UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ARBOL DE LOS NUMEROS SOBRENATURALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

P R E S E N T A

ARACELI EUGENIA MERCADO FERNANDEZ

MEXICO, D. F. 1991

INDICE

Página.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a:

AVFL × todo lo que me ha dado, sobretodo ese apoyo incondicional de siempre.

CARO × su presencia durante la carrera y la super ayuda en este trabajo.

AHCD × que me animó a empezar la carrera.

JJRM, SELJ y LA TROPA × su amistad contra viento y marea.

DNG × fastidiarme hasta que esto salió.

UNAM × todas las facilidades que me brindó.

Es indiscutible que los sistemas numéricos $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$, constituyen la parte central del conocimiento matemático. Son el punto de partida de una de sus ramas más antiguas — la aritmética—; también son base del cálculo y del análisis; sustento y apoyo de las geometrías; fuente de modelos y generadores de técnicas de la más alta calidad, para utilizar en probabilidad, cálculo combinatorio y teoría de los números.

Desde los primeros cursos de álgebra superior, el estudiante aprende a construir cada uno de ellos a partir de los anteriores. Es fácil entender la razón por la que, en matemáticas, no se comienza "desde el mero principio", ya que tal cosa no existe y, por lo tanto, es práctica común escoger un punto de partida arbitrario (aunque en general seleccionado muy cuidadosamente) para proseguir desde ahí a la construcción lógica de las distintas teorías que se estudian en ella.

En el caso de los sistemas numéricos, la técnica usual consiste en suponer conocida alguna teoría de conjuntos y los numeros naturales y proceder, por medio de ampliaciones adecuadas, a las construcciones de $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$ (en el caso de este trabajo, supondremos conocida la teoría intuitiva de los conjuntos como está presentada en el Halmos).

Cuando se hace así, se considera un conjunto $\mathbf{N}$ cuyos elementos se llaman "números naturales". En él, un elemento inicial "cero", y una función "sucesor" $s: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, que se toman como nociones y relación primitivas — en tanto que no se definen—. Finalmente se postula que "en $\mathbf{N}$ valen los axiomas de Peano".

Es difícil imaginar un principio más natural para la aritmética, el álgebra y el análisis. Sin embargo, a la luz de las paradojas de la teoría de conjuntos, que alcanzan a la mayoría de los sistemas axiomáticos intuitivos, y con el ánimo de explorar más profundamente los fundamentos filosóficos de la matemática, se ha intentado comenzar de otra manera, principiando por establecer un sistema lógico formal lo suficientemente rico para construir en él la teoría axiomática (intuitiva) de los conjuntos, a partir de la cual, de una manera "fácil y elegante" se elabora la teoría básica de los números naturales, en la que los axiomas de Peano resultan teoremas de la teoría de conjuntos que se demuestran muy cómodamente. Surge aquí el problema de determinar si ambas presentaciones — la axiomática (de Peano) y la que se deriva de la teoría de conjuntos — son equivalentes en el sentido de producir estructuras comparables. A este respecto, es un resultado conocido el que asegura que "excepto por isomorfismos, existe un único sistema numérico que satisface los axiomas de Peano" (que por esta razón resultan categóricos), y que, por lo tanto, la diferencia entre

Es frecuente considerar entre estas relaciones, operaciones en A, funciones y relaciones de orden, principalmente.

Por ejemplo, el conjunto $(\mathbf{N}, 0, ')$ de los números naturales, es un sistema en el que "$\mathbf{N}$" es el conjunto de "números naturales", "0" es un elemento (distinguido) de $\mathbf{N}$ y "$'$" es una función de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{N}$ (la función sucesor).

Cuando los objetos del sistema se conocen solamente a través de sus relaciones, el sistema se llama *abstracto* y en este caso sólo interesa su estructura, mientras que la naturaleza de los objetos que la constituyen, ni queda especificada, ni es relevante.

Cada vez que se indique cuáles son los objetos, se obtiene un *modelo* del sistema (o una representación). Es decir, un modelo de un sistema, consta de uno o varios conjuntos de objetos bien definidos, entre los que existen relaciones que coinciden con las especificadas en el sistema abstracto. Por supuesto que los objetos tienen propiedades adicionales, que no estaban contempladas y que no tienen interpretación alguna en el sistema original.

En el capítulo 2 se dan varios ejemplos (de hecho una infinidad de ellos) de modelos para los sistemas enteros de la teoría de los números.

Dos representaciones del mismo sistema abstracto se llaman *isomorfas* si se puede establecer una función biyectiva entre los objetos de cada representación, que sea "bien comportada" con respecto a las relaciones.

Más precisamente:

DEFINICION 2.

Sean $T : (A, R_1, \ldots, R_k)$ y $U : (B, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_k)$ dos representaciones de algún sistema abstracto S. U es isomorfo a T si y sólo si $\exists\, \eta : A \to B$ biyectiva tal que para cada relación (n-aria) R_i, se cumple que $(a_1, \ldots, a_n) \in R_i \iff (\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \in \mathcal{R}_i$.

Para el caso particular de los sistemas enteros, $(\mathbf{N}, 0, ')$ es isomorfo a $(M, a_0, t) \iff \exists\, \eta : \mathbf{N} \to M$ biyectiva, tal que $\eta(0) = a_0$ y $\eta(a') = t(\eta(a))$, $\forall a \in \mathbf{N}$.

(Aquí se usa la convención de designar con a' a la imagen de a bajo la función sucesor "$'$", es decir, a' es por definición, el sucesor de a).

En el *método axiomático* (o postulacional) se da una colección de proposiciones llamadas *axiomas* (o postulados) como definiciones implícitas de los objetos y de las relaciones del sistema (en el sentido de que enlistan todas las propiedades que se suponen a estos objetos y a estas relaciones). Obviamente para cada teoría axiomática se da alguno de los

CAPITULO 1

conjuntos inductivos, ya que esta colección podría ser demasiado grande y no ser un conjunto, tomaremos uno de ellos y el conjunto de todos sus subconjuntos inductivos.

Sean pues A un conjunto inductivo e $I = \{B \subset A \mid B \text{ es inductivo}\}$; sea ahora $\mathbf{N}_A = \cap_{B \in I} B$. Hacemos notar:

1°. $I \neq \emptyset$ ya que $A \in I$,

2°. $\mathbf{N}_A$ es inductivo, y

3°. $\mathbf{N}_A \subset B \quad \forall B \subset A$ que sea inductivo,

y demostraremos que $\mathbf{N}_A$ es el conjunto que deseábamos construir, para lo cual, bastará probar que si D es inductivo entonces $\mathbf{N}_A \subset D$. En efecto, si $C = D \cap A$ entonces C es un subconjunto inductivo de A y por lo tanto contiene a $\mathbf{N}_A$ y como además $C \subset D$ resulta que $\mathbf{N}_A \subset D$ ‡.

En vista del resultado anterior le suprimimos el subíndice a $\mathbf{N}_A$ y diremos simplemente que es el conjunto de los Números Naturales y, de acuerdo a nuestro propósito inicial, probaremos que en él los axiomas de Peano son válidos, para lo cual basta definir al $\emptyset$ como 0 e identificar la función sucesor de Peano (relación primitiva) como la función del mismo nombre que hemos definido para conjuntos. Con esta convención resulta evidente que "0 es un número natural" y que "el sucesor de todo número natural es un número natural" que son los primeros dos axiomas de Peano, y que en nuestra teoría no es más que la reafirmación de que $\mathbf{N}$ es inductivo.

De la definición de "sucesor de x" resulta obvio que "0 no es sucesor de ningún número natural" (axioma 3) (y de ningún otro conjunto, ya que todo sucesor tiene un elemento).

También es obvio que si "dos números naturales tienen el mismo sucesor, son iguales" (axioma 4), según se hizo ver en la nota de la página anterior. Igualmente es claro que si un subconjunto de naturales S tiene al 0 y cada vez que tiene a un número tiene al que le sigue (S es inductivo), contiene al conjunto de los Números Naturales (por la minimalidad de éste) y por lo tanto $S = \mathbf{N}$. Este último resultado es el 5° postulado de Peano y con ésto termina la primera parte de nuestra tarea, ya que es bien sabido que a partir de los postulados de Peano pueden demostrarse las propiedades usuales de los Números Naturales. La manera tradicional de hacer ésto es utilizar el 5° postulado en su versión "Primer Principio de Inducción" que se refiere a las propiedades de los Números Naturales, y dice que "Si P es una propiedad que cada número natural puede o no tener y la tiene el 0 y además cada vez que la tenga un número la tiene el que le sigue, entonces la tienen todos lo números naturales".

CAPITULO 2

TEOREMA 1. (*de Recursión*)

$\forall X$ conjunto, con un elemento distinguido x_0 y $\forall f: X \to X$, $\exists!\, \eta: \mathrm{N} \to X$ tal que $\eta(0) = x_0$ y $\forall k \in \mathrm{N} \quad \eta(k') = f(\eta(k))$.

Nótese que lo que se está diciendo es que $\eta: \mathrm{N} \to X$ es la única función que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{N} \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\eta"] & \mathrm{N} \arrow[d, "\eta"] \\ \cdot \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x_0"'] & & \\ & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Antes de entrar a la demostración del teorema (que de hecho no haremos) escogimos tres ejemplos que muestran la forma en que la aplicación del teorema produce el resultado que queríamos, y un cuarto que nos llevará a una consideración importante para la teoría. Por supuesto que X es el conjunto de "significados" y η es la función que "produce" el significado de cada sustitución en la expresión original (que puede identificarse con la misma η).

Dado que hasta ahora no tenemos más función de N en N que la función sucesor, ésta es la que usaremos para nuestro primer ejemplo.

Ejemplo 1.

Sea $X = \mathrm{N}$, $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ la función sucesor ($'$) y n_0 un número natural fijo. En este caso

i) $\eta(0) = n_0$, y

ii) $\forall k \in \mathrm{N} \quad \eta(k') = (\eta(k))'$

como puede comprobarse recorriendo el diagrama. Evidentemente η es la "tabla de sumar de n_0" ($\eta = \Sigma_{n_0}$), y las expresiones (*i*) e (*ii*) forman su definición recursiva.

Ahora que ya tenemos las tablas de sumar, si nuestro propósito fuera desarrollar sistemáticamente la aritmética, podríamos demostrar las propiedades básicas de la suma en N, utilizando el *Primer Principio de Inducción*. Después definiríamos la relación de orden "canónica" (el orden "natural" o "lexicográfico") y demostraríamos aquellas propiedades de éste que están relacionadas con la suma.

Dado que éste no es nuestro propósito, no procederemos así. Referimos al lector interesado al Landau, y supondremos para lo que sigue que tales propiedades nos son familiares (como es el caso) y nos permitiremos usarlas en el segundo ejemplo que con propósitos heurísticos desarrollaremos con más detalle.

Ejemplo 2.

Sean $X = \mathrm{N}$ y $f = \Sigma_{n_0}$. Estamos en posición de ignorar qué clase de "expresión" es a la que vamos a darle significados, por lo tanto tomaremos a x_0 como una provisional b (a reserva de cambiarlo después por el número que nos resulte más conveniente).

Al operar nuestro diagrama vamos encontrando las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
\eta(0) &= b \\
\eta(1) &= b + n_0 \\
\eta(2) &= b + 2n_0 \\
&\vdots \\
\eta(k) &= b + kn_0 .
\end{aligned}$$

De lo que podemos observar que la b, de alguna manera, estorba, es decir que si b fuera 0, η sería simplemente la "tabla de multiplicar de n_0" ($\eta = \Pi_{n_0}$) que con esta convención queda definida recursivamente:
$\Pi_{n_0}(0) = 0$
$\forall k \in \mathrm{N} \quad \Pi_{n_0}(k') = \Pi_{n_0}(k) + n_0 .$

Como en el caso anterior, definidas las tablas de multiplicar se procedería a demostrar sus propiedades, lo que también puede hacerse por inducción, o utilizando las propiedades del orden.

Usemos ahora las tablas de multiplicar para nuestro tercer ejemplo y, nuevamente, pretendamos ignorar el desenlace de nuestro experimento.

Ejemplo 3.

Sean $X = \mathrm{N}$ y $f = \Pi_{n_0}$ (con $n_0 \neq 0$ para evitar problemas existenciales que surgen *a posteriori*) y como antes x_0 será una c provisional. Hagamos funcionar nuestra máquina de significados:

$$
\begin{aligned}
\eta(0) &= c \\
\eta(1) &= cn_0 \\
\eta(2) &= cn_0n_0 \ \text{(que extraoficialmente denotamos } cn_0^2\text{)} \\
\eta(3) &= cn_0^2n_0 := cn_0^3 \\
&\ \vdots \\
\eta(k) &= cn_0^k.
\end{aligned}
$$

Sagazmente notamos la conveniencia de definir $c = 1$. Con lo que η resulta ser la función exponencial para n_0.

En el cuarto ejemplo trataremos de invertir el procedimiento, es decir, partimos de una η conocida, a saber la función factorial (!), y trataremos de encontrar la f que la generaría en el esquema de recursión.

Ejemplo 4.

Sean $X = \mathrm{N}$, $x_0 = 1$ (que es el factorial de cero) y sabiendo que $\eta(1) = 1$, $\eta(2) = 2$, $\eta(3) = 6$, etcétera, tratemos de definir a pie la función f.

Dado que $0! = 1$ y que $1! = 1$, es evidente que $f(1)$ debe ser 1. El problema ahora, es que si hacemos correr el 1 en nuestro diagrama, encontramos por un camino $2!$ y por el otro $f(1)$, que es $1\ {}^{\nabla}_{\circ}$. El problema aquí es que la función que necesitamos se "regresa" ($f(1) = 1$), por lo que , con ella, sólo es posible asignar el significado 1 a la expresión que corresponde al factorial de cada número natural. Una manera de salir de este problema es utilizar diferentes f's, una para cada número natural, y aplicar en cada caso la correspondiente. Esta exigencia requiere una ampliación al teorema de recursión que es la contenida en el siguiente

TEOREMA 2. *(de Recursión Generalizada)*

$\forall X$ conjunto con un elemento distinguido x_0 y $\forall \{f_i\}_{i \in \mathrm{N}}$ funciones de X en X, $\exists! \, \eta: \mathrm{N} \to X$ tal que
i) $\eta(0) = x_0$, y
ii) $\forall k \in \mathrm{N} \quad \eta(k') = f_k(\eta(k))$.

Este es el teorema que sí demostraremos, haciendo la observación de que el de recursión simple es el caso particular en el que $\forall n \in \mathrm{N} \quad f_n = f$. Y hacemos notar que en el ejemplo 4, la familia de funciones que necesitamos es $\{f_n(x) = nx\}_{n \in \mathrm{N}}$.

Demostración.

Sea

$$R = \{M \subset \mathrm{N} \times X \mid (0, x_0) \in M \text{ y } \forall k,\ (k, x) \in M \Rightarrow (k', f_k(x)) \in M\}$$

$R \neq \emptyset$ ya que $\mathrm{N} \times X \in R$ evidentemente.

Sea $\eta = \cap_{M \in R} M$.

Debemos demostrar que:

1°) η tiene dominio N.

2°) η satisface (i) y (ii).

3°) η es función.

4°) η es única con estas propiedades.

1°. Sea $S \subset \mathrm{N}$ el dominio de η.
$(0, x_0) \in M\ \forall M \in R$ implica que $(0, x_0) \in \eta$ por lo tanto $0 \in S$.
Suponer $k \in S$, es decir, $\exists\, x \in X$ tal que $(k, x) \in \eta$ por lo que $(k, x) \in M\ \forall M \in R$ lo que implica que $(k', f_k(x)) \in M\ \forall M \in R$, por lo tanto $(k', f_k(x)) \in \eta$, por lo que $k' \in S$, de donde $S = \mathrm{N}$.

2°. De la argumentación anterior se sigue obviamente que η satisface (i) y (ii).

3°. Sea ahora $T \subset \mathrm{N}$ el conjunto de elementos del dominio de η que tienen una sola imagen.
$(0, x_0) \in \eta$ y supóngase que $(0, y) \in \eta$, $x_0 \neq y$. Entonces $\mu = \eta \setminus \{(0, y)\}$ satisface (i) y (ii); en efecto, $(0, x_0) \in \mu$ y si $(k, x) \in \mu$, $((k, x) \in \eta)$, $(k', f_k(x)) \in \eta$ y como $k' \neq 0$, $(k', f_k(x))$ no es el que se quitó por lo que $(k', f_k(x)) \in \mu$ de donde μ es un elemento de R y como tal contiene a η, pero $\mu \subsetneq \eta$ $\overset{\nabla}{\circ}$. El absurdo surge de suponer que existe tal y. Es decir, $0 \in T$.
Supóngase que $k \in T$, o sea, (k, x) es la única pareja de η que tiene primera coordenada k. Entonces $(k', f_k(x)) \in \eta$.
Supóngase que $\exists\, z$, $z \neq f_k(x)$ tal que $(k', z) \in \eta$. Sea ahora $\lambda = \eta \setminus \{(k', z)\}$. $(0, x_0) \in \lambda$ (porque $0 \neq k'$). Sea $(l, y) \in \lambda$. Debemos demostrar que $(l', f_l(y)) \in \lambda$. Ahora, si $l \neq k$ no hay problema ya que entonces $l' \neq k'$ y por lo tanto $(l', f_l(y))$ no es la que se quitó y por tanto está en λ.
Ahora si $l = k$, $y = x$ y la pareja que debemos mostrar en λ es $(k', f_k(x))$ que no hemos quitado, es decir, T satisface $0 \in T$ y $k \in T \Rightarrow k' \in T$ por lo tanto $T = \mathrm{N}$

4°. Sea $\theta\colon \mathrm{N} \to X$ función que satisface (i) y (ii), y sea $U = \{n \in \mathrm{N} \mid \theta(n) = \eta(n)\}$.
Por demostrar que $U = \mathrm{N}$.
Por (i) $0 \in U$. Supóngase que $k \in U$, es decir, $\eta(k) = \theta(k)$,
por (ii) $\eta(k') = f_k(\eta(k)) = f_k(\theta(k)) = \theta(k')$ $\dagger$.

Con la demostración del teorema de recursión generalizada, más las observaciones que se hicieron a propósito de las demostraciones inductivas, y después de definir el orden y de demostrar sus propiedades (lo que también se puede hacer por inducción, ver Landau), debe quedar más o menos claro que hemos capturado las propiedades esenciales del conjunto de los Números Naturales. Y para demostrar la categoricidad de los axiomas de Peano (en el sentido de no tener más que un modelo, excepto por isomorfismos), probaremos ahora que el teorema de recursión simple implica los axiomas de Peano, en el sentido que se expresa en el teorema siguiente.

TEOREMA 3.

Sea A un conjunto con un elemento distinguido a_0 y una función $t\colon A \to A$ tal que $\forall X$ conjunto con un elemento distinguido x_0 y $\forall f\colon X \to X$ función $\exists!\,\eta\colon A \to X$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\eta"] & A \arrow[d, "\eta"] \\ \cdot \arrow[ur, "a_0"] \arrow[r, "x_0"'] & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Entonces en A los axiomas de Peano son válidos, identificando a 0 como a_0 y a la función sucesor como t.

Demostración.

Los axiomas de Peano, referidos a A, son:

1) $a_0 \in A$
2) $\forall n \in A$, $t(n) \in A$
3) $\forall n \in A$, $t(n) \neq a_0$
4) $\forall n, m \in A$, $t(n) = t(m) \Rightarrow n = m$
5) $\forall S \subset A$, si $a_0 \in S$ y $\forall n \in A$, $n \in S \Rightarrow t(n) \in S$, entonces $S = A$.

las proposiciones (1) y (2) son inmediatas de las hipótesis y por eso sólo demostraremos las otras tres , pero en otro orden.

3) $a_0 \neq t(n) \quad \forall n \in A$ (cero no es un sucesor).
Supongamos que sí, es decir, $\exists\, k \in A$ tal que $t(k) = a_0$. Consideremos ahora $X = \{a, b\}$, $x_0 = a$ y $f(x) = b \quad \forall x \in X$. Entonces, de la conmutatividad de la primera parte del diagrama (el "triángulo") $\eta(a_0) = a$, pero de la conmutatividad de la otra parte del diagrama (el "cuadro") $f(\eta(k)) = b = \eta(t(k)) = \eta(a_0) = a$ $\overset{\nabla}{\circ}$ El absurdo surge de suponer que a_0 es un sucesor. Por lo tanto $a_0 \neq t(n) \quad \forall n \in A$.

5) Sea $S \subset A$ tal que $a_c crom \in S$ y $\forall n \in A, n \in S \Rightarrow t(n) \in S$.
Demostraremos que $S = A$. Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\eta"] & A \arrow[d, "\eta"] \\
\cdot \arrow[ur, "a_0"] \arrow[r, "a_0"] \arrow[dr, "a_0"'] & S \arrow[r, "t"] \arrow[d, "i"] & S \arrow[d, "i"] \\
& A \arrow[r, "t"] & A
\end{tikzcd}$$

En donde $\eta: A \to S$ es la función que hace conmutar el "cuadro de arriba" (y que existe, debido a la hipótesis sobre A); $i: S \to A$ es la inclusión ($S \xrightarrow{i} A$) entonces ambos cuadrados conmutan y por lo tanto también el "cuadro exterior"

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "t"] \arrow[dd, "i\circ\eta"] & A \arrow[dd, "i\circ\eta"] \\
\cdot \arrow[ur, "a_0"] \arrow[dr, "a_0"'] & & \\
& A \arrow[r, "t"] & A
\end{tikzcd}$$

Pero la función $1_A: A \to A$ también hace conmutar el diagrama y por lo tanto (por la unicidad de la función que tiene esa propiedad) $1_A = i \circ \eta$ y como 1_A es biyectiva, i resulta suprayectiva.
Si $i: S \to A$, inclusión, es suprayectiva obviamente $S = A$

Este resultado tiene un corolario importante:

COROLARIO 1.

En N, todo elemento distinto de cero es sucesor de algún otro.

Lo que en símbolos dice: $\forall n,\ n \neq 0 \Rightarrow \exists\, k \in \mathrm{N}$ tal que $s(k) = n$,
ya que $S = \{0\} \cup s(\mathrm{N})$ satisface las hipótesis de la proposición (5). Es decir que $s: \mathrm{N} \to \mathrm{N} \setminus \{O\}$ es suprayectiva.

Demostraremos ahora la proposición (4).

4) Debemos demostrar que $t: A \to A$ es inyectiva.

Sea K un conjunto infinito. Por lo tanto $\exists\, B \subsetneq K$ tal que $B \cong K$ en el sentido de Cantor (definición de *conjunto infinito*). Sea $f: K \to B$ la biyección que da la equivalencia, y que se puede pensar como $f: K \to K$ (obviamente no suprayectiva).

Sea $a \in K \setminus B$ (por lo que $a \notin f(K) = B$), y considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\eta"] & A \arrow[d, "\eta"] \\ \cdot \arrow[ur, "a_0"] \arrow[dr, "a"'] & & \\ & K \arrow[r, "f"] & K \end{tikzcd}$$

Entonces $\eta: A \to K$ es inyectiva, ya que si se define

$$S = \{n \in A \mid \forall m,\ \eta(n) = \eta(m) \Rightarrow n = m\},$$

$a_0 \in S$ y $n \in S \Rightarrow t(n) \in S$, por lo que $S = A$, de donde η es inyectiva. En efecto, $\eta(a_0) = a$ y $\forall k,\quad a \neq \eta(t(k)) \in B$ y por tanto como $a_0 \neq n \Rightarrow n = t(k)$ para algún $k \in A$, $\eta(a_0) \neq \eta(n)$, de donde, por contrapuesta, $\eta(a_0) = \eta(n) \Rightarrow a_0 = n$.

Sea ahora $n \in S$ (es decir, $\forall m,\ \eta(n) = \eta(m) \Rightarrow n = m$). Del diagrama se tiene que $\eta(t(n)) = f(\eta(n))$ y lo mismo para m, por lo que
$\eta(t(n)) = \eta(t(m)) \Rightarrow f(\eta(n)) = f(\eta(m))$, pero f es biyección, por lo que $\eta(n) = \eta(m)$ de donde $n = m$ porque $n \in S$, por lo tanto $t(n) = t(m)$, lo que quiere decir que $t(n) \in S$.

Queda pues demostrado que $f \circ \eta$ es inyectiva (la composición de funciones inyectivas es inyectiva). Pero $f \circ \eta = \eta \circ t$ y por eso t es inyectiva (si una composición es inyectiva la primera que se aplica es inyectiva) †.

COROLARIO 2.

De (4) y del corolario 1, $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ es biyectiva.

–**Sistemas Enteros.**

DEFINICION 5.

Un conjunto A con un elemento distinguido a_0 y una función $\alpha: A \to A$, biyectiva de A en $A \setminus \{a_0\}$ es un *sistema entero*, si $(\forall B \subset A,\ a_0 \in B$ y $\forall n,\ n \in B \Rightarrow \alpha(n) \in B) \Rightarrow (B = A)$.

$((\mathbf{N}, 0, s: \mathbf{N} \to \mathbf{N})$ es un sistema entero$)$.

TEOREMA 4.

Todos los sistemas enteros son isomorfos. Es decir, si (A, a_0, α) y (B, b_0, β) son sistemas enteros, existe $f: A \to B$ biyectiva, tal que
1) $f(a_0) = f(b_0)$
2) $\forall a \in A,\ f(\alpha(a)) = \beta f(a)$.

Demostración.

Dado que $\forall a \in A$, $a = a_0$ ó $a = \alpha(a_1)$ para algún $a_1 \in A$, si se define $f: A \to B$ como $f(a_0) = b_0$ y $f(\alpha(a)) = \beta f(a)$, f está bien definida. Sólo falta probar que es biyectiva, lo que haremos a continuación.
a) f es inyectiva. En efecto, si

$$S = \{n \in A \mid \forall m \in A,\ f(n) = f(m) \Rightarrow n = m\},$$

entonces $a_0 \in S$ ya que $f(a_0) = b_0$ y $b_0 \notin \beta(B)$, por tanto $a \neq a_0 \Rightarrow f(a) \neq f(a_0)$
Supóngase ahora que $n \in S$, y como $\forall m.\ f(\alpha(m)) = \beta(f(m))$ y $f(\alpha(n)) = \beta(f(n))$ resulta que
$f(\alpha(n)) = f(\alpha(m)) \Rightarrow \beta f(n) = \beta f(m)$ y como β es inyectiva de ahí se sigue que $f(n) = f(m)$ y por la hipótesis de inducción $n = m$, por lo que $\alpha(n) = \alpha(m)$, es decir $\alpha(n) \in S$.
Por lo tanto $S = A$, por lo que f es inyectiva.
b) f es suprayectiva. En efecto, si $\Sigma \subset B$ se define como

$$\Sigma = \{b \in B \mid \exists a \in A\ talque\ f(a) = b\} \quad (\Sigma = f(A))$$

$b_0 \in \Sigma$ dado que $b_0 = f(a_0)$ y si $b \in \Sigma$ y por lo tanto $b = f(a)$ $f(\alpha(a)) = \beta f(a) = \beta(b) \in \Sigma$ por lo tanto $\Sigma = B$, por lo que f es suprayectiva.

Como f es inyectiva y suprayectiva resulta ser biyectiva $\dagger$.

Un corolario del resultado anterior dice que *el teorema de recursión (o equivalentemente los axiomas de Peano) definen categóricamente a* $\mathbf{N}$, pero siendo esta la parte central de la tesis, hagamos caso omiso de este corolario y procedamos directamente a probar la unicidad de los Números Naturales, puntualizando que el isomorfismo que "hemos encontrado" no sólo se comporta bien con la función sucesor, sino que respeta la estructura algebráica de este sistema.

Explícitamente, probaremos que si (A, a_0, t) es un sistema entero, la "suma" en A (σ), el "producto" (π) y el "orden" ($\preceq$) que resultan definidos *recursivamente* en A (al aplicar en A los diagramas análogos a los que usamos para el mismo propósito en $\mathbf{N}$, ejemplos de las páginas 11-13), y $\eta: \mathbf{N} \to A$ es el isomorfismo del teorema anterior, resulta que $\forall m, n \in \mathbf{N}$,
$\eta(n +_{\mathbf{N}} m) = \eta(n) +_A \eta(m)$ y que
$\eta(n \cdot_{\mathbf{N}} m) = \eta(n) \cdot_A \eta(m)$
en donde, por supuesto, los operadores con índice $\mathbf{N}$ son los de $\mathbf{N}$ y los que tienen índice A son los de A; y aunque no lo haremos, aceptamos que de aquí resulta que
$n \leq_{\mathbf{N}} m \iff \eta(n) \preceq_A \eta(m)$
lo que debe ser claro, ya que en ambos casos la relación se define (o puede definirse) por medio de la suma de cada sistema, a saber
$n \leq_{\mathbf{N}} m \iff \exists p \in \mathbf{N}$ tal que $n + p = m$
$a \preceq_A b \iff \exists c \in A$ tal que $a +_A b = c$.

Para referencias posteriores, hacemos notar aquí que al utilizar el procedimiento descrito para $\mathbf{N}$ (el uso de los diagramas), en A se obtiene:
$\forall a \in A$, $\sigma_a: A \to A$ (la tabla de sumar de a en A)

$\cdot$) $\sigma_a(a_0) = a$	$a +_A a_0 = a$
$\cdot\cdot$) $\forall k \in A$, $\sigma_a(t(k)) = t(\sigma_a(k))$	$a +_A k' = (a +_A k)'$

y $\forall b$, $\pi_b: A \to A$ (la tabla de multiplicar de b en A)

$\cdot$) $\pi_b(a_0) = a_0$	$a \cdot_A a_0 = a_0$
$\cdot\cdot$) $\forall k \in A$, $\pi_b(t(k)) = \pi_b(k) +_A b$	$b \cdot_A k' = (b \cdot_A k) +_A b$

CAPITULO 3

Sea A un conjunto con un elemento distinguido a_0 y una función sucesor t, para el que valen los axiomas de Peano y, por lo tanto, el teorema de recursión simple. Demostraremos que A es isomorfo a $\mathbf{N}$ e ilustraremos este resultado con cuatro ejemplos que nos parecen adecuados.

Demostración.

Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{N} \arrow[r, "{}'"] \arrow[d, "\eta"] & \mathbf{N} \arrow[d, "\eta"] \\
 & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\theta"] & A \arrow[d, "\theta"] \\
\cdot \arrow[uur, "0"] \arrow[ur, "a_0"] \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "a_0"'] & \mathbf{N} \arrow[r, "{}'"] \arrow[d, "\eta"] & \mathbf{N} \arrow[d, "\eta"] \\
 & A \arrow[r, "t"] & A
\end{tikzcd}$$

En donde η y θ son las funciones cuya existencia está garantizada por el teorema de recursión, una vez de $\mathbf{N}$ a A y otra de A a $\mathbf{N}$. La conmutatividad de cada una de las partes del diagrama obliga la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{N} \arrow[r, "{}'"] \arrow[dd, "\theta\circ\eta"] & \mathbf{N} \arrow[dd, "\theta\circ\eta"] \\
\cdot \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \\
 & \mathbf{N} \arrow[r, "{}'"] & \mathbf{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "t"] \arrow[dd, "\eta\circ\theta"] & A \arrow[dd, "\eta\circ\theta"] \\
\cdot \arrow[ur, "a_0"] \arrow[dr, "a_0"'] & & \\
 & A \arrow[r, "t"] & A
\end{tikzcd}$$

Observamos que las funciones $1_{\mathbf{N}}$ y 1_A también los hacen conmutar, por lo que, la propiedad universal de que habla el teorema de recursión, asegura que $\theta \circ \eta = 1_{\mathbf{N}}$ y que $\eta \circ \theta = 1_A$, y que por lo tanto η y θ son biyectivas. Probaremos ahora que además son bien comportadas con respecto a las operaciones de $\mathbf{N}$ y de A, en el sentido usual (ver párrafos anteriores) y que por lo tanto son isomorfismos.

TEOREMA 5.

η es isomorfismo.

Demostración.

Lo que se debe probar es que $\forall n, m \in \mathbf{N} \quad \eta(n +_{\mathbf{N}} m) = \eta(n) +_A \eta(m)$ y que $\eta(n \cdot_{\mathbf{N}} m) = \eta(n) \cdot_A \eta(m)$. Equivalentemente, para cada n fija, si Σ_n, σ_ν, Π_n y π_ν son las tablas de sumar y multiplicar de n y ν en $\mathbf{N}$ y A respectivamente, en donde se ha definido $\nu = \eta(n)$, entonces se debe probar que $\forall m \in \mathbf{N} \quad \eta(\Sigma_n(m)) = \sigma_\nu(\eta(m))$ y que $\eta(\Pi_n(m)) = \pi_\nu(\eta(m))$, lo que equivale a demostrar que η "conmuta" con *sigma* y *pi* en el sentido siguiente:

1) $\eta \circ \Sigma_n = \sigma_\nu \circ \eta$ y

2) $\eta \circ \Pi_n = \pi_\nu \circ \eta$.

Para demostrar (1) consideramos los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{N} \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\Sigma_n"] & \mathbf{N} \arrow[d, "\Sigma_n"] \\
\cdot \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "\nu"'] & \mathbf{N} \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\eta"] & \mathbf{N} \arrow[d, "\eta"] \\
 & A \arrow[r, "'"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{N} \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\eta"] & \mathbf{N} \arrow[d, "\eta"] \\
\cdot \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "a_0"] \arrow[dr, "\nu"'] & A \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\sigma_\nu"] & A \arrow[d, "\sigma_\nu"] \\
 & A \arrow[r, "'"] & A
\end{tikzcd}
$$

La conmutatividad en cada parte de cada uno de los diagramas conduce, en ambos casos, al diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{N} \arrow[r, "'"] \arrow[d] & \mathbf{N} \arrow[d] \\
\cdot \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \\
 & A \arrow[r, "'"] & A
\end{tikzcd}
$$

que en el primer caso conmuta con $\eta \circ \Sigma_n$ y en el segundo con $\sigma_\nu \circ \eta$. La unicidad de tal función demuestra que $\eta \circ \Sigma_n = \sigma_\nu \circ \eta$ como debíamos demostrar.

Si intercambiamos los papeles de $\mathbf{N}$ y de A en la demostración anterior y η se sustituye por θ, se demuestra también que $\theta \circ \sigma_\nu = \Sigma_n \circ \theta$ (por supuesto que siendo inversas η y θ, $\theta(\nu) = n$). Lo que por otra parte es inmediato ya que la inversa de un isomorfismo es isomorfismo.

Para la demostración de (2) consideramos ahora los diagramas:

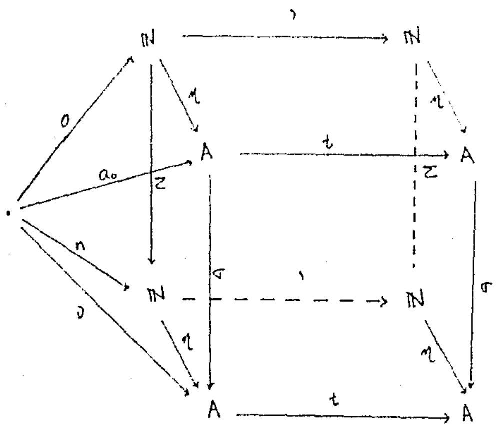
$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{N} \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\Pi_n"] & \mathbf{N} \arrow[d, "\Pi_n"] \\
\cdot \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "a_0"'] & \mathbf{N} \arrow[r, "\Sigma_N"] \arrow[d, "\eta"] & \mathbf{N} \arrow[d, "\eta"] \\
 & A \arrow[r, "\sigma_\nu"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{N} \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\eta"] & \mathbf{N} \arrow[d, "\eta"] \\
\cdot \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "a_0"] \arrow[dr, "a_0"'] & A \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\pi_\nu"] & A \arrow[d, "\pi_\nu"] \\
 & A \arrow[r, "\sigma_\nu"] & A
\end{tikzcd}
$$

La conmutatividad de la parte inferior del primer diagrama está garantizada por la demostración de (1) y como antes, el resultado es el diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ \bullet \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "a_0"'] & & \\ & A \arrow[r, "\sigma_\nu"] & A \end{tikzcd}$$

que conmuta tanto con $\eta \circ \Pi_n$ como con $\pi_\nu \circ \eta$ por lo que, apelando una vez más a la uniciadad de la función con esta propiedad, resulta que, como debíamos demostrar, $\eta \circ \Pi_n = \pi_\nu \circ \eta$.

Hacemos aquí la observación de que en los dos pasos de las demostraciones anteriores en que usamos los diagramas, pudo habetse usado únicamente uno "tridimensional" (en cada caso), según se ilustra en la figura siguiente:



De acuerdo con nuestro anunciado propósito, pasamos a ilustrar la demostración anterior con algunos ejemplos, pero antes hacemos las consideraciones siguientes:

Las definiciones en matemáticas, son posteriores al conocimiento matemático mismo. Son formalizaciones que surgen al tratar de precisar el significado de los conceptos que definen, y en general, se escogen de manera que el "juego" resulte interesante, y de modo que se eviten, en lo posible, los "conflictos entre los jugadores", pero procurando al mismo tiempo, conservar la mayor versatilidad y riqueza de las teorías. Así por ejemplo, se vió la conveniencia de definir

$$\begin{aligned} &a \cdot 0 = 0 \\ &a^0 = 1 \\ &0! = 1, \quad \text{etcétera.} \end{aligned}$$

Tratando de precisar un poco lo anterior diremos que las definiciones buscan rescatar la mayor parte de las propiedades "bonitas" de la teoría de que se trate, llámese continuidad, completez u otra, y conviene eliminar expresiones como $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0. En general, hay acuerdo sobre la conveniencia de las partes que deben eliminarse y sobre la forma de definir las que quedan. Este no es el caso con el elemento inicial de los Números Naturales. ¿Debe o no incluirse el 0 en N? Los defensores de una y otra posición ofrecen argumentos en ambos sentidos, todos válidos, por lo que no ha habido acuerdo al respecto. Al estudiante de estos temas se le suele decir que es una cuestión meramente de forma y que no es trascendente, porque basta con cambiar 0 por 1 en las partes en que se requiera para tener proposiciones en uno u otro sistema, y ¡asunto arreglado! Al examinar más de cerca el problema, se puede uno percatar de que, efectivamente, una traslación simple proporciona una biyección ($f(n) = n'$), entre ambos conjuntos. Sin embargo, si denotamos como N a los Naturales con 0 y N^* a los que empiezan en 1, descubrimos que sus operaciones no son equivalentes. En efecto, la suma de N tiene neutro, propiedad que no comparte la de N^*. Con ánimo de aplicar el resultado que hemos obtenido — *todas las copias de los Naturales son isomorfas* — tendremos que precisar cuál es ese isomorfismo, que por supuesto queremos derivarlo de la biyección anterior. Recurramos pues a nuestros diagramas y así obtenemos nuestro primer ejemplo.

Ejemplo 5.

Consideremos $A = N^*$ y $t: N^* \to N^*$ con $t(k) = k'$, haciendo la acotación de que en N^*, cada elemento es un sucesor.

Sea $\eta: N \to N^*$ la función (de la que sabemos que es única, biyectiva y bien comportada con las operaciones $+_N$, $\cdot_N$ y las correspondemos con $+_{N^*}$ y $\cdot_{N^*}$, lo que dice que η es isomorfismo) que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "'"] \arrow[d, "\eta"] & N \arrow[d, "\eta"] \\ \cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & N^* \arrow[r, "t"] & N^* \end{tikzcd}$$

¿Qué cara tienen $+_{\mathbf{N}^{*}}$ y $\cdot_{\mathbf{N}^{*}}$ (a las que denotaremos como $\oplus$ y $\odot$ respectivamente)?

Obsérvese que de

$\eta(n+m) = \eta(n) \oplus \eta(m)$ se obtiene entonces

$(n+m)' = n' \oplus m'$ por lo que $n' \oplus m' = (n+m)+1$ y de $\eta(nm) = \eta(n) \odot \eta(m)$, $(n \cdot m)' = n' \odot m'$, o sea que $n' \odot m' = (nm)+1$ de lo que resulta una aritmética muy especial para $\mathbf{N}^{*}$ que dice, por ejemplo, que:

$3 \oplus 4 = 2' \oplus 3' = (2+3)' = 6$

$$¡3 \oplus 4 = 6!$$

$5 \odot 6 = 4' \odot 5' = (4 \cdot 5)' = 21$

$$¡5 \odot 6 = 21!$$

y ¡claro!

$5 \odot (3 \oplus 4)(= 5 \odot 6 = 21)$, resulta ser $5 \odot (3 \oplus 4) = (5 \odot 3) \oplus (5 \odot 4)$.

En efecto,

$5 \odot 3 = 4' \odot 2' = (4 \cdot 2)' = 9$

$5 \odot 4 = 4' \odot 3' = (4 \cdot 3)' = 13$

$9 \oplus 13 = 8' \oplus 12' = (8+12)' = 21$ ¡oh!

Otros resultados válidos en esta aritmética son:

TEOREMA 6.

"1" tiene las propiedades del "0", es decir:

$\cdot$) $\forall k' \in \mathbf{N}^{*}$, $k' \oplus 1 = k'$ (1 es neutro aditivo de $\mathbf{N}^{*}$).

En efecto,

$k' \oplus 1 = k' \oplus 0' = (k+0)' = k'$.

$\cdot\cdot$) $\forall k' \in \mathbf{N}^{*}$, $k' \odot 1 = 1$ (el 1 anula cualquier factor en $\mathbf{N}^{*}$).

En efecto,

$k' \odot 1 = k' \odot 0' = (k \cdot 0)' = 1$.

Obtengamos a pie las tablas de sumar y de multiplicar de $\mathbf{N}^{*}$ y comprobemos que en efecto son las anteriores (lo que ya sabemos en vista del teorema que estamos ejemplificando).

Sea $n' \in \mathbf{N}^*$ el número cuyas tablas deseamos construir, y consideremos los diagramas correspondientes:

a) tabla de sumar de n'.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{N}^* \arrow[r, "'"] \arrow[dd, "\Sigma_{n'}"] & \mathbf{N}^* \arrow[dd, "\Sigma_{n'}"] \\ \cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \mathbf{N}^* \arrow[r, "'"] & \mathbf{N}^* \end{tikzcd}$$

Se tiene para $\Sigma_{n'}$,

$\cdot$) $\Sigma_{n'}(1) = n'$ $\qquad\qquad$ $n' \oplus 1 = n'$

$\cdot\cdot$) $\Sigma_{n'}(k'') = (\Sigma_{n'}(k'))'$ $\qquad\qquad$ $n' \oplus k'' = (n' \oplus k')'$

Se puede demostrar ahora por inducción $\forall m \in \mathbf{N}$, $n' \oplus m' = (n+m)'$.

Base. Si $m = 0$, se aplica $(\cdot)$ y ya.

Paso inductivo. Suponer que $n' \oplus k' = (n+k)'$ y considérese $n' \oplus k''$ que de acuerdo con $(\cdot\cdot)$ resulta:

$n' \oplus k'' = (n' \oplus k')' = ((n+k)')' = (n+k')'$ $\quad$ †.

b)tabla de multiplicar de n' (por supuesto que aquí supondremos que ya sabemos sumar).

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{N}^* \arrow[r, "'"] \arrow[dd, "\Pi_{n'}"] & \mathbf{N}^* \arrow[dd, "\Pi_{n'}"] \\ \cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \mathbf{N}^* \arrow[r, "\sigma_{n'}"] & \mathbf{N}^* \end{tikzcd}$$

Del diagrama se ve que:

$\cdot$) $\Pi_{n'}(1) = 1$

$\cdot\cdot$) $\forall k' \in \mathbf{N}^*$, $\Pi_{n'}(k'') = \sigma_{n'}(\Pi_{n'}(k'))$ o sea

$$n' \odot k'' = (n' \odot k') \oplus n'.$$

TEOREMA 7.

$\forall m \in \mathbf{N}$, $n' \odot m' = (nm)'$

En efecto, la base de la inducción (sobre m) es la propiedad $(\cdot)$ $n' \odot 0' = n' \odot 1 = 1 = (n \cdot 0)'$.

Paso inductivo: suponer que $n' \odot k' = (nk)'$ y considerar $n' \odot k''$ que según $(\cdot\cdot)$, es

$n' \odot k'' = (n' \odot k') \oplus n' = (nk)' \oplus n' = (nk+n)' = (nk')'$

que es lo que queríamos demostrar $\quad$ †.

Ejemplo 6.

Sean a y r dos números naturales arbitrarios y consideremos la sucesión aritmética $A = \{a, a + r, a + 2r, ...\}$.

Si identificamos el elemento inicial $a(= a + 0r)$ como "0" e interpretamos $t: A \to A$ definida $t(a + nr) = a + n'r$ como la "función sucesor", resulta evidente que en A se cumplen todos los axiomas de Peano y, por lo tanto, resulta ser un modelo para los Números Naturales.

La función $f: \mathrm{N} \to A$ definida $f(n) = a+nr$ es la biyección que resulta de considerar el diagrama "canónico" entre estos dos conjuntos, y quisiéramos probar que es el isomorfismo cuya existencia está garantizada por el teorema anterior.

Para ésto, dado que $f(n + m) = a + (n + m)r$ y $f(nm) = a + (nm)r$, por definición de f, debe suceder que la suma $(\oplus)$ y el producto $(\odot)$ en la sucesión estén definidos por:

$$a + nr \oplus a + mr = a + (n + m)r \text{ y}$$
$$a + nr \odot a + mr = a + (nm)r$$

y que estas definiciones sean las que corresponden a la σ y a la π generadas por el teorema de recursión aplicado al conjunto A. Veremos que en efecto es así considerando los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\sigma"] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ \cdot \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "a+nr"'] & & \\ & A \arrow[r, "t"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\pi"] & A \arrow[d, "\pi"] \\ \cdot \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "a"'] & & \\ & A \arrow[r, "\sigma"] & A \end{tikzcd}$$

en donde n es un número natural arbitrario, σ la tabla de sumar en A del elemento $a+nr$ (imagen de n bajo f) y π es su correspondiente tabla de multiplicar.

Del primer diagrama se obtiene: $\sigma(a) = a + nr$
$\forall k \in \mathrm{N}$, $\sigma(t(a + kr))(= \sigma(a + k'r)) = t(\sigma(a + kr))$
probaremos ahora por inducción que $\forall m \in \mathrm{N}$, $\sigma(a + mr)(= (a + nr) \oplus (a + mr)) = a + (n + m)r$, que es lo que se necesita para justificar a f como bien comportada con respecto a la suma.
Base: si $m = 0$ $\quad \sigma(a + 0r) = \sigma(a) = a + nr$
Paso inductivo: supongamos ahora que el teorema se cumple para k, es decir,
$\sigma(a + kr) = a + (n + k)r$ y consideremos
$\sigma(a + k'r) = t(\sigma(a + kr)) = t(a + (n + k)r) = a + (n + k)'r = a + (n + k')r$
que es loque queríamos demostrar.

Considerando ahora el segundo diagrama notamos que $\pi(a) = a$
$\forall k \in \mathrm{N}$, $\pi(t(a+kr))(= \pi(a+k'r)) = \sigma(\pi(a+kr))$
y demostraremos que $\forall m \in \mathrm{N}$, $\pi(a+mr)(= (a+nr) \odot (a+mr)) = a+(nm)r$, por inducción sobre m:
Base: si $m = 0 \quad \pi(a) = a = a + 0r = a + (n \cdot 0)r$
Paso inductivo: suponer que $\pi(a+kr) = a + (nk)r$ y consideremos
$\pi(a+k'r) = \pi(t(a+kr)) = \sigma(\pi(a+kr)) = \sigma(a+(nk)r) = a + (nk+n)r = a + (nk')r$
resultado que completa la demostración de que f es el isomorfismo deseado †.

Ejemplo 7.

Sea ahora $B = \{a, ar, ar^2, \ldots\}$ en donde a y r son números naturales y $r \neq 0$; para considerar a B como modelo de los Naturales basta, como antes, definir el elemento inicial y la función sucesor y ver que los axiomas de Peano se cumplen. En efecto, si $a(= ar^0)$ se identifica con "0" y $t: B \to B$ está definida como $t(ar^n) = ar^{n'}$, es un problema trivial probar la validez de los axiomas de Peano. Como antes, la función $f: \mathrm{N} \to B$ definida $f(n) = ar^n$ es biyectiva y bien comportada con las operaciones, como demostraremos a continuación, saltándonos la biyección que es obvia.

Como antes, notamos que $f(n+m) = ar^{n+m}$ y $f(nm) = ar^{nm}$ por definición de f y por lo tanto las operaciones en B están obligadas a ser:

$$ar^n \oplus ar^m = ar^{n+m} \text{ y}$$
$$ar^n \odot ar^m = ar^{nm}$$

Recurriendo nuevamente a los diagramas tomando a n un número natural arbitrario:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & B \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\sigma"] & B \arrow[d, "\sigma"] \\ ar^n \arrow[r] & B \arrow[r, "t"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r] & B \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[d, "\pi"] \\ a \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma"] & B \end{tikzcd}$$

Reiteramos que σ y π son las tablas de sumar y multiplicar respectivamente del elemento ar^n.

Del primer diagrama notamos que
$\sigma(a) = ar^n$ y
$\forall k \in \mathrm{N} \quad \sigma(t(ar^k))(= \sigma(ar^{k'})) = t(\sigma(ar^k))$
y probaremos por inducción que $\forall m \in \mathrm{N} \quad \sigma(ar^m) = ar^{n+m}$, o sea, que en B $ar^n \oplus ar^m = ar^{n+m}$ como era su obligación.

Base: si $m = 0$ entonces $\sigma(ar^0) = \sigma(a) = ar^n = ar^{n+0}$
Paso inductivo: suponer que el teorema es válido para k, es decir, $\sigma(ar^k) = ar^{n+k}$ y consideremos
$\sigma(ar^{k'}) = \sigma(t(ar^k)) = t(\sigma(ar^k)) = t(ar^{n+k}) = ar^{(n+k)'} = ar^{n+k'}$.

Ahora con el otro diagrama se obtiene que
$\pi(a) = a$ y
$\forall k \in \mathbf{N} \quad \pi(t(ar^k))(= \pi(ar^{k'})) = \sigma(\pi(ar^k))(= ar^n \oplus \pi(ar^k))$.

TEOREMA 8.

$\forall m \in \mathbf{N} \quad \pi(ar^m) = ar^{nm}$

Demostración.

Base: si $m = 0$ entonces $\pi(ar^0) = \pi(a) = a = ar^0 = ar^{n0}$
Paso inductivo: suponer que $\pi(ar^k) = ar^{nk}$ y considerar
$\pi(ar^{k'}) = \pi(t(ar^k)) = \sigma(\pi(ar^k)) = \sigma(ar^{nk}) = ar^n \oplus ar^{nk} = ar^{n+nk} = ar^{nk+n} = ar^{nk'}$ †.

Ejemplo 8.

Para cada número natural n se puede definir el conjunto $n + \mathbf{N} = \{m \in \mathbf{N} \mid m \geq n\}$; una vez más hacemos notar que estos conjuntos son isomorfos a los Naturales, con la identificación natural que, como en los casos anteriores, induce un isomorfismo previa definición adecuada de las operaciones. Explícitamente,

$$\begin{aligned} n &\mapsto 0 \\ t &\mapsto {}' \end{aligned}$$

Puede verse entonces que, en realidad, este ejemplo es otro caso particular del ejemplo (6) (el ejemplo (5) es uno de éstos) con $a = n$, $r = 1$.

Terminemos haciendo notar que para la demostración de que dos sistemas enteros (A, a_0, t) y (B, b_0, s) son isomorfos (con un isomorfismo $\eta: A \to B$ tal que $\eta(a_0) = b_0$ y $\forall a \in A \quad \eta(t(a)) = s(\eta(a))$), basta considerar nuestro conocido diagrama,

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "t"] \arrow[dd, "\eta"] & A \arrow[dd, "\eta"] \\ \cdot \arrow[ur, "a_0"] \arrow[dr, "b_0"'] & & \\ & B \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

y su conmutatividad (compárese con la demostración "a pie" de la página 18).

CONCLUSION

El Arbol de los Números Sobrenaturales y la Sombra de los Axiomas de Peano

Para lo que sigue, debemos distinguir cuidadosamente la diferencia entre los teoremas lógicos (o formales) y los teoremas metamatemáticos. En el primer caso se trata de fórmulas cuya demostración tiene una estructura bien establecida. Explícitamente una deducción formal de una fórmula F a partir de las hipótesis H, es una colección finita y ordenada de fórmulas, cada una de las cuales es un axioma, una hipótesis o la consecuencia inmediata de fórmulas que le preceden en la lista. La última debe ser F *.

Un teorema metamatemático es una proposición que se formula en el metalenguaje y que se refiere a los objetos de la teoría. En este caso su "demostración" es una demostración intuitiva de la veracidad de la proposición de que se trate, en un modelo de interpretación dado.

Según René Thom, una demostración (metamatemática) es "como un camino que partiendo de una situación aceptada (y por lo tanto "comprendida" por todos) conduce, a través de pasos sucesivos hasta un estado psicológico en el que la afirmación del teorema resulta obvia", y en este contexto, "el rigor de la demostración depende del hecho de que cada paso sea *perfectamente claro*, simplemente tomando en cuenta las extensiones de significado que se han ido efectuando en pasos previos"... "La esperanza de dar a la matemática una base formal totalmente rigurosa quedó irremisiblemente (?) destruida por los teoremas de Gödel, sin embargo, nadie parece sufrir mucho por ello, debido, quizá, a la convicción de que en última instancia, el pensamiento matemático nunca ha sido totalmente formal, ni cien por ciento riguroso".

Como ya se apuntó en el prólogo de esta tesis, hemos supuesto que tenemos $\mathbf{N}$, el conjunto de los números naturales, con su elemento inicial "cero", su función "sucesor" que es biyectiva de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{N}\setminus\{0\}$ y en el que vale el "principio de inducción" y por lo tanto el teorema de recursión.

---

* Cuando una fórmula F tiene una deducción a partir de ciertas hipótesis H, en una teoría axiomática T, utilizaremos la notación

$$T, H \vdash F$$

que se lee: "en T, a partir de H se puede demostrar F".

Asímismo, hemos considerado que tenemos a nuestra disposición un sistema lógico que es lo suficientemente poderoso para desarrollar con él la aritmética usual de los naturales y que lo hemos incorporado a nuestra teoría.

Daremos ahora una definición recursiva de *Teorema Formal de* N (*T.F.*N.) apuntando primero que diremos que una fórmula F es consecuencia inmediata de $\{F_1, \ldots, F_n\}$ (fórmulas), si en nuestro sistema lógico existe una regla válida de inferencia cuyas premisas estén contenidas en $\{F_1, \ldots, F_n\}$ y cuya conclusión sea F.

DEFINICION 6.

1) Todo axioma de N es un *T.F.*N.
2) Si $F_1, \ldots, F_n$ son *T.F.*N. y F es una consecuencia inmediata de $\{F_1, \ldots, F_n\}$, entonces F es un *T.F.N.*.
3) Los únicos teoremas formales de N, son los que se generan con las reglas (1) y (2).

El conjunto de todos los *T.F.N.*, es lo que llamaremos:

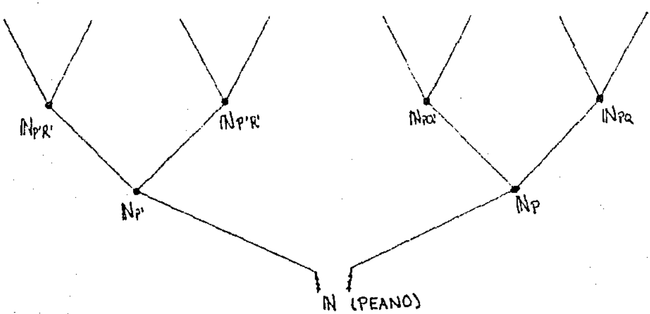
La L-Sombra de los Axiomas de Peano en N

y remarcamos que, por supuesto, tal sombra depende del sistema lógico L empleado y por lo tanto de sus reglas válidas de inferencia.

El trabajo que concluyó en el capítulo anterior, consistió en demostrar que $(\mathbf{N}, 0, ')$ es isomorfo a cualquier otro sistema entero, con el isomorfismo generado por el teorema de recursión que, como todo isomorfismo respetable, es bien comportado con respecto a la suma, al producto y al orden que también se deriven del teorema de recursión y, por lo tanto, dado que no estamos alterando la lógica que utilizamos, la *L-sombra* que los axiomas de Peano proyectan en cualquier sistema entero, coincide totalmente con la *L-sombra* de los números naturales. Sin embargo, el primer teorema de Gödel (todo sistema axiomático para N que sea consistente es incompleto) garantiza que, dado que hemos supuesto consistencia en nuestra teoría de números, existen proposiciones aritméticas que son indecidibles, es decir: existe en N, al menos una proposición P tal que ni ella ni su negación son formalmente demostrables en la teoría de los números.

Si al sistema axiomático de N (al que llamaremos Γ) se le adiciona la proposición P, seguirá siendo consistente. — En efecto,de no serlo, a partir de Γ y de P se podría derivar un absurdo, lo que permitiría, usando el metateorema de reducción al absurdo, concluir que en N, $\Gamma \vdash \neg P$ lo que no es el caso.

Por la misma razón, el sistema $\{\Gamma, \neg P\}$ (Γ adicionado con $\neg P$) es igualmente consistente. Se obtienen así dos sistemas axiomáticos consistentes, (Γ, P) y $(\Gamma, \neg P)$ cada uno de los cuales, por serlo, tienen un modelo (teoremas de Gödel-Hinkel), digamos $\mathbf{N}_P$ y $\mathbf{N}_{P'}$, cada uno de los cuales proyecta idéntica L-sombra, pero que ya no son "totalmente isomorfos" ya que en el primero "vale el teorema P" mientras que en el segundo el que se cumple es el $\neg P$. Referente al sistema (Γ, P), el teorema de Gödel asegura la existencia de otra proposición indecidible Q con la que, con una consideración análoga, formamos los sistemas axiomáticos — consistentes — (Γ, P, Q) y $(\Gamma, P, \neg Q)$ para los que existen, necesariamente, modelos $\mathbf{N}_{PQ}$, $\mathbf{N}_{PQ'}$. Y de la misma forma, empezando con $(\Gamma, \neg P)$ y la proposición indecidible R, obtendremos $\mathbf{N}_{P'R}$ y $\mathbf{N}_{P'R'}$. Y se insinua así la génesis del árbol de los números sobrenaturales, cuyos primeros "niveles" se ilustran en la siguiente figura



Resumiendo:

En el primer paso (primera aplicación de los teoremas de Gödel-Hinkel) hemos generado un nivel con dos conjuntos isomorfos a $\mathbf{N}$ hasta donde "llega Peano" (idéntica L-sombra) pero esencialmente diferentes con respecto a la proposición indecidible, P (en $\mathbf{N}$).

Si suponemos que después de k pasos tenemos un nivel con 2^k conjuntos "sobrenaturales", aplicando a cada uno de ellos los teoremas de Gödel-Hinkel (Incompletez del sistema axiomático y Existencia de un modelo dada la consistencia de este sistema) obtendremos 2^{k+1} conjuntos, lo que prueba (por inducción) que deben existir al menos $\aleph_0$ conjuntos de números sobrenaturales que se van generando por "bipartición Gödel-Hinkeliana" y que siendo isomorfos a N hasta donde concierne a "Peano", son definitivamente no isomorfos entre sí ya que cada uno de ellos difiere de cualquier otro en lo que respecta a alguna de las proposiciones indecidibles que se usaron para generarlos.

Nótese además, que el árbol mismo así construido y ya terminado, es un sistema entero (y por lo tanto isomorfo a N) con elemento inicial N, y función sucesor, la que generó cada nivel a partir del anterior.

Esta situación de ambigüedad — existencia de modelos básicamente isomorfos pero que a partir de cierto momento adquieren características personales diferentes —, no es exclusiva de la aritmética de los números naturales. Entre conjuntos, formalizados por alguna teoría (intuitiva) surge la conjetura de Cantor como un indecidible. Se puede pensar entonces en la teoría intuitiva de los conjuntos cantoriana (con la hipótesis del contínuo) y la teoría intuitiva de los conjuntos no cantoriana. — Lo mismo con el axioma de selección, por ejemplo —.

Quizá la situación más conocida se da en la geometría. Si pensamos en los postulados de Euclides — debidamente completados "a la Hilbert", por ejemplo — con excepción del de las paralelas, obtendremos la llamada "geometría absoluta" (o neutral), en la que el postulado que se excluye es indecidible. Suponerlo o aceptar su negación conduce a dos geometrías — la euclidiana y la no-euclidiana — unidas por una base común (la geometría absoluta), al mismo tiempo separadas por el famoso "quinto postulado", pero además indisolublemente encadenadas por el teorema (gödeliano) que asegura que una es consistente si y sólo si la otra lo es. Remarcamos aquí, que esta situación es análoga a la que se tiene cuando se argumenta que (Γ, P) y $(\Gamma, \neg P)$ tienen "consistencias" estrechamente relacionadas, aunque en este caso la razón no sea la existencia de modelos sino la indecibilidad de las proposiciones — y la consistencia de Γ, por supuesto —.

Vale la pena considerar que a despecho de lo temprano que se presenta en geometría la necesidad de decidir la rama por la que se desea subir, la existencia de la no-euclidiana se ignoró por mucho tiempo, y sus resultados se rechazaron como "contrarios a la razón y al buen sentido". Se necesitó el genio de Gauss, Bolyai y Lobachevsky para reivindicar el reconocimiento de su existencia y hacer apreciar a todos la belleza y profundidad de sus frutos.

En la teoría de los números, los indecidibles se encuentran, quizá, demasiado "altos", a pesar de que existe una infinidad de ellos, y aunque tal vez alguna de las conjeturas clásicas resulte serlo, por lo pronto no parece ser demasiado relevante el tener que adoptarlas o rechazarlas oficialmente.

En un artículo de divulgación publicado en la revista Science, se menciona la aparición de indecidibles cuyo mérito es que no parecen ser de las cosas que "cocinan" los lógicos, que podrían resultar artificiales, sino que se generan a partir de problemas de combinatoria, es decir, de los que los matemáticos aceptan como problemas reales de la matemática. (La indecidibilidad aquí, se genera porque la función que describe el comportamiento de las funciones crece demasiado rapido).

Como reflexión final, apuntamos que si, como puede ser el caso, los teoremas de Gödel y en especial el de la incompletez no marcan una característica esencial de los sistemas axiomáticos, sino una limitación (temporal (?)) de la capacidad humana para generar reglas válidas de inferencia, o si — como dijo Platón — "la matemática no crea ni inventa sus objetos, simplemente los descubre, y los números (naturales), como otros entes matemáticos, son formas incorpóreas que están y viven en un mundo distinto al nuestro, pero accesibles al intelecto", el árbol de los números sobrenaturales podría desaparecer totalmente eliminando de paso la amenaza de construir sobre sus ramas enteros "partidos", racionales "alocados", reales "irreales" y complejos "desacomplejados".

BIBLIOGRAFIA

Kleen, S.C., *"Introduction to Metamathematics"*
Van Nostrand, Princeton, N.J. (1952)

Kleen, S.C., *"Mathematical logic"*
Van Nostrand, Princeton, N.J. (1952)

Stoll, R., *"Set Theory and Logic"*
W.H. Freeman & Co. (1963)

Halmos, P.R., *"Naive Set Theory"*
Van Nostrand, Princeton, N.J. (1960)

Rincón, H., *Comunicación oral*

Rincón, C., *Apuntes y Notas*

Landau, E.G.H., *Foundations of Analysis*
Chelsea, Nueva York. (1957)

Dedekind, R., *"Essays on the Theory of Numbers"*
Dover, Nueva York. (1963)

Nagel, E. y Newman, J., *"El Teorema de Gödel"*
CONACYT, México. (1981)

Peano, G., *"Aritmetices Principia"*
Bocca, Turín.

Kolata, G., *"Does Gödel Theorem Matter to Mathematics?"*
Science, vol 218. (Noviembre 1982) (Artículo)