



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

38
28
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRINCIPIOS DE ELECTRODINAMICA, HIDRODINAMICA
MAGNETOHIDRODINAMICA Y TEORIA DE RADIACION
APLICADOS A LA FISICA ESPACIAL

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
PRESENTA

MARCO OCTAVIO LANZAGORTA SALDAÑA

MEXICO D.F. A 13 DE JUNIO DE 1991

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Prefacio.	3
Introducción	5
- Primera parte: Principios Básicos. -	
1. Electrodinámica.	11
a) Ecuaciones Fundamentales.	11
b) Flujo y Densidad de Energía.	19
c) Ondas Electromagnéticas.	21
d) Potenciales Electromagnéticos.	23
2. Electrodinámica Relativista.	25
3. Teoría de Radiación.	31
a) Potenciales de Cargas en Movimiento.	32
b) Potenciales de Lienard-Wiechert.	37
c) Radiación Emitida por una Carga Acelerada.	40
d) Mecanismos de Emisión de Radiación.	48
i) Radiación Síncrotrónica y Girotrónica.	48
ii) Bremsstrahlung.	63
iii) Radiación Cerenkov.	78
iv) Radiación de Transición.	80
v) Oscilaciones de Plasma.	81
vi) Efecto Compton y Dispersión Thompson.	82
vii) Radiación Térmica de Cuerpo Negro.	84
viii) Radiación Espectral de Línea.	86
4. Hidrodinámica.	87
a) Ecuaciones Fundamentales del Movimiento de un Fluido Ideal.	88
i) Ecuación de Continuidad.	89
ii) Ecuación de Euler.	90
iii) Ecuaciones de Movimiento para un Fluido Incompresible Bajo la Acción de un Campo Conservativo.	94
iv) Flujo de Energía.	95

v) Flujo de Momento.	97
b) Ecuaciones Fundamentales del Movimiento de un Fluido Viscoso	100
i) Ecuaciones Fundamentales.	100
ii) Disipación de Energía en un Fluido Viscoso Incompresible.	104
iii) Ecuación General de la Transferencia de Calor.	106
iv) Resumen.	111
5. Magnetohidrodinámica.	112
a) La Aproximación MHD.	112
b) Obtención de las Ecuaciones MHD.	115
c) Teorema de Alfvén.	119
d) Convección.	126
e) Forma Simétrica de las Ecuaciones MHD.	126
f) Ondas Magnetohidrodinámicas.	128
i) Ondas Planas en Fluidos Incompresibles en Presencia de un Campo Magnético.	129
ii) Ondas de Amplitud Pequeña.	133
g) Discontinuidades de Flujos MHD.	139
i) Discontinuidades Tangenciales y Rotacionales.	141
ii) Ondas de Choque.	148
6. Magnetohidrodinámica de Plasmas.	159
 - Segunda Parte: Aplicaciones. -	
7. Aplicaciones a la Física Espacial.	164
a) Problemas Magnetohidrostáticos.	
b) Fenómenos Electrodinámicos Generales en el Cosmos.	168
c) Aplicación al Viento Solar y la Magnetosfera Terrestre.	173
d) Procesos Radiativos en Astrofísica.	178
Conclusiones.	185
Bibliografía.	187
Referencias.	191

PREFACIO

En la actualidad, debido al desarrollo de la astrofísica que ha incorporado otros campos, tales como la radioastronomía, la investigación termonuclear y la investigación espacial, han aparecido nuevas posibilidades para estudiar la naturaleza física del Universo. Los conocimientos sobre los planetas, estrellas y nebulosas se adquieren, fundamentalmente, investigando sus radiaciones, pero para el entorno cercano, el sistema solar, se dispone también de mediciones in situ. Por otra parte, las conclusiones acerca de las condiciones físicas de los astros y el medio en el cual se encuentran, sólo pueden obtenerse partiendo de las relaciones físicas generales, en particular, de la física del plasma, y de las regularidades de estas relaciones. De este modo se consigue establecer la estructura y el estado físico y químico de las atmósferas estelares, el estado del interior de los astros, así como las condiciones existentes en las nebulosas gaseosas y en el espacio interestelar.

El presente trabajo, presenta un desarrollo formal de las diversas teorías físicas básicas que son importantes para la física espacial. Primeramente se presenta una breve introducción a los diversos fenómenos en los cuales la electrodinámica cósmica desempeña un papel importante, así como un resumen histórico de su desarrollo. Este trabajo se encuentra dividido en dos partes. En la primera se desarrolla la teoría básica para el estudio de fenómenos electrodinámicos presentes en el cosmos. La electrodinámica básica, se describe en el capítulo 1. En el siguiente capítulo, se desarrolla la electrodinámica relativista, la cual es de fundamental importancia para el estudio de los campos de radiación, que son estudiados en el capítulo 3, junto con las fórmulas básicas que describen la radiación de una partícula acelerada en un movimiento arbitrario. Así mismo, se desarrolla de manera extensa los mecanismos de radiación sincrotrónica y bremsstrahlung. En el capítulo 4 se describe la hidrodinámica ordinaria para fluidos reales e ideales. El principal método de investigación es descrito en el capítulo 5;

éste consiste en la aproximación magnetohidrodinámica ideal, o el estudio de la interacción de fluidos conductores con campos magnéticos. Aquí mismo se estudian dos importantes fenómenos relacionados, las ondas magnetohidrodinámicas y las discontinuidades de flujos magnetohidrodinámicos. En el capítulo 6 se presenta la magnetohidrodinámica de plasmas, la cual describe a un plasma partiendo de la conducta de las partículas que lo componen por separado, es decir, considerando el movimiento de cada una de ellas.

En la segunda parte, describimos de manera intuitiva diversas aplicaciones en el cosmos de la física estudiada en la primera parte. En el capítulo 7 se presentan las aplicaciones a la teoría de radiación, y al mismo tiempo se describe otro mecanismo más complejo de emisión de radiación que no fue considerado en el capítulo 3, este es la emisión coherente o estimulada. En este mismo capítulo se discuten diversas aplicaciones de la magnetohidrodinámica. Primeramente se presentan los problemas magnetohidrostáticos y de inestabilidades. Posteriormente algunos fenómenos electrodinámicos generales presentes en diversas partes del cosmos. Finalmente, se aplica al estudio del viento solar y su interacción con el campo magnético terrestre.

Las diversas teorías desarrolladas aquí, pueden ser encontradas en diversos libros de física teórica, sin embargo el enfoque dado aquí puede diferir en algunos casos. Este trabajo está diseñado para el estudio de los fenómenos electrodinámicos presentes en la astrofísica moderna.

En cuanto a las aplicaciones descritas aquí, éstas solo han sido desarrolladas de manera intuitiva. El enfoque de esta parte del trabajo es mostrar cómo, cuándo y dónde se aplican las diversas teorías físicas desarrolladas en la primera parte. Un análisis más formal de estos problemas, puede ser encontrado en las diversas referencias citadas.

INTRODUCCION

Es de sorprender los tremendos desarrollos que se han dado en la astronomía y la astrofísica durante los últimos 40 años. Se puede decir que la astronomía antes de 1950 está dedicada principalmente a estrellas, su asociación con galaxias, y con nubes de gas caliente, sin tomar en consideración el plasma y los campos magnéticos presentes, por lo que sus tratamientos implicaban a lo más un estudio hidrodinámico. Sin embargo, tres de los campos de investigación más importantes de los últimos años, cambiaron esta situación. Estos son la *investigación en fusión termonuclear*, la cual requiere del confinamiento de un plasma en un campo magnético, la *investigación espacial* de partículas y campos por medio de vehículos automáticos y tripulados, así como la astronomía fuera de la atmósfera que permite observar al Universo en frecuencias no observadas en la superficie de la Tierra y la *radioastronomía* u observación de radiaciones en frecuencia de radio emitidas en diversos puntos del Universo.

Todo esto trajo como consecuencia el descubrimiento de que la mayor parte del Universo se encuentra permeada por partículas cargadas y por campos electromagnéticos. Las interacciones entre estas partículas y campos constituyen el estudio de la *electrodinámica cósmica*. Dichas partículas se comportan como un plasma, esto es, un gas ionizado en el cual la longitud que divide el comportamiento a pequeña escala de partículas individuales del comportamiento colectivo a gran escala es pequeña comparada con las longitudes características de interés. En forma equivalente, podemos decir: un gas ionizado que tiene un número suficientemente grande de partículas cargadas para blindarse electrostáticamente, en una distancia pequeña, comparada con las longitudes de interés físico, es un plasma. Una propiedad básica de los plasmas, es su tendencia a la neutralidad eléctrica. Si un plasma se encuentra en un campo magnético se denomina magnetoplasma.

Como se ha mencionado, a excepción de una pequeña parte del Universo, éste parece estar constituido de plasma y probablemente todo éste sea magnetoplasma. En la mayoría de los problemas que

cabe tratar en electrodinámica cósmica, se trabaja con un medio conductor no rígido, el cual está extendido hasta el infinito. Esta situación es distinta a la electrodinámica de laboratorio, donde los experimentos tratan cuerpos de dimensiones relativamente pequeñas y cuerpos que son rígidos y no tan buenos conductores. Hasta donde sabemos, este último tipo de medio ambiente (cuerpos rígidos, material neutro y no muy buen conductor) está confinado a las superficies de los planetas y al interior de satélites como la Luna. El resto del Universo está constituido principalmente de diversos plasmas, los cuales tienen enormes variaciones en sus dimensiones, y sus estados electromagnéticos, termodinámicos y dinámicos.

Así mismo, los campos magnéticos se encuentran en casi todas las regiones del Universo, y es claro que desempeñan un papel dominante en la evolución del mismo. Anteriormente, los efectos de los campos magnéticos cósmicos, e incluso su existencia había sido ignorada. El significado de los campos magnéticos en el sistema solar, en el espacio interestelar y en las galaxias está siendo reconocido y actualmente es imposible evadirlos en cualquier investigación de astrofísica.

Muchos problemas en electrodinámica espacial, así como algunas respuestan han sido proporcionados por cohetes, satélites y sondas espaciales. Las regiones investigadas van desde la ionosfera, magnetosfera y magnetocola terrestres, hasta el espacio interplanetario, la Luna, Venus, Marte, los planetas exteriores y el Sol. Otros problemas e información han sido proporcionados por observaciones en radio, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos x y rayos γ de objetos muy distantes, notablemente de Júpiter, el Sol y muchas estrellas. De aquí que el estudio de los diversos mecanismos de emisión de radiación electromagnética sea de vital importancia para la astrofísica.

Por otra parte, el entendimiento de los complejos patrones de campo magnético y plasma requiere la herramienta teórica de la *magnetohidrodinámica*, la cual consiste en el estudio del movimiento de un fluido conductor en presencia de un campo magnético. Las corrientes eléctricas inducidas en el fluido como resultado de su movimiento modifican al campo; al mismo tiempo, su

flujo en el campo produce fuerzas mecánicas, las cuales modifican su movimiento. Esta técnica tiene su principal interés (y dificultad) en la interacción entre el campo y el movimiento del fluido.

Las ecuaciones magnetohidrodinámicas tienden a ser muy complejas, pero pueden ser simplificadas e idealizadas haciendo suposiciones que restrinjan el camino libre medio de las partículas entre colisiones. La restricción más estricta, que conduce a la mayor simplificación, es que el camino libre medio sea mucho menor que el radio ciclotrónico $\frac{vmC}{eH}$. En este caso el plasma no sólo satisface las ecuaciones de la dinámica de fluidos, sino que además tiene la restricción adicional de ser un conductor eléctrico isotrópico. Las ecuaciones correspondientes, son comunmente llamadas de la magnetohidrodinámica idealizada. Estas ecuaciones permiten un entendimiento considerable de los procesos magnetohidrodinámicos y, son aplicables a problemas astrofísicos, tales como los concernientes al interior de las estrellas y planetas, y las atmósferas inferiores de estrellas.

Uno no debe considerar a la magnetohidrodinámica como un sinónimo de dinámica de plasmas, aún cuando exista una relación considerable. La magnetohidrodinámica, en su forma idealizada, trata con fluidos, en los cuales los coeficientes de transporte son simples y fáciles de determinar. En el caso de un plasma, la aproximación de fluido no siempre es adecuada y cuando no lo es los coeficientes de transporte deben ser calculados por los métodos de la mecánica estadística, usualmente con la ecuación de Boltzmann. En general estas ecuaciones son muy complicadas y se requieren algunas simplificaciones. Entonces, en algunas situaciones, la magnetohidrodinámica puede evitar las complejidades de la teoría cinética del plasma. Por otra parte, la física de plasmas puede incluir efectos en los cuales los movimientos de las partículas individuales son importantes, los cuales no aparecen en la aproximación del plasma como un fluido.

La electrodinámica cósmica parece tener sus orígenes en las especulaciones realizadas por los científicos, concernientes al magnetismo de los cuerpos celestes y los efectos de este magnetismo en partículas cargadas que se aproximan a estos

objetos. Birkeland en 1896 mostró experimentalmente que un haz de electrones dirigido hacia una esfera uniformemente magnetizada, se deflectaría hacia las zonas polares. También observó un anillo luminoso que encerraba a la esfera. Aunque los procesos involucrados aquí son distintos a los de la formación de auroras, cuyo estudio fue lo que motivo a Birkeland, y de zonas de radiación, los experimentos dieron algunas conclusiones acerca de la causa de estos fenómenos. Störmer estudió el fenómeno matemáticamente, considerando el movimiento de una partícula aislada; esto condujo a los fundamentos de la teoría de determinación de trayectorias de rayos cósmicos. Aplicaciones posteriores del método de una sola partícula, no tuvieron éxito, ahora es bien sabido que, con raras excepciones (por ejemplo, en el estudio de los rayos cósmicos), los problemas en electrodinámica cósmica deben de trabajarse en términos de plasmas, el cual toma en cuenta los movimientos simultáneos de diversas partículas y los campos electromagnéticos que estos movimientos producen.

Al mismo tiempo, en 1899, Bigelow sugirió que el Sol podría ser un imán gigante. Schuster dio un paso adelante al conjeturar que todos los cuerpos celestes masivos en rotación eran grandes imanes. Posiblemente la búsqueda de campos magnéticos solares por parte de Hale, fue estimulada por estas primeras especulaciones. En cualquier caso, la búsqueda de Hale fue compensada en 1908 al descubrir que las manchas solares estaban permeadas por campos magnéticos del orden de 1,000 gauss. Este descubrimiento, y el conocimiento previo de que la Tierra está magnetizada, abrieron un nuevo capítulo en la astrofísica, y fue responsable del inicio de la magnetohidrodinámica, Aunque los principios físicos requeridos para la magnetohidrodinámica ya estaban bien entendidos, sus efectos difícilmente podían ser reproducidos en el laboratorio.

Cerca de una década después del descubrimiento de Hale de los campos en las manchas solares, Larmor creó una teoría de su mantenimiento. Esta es la primera de las teorías de dínamo, discutidas en el último capítulo. La teoría de Larmor fue criticada por Cowling, quien realizó grandes contribuciones a este tema y sugirió que los campos magnéticos de las manchas solares

podían ser el resultado de efectos convectivos de los campos en las capas profundas debido a un flujo vertical de plasma. Esta sugerencia incluía la importante idea de campos magnéticos "congelados" en un fluido conductor en movimiento. Muchos otros investigadores siguieron este concepto fundamental de la magnetohidrodinámica. Kiepenheuer sugirió que masas de gas solar eyectadas hacia la corona podían llevar con ellas partes de los campos magnéticos superficiales. En 1942 Alfvén estableció por primera vez el teorema que afirma que en un medio altamente conductor las líneas de fuerza magnética están congeladas en el fluido.

Simultáneamente, una segunda línea de trabajo había sido iniciada. Esta fue el estudio de corrientes de gas ionizado incidiendo en un campo magnético dipolar, en conexión con la teoría de tormentas geomagnéticas de Chapman y Ferraro en 1932. Esta temprana aplicación a la magnetohidrodinámica habría de esperar un cuarto de siglo para ser reconocida, sin embargo, ahora ha sido desarrollada en una teoría generalmente aceptada de las perturbaciones geomagnéticas.

Una tercera línea de investigación, fueron los experimentos con mercurio y otros fluidos conductores, realizada principalmente por Hartmann y Lazarus en 1937. La gran dificultad aquí es la escala tan pequeña comparada con los fenómenos astrofísicos importantes.

La electrodinámica cósmica y, en especial, la magnetohidrodinámica, empezaron a adquirir unidad con el trabajo de Alfvén en 1950, el cual había comenzado en 1940. En adición a la formulación del concepto de congelamiento, descubrió el ejemplo más simple de acoplamiento entre líneas de campo magnético y un fluido, y mostró que esta interacción produce un nuevo tipo de ondas. Tales ondas magnetohidrodinámicas pueden propagarse en fluidos compresibles o incompresibles, y entonces, la energía puede ser transmitida sin los intercambios a gran escala de elementos de fluido como es el caso de los fluidos incompresibles no conductores. También desarrolló una teoría de las manchas solares basada en la generación de ondas hidromagnéticas en el interior solar que viajan a la superficie. Además realizó estudios que permitieron a Singer predecir la existencia de los cinturones

de Van Allen antes de su descubrimiento. También desarrolló teorías de tormentas geomagnéticas y del origen del sistema solar, ambas basadas en efectos electrodinámicos.

Por otra parte, se desarrolló un gran impetu en el estudio de campos magnéticos cósmicos debido a los rápidos avances de la radioastronomía después de 1945. Mucha de esta radiación es emisión térmica o bremsstrahlung proveniente de gas caliente. En 1951, Piddington demostró que parte de esta radiación debe ser debida a procesos no térmicos, lo cual hace que los campos magnéticos estén involucrados de una u otra forma. De cualquier manera, Alfvén y Herlofson ya habían sugerido que la emisión proveniente de radioestrellas puede ser debida a la radiación sincrotrónica. Este proceso, que involucra la aceleración de electrones de muy altas energías (relativistas) en campos magnéticos, ya había sido propuesta por Kiepenheuer. Estas propuestas fueron ignoradas por casi todos a excepción de los soviéticos Shklovskii y Ginzburg quienes las desarrollaron con detalle e hicieron propuestas que condujeron al establecimiento de la teoría. Ahora es sabido que algunas radiogalaxias tienen energías en forma de energía magnética que exceden por mucho a su energía cinética total. Se ha hecho evidente que los campos magnéticos pueden dar forma a las galaxias, y pueden desempeñar un papel muy importante en la cosmología.

Finalmente, el estímulo dado por el Año Geofísico Internacional en 1957, y en subsecuentes esfuerzos internacionales, desarrollaron la exploración espacial por medio de satélites, sondas y cohetes, lo cual incrementó enormemente la cantidad de datos disponibles acerca de los fenómenos electrodinámicos en el cosmos al abrir las posibilidades de observar todo el espectro electromagnético, mayor resolución en observaciones ópticas y posibilidad de mediciones in situ.

CAPITULO 1

ELECTRODINAMICA

El objeto de la electrodinámica macroscópica es el estudio de los campos electromagnéticos en el espacio. Como cualquier otra teoría macroscópica, la electrodinámica opera con magnitudes físicas promediadas en elementos de volumen "infinitamente pequeños físicamente", sin que interesen las fluctuaciones microscópicas de estas magnitudes que están ligadas con la estructura molecular de la materia. Así, en vez del verdadero valor "microscópico" de la intensidad de campo eléctrico e consideraremos su valor medio, designándolo por:

$$\bar{e} = E$$

y de igual forma con el valor microscópico de la intensidad de campo magnético h, cuyo valor medio se llama *inducción magnética* y se representa por B:

$$\bar{h} = B$$

En este trabajo se utilizara el sistema gaussiano de unidades.

a) Ecuaciones Fundamentales.

Las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica de los medios continuos se obtienen promediando las ecuaciones del campo electromagnético en el vacío. El primero en realizar este paso de las ecuaciones microscópicas a las macroscópicas fue H.A.Lorentz.

La forma de las ecuaciones de la electrodinámica macroscópica, como también el sentido de las magnitudes que en ella aparecen, dependen de manera esencial de la naturaleza física del medio material al igual que del carácter del cambio del campo con el tiempo.

Los campos electromagnéticos en medios materiales inducen en el material campos de polarización y corrientes de magnetización. Es útil introducir dos vectores D y H, que están relacionados con el comportamiento eléctrico y magnético de un material bajo la acción de un campo electromagnético externo.

La nueva magnitud D esta definida por:

$$D = E + 4\pi P \tag{1.1}$$

y es llamada *desplazamiento eléctrico*. La magnitud P se llama

vector de polarización dieléctrica (o, simplemente polarización) del cuerpo: un dieléctrico en el cual P es diferente de cero se dice que está polarizado. Un dieléctrico es una substancia homogénea no conductora. El comportamiento electrostático de un medio dieléctrico está completamente caracterizado por su polarización, la cual se interpreta como el momento dipolar total de todas las cargas interiores en el dieléctrico por unidad de volumen. Esta produce la densidad de carga de polarización:

$$\rho_p = - \nabla \cdot P$$

$$\sigma_p = n \cdot P$$

donde n es un vector unitario normal a la superficie del dieléctrico.

La polarización de un medio dieléctrico tiene lugar debido al campo eléctrico del medio. El grado de polarización depende no solo del campo eléctrico, sino también de las propiedades de las moléculas que forman el material dieléctrico. Desde el punto de vista macroscópico, el comportamiento del material se especifica completamente por una relación que se determina en forma experimental llamada *ecuación constitutiva*, $P = P(E)$ donde E es el campo eléctrico macroscópico. Esta es una relación puntual, y si E varía de un punto a otro dentro del material, entonces P variará también.

Para la mayoría de los materiales, P se anula cuando E se anula. Como éste es el comportamiento más común, limitaremos nuestra aplicación ahora a materiales de este tipo. Además, si el material es isotrópico, la polarización deberá tener el mismo sentido que el campo eléctrico que la provoca. Estos resultados se resumen en la ecuación:

$$P = \chi(E)E$$

donde la cantidad $\chi(E)$ es un escalar y se llama *susceptibilidad eléctrica* del material.

Si el material no es isotrópico, el termino $\chi(E)$ es un tensor de rango dos, es decir:

$$P_i = \chi_{ik} E_k .$$

y en este caso P y E tendrán en general direcciones distintas. En el caso isotrópico tenemos también que:

$$D = \epsilon(E)E$$

donde $\epsilon(E) = 1 + 4\pi\chi(E)$ es la permitividad del material. Experimentalmente χ y ϵ son a menudo independientes del campo eléctrico, excepto quizá para campos muy intensos. En otras palabras, χ y ϵ son propiedades características del material. Los materiales de este tipo se llaman dieléctricos lineales, y obedecen las relaciones:

$$\begin{aligned} P &= \chi E \\ D &= \epsilon E \end{aligned} \quad (1.2)$$

El comportamiento eléctrico de un material queda ahora especificado completamente, ya sea por la permitividad ϵ o por la susceptibilidad χ .

Para el campo magnético, introducimos un vector magnético auxiliar, el vector de intensidad del campo magnético H , definido por:

$$H = B - 4\pi M \quad (1.3)$$

Hay que recordar que, en realidad, el verdadero valor medio de la intensidad es B y no H . El vector M se llama magnetización o imanación del cuerpo. La función vectorial M nos proporciona una descripción macroscópica de las corrientes atómicas interiores de la materia. Específicamente, M mide el número de circuitos de corriente atómica por unidad de volumen multiplicado por el momento magnético efectivo o promedio de cada circuito. Desde el punto de vista puramente macroscópico, todos los efectos magnéticos debidos a la materia, pueden describirse adecuadamente en función de M , o por sus derivadas. Una de estas derivadas, $\nabla \times M$, es la densidad de corriente de transporte equivalente que genera el mismo campo magnético que el propio M ; ésta se llama densidad de corriente de magnetización J_M , y es la respuesta de un medio (magnético) a un campo magnético.

Para resolver problemas de teoría magnética, es esencial tener una relación entre B y H o, equivalentemente, una relación entre M y uno de los vectores del campo magnético. Estas relaciones dependen de la naturaleza del material magnético y se obtienen generalmente de experimentos.

En una extensa clase de materiales, existe una relación aproximadamente lineal entre M y H . Si el material es isotropico así como lineal,

$$M = \chi_m H ,$$

donde la cantidad adimensional χ_m es un escalar y se llama susceptibilidad magnética. Si χ_m es positiva, el material se llama paramagnético y la inducción magnética B es reforzada por la presencia del material. Si χ_m es negativa, el material es diamagnético y la inducción magnética es debilitada por la presencia del material. Aunque χ_m es una función de la temperatura y a veces varía muy drásticamente con ella, generalmente se puede decir que, para materiales paramagnéticos y diamagnéticos χ_m es bastante pequeña.

Una relación lineal entre M y H implica también una relación lineal entre B y H :

$$B = \mu H , \quad (1.4)$$

el coeficiente μ se llama permeabilidad magnética, la cual resulta ser:

$$\mu = 4\pi \chi_m + 1.$$

En contraste con la constante dieléctrica (permitividad) ϵ , que en todos los casos es mayor que 1, la permeabilidad puede ser mayor o menor que la unidad ya que χ_m puede ser positiva o negativa.

Designaremos la densidad media de flujo de cargas por J ; esta magnitud se llama densidad de corriente eléctrica. La densidad de corriente J y la densidad de carga ρ no son cantidades independientes, sino que están relacionadas en cada punto por una ecuación diferencial, la llamada ecuación de continuidad de carga eléctrica.

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

Esta relación representa la conservación de la carga.

La ecuación de continuidad se deduce de la siguiente forma. La corriente eléctrica que entra en V , el volumen encerrado por S , está dada por:

$$I = - \oint_S j \cdot n \, da = - \int_V \nabla \cdot j \, dV$$

La última integral se obtiene utilizando el teorema de la divergencia. El signo menos se presenta porque n es la normal exterior a S y deseamos considerar I positiva cuando el flujo neto

de carga va del exterior de V a su interior. De igual forma, I es igual a el cambio de la carga Q en el interior de V , es decir,

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV$$

Como estamos considerando un volumen fijo V , la derivada opera sólo sobre ρ . Sin embargo ρ es función de la posición así como del tiempo, en consecuencia,

$$I = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

Al igualar las dos expresiones para I , obtenemos:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) \, dV = 0$$

Pero V es completamente arbitrario, y la única forma de que esta ecuación sea válida para un segmento arbitrario del volumen del medio es que el integrando se anule en cada punto. En consecuencia, se obtiene la ecuación de continuidad.

Ya que la densidad de corriente va a depender del campo eléctrico, es esencial una ecuación que ligue entre si las magnitudes \mathbf{J} y \mathbf{E} . Esta relación depende de las propiedades conductoras del material. En la inmensa mayoría de los casos, cabe considerarla lineal.

Si el conductor es homogéneo e isotrópico, la dependencia lineal se reduce a una mera proporcionalidad:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.6)$$

El coeficiente σ depende de la naturaleza y estado del conductor; recibe el nombre de coeficiente de conductividad eléctrica, o, simplemente, el de conductividad del cuerpo. Los materiales para los cuales esta relación es válida se llaman medios lineales u óhmicos.

En un cuerpo anisótropo las direcciones de los vectores \mathbf{J} y \mathbf{E} , no coinciden y la relación lineal entre ellas se expresa con una fórmula del tipo:

$$J_i = \sigma_{ik} E_k$$

donde las magnitudes σ_{ik} constituyen un tensor de segundo orden simétrico llamado conductividad.

El campo eléctrico que mantiene la corriente realiza sobre las

partículas cargadas (portadores de corriente) que se mueven en el conductor un trabajo mecánico; el trabajo realizado en un segundo por unidad de volumen es igual, evidentemente, al producto $J \cdot E$. Este trabajo se disipa en la materia que constituye al conductor transformándose en calor. Por consiguiente, la cantidad de calor que se libera en un segundo en un metro cúbico de conductor homogéneo es igual a

$$J \cdot E = \sigma E^2 = J^2 / \sigma \quad (1.7)$$

La producción de calor conduce a un aumento de la entropía del cuerpo. Cuando se libera la cantidad de calor $dQ = J \cdot E \, dV$, la entropía del elemento de volumen aumenta dQ/T . Por ello, la velocidad de variación de la entropía total del cuerpo es igual a:

$$\frac{ds}{dt} = \int J \cdot E \frac{1}{T} \, dV$$

En virtud de la segunda ley de la termodinámica, esta derivada debe ser positiva o cero. Sustituyendo en ella $J = \sigma E$, vemos que de esta condición cabe deducir que la conductividad σ es positiva.

Para determinar las fuerzas que actúan sobre una sustancia en un campo electromagnético, introducimos la expresión de la ley de Lorentz para la fuerza electromagnética sobre una partícula de carga e que se mueve con velocidad v en un campo electromagnético:

$$F = e \left(E + \frac{v}{c} \times H \right). \quad (1.8)$$

Para un medio continuo con partículas cargadas en él, la densidad de carga es:

$$\rho_c = \frac{\sum n_i e_i}{\Delta V}$$

donde e_i es la carga de las partículas del tipo "i" en el volumen ΔV , n_i es la densidad de partículas del tipo "i", y ΔV es pequeño comparado con las dimensiones del problema pero grande comparado con las distancias entre las partículas cargadas.

De la misma forma, definimos la densidad de corriente por:

$$j = \frac{\sum n_i e_i v_i}{\Delta V}$$

donde v_i es la velocidad de las partículas de la clase "i".

Entonces, para un medio continuo con densidad de carga ρ_c y densidad de corriente j , la ecuación (1.8) se convierte en:

$$\mathbf{F} = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \quad (1.9)$$

La ecuación (1.8) implica hechos físicos interesantes; la fuerza \mathbf{F} es invariante bajo transformaciones entre sistemas inerciales de referencia, pero la velocidad \mathbf{v} no es invariante; entonces los campos eléctrico y magnético deben cambiar con el cambio de un sistema inercial a otro.

En los sistemas tratados, $\frac{v}{c} \ll 1$, por lo que los efectos relativistas no son importantes. Entonces tomamos \mathbf{E}' y \mathbf{H}' como los valores de \mathbf{E} y \mathbf{H} en un sistema S' en movimiento respecto al primer sistema S con velocidad \mathbf{u} ; es fácil comprobar que si:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{E}$$

entonces $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ hasta términos del orden u^2 / c^2 ; de hecho:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= e(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{H}') = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{H} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times (\mathbf{H} - \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{E})) \\ &= e(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} - (1/c^2) \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) + (1/c^2) \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{E})) \\ &\approx e(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \mathbf{F} \end{aligned}$$

Otra ecuación útil que se utilizará posteriormente será la transformación de la densidad de corriente:

$$\mathbf{j}' = \frac{\sum e_i \mathbf{v}'_i}{\Delta V'} = \frac{\sum e_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u})}{\Delta V} = \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{u}$$

En términos de \mathbf{j} y \mathbf{E} la ley de Ohm:

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$$

se escribe como:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{H}) + \rho_e \mathbf{u} \quad (1.6b)$$

A través de múltiples experimentos, se ha observado que los campos eléctricos y magnéticos no son independientes. La estructura y dinámica de los campos electromagnéticos están gobernados por las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(1.13)

Cada una de estas ecuaciones representa una generalización de ciertas observaciones experimentales: (1.10) es la forma diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday; (1.11) es la ley de Gauss, que a su vez se deduce de la ley de Coulomb; (1.12) representa una extensión de la ley de Ampere, donde el término \mathbf{D} fue introducido por Maxwell; (1.13) representa el hecho de que no existen los monopolos magnéticos. Bajo estas circunstancias es evidente que las ecuaciones de Maxwell no pueden derivarse de otras ecuaciones; sin embargo, su aplicabilidad para cualquier situación puede verificarse. Como resultado del extenso trabajo experimental, se sabe ahora que las ecuaciones de Maxwell se aplican a todas las situaciones macroscópicas y se usan generalmente en forma semejante al principio de conservación de la energía, como principios guía. Son las ecuaciones básicas para los campos electromagnéticos producidos por cargas y densidades de corriente ρ y \mathbf{j} .

Si están presentes cuerpos materiales, para poder usar las ecuaciones de Maxwell se deben conocer las ecuaciones constitutivas, ya sea experimentalmente o de la teoría microscópica del tipo particular de material: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$. La densidad de corriente \mathbf{j} en un material incluye una contribución dada por una tercera ecuación constitutiva $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E})$, que debe también ser conocida experimentalmente o teóricamente. De hecho, las relaciones constitutivas se necesitan siempre, no sólo cuando hay un material, pues las ecuaciones de Maxwell tienen 16 incógnitas y sólo se tienen 8 ecuaciones. Con la ecuación de la fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, que describe la acción de los campos eléctricos y magnéticos sobre las partículas cargadas, este conjunto de leyes nos da una descripción clásica completa de las partículas que actúan electromagnéticamente. "Clásica" en electrodinámica quiere decir "no-cuántica" pero sí es relativista.

La ecuación de continuidad es una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, de modo que no necesita ser añadida al conjunto de ecuaciones básicas. Para comprobar esta última afirmación, tomemos la divergencia a la ecuación (1.12):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \frac{1}{c} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{D} \right) + 4\pi \nabla \cdot \mathbf{j}\end{aligned}$$

utilizando la ecuación (1.11):

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

b) Flujo y Densidad de Energía.

Multipliquemos los dos miembros de la ecuación (1.12) escalarmente por \mathbf{E} , los dos miembros de (1.10) por \mathbf{H} y sumemos miembro a miembro las ecuaciones que así resultan. Se tendrá entonces:

$$\frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \left(\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \right)$$

Si tenemos en cuenta la conocida fórmula del análisis vectorial,

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$$

podemos escribir esta relación en la forma:

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

o bien,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} \right) = - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (1.14)$$

El vector:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

se llama *vector de Poynting*.

Integremos (1.14) en un cierto volumen y apliquemos el teorema de Gauss al segundo miembro. Se obtiene así, que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} dV = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.15)$$

Si la integral se extiende a todo el espacio, la integral de superficie se anula (ya que el campo es nulo en el infinito). Además, podemos expresar la integral $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$ como una suma $\sum e_i v_i \cdot \mathbf{E}$ extendida a todas las cargas e_i y al sustituir es fácil comprobar que:

$$e v \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{cin}$$

donde \mathcal{E}_{cin} es la energía cinética de la partícula de carga e y

velocidad v . La igualdad (1.15) se transforma entonces en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{cin} \right) = 0 \quad (1.16)$$

Vemos así que para el sistema aislado constituido por el campo electromagnético y las cargas presentes en él, se conserva la cantidad entre corchetes que aparece en esta ecuación. El segundo término en ella es la energía cinética (incluida la energía en reposo de todas las partículas); el primer término es por consiguiente, la energía del campo electromagnético. Podemos así llamar a la magnitud

$$w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} \quad (1.17)$$

la densidad de energía del campo electromagnético; es la energía del campo por unidad de volumen.

Si integramos en un volumen finito, la integral de superficie que aparece en (1.15) en general no se anula, de modo que podemos escribir la ecuación en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{cin} \right) = - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} , \quad (1.18)$$

donde ahora la suma que aparece en el segundo miembro se extiende únicamente a las partículas situadas dentro del volumen considerado. El primer miembro representa el cambio por unidad de tiempo de la energía total del campo y de las partículas. Por lo tanto, suponiendo que la energía se conserva, la integral $\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ debe interpretarse como el flujo de energía del campo a través de la superficie que limita el volumen dado, de forma que el vector de Poynting representa esta densidad de flujo, es decir, la cantidad de energía del campo que atraviesa la unidad de área de la superficie por unidad de tiempo. Suponemos que en el instante dado no existen cargas sobre la superficie. De no ser así, en el segundo miembro deberíamos incluir el flujo de energía debido a las partículas que atraviesan la superficie.

Regresemos a la ecuación diferencial correspondiente, que expresa la conservación de la energía en un punto:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} \right) = - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (1.19)$$

donde $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ es el trabajo realizado por el campo local sobre las

partículas cargadas por unidad de volumen.

c) Ondas Electromagnéticas.

Una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de Maxwell es la deducción de las ecuaciones de propagación de ondas electromagnéticas en un medio lineal. La ecuación de onda para H se obtiene tomando el rotacional de (1.12):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{j} + \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Poniendo $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ y suponiendo que σ y ϵ son constantes, tenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}$$

El orden de las derivadas con respecto al tiempo y al espacio puede intercambiarse si \mathbf{E} es una función que se comporta lo suficientemente bien, lo que supondremos es el caso. La ecuación (1.10) puede ahora usarse para eliminar $\nabla \times \mathbf{E}$, dando

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = - \frac{4\pi}{c^2} \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

donde se ha usado $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, siendo μ una constante. La identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2 \tag{1.20}$$

se utiliza ahora para obtener:

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = - \frac{4\pi}{c^2} \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \tag{1.21}$$

Como μ es una constante,

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ;$$

en consecuencia, el primer término del primer miembro de la ecuación (1.20) se anula. La ecuación de onda final es:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \tag{1.22}$$

El vector \mathbf{E} satisface la misma ecuación de onda, como se ve fácilmente tomando primero el rotacional de la ecuación (1.10)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = - \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \frac{1}{c}$$

Utilizando la ecuación (1.12) para eliminar el campo magnético y considerando σ , μ y ϵ como constantes, se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Aplicando la identidad vectorial (1.20) y restringiendo la aplicación de la ecuación a un medio libre de carga, de modo que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, se tiene:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.23)$$

Las ecuaciones de onda deducidas antes rigen el campo electromagnético en un medio lineal homogéneo en el cual la densidad de carga es cero, sea este medio conductor o no. Sin embargo, no es suficiente que estas ecuaciones se satisfagan; las ecuaciones de Maxwell también deben satisfacerse. Es claro que las ecuaciones (1.22) y (1.23) son una consecuencia necesaria de las ecuaciones de Maxwell, pero lo inverso no es cierto. Al resolver las ecuaciones de onda, debe ponerse cuidado en obtener soluciones que cumplan las ecuaciones de Maxwell.

En un medio no conductor, $\sigma=0$ y las ecuaciones de onda para \mathbf{E} y \mathbf{H} resultan:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.24)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.25)$$

Se ve por esto que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio dieléctrico homogéneo es $c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Si el medio es conductor, $\sigma > 0$, el tercer miembro de la ecuación de onda debe mantenerse y el resultado será una onda amortiguada.

Siguiendo el proceso de la deducción de la ecuación (1.23) de nuevo hasta las ecuaciones de Maxwell, notaremos que el segundo término, o sea:

$$-\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

se deduce de la corriente de desplazamiento $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ en la ecuación (1.12), mientras que el tercer término, o sea:

$$-\frac{4\pi}{c^2} \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

se deduce de la corriente de transporte \mathbf{j} en la ecuación (1.12). Por tanto, la existencia misma de la propagación de ondas

electromagnéticas depende de la corriente de desplazamiento introducida por Maxwell. Sin ella, sólo ocurriría el decaimiento exponencial de los campos.

Una consecuencia importante de las ecuaciones (1.24) y (1.25), es que un campo electromagnético puede existir incluso cuando no existan cargas. El campo electromagnético en el vacío está determinado por las ecuaciones de Maxwell, en las que debemos hacer $\rho = 0$ y $\mathbf{j} = 0$. Estas ecuaciones tienen soluciones no nulas. Los campos electromagnéticos que existen en el vacío en ausencia de cargas están en forma de ondas electromagnéticas. Observemos que dichos campos deben necesariamente variar con el tiempo. En efecto, de no ser así $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ y las ecuaciones de Maxwell coincidirían con las ecuaciones de un campo constante con $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Pero la solución de estas ecuaciones se anula para $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$.

Potenciales Electromagnéticos.

Como la inducción magnética tiene divergencia cero, puede representarse como el rotacional de un potencial vectorial, esto es,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.26)$$

Utilizando la ecuación de Maxwell (1.10) con esta expresión para \mathbf{B} , obtenemos:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Suponiendo suficiente continuidad en los campos para intercambiar la derivada espacial y temporal, se puede escribir:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Entonces el vector $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ tiene rotacional cero, por lo que puede escribirse como el gradiente de un escalar:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.27)$$

Las ecuaciones (1.26) y (1.27) dan los campos eléctrico y magnético en función de un potencial vectorial \mathbf{A} y un potencial

escalar ϕ . Hasta ahora se ha especificado el rotacional de \mathbf{A} ; la divergencia de \mathbf{A} es aun arbitraria. Esto implica que los potenciales no estan determinados de manera única, por lo que se puede imponer una condición extra a los potenciales, esta condición es llamada norma de los potenciales.

Estos potenciales satisfacen ecuaciones de onda que son muy semejantes a aquellas satisfechas por los campos. Efectivamente, substituyendo (1.26) y (1.27) en las ecuaciones de Maxwell (1.11) y (1.12), e imponiendo la condición de Lorentz para los potenciales:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

se obtienen las ecuaciones de onda para los potenciales:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 4\pi \rho \quad (1.30)$$

CAPITULO 2
ELECTRODINAMICA RELATIVISTA

La invariancia en forma de las ecuaciones de la electrodinámica bajo transformaciones de Lorentz fue mostrada por Lorentz y Poincaré antes de la formulación de la teoría especial de la relatividad. Esta invariancia de forma o covariancia de las ecuaciones de Maxwell y de la fuerza de Lorentz implica que las diversas cantidades de estas ecuaciones (ρ , \mathbf{E} , \mathbf{J} , \mathbf{B}) se transforman de una forma bien definida bajo transformaciones de Lorentz. Entonces, los términos en las ecuaciones deben tener un comportamiento consistente bajo transformaciones de Lorentz.

Consideremos primero la ecuación de movimiento de una partícula con cantidad de movimiento \mathbf{p} y carga q bajo la acción de la fuerza de Lorentz,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.1)$$

Sabemos que \mathbf{p} se transforma como la parte espacial del cuadrivector de energía-momento \mathbf{p}^a :

$$\mathbf{p}^a = (p_0, \mathbf{p}) = (mU_0, m\mathbf{U}) = m (U_0, \mathbf{U}) = m\mathbf{U}^a$$

donde $p_0 = E/c$ y \mathbf{U}^a es la cuadrivelocidad $\mathbf{U}^a = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$. Si utilizamos el tiempo propio τ en lugar de t para la diferenciación en (2.1), ésta se puede escribir como:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{q}{c} \left(U_0 \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.2)$$

El tiempo propio τ se define como: $\tau = t/\gamma$.

El lado izquierdo de esta ecuación es la parte espacial de un cuadrivector. La componente temporal correspondiente es la razón de cambio de la energía de la partícula:

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{q}{c} \mathbf{U} \cdot \mathbf{E} \quad (2.3)$$

Si las ecuaciones de la fuerza y del cambio de energía han de ser Lorentz-covariantes, los términos del lado derecho deben ser las componentes de un cuadrivector. Estos términos contienen productos de tres factores, la carga q , la quadri-velocidad, y los campos electromagnéticos. Si las propiedades de transformación de dos de tres factores son conocidas, y se exige la covariancia de Lorentz, entonces las propiedades de transformación del tercer factor se

pueden establecer.

La carga eléctrica se conserva, hasta donde sabemos. Aun más, las magnitudes de las cargas de las partículas (y así mismo de cualquier sistema de cargas) son múltiplos enteros de la carga del electrón. Los resultados de diversos experimentos, sustentan la "invariancia de carga" bajo transformaciones de Lorentz o, más concretamente, la independencia de la carga observada de la partícula con su velocidad.

La invariancia experimental de la carga eléctrica y el requerimiento de covariancia de Lorentz de la ecuación de la fuerza de Lorentz (2.2) y (2.3), determinan las propiedades de la transformación de Lorentz para el campo electromagnético. Por ejemplo, el requerimiento de (2.3) de que $\mathbf{U} \cdot \mathbf{E}$ sea la componente temporal de un cuadrivector establece que las componentes de \mathbf{E} son las partes espacio-temporales de un tensor F^{ab} de segundo rango, esto es, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = F^{0b} U_b$.

Por simplicidad, consideremos las ecuaciones de Maxwell en forma microscópica, sin \mathbf{D} ni \mathbf{H} . Comencemos con la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.4)$$

Es natural postular que ρ y \mathbf{J} forman un cuadrivector J^α :

$$J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (2.5)$$

Entonces la ecuación de continuidad toma la forma obviamente covariante:

$$\partial_a J^a = 0 \quad (2.6)$$

donde el operador diferencial covariante ∂_a esta dado por:

$$\partial_a = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \nabla \right)$$

El hecho de que J^α es un legítimo cuadrivector se sigue de la invariancia de la carga electrica: la carga en un pequeño elemento de volumen d^3x es ρd^3x , dado que éste es un invariante, entonces es cierto que $\rho' d^3x' = \rho d^3x$. Pero el elemento de volumen cuatridimensional $d^4x = dx_0 d^3x$ es un invariante de Lorentz:

$$d^4x' = \frac{\partial(x_0', x_1', x_2', x_3')}{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)} d^4x = \det(A) d^4x = d^4x$$

La igualdad $\rho' d^3x' = \rho d^3x$ implica entonces, que $c\rho$ se transforma como x_0 , es decir, como la componente temporal de un cuadrivector.

En la familia lorentziana de normas, las ecuaciones de onda para el potencial vectorial \mathbf{A} y el potencial escalar ϕ son

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi &= 4\pi\rho \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

con la condición de Lorentz:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.8)$$

El operador diferencial en (7) es el laplaciano cuatridimensional:

$$\square^2 = \partial_a \partial^a = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

mientras que los miembros de la derecha son las componentes de un cuadvectores. Obviamente, la covariancia de Lorentz requiere que los potenciales \mathbf{A} y ϕ formen un potencial cuadri-vectorial:

$$\mathbf{A}^a = (\phi, \mathbf{A}) \quad (2.9)$$

Entonces, las ecuaciones de onda y la condición de Lorentz toman la forma manifiestamente covariante:

$$\left. \begin{aligned} \square^2 \mathbf{A}^a &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^a \\ \partial_a \mathbf{A}^a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son expresados por medio de los potenciales como:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Las componentes x de \mathbf{E} y \mathbf{B} están dadas explícitamente por:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

recordando que $\mathbf{A}^a = (\phi, \mathbf{A})$ y $\partial^a = (\partial/\partial x_0, -\nabla)$. Estas ecuaciones implican que el campo eléctrico, y el campo magnético, seis componentes en total, son los elementos de un tensor antisimétrico de segundo orden,

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a \quad (2.13)$$

El tensor F^{ab} es llamado *tensor de campo electromagnético*.
 Explícitamente, podemos escribir F^{ab} como una matriz, en la cual
 el índice $a = 0, 1, 2, 3$, etiqueta los renglones y el índice b las
 columnas:

$$F^{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

o bien

$$F_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Otra cantidad útil, es el *tensor dual de campo electromagnético*
 \tilde{F}^{ab} . Definimos primero el tensor ϵ^{abcd} de cuarto rango
 completamente antisimétrico de Levi-Civita:

$$\epsilon^{abcd} = \begin{cases} + 1 & \text{para } a=0, b=1, c=2, d=3, \text{ y} \\ & \text{cualquier permutación par.} \\ - 1 & \text{para permutaciones impares.} \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Este tensor tiene la propiedad de que sus componentes son las
 mismas en todos los sistemas coordenados. Con respecto a
 rotaciones del sistema ordenado, las cantidades ϵ^{abcd} se comportan
 como un tensor, pero si cambiamos el signo a una o tres
 coordenadas, las componentes ϵ^{abcd} , siendo definidas como el
 mismo en todos los sistemas coordenados, no cambian, mientras que
 las componentes de un tensor cambian de signo. Entonces,
 estrictamente hablando, ϵ^{abcd} no es un tensor, sino un
 pseudotensor. Los pseudotensores, de cualquier rango, en
 particular los pseudoescalares, se comportan como tensores bajo
 todas las transformaciones de coordenadas excepto aquéllas que no
 pueden ser reducidas a rotaciones, es decir, reflexiones, cuyos
 cambios en el signo de las coordenadas no pueden ser reducidos a

rotaciones.

Si A^{mk} es un tensor antisimétrico, el tensor A^{mk} y el pseudotensor $A^{*mk} = \frac{1}{2} \epsilon^{mkab} A_{ab}$ se dice que son duales uno al otro. El tensor dual de campo electromagnético esta definido por:

$$\tilde{y}^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} F_{cd} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Los elementos del tensor dual \tilde{y}^{ab} se obtienen de F^{ab} cambiando $E \rightarrow -E$ y $B \rightarrow B$ en (2.14).

Para completar la demostración de la covariancia de la electrodinámica debemos escribir las ecuaciones de Maxwell en una forma explícitamente covariante. Las ecuaciones inhomogéneas son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned}$$

En terminos de F^{ab} y la cuadricorriente J^a estas ecuaciones toman la forma:

$$\partial_a F^{ab} = \frac{4\pi}{c} J^a \quad (2.17)$$

Similarmente, las ecuaciones homogéneas de Maxwell,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

pueden ser escritas en términos del tensor dual de campo como

$$\partial_a \tilde{y}^{ab} = 0 \quad (2.18)$$

En términos de F^{ab} , las ecuaciones homogéneas son:

$$\partial^a F^{bc} + \partial^b F^{ca} + \partial^c F^{ab} = 0 \quad (2.19)$$

La expresión de la izquierda es un tensor de rango 3, el cual es antisimétrico en sus tres índices. Las únicas componentes que no son idénticamente cero son aquellas con $a \neq b \neq c$. De esta forma, hay solo cuatro ecuaciones diferentes.

Con las definiciones de J^a , A^a , y F^{ab} , junto con las ecuaciones de onda o las ecuaciones de Maxwell, queda establecida la covariancia de las ecuaciones del electromagnetismo. Para completar

el análisis, escribamos la ecuación de la fuerza de Lorentz (2.2) y la de la razón de cambio de la energía (2.3) en forma explícitamente covariante:

$$\frac{dP^a}{d\tau} = m \frac{dU^a}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{ab} U_b \quad (2.20)$$

Para las ecuaciones macroscópicas de Maxwell es necesario distinguir dos tensores de campo electromagnético, $F^{ab} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ y $G^{ab} = (\mathbf{D}, \mathbf{H})$. La forma covariante de las ecuaciones de Maxwell es:

$$\partial_a G^{ab} = \frac{4\pi}{c} J^a, \quad \partial_a \tilde{F}^{ab} = 0 \quad (2.21)$$

Es claro que con los campos (\mathbf{E}, \mathbf{B}) y (\mathbf{D}, \mathbf{H}) transformándose como tensores antisimétricos de segundo orden; la polarización \mathbf{P} y el negativo de la magnetización $-\mathbf{M}$ forman un tensor similar. Con estas cantidades, teniendo como significado físico los promedios macroscópicos de propiedades atómicas en el sistema de referencia en reposo con respecto a este medio, se determina la electrodinámica de la materia macroscópica en movimiento.

CAPITULO 3

TEORIA DE RADIACION

El estudio de los mecanismos de emisión de ondas electromagnéticas es de fundamental importancia en la astrofísica, dado que un preciso conocimiento del origen de las emisiones permite la deducción de información importante acerca de la naturaleza física de las fuentes, como su temperatura, constitución, densidad, ionización, el campo magnético de la fuente, etc. Mientras que ciertos mecanismos de emisión tales como el bremsstrahlung y la emisión sincrotrónica están bien entendidos, otros, por ejemplo, la radiación proveniente de oscilaciones de plasma, son mucho mas complejas.

Los mecanismos de emisión pueden ser clasificados en diversas formas. Por ejemplo, los podemos dividir en procesos macroscópicos y procesos microscópicos. En el segundo caso, cada partícula (electrón, átomo o ión) emite radiación independientemente de los otros, y la suma de estas radiaciones incoherentes debidas a todas las partículas, constituyen una emisión que puede cambiar sólo con el cambio de las condiciones del medio. En el caso de procesos macroscópicos, un grupo de partículas bajo un movimiento ordenado, emiten una radiación con cierto grado de coherencia. Estas emisiones implican, algunas veces, fenómenos de resonancia, por lo que son muy irregulares. El bremsstrahlung y la radiación sincrotrónica, son mecanismos de radiación incoherente, mientras que el mecanismo de radiación por ondas de plasma puede ser coherente o incoherente.

En un gas ionizado en equilibrio térmico, las velocidades de las partículas tienen una distribución maxwelliana. Si no hay fuentes externas de energía, la emisión no excede la radiación de cuerpo negro a la misma temperatura, y se dice que es originada por una fuente térmica. Si hay fuentes capaces de ceder su energía al medio, las partículas tienen una distribución de velocidades no maxwelliana y se dice que es originada por una fuente no térmica. Por ejemplo, un cierto número de partículas pueden ser aceleradas de manera individual a velocidades mucho más altas que la velocidad térmica, o bien, un movimiento ordenado de un grupo de

partículas puede ser superpuesto al movimiento térmico de agitación. El primer mecanismo corresponde a la radiación girosincrotrónica y el segundo a un fenómeno tal como oscilaciones del plasma.

a) *Potenciales de cargas en movimiento.*

Derivemos las ecuaciones que determinan los potenciales para cargas en movimiento. Esta derivación es más conveniente en notación cuatridimensional. Utilicemos las ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_a F^{ab} = \frac{4\pi}{c} J^a$$

Utilizando ahora la definición de F^{ab} :

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a$$

e imponiendo la condición de Lorentz:

$$\partial_a A^a = 0$$

en los potenciales, se obtiene:

$$\partial_a \partial^a A^b = \frac{4\pi}{c} J^b \quad (3.1)$$

Esta es la ecuación que determina los potenciales de un campo electromagnético arbitrario. En notación tridimensional, obtenemos las ecuaciones de onda para \mathbf{A} y ϕ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 4\pi \rho \quad (3.3)$$

Como es sabido, la solución de las ecuaciones diferenciales lineales e inhomogéneas (3.2) y (3.3) pueden ser representadas como la suma de la solución de estas ecuaciones sin el término del lado derecho (una solución a la ecuación homogénea correspondiente) y una integral particular de estas ecuaciones con el término del lado derecho (una solución particular a la ecuación inhomogénea). Para encontrar la solución particular, dividimos el espacio entero en regiones infinitamente pequeñas y determinamos el campo producido por las cargas localizadas en uno de estos elementos de volumen. Debido a la linealidad de las ecuaciones de campo, el campo será la suma de los campos producidos por todos estos términos.

La carga "de" en un elemento de volumen dado es, en términos generales, una función del tiempo. Si escogemos el origen de coordenadas en el elemento de volumen en consideración, entonces la densidad de carga es $\rho = de(t) \delta(R)$, donde R es la distancia al origen.

Entonces, debemos resolver la ecuación:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi de(t) \delta(R) \quad (3.4)$$

En todas partes, excepto en el origen, $\delta(R) = 0$, y tenemos la ecuación:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

Es claro que en este caso, estamos considerando ϕ con simetría esférica, es decir, ϕ es una función de R únicamente. Entonces si escribimos el operador de Laplace en coordenadas esfericas, (3.5) se reduce a:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

Para resolver esta ecuación, hacemos la substitución:

$$\phi(R, t) = \frac{\chi(R, t)}{R}$$

Entonces, la ecuación para χ es:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

La cual es una ecuación para ondas planas, cuya solución es de la forma:

$$\chi = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{c} \right)$$

Para mostrar lo anterior, escribamos la ecuación (3.6) para una función f en la forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} = 0$$

entonces, a su vez la podemos escribir como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial R} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial R} \right) f = 0$$

e introducimos las variables:

$$\xi = t - \frac{R}{c}, \quad \eta = t + \frac{R}{c}$$

por lo que:

$$t = \frac{1}{2} (\xi + \eta) \quad \text{y} \quad R = \frac{c}{2} (\eta - \xi)$$

Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial R} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial R} \right)$$

de tal forma que la ecuación para f es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

La solución obviamente tiene la forma $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias. Por lo tanto:

$$\chi = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{c} \right)$$

Dado que solo queremos una solución particular de la ecuación, es suficiente escoger sólo una de las funciones f_1 y f_2 . Usualmente es más conveniente tomar $f_2 = 0$. Entonces, en todas partes excepto en el origen, ϕ tiene la forma:

$$\phi = \frac{\chi (t - R/c)}{R} \quad (3.7)$$

Hasta ahora la función χ es arbitraria; escogamos ahora una tal que contenga el valor correcto para el potencial en el origen. En otras palabras, debemos seleccionar una χ tal que en el origen la ecuación (3.4) es satisfecha. Esto es fácil de hacer, notando que conforme $R \rightarrow 0$, el potencial crece indefinidamente, y entonces, sus derivadas con respecto a las coordenadas se incrementan mucho más rápido que su derivada temporal. Consecuentemente, conforme $R \rightarrow 0$, podemos, en la ecuación (3.4), despreciar el término $\partial^2 \phi / \partial t^2$ comparado con $\nabla^2 \phi$. Por lo que:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \text{de}(t) \delta(R),$$

recordando que la ley de Coulomb implica que $\nabla^2 \phi = -4\pi e \delta(R)$, por lo que cerca del origen, la ecuación (3.4) conduce a la ley de Coulomb, como era de suponerse. Entonces, cerca del origen, (3.7) debe de conducir a la ley de Coulomb, por lo que se concluye que $\text{de}(t) = \chi(t)$, esto es,

$$\phi = \frac{\text{de}(t - R/c)}{R}$$

De aquí es fácil obtener la solución a la ecuación (3.3) para una distribución arbitraria de cargas $\rho(x, y, z, t)$. Para hacer esto, es suficiente escribir $\text{de} = \rho dV$ (dV es el elemento de volumen) e

integrar sobre todo el espacio. A esta solución de la ecuación inhomogénea (3.3) debemos agregar la solución ϕ_0 de la misma ecuación sin el término del lado derecho. De esta forma, la solución general tiene la forma:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho(\mathbf{r}', t - R/c) dV' + \phi_0 \quad (3.8)$$

donde:

$$R = r - r', \quad dV' = dx' dy' dz', \quad r = (x, y, z), \quad r' = (x', y', z')$$

R es la distancia desde el elemento de volumen dV al "punto del campo" en el cual deseamos determinar el potencial. Podemos escribir esta expresión más brevemente en la forma:

$$\phi = \int \frac{\rho^{t-R/c}}{R} dV + \phi_0 \quad (3.9)$$

donde el subíndice $t-R/c$ significa que la cantidad ρ debe ser tomada al tiempo $t - R/c$, y la prima en dV' es omitida.

De forma análoga, se encuentra para el potencial vectorial:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}^{t-R/c}}{R} dV + \mathbf{A}_0 \quad (3.10)$$

donde \mathbf{A}_0 es una solución a la ecuación (3.2) sin el término del lado derecho.

Los potenciales (3.9) y (3.10) (sin ϕ_0 y \mathbf{A}_0) son llamados *potenciales retardados*.

En el caso de cargas en reposo (es decir, la densidad ρ independiente del tiempo), la fórmula (3.9) conduce a la ya antes conocida fórmula:

$$\phi = \int \frac{\rho}{R} dV$$

para el campo electrostático.

Para el caso de movimiento estacionario de cargas, la fórmula (3.10), después de promediarse en el tiempo, conduce a la fórmula:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV$$

para el potencial vectorial de un campo magnético constante.

Las cantidades \mathbf{A}_0 y ϕ_0 en (3.9) y (3.10) son determinadas de forma que satisfagan las condiciones del problema. Para hacer esto, es suficiente con imponer condiciones a la frontera, esto es, fijar los valores del campo al tiempo inicial. Sin embargo, generalmente no se tiene que trabajar con esas condiciones

iniciales. En cambio, se dan condiciones a grandes distancias del sistema de cargas durante todo el tiempo. Entonces, debemos saber qué radiación incide en el sistema proveniente del exterior. En correspondencia a esto, el campo producido como resultado de la interacción de esta radiación con el sistema puede diferir del campo externo sólo por la radiación originada por el sistema. Esta radiación emitida por el sistema debe, a grandes distancia, tener la forma de ondas desplegándose hacia el exterior del sistema, esto es, en la dirección de crecimiento de R . Pero precisamente esta condición es cumplida por los potenciales retardados. Entonces esas soluciones representan el campo producido por el sistema, mientras que ϕ_0 y A_0 deben ser iguales al campo externo que actúa sobre el sistema.

b) *Potenciales de Lienard-Wiechert.*

Determinemos ahora los potenciales para el campo producido por una carga que se mueve a lo largo de la trayectoria $r = r_0(t)$.

De acuerdo a las fórmulas para los potenciales retardados, el campo en el punto de observación $P(x,y,z)$ al tiempo t es determinado por el estado de movimiento de la carga al tiempo anterior t' , para el cual, el tiempo de propagación de la señal luminosa desde el punto $r_0(t')$, donde la carga está localizada, al punto P del campo coincide con la diferencia $t - t'$. Sea $R(t) = r - r_0(t)$ el radiovector que va de la carga al punto P , donde $r_0(t)$ es una función dada del tiempo. Entonces, el tiempo t' esta determinado por la ecuación:

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t \quad (3.11)$$

Para cada valor de t esta ecuación tiene solo una raíz t' .

En el sistema de referencia en el cual la partícula está en reposo al tiempo t' , el potencial en el punto de observación al tiempo t es justamente el potencial de Coulomb,

$$\phi = \frac{e}{R(t')} \quad \Lambda = 0 \quad (3.12)$$

Las expresiones para los potenciales en un sistema de referencia arbitrario pueden ser encontrados directamente, encontrando un cuadrivector que, si $v = 0$ coincide con las expresiones anteriores para ϕ y Λ . Tomando en cuenta que, de acuerdo con (3.11), ϕ en (3.12) se puede escribir en la forma

$$\phi = \frac{e}{c(t - t')}$$

encontramos que el cuadrivector es:

$$A^a = e \frac{u^a}{R^a u^a} \quad (3.13)$$

donde u^a es la cuadrivelocidad de la carga, $R^a = (c(t-t'), r-r')$, donde x', y', z', t' están relacionados por la ecuación (3.11), la cual en forma cuadridimensional es:

$$R_a R^a = 0 \quad (3.14)$$

Ahora bien, transformando nuevamente a notación tridimensional, obtenemos, para los potenciales del campo producido por una carga puntual moviéndose arbitrariamente, las siguientes expresiones:

$$\phi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c} \right)} \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{\left(R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c} \right)} \quad (3.15)$$

donde \mathbf{R} es el radiovector, tomado desde el punto donde la carga está localizada hasta el punto de observación P , y todas las cantidades en el lado derecho deben ser evaluadas en el tiempo t' , determinado por (3.11). Los potenciales del campo, en la forma (3.15), son llamados potenciales de Lienard - Wiechert.

Para calcular las intensidades del campo eléctrico y magnético de las fórmulas:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

debemos diferenciar ϕ y \mathbf{A} con respecto a las coordenadas x, y, z , de el punto y el tiempo t de observación. Pero las fórmulas (3.15) expresan los potenciales como función de t' , y es con la relación (3.11) que resulta como función implícita de x, y, z, t . Entonces, para calcular las derivadas requeridas debemos encontrar primero las derivadas respecto a t' . Derivando la relación $R(t') = (t-t')c$ con respecto a t obtenemos:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

donde se ha usado el hecho de que:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t'} = 2 R \cdot \frac{\partial R}{\partial t'} = 2 R \cdot (-\mathbf{v}(t')) = -2 R \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t'} = 2R \frac{\partial R}{\partial t'}$$

Por lo que:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{Rc}} \quad (3.16)$$

Similarmente, diferenciando la misma relación con respecto a las coordenadas, encontramos:

$$\nabla t' = -\frac{1}{c} \nabla R(t') = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \nabla t' + \frac{\mathbf{R}}{R} \right)$$

entonces:

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)} \quad (3.17)$$

Con la ayuda de estas fórmulas, no hay dificultad en llevar a cabo los cálculos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Omitiendo todos los cálculos intermedios, se llega a:

$$\mathbf{E} = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^3} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{e}{c^2} \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^3} R \times \left\{ \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right\} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \mathbf{R} \times \mathbf{E} \quad (3.19)$$

o bien, escritos en otra forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \left[\frac{\mathbf{n} - \bar{\beta}}{r'^2 (1 - \bar{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \bar{\beta}) \times \dot{\bar{\beta}} \}}{(1 - \bar{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\text{ret}}$$

donde en el primer conjunto, $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$, y en el segundo conjunto, se tiene $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, $\bar{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$; todas las cantidades en los lados derechos de estas ecuaciones, se refieren al tiempo t' . Es interesante notar que el campo magnético es siempre perpendicular al campo eléctrico.

El campo eléctrico (3.18) consiste de dos partes distintas. El primer término depende sólo de la velocidad de la partícula (y no de su aceleración) y varía a grandes distancias como $1/R^2$. El segundo término depende de la aceleración, y para R grandes varía como $1/R$. Después se observará que este último término está relacionado con las ondas electromagnéticas radiadas por la partícula. Los campos (3.18) y (3.19) se dividen naturalmente en campos de velocidad, los cuales son independientes de la aceleración, y campos de aceleración, los cuales dependen linealmente de $\dot{\mathbf{v}}$.

Utilizando el tensor de campo electromagnético F^{ab} , los campos (3.18) y (3.19) se pueden escribir como:

$$F^{ab} = \frac{e}{U^n (\mathbf{x} - \mathbf{r})_n} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r})^a U^b - (\mathbf{x} - \mathbf{r})^b U^a}{U^n (\mathbf{x} - \mathbf{r})_n} \right) \quad (3.20)$$

Aquí U^a es la cuadrivelocidad y r^b es la cuadriposición, ambos dependientes de τ . Después de la diferenciación la expresión debe ser evaluada en el tiempo τ_0 (retardado), definido por la ecuación (3.11) escrita en forma tensorial:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0))^n (\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0))_n = 0$$

c) Radiación emitida por una carga acelerada.

Si una carga es acelerada, pero es observada en un marco de referencia donde su velocidad es pequeña comparada con la de la luz, entonces en ese sistema de coordenadas el campo de aceleración en (3.18) se reduce a:

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right]_{\text{ret}} \quad (3.21)$$

El flujo instantáneo de energía está dado por el vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \left\{ \mathbf{E}_a \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \right\} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_a|^2 \mathbf{n} \quad (3.22)$$

Esto implica que la potencia radiada por unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{R}\mathbf{E}_a|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left| \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right|^2 \quad (3.23)$$

Si θ es el ángulo entre la aceleración $\dot{\mathbf{v}}$ y \mathbf{n} , como se muestra en la figura 3.1, entonces, la potencia radiada puede escribirse como:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \theta \quad (3.24)$$

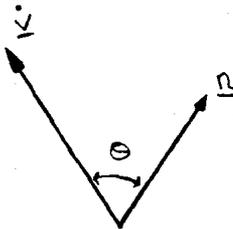


fig. 3.1

Al escribir distribuciones angulares de radiación, se exhibe siempre la polarización explícitamente escribiendo el cuadrado de un vector el cual es proporcional al campo eléctrico. Si la distribución angular para algún tipo especial de polarización es necesaria, se puede obtener tomando el producto escalar del vector

con el vector apropiado de polarización antes de tomar el cuadrado. Se observa de la ecuación (3.21) que la radiación está polarizada en el plano que contiene a \mathbf{v} y \mathbf{n} . La potencia total radiada se obtiene por medio de la integración (3.24) sobre el ángulo sólido:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} | \dot{\mathbf{v}} |^2 \quad (3.25)$$

Esta es la conocida expresión de Larmor para una carga no relativista acelerada.

La fórmula (3.22) puede ser generalizada por medio de argumentos de covariancia bajo transformaciones de Lorentz para conducir a una expresión que sea válida para cargas con velocidades arbitrarias. La energía electromagnética radiada se comporta bajo transformaciones de Lorentz como la componente temporal de un cuadvivector. Este resultado puede ser utilizado para mostrar que la potencia P es un invariante de Lorentz. Si pudiéramos encontrar un invariante de Lorentz que se reduzca a la fórmula de Larmor (3.25) para $\beta \ll 1$, entonces tendríamos la generalización deseada. Existen una gran variedad de invariantes de Lorentz que se reducen a (3.25) cuando $\beta \rightarrow 0$. Pero la forma de los campos (3.18) y (3.19), sugiere que éstos deben incluir sólo términos $\bar{\beta}$ y $\dot{\bar{\beta}}$. Con esta restricción en el orden de las derivadas, el resultado es único. Para encontrar la generalización de (3.25), escribamos esta fórmula de la siguiente manera:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \quad (3.26)$$

donde m es la masa y \mathbf{p} el momento de la partícula cargada. La generalización Lorentz-invariante debe de ser:

$$P = - \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}^n}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}^n}{dt} \right) \quad (3.27)$$

donde dt es el tiempo propio y \mathbf{p}^n el cuadrivivector de la partícula. Para comprobar que (3.27) conduce a (3.25), simplemente se toma el límite $\beta \rightarrow 0$ en (3.27). Para esto, obsérvese que:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}^n}{dt} &= m \frac{dU_n}{dt} = m \frac{d}{dt} \left(\gamma c, c\gamma\bar{\beta} \right) = m \left(\frac{d(\gamma c)}{dt}, \frac{d(c\gamma\bar{\beta})}{dt} \right) \\ &= mc\gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}, \gamma \frac{d\bar{\beta}}{dt} + \bar{\beta} \frac{d\gamma}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$= mc\gamma \left(\gamma^3 \bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}}, \gamma \dot{\bar{\beta}} + \bar{\beta} (\gamma^3 \bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}}) \right)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dP^m}{dt} \cdot \frac{dP_m}{dt} &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(\gamma^6 (\bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}})^2 - \gamma^2 (\dot{\bar{\beta}})^2 - 2\gamma^4 (\bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}})^2 - \gamma^6 \bar{\beta}^2 (\bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}})^2 \right) \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(-(\bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}})^2 \gamma^4 - \gamma^4 (\dot{\bar{\beta}})^2 (1 - \beta^2) \right) \\ &= m^2 c^2 \gamma^6 \left(\beta^2 \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}^2 - (\bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}})^2 \right) \\ &= m^2 c^2 \gamma^6 \left(-\dot{\bar{\beta}}^2 + (\bar{\beta} \times \dot{\bar{\beta}})^2 \right) \end{aligned}$$

por lo que:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \left[\dot{\bar{\beta}}^2 - (\bar{\beta} \times \dot{\bar{\beta}})^2 \right] \quad (3.28)$$

La expresión (3.28) se conoce como el resultado de Lenard. De aquí es fácil ver que si $\beta \rightarrow 0$, la ecuación (3.27) conduce a la ecuación (3.25). El hecho de que la generalización (3.27) es única puede ser visto teniendo en cuenta que un invariante de Lorentz está formado por el producto y contracción de dos cuadvectores o dos tensores en todos sus índices. Los únicos tensores disponibles para esta generalización son p^m y dp^m/dt . Sólo la expresión (3.27) conduce a la fórmula de Larmor para $\beta \rightarrow 0$, la contracción de productos $p^m dp_m/dt$ no conducen a la expresión (3.25).

Una partícula radia durante el tiempo dt la energía:

$$d\mathcal{E} = P dt$$

o bien:

$$d\mathcal{E} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{dU^k}{dt} \frac{dU_k}{dt} \right) dt$$

generalizando los resultados anteriores, se obtiene que el cuadrimpulso total radiado durante el paso de la partícula por un campo electromagnético dado es:

$$\Delta P^1 = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int \left\{ \frac{dU^k}{dt} \frac{dU_k}{dt} \right\} dx^1 \quad (3.27a)$$

Escribamos esta fórmula en otra forma, expresando la cuadiaceleración dU^1/dt en función del tensor de campo electromagnético exterior y valiéndonos de la ecuación de movimiento:

$$m \frac{dU_k}{dt} = \frac{e}{c} F_{km} U^m$$

Obtenemos entonces:

$$\Delta \mathcal{P}^1 = - \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \int (F_{km} U^m) (F^{kn} U_n) dx^1 \quad (3.27b)$$

La componente temporal de (3.27a) y (3.27b) da la energía total radiada $\Delta \mathcal{E}$. Substituyendo en vez de las cantidades cuadrimensionales en función de cantidades en el espacio tridimensional, se obtiene:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} dt \quad (3.27c)$$

o bien, en función de los campos exteriores eléctrico y magnético:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} / c \right\}^2 - (1/c^2) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} dt \quad (3.27d)$$

Las expresiones correspondientes al impulso radiado total difieren de éstas en un factor v más en el integrando (ya que $dx^1 = U^1 dt = U^1 (1 - \beta^2)^{1/2} dt$).

Esta fórmula pone de manifiesto que para velocidades próximas a la velocidad de la luz, la energía total radiada por unidad de tiempo varía en esencia con la velocidad como $(1 - \beta^2)^{1/2}$, esto es, proporcionalmente al cuadrado de la energía de la partícula en movimiento. La única excepción es el movimiento en un campo eléctrico paralelamente a la dirección del campo. En este caso el factor $(1 - \beta^2)^{1/2}$, que aparece en el denominador, se reduce por un factor idéntico en el numerador y la radiación resulta independiente de la energía de la partícula.

En un movimiento unidimensional, de (3.27) se obtiene que:

$$- \frac{dp^m}{dt} \frac{dp_m}{dt} = \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dp}{dt} \right)^2$$

$$\therefore P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (3.28a)$$

Para una carga acelerada en movimiento no relativista, la distribución angular muestra un comportamiento como $\sin^2 \theta$, donde θ se mide con respecto a la dirección de la aceleración. Para movimientos relativistas, los campos de aceleración dependen de la velocidad, así como de la aceleración. Por lo que la distribución angular es más complicada. De (3.18) la componente del vector de

Poynting puede ser calculada:

$$[\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}]_{\text{ret}} = \frac{e^2}{4\pi C} \left\{ \frac{1}{R^2} \left| \frac{\mathbf{n} \times \left[(\mathbf{n} - \bar{\beta}) \times \dot{\bar{\beta}} \right]}{(1 - \bar{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right|^2 \right\}_{\text{ret}} \quad (3.29)$$

Se puede ver que hay dos efectos relativistas presentes en (3.29). Uno de ellos es el efecto de la radiación espacial entre $\bar{\beta}$ y $\dot{\bar{\beta}}$, la cual determina la distribución angular. El otro es un efecto relativista general que surge de la transformación del sistema de la partícula en reposo instantáneo al sistema del observador y se manifiesta en la presencia del factor $(1 - \bar{\beta} \cdot \mathbf{n})$ en el denominador de (3.29). Para partículas ultrarrelativistas, este último efecto es dominante en la distribución angular.

En (3.29) $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ es la energía por unidad de área por unidad de tiempo detectada en un punto de observación al tiempo t de la radiación emitida por la carga al tiempo $t' = t - R(t')/c$. Si queremos calcular la energía radiada durante un período finito de aceleración, digamos de $t' = T_1$ a $t' = T_2$, escribimos

$$\mathcal{E} = \int_{t=T_1 + [R(T_1)/c]}^{t=T_2 + [R(T_2)/c]} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}]_{\text{ret}} dt = \int_{t'=T_1}^{t'=T_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} dt' \quad (3.30)$$

Se observa que la cantidad útil y con más significado es $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{dt}{dt'} \right)$, la potencia radiada por unidad de área en términos del tiempo propio de la carga. De esta forma definimos la potencia radiada por unidad de ángulo sólido como:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) (1 - \bar{\beta} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.31)$$

Si imaginamos que la carga es acelerada sólo durante un corto período de tiempo durante el cual $\bar{\beta}$ y $\dot{\bar{\beta}}$ son esencialmente constantes en magnitud y dirección, y si observamos la radiación lo suficientemente lejos de la carga de tal forma que \mathbf{n} y R cambian muy poco durante el intervalo de aceleración, entonces (3.31) es proporcional a la distribución angular de la energía radiada. Con la expresión (3.29) para el vector de Poynting, la distribución angular queda como:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi C} \left| \frac{\mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \bar{\beta}) \times \dot{\bar{\beta}} \right\}}{(1 - \bar{\beta} \cdot \mathbf{n})^5} \right|^2 \quad (3.32)$$

Esta fórmula puede ser reescrita en la forma:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{c \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)^4} + \frac{v^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)^3} - \frac{(1 - (v/c)^2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^5} \right\} \quad (3.32a)$$

El ejemplo más simple de (3.32) es el movimiento en una dimensión en el cual $\vec{\beta}$ y $\vec{\beta}$ son paralelos. Si θ es el ángulo de observación medido desde la dirección común a $\vec{\beta}$ y $\vec{\beta}$, entonces (3.32) se reduce a:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}| \frac{\text{sen}^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (3.33)$$

Para el caso $\beta < 1$, éste es el resultado de Larmor (3.24). Pero conforme $\beta \rightarrow 1$, la distribución angular es "empujada" hacia adelante y se incrementa en magnitud, como se indica esquemáticamente en la figura 3.2.

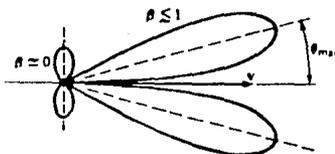


fig. 3.2

El ángulo θ_{\max} para el cual está concentrada la mayor parte de la energía es:

$$\theta_{\max} = \cos^{-1} \left[\frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right) \right] \longrightarrow \frac{1}{2\gamma} \quad (3.34)$$

donde el último término es en el valor límite de $\beta \rightarrow 1$. En este mismo límite el pico de intensidad es proporcional a γ^8 . Para $\beta = 0.5$, que corresponde a electrones de ≈ 80 KeV, $\theta_{\max} = 38.2^\circ$. Para partículas relativistas, θ_{\max} es muy pequeña, siendo del orden de la proporción de la energía en reposo de la partícula a su energía total. De esta forma la distribución angular está confinada a un cono muy estrecho en la dirección del movimiento. Para ángulos pequeños, la distribución angular (3.33) puede ser escrita de

forma aproximada como:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \approx \frac{e^2 \dot{v}^2}{\pi c^3} 8\gamma^6 \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5} \quad (3.35)$$

La unidad angular más natural es γ^{-1} . La distribución angular es mostrada en la figura 3.3 con ángulos medidos en estas unidades.

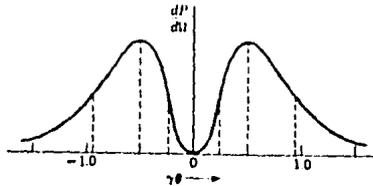


fig. 3.3

El máximo ocurre a $\gamma\theta = \frac{1}{2}$, y los puntos a mitad de intensidad a $\gamma\theta = 0.23$ y $\gamma\theta = 0.91$. La raíz de la media cuadrática del ángulo de emisión es, en el límite relativista:

$$\langle \theta^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{E} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.36)$$

Esto es algo típico en los patrones de radiación relativistas, sin importar la relación vectorial entre $\vec{\beta}$ y $\dot{\vec{\beta}}$. La potencia total radiada puede ser obtenida integrando (3.33) sobre todos los ángulos. Entonces

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2 \gamma^6 \quad (3.37)$$

en perfecta concordancia con (3.28)

Otro ejemplo de distribución angular de radiación es el de una carga en movimiento circular instantáneo con aceleración $\dot{\vec{\beta}}$ perpendicular a su velocidad $\vec{\beta}$. Escojamos un sistema coordenado tal que el vector β se encuentre instantáneamente en el eje z y $\dot{\vec{\beta}}$ en el eje x. Con el uso de los ángulos θ , y ϕ , que definen la dirección de observación (figura 3.4), la fórmula general (3.32)

se reduce a:

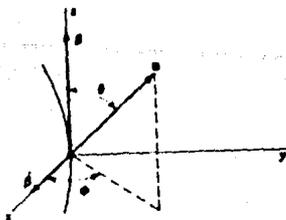


fig. 3.4

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos\theta)^2} \right] \quad (3.38)$$

Obsérvese que aunque la distribución angular es diferente a la del caso de aceleración lineal, el máximo relativista característico a ángulos en la dirección del movimiento está presente. En el límite relativista ($\gamma \gg 1$), la distribución angular puede ser escrita aproximadamente como:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \approx \frac{2e^2}{\pi c^3} \gamma^6 \frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{(1 + \gamma^2\theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2\theta^2 \cos^2\phi}{(1 + \gamma^2\theta^2)^2} \right] \quad (3.39)$$

La raíz de la media cuadrática del ángulo de emisión en esta aproximación está dado por (3.36), al igual que en el caso lineal. La potencia total radiada puede ser encontrada integrando (3.38) sobre todos los ángulos, o bien de (3.28):

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{c^3} \gamma^4 \quad (3.40)$$

Es interesante comparar la potencia radiada por aceleración paralela a la velocidad (3.37) con la potencia radiada por aceleración perpendicular a la velocidad para la misma magnitud de fuerza aplicada. Para movimiento circular, la magnitud de la razón de cambio de momento (la cual es igual a la fuerza aplicada) es $\gamma m \dot{\mathbf{v}}$. Consecuentemente, (3.40) puede ser escrita como:

$$P_{\text{circular}}(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 \quad (3.41)$$

Cuando este resultado es comparado con el resultado correspondiente para movimiento rectilíneo (3.28a), encontramos que para una fuerza aplicada de magnitud dada, la radiación emitida con una aceleración transversal es mayor por un factor γ^2 que con aceleración paralela.

d) Mecanismos de Emisión de Radiación.

En Fenómenos Cósmicos, los mecanismos de emisión más importantes son:

- i) radiación sincrotrónica y girotrónica,
- ii) bremsstrahlung,
- iii) radiación de Cherenkov,
- iv) radiación de transición,
- v) oscilaciones de plasma,
- vi) efecto Compton inverso y dispersión de Thompson,
- vii) radiación térmica de cuerpo negro,
- viii) radiación espectral de línea.

En la presente sección desarrollaremos estos mecanismos, algunos con mayor detalle que otros. En el capítulo 7 se describirán nuevamente en relación a su importancia en la astrofísica, mencionando en especial los fenómenos de absorción y de emisión coherente o estimulada.

i) Radiación Sincrotrónica.

Consideremos la radiación de una carga que se mueve con velocidad arbitraria sobre una circunferencia en un campo magnético constante y uniforme; esta radiación se llama radiación sincrotrónica si la carga tiene velocidades relativistas; radiación ciclotrónica si la carga no tiene velocidades relativistas; y en general recibe el nombre de radiación de frenado magnético, o magnetobremstrahlung, o bremsstrahlung magnético. El radio de la órbita r y la pulsación del movimiento ω se pueden expresar en función de la intensidad del campo H y la velocidad de la partícula v .

La ecuación de movimiento de una carga en un campo magnético H es:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

Ahora bien, de la dinámica relativista tenemos:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E} \mathbf{v}}{c^2}$$

donde \mathcal{E} es la energía de la partícula, que es constante en un campo magnético. La ecuación del movimiento toma entonces la forma:

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{dv}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

El hecho de que la energía \mathcal{E} sea constante es consecuencia de que:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = 0$$

Si ahora consideramos un sistema de referencia tal que $\mathbf{H} = k\mathbf{H}_z$, se obtienen las ecuaciones:

$$\dot{v}_x = \omega v_y \quad \dot{v}_y = -\omega v_x \quad \dot{v}_z = 0 \quad (3.42)$$

donde se ha hecho:

$$\omega = \frac{e\mathcal{E}H}{\mathcal{E}^2} = \frac{eH}{mc} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.43)$$

Multiplicando la segunda ecuación (3.42) por i y sumando el producto a la primera, se obtiene:

$$\frac{d(v_x + iv_y)}{dt} = -i\omega (v_x + iv_y)$$

de modo que:

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t} = v_{0t} e^{-i(\omega t + \alpha)}$$

por lo que:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + r \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \\ y &= y_0 + r \operatorname{cos}(\omega t + \alpha) \\ z &= z_0 + v_z t \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

donde:

$$\begin{aligned} v_{0t} &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ r &= \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{mcv}{eH \sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Las fórmulas (3.44) muestran claramente que la carga, en un campo magnético uniforme, se mueve a lo largo de una hélice cuyo eje está dirigido en el sentido del campo magnético y cuyo radio r viene dado por (3.45). La velocidad de la partícula es constante en magnitud. En el caso particular $v_{0z} = 0$, esto es, cuando la componente de la velocidad de la carga es nula, la carga se mueve siguiendo una circunferencia en un plano perpendicular a la dirección del campo.

La magnitud ω como se deduce de las fórmulas, es la frecuencia

angular de rotación de la partícula en el plano perpendicular al campo.

Si la velocidad de la partícula es pequeña, podemos hacer, aproximadamente $\beta = mc^2$. La frecuencia ω pasa a ser entonces:

$$\omega = \frac{eH}{mC}$$

A esta cantidad se le denomina *frecuencia ciclotrónica*, o *frecuencia girotrónica*, o *frecuencia de Larmor*.

La intensidad total de la radiación emitida en todas direcciones viene dada por la fórmula (3.27d) sin integrar respecto al tiempo, en la que debemos hacer $E = 0$ con $H \perp v$:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{2 e^2 H^2 v^2}{3m^2 c^5 (1 - \beta^2)} \quad (3.46)$$

Vemos así que la intensidad total es proporcional al cuadrado del impulso de la partícula.

Si en cambio, nos interesa la distribución angular de la radiación, deberemos utilizar la fórmula (3.32). Una cantidad interesante es la intensidad media relativa a un período del movimiento. Para determinarla integremos (3.32) en el intervalo correspondiente a una vuelta de la partícula a lo largo de la circunferencia y dividiremos el resultado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Elijamos el plano de la órbita como el plano XY (el origen coincide con el centro de la circunferencia) y hagamos pasar el plano YZ por la dirección n de la radiación (fig 3.5). El campo magnético estará dirigido en el sentido negativo del eje Z (el sentido del movimiento de la partícula representado en la fig. corresponde a una carga e positiva). Además, sea θ el ángulo formado por la dirección n de la radiación y el eje Y, y $\phi = \omega t$ el ángulo entre el vector posición de la partícula y el eje X. En estas condiciones, el coseno del ángulo formado por n y la velocidad v es $\cos(n, v) = \cos\theta \cdot \cos\phi$ (el vector v se encuentra en el plano XY, y en cada instante es perpendicular al vector posición de la partícula). Expresemos la aceleración w de la partícula en función del campo H y de la velocidad v mediante la ecuación de movimiento:

$$\mathbf{v} = \frac{e}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

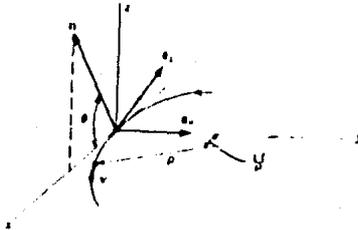


fig. 3.5

Después de un cálculo sencillo se obtiene:

$$dP = d\Omega \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^{2\pi} \frac{(1 - v^2/c^2) \sin^2 \theta + (v/c - \cos \theta \cos \phi)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \phi\right)^2} d\phi$$

(la integración respecto al tiempo se ha transformado en una integración respecto de $\phi = \omega t$). Después de un largo proceso de integración se obtiene:

$$dP = d\Omega \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left\{ \frac{2 + \frac{v^2}{c^2} \cos \theta}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{5/2}} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(4 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right) \cos^2 \theta}{4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{7/2}} \right\} \quad (3.48)$$

La razón de la intensidad de la radiación para $\theta = \frac{\pi}{2}$ (perpendicular al plano de la órbita) a la intensidad para $\theta = 0$ (plano de la órbita) es:

$$\frac{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_0}{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{4 + 3 \frac{v^2}{c^2}}{8 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}} \quad (3.49)$$

Cuando $v \rightarrow 0$, esta razón tiende a $\frac{1}{2}$, pero para velocidades proximas a la de la luz llega a ser muy grande.

Consideremos ahora la distribución espectral de la radiación. Dado que el movimiento de la carga es periodico, se trata aquí de un desarrollo en serie de Fourier. Es conveniente empezar el cálculo con el potencial vectorial. Para las componentes de Fourier tenemos:

$$A_n = e \frac{e^{ikR_0}}{c R_0 T} \oint e^{i(\omega n t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r}$$

donde la integración se efectua a lo largo de la trayectoria de la partícula (la circunferencia). Para las coordenadas de ésta tenemos $x = r \cos(\omega t)$, $y = r \sin(\omega t)$. Como variable de integración elegiremos el ángulo $\phi = \omega t$. Observando que:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k n \cdot \mathbf{r} = k r \cos\theta \sin\phi = \frac{nv}{c} \cos\theta \sin\phi$$

($k = n\omega/c = nv/cr$), se encuentra para las componentes de Fourier de la componente x del potencial vectorial:

$$A_{xn} = - \frac{ev}{2\pi c R_0} e^{ikR_0} \int_0^{2\pi} e^{in\left(\phi - \frac{v}{c} \cos\theta \sin\phi\right)} \sin\phi d\phi$$

Este tipo de integrales son comunes en física, y estan ampliamente estudiadas. Es posible expresarla en función de la derivada de la función de Bessel:

$$A_{xn} = - \frac{iev}{cR_0} e^{ikR_0} J'_n \left(\frac{nv}{c} \cos\theta \right) \quad (3.50)$$

Analogamente, el cálculo de A_{yn} conduce a:

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0 \cos\theta} e^{ikR_0} J_n \left(\frac{nv}{c} \cos\theta \right) \quad (3.51)$$

La componente a lo largo del eje z se anula, evidentemente. Se puede deducir que la intensidad de la radiación de frecuencia $\omega = n\omega_H$ y emitida en el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ esta dada por:

$$dP_n = \frac{c}{2\pi} |H_n|^2 R_0^2 d\Omega \quad (3.52)$$

donde se ha utilizado la relación (3.31), reemplazando $|\mathbf{E}|$ por $|\mathbf{H}|$ con la relación (3.19), para obtener:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |H|^2 R_0^2$$

integrando respecto al tiempo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\Omega} dt = \frac{cR_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H|^2 dt = \frac{cR_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 dt$$

donde se ha utilizado el teorema de Parseval del análisis de Fourier en la última igualdad. Dado que $H(\omega)$ es una función real, otro teorema del análisis de Fourier nos dice que:

$$\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^0 |H(\omega)|^2 d\omega$$

de aquí es natural que podamos definir $dP(\omega)/d\Omega$ de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\Omega} dt = \frac{cR_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{dP(\omega)}{d\Omega} d\omega$$

De aquí se sigue la relación (3.52). Nótese que dadas las propiedades de las series e integrales de Fourier, lo anterior es cierto tanto para distribuciones continuas de frecuencia, como para distribuciones discretas. Es decir, la relación (3.52) es generalizada de la expresión anterior, cambiando las integrales por sumas, e imponiendo la relación $\omega = n\omega_H$.

Ahora bien, a distancias suficientemente grandes del sistema, el campo se puede considerar como una onda plana en pequeñas regiones del espacio. Para ello es necesario que la distancia sea grande comparada, no sólo con las dimensiones del sistema, sino también con la longitud de onda de las ondas electromagnéticas que el sistema radia. Llamaremos a esta región zona de ondas de la radiación.

En una onda plana, los campos E y H están ligados entre sí por las relaciones $E = H \times n$. Dado que $H = \nabla \times A$, para determinar por completo el campo en la zona de ondas basta con calcular sólo el potencial vectorial. En una onda plana tenemos $H = \frac{1}{c} \dot{A} \times n$. Así, conocido A , se encuentran E y H de la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{c} \dot{A} \times n, \quad E = \frac{1}{c} (\dot{A} \times n) \times n \quad (3.53)$$

Ahora bien, las componentes H_n y E_n se determinan mediante las fórmulas (3.53) (notese que el índice n indica "armónico n "). Substituyendo en ellas en vez de H , E , A , respectivamente,

$H_n e^{-i\omega t}$, $E_n e^{-i\omega t}$, $A_n e^{-i\omega t}$ y dividiendo luego por $e^{-i\omega t}$, se obtiene:

$$H_n = i \mathbf{k} \times \mathbf{A}_n, \quad E_n = \frac{i c}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_n) \times \mathbf{k} \quad (3.54)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{k} \times \mathbf{A}_n|^2 R_0^2$$

Observando que:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{k}|^2 = A_x^2 k^2 + A_y^2 k^2 \sin^2 \theta$$

y substituyendo (3.50) y (3.51), obtenemos para la intensidad de radiación la fórmula siguiente:

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi c^3 m^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left\{ \tan^2 \theta \cdot J_n^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) \right\} \quad (3.55)$$

Para determinar la intensidad total de la radiación de frecuencia $\omega = n\omega_H$ en todas direcciones, esta expresión debe integrarse para todos los ángulos. Sin embargo, la integración no se puede llevar a cabo en forma finita. Mediante una serie de transformaciones, y utilizando ciertas relaciones de la teoría de funciones de Bessel, la integral en cuestión se puede escribir de la forma siguiente:

$$P_n = \frac{2e^4 H^2 (1 - v^2/c^2)}{m^2 c^2 v} \left\{ \frac{nv^2}{c^2} J_{2n}' \left(\frac{2nv}{c} \right) - n^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi) d\xi \right\} \quad (3.56)$$

Consideremos mas detenidamente el caso ultrarrelativista, cuando la velocidad de la partícula difiere poco de la velocidad de la luz.

Haciendo en el numerador de la fórmula (3.46) $v = c$, se encuentra que la intensidad total de la radiación sincrotrónica en el caso ultrarrelativista es proporcional al cuadrado de la energía de la partícula, ϵ :

$$P = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right)^2 \quad (3.57)$$

La distribución angular de la radiación es en este caso extremadamente anisótropa y se encuentra concentrada esencialmente cerca del plano de la órbita. La anchura angular $\Delta\theta$ a que queda limitada la mayor parte de la radiación se puede estimar facilmente a partir de la condición:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \approx 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

Veremos mas adelante que, en este caso, el papel fundamental lo representan en la radiación las frecuencias con valores grandes de n . Cabe, por consiguiente, utilizar la fórmula asintótica:

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n^{1/3}}} \Phi \left[n^{2/3} (1 - \xi^2) \right] \quad (3.58)$$

donde Φ es la función de Airy definida por la relación:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t \right) d\xi$$

Substituyendo en (3.56), se obtiene la fórmula siguiente para la distribución espectral de la radiación correspondiente a valores grandes de n :

$$P_n = - \frac{ze^4 H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} u^{1/2}}{\sqrt{\pi} m^2 c^3} \left\{ \Phi'(u) + \frac{u}{2} \int_u^{\infty} \Phi(\zeta) d\zeta \right\} \quad (3.59)$$

$$u = n^{2/3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (3.59a)$$

Al hacer la substitución, el límite $n^{2/3}$ de la integral se puede substituir por infinito, conservándose la precisión requerida; hemos hecho también $v = c$ donde era posible. Aunque valores de ξ que no son próximos a la unidad figuran también en la integral (3.56), con todo podemos usar la fórmula (3.57), dado que la integral converge rapidamente en su límite inferior.

Para $u \rightarrow 0$ la función entre corchetes tiende a $\Phi'(0) = 0.4587..$ Efectivamente, de la definición de la función de Airy:

$$\Phi'(0) = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \xi \operatorname{sen} \left(\frac{\xi^3}{3} \right) d\xi = - \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(2/3)} \int_0^{\infty} X^{-1/3} \operatorname{sen}(X) dx \quad (3.60)$$

$$\therefore \Phi'(0) = - \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2 \sqrt{\pi} \Gamma(1)} = 0.4587....$$

Por consiguiente, para $u \ll 1$ se tiene:

$$P_n = (0.52) \frac{e^4 H^2}{m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) n^{1/3}$$

$$1 \ll n \ll \left(\frac{\xi}{mc^2} \right)^3$$

esto es, la intensidad del n-esimo armónico es proporcional a $n^{1/3}$.

Para $u \gg 1$, podemos utilizar la expresión asintótica de la función de Airy:

$$\phi(t) = \frac{1}{2} t^{1/4} e^{-\frac{2}{3} t^{3/2}}$$

y se obtiene así:

$$P_n = \frac{e^2 H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4} n^{1/2}}{2 \sqrt{\pi} m^2 c^3} \exp \left\{ -\frac{2}{3} n \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \right\} \quad (3.61)$$

$$n \gg \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right)^3$$

esto es, la intensidad disminuye exponencialmente para grandes valores de n. En consecuencia, el espectro presenta un máximo para:

$$n \approx \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

y la parte de la radiación se concentra en la región de frecuencias en la cual:

$$\omega \approx \omega_H \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} = \frac{eH}{mc} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \quad (3.62)$$

Estas frecuencias son muy altas comparadas con la separación ω_H entre dos de ellas consecutivas. En otras palabras, el espectro de la radiación está constituido por un gran número de rayas muy próximas entre sí, es decir, tiene un carácter casi continuo. En vez de la función de distribución P_n podemos, por consiguiente, introducir una distribución en sucesión continua de frecuencias $\omega = n\omega_H$, escribiendo:

$$dP = P_n dn = P_n \frac{d\omega}{\omega_H}$$

Para los cálculos numéricos conviene expresar esta distribución mediante la función de McDonald K_ν . La función de Airy y la función $K_{1/3}$ están ligadas por la fórmula:

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} \right)$$

Mediante el uso de relaciones de recurrencia, es posible mostrar que:

$$\phi'(t) = - \frac{t}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} \right)$$

Transformaciones de la fórmula (59) permiten representar dicha distribución en la forma:

$$dP = d\omega \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 H}{mc^2} F \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (3.63)$$

$$F(\xi) = \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\zeta) d\zeta$$

donde se ha hecho:

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{eH}{mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 \quad (3.64)$$

En la figura (3.6) se representa graficamente la función $F(\xi)$.

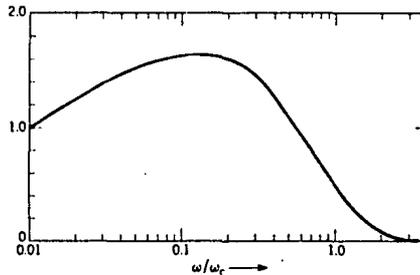


fig 3.6

Ahora bien, la distribución asintótica de la distribución espectral de la radiación para grandes valores de n en el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una circunferencia con una velocidad que no es próxima a la velocidad de la luz, se obtiene de la siguiente forma:

Partiendo de la ecuación (3.56), y utilizando la fórmula asintótica de las funciones de Bessel:

$$J_{2n}(n\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{(1 - \mathcal{E}^2)^{1/4}} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \mathcal{E}^2}} e^{\sqrt{1 - \mathcal{E}^2}} \right]^n$$

que es válida para $n(1 - \mathcal{E}^2)^{3/2} \gg 1$, se llega a:

$$P_n = \frac{e^4 H^2 n^{1/2}}{2 \sqrt{\pi} m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{5/4} \left[\frac{\frac{v}{c}}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}} e^{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^{2n}$$

la cual es valida para $n(1 - v^2/c^2)^{3/2} \gg 1$; si además $1 - v^2/c^2$ es pequeño, la fórmula se transforma en la (3.61).

Vale la pena, encontrar una relación entre la intensidad de radiación P_n y la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia, la cual denotaremos como:

$$\left. \frac{dI}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0}$$

Es claro que para convertir energía a intensidad hay que multiplicar $dI/d\omega$ por la razón de repetición del movimiento o frecuencia $c/2\pi r$ de la partícula; y por $\omega_H = c/r$ para convertir el intervalo unitario de frecuencia en intervalo en intervalo del armonico. Entonces:

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{r} \right)^2 \left. \frac{dI}{d\omega} \right|_{\omega = n\omega_0} \quad (3.65)$$

Otro punto que debe destacarse es la expresión para la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia por unidad de ángulo sólido. Es claro de (65) que:

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{r} \right)^2 \left. \frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} \right|_{\omega = \omega_0} \quad (3.65b)$$

Partiendo de la ecuación (3.55), y utilizando las fórmulas asintóticas para la función de Bessel y su relación con las funciones de McDonald, y suponiendo un caso ultrarelativista se llega a:

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (3.66)$$

donde:

$$\xi = \frac{\omega r}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2} \quad (3.67)$$

El primer término en el parentesis cuadrado corresponde a la radiación polarizada en el plano de la órbita, y el segundo a la radiación polarizada perpendicularmente.

Comprobemos esta afirmación. El campo eléctrico E_n se calcula a partir del potencial vectorial A_n (ecs. 3.50 y 3.51) segun la

fórmula (3.54):

$$E_n = \frac{ic}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_n) \times \mathbf{k} = -\frac{i}{k} \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_n) + i\mathbf{k} A_n$$

Sean e_1 y e_2 los vectores unitarios en un plano perpendicular a \mathbf{k} , de los cuales e_1 tiene la dirección del eje x y e_2 se encuentra en el plano YZ (sus componentes son $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, \sin\theta, -\cos\theta)$); los vectores e_1 , e_2 y \mathbf{k} forman un triedro directo. El campo eléctrico sera entonces:

$$E_n = ik A_{xn} e_1 + ik \sin\theta A_{yn} e_2$$

o bien, precindiendo de factores comunes no esenciales:

$$E_n \approx \frac{v}{c} J_n' \left(\frac{nv}{c} \cos\theta \right) e_1 + \tan\theta J_n \left(\frac{nv}{c} \cos\theta \right) i e_2$$

Dado que a grandes distancias la radiación puede ser considerada como una serie de ondas planas, y puesto que una onda plana es necesariamente polarizada, se concluye que la onda está polarizada elípticamente.

En el caso ultrarelativista, para valores de n grandes y pequeños ángulos θ las funciones J_n y J_n' se expresan mediante las funciones $K_{1/3}$ y $K_{2/3}$, en cuyos argumentos haremos:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2\theta \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 = \left(\frac{mc^2}{\epsilon} \right)^2 + \theta^2$$

El resultado que se obtiene es:

$$E_n \approx e_1 \psi K_{2/3} \left(\frac{n}{3} \psi^3 \right) + i e_2 \theta K_{1/3} \left(\frac{n}{3} \psi^3 \right)$$

$$\psi = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\epsilon} \right)^2 + \theta^2}$$

Para $\theta = 0$ la polarización elíptica degenera en una polarización lineal a lo largo de e_1 . Para valores de θ grandes ($|\theta| > mc^2/\epsilon$, $n\theta^3 > 1$) tenemos $K_{1/3}(x) \approx K_{2/3}(x) \approx (\pi/2x)^{1/2} e^{-x}$ y la polarización tiende a ser circular: $E_n \approx e_1 + ie_2$; la intensidad de la radiación, sin embargo, se hace entonces exponencialmente pequeña. En la región de ángulos intermedia, el eje menor de la elipse está dirigido a lo largo de e_2 , y el mayor, a lo largo de e_1 . El sentido de la rotación depende del signo del ángulo θ ($\theta > 0$ si los vectores \mathbf{H} y \mathbf{k} se encuentran a lados distintos del plano de la órbita, como se representa en la figura (3.5).

Procederemos ahora a examinar la ecuación (3.66) con más detalle. Primeramente integremos sobre todas las frecuencias y encontraremos que la distribución en ángulo es:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} d\omega = \frac{7}{16} \frac{e^2}{r} \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{5/2}} \left[1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)} \right] \quad (3.68)$$

Esta ecuación muestra el comportamiento característico visto en la sección *Distribución Angular de la Radiación Emitida por una carga Acelerada*. La ecuación (3.68) puede obtenerse directamente, integrando una generalización de la fórmula (3.38) de la potencia radiada por una partícula en movimiento circular sobre todos los tiempos. Al igual que en (3.66), el primer término en (3.68) corresponde a polarización paralela al plano de la órbita, y el segundo a polarización perpendicular. Integrando sobre todos los ángulos, encontramos que la energía radiada con polarización paralela es unas 7 veces la energía radiada con polarización perpendicular. La radiación sincrotrónica está fuertemente, pero no completamente polarizada en el plano del movimiento.

Regresemos a la ecuación (3.66). Las propiedades de las funciones de McDonald (también llamadas funciones de Bessel o Hankel modificadas) muestran que la intensidad de radiación es despreciable para $\xi > 1$. De (3.68) vemos que esto ocurre para ángulos muy grandes; mientras más grande sea la frecuencia, será menor el ángulo crítico más allá del cual la radiación es despreciable. Esto muestra que la radiación está en gran parte confinada al plano que contiene el movimiento como lo muestra (3.68), estando más confinada a frecuencias relativamente más altas a ω_H . Si ω se hace muy grande, vemos que ξ es grande para todos los ángulos. Esto es, la energía total emitida a esa frecuencia es despreciable. La frecuencia crítica ω_c más allá de la cual la radiación es despreciable, a cualquier ángulo está definida por $\xi = 1$ para $\theta = 0$. Entonces:

$$\omega_c = 3 \gamma^3 \omega_H \quad (3.69)$$

Esta frecuencia crítica es distinta de (3.64). En aque entonces, la podíamos haber definido, analogamente, como la frecuencia tal que $\xi = 2$, es decir, $\xi = \omega_c / \omega'_c = 2$, $\omega_c = 2\omega'_c = 3 \gamma^3 \omega_H$.

Podemos ahora definir una frecuencia de armónico crítico $\omega_c =$

$n_c \omega_H$, con número armónico:

$$n_c = 3 \gamma^3 \quad (3.70)$$

Dado que la radiación esta predominantemente en el plano orbital para $\gamma \gg 1$, es instructivo evaluar la distribución angular (3.66) en $\theta = 0$. Para frecuencias muy por abajo de la crítica ($\omega \ll \omega_c$), encontramos:

$$\left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} \approx \frac{e^2}{c} \left[\frac{\Gamma(2/3)}{\pi} \right]^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{\omega \rho}{c} \right)^{2/3}$$

Para el límite opuesto de $\omega \gg \omega_c$, el resultado es:

$$\left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} \approx \frac{3}{2\pi} \frac{e^2}{c} \gamma^2 \frac{\omega}{\omega_c} e^{-2\omega/\omega_c}$$

La distribución en ángulo a una frecuencia fija puede ser estimada determinando el ángulo θ_c al cual $\xi(\theta_c) \approx \xi(0) + 1$. En el rango de bajas frecuencias ($\omega \ll \omega_c$), $\xi(0)$ es muy pequeña, entonces $\xi(\theta_c) \approx 1$. Esto da:

$$\theta_c = \left(\frac{3c}{\omega \rho} \right)^{1/3} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^{1/3} \quad (3.71)$$

Se observa que las componentes de baja frecuencia son emitidas a ángulos mayores que el promedio $\langle \theta^2 \rangle^{1/2} \approx \gamma^{-1}$. En el límite de altas frecuencias ($\omega \gg \omega_c$), $\xi(0)$ es grande comparado con la unidad. Entonces la intensidad cae con el ángulo aproximadamente como:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \approx \left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} e^{-3\omega \gamma^2 \theta^2 / \omega_c}$$

Entonces, el ángulo crítico, definido por el punto $1/e$, es:

$$\theta_c = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{3\omega} \right)^{1/2} \quad (3.72)$$

Esto muestra que las componentes de alta frecuencia están confinadas a un rango angular mucho menor que el promedio. La figura (3.7) muestra cualitativamente la distribución angular de frecuencias menores, del orden, y mayores que ω_c . Se ha utilizado la unidad natural de medida angular $\gamma\theta$.

Finalmente, algunas observaciones acerca del caso en que la partícula se mueve, no según una órbita plana, sino a lo largo de una trayectoria helicoidal, es decir, cuando posee una velocidad longitudinal (respecto del campo) $v_{||} = v \cos\vartheta$ (ϑ es el ángulo formado por H y v). La frecuencia del movimiento de rotación viene

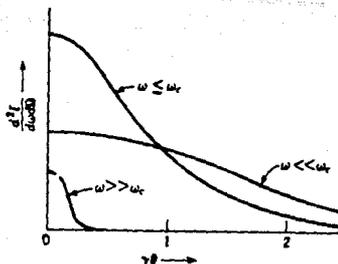


fig 3.7

dada por la misma fórmula (3.43), pero el vector \mathbf{v} describe, no una circunferencia, sino una superficie cónica cuyo eje coincide con \mathbf{H} y de ángulo 2θ en el vértice. La intensidad total de radiación (emitida como pérdida total de energía por la partícula en 1s) diferirá de (3.46) en la sustitución de H por $H_1 = H \cdot \text{sen}\theta$.

En el caso ultrarelativista la radiación se concentrará en direcciones próximas a las de las generatrices del "cono de velocidades". La distribución espectral y la intensidad total (en el mismo sentido) se obtienen a partir de (3.63) y (3.57) mediante la sustitución $H \rightarrow H_1$. Ahora bien, si se trata de la intensidad observada en las indicadas direcciones por un observador en reposo, en las fórmulas hay que introducir el factor $(1 - (v_n/c)\cos\theta)^{-1} \approx \text{sen}^{-2}\theta$, que tiene en cuenta el acercamiento del emisor al observador, acercamiento que tiene lugar con velocidad $v_n \cos\theta$.

ii) Bremsstrahlung.

Las partículas que atraviesan la materia son dispersadas y pierden energía debido a colisiones. En estas colisiones las partículas experimentan aceleraciones; de aquí que ellas emitan radiación electromagnética. La radiación emitida durante colisiones atómicas es comunmente llamada *bremsstrahlung* (radiación de frenado) debido a que fue observada por primera vez cuando electrones de alta energía eran detenidos en un blanco metálico grueso. Para partículas no relativistas la pérdida de energía por radiación es despreciable comparada con la pérdida de energía colisional, pero para partículas ultrarrelativistas la radiación puede ser un modo dominante de pérdida de energía.

La creación y aniquilación de partículas es otro proceso en el cual se emite radiación. Tales procesos son de origen cuántico. Por tanto, no se puede tratar clásicamente al fenómeno. Pero dado que el proceso ocurre, podemos preguntar acerca del espectro e intensidad de la radiación electromagnética emitida. La repentina creación de un electron rapido en el decaimiento nuclear beta, por ejemplo, puede ser vista para nuestros propósitos como la aceleración violenta de una partícula cargada inicialmente en reposo a alguna velocidad final en un intervalo de tiempo muy corto.

Generalmente, nuestros resultados están limitados a la región de fotones "suaves", esto es, fotones cuyas energías son pequeñas comparadas a la energía total disponible.

a) Radiación emitida durante colisiones.

En la descomposición espectral de la radiación que acompaña a una colisión, la mayor parte de la intensidad corresponde a frecuencias $\omega \approx 1/\tau$, donde τ es el orden de magnitud de la duración de la colisión. Sin embargo, no consideraremos aquí esta región del espectro (para la que no es posible obtener fórmulas generales), sino más bien la cola de la distribución que corresponde a bajas frecuencias, es decir, cuando se satisface la condición

$$\omega \tau \ll 1 \quad (3.73)$$

En este caso no supondremos que las velocidades de las partículas que chocan son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz; las fórmulas que siguen, serán validas para velocidades cualesquiera.

En la integral:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H e^{-i\omega t} dt$$

el campo H de la radiación difiere esencialmente de cero sólo durante un intervalo de tiempo del orden de τ . Por consiguiente, si se cumple la condición (3.73), podemos admitir que $\omega \tau \ll 1$ en la integral, de manera que cabe substituir $e^{-i\omega t}$ por la unidad; entonces,

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H dt$$

Substituyendo $H = \dot{A} \times n \frac{1}{C}$ y efectuando la integración respecto al tiempo, se obtiene:

$$H(\omega) = \frac{1}{C} (A_2 - A_1) \times n \quad (3.74)$$

donde $A_2 - A_1$ es el cambio en el potencial vectorial del campo, creado por las partículas que chocan durante el tiempo de la colisión.

La radiación total (de frecuencia ω) emitida durante dicho tiempo se encuentra substituyendo (3.74) en (3.52):

$$dP(\omega) = \frac{R_0^2}{4\pi^2 C} \left[(A_2 - A_1) \times n \right]^2 d\Omega$$

Ahora bien, conviene expresar la relación anterior en términos de la energía radiada en el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ en forma de ondas con frecuencias que pertenecen al intervalo $d\omega$, denotándola como $d\mathcal{E}_{nw}$:

$$d\mathcal{E}_{nw} = dP(\omega) d\omega$$

es decir,

$$d\mathcal{E}_{nw} = \frac{R_0^2}{4\pi^2 C} \left[(A_2 - A_1) \times n \right]^2 d\Omega d\omega \quad (3.75)$$

Para el potencial vectorial podemos utilizar la expresión de Lienard-Wiechert (3.15), con lo que se obtiene:

$$d\epsilon_{nw} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left\{ \sum e \left(\frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}}{1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}}{1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1} \right) \right\}^2 d\Omega d\omega \quad (3.76)$$

donde \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son las velocidades de la partícula antes y después de la colisión y la suma se refiere a las dos partículas que chocan. Observese que el coeficiente $d\omega$ resulta independiente de la frecuencia. Con otras palabras, a bajas frecuencias (condición 3.73), la distribución espectral es independiente de la energía, es decir, $d\epsilon_{nw}/d\omega$ se comporta como una constante para $\omega \rightarrow 0$.

Integrando respecto al parámetro de impacto b , podemos obtener un resultado análogo para la radiación eficaz en la dispersión de un haz de partículas. Sin embargo, hay que tener presente que este resultado no es válido para la radiación eficaz cuando existe interacción de Coulomb entre las partículas que chocan, ya que entonces la integral respecto a b diverge (logarítmicamente) para b grande. Veremos, más adelante que, en este caso, la radiación eficaz a bajas frecuencias depende logarítmicamente de la frecuencia y no se comporta como una constante.

Si las velocidades de las partículas que chocan son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, (3.76) pasa a ser:

$$d\epsilon_{nw} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left[\sum e (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{n} \right]^2 d\omega d\Omega \quad (3.77)$$

Una aplicación interesante de las fórmulas obtenidas la ofrece la radiación que se produce en la emisión de una nueva partícula cargada (por ejemplo, la emisión de una partícula β por el núcleo). Hay que considerar este proceso como un cambio instantáneo de la velocidad de la partícula, de cero a su valor real. (Dada la simetría de las fórmulas respecto a la permutación de \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , la radiación que se origina en este proceso coincide con la radiación que se produciría en el proceso inverso, a saber, el detenimiento instantáneo de la partícula. El punto esencial de todo esto es que, dado que el "tiempo" del proceso en cuestión es tal que $\tau \rightarrow 0$, la condición (3.73) queda efectivamente satisfecha cualquiera que sea la frecuencia. Sin embargo, la aplicabilidad de estas fórmulas viene limitada por la condición cuántica de que el producto $h\omega$ sea pequeño comparado con la energía total de la partícula.

Determinemos a manera de ilustración, la distribución espectral

de la radiación total producida cuando se emite una partícula cargada que se mueve con velocidad v .

De acuerdo a la fórmula (3.76), en la que hacemos $v_2 = v$, $v_1 = 0$, tenemos:

$$d\epsilon_{nv} = d\omega \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} 2\pi \sin \theta d\theta$$

El cálculo de la integral conduce al resultado:

$$d\epsilon_{nv} = \frac{e^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v} \ln \frac{c+v}{c-v} - 2 \right) d\omega \quad (3.78)$$

Aunque, conforme hemos señalado ya, el caracter "instantaneo" del proceso hace que la condición (3.73) quede satisfecha para todas las frecuencias, no podemos obtener la energía radiada total integrando (3.78) respecto de ω , la integral diverge para frecuencias altas. Conviene hacer notar que, aparte la violación a altas frecuencias de las condiciones que supone el comportamiento clasico, en el presente caso la divergencia procede de la incorrecta formulación del propio problema clásico, en el que la partícula posee una aceleración infinita en el instante inicial.

Para $v \ll c$, esta fórmula se convierte en:

$$d\epsilon_{nv} = \frac{2}{3} \frac{e^2 v^2}{\pi c^3} d\omega$$

fórmula que se puede obtener también directamente a partir de (3.77).

b) Bremsstrahlung Durante Interacciones Coulombianas.

La situación más común en la cual un continuo de radiación es emitido es en la colisión de una partícula cargada veloz con un átomo. Debido a su gran carga y masa, el núcleo es más efectivo en producir deflexiones en la partícula incidente que los electrones. Consecuentemente ignoraremos los efectos de los electrones y consideraremos la radiación emitida en la colisión de una partícula de carga e , masa m_e , y velocidad v en el campo de Coulomb de una carga puntual Ze .

El procedimiento es el siguiente. Obtendremos una expresión para la aceleración de un electrón en un campo electrostático, y entonces usamos la ecuación (3.25), la cual nos da la intensidad de la radiación en un solo encuentro con parámetro de colisión b . Finalmente, integramos sobre los parámetros de colisión entre b_{\min} y b_{\max} . En el caso relativista, debemos transformar al sistema de referencia del laboratorio. Para obtener la razón total de pérdida de energía, se integra el espectro sobre todas las frecuencias.

Ambos casos, el relativista y el no relativista tienen desarrollos semejantes al inicio de su tratamiento, por lo que empezaremos con el caso más general. Recordemos que en el problema, el electrón se acerca a un núcleo estacionario, pero debemos preguntarnos, cual es la fuerza que actúa sobre el electrón desde su marco en reposo. Este observa moverse al núcleo con velocidad $-v$ y parámetro de impacto b . Antes de continuar, debemos ver cómo es la transformación relativista de este campo Coulombiano.

Orientemos nuestro sistema de referencia en la configuración estandar, con el núcleo moviéndose a lo largo del eje x y el electrón localizado en el eje z . Colocamos los sistemas de coordenadas de tal forma que $t = t' = 0$ y $x = x' = 0$ cuando el electrón está a la distancia mínima de aproximación (fig 3.8). Después de un tiempo t , el núcleo está en el punto x en S . En S' , las coordenadas del electrón son $(-vt, 0, b, t')$. En S' el campo E del núcleo es radialmente simétrico con respect a O' , y entonces, en el electrón:

$$E'_x = \frac{-Ze}{r'^2} \cos\theta' = Ze \frac{x'}{r'^3}$$

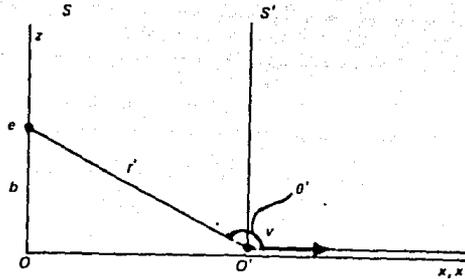


fig. 3.8

$$E'_z = \frac{-Ze}{r'^2} \text{sen}\theta' = -Ze \frac{b}{r'^3}$$

donde $r'^2 = (vt')^2 + b^2$ y θ' es el ángulo entre el eje x positivo y la dirección del electron. Todo lo que debemos hacer a continuación es relacionar el tiempo medido por el observador estacionario sobre el núcleo en S' , con el medido por el observador moviéndose con el electron:

$$t' = \gamma (t - vx/c^2)$$

Pero por nuestra elección de coordenadas, $x = 0$ para el núcleo en S y de aquí que $t' = \gamma t$. Entonces:

$$E'_x = \frac{Ze (\gamma vt)}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}}$$

$$E'_z = \frac{-Zeb}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}}$$

Ahora, usando la transformación inversa de los campos E y B de S' a S ,

$$E_x = E'_x \qquad B_x = B'_x$$

$$E_y = \gamma (E'_y + \frac{v}{c} B'_z) \qquad B_y = \gamma (B'_y - \frac{v}{c} E'_z)$$

$$E_z = \gamma (E'_z - \frac{v}{c} B'_y) \qquad B_z = \gamma (B'_z + \frac{v}{c} E'_y)$$

Dado que $B'_x = B'_y = B'_z = 0$, obtenemos:

$$E_x = \frac{\gamma Ze vt}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \quad B_x = 0$$

$$E_y = 0 \quad B_y = \frac{\gamma v Ze b}{c [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{-\gamma Ze b}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \quad B_z = 0$$

Donde se observa que:

$$B_y = -\frac{v}{c} E_z$$

Del desarrollo anterior se concluye que:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{eE_x}{m_e} = \frac{\gamma Ze^2 vt}{m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \\ \dot{v}_z &= \frac{eE_z}{m_e} = -\frac{\gamma Ze^2 b}{m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \end{aligned} \right\}$$

donde Ze es la carga del núcleo. Ambas son perturbaciones no relativistas. Notese que no se necesita el campo B, dado que el electrón esta inicialmente en reposo en el marco en reposo y no es acelerado a velocidades relativistas durante su encuentro, lo cual es la condición necesaria para que el término B sea importante.

Ahora todo lo que debemos hacer es la transformación de Fourier y esta nos conducira al espectro de emisión en el marco en reposo del electron. Hagamos la integral correspondiente a $\dot{v}_z(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{v}_z &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma Ze^2 b}{m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma Ze^2 b}{m_e b^2} \frac{e^{i\omega t}}{[1 + (\gamma vt/b)^2]^{3/2}} dt \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $x = \gamma vt/b \rightarrow dx = \frac{\gamma v}{b} dt$,

$$\dot{v}_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{Z e^2}{m_e v b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega b x / \gamma v)}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

Consultando una tabla de transformaciones de Fourier, se encuentra que la integral es:

$$\frac{2 \omega b}{\gamma v} K_1 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right)$$

donde K_1 es la función de Bessel modificada de orden uno. Las expresiones asintóticas son:

$$\begin{aligned} y < 1 & \quad K_1(y) = \frac{1}{y} \\ y > 1 & \quad K_1(y) = \left(\frac{\pi}{2y} \right) e^{-y} \end{aligned}$$

Entonces, a bajas frecuencias encontramos:

$$\dot{V}_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{Z e^2}{m c} \frac{2}{bv}$$

Observese que el factor de Lorentz γ ha desaparecido del resultado. Esto no es de sorprender pues si uno realiza los cálculos para obtener el momento de impulso, en los casos relativista y no relativista, se encuentra que son los mismos. Lo anterior es debido a que el producto E_z por el tiempo de la colisión es constante, pues uno se incrementa a razón de γ (el campo E_z), y el otro por $1/\gamma$ (el tiempo). En el límite de alta frecuencia, hay una caída exponencial del tipo $\exp(-\omega b/\gamma v)$. Entonces, el espectro es el mostrado en la figura 3.9. Hay que hacer notar el origen de la caída exponencial. Se puede ver que, la duración de una colisión relativista es del orden de $\tau = 2b/\gamma v$. Entonces, la componente dominante de Fourier en el espectro de radiación debe corresponder a frecuencias $\nu \approx 1/\tau = \gamma v/2b$ y, de aquí que, $\omega \approx \pi \gamma v/b$, es decir, del orden de magnitud $\omega b/\gamma v \approx 1$. Dado que el espectro a bajas frecuencias es plano (independiente de ω), la mayor parte de la energía proviene de frecuencias altas $\omega \approx \gamma v/b$.

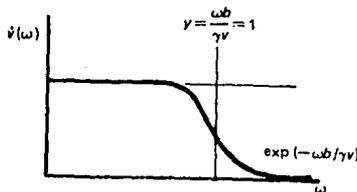


fig. 3.9

Otro punto que vale la pena mencionar, es que uno hubiera podido prever que el espectro a bajas frecuencias era plano, debido que a estas frecuencias, el impulso de momento es una función delta de Dirac, cuya transformación de Fourier es una función de Heaviside, es decir, completamente plana. De esta forma, obtenemos el espectro de energía a bajas frecuencias:

$$I(\omega) = \frac{2 e^2}{3c^3} \frac{4}{b^2 v^2} \frac{Z^2 e^4}{me^2} \frac{1}{2\pi}$$

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{3 \pi c^3 me^2 (bv)^2} = K \quad (3.79)$$

la cual es constante hasta la frecuencia $\omega = \gamma v/b$. Finalmente, tenemos que integrar sobre todos los parámetros de colisión relevantes, los cuales contribuyen son radiación de frecuencia ω . Hasta ahora, hemos realizado un análisis general en el marco en reposo del electrón. Si el electrón está moviéndose relativísticamente, la densidad numérica de núcleos es afectada por un factor γ debido a la contracción relativista de la longitud. De aquí que, $N_1' = \gamma N_1$, donde N_1 es la densidad espacial de núcleos en el marco del laboratorio. El número de encuentros por segundo $N_1' v$ y, ahora todos los parámetros están medidos en el sistema del electrón, esto es:

$$I(\omega') = \int_{b'_{\min}}^{b'_{\max}} 2\pi b' \gamma N_1 K v db'$$

$$I(\omega') = \frac{2 Z^2 e^6 \gamma N_1}{3 c^3 me^2} \frac{1}{v} \ln \left(\frac{b'_{\max}}{b'_{\min}} \right) \quad (3.80)$$

Existen tres casos de interés: primeramente, el bremsstrahlung de un electrón de alta energía, pero no relativista, moviéndose a través de un medio; segundo, el bremsstrahlung de emisión continua debido a un gas ionizado en el cual la distribución de velocidades de los electrones es Maxwelliana a la temperatura T ; y finalmente el bremsstrahlung relativista. En los dos primeros casos, los factores de corrección relativista desaparecen y obtenemos:

$$I(\omega') = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6 N_1}{c^3 m_e^2} \frac{1}{v} \ln \left(\frac{b'_{\max}}{b'_{\min}} \right) \quad (3.81)$$

A continuación debemos hacer la elección correcta de los límites del parámetro de impacto de colisión. Para b_{\max} , sólo podemos integrar hasta esos valores de b tales que $\omega b/v = 1$. Para valores mayores, estaremos en la cola exponencial de la distribución y obtendremos valores despreciables de la radiación observada a ω . Para b_{\min} tenemos dos posibilidades.

(i) De acuerdo a la física clásica, la distancia más cercana de aproximación corresponderá a ese parámetro de colisión, el cual la energía potencial electrostática de interacción entre el núcleo y el electron es igual a la máxima transferencia de energía, es decir, $\frac{m_e}{2} (2v)^2 = 2m_e v^2$. Entonces:

$$\frac{Z e^2}{b_{\min}} \approx 2 m_e v^2$$

$$\Rightarrow b_{\min} \approx \frac{Z e^2}{2 m_e v^2}$$

(ii) El segundo valor posible para b_{\min} proviene del hecho de que se debe emplear mecánica cuántica para describir los encuentros cercanos. La máxima velocidad adquirida por el electron es $\Delta v \approx 2v$ y de aquí $\Delta p \approx 2m_e v$. Entonces, por el principio de incertidumbre de Heisenberg, $\Delta x \Delta p \approx h$, entonces, $\Delta x \approx h/2m_e v$, es decir,

$$b_{\min} \approx \frac{h}{2m_e v}$$

Este valor nos proporciona el valor significativo más pequeño de b para la integración. Para cualquier fin practico, debemos utilizar el valor de b_{\min} más grande, es decir, dependerá de la relación:

$$\frac{(b_{\min})_{\text{cuantica}}}{(b_{\min})_{\text{clasica}}} = \frac{h}{2m_e v} \frac{2m_e v^2}{Z e^2} = \frac{v h}{Z e^2} = \frac{1}{Z \alpha} \left(\frac{v}{c} \right) = \frac{137}{Z} \frac{v}{c}$$

donde $\alpha = e^2/ch = 1/137$ es la constante de estructura fina. Entonces, si la partícula tiene una velocidad $\frac{v}{c} \geq \frac{Z}{137}$ se deberá usar la restricción cuántica.

El valor clásico de b_{\min} es apropiado para el bremsstrahlung de

una region HII a $T \approx 10^4 K$. A altas velocidades se emplea el valor cuántico de b_{min} , el cual es apropiado para la emisión de rayos x por gas intergaláctico caliente. Entonces, las elecciones son:

$$I(\omega) = \frac{2 Z^2 e^6 N_I}{3 c^3 m_e^2 v} \ln(\Lambda)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \frac{2 m_e v^3}{Z e^2 \omega} && \text{para bajas velocidades} \\ \Lambda &= \frac{2 m_e v^2}{h \omega} && \text{para altas velocidades} \end{aligned} \right\} (3.82)$$

Obsérvese que hemos restringido el analisis a la parte plana de bajas frecuencias de el espectro de radiación. Existe, desde luego, un corte exponencial a altas frecuencias correspondiente a b_{min} .

Bremsstrahlung no-relativista. Para encontrar la energía perdida por un electron de alta energía debida a bremsstrahlung, integramos (3.82) sobre todas las frecuencias. En la práctica, esto implica integrar de 0 a ω_{max} , donde ω_{max} corresponde al corte exponencial ($b_{min} \approx h/2m_e v$). Esto es aproximadamente:

$$\omega_{max} \approx \frac{2\pi}{\tau} \approx \frac{2\pi v}{b_{min}} \approx \frac{4\pi m_e v^2}{h}$$

es decir, al orden de magnitud $h\omega_{max} \approx \frac{1}{2} m_e v^2$, la energía cinética del electron, la cual es la cantidad máxima de energía que puede ser perdida en un solo encuentro. Entonces:

$$\begin{aligned} - \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{brems}} &= \int_0^{\omega_{max}} \frac{8 Z^2 e^6 N_I}{12 c^3 m_e^2 v} \frac{1}{v} \ln(\Lambda) d\omega \\ &= \frac{8 Z^2 e^6 N_I}{12 c^3 m_e^2 v} \int_0^{\omega_{max}} \ln(\Lambda) d\omega \\ &= \frac{8 Z^2 e^6 N_I}{12 c^3 m_e^2 v} \frac{m_e v^2}{h} \ln(\Lambda) \\ &= \frac{8 Z^2 e^6 N_I v}{12 c^3 m_e h} \ln(\Lambda) \approx (\text{cte.}) Z^2 N_I v \end{aligned}$$

El punto importante de esta ecuación, es darse cuenta que la razón

de pérdida de energía es proporcional a v , es decir, a la raíz cuadrada de la energía cinética \mathcal{E} ; $-\frac{d\mathcal{E}}{dt} \propto \mathcal{E}^{1/2}$. Este es el contraste a el caso relativista, el cual será desarrollado posteriormente.

Bremsstrahlung Térmico. Para desarrollar el bremsstrahlung de un gas a temperatura T , la ecuación (3.82) debe ser integrada sobre una distribución Maxwelliana de velocidades de los electrones:

$$P(v)dv = A v^2 \exp\left(-\frac{1}{2} m_e v^2 / kT\right) dv$$

En este punto, el algebra se complica notablemente. Si escribimos $\frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{3}{2}kT$ en la ecuación (3.82), obtendremos una respuesta correcta en el orden de magnitud. Entonces, la emitividad de un plasma teniendo densidad electronica N_e , en el límite de bajas frecuencias es

$$I(\omega) = (\text{cte.}) \frac{Z^2 e^6}{m_e^2} \left(\frac{m_e}{kT}\right)^{1/2} g(\omega, T) N_e N_i \quad (3.83)$$

donde $g(\omega, T)$ es el factor de corrección conocido como el *factor de Gaunt*, el cual proviene del término $\ln(\Lambda)$ integrado sobre la velocidad, el cual aparece en la fórmula (3.82). A altas energías existe el usual corte exponencial, $\exp(-h\omega/kT)$, el cual debe ser incluido en la ecuación (3.83). Finalmente, la pérdida total de energía del plasma puede ser encontrada integrando el espectro de emisión sobre todas las frecuencias. En la práctica, debido al corte exponencial, obtenemos la forma funcional correcta si integramos (3.83) desde $\omega = 0$ hasta $\omega = kT/h$ como se describe arriba, es decir,

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega}\right)_{\text{brem}} = (\text{cte.}) \frac{Z^2 e^6}{m_e^{3/2}} (kT)^{1/2} g(T) N_e N_i \quad (3.84)$$

Los resultados de un cálculo detallado dan las siguientes respuestas: la emitividad espectral de un plasma es

$$\kappa(\nu) = 6.8 \times 10^{-38} T^{-1/2} N_e N_i g(\nu, T) e^{-h\nu/kT} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \quad (3.85)$$

A frecuencias $h\nu \ll kT$, el factor de Gaunt tiene sólo una dependencia logarítmica en la frecuencia. Formas adecuadas para longitudes de onda en radio y rayos x son:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{radio} \quad g(\nu, T) &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{128 K^3 T^3}{m_e e^4 \nu^2 Z^2} \right) - \gamma^{1/2} \right] \\
 \text{rayos x} \quad g(\nu, T) &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left(\frac{kT}{h\nu} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

donde $\gamma = 0.577\dots$ es la constante de Euler. Ambos términos logarítmicos pueden ser derivados de las ecuaciones (3.82). Para frecuencias $h\nu \gg kT$, $g(\nu, T)$ es aproximadamente $(h\nu/kT)^{1/2}$. El origen de este factor puede ser entendido de las aproximaciones de las funciones de Bessel usadas al derivar la ecuación (3.79). La aproximación a altas frecuencias difiere de las de menor frecuencia por un factor $y^{1/2}e^{-y}$ y la forma de la emitividad del bremsstrahlung dado por (3.85) sólo toma en cuenta el factor e^{-y} en el límite $y \rightarrow \infty$. Entonces, el término dominante en el factor de Gaunt es $y^{1/2} \approx (h\nu/kT)^{1/2}$.

La razón total de pérdida de energía del plasma es:

$$- \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{brem}} = 1.435 \times 10^{-27} Z^2 T^{1/2} \bar{g} N_e N_i \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.87)$$

con $\bar{g} \approx 1$.

La búsqueda de factores de Gaunt para su uso en fórmulas de bremsstrahlung termal es un proceso largo y complicado.

Bremsstrahlung Relativista. Este análisis es de gran importancia para los electrones de rayos cósmicos. Comenzaremos con la ecuación (3.80) para la radiación por unidad de longitud en el marco de referencia del electrón en movimiento. Nuevamente, debemos elegir límites adecuados para los parámetros de colisión b'_{\max} y b'_{\min} . Se observa que estos parámetros son dimensiones perpendiculares a la trayectoria de la partícula, por lo que son iguales en S y en S'.

Con un argumento similar al caso no relativista, se obtiene que:

$$b_{\min} = h / m_e v$$

Ahora bien, para el cálculo de b_{\max} , el presente caso es ligeramente distinto al no relativista, ahora, el electrón está interactuando con un núcleo que está blindado por una nube de electrones, a menos que el parametro de impacto sea pequeño. Para el caso general se utiliza el modelo de Fermi-Thomas del átomo.

En este modelo, el campo electrostático del núcleo puede ser descrito aproximadamente como:

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r} \exp(-r/a)$$

donde $a = 1.4a_0Z^{-1/3}$, $a_0 = \hbar^2/m_e e^2 = 0.53 \times 10^{-8}$ cm.

Entonces, para átomos neutros, una adecuada elección de b_{\max} es

$$b_{\max} = 1.4a_0Z^{-1/3}$$

De esta forma, tenemos que en el límite ultrarrelativista

$$I(\omega') = \frac{8 Z^2 e^6 \gamma N_1}{12 c^3 m_e^2 v} \ln \left(\frac{1.4 a_0 m_e v}{Z^{1/3} \hbar} \right)$$

Ahora tenemos que transformar al sistema de referencia del laboratorio. Primeramente obsérvese que la cantidad $d\mathcal{E}/dt$ es un invariante relativista, y además se tiene que:

$$\Delta\omega = \gamma \Delta\omega'$$

por lo tanto, la intensidad por unidad de ancho de banda es:

$$I(\omega) = \frac{8 Z^2 e^6 N_1}{12 c^3 m_e^2 v} \ln \left(\frac{192 v}{Z^{1/3} c} \right)$$

El espectro de intensidad es independiente de la frecuencia hasta una energía de $\hbar\omega = (\gamma - 1)m_e c^2$, la cual corresponde al caso

del electrón cediendo toda su energía cinética en la colisión. Entonces, la energía total radiada es:

$$- \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{rad}} = \int_0^{E/h} I(\omega) d\omega$$

Tomando el caso $v \rightarrow c$, se tiene:

$$- \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{rad}} = \frac{8 Z^2 e^6 N_1 \mathcal{E}}{12 m_e^2 c^4 h} \ln \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \right)$$

Es conveniente comparar este resultado con la fórmula correcta obtenida por Bethe y Heitler para el tratamiento completamente cuántico:

$$- \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{rad}} = \frac{Z (Z + 1.3) e^6 N_1 \mathcal{E}}{2 m_e^2 c^4 h} \left[\ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) + \frac{1}{8} \right]$$

El término en $(Z+1.3)$ toma en cuenta las interacciones electrón - electrón entre los electrones incidentes y aquellos que rodean a los átomos del ambiente material.

iii) Radiación Cherenkov.

Una partícula cargada que se mueve en un medio transparente emite, en determinadas condiciones, una radiación singular; los primeros en observarla fueron P.A.Cherenkov y S.I.Vavilov, y la interpretación y cálculos teóricos se deben a I.E.Tamm e I.M.Frank. Hay que subrayar que esta radiación nada tiene que ver con el bremsstrahlung que, de hecho, siempre se produce en el movimiento de un electrón acelerado. Esta última radiación es emitida por el propio electrón al chocar con los átomos. En cambio, en el fenómeno de Cherenkov se trata esencialmente de la radiación emitida por un medio bajo la influencia del campo de una partícula que se mueve en él. La diferencia entre ambos tipos de radiación se manifiesta de manera particularmente clara al pasar al límite de la masa de la partícula tan grande como se quiera: la radiación de frenado (bremsstrahlung) desaparece entonces por completo, mientras que la radiación de Cherenkov no cambia en absoluto.

El vector de onda y la frecuencia de una onda electromagnética que se propaga en un medio transparente están ligados por la relación $k = n\omega/c$, donde $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción real (se supone que el medio es no-magnético e isótropo). Por otra parte, la frecuencia de la componente de Fourier del campo de una partícula que se mueve uniformemente en un medio está ligada con la componente-x del vector de onda (el eje x está dirigido en el sentido de la velocidad de la partícula) por la relación $\omega = k_x \cdot v$. Para que tal componente represente una onda que se propaga libremente, las relaciones $k = n\omega/c$ y $k_x = \omega/v$ no deben contradecirse. Y, en efecto, dado que ha de ser $k > k_x$, es necesario que se cumpla la condición

$$v > c / n(\omega) \quad (3.88)$$

Así, pues, la radiación con frecuencia ω se produce cuando la velocidad de la partícula supera la velocidad de fase de las ondas de dicha frecuencia en el medio en cuestión.

Sea θ el ángulo formado por la dirección del movimiento de la partícula y la de emisión de radiación. Tenemos $k_x = k \cos\theta = (n\omega/c) \cos\theta$ y comparando con la igualdad $k_x = \omega/v$ se encuentra que

$$\cos\theta = c / nv. \quad (3.89)$$

Por consiguiente, a la radiación de una frecuencia dada corresponde un valor bien determinado del ángulo θ , el cual denotaremos como θ_c . En otras palabras, la radiación de cada frecuencia se produce hacia adelante respecto de la dirección del movimiento de la partícula y se distribuye sobre la superficie de un cono de ángulo 2θ determinado por la fórmula (3.89). La distribución angular de la radiación y su distribución en frecuencias, por consiguiente, se encuentran entre sí en una relación bien determinada.

Se puede obtener el resultado anterior de una forma más simple, por medio de la construcción de Huygens para ondas esféricas de campo emitidas por una partícula que se mueve a una velocidad mayor a la de la luz (figura 3.10). Para este caso aparece una onda de choque electromagnética. La radiación es emitida en un ángulo particular con respecto a la dirección del movimiento de la partícula. Sólo en esta dirección particular los frentes de onda son coherentes.

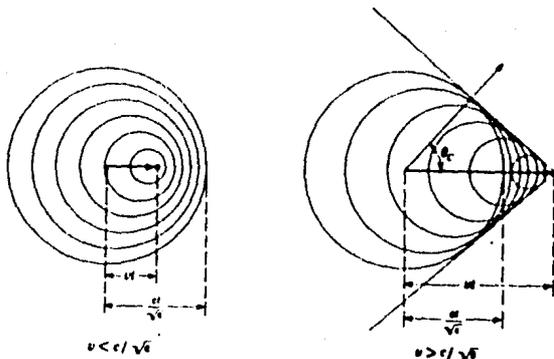


fig. 3.10

La emisión de la radiación Cherenkov es un fenómeno cooperativo que involucra un gran número de átomos de el medio, cuyos electrones son acelerados por los campos de la partícula que lo atraviesa y de esta forma emite radiación. Debido al aspecto

colectivo del proceso, es conveniente utilizar el concepto macroscópico de constante dieléctrica ϵ , y no las detalladas propiedades de los átomos individuales. Con esto en mente, en todas las fórmulas anteriores hay que hacer las transformaciones:

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \quad e \rightarrow \frac{e}{\sqrt{\epsilon}}$$

donde c es la constante dieléctrica del medio.

Una explicación cuantitativa del fenómeno puede ser obtenida considerando los potenciales de Lienard-Wiechert. En el caso de $v < c$ se observó que los potenciales en un punto dado del espacio - tiempo dependen del comportamiento de la partícula en una única posición retardada. Sin embargo, cuando $v > c$, dos posiciones retardadas contribuyen al campo en un punto dado del espacio - tiempo. Siguiendo esta línea de razonamientos se puede obtener, que la intensidad de radiación esta dada por:

$$I(\omega) = \frac{e^2 \omega}{c^2} \text{sen}^2 \theta_c \quad (2c\beta T)$$

iv) Radiación de Transición.

En relación con el problema de la emisión de radiación por una partícula que se mueve en un medio material, mencionaremos aún otro efecto cuya existencia fue indicada como necesaria por V.L. Ginzburg e I.M. Frank: una partícula debe emitir radiación al pasar de un medio a otro. Esta radiación de "paso" o de "transición" difiere, en principio del efecto Cherenkov por el hecho de que ha de producirse para cualquier velocidad de la partícula, y no solamente para aquellas velocidades mayores que la velocidad de fase de la luz en el medio.. Nada tiene que ver con el bremsstrahlung (que también se produce al incidir partículas cargadas sobre la superficie de separación de dos medios). Al igual que la radiación de Cherenkov, la diferencia resulta particularmente clara al pasar al límite de una masa de la partícula arbitrariamente grande: la radiación de frenado desaparece entonces, mientras que se mantiene la de transición.

La causa de esta radiación es la siguiente. Supongamos que tenemos dos medios en el espacio. Lejos de la frontera, en el primer medio, la partícula tiene ciertos campos característicos de

su movimiento y de el medio en el cual se desplaza. Tiempo después, cuando se encuentra en el segundo medio, lejos de la frontera, la partícula tiene campos apropiados a su movimiento y a este nuevo medio. Aún si el movimiento es uniforme, los campos iniciales y finales serán diferentes si los dos medios tienen propiedades electromagnéticas distintas. Es claro que los campos deben reorganizarse conforme la partícula se aproxima y atraviesa la interfase. En este proceso de reorganización, algunas componentes de los campos son desechadas como radiación de transición.

v) *Oscilaciones de Plasma.*

Un plasma es macroscópicamente neutro, entonces tiende a regresar a su estado de equilibrio neutro después de que una perturbación local es introducida en la forma de un exceso de carga positiva o negativa. Si hay un exceso de electrones en una cierta región, el campo eléctrico producido por este exceso repele a los electrones de esta región. En este movimiento, los electrones adquieren una cierta energía cinética que los hará oscilar respecto a los iones y después de un cierto tiempo regresaran a su posición de equilibrio. Si muchos electrones dejan esta región, el campo eléctrico creado por una deficiencia de electrones tenderá a hacerlos regresar. De esta manera ocurren las oscilaciones de electrones en un plasma.

Las expresiones que describen estas oscilaciones se encuentran resolviendo las ecuaciones de Vlasov para dichas perturbaciones. Por lo general se hacen las siguientes simplificaciones: a) la agitación termica y las colisiones son despreciables; b) las oscilaciones son de amplitud pequeña.

Las ondas de plasma longitudinales pueden ser de dos tipos: *oscilaciones electrónicas* (en la cual los electrones oscilan y los iones positivos permanecen practicamente estacionarios) y *oscilaciones iónicas* (en las cuales los iones positivos también oscilan). Estas últimas son ondas de relativamente baja frecuencia, en las que la neutralidad eléctrica es preservada en alto grado. Las implicaciones astrofísicas de tales oscilaciones

ionicas aún no están bien entendidas. De cualquier modo, las ondas en los plasmas proveen de mecanismos para la aceleración de partículas cargadas y de este modo producen efectos de radiación.

vi) *Efecto Compton y Dispersión de Thompson.*

Si una onda electromagnética incide sobre un sistema de cargas, éstas se ponen en movimiento bajo su acción. Este movimiento produce a su vez radiación en todas direcciones; se produce, conforme se suele decir, una *dispersión* de la onda original.

La potencia instantánea radiada por una carga e en movimiento no relativista esta dada por la fórmula de Larmor (3.24):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2\theta$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de observación y la aceleración. La aceleración es dada por la onda electromagnética plana incidente. Si el vector de propagación es \mathbf{k} , y el vector de polarización \mathbf{e} , el campo eléctrico puede ser escrito como

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e} E_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$$

Entonces, de la ecuación de movimiento no relativista, tenemos

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{e} \frac{e}{m} E_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$$

Si suponemos que la carga se mueve una parte despreciable de la longitud de onda durante un ciclo de oscilación, el promedio temporal de \dot{v}^2 es $\frac{1}{2}\text{Re}(\dot{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}}^*)$. Entonces, la potencia promedio por unidad de ángulo sólido puede ser expresada por:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) \sin^2\theta$$

Obsérvese también que la frecuencia de la onda radiada por la carga (es decir, dispersada por ella) es evidentemente la misma que la frecuencia de la onda incidente.

Un índice conveniente para caracterizar la dispersión es la razón de la cantidad de energía emitida por el sistema dispersor en una dirección dada por unidad de tiempo al flujo de energía de la radiación incidente. Esta razón tiene, evidentemente, las dimensiones de un área y se llama *sección eficaz de dispersión*.

Entonces en el presente caso, el flujo de energía incidente es

el vector de Poynting promediado en el tiempo, es decir, $c|E_0|^2/8\pi$. Entonces, la sección diferencial eficaz de dispersión esta dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2\theta$$

Si la onda incide a lo largo del eje z con su vector de polarización formando un ángulo Ψ con el eje x, como se muestra en la figura 3.11, la distribución angular es

$$\sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta \cos^2(\phi - \Psi)$$

Para radiación no polarizada, la sección eficaz está dada por el promedio sobre el ángulo Ψ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta)$$

Esta es llamada la fórmula de Thompson para dispersión de radiación por una carga libre, y es apropiada para la dispersión de rayos X por electrones o rayos gamma por protones. La sección eficaz total, es:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

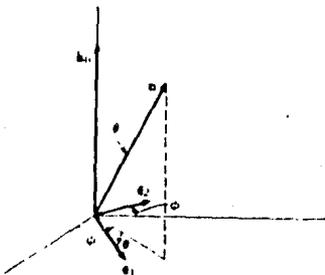


fig. 3.11

La dispersión de una onda por un sistema de cargas difiere de la dispersión por una sola carga (en reposo), en primer lugar, por el hecho de que, debido a la presencia del movimiento interno de las cargas del sistema, la frecuencia de la radiación dispersada

a 2.898×10^{-3} mK cuando λ esta en cm y T en grados Kelvin. Para un cuerpo caliente a unos 6000 K, como la superficie del Sol, el máximo de intensidad se encuentra a una longitud de onda correspondiente a luz amarilla.

Para longitudes de onda largas, tales como las de radio, la expresión para la intensidad de la radiación fue derivada por los Británicos Lord Rayleigh y Sir James Jeans. La ley de Rayleigh-Jeans establece que el flujo de potencia radiada P de un "radiador" perfecto a temperatura absoluta T esta dado por:

$$P = kT / \lambda^2$$

donde k es la constante de Boltzman.

viii) Radiación Espectral de Línea.

Un tipo distinto de mecanismo de emisión de ondas electromagnéticas es la radiación espectral de línea, que como su nombre indica, se encuentra concentrada a una sola longitud de onda. La radiación de línea ocurre, por ejemplo, cuando sal común es vaporizada por una flama. Una luz amarilla intensa es emitida por los átomos de sodio en la sal, y si la luz es examinada por un espectroscopio se encuentra que está concentrada en una longitud de onda particular, y la radiación es conocida como la línea del sodio.

La teoría cuántica aplicada a átomos describe la radiación espectral de línea. En 1901, Planck dedujo que todos los cambios de energía se producen por medio de paquetes o cuantos. Neils Bohr mostro más adelante que los espectros atómicos pueden ser explicados si los átomos existen sólo en determinados estados de energía. La transición entre estados de energía explica por qué la radiación aparece sólo a ciertas frecuencias.

CAPITULO 4. HIDRODINAMICA

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituye lo que se denomina dinámica de fluidos o hidrodinámica. Puesto que los fenómenos considerados en la dinámica de fluidos son macroscópicos, un fluido se considera como un medio continuo. Esto significa que siempre se supone que cualquier elemento de volumen pequeño del fluido es suficientemente grande como para contener un número muy elevado de partículas.

La descripción matemática del estado de un fluido móvil se efectúa por medio de funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z,t)$ y de dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión termodinámica $p(x,y,z,t)$ y la densidad de masa $\rho(x,y,z,t)$. Como es bien conocido, todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de dos cualesquiera de ellas y la ecuación de estado, de aquí que si se tienen cinco magnitudes determinadas, a saber las tres componentes de la velocidad \mathbf{v} , la presión p y la densidad ρ , queda totalmente determinado el estado del fluido en movimiento. Cabe recalcar que la velocidad no tiene nada que ver con la ecuación de estado.

Al estudiar el movimiento de un fluido, podemos suponer en algunos casos que todas las perturbaciones son reversibles. En realidad, un proceso es termodinámicamente reversible solamente si se realiza con velocidad infinitamente pequeña, de modo que el estado de equilibrio termodinámico llega a establecerse en cada instante en el fluido. Sin embargo, un movimiento real se produce a velocidades finitas, el fluido no se encuentra en equilibrio en cada instante y, en consecuencia, tendrán lugar en él procesos internos que tiendan a llevarlo al estado de equilibrio. La existencia de estos procesos hace que el movimiento resultante sea irreversible lo que, en particular, se manifiesta en que la energía mecánica se disipa y transforma finalmente en calor. El proceso de disipación de energía ocurre por la acción de dos mecanismos diferentes. El primero consiste en la conducción irreversible de calor entre puntos de diferente temperatura. El

segundo, en que si ocurre algún movimiento interno en el cuerpo, habrá procesos irreversibles debidos a las velocidades finitas de esos movimientos, en los cuales partículas con un cierto momento lineal atraviesan un plano y se mezclan con partículas de menor momento lineal; estos procesos de disipación de la energía pueden llamarse, procesos de fricción interna o viscosidad. En un estudio más completo de la dinámica de fluidos, habrá que agregar una viscosidad y una conductividad térmica.

Podemos clasificar a los fluidos en:

a) *Ideales*: no hay disipación de la energía por viscosidad u otro mecanismo de fricción interna; no hay transporte de calor de una parte del fluido a otra.

b) *Reales*: hay viscosidad y conducción térmica.

Los fluidos pueden ser además *compresibles* o *incompresibles* según que la densidad sea constante o no. La condición para que un fluido pueda ser considerado incompresible es:

$$\Delta\rho/\rho \ll 1$$

en cada punto y para cada t .

La ausencia de intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido (y también, como es natural, entre el fluido y los cuerpos que lo rodean) significa que el movimiento a través del fluido es adiabático. Así pues, el movimiento de un fluido ideal debe suponerse necesariamente que es adiabático.

En general, todas estas magnitudes son funciones de las coordenadas x , y , z y del tiempo t . También resaltamos que $\mathbf{v}(x,y,z,t)$ es el campo de velocidades del fluido que especifica el valor de $\bar{\mathbf{v}}$ para cada punto (x,y,z) del espacio y en cada instante t , es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no a partículas específicas del fluido. En general, estas últimas se estarán moviendo en el espacio en el curso del tiempo. Lo mismo hay que señalar respecto a ρ y p .

a) *Ecuaciones Fundamentales del Movimiento de un Fluido Ideal.*

Deduciremos o enunciaremos a continuación las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica. Empezaremos con la ecuación que expresa la conservación de la materia.

i) Ecuación de continuidad.

Considérese una superficie S que limita a una región simplemente conexa R que se encuentra completamente dentro del fluido. Sea ρ la densidad del fluido, de tal manera que la masa total del fluido dentro de S está dada por

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z, t) dt$$

donde dt es la diferencial de volumen. Diferenciando con respecto al tiempo y recordando que x, y, z son las variables de integración, obtenemos

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

Ahora bien, existen sólo tres formas en que se puede cambiar la masa del fluido en el interior de S : (1) puede estar entrando o saliendo fluido de la superficie, la contribución por unidad de tiempo debida a este efecto es:

$$\iint_S \mathbf{v} \rho \cdot d\mathbf{\sigma} ;$$

donde $d\mathbf{\sigma}$ es la diferencial de superficie; (2) Puede estarse creando materia (fuente), o (3) puede estarse destruyendo materia (sumidero). Sea $\psi(x, y, z)$ la cantidad de materia creada o destruida por unidad de volumen y por unidad de tiempo. Para una fuente, $\psi > 0$, y para un sumidero, $\psi < 0$. La ganancia total de fluido por unidad de tiempo es, por lo tanto:

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_R \psi(x, y, z, t) dt - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\sigma}$$

por lo que:

$$\iiint_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dt = \iiint_R \psi(x, y, z, t) dt - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\sigma}$$

aplicando el teorema de la divergencia al ultimo término, se obtiene:

$$\iiint_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dt = \iiint_R \psi dt - \iiint_R \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dt$$

y como esta ecuación es válida para cualquier región R se concluye que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \psi$$

Esta es la ecuación de continuidad. En ausencia de fuentes y sumideros esta ecuación se convierte en:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.1)$$

Si, además, el fluido es incompresible, $\rho = \text{cte.}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, y la ecuación de continuidad resulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.2)$$

Si el movimiento es irrotacional, esto es, si $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$, entonces $\mathbf{v} = \nabla \phi$, de tal manera que la ecuación de continuidad para un fluido incompresible que no posee fuentes ni sumideros y que tiene un movimiento irrotacional, está dado por:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.3)$$

ii) Ecuación de Euler:

Consideremos el movimiento de un fluido ideal dentro de una región simplemente conexa de volumen V y superficie S . La fuerza total que actúa sobre el mismo como resultado de la presión termodinámica es igual a la integral:

$$- \oint_S p \, d\sigma$$

extendida a la superficie que limita el volumen (con signo negativo puesto que $d\sigma$ apunta hacia afuera de la región). Transformándola en una integral de volumen, obtenemos:

$$- \oint_S p \, d\sigma = - \iiint_V \nabla p \, dV$$

Como puede verse, el fluido que rodea a cualquier elemento de volumen dV ejerce sobre el mismo una fuerza $-\nabla p dV$. En otras palabras, podemos decir que sobre cada unidad de volumen actúa una fuerza $-\nabla p$.

A continuación podemos escribir la ecuación del movimiento de un elemento de volumen igualando la aceleración dv/dt a la fuerza $-\nabla p$ dividida entre la masa por unidad de volumen (ρ):

$$\frac{dv}{dt} = -(1/\rho)\nabla p \quad (4.4)$$

La derivada dv/dt que aparece aquí designa, no la variación respecto al tiempo de la velocidad del fluido en un punto fijo del espacio, sino la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio. Esta derivada ha de expresarse en función de magnitudes que se refieren a puntos fijos en el espacio. Para ello observamos que la ~~variación dv de la velocidad de la partícula fluida durante el~~ tiempo dt se descompone en dos partes, a saber, la variación durante dt de la velocidad en un punto fijo del espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) en dos puntos separados dr , siendo dr la distancia recorrida por la partícula de fluido durante el tiempo dt . La primera parte es $(\partial v/\partial t)dt$, en donde se considera que la derivada $(\partial v/\partial t)$ corresponde a valores x, y, z constantes, es decir, a un punto determinado del espacio. La segunda parte es:

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = (dr \cdot \nabla) v$$

Así pues,

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dt + (dr \cdot \nabla) v$$

por lo que:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \quad (4.5)$$

esta derivada se denomina "derivada convectiva", sustituyendo en la expresión dinámica (5) se tiene que:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.6)$$

Esta es la ecuación requerida del movimiento del fluido ideal, fue obtenida por primera vez por Euler en 1775 y se denomina en su honor ecuación de Euler.

Las fuerzas externas no tienen que ser únicamente de presión.

En general, si existe cualquier otra fuerza f por unidad de masa, la ecuación de Euler toma la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (4.7)$$

En el caso de un campo gravitatorio, se tiene $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, donde \mathbf{g} es la aceleración gravitacional.

Recordando que en este caso estamos tratando con un movimiento adiabático, la entropía de un elemento cualquiera del fluido permanece constante cuando éste se mueve en el espacio. Designando por s a la entropía por unidad de masa, podemos expresar la condición de movimiento adiabático, como:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (4.8)$$

o bien:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0 \quad (4.9)$$

Esta ecuación es la que describe de modo general el movimiento adiabático de un fluido ideal. Recordando la relación vectorial:

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi$$

podemos escribirla como una ecuación de continuidad correspondiente a la entropía:

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (4.10)$$

Podemos utilizar el hecho de que el movimiento es isoentrópico para obtener la ecuación del movimiento en una forma ligeramente distinta. Empleando la relación termodinámica de la entalpía (ω):

$$d\omega = T ds + V dp \quad (4.11)$$

donde V es el volumen específico, es decir, el inverso de la densidad de masa, y T la temperatura absoluta. Puesto que s es constante se tiene:

$$d\omega = V dp = dp/\rho \quad (4.12)$$

y, por tanto, $(\nabla p)/\rho = \nabla \omega$. Por consiguiente, la ecuación de Euler puede escribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \nabla \omega \quad (4.13)$$

Resulta interesante mencionar otra forma de expresar la ecuación de Euler sólo en términos de la velocidad. Utilizando una fórmula del análisis vectorial:

$$\nabla v^2 = 2 \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + 2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

la ecuación (4.13) queda como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \omega$$

tomando el rotacional a ambos lados de la ecuación y recordando que el rotacional de un gradiente es cero, se obtiene la relación:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}))$$

en la que sólo interviene la velocidad.

Las ecuaciones de movimiento han de complementarse con las condiciones de frontera que deben satisfacerse en las superficies que limitan al fluido. En el caso de un fluido ideal, la condición de frontera expresa simplemente que el fluido no puede penetrar en una superficie sólida. Esto significa que la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie de contorno debe anularse si dicha superficie esta en reposo. En el caso general de una superficie móvil, la componente normal de la velocidad, debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie. En una superficie límite entre dos fluidos inmiscibles, la condición es que la presión y la componente de velocidad normal a la superficie de separación debe ser la misma para ambos fluidos y cada una de estas componentes de velocidad debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie

Como se mencionó al principio del capítulo, el estado de un fluido móvil queda determinado por cinco magnitudes: las tres componentes de la velocidad \mathbf{v} y, por ejemplo, la presión p y la densidad ρ . De acuerdo con esto, un sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos deberá tener un número de cinco ecuaciones. En el caso de un fluido ideal éstas son las ecuaciones de Euler, la ecuación de continuidad y la ecuación adiabática.

iii) Ecuaciones de movimiento para un fluido incompresible bajo la acción de un campo conservativo.

Si el campo externo es conservativo, la fuerza se puede expresar en términos del gradiente de un potencial de la forma $f = -\nabla\chi$, donde χ es el potencial. De esta manera:

$$f - \frac{1}{\rho} \nabla p = -\nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho}\right)$$

si ρ es constante. En este caso la ecuación de Euler queda como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v}_x(\nabla_x \mathbf{v}) = f - \frac{1}{\rho} \nabla p = -\nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho}\right)$$

o bien:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}_x(\nabla_x \mathbf{v}) = -\nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2\right) \quad (4.15)$$

Consideremos dos casos especiales:

a) Movimiento irrotacional.

En este caso $\nabla_x \mathbf{v} = 0$, de tal manera que la ecuación (4.15) se convierte en:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2\right) \quad (4.16)$$

b) Flujo estacionario.

En este caso $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$, de tal manera que la ecuación (15) resulta:

$$\mathbf{v}_x(\nabla_x \mathbf{v}) = \nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2\right) \quad (4.17)$$

se puede ver que esto implica:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2\right) = 0. \quad (4.18)$$

De aquí que $\nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2\right)$ es normal a todo punto del campo de velocidad \mathbf{v} . Así, \mathbf{v} en cada punto es paralela a la superficie $\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \text{constante}$. La curva trazada en el fluido, tal que sus tangentes sean paralelas a los vectores de velocidad en puntos correspondientes, se llama línea de flujo.

Hemos probado que para un fluido incompresible ideal, que se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, y cuyo campo de velocidad es estacionario, la expresión $\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2$ permanece constante a lo largo de una línea de flujo. Esta es la forma

general del teorema de Bernoulli.

iv) Flujo de energía.

Escojamos un elemento de volumen cualquiera fijo en el espacio y veamos cómo varía con el tiempo la energía del fluido contenido dentro de este elemento de volumen. La energía de la unidad de volumen del fluido es:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \epsilon \quad (4.19)$$

en donde el primer término representa la densidad de energía cinética y el segundo la de energía interna, siendo ϵ la energía interna por unidad de masa. La variación respecto al tiempo de esta energía está dada por la derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \epsilon \right) \quad (4.20)$$

Para calcular esta magnitud escribamos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2}\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (2\mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} / \partial t)$$

o bien, utilizando la ecuación de continuidad (4.1) y la ecuación de movimiento (4.5),

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^2) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot (-\nabla p / \rho - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

En el último término sustituiremos $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ por $\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla v^2$ y ∇p por $\rho \nabla \omega - \rho T \nabla s$ (utilizando la relación termodinámica vista anteriormente), con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s$$

Con objeto de obtener la derivada $\partial(\rho \epsilon) / \partial t$, utilizaremos la relación termodinámica:

$$d\epsilon = T ds - p dV = T ds + (p/\rho^2) d\rho$$

puesto que $V=1/\rho$; entonces tenemos que

$$d(\rho \epsilon) = \epsilon d\rho + \rho d\epsilon = \epsilon d\rho + \rho T ds + (p/\rho) d\rho = (\epsilon + p/\rho) d\rho + \rho T ds$$

ahora bien, dado que la entalpía ω por unidad de masa la podemos

expresar como:

$$\omega = \epsilon + pV = \epsilon + p/\rho$$

se llega a:

$$d(\rho\epsilon) = \omega dp + \rho T ds$$

y entonces:

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = \omega \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}$$

utilizando la ecuación de continuidad se llega a:

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = \omega(-\nabla \cdot (\rho\mathbf{v})) + \rho T(-\mathbf{v} \cdot \nabla) s$$

donde también hemos utilizado aquí la ecuación adiabática general.

Combinando los resultados anteriores, encontramos que la variación de energía es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\epsilon \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) + \rho T (\mathbf{v} \cdot \nabla) s + \omega(-\nabla \cdot (\rho\mathbf{v})) + \rho T(-\mathbf{v} \cdot \nabla) s$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\epsilon \right) = -\left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\epsilon \right) = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right)) \quad (4.21)$$

Con objeto de ver el significado de esta ecuación, integrémosla en un determinado volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\epsilon \right) dV = - \int_V \nabla \cdot \left(\rho\mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \right) dV$$

Utilizando el teorema de la divergencia se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\epsilon \right) dV = - \int_S \rho\mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (4.22)$$

El primer miembro es la variación por unidad de tiempo de la energía del fluido en un volumen determinado. El segundo miembro es, por consiguiente, la cantidad de energía que fluye hacia el exterior de este volumen en la unidad de tiempo.

De aquí que la expresión

$$\rho\mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \quad (4.23)$$

pueda denominarse como el vector de densidad de flujo de energía.

Su módulo es la cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través del área unitaria perpendicular a la dirección de la velocidad. La expresión (4.23) muestra que cualquier masa unitaria de fluido lleva consigo durante su movimiento una cantidad de energía $\omega + \frac{1}{2}v^2$. El hecho de que la entalpía ω aparezca aquí en lugar de la energía ϵ , tiene un significado físico sencillo. Haciendo $\omega = \epsilon + p/\rho$, podemos escribir el flujo de energía a través de una superficie cerrada de la forma:

$$-\oint_S \rho v \left(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon \right) \cdot da - \oint_S \rho v (p/\rho) \cdot da .$$

El primer término es la energía (cinética más interna) transportada por la masa de fluido a través de la superficie en la unidad de tiempo. El segundo término es el trabajo realizado por la fuerza de presión sobre el fluido dentro de la superficie.

v) Flujo de momento.

Consideremos ahora una serie semejante de razonamientos para el momento o cantidad de movimiento del fluido. El momento por unidad de volumen es ρv . determinemos su variación respecto al tiempo, $\frac{\partial v}{\partial t}$. para ello utilizaremos la notación tensorial. Tenemos

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Utilizando la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0$$

y la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_k \frac{\partial}{\partial x_k}) v_i = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= \rho \left(- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + v_i \left(- \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \right) \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} \end{aligned}$$

el primer término se puede escribir como:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronecker, y se obtiene,

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad (4.24)$$

estando definido el tensor Π_{ik} como:

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k \quad (4.25)$$

el cual es claramente simétrico.

Para ver el significado del tensor Π_{ik} , integremos la ecuación (4.24) respecto a un volumen determinado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$$

aplicando el teorema de la divergencia, el segundo miembro se transforma en:

$$- \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = - \oint \Pi_{ik} d\sigma_k$$

entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \oint \Pi_{ik} d\sigma_k \quad (4.26)$$

El primer miembro es la variación respecto al tiempo de la componente i del momento contenido en el volumen considerado. La integral de superficie es, por consiguiente, la cantidad de momento que fluye hacia afuera a través de la superficie límite por unidad de tiempo.

En consecuencia, $\Pi_{ik} d\sigma_k$ es la componente i del momento que fluye a través del elemento superficial $d\sigma$. Si escribiéramos $d\sigma_k$ en la forma $n_k d\sigma$, siendo $d\sigma$ el área del elemento superficial y n un vector unitario a lo largo de la normal dirigido hacia afuera, veremos que $\Pi_{ik} n_k$ es el flujo de la componente i del momento a través del área superficial unitaria. Podemos observar, además, que, de acuerdo con (4.25),

$$\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k \quad (4.27)$$

esta expresión la podemos escribir en forma vectorial como:

$$p n + \rho v (v \cdot n) \quad (4.28)$$

Así pues, Π_{ik} es la componente i de la cantidad de momento que fluye por unidad de tiempo a través del área unitaria perpendicular al eje x_k . El tensor Π_{ik} se denomina tensor de densidad de flujo de momento.

El vector (4.28) da el flujo de impulso en la dirección de \mathbf{n} , es decir, a través de una superficie perpendicular a \mathbf{n} . En particular, tomando el vector unidad \mathbf{n} dirigido paralelamente a la dirección de la velocidad del flujo en cada punto

$$\mathbf{v} = n v$$

entonces de (4.28):

$$P \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \right) + \rho v \mathbf{v} = \left(\frac{P}{v} + \rho v \right) \mathbf{v} = \left(p + \rho v^2 \right) \frac{\mathbf{v}}{v}$$

se observa que sólo la componente longitudinal del momento se ve transportada en dicha dirección y su densidad de flujo es $p + \rho v^2$.

En una dirección perpendicular a la velocidad, sólo se transporta la componente transversal (relativa a \mathbf{v}) del momento, siendo su densidad de flujo exactamente p .

Cuando existen otras fuerzas, el efecto de éstas debe incluirse también en Π_{ik} ; en el caso de una densidad volumétrica de fuerzas externas \mathbf{F} , debida a un potencial φ , es decir $\mathbf{F} = -\frac{1}{\rho} \nabla \varphi$, el tensor Π_{ik} queda como:

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + v_i v_k + \varphi \delta_{ik} .$$

b) Ecuaciones Fundamentales del Movimiento de un Fluido Viscoso.

Estudiaremos ahora el efecto producido por la disipación de energía, que se produce durante el movimiento de un fluido, sobre el propio movimiento. Este proceso es el resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Siempre se presenta dicha irreversibilidad en alguna medida y se debe a la fricción interna (viscosidad) y a la conducción térmica.

i) Ecuaciones Fundamentales.

Con objeto de obtener las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso, hemos de incluir algunos términos adicionales en la ecuación del movimiento de un fluido ideal. La ecuación de continuidad, como hemos visto en su deducción, es válida igualmente para cualquier fluido, sea viscoso o no. Por otra parte, la ecuación de Euler requiere ciertas modificaciones.

Hemos visto que la ecuación de Euler puede escribirse como:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} ,$$

en donde Π_{ik} es el tensor de flujo de momento. El flujo del momento dado por la fórmula (4.25) representa una transferencia de momento completamente reversible, debida simplemente al momento mecánico de las distintas partículas de fluido que viajan de un lugar a otro y a las fuerzas de presión que actúan sobre dicho fluido. La viscosidad (rozamiento interno) se debe a una transferencia de impulso, irreversible, de unos puntos donde la velocidad es grande a otros puntos donde la velocidad es pequeña.

La ecuación del movimiento de un fluido viscoso puede, por consiguiente, obtenerse sumando al flujo de momento "ideal" un término $-\sigma'_{ik}$ que da la transferencia de momento viscoso irreversible en el fluido. Así pues, escribiremos el tensor densidad de flujo de momento en el caso de un fluido viscoso en la forma:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k \quad (4.29)$$

El tensor:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (4.30)$$

se denomina tensor de tensiones y σ'_{ik} es el tensor de tensiones de la viscosidad. El tensor σ_{ik} expresa la parte del flujo de

momento que no se debe a la transferencia directa de momento con el movimiento de conjunto del fluido.

Puede establecerse la forma general del tensor σ'_{ik} del modo siguiente. En un fluido se presentan procesos de rozamiento interno únicamente en el caso en que las distintas partículas del fluido se muevan con velocidades diferentes, de modo que exista un movimiento relativo entre las distintas partes del fluido. De aquí que σ'_{ik} dependa de las derivadas parciales de la velocidad. Si los gradientes de velocidad son pequeños, podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación, σ'_{ik} puede suponerse como una función lineal de las derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$. No pueden existir términos en σ'_{ik} independientes de $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, puesto que σ'_{ik} debe anularse para $v = \text{constante}$. A continuación observaremos que σ'_{ik} debe también anularse cuando el fluido completo está en rotación uniforme, puesto que es evidente que en dicho movimiento no se produce ningún rozamiento interno en el fluido (rota como un cuerpo rígido). En el caso de rotación uniforme con velocidad angular $\underline{\Omega}$, la velocidad v es igual al producto vectorial $\underline{\Omega} \times r$. Las sumas $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ son combinaciones lineales de las derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, y se anulan cuando $v = \underline{\Omega} \times r$. De aquí que σ'_{ik} deberá contener exactamente estas combinaciones simétricas de las derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$.

El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es:

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik} .$$

siendo a y b independientes de la velocidad. Sin embargo, es conveniente escribir esta expresión en una forma ligeramente distinta, en la que a y b se sustituyen por otras constantes:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (4.31)$$

Las constantes η y ζ se denominan *coeficientes de viscosidad*, y se puede demostrar, que ambos son positivos:

$$\eta > 0, \quad \zeta > 0 .$$

Las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso pueden ahora obtenerse sumando simplemente las expresiones $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$ en el segundo

miembro de las ecuaciones de Euler:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Así pues, tenemos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \quad (4.32)$$

Esta forma de las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso es la más general de todas. Las magnitudes η y ζ son funciones de la presión y la temperatura. En general, p y T , y, por consiguiente, η y ζ no pueden extraerse fuera del operador gradiente.

Sin embargo, en la mayor parte de los casos, los coeficientes de viscosidad no varían notablemente en el fluido y pueden, por tanto, considerarse como constantes. En estos casos tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \zeta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

Pero:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} = \nabla^2 v_i \quad \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

De aquí que podamos escribir la ecuación de movimiento de un fluido viscoso en forma vectorial:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (4.33)$$

Si el fluido puede considerarse como incompresible, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ de la ecuación de continuidad y el último término en el segundo miembro de (4.33) es cero. Así pues, la ecuación del movimiento de un fluido incompresible es:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}} \quad (4.34)$$

Esta ecuación se denomina de Navier-Stokes.

Se observa que difiere de la ecuación de Euler por el término $\frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}$. En el caso de que existan fuerzas externas, simplemente se

agrega el término F/ρ al segundo miembro, donde F es la densidad volumétrica de fuerzas externas.

El tensor de tensiones en un fluido incompresible toma la forma sencilla:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (4.35)$$

Vemos que la viscosidad de un fluido incompresible queda determinada sólo por un coeficiente. Puesto que la mayor parte de los líquidos pueden considerarse como prácticamente incompresibles, este coeficiente de viscosidad η es el que tiene, en general, importancia. El cociente

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (4.36)$$

se denomina viscosidad cinemática, mientras que el propio η se denomina viscosidad dinámica.

Conviene mencionar que la viscosidad dinámica de un gas a una temperatura determinada es independiente de la presión. Sin embargo, la viscosidad cinemática es inversamente proporcional a la presión.

La presión puede eliminarse en la ecuación de Navier-Stokes del mismo modo que se hizo en la ecuación de Euler. Tomando el rotacional a ambos miembros de la ecuación (4.34):

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \right)$$

obtenemos la expresión:

$$\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v})$$

También escribiremos a continuación las condiciones a la frontera que actúan sobre las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso. Existen siempre fuerzas de atracción molecular entre un fluido viscoso y la superficie de un cuerpo sólido. Estas fuerzas dan lugar a que la capa de fluido inmediata adyacente a la superficie quede totalmente en reposo y se "adhiera" a la superficie. De acuerdo con ello, las condiciones límite en las ecuaciones del movimiento de un fluido se anule en las superficies sólidas fijas:

$$\mathbf{v} = 0. \quad (4.37)$$

Puede resaltarse que tanto la componente de velocidad normal

como la tangencial se deben anular, mientras que en el caso de un fluido ideal las condiciones límite exigen únicamente la anulación de v_n . Podemos señalar que, en general, las ecuaciones de Euler no pueden ser satisfechas con la condición límite $v = 0$.

ii) *Disipación de Energía en un fluido viscoso incompresible.*

La presencia de la viscosidad da como resultado la disipación de energía que finalmente se transforma en calor. El cálculo de la disipación de energía es especialmente sencillo en el caso de un fluido incompresible.

La energía cinética total de un fluido incompresible es:

$$E = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

Tomemos la derivada temporal de esta energía escribiendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

y substituyendo $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ por la expresión correspondiente que se obtiene mediante la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

El resultado es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\rho v_i v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \\ &= -\rho \mathbf{v} \cdot \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \\ &= -\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \underline{\sigma}') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

En esta expresión $\mathbf{v} \cdot \underline{\sigma}'$ designa el vector con componentes $v_i \sigma'_{ik}$. Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ en el caso de un fluido incompresible, podemos escribir el primer término del segundo miembro como una divergencia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \underline{\sigma}' \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (4.38)$$

La expresión entre corchetes es exactamente la densidad de flujo de energía en el fluido: el término $\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right)$ es el flujo de

energía debido a la transferencia real de masa de fluido y equivale al flujo de energía correspondiente a un fluido ideal. El segundo término $\mathbf{v} \cdot \underline{\sigma}'$ es el flujo de energía debido a los procesos de rozamiento interno. Pero la presencia de viscosidad da como resultado un flujo de momento σ'_{ik} ; sin embargo, en una transferencia de impulso siempre interviene una transferencia de energía y el flujo de energía es igual al producto escalar del flujo de impulso por la velocidad. Para ver lo anterior con mayor claridad, integremos la ecuación (4.38) respecto a un volumen V , obtendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV &= - \int \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \underline{\sigma}' \right) dV - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV \\ &= - \int_S \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \underline{\sigma}' \right) d\underline{S} - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV \end{aligned}$$

El primer término del segundo miembro nos da la variación respecto al tiempo de la energía cinética del fluido contenido en V debido al flujo de energía a través de la superficie que limita a V . La integral del segundo término es en consecuencia, la disminución por unidad de tiempo de la energía cinética debida a la disipación.

Si se extiende la integración al volumen total del fluido, la integral de superficie se anula (puesto que la velocidad se anula en el infinito, ya que se considera el movimiento del fluido en un sistema de coordenadas donde el fluido se encuentra en reposo en el infinito), y encontramos que la energía desipada por unidad de tiempo en la totalidad del fluido es:

$$\dot{E}_k = \dot{T} = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV$$

En fluidos incompresibles habíamos visto que el tensor σ'_{ik} es:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

entonces:

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

dado que los índices están contraídos:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \eta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \end{aligned}$$

Así pues, tenemos finalmente, para la disipación de energía en un fluido viscoso incompresible:

$$\dot{E}_k = \dot{T} = - \frac{1}{2} \eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV \quad (4.39)$$

La disipación conduce a una disminución de energía mecánica, es decir, debemos tener que $\dot{E}_k < 0$. Sin embargo la integral de (4.39) es siempre positiva. Por tanto, se llega a la conclusión de que el coeficiente de viscosidad η es siempre positivo.

iii) Ecuación general de la transferencia de calor.

Se ha mencionado que un sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos debe contener cinco ecuaciones. En el caso de un fluido en el que se produzcan procesos de conducción térmica y rozamiento interno, una de estas ecuaciones es, como antes, la ecuación de continuidad y ahora se sustituyen las ecuaciones de Euler por las de Navier-Stokes. La quinta ecuación correspondiente a un fluido ideal es la ecuación de conservación de la entropía. Como es natural, en un fluido viscoso esta ecuación deja de ser válida, puesto que se producen en su interior procesos irreversibles de disipación de energía.

En un fluido ideal la ley de conservación de la energía se expresa por la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho \varepsilon \right) = - \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} + \omega \right)$$

La expresión del primer miembro es la variación respecto al tiempo de la energía contenida en la unidad de volumen del fluido, mientras que el segundo miembro es la divergencia de la densidad de flujo de energía. En un fluido viscoso la ley de conservación de la energía, como es natural, sigue siendo válida: la variación

por unidad de tiempo de la energía total del fluido en cualquier volumen debe seguir siendo igual al flujo total de energía a través de la superficie que limita dicho volumen.

Sin embargo, la densidad de flujo de energía ahora tiene una forma diferente. Además del flujo $\rho v(v^2/2 + w)$ debido a la transferencia simple de masa por el movimiento del fluido, existe también un flujo debido a los procesos de rozamiento interno. Este último flujo viene dado por el vector $v \cdot g'$, con componentes $v_i g'_i$. Además, existe otro término que debe incluirse en el flujo de energía. Si la temperatura del fluido no es constante en todo su volumen, el flujo de energía se llevara a cabo, además de los dos medios de transferencia de energía indicados anteriormente, por una transferencia de calor mediante un mecanismo que se denomina conducción térmica. Esto significa la transferencia de la energía térmica-molecular desde aquellos puntos en donde la temperatura es alta a los otros en donde es menor. En ella no interviene un movimiento macroscópico y se produce incluso en el caso de un fluido en reposo.

Designemos por q la densidad de flujo de calor debida a la conducción térmica. El flujo q está relacionado con la variación de temperatura a través del fluido. Esta relación puede escribirse de un modo simple en aquellos casos en que el gradiente de temperatura en el fluido no es grande; en los fenómenos de conducción térmica casi siempre estaremos dentro de estos casos. Podemos entonces desarrollar q como una serie de potencias del gradiente de temperatura, y tomar únicamente el primer término del desarrollo. El término constante es evidentemente cero, puesto que q debe anularse cuando ∇T se anule. Así pues, tenemos:

$$q = - \kappa \nabla T \quad (4.40)$$

La constante κ se denomina conductividad térmica. Es siempre positiva, como puede verse, considerando que el flujo de energía debe ocurrir desde los puntos de temperatura más alta a aquellos donde la temperatura es menor. Es decir, q y ∇T deben tener sentidos opuestos. El coeficiente κ es, en general, una función de la temperatura y de la presión.

Así pues, el flujo de energía total en un fluido cuando existe

viscosidad y conducción térmica es:

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right) - \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}}' - \kappa \nabla T.$$

De acuerdo con esto, la ley general de conservación de energía viene dada por la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho c \right) = - \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) - \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}}' - \kappa \nabla T \right) \quad (4.41)$$

Podría tomar esta ecuación para completar el sistema de ecuaciones fluido-mecánicas de un fluido viscoso. Sin embargo, es conveniente ponerla en otra forma transformándola con ayuda de las ecuaciones de movimiento. Para ello, calculemos la derivada temporal de la energía contenida en el volumen unitario de fluido a partir de las ecuaciones de movimiento. Tenemos así

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho c \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Sustituyendo $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ despejada de la ecuación de continuidad y $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ de la ecuación de Navier-Stokes tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho c \right) = - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{\partial c}{\partial t} - c \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \left(- \nabla p - \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho c \right) = - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{\partial c}{\partial t} - c \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v}_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

Utilizando la relación termodinámica:

$$dc = T ds - p dV = T ds + (p/\rho^2) d\rho$$

se tiene:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} (-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}))$$

Sustituyendo esta expresión e introduciendo la función de entalpía

$$\omega = c + \frac{p}{\rho}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho v) + \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \nabla \cdot (\rho v) \right) \\
 &\quad - \varepsilon \nabla \cdot (\rho v) - v \cdot \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho v \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\
 &= - \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varepsilon \right) \nabla \cdot (\rho v) + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} - v \cdot \nabla p \\
 &\quad + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho v \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\
 &= - \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \nabla \cdot (\rho v) + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} - v \cdot \nabla p \\
 &\quad + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho v \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right)
 \end{aligned}$$

A continuación, y a partir de la ecuación termodinámica:

$$d\omega = Tds + \frac{dp}{\rho}$$

tenemos:

$$\nabla p = \rho \nabla \omega - \rho T \nabla s$$

El penúltimo término del segundo miembro puede escribirse:

$$v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_i \sigma'_{ik} \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \nabla \cdot (v \cdot \underline{\sigma}') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Sustituyendo estas expresiones y sumando y restando $\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$,

obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v^2 + \rho e \right) &= - \nabla \cdot \left((\rho v) \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) - v \cdot \underline{\sigma}' - \kappa \nabla T \right) \\
 &\quad + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \rho T v \cdot \nabla s - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\
 &= - \nabla \cdot \left((\rho v) \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) - v \cdot \underline{\sigma}' - \kappa \nabla T \right) \\
 &\quad - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (v \cdot \nabla) s \right) \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Comparando esta expresión para la derivada temporal de la energía contenida en el volumen unidad con (4.41), obtenemos

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (v \cdot \nabla) s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (4.43)$$

Esta ecuación se denomina ecuación general de transferencia térmica. Si no existe viscosidad ni conducción térmica el segundo miembro es cero y se obtiene la ecuación de la conservación de la entropía correspondiente a un fluido ideal.

Debe señalarse también la interpretación siguiente de la ecuación (4.43). La expresión del primer miembro coincide exactamente con la derivada temporal total $\frac{ds}{dt}$ de la entropía, multiplicada por ρT . La magnitud $\frac{ds}{dt}$ da la variación respecto al tiempo de la entropía de una masa unitaria de fluido cuando se mueve en el espacio y, por tanto, $T \frac{ds}{dt}$ es la cantidad de calor que gana dicha unidad de masa en la unidad de tiempo, de modo que, $\rho T \frac{ds}{dt}$ es la cantidad de calor que gana por unidad de volumen. Vemos, a partir de (4.43), que la cantidad de calor adquirido por unidad de volumen del fluido es, por tanto,

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

El primer término de esta expresión es la energía disipada en calor por la viscosidad, y el segundo es el calor conducido hacia el interior del volumen considerado.

iv) Resumen.

A manera de resumen, escribamos las ecuaciones básicas del movimiento de un fluido real:

1) Ecuación de continuidad = Conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

2) Ecuación de Navier-Stokes = Conservación del momento

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

3) Ecuación de conservación de la Energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho v_k \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) - v_i \sigma'_{ik} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} \right)$$

Se observa que todas las ecuaciones tienen la forma:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\partial B}{\partial x_k}$$

donde A y B pueden ser escalares, vectores, o tensores de segundo orden dependiendo de la ecuación que se estudie. Así, se tiene la siguiente tabla para obtener las ecuaciones básicas de la hidrodinámica:

	A	B
Ec. de Continuidad.	ρ	ρv_k
Ec. de Momento.	ρv_i	$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik}$
Ec. de Energía.	$\frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon$	$\rho v_k \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) - v_i \sigma'_{ik} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k}$

CAPITULO 5.
MAGNETOHIDRODINAMICA

Si un fluido conductor se encuentra en un campo magnético, sus movimientos hidrodinámicos inducen en el mismo campos eléctricos y generan corrientes eléctricas. Pero sobre las corrientes en un campo magnético actúan fuerzas que pueden influir fundamentalmente sobre el movimiento del fluido. Por otra parte, estas corrientes cambian a su vez el propio campo magnético. De esta manera se forma un cuadro complicado de interacción de fenómenos electromagnéticos e hidrodinámicos que ha de considerarse tomando como base conjuntamente el sistema de ecuaciones del campo electromagnético y las ecuaciones de movimiento del fluido.

a) La Aproximación MHD.

En la aproximación magnetohidrodinámica (MHD) de las ecuaciones básicas (hidrodinámicas y electrodinámicas) se obtiene un sistema simplificado de ecuaciones. En esta aproximación se asume la validez de la ley de Ohm y que el fluido tiene una conductividad muy grande y constante.

De hecho, si V , L y T son los valores característicos de la velocidad, longitud y el tiempo, asumiremos que:

$$\frac{1}{\sigma T} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{V}{\sigma L} \ll 1 \quad (5.1)$$

Un significado físico a estas relaciones será expuesto más adelante.

La permeabilidad y permitividad de los medios, de los que cabe tratar en MHD difiere muy poco de la unidad y esta diferencia carece de importancia en relación a los fenómenos estudiados aquí. En consecuencia supondremos $\mu = \epsilon = 1$ (el considerarlos distintos de la unidad, no introduce cambios esenciales), lo cual es una buena aproximación cuando trabajamos con buenos conductores.

De la ley de Ohm (1.6) y las ecuaciones de Maxwell (1.12) obtenemos:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left(\sigma \left(\mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{H} \right) + \rho_e \mathbf{u} \right) \quad (5.2)$$

Analizando los ordenes de magnitud de los términos de esta ecuación, se encuentra que:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \text{corriente de desplazamiento} = o\left(\frac{D}{T}\right)$$

$$\rho_e u = \text{corriente convectiva} = o\left(\frac{D}{L} v\right)$$

$$\therefore \frac{\left|\frac{\partial D}{\partial t}\right|}{|\sigma D|} = o\left(\frac{v}{L\sigma}\right) \ll 1$$

y

$$\frac{|\rho_e u|}{|\sigma D|} = o\left(\frac{v}{L\sigma}\right) \ll 1.$$

Entonces, la ecuación (5.2) se escribe como:

$$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c} \left(\sigma \left(D + \frac{1}{c} u \times H \right) \right)$$

o bien:

$$D = \frac{1}{c} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times H - u \times H \right) \quad (5.3)$$

y la ley de Ohm queda como:

$$j = \sigma \left(D + \frac{1}{c} u \times H \right) \quad (5.4)$$

por lo tanto, de la ecuación (1.6b) se tiene:

$$j = j'$$

Si definimos la viscosidad magnética ν_m como:

$$\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

de la ecuación (5.2) y (1.10):

$$\nabla \times D = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{c} \nu_m \nabla \times (\nabla \times H) - \frac{1}{c} \nabla \times (u \times H)$$

o bien:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \times (u \times H) - \nu_m \nabla \times (\nabla \times H)$$

utilizando la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla (\nabla \cdot H) - \nabla^2 H$$

y recordando que $\nabla \cdot H = 0$, se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \times (u \times H) + \nu_m \nabla^2 H \quad (5.5)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de inducción.

Además, del hecho de que

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll \left| \sigma \mathbf{D} \right|$$

la ecuación de Maxwell (1.12) se convierte en:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.6)$$

donde \mathbf{j} viene dada por la ley de Ohm (ecuación (5.4)).

Otra cosa que vamos a demostrar es que $\rho_e =$ densidad de carga acumulada, se difunde muy rápidamente. Consideremos la ecuación (5.2):

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left(\sigma \left(\mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{H} \right) + \rho_e \mathbf{u} \right)$$

Aplicando la divergencia a la ecuación anterior:

$$-\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left(4\pi \sigma \rho_e + \frac{\sigma}{c} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) + \rho_e \nabla \cdot \mathbf{u} \right)$$

donde se ha utilizado la ley de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e 4\pi$, entonces:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -4\pi \sigma \rho_e - \rho_e \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\sigma}{c} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{H})$$

si el fluido se encuentra en reposo, $\mathbf{u} = 0$, por lo que queda:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + 4\pi \sigma \rho_e = 0$$

cuya integración inmediata da:

$$\rho_e = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{1}{4\pi \sigma}$$

donde τ es el tiempo de relajación. Para el Sol, $\tau \approx 10^{-16}$ s, lo que significa que en 10^{-16} s la carga decrece al valor de ρ_e/e , o sea, la carga desaparece casi instantáneamente. Podemos despreciar entonces los términos donde aparece ρ_e .

Entonces la ecuación de Maxwell (1.11) se escribe como:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (5.7)$$

y la fuerza de Lorentz (1.9) como:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \quad (5.8)$$

De esta forma, las ecuaciones de campo en la aproximación MHD son:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (5.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{H} \quad (5.10)$$

que junto a la ley de Lorentz (8) y la ley de Ohm (4) determinan la electrodinámica del problema.

Al utilizar estas ecuaciones admitimos que se cumplen determinadas condiciones. Concretamente, los períodos de variación del campo deben ser grandes comparados con el tiempo de recorrido libre de los electrones de conducción. Entonces la relación entre la corriente y el campo eléctrico viene determinada por la misma conductividad σ que en el caso de una corriente constante. Además, admitimos que σ es constante en todo el medio. Con esto se presupone, en particular, que la conductividad es independiente del campo magnético. Para que esto ocurra, el camino libre medio de los electrones debe ser pequeño comparado con el radio de curvatura de su trayectoria en el campo magnético. En otras palabras, el tiempo de recorrido libre debe ser pequeño comparado con la frecuencia de los electrones $\frac{eH}{mc}$. Esta condición puede violarse en un medio excesivamente enrarecido que se encuentre en un campo magnético intenso.

b) Obtención de las ecuaciones MHD.

Para poder obtener las ecuaciones básicas que gobiernan la mecánica de fluidos en campos electromagnéticos, necesitamos utilizar las siguientes leyes físicas:

- 1) Conservación de la masa.
- 2) Conservación de el momento.
- 3) Conservación de la energía.
- 4) Ley de Lorentz para la fuerza electromagnética.
- 5) Ecuaciones de Maxwell y constitutivas para el campo electromagnético y el medio.

Dado que estamos interesados en el fenómeno físico que consiste en un fluido en presencia de un campo electromagnético, debemos considerar dos efectos: la influencia del movimiento del fluido en el campo electromagnético y la influencia del campo eléctrico y magnético sobre el movimiento del fluido. Estas interacciones están gobernadas por las ecuaciones básicas y leyes físicas anteriormente descritas.

Para relacionar las ecuaciones del fluido (ecuaciones

mecánicas) y las de los campos, y obtener las ecuaciones del fenómeno completo, se procede como sigue:

a) La ecuación de continuidad no se ve afectada por el fenómeno electromagnético.

b) En la ecuación de momento (ecuación de Navier-Stokes o de Euler) consideramos en las fuerzas externas a la fuerza de Lorentz.

c) En la ecuación de transmisión de calor agregamos el calor de disipación de Joule.

En todo el procedimiento se utilizará la aproximación MHD.

Las ecuaciones hidrodinámicas contienen, en primer lugar, la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.11)$$

y la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{F}}{\rho} \quad (5.12)$$

donde η y ζ son los dos coeficientes de viscosidad del fluido; y \mathbf{F} es la densidad volumétrica de fuerzas externas, en este caso, las electromagnéticas. Según la fórmula de Lorentz se tiene:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (5.13)$$

recordando que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.14)$$

se tiene que:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \quad (5.15)$$

con esta expresión la ecuación de movimiento del fluido queda como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.16)$$

A esta ecuación hay que añadir todavía la ecuación de estado:

$$p = p(\rho, T) \quad (5.17)$$

que relaciona entre sí a la presión, la densidad y la temperatura del fluido, y la llamada ecuación de transmisión de calor.

En la hidrodinámica ordinaria, ésta es:

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right] = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (5.18)$$

Aquí, s es la entropía de la unidad de masa del fluido, y la expresión en el primer miembro de la igualdad representa la cantidad de calor (referida a 1cm^3) liberada en 1s en un elemento del fluido en movimiento. En cuanto al segundo miembro de la igualdad, éste representa la energía disipada en el mismo volumen en 1s. El primer término en él está relacionado con la viscosidad; σ'_{ik} es el tensor de viscosidad:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (5.19)$$

El segundo término da la disipación relacionada con la conductividad térmica (κ es el coeficiente de conducción de calor). En un fluido conductor hay que añadir el calor liberado por efecto Joule. Referido a la unidad de volumen, éste es igual a:

$$C_j = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{D}' = \left(\mathbf{D} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{j} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$$

Utilizando (5.3) y (5.6) se obtiene:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \left[\nu_m (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right] = \frac{\nu_m}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H})^2 - \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H})$$

y además:

$$\mathbf{j} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$$

Por lo tanto:

$$C_j = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{D}' = \frac{\nu_m}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H})^2 \quad (5.20)$$

Así pues, la ecuación de transmisión del calor en magnetohidrodinámica se escribe:

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right] = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} (\nabla \times \mathbf{H})^2 \quad (5.21)$$

Las ecuaciones (5.9), (5.10), (5.11), (5.16), (5.17), y (5.21) constituyen el sistema completo de ecuaciones de la magnetohidrodinámica.

Las ecuaciones (5.16) y (5.21) pueden también escribirse de una forma que expresa las leyes de conservación del momento y de la energía, respectivamente. En efecto, la ecuación de Navier-Stokes de la hidrodinámica ordinaria se puede llevar a la forma:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad (5.22)$$

(aplicando, al hacerlo, también la ecuación de continuidad), donde Π_{ik} es el tensor de densidad de flujo de momento, igual a:

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik}$$

A la misma forma se reduce la ecuación (5.16), con la única diferencia de que a Π_{ik} se añade un término correspondiente a la fuerza de Lorentz. Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) &= \frac{1}{2} \nabla (H^2) - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(H_k H_k \right) - H_k \frac{\partial H_l}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Por consiguiente, se obtiene para Π_{ik} :

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik} - \frac{1}{4\pi} (H_l H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{lk}) \quad (5.23)$$

Como se hubiera esperado, a Π_{ik} se añade el tensor maxwelliano de esfuerzos en el campo electromagnético.

En cuanto a la ecuación de transmisión de calor, ésta se transforma (utilizando las demás ecuaciones hidrodinámicas) en la ecuación de conservación de la energía.

En la hidrodinámica ordinaria:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

donde \mathbf{q} es la densidad de flujo de energía igual a:

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) - \mathbf{v} \cdot \sigma' - \kappa \nabla T;$$

mientras que ϵ y $\omega = \epsilon + \frac{E}{\rho}$ son, respectivamente, la energía interna y la entalpía correspondientes a 1 gr de fluido. Cuando en el medio conductor existe un campo magnético, a la densidad de energía se le suma la energía magnética $H^2/8\pi$, y a la densidad de flujo de energía, el vector de Poynting $\frac{c}{4\pi} \mathbf{D} \times \mathbf{H}$. Expresando en este último \mathbf{D} en función de \mathbf{H} (ec. 5.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) - \mathbf{v} \cdot \sigma' - \kappa \nabla T + \frac{c}{4\pi} \left(\frac{1}{c} \left[\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right] \times \mathbf{H} \right) \\ \mathbf{q} &= \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) - \mathbf{v} \cdot \sigma' - \kappa \nabla T + \frac{1}{4\pi} H_k (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} H_k (\nabla \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

y la ecuación de conservación de la energía queda como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho c + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (5.25)$$

No presenta dificultad comprobar mediante un cálculo directo la equivalencia de las ecuaciones (5.25) y (5.21).

c) Teorema de Alfvén.

Las ecuaciones se simplifican un poco si el fluido en movimiento se puede considerar incompresible. La ecuación de continuidad (5.11) se reduce entonces a $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ y en la ecuación (5.16) desaparece el último término. Escribamos una vez más el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}$$

Mediante conocidas expresiones vectoriales, podemos escribir:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (H^2) \frac{1}{2} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}$$

entonces las dos últimas ecuaciones se escriben:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \nabla^2 \mathbf{H} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.28)$$

En este caso, estas ecuaciones (5.26), (5.27) y (5.28) pueden ser resueltas independientemente de la ecuación de la energía; ésta no es necesaria para resolver el problema del movimiento de un líquido incompresible, a menos que nos interese especialmente la distribución de la temperatura en el mismo y su influencia en el movimiento.

Volvamos a la ecuación general (5.10):

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{H}$$

y veamos el orden de magnitud de los términos. Estos son:

$$\frac{VH}{L} \quad \text{y} \quad \frac{\nu_m H}{L^2}$$

donde V y L son una velocidad y longitud típicas del problema. El cociente es:

$$R_m = \frac{VH}{L} \frac{L^2}{\nu_m H} = \frac{VL}{\nu_m} = \frac{VL}{c^2} 4\pi\sigma \quad (5.29)$$

el cual lleva el nombre de *Numero de Reynolds Magnetico*. Para saber cuál es su significado físico, se observa lo siguiente:

Si $R_m \ll 1$, la ecuación (5.10) queda:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \mathbf{H} \quad (5.30)$$

la cual es una ecuación diferencial de difusión. Esto significa que dada una configuración inicial de campo magnético, las líneas de campo se difunden en un tiempo de difusión igual a:

$$\tau = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}$$

donde L es la longitud característica de la variación espacial de H. El tiempo τ es del orden de 1s para una esfera de cobre de 1cm de radio, del orden de 10^4 años para la Tierra, y de 10^{10} años para un campo magnético típico en el Sol.

En el caso de $R_m \gg 1$, que es el caso límite de una conductividad suficientemente grande, la ecuación (5.10) toma la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (5.31)$$

Esta ecuación tiene un significado físico muy importante e históricamente se puede tomar como el punto de partida de la MHD.

Desarrollemos el rotacional que aparece en el segundo miembro de la igualdad, teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

Sustituyendo de aquí, de acuerdo con la ecuación de continuidad (5.11),

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \rho}{\rho}$$

Después de una reagrupación de términos, obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}$$

La expresión en el primer término de la igualdad representa la

derivada convectiva que determina la variación de una magnitud en el desplazamiento del fluido junto con la partícula en movimiento; designando esta derivada por $\frac{d}{dt}$ tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \quad (5.32)$$

Por otra parte, consideremos una "línea de fluido" cualquiera, es decir, una línea que se desplaza junto con las partículas del fluido que la constituyen. Sea δl el elemento de longitud de esta línea y determinemos cómo varía en el curso del tiempo. Si \mathbf{v} es la velocidad del fluido en un punto que coincide con un punto del extremo δl , su velocidad en el otro extremo será: $\mathbf{v} + (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{v}$. En consecuencia, en el intervalo de tiempo dt el elemento δl varía en $dt(\delta l \cdot \nabla) \mathbf{v}$, es decir:

$$\frac{d(\delta l)}{dt} = (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

Vemos así que la variación de los vectores δl y $\frac{\mathbf{H}}{\rho}$ con el tiempo viene determinada exactamente por la misma ecuación. De aquí se sigue que si en el instante inicial estos vectores coinciden en dirección y sentido, seguirán coincidiendo también en instantes posteriores y sus magnitudes variarán proporcionalmente una a la otra. En otras palabras, si dos partículas de fluido infinitamente próximas se encuentran sobre la misma línea de fuerza en un instante, se encontrarán siempre sobre ella y la magnitud $\frac{\mathbf{H}}{\rho}$ cambiará proporcionalmente a la distancia entre ellas.

Pasando de puntos infinitamente próximos a puntos que se encuentran a una distancia finita cualquiera uno de otro, llegamos a la conclusión de que cada línea de fuerza se desplaza junto con las partículas de fluido que se encuentran sobre ella. Cabe imaginar que (en el límite $\sigma \rightarrow \infty$) las líneas de fuerza magnética están como pegadas a la materia del fluido, moviéndose junto con él. La magnitud $\frac{\mathbf{H}}{\rho}$ en cambio, varía en cada punto proporcionalmente a la extensión de la correspondiente "línea de fluido". Si el fluido que se mueve se puede considerar como incompresible, se tendrá $\rho = \text{constante}$, y entonces la propia intensidad \mathbf{H} variará proporcionalmente al alargamiento de las líneas de fuerza.

Estos resultados poseen también otro aspecto intuitivo. De ellos se sigue que en el desplazamiento en el tiempo de un circuito líquido cerrado cualquiera, éste no cortará líneas de

fuerza, es decir, el número de tales líneas que lo atraviesan se conservará constante. Esto significa que el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie que se apoya sobre un contorno líquido permanece invariable en el tiempo.

Veamos lo anterior con más detalle; consideremos una superficie de fluido rodeada por una cadena de partículas en presencia de un campo magnético exterior.

El flujo magnético será:

$$\phi = \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$$

consideremos un elemento diferencial de longitud dl del contorno γ que pasa a Γ barriendo una superficie $dl \times v dt$;

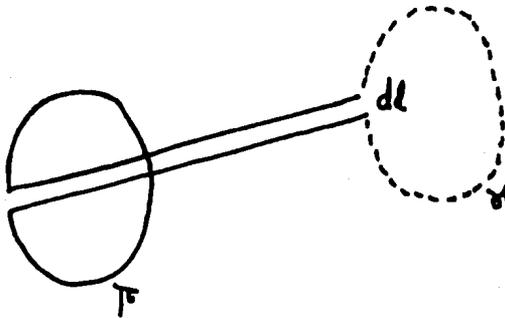


fig. 5.1

el flujo magnético a través de esta superficie será:

$$\mathbf{H} \cdot (dl \times \mathbf{v}) \delta t$$

y si consideramos la variación de flujo por unidad de tiempo provocada por el movimiento de γ e integramos, podemos escribir la derivada total del flujo respecto al tiempo:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{l}$$

que se obtiene intercambiando \cdot por \times e invirtiendo el orden del producto vectorial. Si reemplazamos la integral sobre el contorno por una integral sobre la superficie, queda:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} - \int_S \nabla_x \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

y como:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

resulta que:

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right) \cdot d\mathbf{s}$$

Pero si se cumple la relación (31), se verifica que:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

es decir, el flujo magnético se mantiene constante. Este resultado se conoce como *Teorema de Alfvén* y fue obtenido hace algo más de cuarenta años. La interpretación física de este teorema es la siguiente: El hecho de que el flujo magnético se mantenga constante significa que las líneas de fuerza acompañan a las partículas de fluido en su movimiento, es decir, el campo magnético se comporta como si estuviera "congelado" en el material. Este resultado dió a Alfvén la idea de considerar las líneas de campo como cuerdas elásticas sometidas a una cierta tensión. La idea resultó muy fructífera y permitió obtener intuitivamente una serie de resultados básicos de la MHD. La presencia de un término difusivo en (5.10) hace que el congelamiento no sea total y que exista un deslizamiento entre las líneas de fuerza y las partículas del fluido.

La cuestión de en qué casos se puede de hecho prescindir de los procesos disipativos en un fluido, no tiene respuesta general, puesto que las correspondientes condiciones dependen fundamentalmente del carácter del movimiento y, por ejemplo, son completamente diferentes para movimientos estacionarios y no estacionarios.

Veamos que cambio produce en \mathbf{H} un pequeño desplazamiento ξ del fluido. Consideremos una porción del flujo magnético de base $d\mathbf{s}_0$, altura Δr_0 , que al tiempo t_0 está en la posición \mathbf{r}_0 y contiene un fluido de densidad ρ_0 . Al tiempo t_1 las cantidades cambian a $d\mathbf{s}_1$, Δr_1 , ρ_1 . Supongamos además que Δr_0 es paralelo a \mathbf{H}_0 .

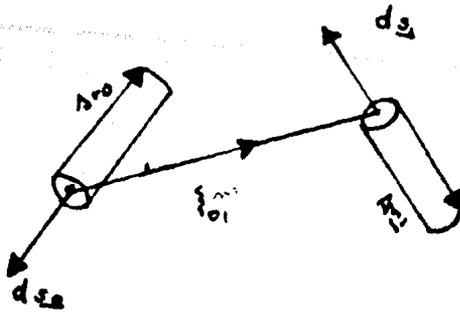


fig. 5.2

Entonces:

$$\Delta r_0 = a_0 H_0$$

y como consecuencia de la congelación del campo:

$$\Delta r_1 = a_1 H_1$$

Las condiciones de conservación del flujo magnético y de la masa se pueden escribir, respectivamente como:

$$H_0 \cdot ds_0 = H_1 \cdot ds_1$$

$$\rho_0 (\Delta r_0 \cdot ds_0) = \rho_1 (\Delta r_1 \cdot ds_1)$$

La segunda ecuación se puede escribir:

$$\rho_0 a_0 H_0 \cdot ds_0 = \rho_1 a_1 H_1 \cdot ds_1$$

entonces:

$$\rho_0 a_0 = \rho_1 a_1$$

por otro lado, la ecuación de movimiento del fluido da:

$$\Delta r_1 = \Delta r_0 + (\Delta r_0 \cdot \nabla) \xi_{01}$$

o sea:

$$a_1 H_1 = a_0 H_0 + (a_0 H_0 \cdot \nabla) \xi_{01}$$

o bien:

$$\frac{H_1}{\rho_1} = \frac{H_0}{\rho_0} + \left(\frac{H_0}{\rho_0} \cdot \nabla \right) \xi_{01}$$

y si el fluido es incompresible:

$$H_1 - H_0 = (H_0 \cdot \nabla) \xi_{01}$$

Esto significa que si la línea de fuerza se estira, aumenta la intensidad de campo.

Conviene investigar los órdenes de magnitud de los términos que entran en las ecuaciones y establecer criterios de aplicabilidad para ellos.

Consideremos primero la ecuación de movimiento en el caso de congelación. Si comparamos las fuerzas inerciales con las fuerzas magnéticas, llegamos a la cantidad:

$$S = \frac{H^2}{L} \div \frac{\rho v^2}{L} = \frac{H^2}{\rho v^2} = \frac{\text{Energía Magnética}}{\text{Energía Cinética}}$$

El caso magnetohidrodinámico aparece cuando $S \approx 1$. Esto es claro, pues si $S \ll 1$, entonces los efectos electromagnéticos son despreciables; por otro lado, si $S \gg 1$ entonces se tendrá que ρ es muy baja y H muy grande, pero ya hemos señalado que la teoría es sólo válida si el tiempo medio entre colisiones es pequeño comparado con la frecuencia de Larmor, es decir, no se puede aplicar si el cociente H^2/ρ es demasiado grande. En general, si $S \ll 1$ o $\gg 1$ no hay una "interacción" importante entre el movimiento del fluido y el campo magnético; en el primer caso, el movimiento del fluido domina y el campo no desempeña ningún papel y en el segundo caso, el que domina es el campo y el movimiento del fluido es controlado por este sin alterar apreciablemente al campo.

Un posible criterio de aplicabilidad de las ecuaciones de la MHD consiste en combinar los números R_m y S de la siguiente manera. Los efectos magnéticos son importantes en la ecuación de movimiento cuando $S \approx 1$; por otro lado, ocurre congelación de campo si $R_m \gg 1$. Entonces:

$$H^2 = \rho v^2 \quad \rightarrow \quad v \approx \left(\frac{1}{\rho} \right)^{1/2} H$$

$$\frac{v\tau}{L} \gg 1$$

y si sustituimos:

$$\frac{H\tau}{LV\rho} \gg 1 \quad \text{o} \quad L = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} \frac{H}{L} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \gg 1$$

Esta cantidad L se llama número de Lundquist y es el que da un verdadero criterio de aplicabilidad de la MHD en fluidos ideales.

Si se desean incluir las fuerzas viscosas se puede combinar:

$$R_m \gg 1 \quad \text{o} \quad \frac{VL}{\nu} \gg 1$$

con:

$$\mu H^2 = \rho v^2$$

de donde se obtiene:

$$L_v = \frac{LH}{v} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \gg 1$$

donde L_v se denomina número definido de Lehnert.

d) Convección.

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico. Para un fluido ideal, la ecuación:

$$\nabla p = \rho g + \frac{(\nabla \times H) \times H}{4\pi}$$

que es la condición para el equilibrio mecánico, puede satisfacerse aunque la temperatura no sea constante en todo el seno del fluido. Sin embargo, la cuestión que entonces se plantea es la estabilidad de dicho equilibrio. Para que el estado de un fluido sea estable es necesario que si se producen pequeñas perturbaciones éstas disminuyan con el tiempo. Por el contrario, si las pequeñas perturbaciones que se producen inevitablemente en el fluido tienden a aumentar con el tiempo, entonces el estado del fluido es absolutamente inestable. No puede existir entonces un estado inestable de este tipo producido por perturbaciones infinitamente pequeñas. Se encuentra que el fluido es estable sólo cuando se cumplen determinadas condiciones. En otro caso, el equilibrio es inestable y esto conduce a la aparición de corrientes en el fluido que tienden a mezclarlo de modo tal que se llegue a igualar la temperatura. Este movimiento se denomina convección. La aparición de corrientes convectivas en un fluido conductor puede ser efectuada por la presencia de un campo magnético. Walén sugirió que esto ocurre especialmente si la distancia que se desplaza un elemento convectivo antes de volver a mezclarse con el medio no es muy grande en la dirección de H .

e) Forma Simétrica de las Ecuaciones Magnetohidrodinámicas.

Para finalizar este capítulo, se presentará una forma de escribir las ecuaciones magnetohidrodinámicas para un fluido incompresible que es simétrica, y que simplifica su escritura.

Para un fluido incompresible, podemos transformar las

ecuaciones que lo gobiernan:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad (4.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \nabla^2 \mathbf{H} \qquad (4.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}}{4\pi\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

en una forma simétrica por medio de la introducción de nuevas variables:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

sumando y restando (4.27) y (4.28), y sustituyendo las nuevas variables se llega a:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \alpha \nabla^2 \mathbf{u} - \beta \nabla^2 \mathbf{w} + \nabla \phi = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \alpha \nabla^2 \mathbf{w} - \beta \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0$$

donde:

$$\alpha = \frac{\nu_m + \nu}{2} \qquad \beta = \frac{\nu_m - \nu}{2}$$

y $\rho\phi = p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}$ es la presión total (hidrostática y magnética).

f) Ondas Magnetohidrodinámicas.

Consideramos en el seno de un fluido conductor una porción del mismo, contenida en un prisma de longitud infinita, de sección ABCD,

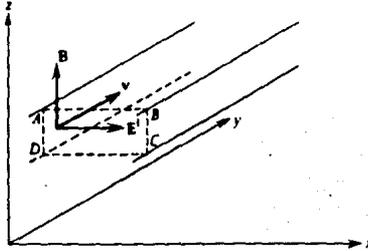


fig.5.3

la cual se somete a un movimiento longitudinal de velocidad v , en presencia de un campo magnético $H // z$.

Como consecuencia de este movimiento se induce un campo eléctrico:

$$D = \frac{v}{c} \times H$$

el cual aparece como consecuencia del término $\frac{v}{c} \times H$ de la fuerza de Lorentz aplicada a cada carga del fluido. Dado que el medio es conductor, se establecerán corrientes como las mostradas en la fig. 5.4.

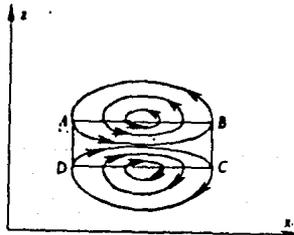


fig.5.4

Esto da lugar a la aparición de una fuerza por unidad de volumen:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$$

Dentro del prisma, \mathbf{F} es opuesta a \mathbf{v} y afuera \mathbf{E} es paralela a \mathbf{v} , en consecuencia, se producen ondas transversales que se propagan en dirección paralela al campo \mathbf{H} .

Ahora bien, si tenemos un fluido compresible y se produce una compresión perpendicular a \mathbf{H} , aumenta la intensidad del campo. Si varía el campo, hay una densidad de corriente \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H}$$

y una fuerza:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$$

Si tomamos $\mathbf{H} = H\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{F} = -\nabla \left(\frac{H^2}{8\pi} \right)$, o sea que cuando el campo magnético está sometido a una compresión lateral, responde con una fuerza restaurativa originada en la presión magnética. De esta manera se producen las ondas magnetosónicas.

Para el tratamiento matemático del problema, en el caso de un fluido ideal, necesitamos las ecuaciones MHD:

a) Ecuación de Continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$

b) Ecuación de Euler: $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H})$

c) Ecuación de Estado (caso adiabático): $P = (\text{cte.}) \rho^\gamma$

d) Ecuaciones de Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \right) \nabla^2 \mathbf{H}$

i) Ondas planas en fluidos incompresibles en presencia de un campo magnético.

Por simplicidad, ignoraremos la gravedad. El campo magnético lo tomaremos como $\mathbf{H} = H_0 + h$, donde h es la perturbación del campo magnético y $H_0 = H_0 \mathbf{k}$, $H_0 \perp h$.

Todos los vectores dependen solo de z y t . Como $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$, $j_z = 0$ y podemos elegir nuestro sistema de referencia de tal manera que $j_y = 0$. En consecuencia:

$$j_x = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \frac{c}{4\pi} = -\frac{\partial h_y}{\partial z} \frac{c}{4\pi}$$

$$j_y = \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \frac{c}{4\pi} = 0$$

$$j_z = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \frac{c}{4\pi} = 0$$

$$\mathbf{h} = (0, h_y, 0)$$

De la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, la cual resulta $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, podemos poner $v_z = 0$. De aquí la ecuación de Euler queda como:

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = 0 = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{c} (j_x h_y) = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\partial h_y}{\partial z} \right) h_y$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial h_y^2}{\partial z} \frac{1}{8\pi}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial h_y^2}{\partial z}$$

De:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\sigma}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

queda:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

de aquí que:

$$E_x = \frac{j_x}{\sigma} - \frac{1}{c} \left(v_y H_z - H_y v_z \right) = -\frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial h_y}{\partial z} - \frac{1}{c} v_y H_0$$

$$E_y = -\frac{1}{c} v_x H_0$$

$$E_z = -\frac{1}{c} v_x h_y$$

De:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

se tiene que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z}$$

utilizando la ecuación para E_x :

$$-c \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = \frac{c^2}{\sigma 4\pi} \frac{\partial^3 h_y}{\partial t \partial z^2} + H_0 \frac{\partial^2 v_y}{\partial t \partial z}$$

De la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_y = \frac{1}{c} (-j_x H_z) = -\frac{H_0}{c} \left(-\frac{c}{4\pi} \frac{\partial h_y}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial h_y}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial t} = \frac{H_0}{\rho 4\pi} \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2}$$

entonces:

$$-c \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^3 h_y}{\partial t \partial z^2} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^3 h_y}{\partial t \partial z^2} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} \quad (5.28)$$

Veamos la solución de (5.28):

Si $\sigma = \infty$, queda:

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} \quad (5.29)$$

Como es sabido, esta ecuación representa una onda que se propaga con la velocidad:

$$v_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}$$

llamada *velocidad de Alfvén*.

Una solución a la ecuación (5.29) es:

$$\begin{aligned} h_y &= A \operatorname{Sen} \omega \left(t - \frac{z}{v_A} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial h_y}{\partial z} &= -A \frac{\omega}{v_A} \operatorname{Cos} \omega \left(t - \frac{z}{v_A} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\omega A}{v_A} \operatorname{Cos} \omega \left(t - \frac{z}{v_A} \right) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} v_y &= - \left(\frac{H_0}{4\pi\rho} \right) \frac{A}{v_A} \operatorname{Sen} \omega \left(t - \frac{z}{v_A} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{4\pi\rho} \right)^{1/2} A \operatorname{Sen} \omega \left(t - \frac{z}{v_A} \right) \end{aligned}$$

De la misma manera pueden obtenerse las expresiones para E_x , J_x , P (esta última no es sinusoidal, sino que varía con sen^2).

Las densidades de energías magnética y cinética de la perturbación son:

$$\text{Energía magnética} = \frac{h_y^2}{8\pi} = \frac{A^2 \operatorname{Sen}^2 \omega(t - z/v_A)}{8\pi}$$

$$\text{Energía cinética} = \frac{\rho v_y^2}{2} = \frac{A^2 \operatorname{Sen}^2 \omega(t - z/v_A)}{8\pi}$$

o sea que hay equipartición de la energía.

Alfvén dedujo la existencia de ondas magnetohidrodinámicas aproximadamente de la siguiente forma. Primero obtuvo el teorema de congelación; la fuerza de Lorentz se puede escribir como una presión hidrostática $H^2/8\pi$, lateral al campo y una tensión $H^2/4\pi$ a lo largo de las líneas, se ve que las líneas pueden vibrar como cuerdas elásticas con tensión $H^2/4\pi$ y densidad ρ (la del medio). Las oscilaciones transversales cualesquiera de una cuerda están

gobernadas por:

$$m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2},$$

donde T es la tensión y la velocidad de onda es: $v = \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2}$ de modo que, reemplazando por analogía mecánica T por $H^2/4\pi$ y m por ρ tenemos:

$$v_A = \left(\frac{H^2}{4\pi\rho} \right)^{1/2}$$

que es la velocidad de propagación de las ondas magnetohidrodinámicas transversales.

Veamos el caso de σ finito. Tomamos como solución a la ecuación (5.28) a:

$$h = h_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

al reemplazarlo queda:

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} (i\omega) (-ik)^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\sigma} (-ik)^2 \\ &\rightarrow -\omega^2 = -\frac{ic^2\omega k^2}{4\pi\sigma} - \frac{H_0^2 k^2}{4\pi\sigma} \\ &+ \omega^2 - \left(v_A^2 + i \frac{\omega c^2}{4\pi\sigma} \right) k^2 = 0 \\ &\rightarrow k = \pm \frac{\omega}{v_A} \left(1 + i \frac{\omega c^2}{4\pi\sigma v_A^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Se pueden considerar dos tipos de situaciones. Veamos primero el caso:

$$\frac{\omega c^2}{4\pi\sigma v_A^2} \ll 1$$

Escencialmente esto significa σ grande y es la situación más común en el cosmos. Por medio del desarrollo en serie de:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

se tiene:

$$k \approx \pm \left(\frac{\omega}{v_A} - \frac{i\omega^2 c^2}{8\pi\sigma v_A^3} \right)$$

La parte imaginaria de k produce atenuación; en una distancia

$z_0 = \frac{8\pi\sigma v_A}{\omega^2 c^2}$ la amplitud decrece en un factor $1/e$. Como $\lambda = 2\pi v/\omega$:

$z_0 = \frac{2\sigma v_A}{\omega^2 c^2} \lambda^2$ y para que la atenuación sea pequeña debe cumplirse que:

$$\frac{z_0}{\lambda} = \frac{2\sigma v_A}{\pi c^2} \lambda \gg 1$$

entonces:

$$h = h_0 e^{-z/z_0} e^{-i\omega (t-z/v)}$$

Volvamos a la ecuación (5.30):

Si $\frac{\omega c^2}{4\pi\sigma v_A^2} \gg 1$, es decir, muy baja conductividad, se tiene:

$$k = \left(-\frac{i\omega c^2}{4\pi\sigma v_A^2} \right)^{-1/2} \frac{\omega}{v_A} = \left(-\frac{ic^2}{4\pi\sigma\omega} \right)^{-1/2} = \left(\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} i \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

donde:

$$\delta = \left(\frac{4\pi\sigma\omega}{2c^2} \right)^{-1/2}$$

ii) Ondas de Amplitud Pequeña.

Vamos a considerar oscilaciones pequeñas en fluidos ideales. La suposición de oscilaciones pequeñas, permite linealizar las ecuaciones. Para su estudio consideremos la propagación de pequeñas perturbaciones en un medio conductor homogéneo que se encuentra en un campo magnético constante y homogéneo H_0 . Admitiremos que la viscosidad, la conductividad calorífica y la resistencia eléctrica ($1/\sigma$) del medio son tan pequeñas que, a primera aproximación, puede prescindirse de la influencia de disipación de energía asociada a ellas sobre la propagación de las perturbaciones. Entonces las perturbaciones se propagarán en forma de ondas no amortiguadas.

Prescindiendo de todos los términos disipativos, escribamos el sistema de ecuaciones fundamentales en la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \quad (5.34)$$

En lo que concierne a la ecuación de transmisión del calor, ésta se reduce a la ecuación de conservación de la entropía (condición de movimiento adiabático):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dt} = 0 \quad (5.35)$$

Si el medio no perturbado es homogéneo ($s = \text{cte.}$), en virtud de esta ecuación también $s = \text{cte.}$ en el medio perturbado, es decir, el movimiento será isentrópico.

Hagamos:

$$H = H_0 + h ; \quad \rho = \rho_0 + \rho' ; \quad p = p_0 + p' \quad (5.36)$$

donde el índice "0" caracteriza los valores constantes de equilibrio de las diferentes magnitudes y h , ρ' y p' sus pequeñas variaciones en la perturbación. La velocidad \mathbf{v} es también pequeña y es nula en el equilibrio. Teniendo en cuenta que el movimiento es isentrópico, las variaciones de presión y de densidad están ligadas entre sí por la relación:

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho'$$

Pero $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ es el cuadrado de la velocidad del sonido u_0 en el medio dado:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = u_0^2$$

De modo que:

$$p' = u_0^2 \rho'$$

Despreciando los términos de orden superior al primero en las ecuaciones (5.31) - (5.34), obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \left(\frac{u_0^2}{\rho} \right) \nabla \rho' - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H})$$

Aquí y en lo que sigue, para abreviar la notación hemos prescindido del índice 0 en los valores de equilibrio de las diferentes cantidades.

Para una perturbación periódica en el tiempo, la primera de

estas ecuaciones es consecuencia de la segunda y podemos prescindir de ella.

Buscaremos soluciones de estas ecuaciones que sean de la forma $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ es decir, soluciones que representan la propagación de ondas planas con vector de onda \mathbf{k} y frecuencia ω . En este caso, el sistema de ecuaciones (5.37) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} -\omega \mathbf{h} &= \mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \\ \omega \rho' &= \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \\ -\omega \mathbf{v} &= -\left(\frac{u_0^2}{\rho}\right) \rho' \mathbf{k} - \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{h})) \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones prueba, ante todo, que el vector \mathbf{h} es perpendicular a la dirección del vector de onda, en cuyo sentido elegiremos a continuación el eje x . El plano determinado por \mathbf{k} y \mathbf{H} se tomará como el plano xy . Además, introduciremos la "velocidad de fase" de la onda:

$$u = \frac{\omega}{k}$$

Eliminando ρ' de la tercera ecuación mediante la segunda ecuación y reescribiendo el resultado en componentes, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} u h_z &= -v_z H_x \\ u v_z &= -\frac{1}{4\pi\rho} H_x h_z \end{aligned} \right\} (5.38)$$

$$\left. \begin{aligned} u h_y &= v_x H_y - v_y H_x \\ u v_y &= -\frac{1}{4\pi\rho} H_x h_y \end{aligned} \right\} (5.39)$$

$$v_x \left(u - \frac{u_0^2}{u} \right) = \frac{1}{4\pi\rho} H_y h_y$$

Hemos separado aquí las ecuaciones en dos grupos, el primero de los cuales contiene solamente las variables h_z , v_z ; y el segundo tan sólo v_x , h_y , v_y . De aquí se sigue que las perturbaciones de estos dos grupos de variables se propagan con independencia las unas de las otras. En lo que concierne a las perturbaciones de la densidad (y con ellas también las de la presión), éstas se propagan junto con las correspondientes a h_y , v_x , v_y , puesto que están ligadas con v_x por la relación:

$$\rho' = \frac{\rho}{u} v_x \quad (5.40)$$

La condición de compatibilidad de las dos ecuaciones (5.38) da:

$$uh_z = -v_z H_x$$

$$uv_z = -\frac{1}{4\pi\rho} H_x h_z$$

entonces, despejando v_z de la segunda y sustituyéndola en la primera:

$$uh_z = H_x \left(\frac{1}{u} H_x h_z \frac{1}{4\pi\rho} \right)$$

$$\Rightarrow u \approx u_1 = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (5.41)$$

En estas ondas la componente h_z del campo magnético perpendicular a la dirección de propagación de la onda y a la del campo constante H experimenta oscilaciones. Junto con h_z , oscila la velocidad v_z , ligada con h_z por la igualdad:

$$v_z = -\frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} h_z \quad (5.42)$$

Conviene recordar que este tipo de ondas, donde la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación, son llamadas ondas transversales.

La relación entre ω y k (llamada relación de dispersión), dada por la fórmula (5.41), depende esencialmente de la dirección del vector de onda:

$$\omega = \frac{H \cdot k}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

La velocidad física de propagación de las ondas, en cambio, resulta ser, como es sabido, la velocidad de grupo, dada por la derivada $\frac{\partial\omega}{\partial k}$. En este caso, esta magnitud es igual a:

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

y no depende de la dirección de k ; la dirección de propagación de la onda, entendiéndola por ella la velocidad de grupo, coincide con la de H . Recordando de la primera sección, ésta es la velocidad de Alfvén.

Consideremos ahora las ondas descritas por las ecuaciones (5.39). Formando el determinante de las mismas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & -H_y & H_x \\ \frac{H_x}{4\pi\rho} & 0 & u \\ -\frac{H_y}{4\pi\rho} & u - \frac{u_0^2}{u} & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollándolo:

$$\Delta = u \left(u \left(\frac{u_0^2}{u} - u \right) \right) + H_y \left(\frac{uH_y}{4\pi\rho} \right) + H_x^2 \left(u - \frac{u_0^2}{u} \right) \frac{1}{4\pi\rho}$$

e igualandolo a cero:

$$u (u_0^2 - u^2) + \frac{uH_y^2}{4\pi\rho} + \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \left(u - \frac{u_0^2}{u} \right) = 0$$

tenemos la ecuación:

$$- (u_0^2 - u^2) \left(u^2 - \frac{H_y^2}{4\pi\rho} \right) = \frac{u^2 H_y^2}{4\pi\rho}$$

Esta ecuación bicuadrada (respecto a u) tiene las raíces:

$$u_{2,3} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} + \frac{H_x u_0}{\sqrt{\pi\rho}}} \pm \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} - \frac{H_x u_0}{\sqrt{\pi\rho}}} \right)$$

puesto que las raíces de la ecuación bicuadrada $x^4 + px^2 + q = 0$ se pueden escribir en la forma $x = \pm \frac{1}{2} (\sqrt{-p+2\sqrt{q}} \pm \sqrt{-p-2\sqrt{q}})$. Obtenemos así dos tipos más de ondas. En estas ondas oscilan las cantidades h_y , v_x , v_y (y la densidad ρ'). Los vectores h , v se encuentran en el plano de los vectores H , k .

A estas ondas se les conoce como ondas rápidas (las correspondientes al signo (+)) y lentas (las correspondientes al signo (-), también llamadas magnetosónicas) respectivamente, mientras que las que se propagan con la velocidad de Alfvén son las llamadas ondas intermedias (llamadas también hidromagnéticas). Las ondas magnetosónicas, a diferencia de las hidromagnéticas, tienen componentes transversales y longitudinales. En el caso de un fluido incompresible (al que corresponde formalmente el paso límite $u_0 \rightarrow 0$), las únicas ondas que existen son las de Alfvén (hidromagnéticas) que en ese caso son una solución exacta de las ecuaciones MHD, sin importar su amplitud.

Resumiendo para el caso de fluidos compresibles, cuando las perturbaciones son pequeñas tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Transversales} \\ v_i = v_A \cos\theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ondas Intermedias} \\ \text{(hidromagnéticas)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Transversales y longitudinales} \\ v_R^2 = \frac{1}{2} \left(c^2 + v_A^2 + \sqrt{(c^2 + v_A^2)^2 - 4v_A^2 c^2 \cos^2\theta} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ondas} \\ \text{Rápidas} \\ \text{(magneto} \\ \text{sónicas)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Transversales y longitudinales} \\ v_L^2 = \frac{1}{2} \left(c^2 + v_A^2 - \sqrt{(c^2 + v_A^2)^2 - 4v_A^2 c^2 \cos^2\theta} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ondas} \\ \text{Lentas} \\ \text{(magneto} \\ \text{sónicas)} \end{array}$$

donde v_A es la velocidad de Alfvén, θ es el ángulo entre \mathbf{H} y \mathbf{k} , c es la velocidad del sonido y v_i , v_R , v_L son respectivamente, la velocidad de las ondas intermedias, rápidas y lentas.

Es interesante notar que si $\theta = 90^\circ$ ($\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$), entonces $v_i = v_L = 0$, y entonces sólo existe el modo rápido, con una velocidad:

$$v_R = \sqrt{c^2 + v_A^2}$$

Si $\theta = 0^\circ$ ($\mathbf{H} \parallel \mathbf{k}$), entonces $v_i = v_A$, las ondas intermedias se propagan con la velocidad de Alfvén y para las ondas magnetosónicas hay dos posibilidades. Si $v_A > c$, entonces $v_R = v_A$ y $v_L = c$; si $v_A < c$, entonces $v_R = c$ y $v_L = v_A$.

g) *Discontinuidades en flujos magnetohidrodinámicos.*

Las ecuaciones del movimiento de un fluido magnetohidrodinámico ideal (un fluido sin viscosidad, conductividad térmica y resistencia eléctrica) admiten discontinuidades de la corriente al igual que en la hidrodinámica ordinaria. Para poner en claro las condiciones que deben quedar satisfechas sobre una superficie de discontinuidad, consideremos un elemento cualquiera de esta superficie y utilicemos un sistema de coordenadas que se mueva junto con él. Esta condición fija solamente la velocidad del sistema coordinado en la dirección normal a la superficie, a la velocidad tangencial se le puede añadir cualquier vector constante.

Ante todo, sobre una superficie de discontinuidad, el flujo de materia debe ser continuo: la cantidad de fluido que penetra una cara de la superficie debe ser igual a la cantidad de fluido que sale por la otra. Esto significa que $\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$, donde los índices 1 y 2 se refieren a las dos caras de la superficie de discontinuidad y el índice n designa la componente de un vector normal a la superficie. Usaremos un paréntesis cuadrado para denotar la diferencia de valores de la cantidad entre paréntesis entre uno y otro lado de la superficie o el "salto", esto es:

$$[A] = A_2 - A_1.$$

Así pues,

$$[\rho v_n] = 0. \quad (5.43)$$

Además, debe ser continuo el flujo de energía. Utilizando la expresión (5.24) y suprimiendo los términos disipativos, tenemos:

$$[q_n] = [\rho v_n (\frac{1}{2} v^2 + \omega) + v_n H^2 \frac{1}{4\pi} - H_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \frac{1}{4\pi}] = 0$$

También el flujo de momento debe ser continuo. Esta condición significa que $[\Pi_{ik} n_k] = 0$, donde Π_{ik} es el tensor densidad de flujo de momento, y n es el vector unitario normal a la superficie. Con ayuda de la ecuación (5.23) se tiene:

$$\begin{aligned} [\Pi_{ik} n_k] &= [(\rho v_i v_k + p \delta_{ik} - (H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}) \frac{1}{4\pi}) n_k] \\ &= [\rho v_i v_k n_k + p \delta_{ik} n_k + \frac{1}{8\pi} H^2 \delta_{ik} n_k - \frac{1}{4\pi} H_i H_k n_k] \\ &= [\rho v_i v_n + p n_i + \frac{1}{8\pi} H^2 n_i - \frac{1}{4\pi} H_i H_n] \end{aligned}$$

donde n es un índice que indica la componente normal, no es un índice tensorial, esto es:

$$v_k n_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \equiv v_n, \quad H_k n_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \equiv H_n$$

Separando ahora v_i y H_i en su componente tangencial y normal:

$$\mathbf{v} = v_t \mathbf{t} + v_n \mathbf{n}, \quad \mathbf{H} = H_t \mathbf{t} + H_n \mathbf{n}$$

o bien:

$$v_i = v_t k_i t_i + v_n k_i n_i, \quad H_i = H_t s_i s_i + H_n k_i n_i$$

donde \mathbf{t} y \mathbf{s} son vectores tangenciales a \mathbf{v} y \mathbf{H} respectivamente; entonces:

$$[\Pi_{ik} n_k] = [\rho v_n (v_t k_i t_i + v_n k_i n_i) + p n_i - \frac{1}{4\pi} H_n (H_t s_i s_i + H_n k_i n_i) + \frac{1}{8\pi} H^2 n_i] = 0$$

dado que (n, s) y \mathbf{t} son direcciones independientes, lo anterior se puede expresar como:

$$[\rho v_n^2 + p + \frac{1}{8\pi} (H_t^2 - H_n^2)] = 0 \quad \text{para la dirección } n$$

$$[\rho v_n v_t - H_n H_t \frac{1}{4\pi}] = 0 \quad \text{para las direcciones } \mathbf{t} \text{ y } \mathbf{s}$$

donde $H_t = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}$ y $v_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$.

Finalmente, son también continuas por las ecuaciones de Maxwell, la componente normal del campo magnético y la componente tangencial del campo eléctrico:

$$[E_t] = 0 \quad [H_n] = 0 \quad (5.44)$$

Si la conductividad del medio es infinita, el campo eléctrico inducido es:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

Por ello, la condición $[E_t] = 0$ da:

$$[H_n v_t - H_t v_n] = 0.$$

En lo que sigue resultará conveniente utilizar en vez de la densidad del fluido su volumen específico $V = \frac{1}{\rho}$. La densidad de flujo de masa a través de la superficie de discontinuidad la designamos por j :

$$j = \rho v_n = \frac{v_n}{V}$$

Es fácil ver que las siguientes propiedades del "salto" son

verdaderas:

$$i) [a + b] = [a] + [b]$$

$$ii) \text{ Si } [c] = 0, \Rightarrow [cd] = c [d]$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que j y H_n son continuas, las demás condiciones de frontera pueden escribirse de la siguiente manera:

$$j[\omega + \frac{1}{2} j^2 V^2 + \frac{1}{2} v_t^2 + V H_t^2 \frac{1}{4\pi}] = H_n [H_t \cdot v_t] \quad (5.45)$$

$$[p] + j^2 [V] + [H_t^2] \frac{1}{8\pi} = 0 \quad (5.46)$$

$$j[v_t] = H_n [H_t] \frac{1}{4\pi} \quad (5.47)$$

$$H_n [v_t] = j [V H_t] \quad (5.48)$$

Este es precisamente el sistema fundamental de ecuaciones que describen las discontinuidades en magnetohidrodinámica.

En la hidrodinámica ordinaria, son posibles discontinuidades de dos tipos totalmente diferentes: ondas de choque y discontinuidades tangenciales. La aparición de dos tipos de discontinuidades está vinculada matemáticamente con el hecho de que algunas de las ecuaciones que traducen las condiciones de contorno se pueden representar como la anulación de un producto de dos factores; igualando a cero cada uno de ellos por separado, obtenemos dos soluciones completamente independientes.

En magnetohidrodinámica, en cambio, las ecuaciones (5.43) a (5.48) no presentan esta forma, y basándose en ello cabría pensar que, en total, se tiene solamente un único tipo de discontinuidades que abarca todos los casos particulares posibles. En realidad, sin embargo, resulta que también aquí existen diferentes tipos de discontinuidades que no cabe considerar como casos particulares de uno más general.

i) Discontinuidades Tangenciales y Rotacionales.

Consideremos en primer lugar aquellas discontinuidades en las que $j = 0$. Ello significa que $v_{1n} = v_{2n} = 0$, esto es, que el fluido se mueve paralelamente a la superficie de discontinuidad. Si, además, $H_n \neq 0$, por las ecuaciones (5.46) a (5.48):

$$\text{de (5.46): } [p] + [H_t^2] \frac{1}{8\pi} = 0$$

$$\text{de (5.47): } [H_t] = 0 \Rightarrow [p] = 0$$

de (5.48): $[v_t] = 0$

se ve que deben ser continuas la presión, la velocidad y el campo magnético. En cambio, la densidad puede experimentar un salto arbitrario (y también la entropía, la temperatura, etc.). Tal discontinuidad, que se puede llamar de *contacto*, es simplemente la frontera de separación entre dos medios en reposo con diferentes densidades y temperaturas.

Pero si además de $j = 0$ también es $H_n = 0$, de las cuatro ecuaciones (5.45) a (5.48) quedan satisfechas idénticamente tres de ellas; esto hace ver ya que se trata de un caso muy singular. Encontramos de esta manera un tipo de discontinuidad que se podría llamar, al igual que en la hidrodinámica ordinaria, *discontinuidad tangencial*. Sobre una superficie tal de discontinuidad, la velocidad y el campo magnético son tangentes y experimentan saltos arbitrarios en magnitud y dirección:

$$j = 0, \quad H_n = 0, \quad [v_t] \neq 0, \quad [H_t] \neq 0 \quad (5.49)$$

También es arbitrario el salto de densidad, mientras que el salto de presión esta ligado con el de H_t por la relación (5.46):

$$[V] \neq 0$$
$$\left[p + H_t^2 \frac{1}{8\pi} \right] = 0 \quad (5.50)$$

En cuanto a los saltos de las demás magnitudes termodinámicas (la entropía, la temperatura, etc.) éstos se determinan a partir de las discontinuidades de V y p mediante la ecuación de estado.

Otro tipo de discontinuidad lo constituyen aquéllas en las que la densidad no experimenta salto alguno. Teniendo en cuenta la continuidad del flujo $j = \rho v_n = v_n/V$, del hecho de que la densidad no presente un salto, se sigue inmediatamente que también será continua la componente normal de la velocidad, esto es:

$$j \neq 0, \quad [V] = 0 \quad \Rightarrow \quad [v_n] = 0 \quad (5.51)$$

En el segundo miembro de la ecuación (5.48) podemos sacar ahora V fuera de los corchetes:

$$H_n [v_t] = jV [H_t]$$

y, dividiendo término a término las ecuaciones (5.48) y (5.47), se obtiene:

$$\frac{j}{H_n} = \frac{H_n}{4\pi} \frac{1}{jV}$$

o bien:

$$j = H_n / \sqrt{4\pi V} \quad (5.52)$$

Con esto la ecuación (5.47) o (4.48) da

$$[v_t] = \sqrt{\frac{V}{4\pi}} [H_t] \quad (5.53)$$

En la ecuación (5.45) escribamos $\omega = c + pV$; teniendo en cuenta la continuidad de V , sustituyendo H_n de acuerdo con (5.52) y reagrupando términos, se tiene:

$$\begin{aligned} j[c + pV] + \frac{1}{2} j[v_t^2] + jV[H_t^2] \frac{1}{4\pi} &= H_n[H_t \cdot v_t] \frac{1}{4\pi} \\ j[c] + jV[p] + \frac{1}{2} j[v_t^2] + jV[H_t^2] \frac{1}{4\pi} &= j\sqrt{V/4\pi} [H_t \cdot v_t] \frac{1}{4\pi} \\ j[c] + jV[p + \frac{H_t^2}{4\pi}] + \frac{1}{2} j[v_t^2] &= j\sqrt{V/4\pi} [H_t \cdot v_t] \frac{1}{4\pi} \end{aligned}$$

observando que:

$$\frac{1}{2} j[(v_t - \sqrt{V/4\pi} H_t)^2] = \frac{1}{2} j[v_t^2] + \frac{1}{2} jV/4\pi [H_t^2] - j\sqrt{V/4\pi} [H_t \cdot v_t]$$

se concluye que:

$$j[c] + jV[p + \frac{H_t^2}{8\pi}] + \frac{1}{2} j [(v_t - \sqrt{V/4\pi} H_t)^2] = 0$$

El segundo término se anula aquí en virtud de la igualdad (5.46), y el tercero, en virtud de (5.53), de modo que queda $[c] = 0$, es decir, junto con la densidad, también es continua la energía interna. Ahora bien, cualquier otra magnitud termodinámica viene unívocamente determinada si se dan las dos magnitudes c y V . Por lo tanto, son también continuas las restantes magnitudes termodinámicas, en particular la presión. Pero de la ecuación (5.46) se sigue entonces que es asimismo continuo el cuadrado H_t^2 , esto es, el módulo del vector H_t :

$$[p] = 0, \quad [H_t] = 0 \quad (5.54)$$

Que H_t y H_n sean continuas implica a su vez que también se conserva invariable el valor absoluto del propio vector H y el ángulo que forma con la normal a la superficie.

Las fórmulas (5.51) a (5.54) determinan todas las propiedades de las discontinuidades consideradas. Todas las magnitudes termodinámicas son continuas, mientras que el campo magnético gira en torno a la dirección normal al pasar de una a la otra cara,

manteniendo constante su valor absoluto. Junto con el vector H_t experimenta un salto la componente tangencial de la velocidad (según (5.53)), si bien la componente normal de la velocidad $v_n = jV$ es continua e igual a:

$$v_n = H_n \sqrt{\frac{V}{4\pi}} = H_n \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (5.55)$$

Llamamos a las discontinuidades de este tipo *discontinuidades de rotación* (o *rotacionales*).

Conviene hacer notar que eligiendo convenientemente el sistema de coordenadas es siempre posible conseguir que en ambas caras de una superficie de discontinuidad rotacional la velocidad del fluido sea paralela al campo. Para ello basta pasar a un nuevo sistema de coordenadas que se mueva respecto al de partida con velocidad igual a:

$$v_{1t} - H_{1t} \sqrt{\frac{V}{4\pi}} = v_{2t} - H_{2t} \sqrt{\frac{V}{4\pi}}$$

En este nuevo sistema de coordenadas, en ambas caras de las superficies de discontinuidad las razones de las tres componentes de v a las correspondientes de H son las mismas e iguales a $\sqrt{\frac{V}{4\pi}}$, es decir,

$$v_1 = H_1 \sqrt{\frac{V}{4\pi}}, \quad v_2 = H_2 \sqrt{\frac{V}{4\pi}} \quad (5.56)$$

Así pues, en este sistema de coordenadas la velocidad gira junto con el campo magnético, manteniéndose constante su módulo y el ángulo que forma con la normal.

La velocidad v_n , tomada con signo opuesto, es al mismo tiempo la velocidad de propagación de la discontinuidad respecto del fluido. Dicha velocidad coincide con la de fase (u_1) de uno de los tres tipos de ondas magnetohidrodinámicas. El hecho de que esta coincidencia tenga lugar para cualquier discontinuidad de rotación, es hasta cierto punto casual, mas, para pequeños saltos de las magnitudes sobre la correspondiente superficie de discontinuidad esta coincidencia es del todo necesaria. En efecto, una discontinuidad de este tipo representa una perturbación débil en la cual la velocidad v y el campo magnético H adquieren pequeños incrementos perpendiculares al plano que pasa por H y por la normal a la superficie n . Esta perturbación es del tipo de las

ondas intermedias con velocidad v_A . La velocidad física de propagación del frente de una pequeña perturbación es la proyección de la velocidad de grupo sobre la normal del mismo, es decir, sobre el vector de onda \mathbf{k} . Pero teniendo en cuenta el carácter lineal de la relación entre ω y \mathbf{k} resulta

$$\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \omega$$

y así, esta componente es la misma que la velocidad de fase:

$$\frac{\omega}{k} = v_1 = v_A$$

Aunque las discontinuidades rotacional y tangencial forman dos diferentes tipos, también hay discontinuidades que tienen las propiedades de ambas. Estas discontinuidades son tales que \mathbf{v} y \mathbf{H} son tangenciales en dirección y continuas en magnitud, y simplemente giran.

En la hidrodinámica ordinaria, las discontinuidades tangenciales son siempre inestables respecto de perturbaciones infinitesimales, lo que conduce a su rápida transición al régimen turbulento. Sin embargo, un campo magnético tiene una función estabilizadora sobre el movimiento de un fluido conductor y en este caso las discontinuidades tangenciales pueden ser estables. Este resultado es una consecuencia natural del hecho de que involucran desplazamientos del fluido transversales al campo, que conducen a un estiramiento de las líneas de fuerza magnética congeladas en él y por lo tanto a la aparición de fuerzas que tienden a restaurar el estado imperturbado del fluido. Una investigación de tales discontinuidades en un fluido incompresible realizada por Syrovatskii (1953) ha dado las siguientes desigualdades que deben satisfacerse conjuntamente para que la discontinuidad sea estable:

$$\begin{aligned} H_1^2 + H_2^2 &> 2\pi\rho v^2 \\ 2\pi\rho \left((H_1 \times \mathbf{v})^2 + (H_2 \times \mathbf{v})^2 \right) &\leq (H_1 \times H_2)^2 \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ es el salto de la velocidad sobre la superficie de discontinuidad. Si las densidades de los fluidos incompresibles en ambos lados de la discontinuidad son diferentes, entonces ρ en estas desigualdades debe reemplazarse por:

$$\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

De hecho, sin embargo, gracias a la existencia en el fluido de viscosidades pequeñas, pero en todo caso no nulas, y de la resistencia eléctrica, la discontinuidad tangencial no se conservará durante un tiempo infinitamente largo, incluso si las condiciones (5.57) se cumplen. Aunque no se produce entonces turbulencia, en vez de un salto brusco se presenta, en cambio, una región de transición que se ensancha gradualmente y en la cual la velocidad y el campo magnético pasan con suavidad de un valor al otro.

Es fácil comprobar esto partiendo de las ecuaciones del movimiento incluidos los términos disipativos. Elijamos como eje x la normal a la superficie de discontinuidad. Suponiendo que todas las magnitudes dependen solamente de la coordenada x (y , posiblemente del tiempo), escribiremos las componentes transversales de estas ecuaciones en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_t}{\partial t} &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_t}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_t}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.58)$$

El fluido se supone incompresible. Admitiendo que el movimiento es estacionario, los primeros miembros de estas ecuaciones deben sustituirse por cero. Pero entonces, la única solución que se conserva finita para $x \rightarrow \pm\infty$ es, simplemente, $H_t = \text{cte.}$, $v_t = \text{cte.}$, lo que contradice la hipótesis de que los valores de estas cantidades experimentan un cambio. Así pues, una discontinuidad tangencial no puede tener una anchura estacionaria (como tiene, por ejemplo, una onda de choque débil). Las ecuaciones (5.58) tienen la forma de la ecuación de transmisión del calor. Como es sabido por la teoría de ésta, la discontinuidad de una magnitud descrita por dicha ecuación se difunde en el curso del tiempo ocupando una región de transmisión cuya anchura crece proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo. Teniendo en cuenta que los coeficientes en las dos ecuaciones (5.58) son diferentes, las anchuras δv y δH de las regiones de transición de la velocidad y del campo serán distintas:

$$\delta_v \approx \sqrt{\nu t} \quad , \quad \delta_H \approx \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma}} \quad (5.59)$$

donde ν es la viscosidad cinemática y σ es la conductividad eléctrica.

Las discontinuidades rotacionales en un fluido incompresible son estables respecto a perturbaciones infinitesimales, cualquiera que sea la intensidad del campo magnético. Sin embargo, al igual que las discontinuidades tangenciales, no pueden tener anchuras constantes sino que son gradualmente suavizadas por la viscosidad y la resistencia eléctrica del fluido.

ii) Ondas de Choque.

Pasemos al siguiente tipo de discontinuidades, en el cual el fluido sí atraviesa la superficie de discontinuidad pero la densidad cambia; en este caso:

$$j \neq 0, \quad [V] \neq 0 \quad (5.60)$$

Estas discontinuidades, al igual que en la hidrodinámica ordinaria, se llaman ondas de choque. En lo que concierne a la componente normal del campo magnético, ésta, en general, es diferente de cero, pero en algún caso particular puede también ser $H_n = 0$.

Comparando las ecuaciones (5.47) y (5.48):

$$j [v_t] = H_n [H_t] \frac{1}{4\pi}$$

$$H_n [v_t] = j [VH_t]$$

vemos que, cuando $H_n \neq 0$, los vectores $H_{t2} - H_{t1}$ y $V_2 H_{t2} - V_1 H_{t1}$ son paralelos a un mismo vector, el $v_{t2} - v_{t1}$, y por consiguiente paralelos entre sí. A su vez, de aquí se sigue que también son paralelos H_{t1} y H_{t2} , es decir, los vectores H_1 y H_2 y la normal a la superficie se encuentran en un plano, en contraste con el caso de las discontinuidades tangencial y de rotación, en las que, en general, los planos H_1, n y H_2, n no coinciden. Este resultado vale también en el caso $H_n = 0$, cuando de (5.48) se sigue que $V_1 H_{t1} = V_2 H_{t2}$.

En cuanto a la velocidad, el salto $v_{t1} - v_{t2}$ se encuentra en el mismo plano que H_1 y H_2 . Sin limitar la generalidad, cabe suponer, evidentemente, que también los propios vectores v_1 y v_2 se encuentran en aquel mismo plano, de modo que el movimiento de la onda de choque resulte ser, por su propia naturaleza, un movimiento plano. Además, es fácil ver que, mediante una adecuada transformación de coordenadas es siempre posible conseguir (cuando $H_n \neq 0$) que a ambos lados de la discontinuidad los vectores v y H sean paralelos entre sí. Para ello hay que pasar a un nuevo sistema de coordenadas que se mueva respecto al inicial con una velocidad

$$v_t - \left(\frac{V_n}{H_n} \right) H_t = v_t - \left(j \frac{V}{H_n} \right) H_t$$

(los valores de esta magnitud a uno y otro lado de la

discontinuidad son iguales en virtud de la condición (5.48)). En las fórmulas que siguen a continuación, sin embargo, no supondremos esta elección especial del sistema de coordenadas.

Deduzcamos la relación que para las ondas de choque en magnetohidrodinámica representa el papel de las adiabáticas de Hugoniot de la hidrodinámica ordinaria. Eliminando $[v_t]$ entre las dos ecuaciones (5.47) y (5.48), obtendremos la relación:

$$H_n^2 [H_t] \frac{1}{4\pi} = j^2 [VH_t] ;$$

podemos escribir H_t en lugar de H_t en virtud de que H_{t1} y H_{t2} son paralelos:

$$H_n^2 [H_t] \frac{1}{4\pi} = j^2 [VH_t] \quad (5.61)$$

Para eliminar $[v_t]$ de la ecuación (5.45), escribimos ésta de la siguiente forma:

$$[\omega] + \frac{1}{2} j^2 [V^2] + \frac{1}{2} \left[(v_t - \frac{H_n}{4\pi j} H_t)^2 \right] + \frac{[VH_t^2]}{4\pi} - \frac{H_n^2}{32\pi} \frac{[H_t^2]}{j^2} = 0$$

El tercer término se anula en virtud de la ecuación (5.47) y, de esta manera, desaparece v_t . En el último término sustituimos el valor j^2 dado por la ecuación (5.61):

$$j^2 = \frac{H_n^2 [H_t]}{4\pi [VH_t]}$$

y en el primero, el que resulta de (5.46), es decir,

$$j^2 = - \frac{([H_t^2]/8\pi + [P])}{[V]} = \left\{ p_2 - p_1 + (H_{t2}^2 - H_{t1}^2) \frac{1}{8\pi} \right\} \frac{1}{V_1 - V_2} \quad (5.62)$$

entonces se tiene:

$$[c + pV] + \frac{1}{2} [V^2] \left\{ p_2 - p_1 + (H_{t2}^2 - H_{t1}^2) \frac{1}{8\pi} \right\} \frac{1}{V_2 - V_1} + \frac{[VH_t^2]}{4\pi} - \left(\frac{H_n^2 [H_t^2]}{32\pi} \right) \left(\frac{4\pi [VH_t]}{[H_t]} \right) = 0$$

después de un cálculo tan largo como trivial, se obtiene:

$$(c_2 - c_1) + (p_1 + p_2)(V_2 - V_1) + (H_{t2} - H_{t1})^2 (V_2 - V_1) \frac{1}{16\pi} = 0$$

o bien

$$[c] + (p_1 + p_2) [V] + [H_t]^2 [V] \frac{1}{16\pi} = 0 \quad (5.63)$$

Esta es precisamente la ecuación adiabática de choque en magnetohidrodinámica. Difiere de la ecuación ordinaria en el tercer término. Los choques magnetohidrodinámicos tienen en

general las mismas características que los choques hidrodinámicos, pero las relaciones $\frac{\rho_2^2}{\rho_1}$ y $\frac{p_2^2}{p_1}$, etc. son en general menores, pues parte de la energía disipada se va en energía del campo magnético.

En un plasma o fluido conductor la presencia del campo magnético modificará, en general, el carácter de la onda de choque. Si el campo magnético es paralelo a la dirección de movimiento del fluido, es claro que no influirá en la onda de choque. Pero si el campo magnético está inclinado respecto a la dirección del flujo, se inducirán corrientes que afectarán tanto el balance de momento como el de energía del fluido a ambos lados del choque. La rapidez de propagación de las ondas de compresión es

$$c^* = \sqrt{c^2 + v_A^2}$$

donde c es la velocidad del sonido y v_A es la velocidad de Alfvén locales en el fluido. Así, en este caso podemos esperar que no se desarrollará una onda de choque si la velocidad del fluido es menor que c^* .

Escribamos una vez más la ecuación (5.47):

$$v_{t2} - v_{t1} = H_n(H_{t2} - H_{t1}) \frac{1}{4\pi j} \quad (5.64)$$

que determina el salto de v_t en función del que experimenta H_t (nótese que ya no hay necesidad de poner vectores, pues todos los vectores son paralelos). Las ecuaciones (5.61) a (5.64) constituyen un sistema completo de ecuaciones que describen las ondas de choque en magnetohidrodinámica. Consideremos una onda de choque en la cual la discontinuidad de todas las magnitudes sea pequeña; la denominaremos onda de choque débil. Cuando tienden a cero los saltos de todas las magnitudes, la velocidad de propagación de las ondas de choque debe tender a la velocidad de las perturbaciones pequeñas. En hidrodinámica ordinaria, esto significa que la velocidad de las ondas de choque débiles tiende a la velocidad del sonido. En cambio, en la magnetohidrodinámica se tienen dos valores diferentes (u_2 y u_3) con las que pueden propagarse las ondas de choque de intensidad débil. Con la velocidad u_1 , en cambio, se propagan las perturbaciones que, por su carácter, corresponden a discontinuidades de rotación, como se indicó en el párrafo que precede.

Consideremos más detenidamente las ondas de choque débiles y veamos en que sentido cambian en ellas las diferentes magnitudes.

Transformemos la relación (5.63) desarrollando en potencias de las diferencias pequeñas $(s_2 - s_1)$ y $(p_2 - p_1)$. Veremos que los términos de primero y segundo orden en $(p_2 - p_1)$ se anulan, por tanto, debemos llevar a cabo el desarrollo respecto a $(p_2 - p_1)$ hasta el tercer orden. En el desarrollo respecto a $(s_2 - s_1)$ únicamente es necesario retener los términos de primer orden. Tenemos así:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 - \epsilon_1 = & \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial s_1} \right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2 \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \epsilon}{\partial p_1^3} \right)_s (p_2 - p_1)^3 \end{aligned}$$

Mediante la identidad termodinámica $d\epsilon = Tds - pdv$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial s} \right)_p &= T_1 - p_1 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p \\ \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_s &= -p_1 \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \\ \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p^2} \right)_s &= - \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s - p_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s \\ \left(\frac{\partial^3 \epsilon}{\partial p^3} \right)_s &= - 2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s - p_1 \left(\frac{\partial^3 v}{\partial p^3} \right)_s \end{aligned}$$

El volumen V_2 necesita desarrollarse únicamente respecto a $p_2 - p_1$ a segundo orden, puesto que el segundo término de la ecuación (5.63) ya contiene la pequeña diferencia $(p_2 - p_1)$, y un desarrollo respecto a $(s_2 - s_1)$ daría un término de la forma $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$, que carece de interés debido a su pequeñez. Así pues,

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2$$

Sustituyendo estos desarrollos en (5.63), obtenemos:

$$T(s_2 - s_1) - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1) \frac{(H_{t2} - H_{t1})^2}{16\pi} = 0$$

o bien:

$$T(s_2 - s_1) = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 - \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1) \frac{(H_{t2} - H_{t1})^2}{16\pi} \quad (5.65)$$

Cuando el gas atraviesa la onda de choque, su entropía sólo puede aumentar: $s_2 > s_1$. Pero $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s < 0$. de acuerdo con las desigualdades termodinámicas, mientras que la derivada $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s$ es de hecho positiva para todos los medios que se trata aquí. Por ello, (5.65) nos dice que de la condición ($s_2 > s_1$) se siguen las desigualdades $p_2 > p_1$ y por tanto $v_2 < v_1$. Así pues, como en la hidrodinámica ordinaria, una onda de choque es una onda de compresión. Este resultado, que hemos demostrado aquí para las ondas de choque débiles es también válido, al parecer, para las ondas de choque de cualquier intensidad. Se puede ver ahora que las ondas intermedias no forman ondas de choque pues no alteran la densidad.

Para las ondas de choque débiles es posible formular también determinadas proposiciones acerca de la dirección en que cambia el campo magnético. Las variaciones de las diferentes magnitudes en una pequeña perturbación del estado del gas están ligadas entre sí por las fórmulas (5.12) y (5.13) de la sección de ondas MHD de amplitud pequeña. Para las variaciones $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\delta(Ht^2) = Ht_2^2 - Ht_1^2$ se encuentra:

$$\delta(Ht^2) = \pi (u^2 - u_0^2) \delta\rho$$

Dado que $u_2 > u_0$, $u_3 > 0$ y que, según lo dicho antes, siempre es $\delta\rho > 0$, vemos que en los dos tipos de ondas de choque los sentidos de variación de Ht^2 (y por tanto, también $H^2 = Ht^2 + H_n^2$) son diferentes. En una onda de choque que se propague con velocidad $\approx u_2$, el campo magnético aumenta su intensidad:

$$\delta(Ht^2) > 0,$$

mientras que en una onda con velocidad $\approx u_3$, la intensidad disminuye:

$$\delta(Ht^2) < 0.$$

Consideremos ahora las ondas de choque en campos magnéticos débiles, es decir, admitamos que a uno y otro lado de la superficie de discontinuidad se tiene $H^2 \ll \rho u^2$. Por lo demás, ninguna otra limitación se impone a los saltos de las diferentes magnitudes: en particular, la discontinuidad del campo magnético puede ser comparable con su propio valor.

Aquí también tenemos dos posibilidades. Suponiendo que los

saltos de la densidad y la presión no son pequeños, podemos prescindir, en primera aproximación, del último término de la ecuación (5.63), como también del campo magnético en la fórmula (5.62). Con esto volvemos a las fórmulas de la hidrodinámica ordinaria. Así pues, las relaciones entre los saltos de las diferentes magnitudes termodinámicas y la velocidad de propagación de la onda serían las mismas que en las ondas de choque ordinarias. En lo que concierne a la variación del campo magnético, su valor puede obtenerse a partir de la relación (5.61). Dado que el segundo miembro de la igualdad es una cantidad pequeña de tercer orden (respecto al campo), al mismo orden debe reducirse también el primer miembro. En primera aproximación puede hacerse $[VH_t] \approx 0$, de donde

$$\frac{H_{t2}}{H_{t1}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Dado que en una onda de choque ordinaria siempre es $V_1 > V_2$, vemos que en una onda del tipo considerado se produce un aumento de la intensidad del campo magnético.

Las ecuaciones (5.61) a (5.63) permiten también otra posibilidad. La hipótesis de que el campo es pequeño es compatible con la ecuación (5.61) también en una onda en la cual $V_1 \approx V_2$, mientras que j^2 es una pequeña magnitud de segundo orden igual a

$$j^2 = \frac{H_n^2}{4\pi V} \quad (5.66)$$

donde V es el valor común a V_1 y V_2 . Ahora bien, de la ecuación (20) se sigue que, haciendo $V_1 = V_2$, con la misma aproximación debemos hacer

$$p_2 - p_1 = - \frac{(H_{t2}^2 - H_{t1}^2)}{8\pi} \quad (5.67)$$

Que la densidad no cambie significa que es posible considerar una onda de este tipo como una discontinuidad en un fluido incompresible. El vector H_t (y con él también v_t) experimenta sobre ella un salto en su valor absoluto, conservando variable la dirección, mientras que el salto de la presión (para una densidad constante) viene determinado por la discontinuidad del campo magnético de acuerdo con la fórmula (5.67). La velocidad de propagación de esta discontinuidad es

$$v_{n1} = v_{n2} = jV = H_n \sqrt{\frac{V}{4\pi}}$$

Este resultado es natural, y la necesidad de que existieran tales discontinuidades se podía haber previsto. En la sección de ondas magnetohidrodinámicas, vimos que en un fluido incompresible la velocidad de propagación de las perturbaciones pequeñas del campo magnético es única e igual a $H/\sqrt{4\pi\rho}$. En consecuencia, con la velocidad $u_1 = H_n/\sqrt{4\pi\rho}$ se desplazan las superficies del frente de las pequeñas perturbaciones, tanto aquéllas en que la variación del campo es perpendicular al plano formado por H y n , como aquéllas en las que δH se encuentra en dicho plano. A las primeras corresponden discontinuidades de rotación de pequeña intensidad, mientras que a las segundas corresponden las discontinuidades que acabamos de estudiar.

Para ver en qué sentido varía el valor absoluto del campo magnético en estas discontinuidades (ondas de choque), acudamos a la ecuación (5.63), que no hemos utilizado todavía, escribiéndola en la forma (5.65) (al deducir ésta no se supuso que el salto del campo magnético fuera pequeño comparado con su propio valor). Substituyendo la diferencia ($p_2 - p_1$) dada por (5.67), encontramos que el segundo término del segundo miembro de (5.65) es una cantidad pequeña de cuarto orden respecto del campo:

$$- \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S (p_2 - p_1) \frac{(H_{t2} - H_{t1})^2}{16\pi} = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S (H_{t2} - H_{t1})^2 \frac{(H_{t2}^2 - H_{t1}^2)}{16(\delta)\pi}$$

mientras que el primero es de sexto orden y, por tanto, puede suprimirse:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_S (p_2 - p_1)^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_S (H_{t2}^2 - H_{t1}^2) \frac{1}{8\pi} \approx 0$$

De la condición $s_2 > s_1$ se sigue inmediatamente que:

$$T(s_2 - s_1) = \frac{1}{16(\delta)\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S (H_{t2} - H_{t1})^2 (H_{t2}^2 - H_{t1}^2) > 0$$

entonces

$$H_{t2} < H_{t1},$$

es decir, el módulo del campo magnético disminuye en esta discontinuidad.

Volviendo de nuevo a las ondas de choque de intensidad arbitraria en campos magnéticos con módulos cualesquiera, consideremos dos casos particulares. Como ya mencionamos, la orientación relativa entre el campo magnético y el flujo de plasma

conduce a características distintas de los choques hidromagnéticos. Discutiremos brevemente los casos en que el campo es paralelo y perpendicular al choque.

Consideremos primero el caso en que el campo magnético es paralelo a la dirección de movimiento del fluido (y ambos perpendiculares al frente de choque). En este caso

$$H_{t1} = 0$$

Entonces la ecuación (19) toma la forma

$$\frac{H_n^2 H_{t2}}{4\pi} = j^2 V_2 H_{t2}$$

Entonces:

$$H_{t2} \left(\frac{H_n^2}{4\pi V_2} - j^2 \right) = 0.$$

Vemos por ello que, o bien $H_{t2} = 0$, o bien H_{t2} toma un valor arbitrario, mientras que

$$j^2 = \frac{H_n^2}{4\pi V_2}$$

En el primer caso el campo magnético se conserva perpendicular a la superficie de discontinuidad y no influye en absoluto en las propiedades de la onda de choque, desapareciendo por completo de todas las ecuaciones.

En el segundo caso, por el contrario, tenemos una onda de choque con variación de la dirección del campo, onda que se propaga respecto del fluido que queda tras ella con la velocidad:

$$V_{n2} = jV_2 = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

En un choque como éste, se crea una componente tangencial del campo magnético que no existía antes del choque, por lo que a estos choques se les llama de creación (switch-on). Nótese que esto ocurre cuando la velocidad del fluido después del choque es la velocidad de Alfvén (de las ondas intermedias), por lo que esta situación sólo puede darse cuando el flujo antes del choque es superalfvénico. Como esto ocurre en el sistema de referencia en el que el choque está en reposo, es equivalente a decir que el choque se propaga a la velocidad de Alfvén, respecto al fluido chocado. Es por tanto un choque rápido. Mientras más fuerte es el choque mayor debe ser el campo magnético para permitir esta solución.

Otro caso particular es el de una onda de choque paralela a la dirección del campo a ambos lados de la discontinuidad ($H_n = 0$). Cuando $H_n = 0$ se tiene solamente un tipo de ondas de choque de acuerdo con el hecho de que se anula la velocidad u_3 . A las perturbaciones asociadas a u_3 van asociadas pequeñas discontinuidades tangenciales en reposo respecto del propio fluido. En virtud de (5.69)

$$v_{t2} - v_{t1} = \frac{H_n(H_{t2} - H_{t1})}{4\pi j} = 0$$

Tenemos entonces que $v_{t1} = v_{t2}$, es decir, la componente tangencial de la velocidad se conserva. Mediante una adecuada elección del sistema de referencia es siempre posible, por consiguiente, que a uno y otro lado de la discontinuidad sea $v_t = 0$, es decir, que el fluido se mueva perpendicularmente a la superficie de discontinuidad; supondremos que así se ha procedido. Por otra parte, de la ecuación (5.61) se sigue que

$$V_2 H_2 = V_1 H_1.$$

Teniendo en cuenta esta relación, es fácil ver que las ecuaciones (5.62) y (5.63) se pueden escribir en la forma:

$$j^2 = (p_2^\circ - p_1^\circ) / (V_1 - V_2)$$

$$c_2^\circ - c_1^\circ + \frac{1}{2} (p_2^\circ + p_1^\circ) (V_2 - V_1) = 0,$$

que difiere de las ecuaciones ordinarias para las ondas de choque cuando no existe campo tan sólo en un cambio de la ecuación de estado: en vez de la ecuación verdadera $p = p(V, s)$ hay que utilizar la ecuación $p^\circ = p^\circ(V, s)$, en la cual

$$p^\circ = p + \frac{b^2}{8\pi V^2},$$

y la letra b designa el producto constante HV . Análogamente, c° debe determinarse de forma que se cumpla la relación termodinámica

$$\left(\frac{\partial c^\circ}{\partial V} \right)_s = - p^\circ$$

de donde

$$c^\circ = c + \frac{b^2}{8\pi V}.$$

No es difícil demostrar (Boyd y Sanderson, 1969) que para que este tipo de choques existan es necesario que:

$$v_1 > \sqrt{v_A^2 + c^2} \quad (5.68)$$

o sea, que para que un choque se propague perpendicularmente al campo debe tener una velocidad mayor que la magnetosónica correspondiente a este caso, lo cual corresponde a la condición de propagación supersónica en el caso hidrodinámico. Es interesante notar que si un choque de este tipo se propaga en una región donde el campo magnético aumenta, y por lo tanto también aumenta v_A , es posible que la desigualdad (5.68) ya no se satisfaga y entonces el choque degenerará en una onda magnetosónica.

La estructura de una onda de choque en un plasma (la variación de la presión, la densidad y demás) no se entiende aún muy bien, especialmente para los choques en plasmas sin colisiones. El procedimiento para el cálculo cuantitativo de la estructura del choque consiste en resolver las ecuaciones de transporte adecuadas dentro de la región del choque con un conjunto de condiciones a la frontera. Frecuentemente, los mecanismos disipativos importantes son la viscosidad, la conductividad térmica y la conductividad eléctrica. Estos términos deben introducirse en las expresiones de continuidad de momento y energía para poder tratar la situación de choque.

En la sección anterior se señaló que existen discontinuidades que poseen, a la vez, propiedades de las discontinuidades tangenciales y de las de rotación. Estas discontinuidades se encuentran también en relación análoga con las ondas de choque. Una discontinuidad en la que no varía la densidad, y el cambio en el campo magnético queda limitado al del signo de H_t , constituye la transición entre las ondas de choque y las discontinuidades rotacionales. Por otra parte, las discontinuidades en las que $v_n = 0$ y $H_n = 0$, mientras que H_t experimenta un salto arbitrario en su valor absoluto, sin que cambie su dirección, representan la transición entre las ondas de choque y las discontinuidades tangenciales.

Para terminar el análisis efectuado en los dos últimos párrafos acerca de las discontinuidades magnetohidrodinámicas, resumiremos como sigue los tipos de discontinuidad esencialmente diferentes:

1. *Discontinuidades de contacto:*

$$j = 0, \quad [v_t] = 0, \quad [V] \neq 0, \quad [p] = 0, \quad H_n \neq 0, \quad [M_t] = 0$$

2. *Discontinuidades tangenciales:*

$$j = 0, \quad [v_t] \neq 0, \quad [V] = 0, \quad [p + \frac{H_t^2}{8\pi}] = 0, \quad H_n = 0, \quad [M_t] \neq 0$$

3. *Discontinuidades rotacionales:*

$$j \neq 0, \quad [v_t] \neq 0, \quad [V] = 0, \quad [p] = 0, \quad H_n \neq 0$$

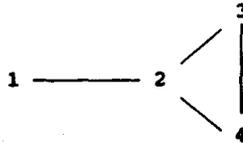
el vector M_t gira sin que varíe su valor absoluto.

4. *Ondas de Choque:*

$$j \neq 0, \quad [V] \neq 0$$

los vectores H_1 , H_2 y n son coplanares.

Entre estos cuatro tipos son posibles transiciones que se ajustan al siguiente esquema:



CAPITULO 6.

MAGNETOHIDRODINAMICA DE PLASMAS

Todo, a excepción de una parte infinitesimal del universo observable parece estar hecha de plasma, y muy probablemente todo sea magnetoplasma. Entonces, en la mayoría de los problemas en electrodinámica cósmica estamos tratando con medios eléctricamente conductores, no rígidos, extendidos hasta el infinito.

Las ecuaciones de magnetohidrodinámica deducidas en los capítulos anteriores, bajo la aproximación descrita, son llamadas ecuaciones magnetohidrodinámicas ideales.

En algunas situaciones cósmicas, la aproximación de la magnetohidrodinámica idealizada no es válida, esto es, no podemos tratar al plasma como un fluido, sino que debemos tomar en cuenta las distribuciones de velocidad de las diversas poblaciones de partículas que constituyen el plasma. Las cantidades macroscópicas son entonces determinadas por medio de la integración sobre el espacio de velocidades.

Empecemos con la cantidad f , la densidad de partículas en el espacio fase como una función de la velocidad v , y la posición r , a la cual se le llama *función de distribución*. Entonces $f(r, v, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ es el número de partículas dentro del volumen espacial $dx dy dz$ centrado en r y cuyas velocidades yacen en el intervalo $dv_x dv_y dv_z$ centrado en v . La diferencial $\frac{Df}{Dt}$ está definida como la razón de cambio de f a lo largo de la trayectoria libre de las partículas, las colisiones entre partículas han sido ignoradas en el cálculo de su trayectoria.

En un sistema conservativo, los cambios en f resultan sólo de las colisiones entre partículas, entonces, en ausencia de colisiones tenemos $\frac{Df}{Dt} = 0$.

Cuando las colisiones son significativas debemos introducir un término $J(f, f)$ el cual representa el cambio en f de una población particular debida a colisiones en el punto dado en el espacio y tiempo con partículas de otras poblaciones. Las contribuciones a J pueden resultar de encuentros físicos y por interacciones electromagnéticas a distancia. Cuando esto es tomado en cuenta tenemos $\frac{Df}{Dt} = J(f, f)$.

Si se desarrolla la diferencial obtenemos la ecuación de Boltzman:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J(f, f) \quad (6.1)$$

donde una partícula de masa m experimenta una fuerza total \mathbf{F} , incluyendo una fuerza electromagnética y gravitacional. En caso de que el plasma sea lo suficientemente caliente y tenue, de tal forma que las colisiones puedan ser despreciadas, obtenemos la ecuación de Boltzmann sin colisiones o de Vlasov, en donde el lado derecho de la ecuación es cero; esta ecuación, combinada con las ecuaciones de Maxwell se convierten en el conjunto de ecuaciones de Vlasov-Maxwell.

La solución a la ecuación (6.1) generalmente es complicada, y aquí únicamente se indicará el método usado para derivar las ecuaciones macroscópicas. Primero que nada, la densidad macroscópica de partículas $n(\mathbf{r}, t)$ viene dada por la integral de la función de distribución en el espacio de velocidades:

$$n(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}_x d\mathbf{v}_y d\mathbf{v}_z \quad (6.2)$$

Otras cantidades macroscópicas $Q(\mathbf{r}, t)$, tales como la densidad de masa, de momento o de corriente, se obtienen a partir de la ecuación:

$$Q(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} q(\mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}_x d\mathbf{v}_y d\mathbf{v}_z \quad (6.3)$$

donde $q(\mathbf{v})$ es la función apropiada. Las cantidades que sean promediadas para todas las partículas de una población se encuentran dividiendo la integral por n . Entonces, si tomamos $q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ encontraremos la velocidad macroscópica

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}_x d\mathbf{v}_y d\mathbf{v}_z \quad (6.4)$$

Se pueden obtener relaciones entre las cantidades macroscópicas multiplicando la ecuación (6.1) por $q(\mathbf{v}) d\mathbf{v}_x d\mathbf{v}_y d\mathbf{v}_z$ e integrando sobre todas las \mathbf{v} . Si $q = m$, esto conduce a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6.5)$$

La ecuación de transferencia de momento se puede obtener

poniendo $q = mv$. La fuerza total sobre una partícula se toma como:

$$F = e \left(E + \frac{v}{c} \times B \right) - m\nabla\phi \quad (6.6)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional. La ecuación macroscópica resulta ser:

$$nm \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = ne \left(E + \frac{v}{c} \times B \right) - \nabla \cdot [\Psi] - nm\nabla\phi + P \quad (6.7)$$

donde $[\Psi]$ es el tensor de esfuerzos magnetohidrodinámico y P es la razón neta de ganancia en el momento debida a colisiones del conjunto de partículas de carga e y masa m . Una ecuación de este tipo se requiere para cada tipo de partícula. El tensor de esfuerzos está definido en términos de la velocidad media V de el grupo y la velocidad aleatoria v de las partículas individuales, de tal forma:

$$V = \frac{1}{n} \sum v \quad [\Psi] = m \sum (v - V)(v - V) \quad (6.8)$$

donde en cada caso la sumatoria es sobre la unidad de volumen. En general, el tensor de esfuerzo introduce complejidades tales que las ecuaciones macroscópicas se vuelven inestables. En algunos casos son necesarias ciertas simplificaciones, pero éstas no tienen que ser tan restrictivas como las de las ecuaciones idealizadas. Los procedimientos para relajar estas restricciones son:

(1) Que la trayectoria libre media para colisiones sea pequeña comparada con las distancias en las cuales la presión, la velocidad y otras cantidades macroscópicas cambian de forma significativa. Nuevamente se presenta la situación familiar de la dinámica de fluidos, donde la distribución de velocidades es casi isotrópica y Maxwelliana, pero los parámetros de transporte y en particular la conductividad eléctrica son anisotrópicas. Esto significa que la relación entre el campo eléctrico y la densidad de corriente ya no están dadas por la ley de Ohm, sino por una ecuación mucho más complicada.

(2) Algunos problemas se pueden resolver para condiciones menos restrictivas cuando la trayectoria libre media de las partículas es grande e incluso infinita. Un requerimiento es que el campo magnético sea lo suficientemente intenso para que el radio

ciclotrónico sea corto comparado con la distancia en la cual todas las cantidades macroscópicas cambien apreciablemente. De esta forma un grupo de partículas moviéndose aleatoriamente se convierte en un medio en el cual los movimientos están relacionados. Sin embargo, dado que el campo magnético no tiene control del movimiento de las partículas a lo largo de las líneas de campo, hay una segunda restricción, que es que tales problemas deben ser bidimensionales, sin gradientes a lo largo de las líneas de campo.

Si se dan estas condiciones, el tensor de esfuerzos $[\Psi]$ puede ser reemplazado por la presión escalar p , es decir, $\nabla \cdot [\Psi] = \nabla p$.

En física de plasmas, generalmente se trabaja con tres tipos distintos de partículas (electrones, iones y partículas neutras). Como ya se ha mencionado, debemos usar tres funciones de distribución distintas (f^- para electrones, f^+ para iones, y f^0 para partículas neutras). Este tipo de aproximación se conoce como descripción de tres componentes. Si el plasma está completamente ionizado, la aproximación de dos componentes es apropiada.

A manera de ejemplo, considérese un gas binario con un número igual de electrones e iones de masa m y M y carga ze . Tenemos dos ecuaciones de momento, las cuales al adoptar la simplificación anterior conducen a:

$$nM \frac{dV_1}{dt} = ne \left(E + \frac{V_1}{c} \times B \right) - \nabla p_1 - nM \nabla \phi + P_1 \quad (6.9)$$

$$nm \frac{dV_0}{dt} = -ne \left(E + \frac{V_0}{c} \times B \right) - \nabla p_0 - nm \nabla \phi + P_0 \quad (6.10)$$

La velocidad V del plasma y la densidad de corriente j , están dadas por:

$$V = \frac{n}{\rho} (MV_1 + mV_0)$$

$$j = en (V_1 - V_0)$$

Si sumamos las ecuaciones (9) y (10), obtenemos:

$$\rho \frac{dV}{dt} = j \times B \frac{1}{c} - \nabla p - \rho \nabla \phi \quad (6.11)$$

Restando (6.10) de (6.9) y multiplicando por e/m se obtiene:

$$E + \frac{V}{c} \times B - \frac{j}{\sigma_0} + \frac{1}{ep} \left\{ MV_0 - mV_1 - (M-m) \nabla \phi - (M-m) j \times B \frac{1}{c} \right\} = 0 \quad (6.12)$$

donde el término en dj/dt ha sido omitido y el término de resistividad eléctrica está dado por $P = \sigma_0 e n j$. Esta relación

(6.12) entre el campo electrico y la corriente, es llamada algunas veces ley de Ohm generalizada. Cuando ∇p_i , ∇p_e , $\nabla \phi$ y \mathbf{B} son cero se reduce a la ley de Ohm con σ_0 igual a la conductividad.

CAPITULO 7. APLICACIONES

En el presente capítulo se describe de manera intuitiva diversas aplicaciones en el Cosmos de la física anteriormente descrita. Las primeras tres secciones tratan básicamente de fenómenos magnetohidrodinámicos, tales como las inestabilidades, la generación de campos magnéticos, y la interacción del viento solar con la magnetosfera terrestre. Posteriormente se mencionan algunos mecanismos de radiación en relación a sus fuentes en el cosmos.

a) Problemas Magnetohidrostáticos.

Antes de discutir problemas en magnetohidrodinámica es instructivo considerar algunos problemas más simples en los cuales el plasma está en reposo o moviéndose uniformemente. La ecuación de movimiento se reduce a:

$$\nabla p - \rho g = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (7.1)$$

donde $\rho g = \mathbf{F}$ es la densidad de fuerzas gravitacionales y la viscosidad no es considerada. En estos problemas las fuerzas electromagnéticas están balanceadas por fuerzas hidrostáticas y los casos donde el plasma es estacionario son llamados problemas magnetohidrostáticos. Una clase importante de estos problemas es aquella de la estabilidad de configuraciones magnetohidrostáticas, un requerimiento para la confinación de un plasma. Otra clase importante es aquella llamada de campos libres de fuerza, en los cuales las fuerzas electromagnéticas se balancean y las fuerzas hidrostáticas son cero.

Un ejemplo simple de balance magnetohidrostático es encontrado en las manchas solares, las cuales están 10^3 K más frías que la fotosfera que las rodea. Estando más frías, éstas deben ser más densas y deberían hundirse en cuestión de minutos, pero persisten por semanas. La respuesta, como fue sugerida por Alfvén, está en términos de la presión magnética $B^2/8\pi$ ejercida lateralmente como se muestra en la figura 7.1. La presión no magnética, p , en el cilindro magnético debe ser menor por esta cantidad a la presión exterior al cilindro en el mismo nivel. Dado que B es

independiente de la altura z (a lo largo de la parte cilíndrica del campo), $\frac{\partial p}{\partial z}$ es la misma dentro y fuera del cilindro. También, dado que $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, lo mismo es cierto para la densidad y dado que $T \propto p/\rho$, la temperatura como la presión, debe ser menor dentro del cilindro que afuera.

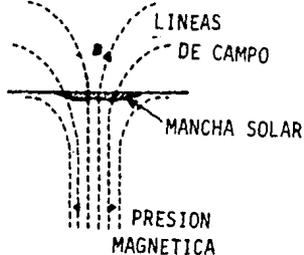


fig. 7.1

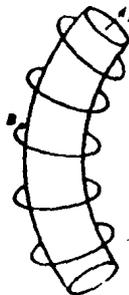


fig 7.2

Se ha encontrado que campos de 1,000 gauss o más deben tener efectos de enfriamiento substanciales y que cerca de la fotosfera son demasiado intensos para ser contenidos en un cilindro y explotan hacia afuera como se muestra. A una profundidad de unos pocos miles de kilómetros, sin embargo, la presión del gas excede a la magnética por factores de alrededor de 1,000 y el efecto de enfriamiento es muy pequeño. De esta forma, la mancha solar es esencialmente un problema de enfriamiento superficial.

El equilibrio magnetohidrostático puede ser clasificado como estable o inestable, dependiendo de como responda a pequeñas perturbaciones. Si cualquier pequeña perturbación induce fuerzas restaurativas que llevan al sistema de regreso al equilibrio, el sistema es estable. Si, por otra parte, existe al menos una perturbación tal que el sistema, es llevado cada vez mas y mas de su configuración de equilibrio por las fuerzas provocadas por la perturbación, el sistema es inestable.

La mayor parte del estudio en estabilidades magnetohidrodinámicas se hace en relación a artefactos termonucleares, cuyo desarrollo ha sido una lucha continua contra

las inestabilidades. Algunas de estas inestabilidades ocurren en situaciones cósmicas:

1.- La inestabilidad de torcedura se da cuando un plasma que lleva una línea de corriente j es ligeramente doblado (figura 7.2). Las líneas de fuerza se amontonan en el lado cóncavo y se separan en el lado convexo. De esta forma el campo incrementado en el lado cóncavo ejerce una mayor presión, produciendo un doblamiento aún mayor.

2.- La inestabilidad de intercambio, vista desde el punto de vista energético, depende del hecho de que las líneas de campo magnético paralelas pueden moverse libremente pasando de una a la otra llevando sus partículas de plasma y sin cambiar de forma. El plasma con un campo débil cambia de lugar con el plasma con un campo fuerte y puede reducir la energía total del sistema; si es así, entonces hay energía disponible para llevar a cabo los movimientos de intercambio. Esto está relacionado con el fenómeno de convección magnetosférico cerca de la Tierra y de Júpiter. Existe una amplia variedad de inestabilidades de intercambio, tales como la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, etc.

3.- Otras inestabilidades son la inestabilidad de salchicha y la inestabilidad de espejo. Supóngase que un decrecimiento local del radio ocurre en el tubo de corriente de la figura 7.2. Las líneas de fuerza en la constricción se amontonan y el campo se vuelve más intenso y es capaz de reducir el radio aún más. Esta es la inestabilidad de salchicha (que es un caso particular de la inestabilidad de intercambio) y en casos extremos los aros magnéticos pueden reducirse a puntos y detener el flujo de corriente. Inestabilidades anisotrópicas ocurren cuando la presión del plasma p_{\perp} perpendicular a las líneas de campo es muy grande (inestabilidad de espejo) o muy pequeña (inestabilidad firehouse) comparada con la presión p_{\parallel} a lo largo de las líneas.

En general, hay una tendencia a la estabilidad hidromagnética cuando la curvatura de las líneas de fuerza magnética es hacia regiones de menor densidad de plasma, o cuando el plasma es cóncavo al campo magnético. La estabilidad se incrementa también haciendo que la configuración del campo sea tan libre de fuerzas

como sea posible: los esfuerzos magnéticos tienden a balancear y así a remover algunas formas de inestabilidad.

Un caso especial de la ecuación magnetohidrodinámica (7.1) ocurre cuando la fuerza neta hidrostática es cero y así el campo magnético es libre de fuerzas (force-free). Esto debe ocurrir en un no conductor donde $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, pero también puede ocurrir en flujos de corriente, cuando éstos fluyen a lo largo de las líneas de campo de tal forma que:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \quad (7.2)$$

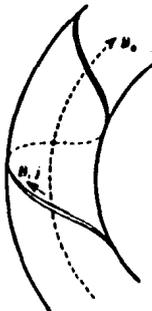


fig 7.3

donde α es una función escalar de la posición (figura 7.3). Tales campos son probablemente importantes en la naturaleza porque cuando el campo es lo suficientemente intenso para aplastar el plasma las tensiones maxwellianas deben balancearse unas a las otras de acuerdo a las ecuaciones (7.2). Sin embargo, ninguna configuración de campo puede ser enteramente force-free pues esto requiere una extensión infinita y una energía magnética infinita. Debe haber entonces una frontera donde fuerzas mecánicas restrinjan el campo; en el caso de campos en manchas solares estas fuerzas mecánicas están aplicadas abajo de la fotosfera, donde la presión hidrostática excede por mucho a la presión magnética.

Mayor información acerca de este tipo de problemas, puede ser encontrado en Babcock (1963).

b) Fenómenos Electrodinámicos Generales en el Cosmos.

Existen diversos fenómenos electrodinámicos relacionados con varios escenarios en el cosmos: el medio terrestre, el Sol y el sistema solar, estrellas y el medio interestelar, y galaxias y el medio intergaláctico. Algunos de estos fenómenos ocurren en diferentes partes del Universo a diferentes escalas y es conveniente estudiarlos primero en una forma general, en vez de en relación a las regiones donde se producen. Esto se aplica particularmente a efectos cuyos mecanismos aún no están bien entendidos, tales como la fusión y aniquilación de campos magnéticos en superficies neutras. Es ciertamente seguro que este fenómeno es importante en conexión con ráfagas solares, el crecimiento y decaimiento de la cola geomagnética, y así sucesivamente, pero aún no está bien entendido. Es preferible, por tanto, discutir posibles mecanismos básicos antes de considerarlos en relación a su escenario en el cosmos. Por otra parte, algunos fenómenos están bastante bien entendidos y es mejor discutirlos en relación al escenario donde se producen.

Claros ejemplos de este último tipo de efectos son las diversas inestabilidades magnetohidrodinámicas. Estas han sido mencionadas brevemente en la sección anterior. Un ejemplo simple de una configuración inestable es considerar a un fluido superpuesto sobre otro fluido de menor densidad, los dos fluidos están separados por una frontera horizontal, y la gravedad es perpendicular a esta superficie. Una perturbación en la frontera crece en amplitud. Esta es la llamada inestabilidad de Taylor. La razón física de esto es, que una mayor cantidad de energía potencial es liberada por el desplazamiento del fluido pesado hacia abajo, que la que es absorbida al desplazar al fluido ligero hacia arriba. Si existe una tensión superficial en la interfase, ésta tiene un efecto estabilizador, particularmente para perturbaciones pequeñas, debido a que esto corresponde a un aumento de la energía superficial. Como consecuencia, oscilaciones provocadas por la perturbación con longitudes de onda menor que un valor λ_c son estabilizadas. Ahora podríamos preguntarnos acerca del efecto de un campo magnético homogéneo B . Si el campo es

paralelo a la interfase, este no tiene efecto sobre las oscilaciones que se muevan uniformemente a lo largo de B , dado que dichas perturbaciones no perturban al campo magnético (suponemos que los fluidos son incompresibles). Por otra parte, oscilaciones que se extiendan uniformemente en una dirección perpendicular al campo magnético causan una curvatura en las líneas de campo, y si el fluido es conductor, la tensión a lo largo de las líneas de campo magnético se opondrán a la deformación. Un análisis detallado muestra que para este tipo de deformación, el campo magnético tiene un efecto estabilizador equivalente a una tensión superficial. Finalmente, un campo magnético perpendicular a la interfase, tiene influencia en el ritmo de crecimiento de la perturbación pero no logra estabilizar al sistema. Esta versión magnetohidrodinámica de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor recibe el nombre de inestabilidad de Parker. Esta inestabilidad se encuentra en los campos magnéticos solares, supernovas y cerca de la superficie de discos galácticos.

Un fluido conductor podría estar soportado en contra de la gravitación por un campo magnético. En este caso, la fuerza de soporte es debida a corrientes en la frontera que interactúan con el campo magnético. La frontera es nuevamente inestable. Esta inestabilidad es generalmente conocida como la inestabilidad de Kruskal-Schwarzschild, y es análoga a la inestabilidad de Taylor.

El más importante de los fenómenos electrodinámicos cósmicos es la creación de flujo magnético o inducción y de energía magnética. Parece ser que el universo se encuentra completamente permeado por campos magnéticos, extendiéndose desde el campo terrestre hasta campos en el espacio intergaláctico. Dado que todos los fenómenos dependen de campos magnéticos, todos los otros fenómenos cósmicos electrodinámicos son secundarios a los campos magnéticos. Un problema cercanamente relacionado, y que debe ser estudiado dentro del mismo contexto, es el mantenimiento de campos magnéticos en un estado estacionario por períodos mucho mayores que los dados por el decaimiento natural por disipación ohmica. Un tercer problema es el origen de un campo magnético "fósil" del cual todos los otros campos se desarrollaron.

Se han llevado a cabo muchos intentos para explicar los campos

cósmicos como una propiedad fundamental de cuerpos masivos en rotación y como un resultado de corrientes termoeléctricas, pero estas teorías no han tenido éxito. Hoy en día, es generalmente aceptado que los campos de los planetas, estrellas y galaxias se originaron de campos "fósiles", desarrollados y mantenidos por "dínamos". La teoría de la magnetización fósil nos dice que los campos actuales de un cuerpo son la reliquia del campo con el cual nació. El tiempo de decaimiento libre de un campo magnético está dado por la ecuación:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \nabla^2 B \quad t \approx 4\pi\sigma L^2$$

y en el caso de la Tierra este tiempo es de alrededor de 10^4 años, por lo que se requiere un mecanismo para su mantenimiento. En el caso del Sol y estrellas magnéticas, este tiempo es del orden de 10^{10} años, el cual es comparable o mayor que la edad de las estrellas, por lo que el problema de su mantenimiento es dejado aparte. Sin embargo, es reemplazado por otro problema, en el cual la configuración de los campos no es fácilmente explicada en términos de campos fósiles, a menos que éstos sean alterados, por algún proceso de dínamo. La misma consideración se aplica a campos magnéticos galácticos, incluyendo a los de radio galaxias.

Aún así, hay un gran problema con los campos galácticos, puesto que no hay evidencia directa de un campo magnético universal. Sin embargo, un fuerte argumento a su favor es la aparente imposibilidad de explicar campos galácticos en alguna otra forma.

Si aceptamos la existencia de un campo intergaláctico, entonces, el problema del origen del campo "primigeneo" es eliminado pero no resuelto. Una fuente de energía que vale la pena considerar es aquella que involucra procesos nucleares, tales como el decaimiento de isótopos inestables. Un requerimiento es el alineamiento de los ejes de espín de muchas partículas, el caso de la no conservación de la paridad podría asegurar una corriente eléctrica macroscópica llevada por los electrones emitidos en una dirección preferencial.

Una vez que se tiene un campo primigeneo, no importa cuán débil sea, éste puede generar un campo más intenso por un proceso de amplificación, el cual está basado en el hecho de que el movimiento de material a través de las líneas de fuerza en un

campo existente genera corrientes. Estas pueden tener una configuración tal que amplifiquen el campo original y continuamente cambien su topología.

Para explicar el concepto de amplificación magnética comencemos con la ley generalizada de Ohm y multipliquemos ambos lados por j , tendremos así:

$$E \cdot j + \frac{1}{ne} \nabla p_e \cdot j = \frac{j^2}{\sigma_0} + V \cdot (j \times B) \quad (7.3)$$

donde se han despreciado términos del orden m/M y la fuerza gravitacional. En el miembro izquierdo está el trabajo hecho por el campo eléctrico y el del gradiente de la presión electrónica que sostiene la corriente. En el miembro derecho está la disipación de energía debida a colisiones y un término que es el producto de la fuerza de Lorentz $j \times B$ con la velocidad de masa V . Cuando $V \cdot (j \times B) > 0$, hay un trabajo realizado por el campo sobre el plasma, acelerándolo, o moviéndolo en contra de gradientes de presión; entonces la energía del campo magnético decrece. Cuando $V \cdot (j \times B) < 0$, las fuerzas no magnéticas conducen al plasma en contra de la resistencia magnética y se incrementa la energía del campo magnético. Esto se llama *amplificación magnética* y, en configuraciones más complejas, *dinamo auto-excitado*. Un criterio para amplificación, es que el término del dinamo sea numéricamente mayor que el término de pérdida de Joule, es decir,

$$o\left\{ \frac{j^2}{\sigma} \right\} < o\left\{ V \cdot (j \times B) \right\}$$

si tomamos $j = Bc/4\pi L$, donde L es la longitud característica, tenemos:

$$4\pi\sigma_0 VL > c$$

El problema de amplificación magnética es relativamente simple y se estudia en relación con galaxias, donde es un fenómeno importante. El problema de los dinamos cósmicos se ha dirigido a explicar el campo magnético terrestre. Un análisis más detallado de la Teoría de Dinamos puede ser encontrada en Cowling (1981).

Tal vez el segundo en importancia a los mecanismos de amplificación magnética son los mecanismos de *aniquilación de campo*. Cuando dos hojas de plasma con campos en dirección opuesta

se ponen en contacto, las líneas de campo se reconectan y convierten su energía a energía cinética de las partículas; ha sido este efecto en particular el que ha atraído la atención para el estudio de este fenómeno. El fenómeno ha sido de interés, principalmente en conexión con ráfagas solares y la dificultad ha sido explicar la conversión de una gran cantidad de energía magnética (mayor a 10^{32} ergs) en tiempos de alrededor 10^3 s. Un mecanismo para la aceleración de algunas partículas de plasma a energías de rayos cósmicos se trabaja también en la teoría de hojas neutras. Este efecto es de suma importancia no sólo en el sistema solar, sino también en determinadas configuraciones magnéticas en galaxias.

Otro fenómeno muy común y de gran importancia es el movimiento de intercambio magnético, en el cual un tubo de fuerza magnética con su plasma cambia de lugar con otro tubo, mas o menos paralelo al primero. En el laboratorio tales movimientos ocurren como la inestabilidad de intercambio y fenómenos similares ocurren en la naturaleza, posiblemente en la magnetósfera terrestre. Existen, sin embargo, otras formas de movimientos de intercambio, las cuales no son resultado de inestabilidades, sino que se llevan a cabo por fuerzas de origen externo aplicadas a lo largo de la frontera o a lo largo del tubo de fuerza magnética. Uno de éstos son los movimientos de intercambio en la magnetósfera llevados a cabo por la interacción friccional con el viento solar.

c) *Aplicación al Viento Solar y la Magnetosfera Terrestre.*

La fotosfera del Sol está a una temperatura de unos 10^3 K como es evidente de las líneas de absorción observadas en el espectro solar. Sin embargo, fuera de las capas superficiales del Sol, se ha observado que hay un gas a alta temperatura: la corona solar. Las líneas en el espectro son de una gran excitación. Estas son llamadas líneas coronales y provienen de iones tales como Fe XIII, Fe XIV, etc. e indican temperaturas del orden de 10^6 K. El mecanismo de calentamiento de la corona es probablemente el transporte de energía por ondas de choque u ondas hidromagnéticas desde las capas superficiales del Sol.

La situación física conduce a una de las predicciones más importantes del pasado reciente. Parker escribió las ecuaciones hidrodinámicas para un plasma caliente en el campo gravitacional del Sol y demostró que debe existir un flujo de material proveniente del Sol, el cual fue llamado viento solar. Aquí no se demostrara esto, pero el lector puede consultar el libro de Parker. Es interesante que se trata del mismo conjunto de ecuaciones básicas que describen los vientos estelares de tipo solar y los flujos de acreción esféricamente simétricos.

La predicción de Parker fue hecha en 1958. En 1959, uno de los primeros satélites científicos soviéticos, el Lunik II, midió un flujo de partículas que emanaba del Sol, y en 1962 la sonda estadounidense, Mariner 2, midió continuamente la densidad de partículas, velocidad e intensidad del campo magnético en su camino a Venus. En las vecindades de la Tierra, el viento solar está caracterizado por las cantidades dadas en la Tabla 1, cuando hay poca actividad solar.

Velocidad de las partículas	300 Km/s
Concentración de partículas	5 cm^{-3}
Energía de los protones	500 eV
Densidad de energía de los protones	$4 \times 10^{-9} \text{ erg cm}^{-3}$
Temperatura	10^6 K

Tabla 1. *Parametros Tipicos del Viento Solar.*

Estas son cantidades promediadas y hay una variación considerable durante periodos de actividad solar. La intensidad media del campo magnético en el viento solar es de aproximadamente 5×10^{-5} Gauss (5×10^{-9} T). La densidad de energía correspondiente en el campo magnético del viento solar es:

$$U_{\text{mag}} = \frac{B^2}{8\pi} = 10^{-10} \text{ erg cm}^{-3}$$

entonces es claro que la mayor parte de la energía del viento solar es transportada por la energía cinética de los protones.

Lo que deseamos es construir un modelo para el viento solar y su campo magnético asociado en el medio interplanetario.

El tiempo de colisión para un protón en un plasma totalmente ionizado esta dado por la fórmula:

$$t_c = \frac{11.4 T^{3/2} A^{1/2}}{N Z^4 \ln(\Lambda)}$$

donde T es la temperatura en grados Kelvin, N el número de partículas por cm^3 y A es el número de masa para las partículas. Esta fórmula fue presentada al final del capítulo 6. Para el viento solar tomamos $T = 10^6 \text{K}$, $A = 1$, $N = 5 \text{ cm}^{-3}$, $Z = 1$, y $\ln(\Lambda) = 28$ (de acuerdo a Spitzer, 1962). Entonces se encuentra que $\lambda = v t_c = 3 \times 10^{13} \text{ m}$. Esta debe ser comparada con la distancia de la Tierra al Sol, $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. Esta distancia es conocida como una unidad astronómica. De esta forma, vemos que para los protones, los cuales llevan casi todo el momento del viento solar, el camino libre medio para colisiones electrostáticas es mucho mayor que la distancia Tierra-Sol y, entonces, para los propósitos de describir la dinámica de las partículas del viento solar intermezcladas y campos magnéticos, podemos considerar el plasma con conductividad infinita y sin colisiones. Vemos que además, el tiempo de recorrido medio es pequeño comparado con el asociado a la frecuencia de Larmor de los protones, $\frac{eH}{mC}$, el cual tiene un valor de $\tau = 6.375 \times 10^8 \text{ s}$. Por lo tanto, podemos utilizar los resultados de la magnetohidrodinámica idealizada.

Una propiedad distintiva de muchos de los plasmas con los que cabe tratar en astrofísica es que tienen conductividades muy altas o, puesto de otra forma, que las partículas tienen caminos libres medios muy grandes. Tal es el caso del viento solar. Como hemos

visto, en el límite de conductividad infinita el campo magnético se comporta como si las líneas de campo estuvieran congeladas en el plasma.

Ahora, apliquemos este importante resultado a la dinámica del viento solar. El plasma y el campo magnético están fuertemente unidos y, entonces, la dinámica dependerá de cuál de ellos tenga la mayor densidad de energía (o masa). Vemos que lejos de la superficie del Sol la energía cinética de los protones es mucho mayor que la del campo magnético y, entonces, el campo magnético es arrastrado por las partículas.

El Sol tiene un período de rotación sobre su eje de 26 días y el viento solar es emitido con una velocidad radial más o menos constante del orden de 300 - 500 km/s. Entonces, con respecto al punto en el Sol donde fue emitido, la línea de campo trazará una espiral arquimedeaniana. Las partículas mismas se mueven más o menos en forma radial hacia el exterior. Esto es ilustrado esquemáticamente en la figura 7.4, la cual muestra la dinámica de las partículas eyectadas a velocidad radial constante desde el Sol conforme éste realiza casi una rotación. Esto es lo que observan los magnetómetros a bordo de plataformas espaciales. De hecho, se ha encontrado que existe un sector en el cual el sentido del campo magnético radial cambia de orientación. Hasta donde sabemos, el viento solar sale como es mostrado en la figura 7.5. Un estudio detallado de la estructura espiral del campo magnético puede ser encontrada en Wentzel (1963).

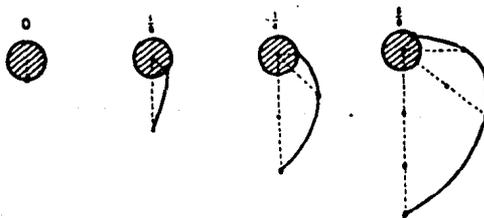


Fig. 7.4

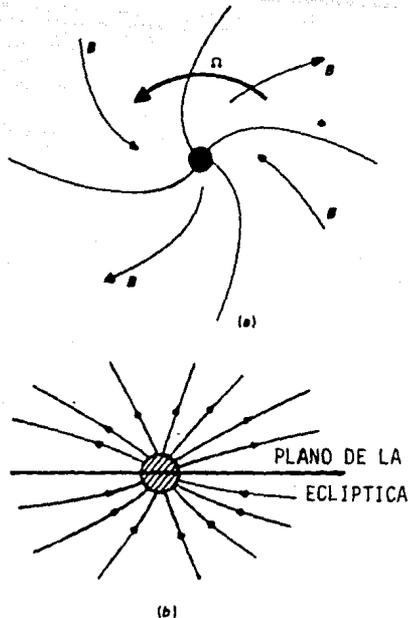


fig. 7.5

Este flujo de material claramente modifica la estructura del campo magnético terrestre y, de estudios por satélites, la forma del dipolo magnético distorsionado ha sido determinada con cierto detalle. La figura 7.6 muestra el fenómeno revelado por estos estudios. El campo magnético terrestre es dipolar sólo a distancias relativamente cercanas a la superficie terrestre.

El viento solar es altamente supersónico y cuando encuentra al campo magnético de la Tierra, se forma un frente de choque y se presenta el característico comportamiento de resistencia que uno ve en el frente de objetos abruptos cuando ellos se mueven supersónicamente. El sistema completo dentro del choque es la llamada magnetósfera, la cual está dentro de la magnetopausa que

está detrás de la onda de choque, estos y los nombres de varias otras regiones están etiquetados en el diagrama. La estructura ha sido bastante bien delineada por observaciones espaciales de densidad y velocidades de partículas, y de la estructura del campo magnético.

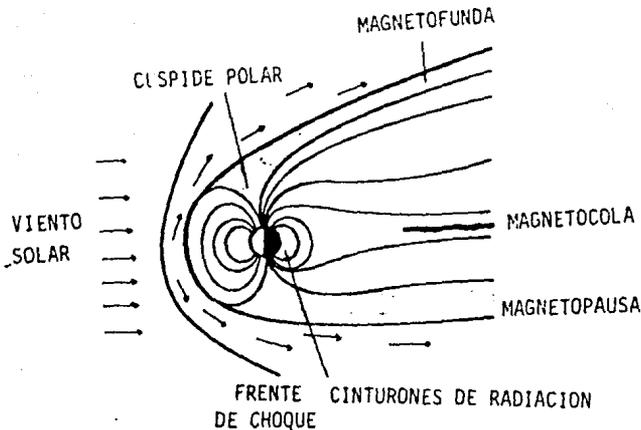


fig. 7.6

Algo interesante que cabe hacer notar, es que hay evidencia definitiva de un frente de choque y nosotros hemos mostrado que es un plasma sin colisiones. Sabemos que los choques ocurren solamente cuando es posible transmitir momento y energía sobre una corta distancia a material moviéndose mas lentamente. En fluidos ordinarios esto es mediado por medio de la viscosidad molecular, es decir, a través de colisiones. La pregunta que surge es: ¿cómo puede haber un choque magnetosférico?. La respuesta es que éste es uno de los mejores ejemplos conocidos de los llamados *choques sin colisiones*, es decir, la viscosidad en el plasma magnetizado viene dada via el campo magnético. Comúnmente hablando, hay una longitud de colisión efectiva del orden del radio de giro del protón. El transporte de energía a través del choque puede ser dada por los diversos tipos de ondas magnetosónicas de plasma.

d) *Procesos Radiativos en Astrofísica.*

Las teorías de radiación han tenido una amplia gama de aplicaciones en astrofísica. Esto puede ser atribuido a dos circunstancias que fueron descubiertas en los años 50's y 60's. En primer lugar, se ha encontrado que partículas relativistas, en particular electrones, están presentes en diversas condiciones cósmicas. En segundo lugar, se estableció la existencia de campos magnéticos en el espacio. La presencia de electrones relativistas y campos magnéticos es una condición necesaria y prácticamente suficiente para la producción de radiación sincrotrónica. El principal uso de las teorías de radiación es el de obtener conclusiones acerca de los electrones relativistas y los campos magnéticos en las fuentes de radiación, por medio de mediciones en la intensidad, distribución espectral y polarización de la radiación. Otra aplicación es el análisis de los cambios en la intensidad de radiación de la fuente, y de reabsorción, depolarización, y rotación del plano de polarización de la radiación con el objeto de determinar ciertos parámetros (por ejemplo, la concentración electrónica) que caracterizan a la fuente, así como el medio encontrado a lo largo de la trayectoria desde la fuente a la Tierra. Así pues, de estas teorías se pueden interpretar observaciones para obtener información importante acerca de la naturaleza física de las fuentes, incluyendo su temperatura, ionización, constitución, densidad, campo magnético, etc.

En la región óptica, la radiación electromagnética cósmica proviene principalmente de transiciones entre estados ligados (bound-bound) entre estados atómicos o moleculares discretos, transiciones de absorción o emisión (free-bound) durante recombinación, y transiciones libres (free-free) en el continuo. Algunas componentes de las emisiones cósmicas en radio son generadas de manera análoga. La línea de emisión del hidrógeno a 21 cm, la emisión del OH y un gran número de otras líneas resultan de transiciones bound-bound, mientras que la emisión térmica en radio que proviene del gas de la corona solar y del medio interestelar se debe a transiciones free-free o bremsstrahlung. En adición a esto hay otros mecanismos los cuales son responsables de

la mayor parte de las radioemisiones cósmicas. Uno podría preguntarse por qué las emisiones de radio son tan favorecidas.

En el vacío una partícula cargada radía sólo si está acelerada y, despreciando efectos relativistas, la potencia radiada es proporcional a e^2v^2 , donde v es la aceleración y e la carga de la partícula. El punto importante es que la emisión es proporcional al cuadrado de la carga y ésta es independiente de efectos relativistas. Una segunda relación importante resulta del hecho de que una onda de frecuencia f se produce principalmente de aceleraciones que varían apreciablemente en un tiempo $1/f$. En este tiempo un electrón, por ejemplo, se mueve una distancia v/f y entonces la emisión se produce por aceleraciones que varían en movimientos una distancia v/f . Estas dos relaciones y el hecho de que f es mucho menor para las ondas de radio que para luz visible contestan la pregunta de arriba en la siguiente forma.

En primer lugar, la escala de la distancia, o longitud de onda, $\lambda = v/f$ es aproximadamente 10^5 veces más grande para radio ondas, y esto permite a un electrón individual ser acelerado efectivamente por campos, los cuales originan emisiones de radio pero no en el visible. Uno de estos campos es el magnético cósmico, el cual permite la emisión ciclotrónica para electrones no relativistas y emisión sincrotrónica para electrones relativistas. Debe mencionarse que la radiación sincrotrónica visible es posible, y de hecho es observada en unas cuantas regiones, más notablemente en la Nebulosa del Cangrejo. Sin embargo, la energía del electrón que se requiere es muy grande, típicamente unos 10^{12} eV o más, y este fenómeno no es común. Otro tipo de campo que es capaz de originar radio, pero no visible, es el campo eléctrico a gran escala debido a nubes de electrones.

En segundo lugar, el electrón cuya radiación hemos estado considerando puede ser reemplazado por un paquete de electrones, los cuales han sido acelerados al unísono en cualesquiera de los campos antes mencionados. Esto es posible debido a las grandes dimensiones permisibles del paquete y no es aplicable a emisiones en el visible. Una nube de n electrones de dimensiones menores que v/f y moviéndose al unísono, radiaran n^2 veces la potencia de un solo electrón y entonces cada electrón radía n veces la potencia

que podría radiar solo. Esta emisión estimulada ocurre cualquiera que sea el mecanismo de aceleración y surge la interesante posibilidad de emisión sincrotrónica estimulada. El tamaño del paquete de electrones debe ser considerablemente menor que el radio de giro, debido a que cada electrón emite sólo en un cono estrecho.

La interpretación de las emisiones de radio cósmicas requiere de un buen entendimiento de los procesos no sólo de emisión, sino también de absorción, refracción y polarización. El primero de éstos es simplemente lo contrario a los procesos de emisión térmica, ciclotrónica o sincrotrónica. Esto impone un límite a la temperatura de brillo, es decir, la temperatura de un cuerpo negro que dé la misma emisión, igual a la energía térmica o temperatura de los electrones radiativos. Este no es el caso de la emisión estimulada por un paquete de partículas, donde la energía de todo el paquete debe ser considerada.

El entendimiento de la refracción es ayudado por el concepto de índice de refracción o la razón de las longitudes de onda en el espacio libre y en el medio en consideración. En ausencia de efectos relativistas, el índice de refracción de una onda electromagnética en un plasma depende esencialmente de la frecuencia del plasma f_0 y la frecuencia ciclotrónica f_B , las cuales están dadas por:

$$f_0^2 = \frac{4\pi N e^2}{m_e} \quad f_B = \frac{eB}{mc} \quad (7.4)$$

donde N , e , m son para el electrón, su densidad numérica, carga y masa. Para propagaciones cuasi-longitudinales (más o menos a lo largo de el campo magnético), el índice de refracción está dado por:

$$u^2 = 1 - f_0^2(f^2 \pm f f_B) \quad (7.5)$$

revelando dos ondas, una ordinaria (O) para el signo positivo y una extraordinaria (E) para el signo negativo. En el caso de una onda O, el índice de refracción es real cuando $f^2 + f f_B > f_0^2$, pero se convierte en imaginario a bajas frecuencias. En el caso de una onda extraordinaria el comportamiento es más complejo, pero es fácil ver que una onda que sea generada en una región donde $(f_0^2/f^2 + f_B/f) > 1$ (o imaginaria) es incapaz de escapar a

regiones donde f_0 y f_B son pequeñas. Esta restricción es importante en la teoría de radiación de la corona solar y de la ionósfera joviana debido a que mecanismos de emisión que son teóricamente atractivos se topan con esta dificultad.

Discutiremos ahora los procesos físicos involucrados en los diversos mecanismos de emisión.

Las radioemisiones térmicas debidas a un plasma caliente dependen de las velocidades térmicas aleatorias de los electrones al ser cambiadas por colisiones. El coeficiente de absorción está dado por:

$$\kappa = \frac{\nu f_0^2}{f^2 c} = \frac{\zeta N^2}{f^2 T^{3/2}} \quad (7.6)$$

donde ν es la frecuencia de colisiones, T es la temperatura y ζ es una función que varía lentamente y cuyos valores en la mayoría de los casos en las regiones de interés pueden ser tomados como ≈ 0.12 . Después de haber viajado una distancia S a través de este medio, la onda retiene una fracción $e^{-\kappa s}$ de su potencia original y entonces ha perdido la fracción $(1 - e^{-\kappa s})$. La cantidad κs se denomina profundidad óptica del material de espesor s , y a la temperatura T puede, de acuerdo a la ley de Kirchhoff, radiar con temperatura de brillo T_b y brillo b , dados por:

$$T_b = T(1 - e^{-\kappa s}) \quad b = \frac{2kT}{\lambda^2} (1 - e^{-\kappa s}) \quad (7.7)$$

donde k es la constante de Boltzman. Cuando $\kappa s \gg 1$, el material es opaco y $b \propto \lambda^{-2}$; cuando $\kappa s \ll 1$, el material es ópticamente delgado y

$$b = \frac{2\zeta k N^2 s}{c^2 T^{1/2}} \quad (7.8)$$

Un espectro de emisión térmica es mostrado en la curva (a) de la figura 7.7, la extensión punteada corresponde a la emisión de cuerpo negro, mientras que a cortas longitudes de onda, el brillo se vuelve independiente de λ cuando el material se convierte en transparente.

La radiación de giro o ciclotrónica es emitida por un electrón que gira en un campo magnético a la frecuencia f_B dada arriba. El proceso de emisión y el correspondiente de absorción son extremadamente eficientes, y corresponden a la onda E. Sin

embargo, la radiación de giro térmica no puede escapar del plasma debido a que la barrera $f < f_0 + f_0^2/f$ debe ser enfrentada cada vez que la radiación viaja a regiones cuya intensidad de campo y densidad de plasma decrecen.

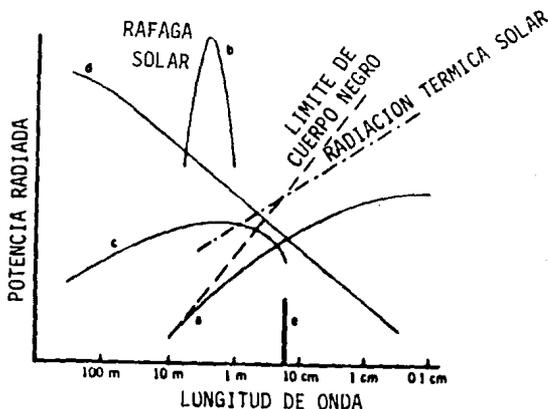


fig. 7.7

El interés en la girorradiación concierne a electrones que no sólo giran sino que además se mueven a través del plasma con velocidades que dan a la radiación un efecto Doppler sustancial. Tal corrimiento puede incrementar la frecuencia emitida por encima de la frecuencia de resonancia E del medio y así la radiación puede ser capaz de escapar. Teorías basadas en la emisión debida a paquetes de electrones moviéndose a lo largo de líneas de campo magnético en la corona solar y en la magnetósfera de Júpiter han sido propuestas para explicar las emisiones observadas. El tipo de espectro de emisión obtenido es una banda estrecha de frecuencias cercanas a la frecuencia ciclotrónica y extendido debido al corrimiento Doppler. Tal espectro es mostrado en la curva b de la figura 7.7.

La emisión sincrotrónica, también llamada Bremsstrahlung magnético, fue propuesta por primera vez como una fuente de radio emisiones cósmicas por Alfvén y Herlofson y por Kiepenheuer en 1950. Una gran cantidad de información acerca de este tipo de

mecanismo de emisión asociado con fuentes estelares puede ser encontrada en Ginzburg y Syrovatskii (1965, 1969).

Un electrón girando en un campo magnético radía a la girofrecuencia f_B , pero conforme su velocidad se incrementa también radía en sus armónicos. A la velocidad $3c/4$ (energía de 2.6×10^5 eV) el segundo armónico es tan fuerte como el fundamental. Cuando la energía cinética del electrón excede por mucho a la energía de su masa en reposo, radía casi enteramente en los armónicos, siendo la frecuencia de emisión máxima

$$f_m = \frac{1}{2} f_B \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 \quad (7.9)$$

donde \mathcal{E} es la energía total. La envolvente del espectro de emisión de un electrón se muestra en la curva c de la figura 7.7. La potencia radiada está dada por:

$$P = 3.8 \times 10^{-6} B_1^2 \mathcal{E}^2 \quad \text{erg/seg} \quad (7.10)$$

donde \mathcal{E} es la energía de la partícula y B_1 es el campo descrito en el capítulo 3.

La radiación sincrotrónica ha sido observada en fenómenos asociados con manchas solares, en pulsares, en la Nebulosa del Cangrejo y tal vez en la emisión a 10^3 Mc/seg de Júpiter. Para la Nebulosa del Cangrejo el espectro de radiación se extiende en un rango de frecuencias desde radiofrecuencias hasta el ultravioleta extremo y muestra una gran polarización. Las radioemisiones de Júpiter aparentemente provienen de electrones atrapados en sus cinturones de radiación. El que sea emisión sincrotrónica o ciclotrónica aún no ha quedado claro. Este mecanismo también es responsable de las radioemisiones de la Galaxia, de las remanentes de supernovas y de las fuentes de radio extragalácticas.

El espectro de emisión de un ensamble de rayos cósmicos de potencia típica tiene un espectro de radio mostrado en la curva d de la figura 7.7. El proceso sincrotrónico, al igual que el de emisión térmica, actúa en reversa para dar un fenómeno de absorción e imponer un límite de cuerpo negro en el brillo de la fuente que depende de la temperatura o energía electrónica. Este efecto es más importante en fuentes cuasi-estelares, e impone un límite inferior en el tamaño y un límite superior de la intensidad del campo magnético.

Uno puede pensar, por lo que se ha dicho con anterioridad, que la emisión más allá del límite del cuerpo negro no es posible dado que los electrones sufren de aceleraciones aleatorias. Por otra parte algunas fuentes cósmicas tienen temperaturas de brillo que exceden los 10^{20} K, mucho mayor a la temperatura electrónica. Los ejemplos más notables de estas fuentes son la Nebulosa del Cangrejo, pulsares, quasares, Júpiter e Io, el Sol (ráfagas tipo II), algunas ráfagas estelares y algunas nubes galácticas.

La explicación es el fenómeno de emisión coherente o estimulada debida a un gran número de electrones moviéndose al unísono. El ejemplo mejor conocido de emisión coherente es una antena transmisora de radio o T.V. donde muchos electrones fríos se mueven de forma ordenada para radiar con mucha potencia. Dado que la nube electrónica debe exceder las dimensiones atómicas, el bremsstrahlung no puede ser amplificado de esta forma. Sin embargo, radiación Cerenkov y ciclotrónica coherente son posibles.

En el caso de radiación sincrotrónica, parecería intuitivo que un pequeño paquete de electrones relativistas moviéndose en un campo magnético en el vacío pudieran proporcionar emisión coherente. Sin embargo, este simple mecanismo es ineficiente debido a que el paquete de electrones se dispersaría bajo la influencia de las fuerzas eléctricas repulsivas ejercidas mutuamente. Por otra parte, si el vacío es reemplazado por un plasma adecuado, entonces una elección conveniente del espectro de energías de los electrones relativistas pudiera permitir emisión sincrotrónica coherente, Zheleznyakov ha aplicado esta teoría para explicar las altas temperaturas de brillo en radio de quasares y ráfagas solares tipo IV.

Finalmente, mencionaremos brevemente la emisión atómica y molecular, la cual nos ha permitido medir la distribución de hidrógeno neutro y de moléculas de hidroxil en nuestra galaxia. La línea de 21 cm es mostrada como la curva e en la figura 7.7.

El efecto Compton inverso puede ser importante para determinar las características de las fuentes sincrotrónicas, y es mencionado específicamente en conexión con la Nebulosa del Cangrejo.

Estos y otros tipos de mecanismos de emisión son revisados con mayor cuidado en Dulk (1985).

CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo, se ha hecho una revisión de las herramientas fundamentales que el astrofísico teórico requiere para el estudio de diversos fenómenos que se dan en el Cosmos, principalmente aquéllos de origen electromagnético.

En la física espacial, los fenómenos electromagnéticos son de fundamental importancia. Esto se debe a dos razones: (1) la mayor parte del Universo (o al menos, del Universo observable) se encuentra permeada por partículas cargadas y campos electromagnéticos y (2) debido a que aparecen en diversos lugares y situaciones. Por ejemplo, en el interior de la Tierra existen fenómenos electromagnéticos que generan el campo magnético terrestre. Corrientes eléctricas en la ionosfera alteran el campo magnético terrestre durante las llamadas tormentas magnéticas y producen fenómenos tales como las auroras. El campo magnético terrestre influye en las condiciones físicas de la magnetosfera, en la cual existen complejos sistemas de corrientes eléctricas. En regiones de la magnetosfera, tales como los cinturones de Van Allen, existe un flujo de partículas de alta energía, las cuales están atrapadas en el campo magnético. A su vez, las condiciones físicas en la ionosfera y en la magnetosfera están afectadas por el estado electromagnético del espacio interplanetario, el cual a su vez se ve afectado por el campo magnético solar. En el Sol, por su parte, existe una gran variedad de fenómenos electromagnéticos, tales como las manchas solares, ráfagas, etc. También en el espacio interestelar e intergaláctico se piensa que los fenómenos electromagnéticos son de gran importancia.

Dada la gran complejidad de estos fenómenos, su entendimiento requiere del estudio de diversas disciplinas:

La *electrodinámica clásica* (capítulos 1 y 2) sólo puede ser aplicada a un número muy reducido de fenómenos cósmicos, tales como la dinámica de los rayos cósmicos. Esto es esencialmente el estudio de partículas cargadas moviéndose en un medio de propiedades electromagnéticas determinadas en presencia de algún campo electromagnético externo.

Bajo ciertas condiciones, el estado dinámico de las partículas

puede producir que se radien ondas electromagnéticas, lo cual constituye el estudio de la teoría de radiación (capítulo 3). El estudio de la radiación emitida por los cuerpos celestes, aunado a un estudio de los posibles mecanismos de emisión, nos proporcionan información acerca del estado físico y químico de sus fuentes.

Aplicaciones más generales a fenómenos electrodinámicos cósmicos son posibles con la combinación de la hidrodinámica (capítulo 4) con la electrodinámica clásica para formar la magnetohidrodinámica (capítulo 5), la cual describe el comportamiento de un fluido con propiedades electromagnéticas definidas en presencia de un campo electromagnético. A su vez la magnetohidrodinámica debe combinarse con la física de plasmas, en lo que se podría llamar una magnetohidrodinámica de plasmas (capítulo 6), para hacer posible un entendimiento más profundo de los fenómenos electrodinámicos en la física espacial. Con estas disciplinas el astrofísico puede describir aceptablemente una gran variedad de fenómenos cósmicos, tales como la generación de campos magnéticos, los vientos estelares, la actividad solar, la magnetosfera de los planetas, etc.

El futuro desarrollo de la astrofísica dependerá en gran medida de los avances en áreas afines, tales como la tecnología espacial, cuyas mediciones *in situ* brindarán mayor información acerca del entorno cercano a nuestro planeta, las investigaciones termonucleares ampliarán los conocimientos sobre el comportamiento del plasma, y finalmente, las ciencias de la computación permitirán simulaciones numéricas más rápidas y exactas a las que ahora existen.

BIBLIOGRAFIA

- Handbook of Mathematical Functions.*
Abramowitz, Milton / Stegun, Irene.
Dover, 1965.
- Cosmical Electrodynamics.*
Alfvén, H. / Fälthammar.
Oxford University Press, 1963
- Física, Vol 2: Campos y Ondas.*
Alonso / Finn
Fondo Educativo Interamericano, 1976.
- Métodos Matemáticos para Físicos.*
Arfken, George.
Diana, 1981.
- Curso de Astronomía General.*
Bakulin / Kononovich / Moroz.
Mir Moscú, 1983.
- Plasmas - Laboratorio y Cósmico.*
Boley, Forrest.
Reverte, 1968.
- Mathematical Methods in the Physical Sciences.*
Boas, Mary.
Wiley, 1983.
- Electrodinámica Clásica.*
Bredov / Rumiántsev / Toptiquin.
Mir Moscú, 1986.
- Encuentro con una Estrella.*
Bravo, Silvia.
Fondo de Cultura Económica, 1987.
- Ondas de Choque MHD.*
Bravo, Silvia.
Instituto de Geofísica UNAM, 1989.
- The New Physics.*
Davies, Paul.
Cambridge University Press, 1989.

Física, vol 1: Mecánica, Radiación y Calor.

vol 2: Electromagnetismo y Materia.

Feynman / Leighton / Sands.

Addison - Wesley Iberoamericana, 1987.

Fundamentos de Electrodinámica.

Fiodorov.

Mir Moscú, 1982.

Introducción a la Termodinámica.

García-Colin, Leopoldo.

Trillas, 3ª edición, 1986.

Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics.

Ginzburg.

Gordon and Breach Science Publishers.

Introduction to Electrodynamics and Radiation.

Grandy, Walter.

Academic Press, 1970.

The Radio Universe.

Hey, J.S.

Pergamon, 3ª edición, 1983

Dinámica de Fluidos.

Hughes, William.

Mc Graw Hill, 1970.

Introducción al estudio de la Mecánica, Materia y Ondas.

Ingard / Kraushaar.

Reverté, 1973.

Classical Electrodynamics.

Jackson, John David.

John Wiley & Sons, 2ª edición, 1975.

Solar Radio Astronomy.

Kundu, Mukul.

Interscience, 1965.

Curso de Física Teórica.

Vol 2: Teoría Clásica de los Campos.

Vol 6: Mecánica de Fluidos.

Vol 7: Teoría de la Elasticidad.

Vol 8: Electrodinámica de los Medios Continuos.

Landau / Lifshitz.

Reverté, (2ª edición) 1987, 1986, 1969, 1981.

Análisis Vectorial y Tensorial.

Lass, Harry.

CECSA, 1984.

Magnetohidrodinámica.

Little, Noel.

Reverté, 1969.

High Energy Astrophysics.

Longair, M.S.

Cambridge University Press, 1981.

Física del Plasma.

Milantieu / Temkó .

Mir Moscú, 1983.

Introduction to Plasma Theory.

Nicholson, Dwight.

John Wiley & Sons, 1983.

Cosmic Electrodynamics.

Piddington.

Wiley-Interscience, 1969.

Solar Magnetohydrodynamics.

Priest, Eric.

Reidel, 1982.

Electricidad y Magnetismo.

Berkeley Physics Course - Vol2.

Purcell, Edward.

Reverté, 2ª edición, 1988.

Fundamentos de la Teoría Electromagnética.

Reitz/Milford/Christy.

Addison-Wesley, 3ª edición, 1986.

Radiative Processes in Astrophysics.

Rybicki / Lightman.

Wiley Interscience, 1979.

Radioexploración del Sol.

Smith, Alex.

Reverte, 1969.

Radioexploración del Sistema Planetario.

Smith, Alex / Carr, Thomas.

Reverté, 1968.

Análisis Tensorial.

Sokolnikoff.

Limusa, 1987.

Vector Analysis.

Spiegel, Murray.

Mc Graw Hill, 1959.

Gravitation and Cosmology.

Weinberg, Steven.

Wiley - Interscience, 1972.

Space Physics.

White, Stephen.

Gordon and Breach, 1970.

Optica.

Zajac/Hecht.

Fondo Educativo Interamericano, 1986,

Calor y Termodinámica.

Zemansky, Mark / Dittman, Richard.

Mc Graw Hill, 1985.

Astrophysics of the Sun.

Zirin, Harold.

Cambridge University Press, (1988).

REFERENCIAS

- Babcock. Ann. Rev. Astron. Astrphys. 1963. 1:45-57
Cowling. Ann. Rev. Astron. Astrphys. 1981. 19:115-135.
Dulk. Ann. Rev. Astron. Astrphys. 1985. 23:169-224.
Ginzburg / Syrovatskii. Ann. Rev. Astron. Astrphys. 1965. 3:297-350.
Ginzburg / Syrovatskii. Ann. Rev. Astron. Astrphys. 1969. 7:375-420.
Wentzel. Ann. Rev. Astron. Astrphys. 1963. 1:195-218.