UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DE LA MEDIDA, AXIOMA DE ELECCION VS AXIOMA DE DETERMINACION

T E S I S
Que para obtener el Título de
M A T E M A T I C O
p r e s e n t a

JUAN JOSE MONTELLANO BALLESTEROS

México, D. F. Junio de 1991

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La intención de este trabajo es comparar algunos resultados que se desprenden de la teoría formal de primer orden ZF (Zermelo - Fraenkel) bajo la suposición del axioma de elección, con otros resultados que se obtienen del suponer el axioma de determinación junto con la misma teoría. Al mismo tiempo, se pretende que esta tesis pueda ser leida por cualquier estudiante de la licenciatura de matemáticas que haya estudiado los tres cursos de teoría de conjuntos y dos de lógica sin la necesidad de tener que recurrir a otro texto, razón por la cual los temas que se necesitan para lograr los resultados a comparar son tratados lo más ampliamente posible. Sin embargo ponemos todas las referencias necesarias para quien quiera profundizar en esos temas.

Como veremos más adelante, estos dos axiomas se niegan mutuamente dentro de ZF , por lo que todo el tratamiento de los temas a partir de los cuales haremos esas comparaciones dentro de ZF se hará libre de cualquier suposición de alguno de estos axiomas. Pondremos especial cuidado con el axioma de elección pues su uso es bastante común al igual que es común el usarlo sin hacerlo explícito.

Así pues, antes de seguir adelante, veamos quien es ZF .

La teoría formal de primer orden ZF se compone de los siguientes axiomas y esquemas: axioma de extensionalidad, axioma del conjunto vacío, axioma del par, axioma de unión, axioma del conjunto potencia, axioma de infinitud, axioma de regularidad, esquema de sustitución y esquema de comprensión.

Ahora veamos la situación del axioma de elección y del axioma de determinación con respecto a la teoría ZF . Gödel probó en 1939 la consistencia relativa del axioma de elección con la teoría ZF , y Cohen en 1963 demostró la consistencia relativa de la negación del axioma de elección con la teoría ZF . Así pues, el axioma de elección es independiente de ZF . Como ya dijimos, el axioma de elección niega al axioma de determinación en ZF , entonces tenemos la consistencia relativa de la negación del axioma de determinación con la teoría ZF . Sin embargo, hasta donde yo tengo entendido, la consistencia relativa del axioma de determinación con ZF es aún un problema abierto.

Ahora revisemos algunas definiciones que usaremos y que usualmente involucran al axioma de elección, en particular la cardinalidad de un conjunto, números cardinales, los alephs, operaciones entre cardinales, etcétera. Así pues, sin axioma de elección tenemos:

Un número cardinal - ordinal es un ordinal inicial, es decir, un ordinal que no es biyectable con alguno más chico. Así, la clase de los cardinales - ordinales está bien ordenada por $\in$ y la clase de los alephs no es más que la clase de los cardinales - ordinales transfinitos, dicho de otra forma, todo aleph es un cardinal - ordinal mayor o igual que ω y todo cardinal - ordinal mayor o igual que ω es un aleph. Con ayuda del axioma de elección, todo conjunto es bien ordenable y podríamos definir, usando el teorema de enumeración, el cardinal de un conjunto como el único cardinal - ordinal biyectable con él. Sin el axioma de elección tenemos que dar un pequeño giro a esta definición. Jech sugiere en su libro "The axiom of choice" la siguiente: Sea A un conjunto

$$|A| = \begin{cases} \bigcap \{\alpha \ / \ \alpha \sim A \ \wedge \ \alpha \text{ cardinal - ordinal}\} & \text{si } A \text{ es bien ordenado;} \\ \{X \ / \ X \sim A \ \wedge \ \forall\, Y \left(Y \sim A \longrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)\right)\} & \text{si no lo es} \end{cases}$$

donde $\rho(X)$ denota el rango del conjunto X en la jerarquía acumulativa, es decir, en $\bigcup_{\alpha \in OR} R_\alpha$.

Observemos que con esta definición todo conjunto tiene un cardinal, a saber $|A|$. En caso de que A fuera bien ordenable, $|A|$ es un cardinal - ordinal con $|A| \sim A$ y $||A|| = |A|$, en cambio si A no es bien ordenable no necesariamente sucede que $|A| \sim A$ ni $||A|| = |A|$.

Podemos definir ahora un número cardinal como sigue, X es un número cardinal si y sólo si hay un conjunto Y tal que $|Y| = X$.

Así, todo cardinal - ordinal es un cardinal y bajo el axioma de elección son los únicos.

Podemos establecer un orden entre números cardinales, pero un orden parcial. Sean κ, λ cardinales y A , B conjuntos tales que $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$, definimos

$$\kappa < \lambda \quad \text{si y sólo si} \quad A \prec B$$

Bajo el axioma de elección este orden no es más que $\in$ y por tanto es un buen orden, en cambio bajo la negación del axioma de elección el orden $<$ ni siquiera es total.

Las operaciones básicas entre cardinales está dada en forma natural. Sean κ y λ cardinales y A , B conjuntos tales que $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$, definimos:

$$\kappa + \lambda = |(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})|$$

$$\kappa \lambda = |A \times B|$$

$$\kappa^{\lambda} = |{}^{B}A|$$

Con esto tenemos, sin necesidad del axioma de elección,

$$2^{\aleph_0} = |{}^{\omega}2| = |{}^{\omega}\omega| = |\mathbb{R}| = |P(\omega)|^{*}$$

Recalcamos que sin axioma de elección, no sabemos si $2^{\aleph_0}$ es un cardinal - ordinal, es decir, si $2^{\aleph_0}$ es un aleph o no, o si $2^{\aleph_0}$ es bien ordenable; incluso podría suceder que los reales no fueran bien ordenables y $2^{\aleph_0}$ sí serlo.

En lo sucesivo, cuando hablemos de un cardinal, nos estaremos refiriendo a un cardinal - ordinal a menos que aclaremos lo contrario.

* Para algunas de estas biyecciones vea el capítulo 1.

Este trabajo se compone de cinco capítulos y dos apéndices. En el primer capítulo vemos qué dice el axioma de determinación, en qué términos está definido y algunas de sus propiedades, al mismo tiempo que planteamos su situación con respecto al axioma de elección dentro de ZF. En el capítulo II revisamos los temas de medida de Lebesgue y cardinales medibles a partir de los cuales se compararán los dos axiomas. En los capítulos III, IV y V están las comparaciones de los resultados que encontramos al suponer por un lado el axioma de elección y por otro el axioma de determinación. En los apéndices se habla de los temas de los espacios de Baire y de Cantor y del universo definible a partir de un conjunto dado, temas que son usados como apoyo para llegar a los resultados de esta tesis. Tanto el capítulo II como los apéndices pueden ser omitidos si se tiene conocimiento de estos temas. Por último tenemos la notación que se usa en este trabajo y las referencias de textos que hablan de los temas aquí tratados. Con respecto a la notación podemos decir que es notación estandar para la teoría de los conjuntos, sin embargo, ante cualquier duda, podemos dirigirnos a la parte de notación.

CAPÍTULO I

El Axioma de Determinación

Para hablar sobre el axioma de determinación primero diremos lo que se entiende por un juego infinito de información perfecta. De aquí en adelante usaremos conceptos vistos en el apéndice I.

Dado $A \subseteq \mathcal{N}$ definimos el *juego* G_A. Este *juego* será jugado por dos jugadores y las reglas del mismo, que nos dirán cómo jugar una *partida* de ese *juego* y cuándo alguien gana esa *partida*, son las siguientes:

En una *partida* del *juego* G_A los jugadores, a saber I y II, harán lo siguiente: primero I escoge algún número natural a_0 y lo *tira*, entonces II escoge algún número natural b_0 y lo *tira*, de nuevo I escoge algún natural a_1 y lo *tira*, II vuelve a escoger algún natural b_1 y lo *tira*, y así sucesivamente. La *partida* termina tras ω *tiradas*.

Como vemos, una *partida* es una sucesión $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$ de naturales de tamaño ω, formada por las *tiradas* de ambos jugadores en esa *partida*, donde a_n es la $(n+1)$ - ésima *tirada* del jugador I y b_n es la $(n+1)$ - ésima *tirada* del jugador II.

Si la *partida*, la cual es un elemento de $\mathcal{N}$, está en A entonces el jugador I gana esa *partida*, si la *partida* está en $\mathcal{N} \setminus A$ entonces la gana II.

Ahora bien, ya que tenemos las reglas del *juego* G_A para cualquier $A \subseteq \mathcal{N}$, diremos lo que es una *estrategia* para uno de los jugadores en este tipo de *juegos*.

Una *estrategia* es una regla que nos dice qué *tirada* hacer, o qué número natural *tirar* en una *partida*, en función de las *tiradas* anteriores en esa *partida*, o mejor dicho, en función de la sucesión finita de números naturales que es el resultado de las *tiradas* anteriores de ambos jugadores en la *partida* .

Siguiendo esto, una *estrategia* para el jugador I , que denotaremos por σ , es una función cuyo dominio es el conjunto de las sucesiones finitas de naturales de longitud par y su contradominio en los naturales. A su vez, una *estrategia* para el jugador II , que denotaremos por θ , es una función cuyo dominio es el conjunto de las sucesiones finitas de longitud impar de naturales y su contradominio en los naturales.

Veamos un ejemplo. Sea σ una *estrategia* del jugador I . Si I juega con σ entonces las *tiradas* de I y la *partida* resultante serán de la forma siguiente:

La primera *tirada* de I será $a_0 = \sigma(\emptyset)$, luego el jugador II *tira* algún natural b_0 , la segunda *tirada* de I será $a_1 = \sigma(a_0, b_0)$. En general, la $(n+1)$ - ésima *tirada* de I será $a_n = \sigma(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1})$. Así, la *partida* resultante será $(a_0, b_0, a_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$ donde cada número natural a_i está definido por σ y los b_i son las *tiradas* de II .

Para una *estrategia* θ de II es análogo, sólo que ahora las b_i están definidas por θ para cada $n \in \omega$ como $b_0 = \theta(a_0)$ y $b_n = \theta(a_0, b_0, \ldots, b_{n-1}, a_n)$.

Ahora bien, dado un *juego* G_A , una *estrategia ganadora* para I en G_A es una *estrategia* σ que siempre que I juegue con ella gane esa *partida* .

En otras palabras, una *estrategia* σ del jugador I es una *estrategia ganadora* en G_A si todas las *partidas* posibles, al usar I la *estrategia* σ , están en A .

Se dirá que un *juego* G_A está determinado si uno de los jugadores tiene una *estrategia ganadora* .

El axioma de determinación lo que dice es que para cada $A \subseteq \mathcal{N}$, el *juego* G_A está determinado.

Ahora se darán algunas consecuencias del axioma de determinación, pero primero algunas definiciones y observaciones.

El conjunto de *estrategias* para I se denotará como $E($ I $)$ y el conjunto de las *estrategias* para II será $E($ II $)$.

El conjunto de *estrategias ganadoras* para I en un *juego* definido para el conjunto A será $E(\mathrm{I})_A$ y para II será $E(\mathrm{II})_A$.

A cada uno de los números naturales que el jugador I (ó II) pone en la sucesión se llamará *tirada* de I (ó de II). Según su posición será la n - ésima *tirada* de I (ó de II).

Se llamará *partida* a la sucesión resultante $(a_0, b_0, a_1, \ldots)$ de haber estado *tirando* ambos jugadores ω veces.

El conjunto de todas las *tiradas* del jugador I (ó II) en una *partida*, a saber $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ $\big($ó $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)\big)$, se llamará el *movimiento* del jugador I (ó del jugador II) en esa *partida*.

Toda *partida* donde I usó una *estrategia* σ queda definida por σ y por el *movimiento* de II , $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, en esa *partida*. Análogamente para una *estrategia* θ de II y el *movimiento* de I .

Usaremos la notación $q = \sigma \circ b$ para denotar a la *partida* que es resultado de usar la *estrategia* σ y que $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ sea el *movimiento* de II . Análogamente se define $q = a \circ \theta$.

Se hace notar que los *movimientos* de I y II son elementos de $\mathcal{N}$, y a partir de esto vemos que:

$$\sigma \in E(\mathrm{I})_A \text{ si y sólo si } \{\sigma \circ b \ / \ b \in \mathcal{N}\} \subseteq A$$

y

$$\theta \in E(\mathrm{II})_A \text{ si y sólo si } \{a \circ \theta \ / \ a \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{N} \setminus A$$

Es decir, en $\{\sigma \circ b \ / \ b \in \mathcal{N}\}$ estamos considerando todos los posibles *movimientos* del jugador II , $(b \in \mathcal{N})$ y entonces $\{\sigma \circ b \ / \ b \in \mathcal{N}\}$ es el conjunto de todas las *partidas* posibles al usar I la *estrategia* σ . Si ese conjunto está contenido en A entonces σ es una *estrategia ganadora* para I en G_A . Lo mismo en $\{a \circ \theta \ / \ a \in \mathcal{N}\}$ para II .

Por lo tanto, el axioma de determinación dice que

$$\forall\ A \subseteq \mathcal{N}\left(\exists\ \sigma \in E(\mathrm{I})_A \quad \vee \quad \exists\ \theta \in E(\mathrm{II})_A\ \right)$$

Es claro que no pueden existir ambas.

Consideremos ahora una *estrategia* σ para I y todos los posibles *movimientos* del jugador II . Cada *movimiento* se puede tomar como b un elemento de $\mathcal{N}$ y a la *partida* resultante $\left(\sigma(\emptyset), b_0, \sigma(a_0, b_0), b_1, \ldots\right) = (a_0, b_0, a_1, \ldots)$ como otro elemento de $\mathcal{N}$. Definamos a partir de esto la función $\int_\sigma : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ de tal forma que $\int_\sigma(b) = \sigma \circ b$. Lo mismo se puede hacer para las *estrategias* de II .

Ahora veremos que estas funciones son continuas e inyectivas.

Proposición 1 Las *estrategias* definen funciones continuas e inyectivas de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{N}$.

Sea σ una *estrategia* de I .

Empecemos con la inyectividad.

Sean c y b elementos de $\mathcal{N}$.

Si $c = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$, $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ y $c \neq b$ entonces hay $n \in \omega$ tal que $c_n \neq b_n$.

Las funciones en cuestión tiene la propiedad de que:

$$\text{si } b = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \implies \int_\sigma(b) = (a_0, b_0, a_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots) .$$

donde las a_i son las respuestas de la *estrategia* σ .

Vemos que los elementos en los lugares impares de la sucesión resultante coinciden con los elementos de b por lo tanto si $c_n \neq b_n$ también serán diferentes $\int_\sigma(c)$ y $\int_\sigma(b)$ pues difieren en el $2n+1$ lugar. Análogamente para $\int_\theta$.

Ahora la continuidad. Sea $U_s \subseteq \mathcal{N}$ un abierto básico en $\mathcal{N}$.

$U_s = \{ s^\frown b \ / \ b \in \mathcal{N} \}$ con $s = (s_0, \ldots, s_n)$ ó $s = \emptyset$.

Si $s = \emptyset$ vemos que estaríamos buscando la preimagen de $\mathcal{N}$, la cual es $\mathcal{N}$. Entonces busquemos que pasa si $s \neq \emptyset$.

Sea $s = (s_0 , \ldots, s_n)$. Aquí tenemos dos casos, uno de los cuales se divide en otros tantos.

i) $s_0 \neq \sigma(\emptyset)$

o

$s_{2i} \neq \sigma(s_0 , \ldots s_{2i-1})$ para alguna $i \in <1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor>$.

ii) $s_0 = \sigma(\emptyset)$

y

$s_{2i} = \sigma(s_0 , \ldots s_{2i-1})$ para cada $i \in <1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor>$.

En el caso i) vemos que la preimagen de f_σ sería el vacío.

En el caso ii) tenemos otras dos posibilidades.

a) Si n es impar entonces, fijándonos en la prueba de la inyectividad de f_σ, tenemos que la preimagen de f_σ es $\{ (s_1 , \ldots, s_n)^\frown b \ / \ b \in \mathcal{N} \}$.

b) Si n es par entonces la preimagen de f_σ es $\{ (s_1 , \ldots, s_{n-1})^\frown b \ / \ b \in \mathcal{N} \}$ si $n \geq 2$ y $\{ (b \ / \ b \in \mathcal{N} \} = \mathcal{N}$ si $n = 0$.

En todas las posibilidades obtenemos abiertos de $\mathcal{N}$, por lo cual f_σ es continua.

Análogamente para f_τ

■

Ahora veremos algunas propiedades que hay entre $\mathbb{R}$ y los espacios $\mathcal{C}$ y $\mathcal{N}$, las cuales necesitaremos posteriormente.

Primero definiremos una función biyectiva y continua entre $\mathbb{R}$ y ${}^\omega 2 \setminus D$ donde

$$D = \{ p = (p_0 , p_1 , \ldots) \in {}^\omega 2 \ / \ p = (0, 0, 0, \ldots) \ \vee \ \exists \ n \in \omega \ (\forall \ m > n \ , p_m = 1) \}$$

Para esto consideraremos dos funciones: f y g .

Sea $f : \left({}^\omega 2 \setminus D \right) \longrightarrow (0,1)$ definida de la siguiente manera:

Si $a \in ({}^\omega 2 \setminus D)$ entonces

$$\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = \sum_{n\in\omega}\left(a_n / 2^{n+1}\right).$$

$\mathfrak{f}$ es continua y biyectiva.

Ahora definimos $g : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$g(x) = \tan\left(\tfrac{\pi}{2}(2x - 1)\right).$$

g es continua y biyectiva.

Sea $\mathcal{G} = g \circ \mathfrak{f}$, entonces $\mathcal{G}: \left({}^{\omega}2 \setminus D\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y biyectiva.

Ahora daremos una biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{N}$, para lo cual definiremos la función $h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

Dado $a \in \mathcal{N}$ con $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, sea

$$< a_0 > = \frac{1}{a_0 + 1}$$

y

$$< a_0, a_1 \ldots a_n > = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n + 1}}}}$$

la cual es una sucesión creciente en $[0, 1]$, por lo que tiene sentido definir

$$h(a) = \lim_{n\to\infty} < a_0 \ldots a_n >$$

Ahora veamos que h es una función inyectiva.

Dados $a, b \in \mathcal{N}$ con $a \neq b$, supongamos que $h(a) = h(b)$, entonces

$$\frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}} = \frac{1}{b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \cdots}}}$$

por lo tanto $a_0 = b_0$, pues

$$0 < \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}} \leq 1 \quad y \quad 0 < \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \cdots}} \leq 1$$

Siguiendo el mismo razonamiento para cada $n \in \omega$, $a_n = b_n$. Por lo tanto $a = b$. Consiguientemente h es inyectiva.

Por la existencia de h y de $\mathcal{G}^{-1}$, la cual es una función inyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{N}$, tenemos que, por el teorema de Cantor - Schöder - Bernstein* , existe una biyección entre $\mathcal{N}$ y $\mathbb{R}$ a la cual llamaremos en el presente trabajo la función $\mathcal{J}$.

Ahora veremos una propiedad que existe entre los conjuntos de las *estrategias* y $\mathcal{N}$.

Proposición 2 Existen $\mathfrak{f} : E(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathcal{N}$ y $\mathfrak{g} : E(\mathrm{II}) \longrightarrow \mathcal{N}$ que son inyectivas.

En lo que sigue denotaremos por c_n al n - ésimo primo. Para cada $m \in \omega$, si $m > 1$ entonces existe una única $(b_0 , b_1 , b_2 , \ldots, b_n) \in {}^{<}\omega$ tal que $m = 2^{b_0}3^{b_1}\ldots c_n^{b_n+1}$.

Con esto definimos la función $\mathfrak{f} : E(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathcal{N}$ como sigue:

Dado $\sigma \in E(\mathrm{I})$, sea

$p_0 = \sigma(\emptyset)$

$p_1 = 1$

y para cada $m > 1$, si $m = 2^{b_0}3^{b_1}\ldots c_n^{b_n+1}$ entonces

$p_m = \sigma\ (a_0 , b_0 , a_1 , \ldots, a_n , b_n)$

donde $a_{i+1} = \sigma\ (a_0 , b_0 , a_1 , \ldots, a_i , b_i)$ para $i < n$.

Así $\mathfrak{f}(\sigma) = p = (p_0 , p_1 , \ldots, p_m , \ldots)$.

Ahora veamos que $\mathfrak{f}$ es inyectiva.

Sean $\sigma , \sigma' \in E(\mathrm{I})$, $\sigma \neq \sigma'$, $p = \mathfrak{f}(\sigma)$ y $q = \mathfrak{f}(\sigma')$.

Si $\sigma \neq \sigma'$ entonces hay dos casos

i) $\sigma(\emptyset) \neq \sigma'(\emptyset)$

o para alguna $n \in \omega$

* Teorema de Cantor - Schöder - Bernstein: Dados dos conjuntos A y B, si $A \succeq B$ y $A \preceq B$ entonces $A \sim B$.

ii) $\sigma\ (a_0, b_0, a_1, \ldots, a_n, b_n) \neq \sigma'(a_0, b_0, a_1, \ldots, a_n, b_n)$

donde $a_{i+1} = \sigma\ (a_0, b_0, \ldots, a_i, b_i) = \sigma'(a_0, b_0, \ldots, a_i, b_i)$ para $i < n$.

En el primer caso tendríamos que $p_0 \neq q_0$ y por tanto $p \neq q$. En el segundo caso, si $m = 2^{b_0}3^{b_1}\ldots c_n^{b_n+1}$ entonces $p_m \neq q_m$ y así $p \neq q$.

Para $E(\text{ II })$ la prueba es análoga.

■

Con ayuda de esta última proposición veamos el siguiente

Lema 1 Si $2^{\aleph_0}$ es bien ordenable entonces existe $A \subseteq \mathcal{N}$ tal que G_A no está determinado.

Si $2^{\aleph_0}$ es un conjunto bien ordenable entonces tenemos, por la existencia de la función J, que $\mathcal{N}$ es bien ordenable y por la proposición anterior, como $E(\text{ I })$ y $E(\text{ II })$ se inyectan en $\mathcal{N}$, también son bien ordenables.

A partir del buen orden de $E(\text{ I })$ y $E(\text{ II })$ definimos una enumeración de cada uno de ellos, a saber, $\{\sigma_\alpha\ /\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ y $\{\theta_\alpha\ /\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$.

A partir de esto definimos para cada $\alpha < 2^{\aleph_0}$

$$A_\alpha = \{p\ /\ p = a \circ \theta_\alpha \ \wedge\ a \in \mathcal{N}\} \text{ y } B_\alpha = \{q\ /\ q = \sigma_\alpha \circ a \ \wedge\ a \in \mathcal{N}\}.$$

Ahora definiremos los conjuntos $X = \{p_\alpha\ /\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ y $Y = \{q_\alpha\ /\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ como sigue:

Dados $\{p_\beta\ /\ \beta < \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ y $\{q_\beta\ /\ \beta < \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ sea p_α el elemento p de $\mathcal{N}$ más chico, según el buen orden de $\mathcal{N}$, que cumpla que

$$p \in A_\alpha \quad \text{y} \quad p \notin \{q_\beta\ /\ \beta < \alpha < 2^{\aleph_0}\}$$

Este p_α existe pues A_α tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. De la misma forma tomamos a q_α de

B_α viendo que no esté en $\{ p_\beta \ / \ \beta \leq \alpha < 2^{\aleph_0} \}$.

Claramente X y Y son disjuntos. Ahora consideremos el *juego* G_X . Por el axioma de determinación existe una *estrategia ganadora* para alguno de los jugadores, supongamos que existe para I . Esa *estrategia* está en $E($ I $)$ y debe ser algún σ_α, pero para ser ganadora se debe tener que $\{ \sigma_\alpha \circ b \ / \ b \in \mathcal{N} \} = B_\alpha \subseteq X$, pero sabemos que un elemento de B_α no está en X sino en Y , por lo tanto no hay *estrategia* para I . Similarmente tampoco para II .

∎

Corolario 1 El axioma de elección implica que existe $A \subseteq \mathcal{N}$ tal que G_A no está determinado.

Del corolario vemos que el axioma de elección y el axioma de determinación son inconsistentes en ZF .

En contraste con esto último, el axioma de determinación implica una forma débil del axioma de elección.

Proposición 3 El axioma de determinación implica que para toda familia contable de conjuntos no vacíos de reales existe una función de elección.

Sea $X = \{ X_n \ / \ n \in \omega \}$ una familia contable de conjuntos no vacíos de reales.

A partir de la función J definimos el conjunto $X' = \left\{ X_n' \ / \ n \in \omega \right\}$ de la siguiente manera:

$$X' = \left\{ X_n' \ / \ X_n' = J^{-1} [X_n] \text{ con } X_n \in X \right\}$$

Consideraremos el siguiente *juego*:

Si la primera *tirada* de I es a_0 y el *movimiento* de II es $(b_0 , b_1 , b_2 , \ldots , b_n , \ldots)$ entonces II gana si $(b_0 , b_1 , b_2 , \ldots , b_n , \ldots) \in X'_{a_0} \in X'$.

Es claro que I no tiene *estrategia ganadora* pues para cualquier $\sigma \in E($ I $)$ existe un *movimiento* de II , a saber alguna $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in \mathcal{N}$, que esté en $X'_{\theta(\emptyset)}$, dando como resultado que I pierda esa *partida* .

Por el axioma de determinación existe una *estrategia ganadora* θ para el jugador II . Como θ es *estrategia ganadora* tenemos que para cualquier natural que I escoja como primera *tirada*, la *estrategia* θ hará que I pierda, es decir, para cada $a_0 \in \omega$

$$(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) =$$

$$\Big(\theta(a_0), \theta(a_0, b_0, a_1), \theta(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2), \ldots\Big) \in X'_{a_0}$$

Ahora definimos $\mathfrak{f}$ como:

$$\mathfrak{f}(X_n') = \Big(\theta(n), \theta(n, b_0, 0), \ldots \theta(n, b_0, 0, b_1, \ldots 0, b_i, 0) \ldots\Big)$$

que es la sucesión de *tiradas* de II bajo la *estrategia* θ si la primera *tirada* de I hubiera sido $a_0 = n$ y su *movimiento* $a = (n, 0, 0, 0, \ldots)$. Así, para cada $n \in \omega$, $\mathfrak{f}(X'_n) \in X'_n$ pues θ es una *estrategia ganadora* .

Ahora definamos g la función de elección como sigue:

$$g(X_n) = J\Big(\mathfrak{f}(X_n')\Big)$$

y vemos que para cada $n \in \omega$

$$g(X_n) = J\Big(\mathfrak{f}(X_n')\Big) \in X_n$$

■

CAPÍTULO II

Cardinales medibles y Medida de Lebesgue

La intención de este capítulo es revisar dos temas, la medida de Lebesgue y los cardinales medibles, los cuales serán tratados más adelante bajo las suposiciones del axioma de elección y del axioma de determinación. Por esto mismo, todos los resultados de este capítulo se darán sin la suposición de ninguno de estos dos axiomas, y haremos notar si utilizamos alguna forma débil de alguno de ellos para poder seguirles la pista.

Para empezar, veremos primero los conceptos de filtro y medida, luego retomaremos los temas de medida de Lebesgue y los cardinales medibles.

Filtros

Definición Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto S es un subconjunto de la potencia de S que cumple:

i) $S \in \mathcal{F}$.

ii) Si x, $y \in \mathcal{F}$ entonces $(x \cap y) \in \mathcal{F}$.

iii) Si x y y son subconjuntos de S tales que $x \in \mathcal{F}$ y $x \subseteq y$ entonces $y \in \mathcal{F}$.

Consideremos un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es un filtro propio si $\emptyset \notin \mathcal{F}$ o equivalentemente $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(S)$. Se dice que $\mathcal{F}$ es principal si existe un elemento del filtro que esté contenido en todos los elementos de $\mathcal{F}$. Con respecto a esto último tenemos que un filtro $\mathcal{F}$ es principal sobre un conjunto S si y sólo si $\{X\} \in \mathcal{F}$ para alguna $X \in S$. Claramente, los filtros principales son cerrados bajo intersecciones arbitrarias.

Ahora bien, si κ es un cardinal regular, entonces se dice que $\mathcal{F}$ es un filtro κ-completo si es cerrado bajo intersecciones de menos de κ elementos, en particular, un filtro

Definición Sea A un conjunto infinito. Una medida μ sobre A es una función $\mu : \mathcal{P}(A) \longrightarrow [0,1]$ que cumple:

i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = 1$.

ii) Para cada $a \in A$, $\mu(\{a\}) = 0$.

iii) Si $\{X_n \ / n \in \omega\}$ es una colección de subconjuntos disjuntos de A entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n)$$

iv) Si $X, Y \subseteq A$ y $X \subseteq Y$ entonces $\mu(X) \leq \mu(Y)$.

Sea μ una medida sobre un conjunto A.

Si μ sólo toma valores de 0 ó 1 entonces decimos que μ es una medida bivaluada sobre A. Si tenemos un conjunto B y una biyección f entre A y B entonces podemos dar una medida δ sobre B definida para cada $Y \subseteq B$ como $\delta(Y) = \mu(f^{-1}[Y])$.

Ahora veamos otras propiedades de una medida si suponemos el axioma de elección numerable (AEN).

Proposición 5 (AEN) Si μ es una medida sobre A, entonces toda familia de subconjuntos disjuntos de A de medida positiva es contable.

Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha \subseteq A \ / \ \mu^*(A_\alpha) > 0\}$ una familia de conjuntos disjuntos.

Para cada $n \in \omega$ definimos:

$$B_n = \left\{A_\alpha \in \mathcal{A} \ / \ \tfrac{1}{n} \geq \mu^*(A_\alpha) > \tfrac{1}{n+1}\right\}$$

Vemos que cada B_n no puede tener más de $n+1$ elementos.

Así pues, sea para cada $n \in \omega$

$$X_n = \{f \ / f : \omega \longrightarrow B_n \text{ y } f \text{ suprayectiva}\}$$

Por el axioma de elección numerable tenemos una función g tal que para cada $n \in \omega$ $g(X_n) = f_n \in X_n$. Con ella definimos la función

$$g': \omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} X_n$$

como

$$g'(n) = g(X_n)$$

Ahora sea $h : \omega \times \omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} B_n$ una función definida como

$$h(n, m) = g'(n)(m) = f_n(m)$$

Vemos que h es una función suprayectiva y $\bigcup_{n\in\omega} B_n = A$, así pues A es contable.

∎

A la luz de la proposición anterior decimos, dado un cardinal incontable κ , que una medida μ sobre un conjunto A es κ - aditiva si para toda familia de conjuntos $\{ A_\alpha \subseteq A \ / \ \alpha < \lambda < \kappa \}$ subconjuntos disjuntos de A ocurre que

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha\right) = \sum \{ \mu(A_\alpha) \ / \ \mu(A_\alpha) > 0 \text{ y } \alpha < \lambda \}$$

Vemos que por la proposición anterior

$$\sum \{ \mu(A_\alpha) \ / \ \mu(A_\alpha) > 0 \wedge \alpha < \lambda \}$$

tiene sentido pues no es más que una suma de un número contable de elementos. Notemos que para definir un medida $\aleph_1$ - aditiva (o σ - aditiva) no necesitamos del axioma de elección numerable pues

$$\sum \{ \mu(A_\alpha) \ / \ \mu(A_\alpha) > 0 \wedge \alpha < \aleph_1 \}$$

ultrafiltro no principal y κ -completo sobre κ .

Veamos un resultado que relaciona a las medidas bivaluadas y κ - aditivas con los κ - ultrafiltros.

Lema 2 (**AEN** si $\kappa > \aleph_1$) Sea κ un cardinal incontable. Si μ es una medida bivaluada y κ - aditiva sobre κ , entonces el conjunto

$$\mathcal{F}_\mu = \{ x \subseteq \kappa \ / \ \mu(x) = 1\}$$

es un κ - ultrafiltro sobre κ .

A su vez, si $\mathcal{F}$ es un κ - ultrafiltro sobre κ y definimos $\mu_F : \ \mathcal{P}(\kappa) \longrightarrow \{0 , 1\}$ como

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{F}; \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

entonces μ_F es una medida bivaluada y κ - aditiva en κ .

a) Supongamos que μ es una medida bivaluada y κ - aditiva sobre κ , y veamos que $\mathcal{F}_\mu$ es un κ - ultrafiltro sobre κ .

i) $\mu(\kappa) = 1$ y $\mu(\emptyset) = 0$ por lo tanto $\kappa \in \mathcal{F}_\mu$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}_\mu$.

ii) Sea $X \in \mathcal{F}_\mu$ y $X \subseteq Y \subseteq \kappa$.

Como $X \in \mathcal{F}_\mu$ entonces $\mu(X)=1$ y como $X \subseteq Y$

$$\mu(Y) \geq \mu(X) = 1$$

Así pues $Y \in \mathcal{F}_\mu$.

iii) Sea $X \subseteq \kappa$

Sabemos que

$$\mu(X) + \mu(\kappa \setminus X) \geq \mu(X \cup (\kappa \setminus X)) = \mu(\kappa) = 1$$

y por ser μ una medida bivaluada, $\mu(X) = 1$ ó $\mu(\kappa \setminus X) = 1$ pero no ambos, por lo tanto, dado $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{F}_\mu$ ó $(\kappa \setminus X) \in \mathcal{F}_\mu$ pero no ambos.

iv) Sea $\{ A_\alpha \ / \alpha < \lambda < \kappa \}$ una familia de elementos de $\mathcal{F}_\mu$, queremos ver que $\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha \in \mathcal{F}_\mu$.

Como para cada $\alpha < \lambda$, $A_\alpha \in \mathcal{F}_\mu$ tenemos que $\mu(A_\alpha) = 1$ y $\mu(\kappa \setminus A_\alpha) = 0$ para cada $\alpha < \lambda$.

Supongamos que $\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha \notin \mathcal{F}_\mu$, es decir, que $\mu\left(\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha\right) = 0$ entonces

$$\mu\left(\kappa \setminus \left(\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{\alpha<\lambda} (\kappa \setminus A_\alpha)\right) = 1.$$

pero

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\lambda} (\kappa \setminus A_\alpha)\right) = \sum\{ \mu(\kappa \setminus A_\alpha) \ / \mu(\kappa \setminus A_\alpha) = 1\} = 0$$

Por lo tanto $\mu\left(\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha\right) = 1$ y así $\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha \in \mathcal{F}_\mu$.

v) Ahora veremos que $\mathcal{F}_\mu$ es no principal.

Por ser μ una medida tenemos que para toda $\alpha \in \kappa$, $\mu(\{\alpha\}) = 0$, y así, para cada $\alpha \in \kappa$, $\mu(\alpha) = \mu\left(\bigcup_{\beta<\alpha} \{\beta\}\right) = 0$ entonces para cada $\alpha < \kappa$, $\alpha \notin \mathcal{F}_\mu$ y por iii) $(\kappa \setminus \alpha) \in \mathcal{F}_\mu$.

A partir de esto vemos que

$$\bigcap_{\alpha<\kappa} (\kappa \setminus \alpha) = \emptyset \notin \mathcal{F}_\mu$$

por lo tanto $\mathcal{F}_\mu$ es no principal.

■

b) Ahora supongamos que tenemos un κ - ultrafiltro, y veamos que $\mu_\mathcal{F}$ es una medida bivaluada y κ - aditiva sobre κ .

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $\kappa \in \mathcal{F}$ por lo tanto $\mu_\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ y $\mu_\mathcal{F}(\kappa) = 1$.

ii) Sea $\alpha \in \kappa$.

Por ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal, vemos que para cada $\alpha \in \kappa$, $\{ \alpha \} \notin \mathcal{F}$ por lo tanto para cada $\alpha \in \kappa$, $\mu_F(\{ \alpha \}) = 0$.

iii) Ahora sea $A = \{ A_\alpha \ / \ \alpha < \lambda < \kappa \}$ una familia de subconjuntos disjuntos de κ .

Demostraremos que $\mu_F\left(\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha \right) = \sum\{ \mu_F(A_\alpha) \ / \ \mu_F(A_\alpha) = 1 \}$.

Por ser A una familia de subconjuntos disjuntos de κ y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro propio tenemos sólo dos casos:

i) Que existe un único $\beta < \lambda$ tal que $A_\beta \in \mathcal{F}$.

ii) Que para cada $\alpha < \lambda$, $A_\alpha \notin \mathcal{F}$.

En el primer caso tendríamos que existe un único $\beta < \lambda$ tal que $\mu_F(A_\alpha) = 1$ y por lo tanto

$$\sum\{ \mu_F(A_\alpha) \ / \ \mu_F(A_\alpha) = 1 \} = 1$$

Al mismo tiempo $A_\beta \subseteq \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha \subseteq \kappa$ por lo que $\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha \in \mathcal{F}$ y así

$$\mu_F(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = \sum\{ \mu_F(A_\alpha) \ / \ \mu_F(A_\alpha) = 1 \} = 1$$

En el segundo caso, para toda $\alpha < \lambda$, $\mu_F(A_\alpha) = 0$ por lo que

$$\sum\{ \mu_F(A_\alpha) \ / \ \mu_F(A_\alpha) = 1 \} = 0$$

Veremos pues que $\mu_F(\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = 0$, o lo que es lo mismo, que $\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha \notin \mathcal{F}$.

Como para cada $\alpha < \lambda$ $A_\alpha \notin \mathcal{F}$, tenemos que para cada $\alpha < \lambda$ $(\kappa \setminus A_\alpha) \in \mathcal{F}$ y así, como $\mathcal{F}$ es κ - completo, vemos que

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} (\kappa \setminus A_\alpha) \in \mathcal{F}$$

y entonces

$$\kappa \setminus \left(\bigcap_{\alpha<\lambda} (\kappa \setminus A_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \notin \mathcal{F}$$

por lo tanto

$$\mu_{\mathcal{F}}(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = \sum\{ \mu_{\mathcal{F}}(A_\alpha) \ / \ \mu_{\mathcal{F}}(A_\alpha) = 1 \} = 0$$

iv) Sean X , $Y \subseteq \kappa$ y $X \subseteq Y$.

Si $X \in \mathcal{F}$ entonces $Y \in \mathcal{F}$ y así $\mu_{\mathcal{F}}(X) \leq \mu_{\mathcal{F}}(Y)$.

Si $X \notin \mathcal{F}$ entonces $0 = \mu_{\mathcal{F}}(X) \leq \mu_{\mathcal{F}}(Y)$

■

Medida de Lebesgue (**LM**)

La longitud γ (I) de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ se define usualmente como la diferencia de los extremos del intervalo. La longitud puede ser vista entonces como una función que asigna a cada intervalo un número del conjunto de los números reales extendidos. Al pretender ampliar esta noción a los subconjuntos de reales en general, desearíamos tener una función μ que asignara a los $X \subseteq \mathbb{R}$ un número no negativo de los reales extendidos, que llamaríamos la medida de X y que tuviera las siguientes propiedades:

i) μ está definido para todo $X \subseteq \mathbb{R}$.

ii) Para cada intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, μ (I) = γ (I).

iii) Si $\{ X_n \ / \ n \in \omega \}$ es una familia de subconjuntos disjuntos de reales entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n\in\omega} X_n \right) = \sum_{n\in\omega} \mu (X_n)$$

iv) μ es invariante bajo traslación, es decir, si X es un conjunto para el cual μ está definido, entonces el conjunto $Y = \{ x + y \ / \ x \in X \}$ cumple que $\mu (X) = \mu (Y)$.

Una extensión de la noción de longitud es la siguiente, dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, decimos que la medida superior de X , denotada por $\mu^*(X)$, es el ínfimo de todas las sumas de la forma

$$\sum\{ \gamma (I_n) \ / \ n \in \omega \}$$

donde $\{ I_n \ / \ n \in \omega \}$ es una colección de intervalos que cumplen que $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$.

Diremos que un conjunto es nulo si $\mu^*(X) = 0$.

Así pues, tenemos una función que está definida sobre todos los subconjuntos de reales en el conjunto de los reales extendidos. A partir de esto decimos que un conjunto X es medible si para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ tenemos que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \setminus X)$$

Si X es un conjunto medible definimos la medida de Lebesgue de X , $\mu(X)$, como la medida superior de X y decimos que $X \in LM$.

Vemos que cualquier intervalo es Lebesgue medible y entonces la medida de Lebesgue del mismo es su longitud. También se puede probar que la medida de Lebesgue es congruente bajo traslación al igual que es σ - aditiva además de que el conjunto de los Lebesgue medibles, LM , forma una σ - álgebra.

Faltaría ver que la medida de Lebesgue esté o no definida para todos los subconjuntos de reales, pero ese problema lo veremos en el capítulo III.

Ahora pasemos a ver otros resultados que necesitaremos más adelante con respecto a la medida de Lebesgue.

Proposición 7 Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Si $\mu^*(X) = 0$ entonces $X \in LM$.

Para cada $B \subseteq \mathbb{R}$ sabemos que

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap X) + \mu^*(B \setminus X)$$

pero como $(B \cap X) \subseteq X$ tenemos que $\mu^*(B \cap X) = 0$ y además $(B \setminus X) \subseteq B$ entonces

$$\mu^*(B \cap X) + \mu^*(B \setminus X) = \mu^*(B \setminus X) \leq \mu^*(B)$$

por lo tanto

$$\mu^*(B \cap X) + \mu^*(B \setminus X) = \mu^*(B)$$

y así $X \in \mathbf{LM}$.

■

Proposición 8 Dado $X \subseteq \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ entonces existe una familia contable de intervalos $\{ I_n \ / \ n \in \omega \}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n$ y $\mu^*(X) + \epsilon > \sum_{n \in \omega} \gamma(I_n)$.

Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para toda familia $\{ I_n \ / \ n \in \omega \}$, si $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n$ entonces

$$\sum_{n \in \omega} \gamma(I_n) > \mu^*(X) + \epsilon$$

pero por definición

$$\mu^*(X) = inf \left\{ \sum_{n \in \omega} \gamma(I_n) \ / \ X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n \right\} \geq \mu^*(X) + \epsilon$$

■

Proposición 9 Dado $\epsilon > 0$ y $X \subseteq \mathbb{R}$ existe una familia de intervalos abiertos de extremos racionales $\{ Q_n \ / \ n \in \omega \}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} Q_n$ y $\mu^*(X) + \epsilon > \sum_{n \in \omega} \gamma(Q_n)$.

Sea $\epsilon > 0$ y $X \subseteq \mathbb{R}$. Por la proposición anterior sabemos que dado $r = \epsilon - 2\lambda$ con λ , $r > 0$ existe una familia contable de intervalos $\{ I_n \ / \ n \in \omega \}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n$ y $\sum_{n \in \omega} \gamma(I_n) < \mu^*(X) + r$.

Sea $I_n = (a_n , b_n)$ para cada $n \in \omega$.

Entonces definimos para cada $n \in \omega$

$$I_n' = \left(a_n - \frac{\lambda}{2^{n+1}} r , \ b_n + \frac{\lambda}{2^{n+1}} r \right)$$

Vemos que

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n'$$

y además

$$\sum_{n\in\omega} \gamma\,(I_n') \leq \sum_{n\in\omega} \gamma\,(I_n) + 2\Big(\sum_{n\in\omega} \tfrac{\lambda}{2^{n+1}}\Big) \leq \sum_{n\in\omega} \gamma\,(I_n) + 2\lambda \leq \mu^*(X) + \epsilon$$

Ahora, para cada $n \in \omega$, sea Q_n un intervalo abierto de extremos racionales tal que $I_n \subseteq Q_n \subseteq I_n'$.

Vemos que $\{ Q_n \ / \ n \in \omega \}$ es una familia contable que cumple:

i) $\sum_{n\in\omega} \gamma\,(Q_n) \leq \sum_{n\in\omega} \gamma\,(I_n') \leq \mu^*(X) + \epsilon$.

ii) $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} Q_n$.

∎

Proposición 10 Para toda $X \subseteq \mathbb{R}$ existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \in \mathbf{LM}$, $X \subseteq A$ y $\mu^*(A) = \mu^*(X)$. Además $A \subseteq \overline{X}$.

Por la proposición 8 sabemos que dado un $X \subseteq \mathbb{R}$ y $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $\{ I_n \ / \ n \in \omega \}$ tal que

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n \quad \text{y} \quad \mu^*(X) \leq \sum_{n\in\omega} \gamma\,(I_n) \leq \mu^*(X) + \tfrac{\epsilon}{2}$$

Sea para cada $n \in \omega$, $I_n = (a_n, b_n)$.

Con esta notación definimos

$$A = \bigcup_{n\in\omega} \big(a_n - \tfrac{\epsilon}{2^{n+2}} , b_n \big) .$$

Como LM es una σ - álgebra, $A \in \mathbf{LM}$ y tenemos que

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (a_n, b_n) \subseteq A$$

Ahora bien, como

$$\mu^*(X) \le \sum_{n\in\omega}(a_n, b_n) \le \mu^*(X) + \tfrac{\epsilon}{2}$$

entonces

$$\mu^*(A) = \sum_{n\in\omega}\left(a_n - \tfrac{\epsilon}{2^{n+1}}, b_n\right) \le \sum_{n\in\omega}(a_n, b_n) + \tfrac{\epsilon}{2} \le \mu^*(X) + \epsilon$$

por lo que

$$\mu^*(X) \le \mu^*(A) \le \mu^*(X) + \epsilon$$

y como ϵ fue arbitrario $\mu^*(A) = \mu^*(X)$.

Ahora supongamos que $A \not\subseteq \overline{X}$. Entonces hay una $y \in A$ tal que $y \notin \overline{X}$ y por lo tanto existe un intervalo abierto (a, b) que cumple:

$$y \in (a, b) \quad y \quad ((a, b) \cap X) = \emptyset$$

Como $(A \cap (a, b)) \neq \emptyset$, sea $A' = (A \setminus (a, b))$ y para cada $n \in \omega$ $(a_n', b_n') = (a, b) \cap (a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, b_n)$.

Vemos que

$$\mu^*(A') = \sum_{n\in\omega}\left(b_n - \left(a_n - \tfrac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)\right) - \sum_{n\in\omega}(b_n', a_n') <$$

$$\sum_{n\in\omega}\left(b_n - \left(a_n - \tfrac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)\right) = \mu^*(A)$$

Así pues $\mu^*(A') < \mu^*(A)$ y $X \subseteq A'$ por lo que

$$\mu^*(X) \le \mu^*(A') < \mu^*(A) = \mu^*(X)$$

■

Proposición 11 Dado $X \subseteq \mathbb{R}$ existe un $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \in LM$ y para toda $Z \in LM$, si $Z \subseteq (A \setminus X)$ entonces $\mu^*(Z) = 0$.

Como $B \in LM$ entonces sabemos que para cualquier $C \subseteq \mathbb{R}$ tenemos que

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \setminus B)$$

en particular para

$$C = (H \cap B) \cap (\mathbb{R} \setminus (H \cup A))$$

y para

$$E = (H \setminus A) \cap (B \setminus H)$$

con cualquier $H \subseteq \mathbb{R}$ dado.

Empezaremos viendo que pasa con C.

Como $C \subseteq (B \setminus A)$ entonces $\mu^*(C) = 0$, por tanto $C \in LM$ y así, para $D = (H \cap B)$ tenemos que

$$\mu^*(D) = \mu^*(D \cap C) + \mu^*(D \setminus C)$$

Ahora bien, $(D \cap C) \subseteq C$ y entonces $\mu^*(D \cap C) = 0$ y así $\mu^*(D) = \mu^*(D \setminus C)$.

Ahora veremos quien es $(D \setminus C)$.

$$(D \setminus C) = (H \cap B) \setminus ((H \cap B) \cap (\mathbb{R} \setminus (H \cap A))) = H \cap A$$

esto último pues $(H \cap A) \subseteq (H \cap B)$.

Con esto vemos que

$$\mu^*(D) = \mu^*(H \cap B) = \mu^*(H \cap A)$$

Ahora veamos que pasa con E

Como $E \subseteq (B \setminus A)$ tenemos que $\mu^*(E) = 0$ y así $E \in LM$, entonces para $D = (H \setminus A)$ se cumple que

$$\mu^*(D) = \mu^*(D \cap E) + \mu^*(D \setminus E)$$

y como $(D \cap E) \subseteq E$ tenemos que

$$\mu^*(D) = \mu^*(D \setminus E)$$

Veamos quien es $(D \setminus E)$.

$$(D \setminus E) = (H \setminus A) \setminus ((H \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus (H \setminus B))) = H \setminus B$$

Entonces tenemos que

$$\mu^*(H \setminus A) = \mu^*(H \setminus B)$$

Así pues, como $B \in \mathbf{LM}$, tenemos que dado $H \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap B) + \mu^*(H \setminus B) = \mu^*(H \cap A) + \mu^*(H \setminus A)$$

por lo que $A \in \mathbf{LM}$.

■

Proposición 13 Si A es un subconjunto analítico* de reales, entonces $A \in \mathbf{LM}$.

Como A es un subconjunto analítico de los reales, hay una función continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $A = f[\mathcal{N}]$.

Definimos para cada $s \in {}^{<\omega}\omega$, $A_s = f[U_s]$.

Observemos que para cada $s \in {}^{<\omega}\omega$, $A_s = \bigcup_{n \in \omega} A_{s^\frown n}$ pues $U_s = \bigcup_{n \in \omega} U_{s^\frown n}$.

Consideremos ahora el operador $\mathcal{A}$ de Suslin, el cual, dado $\{ A_s \ / \ s \in {}^{<\omega}\omega \}$ una colección de conjuntos indexados por elementos de ${}^{<\omega}\omega$ nos dice que

$$\mathcal{A}\{ A_s \ / \ s \in {}^{<\omega}\omega \} = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} A_{a(n)}$$

* Ver apéndice 1

Vemos que, para este caso en particular, para cada $a \in \mathcal{N}$

$$\bigcap_{n\in\omega} A_{a(n)} = \bigcap_{n\in\omega} f\,[\, U_{a(n)}\,] = \{ f\,(a\,)\}$$

y así que

$$A = \mathcal{A}\left\{ A_s \;/\, s \in {}^{<}\omega \right\} = \bigcup_{a\in \mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} A_{a(n)}$$

y

$$\mathcal{A}\left\{ A_s \;/\, s \in {}^{<}\omega \right\} = \mathcal{A}\left\{ \overline{A_s} \;/\, s \in {}^{<}\omega \right\}$$

Ahora bien, por la proposición 10 sabemos que para cada $s \in {}^{<}\omega$ existe un $B_s \subseteq \mathbf{R}$ tal que $A_s \subseteq B_s \subseteq \overline{A_s}$, $B_s \in \mathrm{LM}$, y para cada $Z \in \mathrm{LM}$, si $Z \subseteq (\, B_s \setminus A_s\,)$ implica que Z es nulo.

Así pues $A = \mathcal{A}\left\{ B_s \;/\, s \in {}^{<}\omega \right\}$ y definiendo $B = B_\emptyset$ tendremos que

$$(\, B \setminus A\,) = B - \bigcup_{a\in \mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} B_{a(n)}$$

Nuestra intención ahora será mostrar que $(\, B \setminus A\,)$ es nulo.

Para esto veremos dos cosas.

i) $B - \bigcup_{a\in \mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} B_{a(n)} \subseteq \bigcup_{s \in {}^{<}\omega} \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)$

La demostracion será por contrapositiva, es decir, mostrando que si

$$x \notin \bigcup_{s \in {}^{<}\omega} \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)$$

entonces

$$x \notin B - \bigcup_{a\in \mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} B_{a(n)}$$

Así pues, tomemos $x \in B$ y $x \notin \bigcup_{s \in {}^{<}\omega} \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)$.

Para cada $s \in {}^{<\omega}\omega$, si $x \in B$ y $x \notin \bigcup_{s \in {}^{<\omega}\omega} \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)$ entonces $x \in B_{s^\frown z_1}$ para alguna $z_1 \in \omega$. Pero entonces, si definimos $s' = s^\frown z_1$, tenemos que $x \in B_{s'} = B_{s^\frown z_1}$ pero $x \notin \bigcup_{s \in {}^{<\omega}\omega} \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)$ por lo que $x \in B_{s^\frown z_1 {}^\frown z_2}$ para alguna $z_2 \in \omega$.

Siguiendo el mismo argumento vemos que si $x \in B_s$ para alguna $s \in {}^{<\omega}\omega$ y $x \notin \bigcup_{s \in {}^{<\omega}\omega} \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)$ entonces $x \in B_{s^\frown z_1 {}^\frown z_2 {}^\frown z_3 {}^\frown z_4 \ldots}$

Sea $a = (s^\frown z_1 {}^\frown z_2 \ldots)$, así, $x \in B_{a(n)}$ para cada $n \in \omega$ por lo que $x \notin B - \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} B_{a(n)}$.

Así pues, $(B \setminus A) = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} B_{a(n)} \subseteq \bigcup_{s \in {}^{<\omega}\omega} \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)$.

■

ii) Para cada $s \in {}^{<\omega}\omega$, $\left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)$ es nulo.

Sea $Z = \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right) \subseteq \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} A_{s^\frown k} \right)\right) = (B_s \setminus A_s)$.

Vemos que $Z \in LM$ y que $Z \subseteq (B_s \setminus A_s)$ por lo que Z es nulo.

■

Ahora bien, como ${}^{<\omega}\omega$ es contable, tenemos que

$$\mu^*(B \setminus A) \le \mu^*\left(\bigcup_{s \in {}^{<\omega}\omega} \left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)\right) \le \sum_{s \in {}^{<\omega}\omega} \mu^*\left(\left(B_s - \left(\bigcup_{k\in\omega} B_{s^\frown k} \right)\right)\right) = 0$$

y así $(B \setminus A)$ es nulo y $B \in LM$ entonces, por la proposición anterior tenemos que $A \in LM$.

■

Proposición 14 Dado un conjunto Z nulo y una sucesión de números positivos $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces existe una familia contable de conjuntos $X = \{ X_n \ / \ X_n \in \omega \}$ tal que $Z \subseteq \bigcup_{n\in\omega} X_n$ y para cada $n \in \omega$, X_n es la unión finita de intervalos abiertos con extremos racionales Q_n tal que $a_n > \mu^*(X_n)$.

Por la proposición 9 sabemos que existe $Q = \{ Q_n \ / \ n \in \omega \}$ una familia contable de intervalos abiertos de extremos racionales que cumple

$$\sum_{n\in\omega} \mu^*(Q_n) < \mu^*(Z) + a_0 = a_0 \ \text{ y } \ Z \subseteq \bigcup_{n\in\omega} Q_n$$

Ahora definimos recursivamente, para cada $n \in \omega$

$$Q_n^0 = \{ Q_m \in Q \ / \ a_n > \mu^*(Q_m) \geq a_{n+1} \} \subseteq Q$$

$$Q_n^1 = \bigcup \left\{ Q_p^0 \ / \ a_n > \sum_{Q_m \in Q_p^0} \mu^*(Q_m) \geq a_{n+1} \right\} \subseteq Q$$

y

$$Q_n^{r+1} = \bigcup \left\{ Q_p^r \ / \ a_n > \sum_{Q_m \in Q_p^r} \mu^*(Q_m) \geq a_{n+1} \right\} \subseteq Q$$

Veamos ahora varias propiedades de estos conjuntos que nos ayudarán a resolver la proposición.

Primero observemos que lo que hemos hecho es una partición en conjuntos ajenos de los elementos de Q , y luego recursivamente una partición ajenizada de las particiones ajenas anteriores y unimos al resultado. De esto se desprende lo siguiente:

i) Dados Q_n^r y Q_t^s distintos del vacio, vemos que si $r = s$ (es decir, que son del mismo nivel) y $n \neq t$ entonces son ajenos, y si $s \neq r$ o son ajenos o uno está contenido en el otro. Si esto último es el caso, sin perdida de generalidad, si $Q_n^r \subseteq Q_t^s$ tenemos que $n \geq t$ y $r < s$.

ii) Cada elemento de las particiones se compone de la unión de particiones ajenas del nivel anterior que cumplen que $a_n > \sum_{Q_m \in Q_p^r} \mu^*(Q_m) \geq a_{n+1}$ para cierta $n \in \omega$, o en el caso de los Q_n^0 , de los elemento de Q que cumplen que $a_n > \mu^*(Q_m) \geq a_{n+1}$ para cierta $n \in \omega$. Así pues, tanto el número de particiones ajenas del nivel anterior como el número de elementos de Q que pueden cumplir esa propiedad para cada $n \in \omega$ debe ser finito y entonces cada Q_n^r es un conjunto finito de elementos de Q .

De i) y ii) vemos que dado cualquier $Q_m \in Q$ existe una única cadena tal que

$$Q_m \in Q^0_{n_0} \subseteq Q^1_{n_1} \subseteq \dots \subseteq Q^r_{n_r} \subseteq Q^{r+1}_{n_{r+1}} \subseteq \dots$$

donde cada Q^r_n es finito y como para cada $r \in \omega$, $n_r \geq n_{r+1}$ vemos que existe para cada $Q_m \in Q$ una $r \in \omega$ tal que $n_r = n_{r+1} = n_{r+2} = \dots$. A esta n_r la llamaremos n .

Ahora veamos una propiedad de estas cadenas.

iii) Dado $Q_m \in Q$ existe $s \in \omega$ tal que

$$Q_m \in Q^0_{n_0} \subseteq Q^1_{n_1} \subseteq \dots \subseteq Q^r_n \subseteq Q^{r+1}_n \subseteq \dots \subseteq Q^s_n = Q^{s+1}_n = Q^{s+2}_n = \dots$$

Veámoslo suponiendo que no es cierto, es decir, que existe un $Q_m \in Q$ tal que

$$Q_m \in Q^0_{n_0} \subseteq Q^1_{n_1} \subseteq \dots \subseteq Q^r_n \subseteq Q^{r+1}_n \subseteq \dots$$

pero que siempre hay algún $Q^{r_i}_{i_{r_i}}$ nuevo que se incorpora a la cadena, o dicho de otra manera, que hay una sucesión creciente infinita de naturales $\{r_i\}_{i\in\omega}$ tal que para cada $i \in \omega$

$$\left(Q^{r_i}_{i_{r_i}} \cap Q^{r_i}_n\right) = \emptyset$$

es decir, que $Q^{r_i}_{i_{r_i}}$ es nuevo en la cadena y

$$Q^{r_i}_{i_{r_i}} \subseteq Q^{r_i+1}_n$$

es decir, que $a_n > \sum_{Q_m \in Q^{r_i}_{i_{r_i}}} \mu^*(Q_m) \geq a_{n+1}$.

Ahora bien, dados $r_i, r_j \in \{r_i\}_{i\in\omega}$ y $r_i \neq r_j$ tenemos que

$Q^{r_i}_{i_{r_i}}$ y $Q^{r_j}_{i_{r_j}}$ son ajenos pues si $Q^{r_i}_{i_{r_i}} \subseteq Q^{r_j}_{i_{r_j}}$ entonces $r_i < r_j$ y $Q^{r_i}_{i_{r_i}} \subseteq Q^{r_i+1}_n \subseteq Q^{r_j}_n$ pero $\left(Q^{r_j}_{i_{r_j}} \cap Q^{r_j}_n\right) = \emptyset$.

Así pues, tenemos una familia infinita de subconjuntos ajenos de Q tales que para cada $i \in \omega$

$$a_n > \sum_{Q_m \in Q^{r_i}_{i_{r_i}}} \mu^*(Q_m) \geq a_{n+1}$$

y entonces

$$\infty = \sum_{i\in\omega} \left(\sum_{Q_m \in Q^{r_i}_{l_i}} \mu^*(Q_m) \right) \leq \sum_{Q_m \in Q} \mu^*(Q_m) < a_0$$

■

Ya con todo esto definimos para cada $Q_m \in Q$

$$B(Q_m) = \bigcup \{ Q^r_n \ / \ Q_m \in Q^r_n \}$$

Vemos que por las propiedades vistas anteriormente $B(Q_m) = Q^s_n$ para alguna $s, n \in \omega$. Así pues $B(Q_m)$ es un conjunto finito de elementos de Q, que cumple que $a_n > \sum_{Q_m \in B(Q_m)} \mu^*(Q_m)$.

Definamos entonces para cada $n \in \omega$

$$X_n = \begin{cases} \bigcup B(Q_m) & \text{si } B(Q_m) = Q^s_n; \\ \emptyset & \text{si no existe } Q_m \in Q \text{ tal que } B(Q_m) = Q^s_n. \end{cases}$$

Así vemos que $\{ X_n \ / \ n \in \omega \}$ es una familia de conjuntos que cumple:

i) $Z \subseteq \bigcup Q = \bigcup_{n\in\omega} X_n$.

ii) X_n es la unión finita de intervalos abiertos de extremos racionales.

iii) $a_n > \sum_{Q_m \in B(Q_m)} \mu^*(Q_m) \geq \mu^*(X_n)$.

■

De esto y de que μ es σ - aditiva tenemos

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{r\in Q} M_r\right) = \sum_{r\in Q} \mu(M_r) = 0$$

Si $\mu(M) > 0$ entonces $\mu(M_r) > 0$ para toda $r \in Q$. Consideremos el conjunto

$$W = \{r \in Q \ / \ 0 < r < 1\}$$

Tenemos que $|W| = \aleph_0$ y $\bigcup_{r\in W} M_r \subseteq [0\ ,2]$

Pero entonces por un lado tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{r\in W} M_r\right) = \sum_{r\in W} \mu(M_r) = \infty$$

y por otro lado

$$\mu\left(\bigcup_{r\in W} M_r\right) \leq \mu([0\ ,2]) = 2$$

En ambos casos llegamos a una contradicción.

■

Así pues tenemos

Teorema 1 (AE) No todo conjunto de reales es Lebesgue medible.

Ahora con la suposición del axioma de determinación demostraremos que todo conjunto de reales es Lebesgue medible.

Antes de esto, necesitamos demostrar el siguiente lema.

Lema 3 (**AD**) $\forall\ S \subseteq \mathbb{R} \Big(\forall\ Z \subseteq S\ \big(Z \in \mathbf{LM} \longrightarrow \mu^*(Z) = 0 \big) \Longrightarrow \mu^*(S) = 0 \Big)$.

La prueba la haremos para subconjuntos del intervalo $[0,1]$, no se pierde generalidad pues existe una biyección continua entre $(0,1)$ y $\mathbb{R}$.

Sea $S \subseteq [0,1]$ y $\epsilon > 0$, definimos:

$$A_n = \{ R \subseteq [0,1] \ /\ \mu^*(R) < \epsilon / 2^{2(n+1)} \ \wedge\ \exists\ B \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(Q)\ (R = \bigcup B) \}$$

donde Q es el conjunto de los intervalos abiertos de extremos racionales.

Cada A_n es numerable, sea $R_n(k)$ el k - ésimo elemento en esta enumeración de A_n.

Definimos ahora el *juego* G_σ como sigue:

El jugador I gana la *partida* $(a_0, b_0, a_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$ si y sólo si esta cumple que:

i) $a_n = 0 \ \vee\ a_n = 1$.

Sea $a = \sum_{n \in \omega} \frac{a_n}{2^{n+1}}$

ii) $a \in S$

iii) $a \notin \bigcup_{n \in \omega} R_n(b_n)$

Ahora veremos que I no tiene *estrategia ganadora*.

Supongamos que existe σ una *estrategia ganadora* para I en el *juego* G_σ.

Definimos la función $g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(b_0, b_1, \ldots, b_m, \ldots) = \sum_{n \in \omega} \Big(\sigma(a_0, b_0, a_1, \ldots, b_{n-1}) / 2^{n+1} \Big) = \sum_{n \in \omega} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

Sea $Z = g[\mathcal{N}]$. Como σ es una *estrategia ganadora* tenemos que $Z \subseteq S$. Z es analítico pues g es continua y por la proposición 13* tenemos $Z \in LM$; de nuestra hipótesis tenemos entonces que $\mu^*(Z) = 0$.

Por la proposición 14** para Z hay una colección $\{ M_n \ / \ n \in \omega \}$ tales que $Z \subseteq \bigcup_{n\in\omega} M_n$ y para cada $n \in \omega$, $M_n \in A_n$. Por la numeración de A_n tenemos que hay $(b_0 , b_1 , b_2 , \ldots, b_n , \ldots)$ una sucesión de naturales tal que para cada $n \in \omega$, $M_n = R_n(b_n)$.

Así, si el *movimiento* de II es $b = (b_0 , b_1 , b_2 , \ldots, b_n , \ldots)$ tenemos que

$$g(b) = \sum_{n\in\omega} \left(\sigma (a_0 , b_0 , a_1 , \ldots, b_{n-1}) / 2^{n+1} \right) = \sum_{n\in\omega} \frac{a_n}{2^{n+1}} \in \bigcup_{n\in\omega} R_n(b_n)$$

y I pierde la *partida*.

De todo esto se ve que existe $b \in \mathcal{N}$ tal que el jugador II cubre a Z y I pierde.

Por el axioma de determinación existe θ una *estrategia ganadora* del jugador II en el *juego* G_0 .

Para cada $s = (a_0 , a_1 , a_2 , \ldots, a_n) \in {}^{\breve{-}}2$ escribimos $R_s = R_n(b_n)$ donde $b_n = \theta (a_0 , b_0 , a_1 , \ldots, b_{n-1} , a_n)$. Como θ es una estrategia ganadora entonces para cada $a \in S$, como $a = \sum_{n\in\omega} \frac{a_n}{2^{n+1}}$, entonces

$$a \in \bigcup_{n\in\omega} \{ R_s \ / \ s = (a_0 , a_1 , a_2 , \ldots, a_n) \}$$

por lo tanto

$$S \subseteq \bigcup \left\{ R_s \ / \ s \in {}^{\breve{-}}2 \right\} = \bigcup_{n\in\omega} \left(\bigcup_{s\in {}^{\breve{-}}2} R_s \right)$$

Ahora bien, para cada $n > 1$, si $s \in {}^{\breve{-}}2$ entonces

* Si A es subconjunto analítico de reales, entonces $A \in LM$

** Dado un conjunto Z nulo y una sucesión de números positivos $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces existe una familia contable de conjuntos $X = \{ X_n \ / \ X_n \in \omega \}$ tal que $Z \subseteq \bigcup_{n\in\omega} X_n$ y para cada $n \in \omega$, X_n es la unión finita de intervalos abiertos con extremos racionales tal que $a_n > \mu^*(X_n)$.

$$\mu^*(R_s) < \epsilon/2^{2(n+1)} < \epsilon/2^{2n}$$

y por lo tanto, para cada $n \in \omega$

$$\mu^*\left(\bigcup_{s \in {}^{n}2} R_s\right) \leq (\epsilon/2^{2n})2^n = \epsilon/2^n$$

pero entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \omega}\left(\bigcup_{s \in {}^{n}2} R_s\right)\right) \leq \sum_{n \in \omega} \epsilon/2^n = \epsilon$$

por lo tanto $\mu^*(S) < \epsilon$ y de aquí que $\mu^*(S) = 0$.

∎

Ahora sí pasemos a demostrar el resultado.

Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, por la proposición 11* existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \in LM$, $X \subseteq A$ y para toda $Z \in LM$, $\left(Z \subseteq (A \setminus X) \implies \mu^*(Z) = 0\right)$.

Por el lema 3, $\mu^*(A \setminus X) = 0$.

Entonces tenemos que (A / X) es nulo y que $A \in LM$. Recordando la proposición 12** tenemos que $X \in LM$.

∎

Así tenemos

Teorema 2 Todo conjunto de reales es Lebesgue medible.

* Para toda $X \subseteq \mathbb{R}$ existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \in LM$, $X \subseteq A$ y para toda $Z \in LM$ si $Z \subseteq A \setminus X$ entonces $\mu^*(Z) = 0$

** Si $B \in LM$ y $B \setminus A$ es nulo $\longrightarrow A \in LM$

CAPÍTULO IV

El problema del Continuo

En este capítulo compararemos al axioma de elección y el axioma de determinación en lo que respecta con el problema del Continuo de Cantor. A diferencia de los otros capítulos, los resultados aquí no son tan contrapuestos, es decir, no son uno negación del otro.

El problema del Continuo de Cantor es responder a la pregunta ¿ cuántos puntos tiene una línea recta de un espacio euclidiano ? o equivalentemente, ¿ cuántos números reales hay ? o ¿ cuántos subconjuntos de números naturales existen ?

Cuando Cantor se plantea este problema está presuponiendo que todo conjunto tiene un número cardinal y que la sucesión de números cardinales está bien ordenada. Cantor prueba que el cardinal del Continuo es estrictamente mayor que el de los naturales.

En notación moderna, incluso debida a Cantor al final de su trabajo intelectual, tendríamos que $|\omega| = \aleph_0$ y $|\mathbb{R}| > \aleph_0$ o bien $|\mathbb{R}| \geq \aleph_1$.

En este contexto, el problema del Continuo es decidir ¿ cuál de los cardinales incontables, es decir, cuál de los $\aleph_\alpha$ con $\alpha \geq 1$, es el cardinal de los números reales ?

Cantor conjetura que es el primero, es decir $\aleph_1$, en notación

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1 \quad \text{o bien} \quad 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \tag{1}$$

Esta es la Hipótesis del Continuo de Cantor.

También dentro de este contexto, esta hipótesis es equivalente a

$$\forall \ X \subseteq \mathbb{R} \ \left(X \text{ es incontable } \longrightarrow \ X \sim \mathbb{R} \right) \tag{2}$$

Así pues, para Cantor el resolver el problema se reduce a contestar afirmativamente a (1) o a (2). Obsérvese que una respuesta negativa a esto no resolvería el problema del Continuo.

A la luz del tratamiento moderno que se le da a la teoría de conjuntos, en nuestro caso a la teoría formal ZF, el problema del Continuo sigue siendo válido; sin embargo cuando trabajamos sin el axioma de elección las cosas cambian un poco.

En ZF, el presuponer que el conjunto de cardinales está bien ordenado, en particular totalmente ordenado, es tanto como suponer que la dominancia ($\preceq$) es total, lo cual es equivalente al axioma de elección.

Analizaremos ahora en ZF lo que ocurre con (1), (2) y el problema del Continuo.

Si $\mathbb{R}$ no fuera bien ordenable, tendríamos que

$$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = \left\{ X \ / \ X \sim \mathbb{R} \ \wedge \ \ \forall \ Y \left(Y \sim \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \rho(X) \leq \rho(Y) \right) \right\}$$

Y así $2^{\aleph_0}$ no es un ordinal y por tanto no es ningún cardinal - ordinal, en particular $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \neq \aleph_1$.

A la luz del lema 1[*] tenemos la siguiente

Proposición 15 (AD) $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \neq \aleph_1$.

Es decir, bajo la suposición del axioma de determinación, la hipótesis del Continuo es falsa, sin embargo este resultado no nos dice nada acerca del problema del Continuo de Cantor.

En contraparte, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, entonces $\mathbb{R}$ es bien ordenable y por tanto $\mathbb{R} \sim \aleph_1$. Así habría tantos números reales como ordinales tiene el primer cardinal - ordinal incontable y el problema del Continuo quedaría resuelto.

[*] Si $2^{\aleph_0}$ es bien ordenable entonces existe $A \subseteq N$ tal que G_A no está determinado.

En lo que respecta a (2), lo primero que hay que decir es que su equivalencia con (1) es bajo la suposición del axioma de elección. De hecho (2) $\longrightarrow$ (1) necesita del axioma de elección, la conversa no.

Así, en ZF , el enunciado (2) en sí mismo no nos dice nada acerca del problema del Continuo de Cantor. Al final de este capítulo probaremos que bajo la suposición del axioma de determinación es verdadero.

Ahora nuestra intención será demostrar, a partir de la suposición del axioma de elección, que si existe una medida sobre $2^{\aleph_0}$ entonces $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Empezaremos probando la existencia de la matriz de Ulam, necesaria para la demostración del resultado.

Definición Una matriz de Ulam es una colección $\{ A_{\alpha n} \ / \ \alpha < \aleph_1 \ , \ n < \aleph_0 \}$ que cumple: para toda $n < \aleph_0$ y para todo $\alpha , \beta < \aleph_1$

i) $(\alpha \neq \beta \implies (A_{\alpha n} \cap A_{\beta n}) = \emptyset)$

ii) Para cada $\alpha < \aleph_1$, $\left(\aleph_1 - \left(\bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha n} \right) \text{ es contable } \right)$.

Lema 4 **(AE)** Existe una matriz de Ulam.

Demostración

Para cada $\epsilon < \aleph_1$, sea $f_\epsilon : \aleph_0 \longrightarrow \aleph_1$ tal que $\epsilon \subseteq ran\, [f_\epsilon]$.

Vemos que para cada $\epsilon < \aleph_1$ hay una $f : \aleph_0 \longrightarrow \aleph_1$ tal que $\epsilon \subseteq ran\, [f]$ pues si $\epsilon < \aleph_1$, entonces existe β numerable tal que $\epsilon < \beta < \aleph_1$ y por lo tanto hay una $g : \aleph_0 \longrightarrow \beta$ biyectiva.

Con ayuda del axioma de elección, para cada $\epsilon < \aleph_1$ elegimos una $f_\epsilon : \aleph_0 \longrightarrow \aleph_1$ tal que $\epsilon \subseteq ran\, [f_\epsilon]$.

Ahora, para cada $\alpha < \aleph_1$ y cada $n < \aleph_0$ definimos $A_{\alpha n}$ como sigue:

$$\epsilon \in A_{\alpha n} \quad \text{si y sólo si} \quad f_\epsilon(n) = \alpha \ .$$

Ahora veremos que cumple con las condiciones i) y ii).

Sean $n < \aleph_0$ y $\alpha, \beta < \aleph_1$.

Supongamos que $\epsilon \in (A_{\alpha n} \cap A_{\beta n})$. Entonces por definición tenemos $f_\epsilon(n) = \alpha$ y $f_\epsilon(n) = \beta$, por lo tanto $\alpha = \beta$.

Ahora sea $\alpha < \aleph_1$. Probaremos que

$$\aleph_1 \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha n}\right) \subseteq \alpha$$

Primeramente vemos que si $\epsilon > \alpha$ entonces $\alpha \in \epsilon \subseteq ran\ [f_\epsilon]$ y por lo tanto hay $n < \aleph_0$ tal que $f_\epsilon(n) = \alpha$. Dicho de otra manera, si $\epsilon > \alpha$, entonces $\epsilon \in \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha n}$.

Ahora bien, si $\beta \in \aleph_1 \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha n}$, entonces $\beta \notin \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha n}$ y por lo tanto $\beta \not> \alpha$, es decir, $\beta < \alpha$. Por lo que

$$\aleph_1 \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha n}\right) \subseteq \alpha$$

con α contable.

∎

Ahora pasemos a demostrar otros dos lemas

Lema 5 (AE) Unión contable de contables es contable.

Sea $\{A_i \ / \ i \in I\}$ una familia de conjuntos tales que I es contable y para cada $i \in I$, A_i es contable.

Así pues

i) Hay $f : \omega \longrightarrow I$ suprayectiva.

ii) Para cada $i \in I$ existe $g\ \left(g : \omega \longrightarrow A_i \wedge g \text{ suprayectiva}\right)$

De lo anterior tenemos que

$$I = \{ f(n) \ / \ n \in \omega \} \tag{1}$$

Por el axioma de elección para cada $i \in I$ elegimos a $g_i : \omega \longrightarrow A_i$ suprayectiva.

Ahora bien, definamos:

$$h : \omega \times \omega \longrightarrow \bigcup_{n \in \omega} A_{f(n)}$$

como sigue: si $m, n \in \omega$

$$h(m, n) = g_{f(m)}(n)$$

h es suprayectiva. Nuevamente por el axioma de elección tenemos que hay una función inyectiva de $\omega \times \omega$ en $\bigcup_{n \in \omega} A_{f(n)}$. Finalmente, de esto y de (1) tenemos que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es contable.

■

Lema 6 **(AE)** No existe una medida no trivial σ-aditiva sobre $\aleph_1$.

Vamos a suponer lo contrario.

Sea μ una medida sobre $\aleph_1$.

Por el lema 4, hay $\{ A_{\alpha n} \ / \ \alpha < \aleph_1, n < \aleph_0 \}$ la cual es una matriz de Ulam.

Sea $\alpha < \aleph_1$. Como $\aleph_1 \setminus \left(\bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha n} \right)$ es contable entonces

$$\mu \left(\aleph_1 \setminus \left(\bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha n} \right) \right) = 0 \text{ y por tanto } \mu \left(\bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha n} \right) = 1$$

Ahora bien, como los $A_{\alpha n}$ son ajenos y μ es σ - aditiva tenemos que para alguna $n \in \omega$, $\mu \left(A_{\alpha n} \right) > 0$.

Ahora sea

$$B_n = \{ \alpha < \aleph_1 \ / \ \mu(A_{\alpha n}) > 0 \}$$

Así $\aleph_1 = \bigcup_{n\in\omega} B_n$

Por el lema 5 concluimos que hay un $n \in \omega$ tal que $|B_n| = \aleph_1$. Pero entonces, si α , $\beta \in B_n$ tenemos que

$$(A_{\alpha n} \cap A_{\beta n}) = \emptyset \quad y \quad \mu\left(A_{\alpha n}\right), \mu\left(A_{\beta n}\right) > 0$$

Por lo que $\{ A_{\alpha n} \;/\; \alpha \in B_n \}$ es una familia incontable de subconjuntos disjuntos de medida positiva, cosa que contradice la proposición 5* .

∎

Teorema 3 Si existe una medida en $2^{\aleph_0}$ entonces $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$ y por lo tanto $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

∎

Como vimos al principio del capítulo, bajo el axioma de elección es equivalente el que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y que todo subconjunto incontable de reales sea equipotente a $\mathbb{R}$. Así pues tenemos el siguiente

Corolario 2 (AE) Si $2^{\aleph_0}$ admite una medida entonces hay un subconjunto de reales incontable y no biyectable con $\mathbb{R}$.

* (AEN) Si μ es una medida en A, entonces toda familia de conjuntos disjuntos subconjuntos de A de medida positiva es contable.

Ahora bajo la suposición de axioma de determinación demostraremos que todo conjunto incontable de reales es equipotente a ${}^{\omega}2$.

Para demostrar este resultado primero empezaremos definiendo un nuevo tipo de juego y sus consecuencias.

El *juego* H_X se jugará en ${}^{\omega}2$.

Sea pues $X \subseteq {}^{\omega}2$. El jugador I *tira* una sucesión finita de ceros y unos, incluso la sucesión vacía, es decir, su i-ésima *tirada* será $s_i \in {}^{<\omega}2$. En cambio el jugador II solamente *tira* un 0 ó un 1, es decir, la i-ésima *tirada* será $n_i \in \{0,1\}$.

Así, al final tenemos la *partida* $p = s_0 \frown n_0 \frown s_1 \frown n_1 \ldots$

I gana si $p \in X$ y II gana si $p \notin X$.

La noción de *estrategia* en H_X es una generalización natural. Veamos la relación que existe entre el nuevo tipo de *juego* con respecto al ortodoxo.

Proposición 16 Para cada *juego* H_X hay un *juego* G_A con $A \subseteq \mathcal{N}$ tal que si I tiene una *estrategia ganadora* en G_A entonces existe otra *estrategia ganadora* para I en H_X y análogamente para II .

Sea $h : {}^{<\omega}2 \longrightarrow {}^{<\omega}\omega$ definida de la siguiente manera:

Sea $s = (s_0 , s_1 , \ldots , s_n)$ una sucesión finita de ceros y unos.

$$h(s) = \begin{cases} (1-s_0 , 1-s_1 \ldots , 1-s_n) & \text{si } s \neq \emptyset ; \\ \emptyset \text{ si } s = \emptyset . \end{cases}$$

Sea *bi* (n) la representación binaria del número natural n .

Sea $g : \omega \longrightarrow {}^{<\omega}2$ definida como:

$$g(n) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } n = 0 ; \\ h\left(bi\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) \text{ si } n \text{ es impar;} \\ bi\left(\frac{n}{2}\right) \text{ si } n \text{ es par y } n \neq 0. \end{cases}$$

Vemos que g es una biyección.

Ahora sea $f : {}^{\omega}\omega \longrightarrow {}^{\omega}2$ definida como sigue:

Si $p \in \mathcal{N}$,

$$f(p) = f(p_0, p_1, p_2 \ldots) = \left(g(p_0)^\frown g(p_1)^\frown g(p_2) \ldots \right)$$

Con esto, vemos que dado $X \subseteq {}^{\omega}2$ definimos $A = \left(A_1 \cup A_2 \right) \subseteq \mathcal{N}$ donde

$$A_1 = \{ p \ / \ p \in \mathcal{N} \text{ y } f(p) \in X \}$$

y

$$A_2 = \{ p \in \mathcal{N} \ / \ \text{si } p = (p_0, p_1, \ldots) \longrightarrow \exists \ r \in \omega \text{ impar } (p_r \neq 1 \ \vee \ p_r \neq 2) \}$$

Ahora, para cada par de sucesiones $s_0, \ldots, s_l$ y $n_0, \ldots, n_m$ donde $s_i \in {}^{<\omega}2$ y $n_i \in \{0,1\}$ definimos un par de sucesiones de naturales $a_0, \ldots, a_l$ y $b_0, \ldots, b_m$ como

$$a_i = g^{-1}(s_i) \quad \text{y} \quad b_i = g^{-1}(n_i)$$

Ahora bien, dada σ una *estrategia* para I en el *juego* G_A y un par de sucesiones de misma longitud $s_0, \ldots, s_m$ y $n_0, \ldots n_m$ donde $s_i \in {}^{<\omega}2$ y $n_i \in \{0,1\}$ definimos σ' una *estrategia* para I en H_X como sigue:

$$\sigma'(\emptyset) = g\left(\sigma(\emptyset)\right);$$

$$\sigma'(s_0, n_0, s_1, n_1 \ldots, s_m, n_m) =$$

$$g\left(\sigma\ (a_0, b_0, a_1, \ldots, a_m, b_m)\right).$$

Análogamente, dadas θ una *estrategia* para II en G_A y un par de sucesiones $s_0, \ldots, s_m$ y $n_0, \ldots, n_{m-1}$ con $s_i \in {}^{<\omega}2$ y $n_i \in \{0,1\}$ de longitudes m y

$m - 1$ respectivamente definimos θ' una *estrategia* para II en H_X como sigue:

$$\theta'(s_0) = g\left(\theta(a_0)\right);$$

$$\theta'(s_0, n_0, s_1, n_1 \ldots, n_{m-1}, s_m) =$$

$$g\left(\theta\ (a_0, b_0, a_1, \ldots, b_{m-1}, a_m)\right).$$

i) Ahora veamos que si σ' no es *estrategia ganadora* en H_X entonces σ no lo es en G_A.

Supongamos existe $n = (n_0, n_1, n_2 \ldots) \in {}^{\omega}2$ que hace que $p' = \sigma' \circ n \notin X$, es decir, que I pierda esa *partida* con la *estrategia* σ'.

La *partida* p' sería:

$$(s_0 {}^\frown n_0 {}^\frown s_1 {}^\frown n_1 \ldots) \notin X$$

Como g es suprayectiva, hay $a_0, b_0, a_1, b_1 \ldots \in \omega$ tales que

$$p' = (g(a_0) {}^\frown g(b_0) {}^\frown g(a_1) {}^\frown g(b_1) \ldots)$$

Pero entonces tendríamos que

$$p = (a_0, b_0, a_1, b_1 \ldots) \notin A$$

Esto último se debe en primer lugar a que $p \notin A_2$ pues $b_i = g^{-1}(n_i)$ con $n_i \in \{0,1\}$, es decir, $b_i \in \{1, 2\}$. Y en segundo lugar $p \notin A_1$ pues si

$$(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots) \in A$$

entonces

$$f(a_0, b_0, a_1, b_1 \ldots) =$$

$$(g(a_0)^\frown g(b_0)^\frown g(a_1)^\frown g(b_1)\ldots) \in X$$

es decir

$$(s_0{}^\frown n_0{}^\frown s_1{}^\frown n_1 \ldots) = p' \in X$$

Por lo tanto, si σ'no es una *estrategia ganadora* en H_X entonces σ no es una *estrategia ganadora* en G_A .

■

ii) Ahora veamos que pasa lo análogo para las *estrategias* de II .

Supongamos que σ' no fuera una *estrategia ganadora* en H_X .

Sea $(s_0 , s_1 , s_2 , \ldots)$ una sucesión infinita de sucesiones finitas de ceros y unos que hace perder una *partida* a II en H_X con la *estrategia* θ'.

La *partida* sería:

$$(s_0{}^\frown n_0{}^\frown s_1{}^\frown n_1{}^\frown s_2 \ldots) = (s_0{}^\frown \theta'(s_0)^\frown s_1{}^\frown \theta'(s_0 , n_0 , s_1) \ldots) =$$

$$\left(g(a_0)^\frown g(b_0)^\frown g(a_1)^\frown g(b_1)\ldots\right) \in X$$

donde $a_i , b_i \in \omega$.

Si $(a_0 , b_0 , a_1 , \ldots, a_n , b_n , \ldots) \notin A$ entonces en particular

$$(a_0 , b_0 , a_1 , \ldots, a_n , b_n , \ldots) \notin A_1$$

es decir

$$f\left((a_0 , b_0 , a_1 , \ldots, a_n , b_n , \ldots) \right) = \left(g(a_0)^\frown g(b_0)^\frown g(a_1)\ldots\right) \notin X$$

lo cual es contradictorio. Así $(a_0 , b_0 , a_1 , \ldots, a_n , b_n , \ldots) \in A$.

Pero entonces $(a_0 , a_1 , a_2 , \ldots) \circ \theta \in A$ y por tanto II pierde la *partida* en G_A con la *estrategia* θ .

■

Otra propiedad que tiene este nuevo tipo de *juego* es que si el jugador II tiene una *estrategia ganadora* en H_X se debe a que X es contable.

En lo que sigue sea $X \subseteq {}^\omega 2$ y θ una *estrategia ganadora* para II en H_X .

Definimos $B \subseteq {}^\omega 2$ como sigue:

$b \in B$ si y sólo si hay $s_0 , \ldots , s_t \in {}^{\underset{\smile}{\omega}} 2$ tales que si

$$n_i = \theta \, (s_0 \, , n_0 \, , s_1 \, , n_1 \, , \ldots , s_{i-1} , n_{i-1} , s_i \,) \quad \text{para } i \text{ en } \{ 0 , \ldots , t \}$$

entonces

$$b = s_0 {}^\frown n_0 {}^\frown \ldots {}^\frown s_t {}^\frown n_t$$

Con ayuda de B podemos caracterizar a los elementos del complemento de X .

Proposición 17 Para cualquier $p \in {}^\omega 2$,

si $\forall \; b \in B \, , \Big(b \subset p \longrightarrow \exists \; s \in {}^{\underset{\smile}{\omega}} 2 \; \big(b^\frown s^\frown \theta \, (b \, , s \,) \subset p \, \big) \Big)$ (1)

entonces $p \notin X$.

Sea $p \in {}^\omega 2$ y que cumpla con (1). Como θ es ganadora para II en H_X , basta probar que hay una $\{ s_n \; / \; n \in \omega \; \} \subseteq {}^{\underset{\smile}{\omega}} 2$ tales que

$$(s_0 \, , s_1 \, , \ldots) \circ \theta = p$$

Primeramente bien ordenemos a ${}^{\underset{\smile}{\omega}} 2$ con la biyección g dada en la proposición 16.

Definiremos recursivamente a $\{ s_n \; / \; n \in \omega \; \} \subseteq {}^{\underset{\smile}{\omega}} 2$ definiendo simultaneamente $\{ b_n \; / \; n \in \omega \; \} \subseteq B$ de tal suerte que si $n \in \omega$ entonces

$$b_{n+1} = b_n {}^\frown s_{n+1} {}^\frown \theta \, (b_n {}^\frown s_{n+1} \,) \quad \text{y} \quad b_{n+1} \subseteq p$$

Puesto que $\emptyset \in B$ y $\emptyset \subseteq p$, por (1) tenemos que hay una $s \in {}^{\underset{\smile}{\omega}} 2$ tal que

$$s {}^\frown \theta \, (s \,) \subseteq p$$

Sea s_0 la primera sucesión con tal propiedad y sea

$$b_0 = s_0 {}^\frown \theta(s_0)$$

Observemos que $b_0 \in B$ y $b_0 \subseteq p$.

Supongamos recursivamente definidas $s_n \in {}^{\omega}2$ y $b_n \in B$.

Como $b_n \in B$ y $b_n \subseteq p$, por (1) hay una $s \in {}^{\omega}2$ tal que:

$$b_n {}^\frown s {}^\frown \theta(b_n {}^\frown s) \subseteq p$$

Sea s_{n+1} la primera sucesión con tal propiedad y sea

$$b_{n+1} = b_n {}^\frown s_{n+1} {}^\frown \theta(b_n {}^\frown s_{n+1})$$

Así, $b_{n+1} \in B$ y $b_{n+1} \subseteq p$.

De la definición anterior se observa que:

$$(s_0, s_1, s_2, \ldots) \circ \theta = p$$

y por lo tanto $p \notin X$.

■

Ahora bien, si tenemos que para cada $b \in B$

$$F_b = \left\{ p \in {}^{\omega}2 \;\; / \, b \subset p \;\; \wedge \;\; \forall\, s \in {}^{\omega}2 \;\left(b^\frown s^\frown \theta(b, s) \not\subset p \right)\right\}$$

por lo proposición anterior obtenemos que

$$X \subseteq \bigcup \{ F_b \; / \, b \in B \}$$

Así pues, para probar que X es contable, basta ver que la parte derecha da la contención lo es. De hecho tenemos algo más fuerte.

Proposición 18 Para cada $b \in B$, F_b contiene sólo un elemento.

Sean $b \in B$ y $p \in F_b$. Así $b = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ y $p = b^\frown (p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots)$.

Para ver que F_b tiene un sólo elemento es suficiente ver que p_{n+1} , $p_{n+2}, \ldots$ están determinados de manera única.

Como para toda $s \in {}^{<\omega}2$

$$b^\frown s^\frown \theta(b^\frown s) \not\subset p \tag{2}$$

en particular tenemos para la sucesión vacía que:

$$b^\frown \emptyset^\frown \theta(b^\frown \emptyset) = b^\frown \theta(b) \not\subset p$$

pero $b \subseteq p$, por lo que:

$$p_{n+1} \neq \theta(b)$$

Ahora como θ toma solamente valores de 0 ó 1, p_{n+1} está forzado a ser $1 - \theta(b)$ y el argumento se repite.

Como

$$b^\frown (p_{n+1}, \ldots, p_{n+j}) \subseteq p$$

y por (2)

$$b^\frown (p_{n+1}, \ldots, p_{n+j})^\frown \theta(b^\frown (p_{n+1}, \ldots, p_{n+j})) \not\subset p$$

tenemos que

$$p_{n+j+1} \neq \theta(b^\frown (p_{n+1}, \ldots, p_{n+j}))$$

Sea $X = \mathcal{G}^{-1}[\ Y\ ]$. Tenemos entonces que $X \subseteq \left({}^{\omega}2 \setminus D \right) \subseteq {}^{\omega}2$ y X incontable.

Consideremos ahora el *juego* H_X .

Bajo la suposición del axioma de determinación y a la luz del lema 7, el jugador I tiene una *estrategia ganadora* σ en H_X .

Con la notación de la proposición anterior, consideremos la función continua e inyectiva h_σ del espacio ${}^{\omega}2$ en si mismo.

Como σ es una *estrategia ganadora* para I tenemos:

$$h_\sigma[\ {}^{\omega}2\ ] \subseteq X$$

Si ponemos $A = \left(\mathcal{G} \circ h_\sigma\right)[\ {}^{\omega}2\ ]$, tendremos que $A \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$.

Ahora bien, como tanto $\mathcal{G}$ y h_σ son inyectivas, $A \sim {}^{\omega}2$ y de aquí que $Y \sim {}^{\omega}2$.

∎

Con esto terminamos el objetivo de este capítulo, sin embargo tenemos un resultado inmediato de este teorema, el cual necesitaremos más adelante.

Corolario 3 Todo subconjunto de reales incontable contiene un subconjunto perfecto.

Consideremos toda la notación de la prueba del teorema.

Como θ es una *estrategia ganadora*

$$h_\sigma[\ {}^{\omega}2\ ] \subseteq X \subseteq {}^{\omega}2 \setminus D$$

y por ser $h_\sigma : {}^{\omega}2 \longrightarrow {}^{\omega}2$ continua entonces

$$\mathcal{G} \circ h_\sigma : {}^{\omega}2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua.

Ahora bien, sabemos que funciones continuas mandan subconjuntos compactos en compactos, y en el caso en que el contradominio sea un espacio de Hausdorff, resulta

CAPÍTULO V

Cardinales Medibles

Nuestra intención ahora será demostrar, con ayuda del axioma de elección, que $\aleph_1$ no es medible.

Para demostrar este resultado, primero veamos el siguiente lema.

Lema 8 **(AE)** Si κ es un cardinal medible entonces κ es un cardinal fuertemente inaccesible.

Procederemos por reducción al absurdo.

Sea κ un cardinal medible y por tanto $\kappa > \omega$ y κ regular. Sea λ un cardinal que cumple:

i) $\lambda < \kappa$

ii) $2^\lambda \not\leq \kappa$

Por el axioma de elección y ii) vemos que $\kappa \leq 2^\lambda$, por lo cual existe $A \subseteq {}^\lambda 2$ tal que A es biyectable con κ . A partir de esta biyección y de la medida bivaluada sobre κ definimos una medida bivaluada μ sobre A , a semejanza de lo comentado en el capítulo II.

Ahora bien, para cada $\alpha < \lambda$ definimos

$$A^1_\alpha = \{ f \in A \ / \ f(\alpha) = 1 \} \ \text{y} \ A^0_\alpha = \{ f \in A \ / \ f(\alpha) = 0 \}$$

con lo cual construimos la función $g : \lambda \longrightarrow \{0,1\}$ como sigue: Si $\alpha < \lambda$

$$g(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu'(A^0_\alpha) = 1 ; \\ 1 & \text{si } \mu'(A^1_\alpha) = 1. \end{cases}$$

Observemos que para cada $\alpha < \lambda$, $(A^0_\alpha \cap A^1_\alpha) = \emptyset$ y $(A^0_\alpha \cup A^1_\alpha) = A$ por lo cual

$$\mu(A) = \mu(A_\alpha^0) + \mu(A_\alpha^1) = 1$$

y

$$1 - \mu(A_\alpha^0) = \mu(A_\alpha^1)$$

resultando así que la función g está bien definida.

Por la forma en que construimos g, vemos que para cada $\alpha < \lambda$

$$\mu\left(A_\alpha^{g(\alpha)}\right) = 1$$

siendo así que al considerar la κ-aditividad de la medida μ tenemos

$$\mu\left(\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha^{g(\alpha)}\right) = 1$$

Ahora veamos quien está en $\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha^{g(\alpha)}$.

Sea $f \in \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha^{g(\alpha)}$, entonces para cada $\alpha < \lambda$, $f \in A_\alpha^{g(\alpha)}$ que por definición implica que $f(\alpha) = g(\alpha)$, y esto para cada $\alpha < \lambda$ por lo cual $g = f$. Entonces tenemos que $\bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha^{g(\alpha)}$ es un conjunto de un solo elemento, a saber g, y con medida de valor 1, contradiciendo la definición de medida.

Así, si κ no es fuertemente inaccesible, entonces no puede ser medible.

∎

Ahora bien, usando nuevamente el axioma de elección, sabemos que $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$, por lo cual $\aleph_1$ no es fuerte y por tanto no es fuertemente inaccesible, y por lo anterior tampoco medible.

∎

Así tenemos

Teorema 5 **(AE)** $\aleph_1$ no es medible.

Ahora demostraremos con ayuda del axioma de determinación que $\aleph_1$ es medible.

En la demostración de este teorema usaremos conceptos y resultados del apéndice II para llegar a la construcción de un ultrafiltro no principal σ - aditivo sobre $\aleph_1$, lo cual por el lema 2* implica que $\aleph_1$ es medible.

Primeramente definimos el siguiente orden parcial sobre $\mathcal{N}$. Recordemos que $\mathbf{L}\,[\,A\,]$ denota el universo definible a partir de A ** .

Dados p , $q \in \mathcal{N}$ decimos que

$$p \preceq q \quad \text{si y sólo si} \quad p \in \mathbf{L}\,[\,q\,]$$

A partir de este orden parcial definimos la relación $\cong$ como sigue

$$p \cong q \quad \text{si y sólo si} \quad p \preceq q \ \wedge \ q \preceq p$$

Por las propiedades de $\mathbf{L}\,[\,A\,]$, $\cong$ es de equivalencia.

Diremos que $A \subseteq \mathcal{N}$ es $\cong$- cerrado si

$$\forall\ p\,,\,q \in \mathcal{N} \Big((\,p \in A \ \wedge\ q \cong p\,) \implies q \in A \Big)$$

Sea $\mathcal{B} = \{\,A \subseteq \mathcal{N}\ /\ A \text{ es } \cong\text{- cerrado}\}$

Notemos que si $A \in \mathcal{B}$, entonces $(\,\mathcal{N} \setminus A\,) \in \mathcal{B}$.

Ahora bien, para cada p en $\mathcal{N}$ definimos:

$$cono(p\,) = \{\,q\ /\ p \in \mathbf{L}\,[\,q\,]\}$$

Si consideramos la proposición 1 del apéndice II*** este conjunto es equivalente a

---

* [AEN si $\kappa > \aleph_1$] Si μ es una medida bivaluada y κ - aditiva sobre κ entonces existe F κ - ultrafiltro sobre κ. Si existe F un κ - ultrafiltro sobre κ entonces existe μ una medida bivaluada y κ - aditiva sobre κ.

** Ver Apéndice II.

*** Sean A y B conjuntos. Si $A \in L[\,B\,]$ entonces tenemos que $L[\,A\,] \subseteq L[\,B\,]$.

$$\{ q \in \mathcal{N} \ / \ \mathbf{L}\ [p] \subseteq \mathbf{L}\ [q] \}$$

y con esta notación tenemos la siguiente

Proposición 19 Todo *cono* es $\cong$ - cerrado

Sea $p \in cono(q)$ y $r \cong p$.

Así $q \in \mathbf{L}\ [p]$ y $\mathbf{L}\ [r] = \mathbf{L}\ [p]$, por lo que $q \in \mathbf{L}\ [r]$, siendo así que $r \in cono(q)$

■

Sea $\mathcal{F} = \{ A \in \mathcal{B} \ / \ \exists \ p \in \mathcal{N}$ tal que $cono(p) \subseteq A \}$

Ahora demostraremos varias propiedades del conjunto $\mathcal{F}$ que serán necesarias para la construcción del ultrafiltro. De hecho probaremos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro propio en la sub - álgebra del álgebra $\mathcal{P}(\mathcal{N})$, formada por los $\cong$ - cerrados.

Proposición 20 Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq C$ con $C \in \mathcal{B}$ entonces $C \in \mathcal{F}$.

Si $A \in \mathcal{F}$ entonces existe $p \in \mathcal{N}$ tal que $cono(p) \subseteq A$ por lo cual $cono(p) \subseteq C$. Si $C \in \mathcal{B}$ entonces $C \in \mathcal{F}$.

■

En el siguiente resultado haremos uso del axioma de elección numerable para una familia numerable de subconjuntos de reales. Obsérvese que debido a la proposición 3* este resultado, y por tanto sus consecuencias, no entran en contradicción alguna con el axioma de determinación .

Proposición 21 $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones contables.

Sea $\{ A_i \ / \ i \in \omega \}$ una familia contable de elementos de $\mathcal{F}$.

Veamos primero que $\bigcap_{i \in \omega} A_i$ es $\cong$ - cerrado.

* El axioma de determinación implica que para toda familia contable de conjuntos de reales no vacíos existe una función de elección.

Sean $p \in \bigcap_{i \in \omega} A_i$ y $q \cong p$.

Como $p \in A_i$ para toda $i \in \omega$, y cada A_i es $\cong$ - cerrado, $q \in A_i$ para cada $i \in \omega$. Por lo tanto $q \in \bigcap_{i \in \omega} A_i$ y entonces $\bigcap_{i \in \omega} A_i$ es $\cong$ - cerrado.

Ahora veamos que $\bigcap_{i \in \omega} A_i$ contiene un *cono.*

Sabemos que cada A_i contiene al menos un *cono*, entonces primero escogeremos para cada A_i un único $a^i \in \mathcal{N}$ tal que $cono(a^i) \subseteq A_i$.

Para esto consideremos la función J del capítulo I, que es una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{N}$.

Para cada $i \in \omega$ sea

$$A_i' = \{ a \in \mathcal{N} \ / \ cono(a) \subseteq A_i \}$$

y

$$X_i = J^{-1}(A_i')$$

$\{ X_i \ / \ i \in \omega \}$ es una familia contable de conjuntos de reales. Usando el axioma de elección numerable tenemos una función de elección f que escoge un elemento de cada X_i. Para cada $i \in \omega$ sea

$$a^i = J(f(X_i)) \in A_i'$$

Observemos que $cono(a^i) \subseteq A_i$.

Consideremos ahora la función inyectiva y suprayectiva $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ definida como

$$g(m, n) = \tfrac{1}{2}\Big((m+n)^2 + 3m + n\Big)$$

Si para cada $i \in \omega$ tenemos

$$a^i = (a_0{}^i, a_1{}^i, \ldots, a_n{}^i, \ldots)$$

entonces definimos

$$b = (b_0 , b_1 , \ldots, b_m , \ldots)$$

donde

$$b_m = a_n{}^i \quad y \quad m = g (i , n)$$

Observemos que con esta notación, para cada $i \in \omega$

$$a^i = (b_{g(i,0)} , b_{g(i,1)} , \ldots , b_{g(i,n)} , \ldots)$$

por lo cual, como $b \in L [b]$, tenemos que para cada $i \in \omega$, $a^i \in L [b]$.

Ahora veamos que el *cono*$(b) \subseteq \bigcap_{i \in \omega} A_i$.

Sea $p \in$ *cono*(b), entonces $L [b] \subseteq L [p]$, por lo cual para cada $i \in \omega$, $a^i \in L [p]$, por tanto $p \in$ *cono*$(a^i) \subseteq A_i$ para cada $i \in \omega$, y de aquí que $p \in \bigcap_{i \in \omega} A_i$.

Así pues *cono*$(b) \subseteq \bigcap_{i \in \omega} A_i$.

De todo esto concluimos que $\bigcap_{i \in \omega} A_i \in \mathcal{F}$.

■

Proposición 22 Sea $A \in \mathcal{B}$. Si existe una *estrategia ganadora* para I en el *juego* G_A entonces A contiene un *cono*.

Análogamente para una *estrategia ganadora* para II y $\mathcal{N} \setminus A$.

Sea $A \in \mathcal{B}$ y σ una *estrategia ganadora* para I en el juego G_A .

Ahora recordemos la demostración de la proposición 2 del capítulo II. Si con c_n denotamos al n - ésimo primo, tenemos que para cada $m \in \omega$, si $m > 1$ entonces existe una única $(b_0 , b_1 , b_2 , \ldots, b_n) \in {}^{<}\omega$ tal que $m = 2^{b_0} 3^{b_1} \ldots c_n^{b_n + 1}$.

Ahora bien, por el teorema 1 del apéndice II* , y el corolario 3** (**AD**) sabemos que si $p \in \mathcal{N}$ entonces $\aleph_1{}^{L[p]} < \aleph_1$.

A partir de esto definimos una función $f : \mathcal{N} \longrightarrow \aleph_1$ como sigue: para cada $p \in \mathcal{N}$ sea

$$f(p) = \aleph_1{}^{L[p]}$$

Notemos que para cualquier $X \subseteq \aleph_1$, el conjunto $f^{-1}[X]$ es $\cong$- cerrado, pues si $p \cong q$ entonces $L[p] = L[q]$ y por tanto $f(p) = \aleph_1{}^{L[p]} = \aleph_1{}^{L[q]} = f(q)$.

Pasemos ahora a definir nuestro candidato a ser un ultrafiltro sobre $\aleph_1$. Sea

$$\mathcal{U} = \{ X \subseteq \aleph_1 \ / \ f^{-1}[X] \in \mathcal{F} \}$$

Por la nota anterior, el hecho de que X pertenezca o no a $\mathcal{U}$ depende solamente de que $f^{-1}[X]$ contenga un cono o no.

$\mathcal{U}$ tiene las siguientes propiedades.

Proposición 24 (**AD**) Para todo $X \subseteq \aleph_1$, $X \in \mathcal{U}$ o $(\aleph_1 \setminus X) \in \mathcal{U}$, pero no ambos.

Esto es inmediato de la definición de $\mathcal{U}$ y la proposición 23.

∎

Proposición 25 $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones contables.

Por la proposición 21 tenemos que $\bigcap_{n \in \omega} f^{-1}[X_n] \in \mathcal{F}$.

∎

Proposición 26 Sean $X , Y \subseteq \aleph_1$ tales que $X \subseteq Y$ y $X \in \mathcal{U}$, entonces $Y \in \mathcal{U}$.

* Si $\aleph_1 = \aleph_1{}^{L[A]}$ para alguna $A \subseteq \omega$ entonces existe un subconjunto incontable de reales que no contiene ningún conjunto perfecto.

** Todo $Y \subseteq \mathbb{R}$ con Y incontable contiene un conjunto perfecto.

La prueba es inmediata de la proposición 20.

∎

Ahora tenemos un par de corolarios que necesitaremos más adelante.

Corolario 4 $\aleph_1 \in \mathcal{U}$.

Sea $p \in \mathcal{N}$, sabemos que el $cono(p) \in \mathcal{F}$ entonces $A = f[cono(p)] \in \mathcal{U}$ y $A \subseteq \aleph_1$ por lo tanto $\aleph_1 \in \mathcal{U}$.

∎

Corolario 5 Si $A \in \mathcal{U}$ y $(C \cup D) = A$ entonces $C \in \mathcal{U}$ o $D \in \mathcal{U}$.

Supongamos que $C \notin \mathcal{U}$ entonces, por la proposición 24, $(\aleph_1 \setminus C) \in \mathcal{U}$ y $X = \left(A \cap \aleph_1 \setminus C\right) \in \mathcal{U}$. Como $X \subseteq D$ entonces $D \in \mathcal{U}$.

∎

Hasta el momento tenemos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $\aleph_1$. Ahora veamos que $\mathcal{U}$ es no principal con la ayuda de la siguiente

Proposición 27 Para toda $\alpha \in \aleph_1$, $(\aleph_1 \setminus \alpha) \in \mathcal{U}$.

Probaremos la proposición por inducción sobre $\aleph_1$.

i) $(\aleph_1 \setminus \emptyset) \in \mathcal{U}$ es inmediato pues $(\aleph_1 \setminus \emptyset) = \aleph_1 \in \mathcal{U}$.

ii) Por hipótesis $(\aleph_1 \setminus \alpha) \in \mathcal{U}$, hay que demostrar que $(\aleph_1 \setminus \alpha^+) \in \mathcal{U}$.

Supongamos lo contrario. Por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, si $(\aleph_1 \setminus \alpha^+) \notin \mathcal{U}$ entonces $\alpha^+ = (\alpha \cup \{\alpha\}) \in \mathcal{U}$ y nuevamente por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro α o $\{\alpha\}$ pertenecen a $\mathcal{U}$. Por hipótesis $(\aleph_1 \setminus \alpha) \in \mathcal{U}$, por tanto $\alpha \notin \mathcal{U}$; así pues $\{\alpha\} \in \mathcal{U}$.

De esto tenemos, por definición, que:

$$f^{-1}[\{\alpha\}] = \{p \in \mathcal{N} \ / \ f(p) \in \{\alpha\}\} =$$

$$\{ p \in \mathcal{N} \ / \ \mathfrak{f}(p) = \alpha \} \in \mathcal{F}$$

y por tanto que

$$\{ p \in \mathcal{N} \ / \ \mathfrak{f}(p) \neq \alpha \} \notin \mathcal{F}$$

que por definición de $\mathcal{F}$, esto es posible sólo si $\{ p \in \mathcal{N} \ / \ \mathfrak{f}(p) \neq \alpha \}$ no contiene ningún cono.

Afirmamos que esto último implica que para toda $p \in \mathcal{N}$, $\mathfrak{f}(p) = \aleph_1^{L[p]} \leq \alpha$.

Veamos como es esto.

Si existe $p \in \mathcal{N}$ tal que $\mathfrak{f}(p) = \aleph_1^{L[p]} > \alpha$, entonces consideremos al *cono*(p). Para cada $q \in$ *cono*(p), $L[p] \subseteq L[q]$ y esto obliga a que $\aleph_1^{L[p]} \leq \aleph_1^{L[q]}$. En otras palabras, para cada $q \in$ *cono*(p), $\mathfrak{f}(q) = \aleph_1^{L[q]} \geq \aleph_1^{L[p]} = \mathfrak{f}(p) > \alpha$. En particular, para cada $q \in$ *cono*(p), $\mathfrak{f}(q) \neq \alpha$ por lo tanto

$$cono(p) \subseteq \{ p \in \mathcal{N} \ / \ \mathfrak{f}(p) \neq \alpha \}$$

De todo esto vemos que si $\{ \alpha \} \in \mathcal{U}$ entonces para toda $p \in \mathcal{N}$

$$\mathfrak{f}(p) = \aleph_1^{L[p]} = \mathfrak{f}(p) \leq \alpha$$

es decir que para toda $p \in \mathcal{N}$, $\aleph_1^{L[p]} \leq \alpha$ contradiciendo la proposición 3* del apéndice II.

Así pues, $\{ \alpha \} \notin \mathcal{U}$ y por hipótesis $\alpha \notin \mathcal{U}$ por lo tanto $\alpha^+ = (\alpha \cup \{ \alpha \}) \notin \mathcal{U}$, entonces $(\aleph_1 \setminus \alpha^+) \in \mathcal{U}$.

iii) Ahora supongamos inductivamente que $\lambda < \aleph_1$, λ es límite y para toda $\beta < \lambda$ se cumple que $(\aleph_1 \setminus \beta) \in \mathcal{U}$. Veamos que $(\aleph_1 \setminus \lambda) \in \mathcal{U}$.

Como $\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \beta$ entonces

---

* Si $\aleph_0 \leq \alpha < \aleph_1$, existe $p \in \mathcal{N}$ tal que $\aleph_1^{L[p]} > \alpha$.

$$(\aleph_1 \setminus \lambda) = \left(\aleph_1 \setminus \bigcup_{\beta<\lambda} \beta\right) = \bigcap_{\beta<\lambda} (\aleph_1 \setminus \beta)$$

Puesto que λ es numerable y la proposición 25 tenemos que $(\aleph_1 \setminus \lambda) \in \mathcal{U}$.

∎

A partir de la proposición anterior tenemos que para cada $\alpha < \aleph_1$, $(\aleph_1 \setminus \alpha) \in \mathcal{U}$ pero $\bigcap_{\alpha<\aleph_1} (\aleph_1 \setminus \alpha) = \emptyset \notin \mathcal{U}$, cosa que no ocurriría si $\mathcal{U}$ fuera principal, por lo tanto tenemos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal σ - completo sobre $\aleph_1$.

Con esto y el lema 2 tenemos el

Teorema 6 **(AD)** $\aleph_1$ es medible.

APÉNDICE I

Espacios de Baire y de Cantor

Aquí veremos las definiciones y propiedades más importantes de los espacios de Baire ($\mathcal{N}$) y de Cantor ($\mathcal{C}$).

Sea $< X , \tau >$ un espacio topológico. X es separabable si y sólo si contiene un subconjunto denso numerable. X es metrizable si y sólo si X tiene una métrica que genera a la topología τ . X es completamente metrizable si y sólo si X tiene una métrica completa, es decir, una métrica tal que toda sucesión de Cauchy sea convergente.

Definición Un espacio topológico es Polaco si y sólo si es un espacio separable y completamente metrizable.

Ahora bien, consideremos al espacio discreto $< \omega, \mathcal{P}(\omega) >$ y tomemos el producto topológico de Tychonoff de este espacio consigo mismo ω veces y pongamos

$$\mathcal{N} = < {}^{\omega}\omega , \tau_{\mathcal{N}} >$$

$\mathcal{N}$ es el espacio de Baire.

Análogamente tomemos el producto topológico del espacio discreto $< 2, \mathcal{P}(2) >$ consigo mismo ω - veces y sea

$$\mathcal{C} = < {}^{\omega}2 , \tau_{\mathcal{C}} >$$

$\mathcal{C}$ es el espacio de Cantor.

Se puede probar que tanto $\mathcal{N}$ como $\mathcal{C}$ son espacios polacos.

Una manera ligeramente distinta de considerar a $\mathcal{N}$ (y a $\mathcal{C}$) es como el conjunto de todas las ramas infinitas del arbol ${}^{\underset{\smile}{\omega}}\omega$ (como ${}^{\underset{\smile}{\omega}}2$), ordenados parcialmente por la inclusión.

Para cada $s \in {}^{<}\omega$, sea

$$U_s = \{ p \in {}^{\omega}\omega \ / \ s \subseteq p \}$$

(así U_s es el conjunto de todas las ramas infinitas que extienden a la sucesión finita s).

Así $\left\{ U_s \ / \ s \in {}^{<}\omega \right\}$ es una base numerable para la topología de $\mathcal{N}$.

Se puede probar fácilmente que estas bases son de cerrados - abiertos, es decir, son espacios cero - dimensionales.

Una métrica completa que genera estas topologías esta dada como sigue:

$$\rho(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = q; \\ \frac{1}{2^n} & \text{si} \quad p \neq q \ \text{ y } n \text{ es el primer natural tal que } p(n) \neq q(n) \end{cases}$$

con $p, q \in {}^{\omega}\omega$ para $\mathcal{N}$ ó $p, q \in {}^{\omega}2$ para $\mathcal{C}$.

Se puede probar que $\mathcal{N}$ y $\mathcal{C}$ son homeomorfos respectivamente a los irracionales y al conjunto ternario de Cantor del $[0, 1]$, con la topología relativa como subconjuntos de $\mathbb{R}$.

En lo que respecta a la compacidad, es decir, si toda cubierta de abiertos contiene una subcubierta finita, tenemos que el espacio $\mathcal{C}$ es compacto, pero no así el espacio $\mathcal{N}$.

Una definición que utilizamos en el presente trabajo es la de conjunto analítico. Sea $< X , \tau >$ un espacio Polaco y $A \subseteq X$, decimos que A es un conjunto analítico si y sólo si $A = \emptyset$ ó A es la imagen continua del espacio $\mathcal{N}$.

APÉNDICE II

El universo definible a partir de un conjunto

En este apéndice revisaremos someramente el concepto de universo definible a partir de un conjunto dado, A , que denotamos como L [A].

Primero veremos las operaciones de Gödel, que son las siguientes:

$F_1(X,Y) = \{X,Y\}$

$F_2(X,Y) = X \times Y$

$F_3(X,Y) = \{(u,v) \,/\, u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$

$F_4(X,Y) = X \setminus Y$

$F_5(X,Y) = X \cap Y$

$F_6(X) = \bigcup X$

$F_7(X) = dom(X)$

$F_8(X) = \{(u,v) \,/\, (v,u) \in X\}$

$F_9(X) = \{(u,v,w) \,/\, (u,w,v) \in X\}$

$F_{10}(X) = \{(u,v,w) \,/\, (v,w,u) \in X\}$

Se puede probar que dada una fórmula $\psi(y_1, \dots, y_n)$ con todos sus cuantificadores acotados, existe una composición $\mathcal{F}$ de estos operaciones tal que para toda $X_1, \dots, X_n$

$$\mathcal{F}(X_1, \dots, X_n) = \{(y_1, \dots, y_n) \,/\, y_i \in X_i \text{ para cada } i \leq n \text{ y } \psi(y_1, \dots, y_n)\}$$

A partir de estas operaciones y de un conjunto arbitrario A , definimos el conjunto llamado la Clausura de Gödel de A , el cual escribimos como CL (A), siendo éste el conjunto más $\subseteq$ - chico que contiene a A y es cerrado bajo las operaciones de Gödel.

Este conjunto lo definimos recursivamente como sigue:

$$W_0 = A$$
$$W_{n+1} = W_n \cup \{ F_i (X, Y) \ / \ X, Y \in W_n , i = 1, \ldots 10\}$$
$$CL (A) = \bigcup_{n \in \omega} W_n$$

Ahora bien, si consideramos un conjunto transitivo B y un conjunto A , definimos el conjunto de los definibles de B a partir de A , denotado como def_A (B), de la siguiente manera:

$$def_A (B) = CL \left(B \cup \{ B \} \cup \{ A \cap B \}\right) \cap \mathcal{P}(B)$$

Pasemos ahora a construir recursivamente el universo definible de un conjunto dado.

Sea A un conjunto

$$L_0[A] = \emptyset$$
$$L_{\alpha+1}[A] = def_A (L_\alpha[A])$$
$$L_\alpha[A] = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta[A] \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite.}$$
$$L[A] = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha[A]$$

Obsérvese que L [A] es transitivo (y por tanto está bien dada la definición) y si $\alpha \in OR$, $L_\alpha[A] \subseteq L_{\alpha+1}[A]$.

Se puede probar que para cualquier A , L [A] es un modelo clase transitivo estandar de ZFC , y así, entre otras cosas, $\omega \in L[A]$, implicando esto último que a cualquier conjunto B cuyos elementos sean definibles a partir de los elementos de ω les ocurre que $B \in L[B]$. Esto en particular les ocurre a los elementos del espacio de Baire.

Ahora veremos algunas propiedades más particulares que cumplen estos universos y las cuales usaremos en el presente trabajo.

Proposición 1 Sean A y B conjuntos. Si $A \in L[B]$ entonces tenemos que $L[A] \subseteq L[B]$.

Sabemos que $L[A] = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha[A]$

Demostraremos entonces que $L[A] \subseteq L[B]$ probando inductivamente que para cada $\alpha \in OR$ existe $\beta \in OR$ tal que $L_\alpha[A] \in L_\beta[B]$.

Así, por la transitividad de $L[B]$, tendremos que $L_\alpha[A] \subseteq L[B]$ para toda $\alpha \in OR$.

Como $A \in L[B]$, sea δ el mínimo ordinal tal que $A \in L_\delta[B]$.

i) Por definición $L_\emptyset[x] = \emptyset$ y $\emptyset \in L[B]$, así pues existe $\beta \in OR$ tal que $\emptyset \in L_\beta[B]$

ii) Ahora supongamos que $L_\alpha[A] \in L_\gamma[B]$ con $\gamma \in OR$.

Demostraremos que $L_{\alpha+1}[A] \in L_\mu[B]$ para alguna $\mu \in OR$.

Sea $\beta = max\{\delta, \gamma\}$. Así tenemos que

$L_\alpha[A] \in L_\beta[B]$,

$L_\alpha[A] \subseteq L_\beta[B]$,

$A \in L_\beta[B]$ y

$\left(L_\alpha[A] \cap A\right) \in L_\beta[B]$.

De todo esto vemos que

$$CL\left(L_\alpha[A] \cup \{L_\alpha[A]\} \cup \{A \cap L_\alpha[A]\}\right) \subseteq$$

$$CL\left(L_\beta[B] \cup \{L_\beta[B]\} \cup \{B \cap L_\beta[B]\}\right)$$

Al mismo tiempo, como $L_\alpha[A] \subseteq L_\beta[B]$ tenemos que

$$P(L_\alpha[A]) \subseteq P(L_\beta[B])$$

y de aquí que

$$L_{\alpha+1}[A] = def_A\ (L_\alpha[A]) \subseteq def_B\ (L_\beta[B]) = L_{\beta+1}[B]$$

por lo cual $L_{\alpha+1}[A] \subseteq L_{\beta+1}[B]$.

Ahora bien, considerando que $L_{\beta+1}[B] \in L_{\beta+2}[B]$, tenemos que $L_{\alpha+1}[A]$ es un subconjunto de un elemento de $L_{\beta+2}[B]$ y los elementos de $L_{\alpha+1}[A]$ son definibles, y así $L_{\alpha+1}[A]$ es un conjunto definible a partir de $L_{\beta+2}[B]$.

En otras palabras

$$L_{\alpha+1}[A] = \{x \ / \ x \in def_A\ (L_\alpha[A]) \quad y \quad x \in L_{\beta+1}[B]\}$$

es un elemento de

$$CL\ \left(L_{\beta+2}[B] \cup \{L_{\beta+2}[B]\} \cup \{B \cap L_{\beta+2}[B]\}\right)$$

Lo que resta ver es que $L_{\alpha+1}[A] \in \mathcal{P}\ (L_{\beta+2}[B])$ pero esto es claro pues $L_{\alpha+1}[A] \subseteq L_{\beta+1}[B] \subseteq L_{\beta+2}[B]$ por lo tanto

$$L_{\alpha+1}[A] \in def_B\ (L_{\beta+2}[B]) \quad = \quad L_{\beta+3}[B]$$

iii) Supongamos que λ es límite y para cada $\alpha < \lambda$, $L_\alpha[A] \in L_\beta[B]$ para alguna $\beta \in OR$.

Por el inciso anterior, vemos que si $L_\alpha[A] \in L_\beta[B]$ entonces tenemos que $L_{\alpha+1}[A] \in L_{\beta+3}[B]$ por lo que para $L_\lambda[A] = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha[A]$ existe $\gamma \in OR$ límite tal que $L_\lambda[A] \subseteq L_\gamma[B]$.

Considerando ahora que $L_\gamma[B] \in L_{\gamma+1}[B]$ tenemos que $L_\lambda[A]$ es un subconjunto de un elemento de $L_{\gamma+1}[B]$ y sus elementos son definibles, entonces

$$L_\lambda[A] = \left\{x \ / \ x \in \bigcup_{\alpha<\lambda} def_A\ (L_\alpha[A]) \quad y \quad x \in L_\gamma[B]\right\}$$

pertenece a

$$\mathbf{CL}\left(\mathbf{L}_{\gamma+1}[B] \cup \{\mathbf{L}_{\gamma+1}[B]\} \cup \{B \cap \mathbf{L}_{\gamma+1}[B]\}\right)$$

y $\mathbf{L}_\lambda[A] \in \mathcal{P}(\mathbf{L}_{\gamma+1}[B])$ por lo que $\mathbf{L}_\lambda[A] \in \mathbf{L}_{\gamma+2}[B]$

■

Proposición 2 Si $\aleph_0 \leq \alpha < \aleph_1$, existe $A \subseteq \omega$ tal que $\aleph_1{}^{L[A]} > \alpha$.

Sea $\aleph_0 \leq \alpha < \aleph_1$.

Como α es contable, existe una función h y una relación $r \subseteq \omega \times \omega$ tal que $< \alpha\ ,\ \in > \overset{h}{\cong} < \omega\ ,\ r >$ donde $< \omega\ ,\ r >$ es un conjunto bien ordenado y h es un isomorfismo.

Consideremos ahora el universo $L[r]$, en él está ω y entonces también $< \omega\ ,\ r >$. Como $L[r]$ es transitivo tenemos que es absoluto el ser bien fundado y el ser orden total* , por lo que $< \omega\ ,\ r >$ sigue siendo un buen orden en $L[r]$ y éste debe ser isomorfo a un único ordinal, a saber α, por lo que existe una biyección de α con ω en $L[r]$, a saber h, por lo que $\aleph_1{}^{L[r]} > \alpha$.

Ahora consideremos la biyección $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ definida como

$$g(m, n) = \tfrac{1}{2}\left((m+n)^2 + 3m + n\right)$$

Como $r \subseteq \omega \times \omega$, definimos $A = g[r]$.

Afirmamos que $L[r] = L[A]$

Sabemos que $r \in L[r]$ y que la función g es elemental, por lo cual $A = g[r] \in L[r]$ y de ahí que $L[A] \subseteq L[r]$.

Al mismo tiempo g^{-1} también es elemental y $A \in L[A]$ por lo cual $r = g^{-1}[A] \in L[A]$ y así $L[r] \subseteq L[A]$.

---

* Ver "SET THEORY An Introduction to Independence Proofs" de Kenneth Kunen. pp 123 - 124

De todo esto vemos que $L[r] = L[A]$ y por lo tanto $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1^{L[r]} > \alpha$

∎

Proposición 3 Si $\aleph_0 \leq \alpha < \aleph_1$, existe $p \in \mathcal{N}$ tal que $\aleph_1^{L[p]} > \alpha$.

Sea $\aleph_0 \leq \alpha < \aleph_1$.

Por la proposición anterior, hay $A \subseteq \omega$ tal que $\aleph_1^{L[A]} > \alpha$.

Por ser $A \subseteq \omega$ existe una función $p : \omega \longrightarrow A$ supráyectiva. Esta función es un elemento del espacio de Baire.

Así pues, vemos que $A = Im(p)$, y como $p \in L[p]$ entonces $A \in L[p]$.

De esto se sigue que $L[A] \subseteq L[p]$ y así

$$\aleph_1^{L[p]} \geq \aleph_1^{L[A]} > \alpha$$

∎

Para terminar este apéndice mencionamos un resultado que es necesario para el capítulo V, éste es una consecuencia inmediata del corolario 90 al lema 41.5 del libro "Set Theory" de Thomas Jech. pag. 534.

Teorema 1 Si $\aleph_1 = \aleph_1^{L[A]}$ para alguna $A \subseteq \omega$ entonces existe un subconjunto incontable de reales que no contiene ningún conjunto perfecto.

∎

NOTACIÓN

Dados A , B conjuntos

$\overline{A}$ es la clausura de A .

$\mathcal{P}(A)$ es la potencia de A

$\mathcal{P}_B(A)$ es el conjunto de los subconjuntos de A que son biyectables con B .

$|A|$ es el cardinal de A .

$A \succeq B$ es que existe una función inyectiva de B en A .

$A \sim B$ es que existe una función biyectiva entre A y B .

$A \succ B$ es que existe una función inyectiva de B en A pero no una biyección.

$\lfloor A \rfloor$ es el menor entero en A .

$A \setminus B$ es el conjunto de los que están en A pero no en B .

${}^{B}A$ es el conjunto de funciones de B en A .

Dadas $a = (a_0 , a_1 ,\ldots, a_i)$ y $b = (b_0 , b_1 , \ldots)$ sucesiones

a_n , $a(n)$, $\overline{a}(n)$ son el n - ésimo elemento de la sucesión a .

$a^\frown b$ es la sucesión $s = (a_0 , a_1 ,\ldots, a_i , b_0 , b_1 \ldots)$

${}^{<\omega}\omega$ es el conjunto de sucesiones finitas de números naturales.

${}^{<\omega}2$ es el conjunto de sucesiones finitas de ceros y unos.

OR es la clase de los ordinales.

Q es el conjunto de los números racionales.

R es el conjunto de los números reales.

REFERENCIAS

Thomas Jech. SET THEORY (Academic Press, 1978).

Thomas Jech. THE AXIOM OF CHOICE (Studies in Logic and the foundations of Mathematics, volume 75, North - Holland, 1973).

Kenneth Kunen. SET THEORY, An Introduction to Independence Proofs (Studies in Logic and the foundations of Mathematics, volume 102, North - Holland, 1980).

H. Enderton. ELEMENTS OF SET THEORY.

H. L. Royden. REAL ANALYSIS (The MacMillan Company, 1963).

Konrad Jacobs. MEASURE AND INTEGRAL (Academic Press, 1978).

David Gale y F. M. Stewart. INFINITE GAMES WITH PERFECT INFORMATION (Contributions to the theory of games, vol. II, 1953).

John von Neumann. ON THE THEORY OF GAMES OF STRATEGY. (Annals of Mathematics studies, vol. IV, 1959).

Jan Mycielski. ON THE AXIOM OF DETERMINATENESS. (Fundamenta Mathematicae, Vol. 53, 1963-64).