}}{C} \int_0^{\pi/2} \left( (1 + (2\cos\theta_1 - 1)\cos 2\theta^{\circ} + 2\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1\operatorname{sen} 2\theta^{\circ}) \operatorname{sen}\theta_1 \right. \\ \left. - \cos^3\theta_1(1 + (2\cos\theta_1 - 1)\cos 2\theta^{\circ} + 2\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1\operatorname{sen} 2\theta^{\circ}) \operatorname{sen}\theta_1 \right) d\theta_1$$

la primera integral es equivalente a la normalización, que ya fué calculada, y la otra genera solamente integrales trigonométricas, entonces:

$$\langle \omega_0 \rangle = \frac{\lambda^{\circ} + t^{\circ}}{C} \left( 1 + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 2\theta^{\circ} - \frac{1}{3}\cos 2\theta^{\circ} - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cos 2\theta^{\circ} + 2 \frac{\pi}{32} \operatorname{sen} 2\theta^{\circ} \right) \right) \\ = \frac{\lambda^{\circ} + t^{\circ}}{C} \left( \frac{3}{4} - \frac{5}{12} \cos 2\theta^{\circ} + 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\pi}{32} \right) \operatorname{sen} 2\theta^{\circ} \right)$$

llevando a cabo un procedimiento similar se puede ver que:

$$\langle \omega_1 \rangle = \frac{\lambda^{\circ} - t^{\circ}}{C} \int_0^{\pi/2} \left( \cos\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_1 + \cos 2\theta^{\circ} (2\cos^2\theta_1 - 1) \cos\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_1 \right. \\ \left. + 2 \operatorname{sen} 2\theta^{\circ} \cos^2\theta_1 \operatorname{sen}^3\theta_1 \right) \operatorname{sen}\theta_1 \, d\theta_1$$

$$= \frac{\gamma^0 + t^0}{C} 2 \left( \frac{1}{4} + \left( \frac{-1}{12} \right) \cos 2\theta^* + 2 \sin 2\theta^* \left( \frac{\pi}{32} \right) \right)$$

y para  $\omega_2$ :

$$\begin{aligned} \langle \frac{\omega_2}{3} \rangle &= \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \frac{5}{24} \int_0^{\pi/2} \left( 2 \cos^3 \theta_1 + 3 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos \theta_1 + 5 + \frac{8}{\cos \theta_1 + 1} \right. \\ &+ \cos 2\theta^* (2 \cos \theta_1^2 - 1) (2 \cos^3 \theta_1 + 3 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos \theta_1 + 5 + \frac{8}{\cos \theta_1 + 1}) \\ &+ 2 \sin 2\theta^* (\sin \theta_1 \cos \theta_1) (2 \cos^3 \theta_1 + 3 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos \theta_1 \\ &\left. 5 + \frac{8}{\cos \theta_1 + 1} \right) \sin \theta_1 d\theta_1 \end{aligned}$$

tomando en cuenta que la primera integral ya fué calculada en la normalización y resolviendo las otras 2 se llega a que:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\omega_2}{3} \rangle &= \frac{\gamma^0 + t^0}{C} \frac{5}{24} \left( (-1) 2 (1 + 4 \ln 2) + \cos 2\theta^* (-1 \left( \frac{837}{90} + 8 \ln 2 \right)) \right. \\ &\left. + 2 \sin 2\theta^* (-1 \left( \frac{151}{15} - \frac{5}{2} \pi \right)) \right) \end{aligned}$$

rearrreglando términos se encuentra el resultado deseado (ver sección V.6).

B§11. Expresión para la profundidad óptica ( $\tau$ ) en función del índice de área foliar ( $L$ ).

La eficiencia de extinción para flujo directo de una hoja simple es:

$$Q_{\text{ext}}(\text{FO}) = \left| \frac{A(-\hat{\Omega}_0 \cdot \hat{n})}{A \mu_0} \right| = \left( \begin{array}{l} \text{Seccion} \\ \text{transversal de} \\ \text{extincion} \end{array} \right) \quad (\text{B.11.1})$$

donde  $A$  es el área de una hoja simple.

Se define el coeficiente de extinción (flujo directo) para una orientación cenital fija de la hoja ( $\theta_1$ ) como:

$$k(\theta_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} Q_{\text{ext}}(\text{FO}) d\phi_1 \quad (\text{B.11.2})$$

donde  $L$  es el índice de área foliar y  $h$  es la altura del dosel vegetativo. Tomando en cuenta el intervalo de variación para  $\psi$  del apéndice B§2, se puede ver que para el caso de  $(\mu_0, \phi_0)$  fija y  $n$

variable los intervalos de variación son los mismos, por lo que  $\phi_1$  tiene el mismo intervalo que  $\psi$ . De acuerdo con esto y tomando en cuenta la simetría:

$$k(\theta_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{h} \left( 2 \int_0^{x(\mu_1)} Q_{\text{ext}}(F_0) d\phi_1 + 2 \int_{x(\mu_1)}^{\pi} Q_{\text{ext}}(F_0) d\phi_1 \right) \quad (\text{B.11.3})$$

de (B.11.1) y empleando un resultado similar a los mostrados en el apéndice B51, se tiene:

$$Q_{\text{ext}}(F_0) = \left| \frac{\cos\theta_0 \cos\theta_1 + \text{sen}\theta_0 \text{sen}\theta_1 \cos(\phi_1 - \phi_0)}{\cos\theta_0} \right| \\ = |\mu_1 + \tan\theta_0 \sqrt{1-\mu_1^2} \cos\phi_1| \quad (\text{B.11.4})$$

pues se puede suponer que  $\phi_0=0$ .

La ec. (B.11.4) tomará signo (+) si  $0 \leq \phi_1 \leq x(\mu)$  y tomará signo (-) si  $x(\mu) \leq \phi_1 \leq \pi$  debido a las posiciones relativas de  $-\hat{n}_0$  y  $\hat{n}$ . Entonces, de (B.11.3) se obtiene:

$$k(\theta_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{h} \left( 2 \int_0^{x(\mu_1)} (\mu_1 + \tan\theta_0 \sqrt{1-\mu_1^2} \cos\phi_1) d\phi_1 \right. \\ \left. + 2 \int_{x(\mu_1)}^{\pi} -(\mu_1 + \tan\theta_0 \sqrt{1-\mu_1^2} \cos\phi_1) d\phi_1 \right) \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{h} 2 \left( \mu_1 x(\mu_1) + \tan\theta_0 \sqrt{1-\mu_1^2} \text{sen}x(\mu_1) \right. \\ \left. + \mu_1(x(\mu_1) - \pi) + \tan\theta_0 \sqrt{1-\mu_1^2} \text{sen}x(\mu_1) \right)$$

rearrreglando los términos se obtiene:

$$k(\theta_1) = \frac{L}{h} \frac{2}{\pi} \left( \mu_1 \left( x(\mu_1) - \frac{\pi}{2} \right) + \tan\theta_0 \text{sen}\theta_1 \text{sen}x(\mu_1) \right) \quad (\text{B.11.5})$$

para obtener la profundidad óptica ( $\tau$ ) sólo se escribe:

$$\tau = h k(\theta_1) \quad (\text{B.11.6})$$



TABLA T. Funciones de Legendre y propiedades.

Funciones asociadas de Legendre $-1 \leq \mu \leq 1$ .			
$P_0^0(\mu) = 1$	$P_1^0(\mu) = \mu$	$P_2^0(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$	$P_3^0(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$
$P_1^1(\mu) = \sqrt{1-\mu^2}$	$P_2^1(\mu) = 3\mu\sqrt{1-\mu^2}$	$P_3^1(\mu) = \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1)\sqrt{1-\mu^2}$	
$P_2^2(\mu) = 3(1-\mu^2)$	$P_3^2(\mu) = 15\mu(1-\mu^2)$	$P_3^3(\mu) = 15\sqrt{1-\mu^2}^3$	
Propiedades			
Ortogonalidad:	$\int_{-1}^1 P_l^m(\mu) P_k^m(\mu) d\mu = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}$		
Fórmulas de recurrencia:	$(2m+1)\mu P_m(\mu) = m P_{m-1}(\mu) + (m+1) P_{m+1}(\mu)$		
	$(2l+1)\mu P_l^m(\mu) = (l+m)P_{l-1}^m(\mu) + (l-m+1)P_{l+1}^m(\mu)$		
Otras:	$\int_0^{-1} P_1^1(\mu) d\mu = -\frac{\pi}{4} \quad \int_0^{-1} P_2^1(\mu) d\mu = 1 \quad \int_0^{-1} P_3^1(\mu) d\mu = -\frac{3\pi}{32}$		