UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOS NUMEROS ENTEROS EN LAS OLIMPIADAS DE MATEMATICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A:

ANDRES TORRES AGUILAR

México, D.F. 1991

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCION

A todos los profesores de matemáticas les gustaría tener resuelta la pregunta: ¿Cómo hacer para que los alumnos se interesen por las matemáticas? Una pregunta que es un poco más sencilla es: ¿Cómo hacer para que los alumnos con más talento en esta ciencia, puedan desarrollarlo con gusto?

Los concursos de matemáticas han probado ser una buena motivación para que los jóvenes talentosos desarrollen su creatividad, aprendan muchos conceptos y también aprendan a usarlos.

En español hay muy pocos textos que puedan introducir a una persona a los concursos de matemáticas y hay un abismo entre los problemas a los que se enfrenta uno en la escuela y los problemas que se plantean en los concursos.

Este trabajo pretende servir como puente entre estos dos niveles de problemas. En él hemos incluído una serie de problemas relacionados con los números enteros. Estos problemas se agrupan en diferentes categorías:

a) Los típicos. Estos problemas pueden aparecer en otros textos, algunos son muy fáciles pero los incluimos porque todas las personas que participen en concursos deben conocerlos.

b) Los escalones. Estos son problemas que para su solución requieren de trucos parecidos a los usados en los problemas que han sido puestos en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas, pero que tienen un grado de dificultad menor.

c) Los originales. También incluimos problemas inventados por nosotros (Alejandro Illanes Mejía, quien dirigió esta tesis) y yo.

Algunos de estos ya han sido usados en concursos o en entrenamientos debido a que Alejandro pertenece al Comité Organizador de las Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas.

Este trabajo consta de tres secciones principales a saber: Enunciados, Sugerencias y Soluciones. Como esperamos que sirva para adquirir gradualmente habilidades para resolver problemas, creemos que se puede aprovechar mejor si primero se intenta resolver cada problema pensándolo un buen rato. Si esto no funciona, leer la sugerencia. Pero leer la solución sólo como último recurso o en el caso de que se haya resuelto el problema y se quiera comparar la solución.

Como sólo incluimos problemas de números enteros, para tener una visión mas amplia, recomendamos en la bibliografía más libros sobre problemas.

Estamos suponiendo que el lector tiene los conocimientos de matemáticas que se enseñan en el cuarto año de bachillerato (o primero de preparatoria, vocacional, bachilleres, étc.).

Además de esto, para algunos problemas, el lector necesitará de los conocimientos elementales de Teoría de Números contenidos en los primeros capítulos del libro de Niven y Zuckerman.

Andrés Torres Aguilar

Mayo de 1991.

ENUNCIADOS.

PROBLEMA 1.

Demostrar que la fracción $\frac{3n^3-n^2-n}{3n^2+2n+1}$ es irreducible para todo número natural n.

PROBLEMA 2.

Sean m, n números naturales y primos relativos, tales que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = q$ para algún q en los enteros entonces $n = \pm 1$.

PROBLEMA 3.

Probar que los números 1573, 157573, 15757573, 1575757573, ... no pueden ser primos.

PROBLEMA 4.

Expresando los números enteros en el sistema decimal de numeración, deducir los siguientes criterios de divisibilidad.

a) Un número es divisible entre 2 si y sólo si, su última cifra de la derecha es divisible entre 2.

b) Un número es divisible entre 3 si y sólo si, la suma de sus cifras es divisible entre 3.

c) Un número es divisible entre 5 si y sólo si, su última cifra de la derecha es 0 o 5.

d) Un número es divisible entre 7 si y sólo si, la diferencia entre el número que se obtiene quitándole la última cifra de la derecha y dos veces dicha cifra es divisible entre 7.

e) Un número es divisible entre 9 si y sólo si, la suma de sus cifras es divisible entre 9.

f) Un número es divisible entre 11 si y sólo si, la suma de sus cifras de lugar impar, menos la suma de las cifras de lugar par es divisible entre 11.

PROBLEMA 5.

Evaluar la suma $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{1990}]$. Donde para un número real x, el símbolo [x] denota el máximo entero que es menor o igual que x.

PROBLEMA 6.

Evaluar la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, para todo número natural n.

PROBLEMA 7.

Evaluar la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, para todo número natural n.

PROBLEMA 8.

Evaluar la suma $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, para todo número natural n.

PROBLEMA 9.

Probar que los números naturales x, y, z, satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, $(x,y,z) = 1$ y x par si y sólo si, existen números naturales a y b tales que $a > b$, $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$, a y b son primos relativos y ab es par.

PROBLEMA 10.

Suponiendo que todos los coeficientes del polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ son enteros y que p/q es una solución de la ecuación $f(x) = 0$, donde p, q son enteros, $q \neq 0$ y p y q son primos relativos. Demostrar que p divide a a_0 y q divide a a_m.

PROBLEMA 11.

Sean r y n números naturales tales que $0 \leq r \leq n$, denotemos por $\binom{n}{r}$ al número de subconjuntos con r elementos que tiene un conjunto A con n elementos.
Probar que para todo número natural n, $2^{2n} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$.

PROBLEMA 12.

Probar que el número de primos es infinito.

PROBLEMA 13.

Calcular el producto de las cifras del número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ para n impar.

PROBLEMA 14.

Considere los números del 1 al 1000, inviértalos (ej. 734 se convierte en 437 y 10 en 01) y súmelos. Encontrar la suma de todos estos números.

PROBLEMA 15.

Probar que el mínimo común múltiplo de $n!$, $n! + 1$, $n! + 2$, ... , $n! + k$; con $n \geq 2k$ es igual a:

$M = n!(n! + 1)(n!/2 + 1)(n!/3 + 1)\cdots(n!/k + 1).$

PROBLEMA 16.

Llamemos K_6 a la gráfica completa con 6 puntos. Es decir, K_6 consta de 6 puntos y todas las aristas posibles que los unen. Probar que si todas las aristas de K_6 son iluminadas usando dos colores, entonces existe un triángulo con sus tres lados del mismo color.

PROBLEMA 17.

Sea K_5 como en el problema 16. Probar que si las aristas de K_5 estan iluminadas con dos colores, entonces hay un triángulo o un pentágono con todos sus lados del mismo color.

PROBLEMA 18.

Encontrar el número más pequeño tal que al dividirlo

por	1990	da residuo	1959
"	995	" "	964
"	398	" "	367
"	199	" "	168.

PROBLEMA 19.

Los números de Fibonacci F_n se definen mediante las siguientes reglas: $F_1 = F_2 = 1$ y, para $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Probar que $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$ para todo número natural n.

PROBLEMA 20.

Hallar k_1, k_2, ..., números naturales diferentes entre si tales que $1990^{k_i} + 1$ es primo relativo con $1990^{k_j} + 1$ para toda $i \neq j$.

PROBLEMA 21.

a) Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$. Determinar un subconjunto B de A que no contenga tres términos que formen una progresión aritmética y que tenga 15 elementos.

b) Mostrar que es posible hallar 1900 enteros positivos, menores o iguales a 10^5, tales que entre estos no hay tres números que formen una progresión aritmética.

PROBLEMA 22.

Determinar todos los números N de 4 dígitos que tienen las siguientes propiedades:

i) N es divisible por 11.

ii) El producto de sus cifras es un cuadrado perfecto.

iii) Alguna de sus cifras es 7.

iv) Ninguna de sus cifras es 0.

PROBLEMA 23.

Demostrar que $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

PROBLEMA 24.

Demostrar que el producto de r enteros consecutivos es divisible por r!.

PROBLEMA 25.

Probar que no existen números racionales x, y tales que $x^2 + y^2 = 1990$.

PROBLEMA 26.

Probar que para todo número natural n, se pueden encontrar n números consecutivos que no son primos.

PROBLEMA 27.

Probar que para todo número natural n, se pueden encontrar n números consecutivos divisibles por algún cuadrado.

PROBLEMA 28.

Con dos argumentos diferentes probar que para todo número natural n, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

PROBLEMA 29.

Dado un conjunto A no vacío. Probar que el número de subconjuntos con un número par de elementos es igual a la mitad del número de subconjuntos de A.

PROBLEMA 30.

Sean n un número natural y $p_1, p_2, \dots, p_r$ r primos distintos tales que $p_1 + p_2 + \dots + p_r = n + r - 1$. Probar que el número $\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}$ es un entero.

PROBLEMA 31.

Sean $A = \{1, 2, \ldots, 100\,000\,000\,000\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y f la función de A en los naturales tal que $f(a)$ = suma de los dígitos de a. Probar que:

a) $f(f(f(a)))$ es un elemento de B para toda a en A.

b) Para cada b en B, existe a en A tal que $f(f(f(a))) = b$.

c) Sea g una función de B en los naturales tal que $g(b)$ = número de elementos $a \in A$ tales que $f(f(f(a))) = b$. Determinar la b en B para la que $g(b)$ es máximo y evaluar $g(b)$.

PROBLEMA 32.

Sea $a_n = (n+1)\cdot\sum^{n} (-1)^{n-i} \frac{i}{i+1} \binom{n}{i}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Probar que $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1, \ldots$

PROBLEMA 33.

Probar que $1 + 1/3 + \ldots + 1/1989 = (1/2 + 1/4 + \ldots + 1/1990) + (1/996 + 1/997 + \ldots + 1/1990)$.

PROBLEMA 34.

Sean n y r números naturales tales que $0 \leq r \leq n$.

Probar que $\binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \ldots + \binom{r}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

PROBLEMA 35.

Sean n y r como en el problema 34. Probar que

$1\cdot\binom{n-1}{r-1} + 2\cdot\binom{n-2}{r-1} + \ldots + (n-r+1)\cdot\binom{r-1}{r-1} = \binom{n+1}{r+1}$.

PROBLEMA 36.

Sean a, d números naturales fijos y sea f una función de los naturales en los naturales tal que:

i) $f(m) + f(n) - f(m + n) = a - d$, para todos los números naturales m y n.

ii) $f(2n + 1) = f(n) + (n + 1)d$, para todos los números naturales n.

Calcular $f(1)$ y $f(1991)$.

PROBLEMA 37.

Dado un número natural k, supongamos que $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ es su factorización (única) como producto de primos.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de los naturales en los naturales, definida como sigue:

i) $f_1(k) = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_r p_r)^2$

ii) $f_n(k) = f_{n-1}(f_1(k))$, para $n > 1$.

Encontrar $f_{1990}(1990)$.

PROBLEMA 38.

Demostrar que la siguiente ecuación posee una infinidad de soluciones:

$$\frac{a^2 - b^2}{ab - 1} = 1.$$ Donde a y b son enteros positivos.

PROBLEMA 39.

Encontrar el conjunto de todos los enteros n con la propiedad de que el conjunto $\{n, n + 1, n + 2, \ldots, n + 10\}$ puede ser partido en dos conjuntos tales que la suma de los números en uno es igual a la suma de los números del otro.

PROBLEMA 40.

Demostrar que $F_{k-1} \cdot F_{k+1} + (-1)^{k-1}$ siempre es un cuadrado perfecto, para toda $k \geq 2$ (F_k denota el k-ésimo número de Fibonacci).

PROBLEMA 41.

Demostrar que si F es un número de la sucesión de Fibonacci, entonces alguno de los siguientes dos números: $5 \cdot F^2 + 4$ o $5 \cdot F^2 - 4$ es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 42.

Sean m y n números naturales, con $n \geq m$. Probar que $(n^2 - n \cdot m - m^2)^2 = 1$ si y sólo si, m y n son números de Fibonacci consecutivos.

PROBLEMA 43.

Sean r y n números naturales tales que $1 \leq r \leq n$. Considérense todos los subconjuntos con r elementos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Cada uno de estos subconjuntos tiene un elemento mayor. Sea $F(n,r)$ la suma de todos estos elementos mayores. Probar que $F(n,r) = r \cdot \binom{n+1}{r+1}$.

PROBLEMA 44.

Encontrar todos los números naturales que se pueden escribir en la forma $3n + 35m$ con $n, m \geq 0$.

PROBLEMA 45.

Sea m un número natural primo relativo con 10. Probar que existe una infinidad de números de la sucesión 1001, 1001001, 1001001001, 1001001001001, ... que son divisibles por m.

PROBLEMA 46.

Sea p un número primo. Mostrar que el mayor exponente α tal que p^{α} divide a $n!$ es $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right]$.

PROBLEMA 47.

Si se escribiera 1000! en la notación decimal ordinaria sin el signo factorial, ¿Cuántos ceros se escribirían en línea en el extremo derecho?

PROBLEMA 48.

Encontrar todos los números naturales a, b, c, d tal que la suma del producto de cualquiera dos de ellos con el producto de los otros 2 restantes es igual a 1990.

PROBLEMA 49.

Para cada número natural r definimos las funciones siguientes en el conjunto de los números naturales $f_r(n) = n - 10^r[n/10^r]$ y $g_r(n) = (f_r(n) - f_{r-1}(n))/10^{r-1}$, donde $g_1(n) = f_1(n)$. Finalmente definimos la función $g(n) = g_1(n)10^9 + g_2(n)10^8 + \ldots + g_{10}(n)10^0$. Encontrar $\sum_{n=1}^{10^6} g(n)$.

PROBLEMA 50.

Sean n, s números naturales y d su máximo común divisor. Demostrar que si m es mayor que $n \cdot s$ y divisible por d entonces existen dos números naturales x, y tales que $m = n \cdot x + s \cdot y$.

PROBLEMA 51.

Sea $x = 50!$. Escribir a x como producto de 50 números, de tal manera que la suma de los factores sea menor que 1060.

PROBLEMA 52.

Sea n un entero fijo mayor que 2 y sea V_n el conjunto de enteros de la forma $1 + kn$, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$. Un número m en V_n es indescomponible en V_n cuando no existen números p, q en V_n tales que $m = p \cdot q$. Demostrar que:

a) Los cuatro primeros elementos de V_n son indescomponibles.

b) Hay una infinidad de elementos indescomponibles en V_n.

PROBLEMA 53.

Definamos la siguiente sucesión:

1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,... .

Sea f una función de los naturales en los naturales tal que $f(m)$ = a la suma de los primeros m términos de la sucesión definida arriba. Encontrar $f(1990)$.

PROBLEMA 54.

Sea a un número natural y sea $M(a)$ como el número de elementos del conjunto $\{ b : b$ es número natural y $a + b$ divide a $ab \}$.

Determinar para que a's se cumple que $M(a) = 1$.

PROBLEMA 55.

Sean a y b números naturales primos relativos. Demostrar que ab es el máximo entero que no puede ser expresado en la forma $xa + yb$ donde x, y son enteros no negativos mayores que cero.

PROBLEMA 56.

Sea T el conjunto que consiste de todos los enteros positivos que, en base 3, tienen a lo más 11 dígitos y cada uno de los cuales es igual a 0 o a 1.

a) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto T y cuál es el mayor?

b) Probar que entre los elementos de T no hay tres que formen una progresión aritmética.

PROBLEMA 57.

Determine todos los números naturales r y s tales que:

$2^r - 3^s = 1$.

PROBLEMA 58.

Encontrar todos los enteros n mayores que 2 tales que existe una permutación $\{ b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \}$ de los elementos del conjunto $A_n = \{ 0, 1, \ldots, n - 1 \}$ tal que si $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ son los residuos que resultan de dividir los números b_0, $(b_0 + b_1)$, ..., $(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1})$ por n, entonces $A_n = \{ c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \}$.

PROBLEMA 59.

Sea M un conjunto con 1990 enteros positivos distintos, tales que ninguno de ellos tiene un divisor primo mayor de 26. Demostrar que M contiene al menos 2 elementos distintos cuyo producto es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 60.

Dividamos un tablero de ajedrez en 16 cuadrados C_1, C_2, ..., C_{16}, donde cada uno contiene 4 cuadrados unitarios. Diremos que dos números son adyacentes si estan contenidos en el mismo cuadrado C_i. ¿De cuántas formas se pueden colocar los números del 1 al 64, en el tablero, de tal manera que si a y b son adyacentes entonces $|a - b| \geq 16$?.

SUGERENCIAS

PROBLEMA 1.

Suponer lo contrario y dividir $3n^3 - n^2 - n$ entre $3n^2 + 2n + 1$ como si fueran polinomios.

PROBLEMA 2.

Pruebe que n divide a m.

PROBLEMA 3.

Dividir 1573 entre 13 y construir 157573 en función de 1573, 15757573 en función de 157573, étc.

PROBLEMA 4.

Para b) y e) hay que observar que $10 \equiv 1 \pmod 9$ y $10^k \equiv 1 \pmod 9$ para todo número natural k. Para d), nótese que $P = 10[(a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \dots + a_2) - 2a_1] + 7(3a_1)$.

PROBLEMA 5.

$[\sqrt{x}] = n$ significa que $n^2 \leq x < (n + 1)^2$.

PROBLEMA 6.

Considerar las expresiones siguientes:

$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n$

$n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1.$

Y sumar término a término.

PROBLEMA 7.

Considerar el siguiente conjunto de igualdades:

$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

$n^3 - (n - 1)^3 = 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1$

$(n - 1)^3 - (n - 2)^3 = 3(n - 2)^2 + 3(n - 2) + 1$

$\vdots$

PROBLEMA 8.

Proceder como en el problema 7.

PROBLEMA 9.

Si se cumple la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$, $(x,y,z) = 1$ y x es par entonces $(x/2)^2 = [(z + y)/2][(z - y)/2]$, donde $(z + y)/2$, $(z - y)/2$ son primos relativos y cada uno de ellos es igual al cuadrado de algún entero.

PROBLEMA 10.

Sustituir y multiplicar.

PROBLEMA 11.

Desarrollar $(1 + 1)^{2n}$ y $(1 - 1)^{2n}$

PROBLEMA 12.

Suponer que sólo hay un número finito $p_1, \ldots, p_r$ de primos, ¿Puede ser primo el número $n = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$?

PROBLEMA 13.

Considerar la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ módulo 10.

PROBLEMA 14.

Los números que terminan en cero, no aparecen en la suma. Los números mayores que 100 que no terminan en 0 aparecen una vez, los números menores que 100 que no terminan en cero aparecen dos veces, étc. El valor de la suma es 454546.

PROBLEMA 15.

Usando combinaciones lineales de los números, probar que son primos relativos entre sí.

PROBLEMA 16.

Tome un punto fijo p de K_6, entonces al menos tres de ellas deben ser del mismo color, llame a dichos puntos que unen a p, a, b y c. Analice los colores de las aristas que unen a los puntos a, b y c.

PROBLEMA 17.

Suponga que no se tiene un triángulo del mismo color. Pruebe que a un mismo punto p no pueden llegar tres aristas del mismo color y que no se forman cuadriláteros del mismo color.

PROBLEMA 18.

Sumar 31.

PROBLEMA 19.

Inducción.

PROBLEMA 20.

Probar con $k_n = 2^n$.

PROBLEMA 21.

a) Hacerlo por medio de una Criba. Es decir, escribir los números del 1 al 40, comenzar marcando algunos y tachando los que ya no pueden ser usados.

b) Por el a) en el intervalo [1,40] hay 15, en el [81, 120] hay otros quince, entonces en el [1,120] hay 30, étc.

PROBLEMA 22.

Usar el problema 4.

PROBLEMA 23.

Este problema se puede resolver por inducción haciendo uso de la igualdad:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}.$$

PROBLEMA 24.

Usar el problema 23.

PROBLEMA 25.

Probar que la ecuación $a^2 + b^2 = 1990c^2$ no tiene solución para enteros a, b y c.

PROBLEMA 32.

Hacer manipulaciones algebraicas hasta obtener expresiones del tipo $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^n b^{n-i}$.

PROBLEMA 33.

Usar que $1/2k = -1/2k + 1/k$ para toda $k = 1, 2, 3, \ldots$.

PROBLEMA 34.

Usar la igualdad: $\binom{n-k+2}{r+1} = \binom{n-k+1}{r+1} + \binom{n-k+1}{r}$.

PROBLEMA 35.

Usar la igualdad sugerida en el problema anterior.

PROBLEMA 36.

Probar que $f(1) = a$ y $f(n + 1) = a + nd$.

PROBLEMA 37.

Evaluar $f_1(1990)$, $f_2(1990)$, ... , $f_{12}(1990)$.

PROBLEMA 38.

Hacer $a_2 = 2a_1 + b_1$ y $b_2 = a_1 + b_1$.

PROBLEMA 39.

Sean A y B tales conjuntos. Si A tiene más elementos que B, notar que $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) \leq \sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b \leq (n + 6) + (n + 7) + (n + 8) + (n + 9) + (n + 10)$.

PROBLEMA 40.

Demostrar que $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$, para toda $n \geq 2$.

PROBLEMA 41.

Demostrar que $5F_n^2 + 4(-1)^n = (F_{n+2} - F_{n-2})^2$, para toda $n \geq 3$.

PROBLEMA 42.

Suponga que (n_1,n_2) es solución, con $n_2 > 1$, entonces $n_1 \geq n_2$. Sea $n_3 = n_1 - n_2$ entonces (n_2, n_3) es también solución y $n_1 = n_2 + n_3$. Si $n_3 > 1$, repetir el proceso hasta que algún $n_i = 1$ y regresar.

PROBLEMA 43.

Para cada k, contar cuantos subconjuntos con r elementos hay que tienen a k como su elemento mayor.

PROBLEMA 44.

Para los naturales menores o iguales que 70 determinar directamente si se pueden o no expresar en tal forma. Todos los mayores que 70 sí se pueden expresar, para probar esto, es útil dividir entre 3 y usar que $70 \equiv 1 \pmod 3$ y $35 \equiv 2 \pmod 3$.

PROBLEMA 45.

Para la solución de este problema se tiene que hacer uso del teorema de la ϕ de Euler que dice que si a y b son enteros primos relativos, entonces $a^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod b$, donde $\phi(b)$ es el número de enteros positivos menores o iguales a b y primos relativos con b.

PROBLEMA 46.

Los múltiplos de p^m en la sucesión 1, 2, 3, ..., n son los números $p^m, 2p^m, 3p^m, \ldots, \left[\frac{n}{p^m}\right]p^m$.

PROBLEMA 47.

Encontrar la máxima potencia de 10 que divide a 1000!.

PROBLEMA 48.

Restar dos a dos las ecuaciones resultantes.

PROBLEMA 49.

Mostrar que $g_r(n)$ = r-ésima cifra de n

PROBLEMA 50.

Hacer primero el caso en que $d = 1$. Los residuos que dejan los números $n \cdot 1, n \cdot 2, \ldots, n \cdot (s - 1), n \cdot s$, al dividirlos entre s, son los números $0, 1, \ldots, s - 1$.

PROBLEMA 51.

Escriba a $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ donde p_i es primo y α_i es el número de veces que aparece p_i en x. Cada factor debe ser igual en promedio a $[1060/30] = 21$. Trate de encontrar 50 factores que en promedio sean igual a 21.

PROBLEMA 52.

Hacer algo parecido a lo que se hizo en el problema 12.

PROBLEMA 53.

Escribir la sucesión en la siguiente forma:

1

2 2

3 3 3

4 4 4 4

....

n n n n ... n (n-veces)

Encontrar la máxima n tal que $1 + 2 + \ldots + n \leq 1990$. Para sumar, completar el cuadrado con 1's en el primer renglón, con 2's en el segundo, étc.

PROBLEMA 54.

Las a's buscadas son los números primos.

PROBLEMA 55.

Usar el problema 6.

PROBLEMA 56.

a) Observar que hay 2^{10} de 11 dígitos exactamente, 2^9 de 10 dígitos, étc.

b) Si x, y, z forman una progresión aritmética, entonces $y - x = z - y$, es decir $x + z = 2y$. Usando que son números que sólo tienen ceros y unos, deducir que $x = y = z$.

PROBLEMA 57.

De todos los sumandos de la suma

$(1 + 2) + (2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5) + \ldots + (2^{r-2} + 2^{r-1})$ se puede factorizar un 3.

PROBLEMA 58.

Probar que para los impares no se puede y que para los pares si.

PROBLEMA 59.

Cualquier m en M es de la forma $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_9^{\alpha_9}$, a m le asignamos el vector $(x_1, x_2, \ldots, x_9)$, donde $x_i = 0$ si αi es par y $x_i = 1$ si α_i es impar, hay a lo más 2^9 vectores posibles distintos.

PROBLEMA 60.

Los números del 1 al 16 quedarán en cuadrados diferentes.
Mostrar que el que contiene al 1 tiene a los números 17, 33 y 49; el que contiene al 2 tiene a los números 18, 34 y 50, étc.

SOLUCIONES

PROBLEMA 1.

Supongamos que la fracción se puede reducir para algún número natural n, entonces existe un primo p que divide a $3n^3 - n^2 - n$ y a $3n^2 + 2n + 1$. Por división euclidiana de $3n^3 - n^2 - n$ entre $3n^2 + 2n + 1$, se tiene $3n^3 - n^2 - n = (3n^2 + 2n + 1)(n - 1) + 1$. Es decir, $(3n^3 - n^2 - n) + (3n^2 + 2n + 1)(1 - n) = 1$. Pero p divide a $(3n^2 + 2n + 1)(1 - n)$ y a $3n^3 - n^2 - n$, entonces tiene que dividir a su suma que es 1. Esto es imposible porque ningún primo divide a 1. Esta contradicción prueba que la fracción es irreducible para todo número natural n.

PROBLEMA 2.

Como $(m/n)^2 = q$, entonces $m^2 = q \cdot n^2$. De aquí que n divide a $m \cdot m$, pero como n y m son primos relativos, necesariamente n divide a m. Esto último se da solamente si $n = \pm 1$. Obsérvese que este problema también se puede obtener del problema 10.

PROBLEMA 3.

El número 1573 es divisible por 13. Si a este número (1573) lo multiplicamos por 100 y le sumamos 273 = 13(21), obtenemos el número 157573, si a este último lo multiplicamos por 100 y le sumamos 273, obtenemos el número 15757573, étc. En general si al número 15757...573, formado con n 57's lo multiplicamos por 100 y le sumamos 273, obtenemos el número 15757...573, formado con (n + 1) 57's.

Por tanto dichos números son todos divisibles por 13 y consecuentemente no pueden ser primos.

PROBLEMA 4.

Consideramos a un número $P = a_n a_{n-1} \ldots a_1$ escrito en notación decimal. Entonces $P = a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10 + a_1$.

a) Como $10, 10^2, \ldots, 10^n$ son congruentes a cero módulo 2, entonces $P \equiv a_n \cdot 0 + \ldots + a_2 \cdot 0 + a_1 \equiv a_1 \pmod 2$. De manera que 2 divide a P si y sólo si, $P \equiv 0 \pmod 2$ o equivalentemente $a_1 \equiv 0 \pmod 2$ que es lo mismo que 2 divide a a_1. Por tanto 2 divide a P si y sólo si, 2 divide a su última cifra. Similarmente se analiza el inciso c).

b) Como $10 \equiv 1 \pmod 3$, tenemos que $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 3$. Para todo número natural k. De manera que $P \equiv a_n \cdot 1 + \ldots + a_2 \cdot 1 + a_1 \equiv a_n + \ldots + a_1 \pmod 3$. Razonando como en el caso anterior, obtenemos que 3 divide a P si y sólo si, 3 divide a la suma de sus cifras. Como $10 \equiv 1 \pmod 9$, el mismo razonamiento se puede hacer para el inciso e).

d) Sea Q el número que resulta de quitarle la última cifra a P. Entonces $Q = a_n a_{n-1} \ldots a_2 = a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_3 10 + a_2$. De manera que $P = 10Q + a_1 = 10(Q - 2a_1) + 21a_1$. Si 7 divide a P entonces 7 divide a $10(Q - 2a_1) + 21a_1$. Así que 7 divide a $10(Q - 2a_1)$ y como 7 es primo relativo con 10, tenemos que 7 divide a $Q - 2a_1$. Ahora si 7 divide a $Q - 2a_1$ entonces 7 divide a

$10(Q - 2a_1) + 21a_1 = P$. Por tanto 7 divide a P si y sólo si, 7 divide a $Q - 2a_1$.

f) Notemos que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, entonces $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$, para todo número natural k. Entonces $P = a_n10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_210 + a_1 \equiv a_n(-1)^{n-1} + a_{n-1}(-1)^{n-2} + \ldots + a_2(-1) + a_1 \equiv a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n \pmod{11}$. Por tanto 11 divide a P si y sólo si, 11 divide a $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n$.

PROBLEMA 5.

Sea n un número natural, la igualdad $[\sqrt{m}] = n$ significa que $n \le \sqrt{m} < n + 1$. Esto es lo mismo que $n^2 \le m < (n + 1)^2$. Entonces si $1^2 \le m < 2^2$, se tiene que $\sqrt{m} = 1$. Si $2^2 \le m < 3^2$, se tiene que $\sqrt{m} = 2$, étc. De esta manera podemos calcular la suma pedida:

$$[\sqrt{m}] = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \le m < 4 & \text{hay } 3 = 2\cdot1 + 1 & \text{(unos)} \\ 2 & \text{si } 4 \le m < 9 & \text{hay } 5 = 2\cdot2 + 1 & \text{(doses)} \\ \vdots & & & \\ 43 & \text{si } 1849 \le m < 1936 & \text{hay } (1936-1849) = 2\cdot43+1 & \text{(43's)} \\ 44 & \text{si } 1936 \le m < 1991 & \text{hay } (1991-1936) = 55 & \text{(44's)} \end{cases}$$

Por tanto

$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{1990}] =$

$1(2\cdot1 + 1) + 2(2\cdot2 + 1) + \ldots + 43(2\cdot43 + 1) + 44\cdot55 =$

$(2\cdot1 + 1) + (2\cdot2^2 + 2) + \ldots + (2\cdot43^2 + 43) + 44\cdot55 =$

$2(1^2 + 2^2 + \ldots + 43^2) + (1 + 2 + 3 + \ldots + 43) + 44\cdot55 =$

$2(43\cdot44\cdot87/6) + (43\cdot44/2) + 44\cdot55 = 54868 + 946 + 2420 = 58234.$

PROBLEMA 6.

Sea $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n$, entonces

$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1$

Sumando estas dos ecuaciones término a término, se obtiene que

$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) + (n + 1)$, así que

$2S = n(n + 1)$. De donde $S = n(n + 1)/2$.

PROBLEMA 7.

El truco que vamos a usar aquí se puede generalizar para poder encontrar sumas del tipo $1^s + 2^s + \ldots n^s$ donde s es un número natural. Esto se puede hacer recursivamente, conociendo las sumas correspondientes a la potencia $s - 1$, usando el binomio de Newton para calcular las diferencias $(k + 1)^s - k^s$ y haciendo algo análogo a lo que haremos a continuación.

Consideremos la igualdad $(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ y apliquémosla sustituyendo n por $n - 1$, n por $n - 2$ y así sucesivamente hasta llegar a 1. Entonces obtenemos una serie completa de igualdades

$$\begin{array}{rclclcl}
(n + 1)^3 & - & n^3 & = & 3n^2 & + \quad 3n & + 1 \\
n^3 & - & (n - 1)^3 & = & 3(n-1)^2 & + 3(n - 1) & + 1 \\
(n - 1)^3 & - & (n - 2)^3 & = & 3(n - 2)^2 & + 3(n - 2) & + 1 \\
 & & & \vdots & & & \\
2^3 & - & 1^3 & = & 3(1)^2 & + \quad 3(1) & + 1.
\end{array}$$

Sumando estas igualdades, obtenemos:

$(n + 1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + n.$

Utilizando el problema 6 y despejando $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ llegamos a:

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)/6].$

PROBLEMA 8.

Se procede exactamente en la misma forma que el problema 7, a partir de la igualdad $(n + 1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$, y se obtiene que $1^3 + 2^3 +...+ n^3 = n^2(n + 1)^2/4$.

PROBLEMA 9.

Primero supongamos que $x^2 + y^2 = z^2$, que x es par y que $(x,y,z) = 1$.

No es posible que y sea par pues esto implicaría que z es par y entonces 2 dividiría a los tres números lo cual es absurdo. Por la misma razón z es impar. Así que $z + y$, $z - y$ son pares y $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z + y}{2}\,\frac{z - y}{2}$. Probemos que $(z + y)/2$ y $(z - y)/2$ son primos relativos. Supóngamos lo contrario, es decir, supóngamos que existe un primo p que los divide a ambos, entonces p divide a la suma que es igual z y a la resta que es igual a y, de aqui que p divide a x, esto contradice a la hipótesis de que $(x,y,z) = 1$. Por tanto $(z + y)/2$ y $(z - y)/2$ son primos relativos, y como su producto es el cuadrado de un entero, entonces cada uno de ellos tiene que ser un cuadrado.

Sea $a^2 = (z + y)/2$ y $b = (z - y)/2$ entonces $x/2 = ab$, además como $0 < y < z$, entonces $0 < b < a$. Y claramente $(a,b) = 1$.

Resolviendo el sistema encontramos que $z = a^2 + b^2$, $y = a^2 - b^2$, $x = 2ab$.

Sólo nos falta ver que ab es par. Si a y b fueran ambos pares o ambos impares entonces z sería par, lo cual es una contradicción. Por tanto uno es par y el otro es impar entonces ab es par.

Esto termina la prueba de la suficiencia. Para probar la otra implicación, escribimos $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$. Entonces $x^2 + y^2 = 4a^2b^2 + (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

$$= a^2 + 2a^2b^2 + b^2 = (a^2 + b^2)^2 = z^2,$$ con esto terminamos la prueba.

PROBLEMA 10.

Primero probemos el siguiente resultado: Si a y b son números enteros y primos relativos entonces para todo número natural n se tiene que: a y b^n son primos relativos. Para probar esto, supongamos que a y b^n no son primos relativos. Entonces existe un primo p que los divide a ambos. Pero si p divide al producto $b \cdot b \cdot \ldots \cdot b$, entonces debe dividir a uno de los factores, de manera que p divide a b. Entonces p divide a a y a b, esto es absurdo pues a y b son primos relativos. Esta contradicción prueba que a y b^n son primos relativos.

Regresemos al problema original. Que (p/q) sea solución de $f(x) = 0$, implica que $a_0 + a_1(p/q) + a_2(p/q)^2 + \ldots + a_m(p/q)^m = 0$.

Multiplicando esta igualdad por q^m y factorizando una q, tenemos que $a_m(p^m) = q[-(a_0 \cdot q^{m-1} + a_1 \cdot p \cdot q^{m-2} + \ldots + a_{m-1} \cdot p^{m-1})]$. De aquí que q divide a $a_m(p^m)$, pero q y p son primos relativos, entonces q y p^m tambien lo son. Por tanto q divide a a_m. Análogamente, multiplicando la misma igualdad por q^m y factorizando una p, se deduce que p divide a a_0.

PROBLEMA 11.

Sea n un número natural, entonces

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n}$$

$$y\ 0 = (1-1)^{2n} = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} - \ldots - \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n}$$

Sumando término a término, tenemos que:

$$2^{2n} = 2\binom{2n}{0} + 2\binom{2n}{2} + \ldots + 2\binom{2n}{2n} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}.$$

PROBLEMA 12.

Supóngase que existe sólo un número finito de primos $p_1, \ldots, p_r$. Formemos el número $n = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$. Notemos que n no puede ser divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Entonces n no puede ser un número compuesto. Esto implica que n mismo es un primo, entonces n debe ser igual a algún p_i. Pero esto no es cierto pues es mayor que todos ellos. Esta contradicción prueba que no es posible que el número de primos sea finito. Por tanto hay una infinidad de primos.

PROBLEMA 13.

Si podemos probar que todos los números de esa forma tienen un cero en sus cifras entonces el producto de ellas tiene que ser cero. Vamos a mostrar que precisamente su última cifra es cero, esto lo vamos a hacer viendo que todos esos números son divisibles por 2 y 5 y entonces son múltiplos de 10.

Notemos que 1^n y 3^n son siempre impares y que 2^n y 4^n son pares por lo que la suma de todos es par y, por tanto múltiplo de 2. Como $4 \equiv -1 \pmod 5$ y $3 \equiv -2 \pmod 5$, entonces, para toda n impar, $4^n \equiv (-1)^n \equiv -1 \pmod 5$ y $3^n \equiv (-2)^n \equiv -(2^n) \pmod 5$. Entonces 1^n

$+ 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 2^n - (2^n) -1 \equiv 0 \pmod 5)$. En consecuencia $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es divisible por 5. Por tanto $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es divisible por 10 para toda n impar y, por tanto, el producto de sus cifras es cero.

PROBLEMA 14.

Para empezar, notemos que los números que terminan en cero, no pueden ser los reflejados de ningún otro. Por tanto, ellos no aparecerán en la suma. Si un número abc es mayor que 100 y no termina en cero, entonces es el reflejado de cba y nada más de ese por lo que el número abc aparecerá exactamente una vez en la suma. Un número de la forma ab con $b \neq 0$ es el reflejado de ba y de ba0 y nada más de ellos. Por lo que este número aparecerá dos veces en la suma. Finalmente un número de la forma a, es el reflejado de a, a0, a00 si $a \neq 1$ y, cuando $a = 1$, también es el reflejado de 1000. Entonces los números de la forma a, aparecen 3 veces y el 1 aparece 4 veces. Entonces la suma es igual a:

$4(1) + 3(2 + 3 + \ldots 9) + 2[(10 + 11 + \ldots + 99) - (10 + 20 + \ldots + 90)] + 1[(100 + 101 + \ldots + 999) - (100 + 110 + \ldots + 990)] =$

$1 + 3(9\cdot10/2) + 2[(99\cdot100/2) - (9\cdot10/2) - 10(9\cdot10/2)] + [(999\cdot1000/2) - (99\cdot100)/2 - 10\{(99\cdot100/2) - (9\cdot10/2)\}] =$

$1 + 3(45) + [9900 - 90 - 900] + [499500 - 4950 - 10\{4950 - 45\}] =$

$1 + 135 + 8910 + 450000 - 4500 = 454546.$

PROBLEMA 15.

Es claro que $n! + i$ divide a M para $i = 0, 1, 2, \ldots ,k$. Por lo que será suficiente probar que los siguientes números son primos relativos dos a dos $n!$, $n! + 1$, $n!/2 + 1$, $n!/3 + 1$, ... $n!/k + 1$. $n!$ es primo relativo con $n! + 1$ por ser dos números consecutivos. Las demás parejas las analizamos en dos casos.

i) Primero veremos que todos los números son primos relativos con $n!$. Sea $i = 2, \ldots, k$ y supongamos que existe un primo p tal que p divide a $n!$ y a $n!/i + 1$. Si p divide a i, entonces $p \leq i \leq k \leq n/2$, de manera que $2p \leq n$. Entonces p y $2p$ son factores del producto $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ y alguno de los dos es diferente de i por lo que el otro aparece explícitamente en el número $n!/i$. De manera que p divide a $n!/i$. Esto es absurdo porque p también divide a $n!/i + 1$ y p es primo. La otra posibilidad es que p no divide a i, pero p divide a $n!$, así que p divide a $n!/i$ lo cual nos lleva a la misma contradicción. Por tanto $n!$ y $n!/i + 1$ son primos relativos.

ii) Ahora probaremos que si $1 \leq j < i \leq k$, entonces $n!/i + 1$ es primo relativo con $n!/j + 1$. Supongamos que esto no ocurre y entonces existe un primo p que los divide a ambos. Ya que $i(n!/i + 1) - j(n!/j + 1) = i - j$ entonces p divide a $i - j$. Pero $1 \leq i - j < i \leq n!$, de manera que $i - j$ aparece explícitamente en el cociente $n!/i$. De modo que p divide a $n!/i$. Esto es absurdo pues p divide a $n!/i + 1$. Esta contradicción completa la solución del problema.

PROBLEMA 16.

Supongamos que los colores usados son azul y rojo. Tomemos un punto fijo p de K_6, de p salen 5 aristas y como se están usando suponer que va a a_4. La otra arista azul que sale de a_4 ya no puede terminar en a_1 o en a_2 por que se formaría un cuadrilátero azul o un triángulo azul. Entonces tiene que terminar en a_5. Por razones similares, la otra arista azul que sale de a_5 no puede terminar en a_2 o a_3. Por tanto tiene que terminar en a_1 y entonces hemos obtenido un pentágono azul.

PROBLEMA 18.

Sea a el número buscado, entonces si le sumamos 31 tenemos que:
El residuo de a + 31 entre 1990 es 0, ya que 1959 + 31 = 1990. Análogamente el residuo de a + 31 entre cada uno de los números 995, 398 y 199 es igual a cero. Por tanto a + 31 es un múltiplo común de 1990, 995, 398 y 199. Como el mínimo común múltiplo de estos números es 1990, entonces a + 31 = 1990.
Por tanto el número buscado es igual a 1959.

PROBLEMA 19.

Haremos la prueba por inducción en n.

i) Para n = 1 la fórmula toma la forma
$F_1 = \{[(1 + \sqrt{5})/2] - [(1 - \sqrt{5})/2]\}/\sqrt{5} = 1$, cuya validez es clara. De modo semejante, la fórmula es verdadera para n = 2, puesto que $F_2 = \{[(1 + \sqrt{5})/2]^2 - [(1 - \sqrt{5})/2]^2\}/\sqrt{5} = 1$. Así queda completa la primera parte de la inducción.

ii) Supongamos que la fórmula es válida para n y n + 1, ahora la probaremos para n + 2. Por nuestra suposición,
$F_n = \{[(1 + \sqrt{5})/2]^n - [(1 - \sqrt{5})/2]^n\}/\sqrt{5}$ y
$F_{n+1} = \{[(1 + \sqrt{5})/2]^{n+1} - [(1 - \sqrt{5})/2]^{n+1}\}/\sqrt{5}$.

Sumando término a término estas dos ecuaciones, se obtiene:

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} = \{[(1 + \sqrt{5})/2]^n - [(1 - \sqrt{5})/2]^n + [(1 + \sqrt{5})/2]^{n+1} - [(1 - \sqrt{5})/2]^{n+1}\}/\sqrt{5} =$

$\{[(1 + \sqrt{5})/2]^n\cdot[1 + [(1 + \sqrt{5})/2]] - [(1 - \sqrt{5})/2]^n\cdot[1 + [(1 - \sqrt{5})/2]]\}/\sqrt{5} =$

$\{[(1 + \sqrt{5})/2]^n\cdot[(3 + \sqrt{5})/2] - [(1 - \sqrt{5})/2]^n\cdot[(3 - \sqrt{5})/2]\}/\sqrt{5} =$

$\{[(1 + \sqrt{5})/2]^n\cdot[(1 + \sqrt{5})/2]^2 - [(1 - \sqrt{5})/2]^n\cdot[(1 - \sqrt{5})/2]^2\}/\sqrt{5} =$

$\{[(1 + \sqrt{5})/2]^{n+2} - [(1 - \sqrt{5})/2]^{n+2}\}/\sqrt{5}$. Con esto terminamos la inducción.

PROBLEMA 20.

Las k_n's que consideraremos son los números de la forma $k_n = 2^n$. Para ver que sirven tenemos que probar que si n y m son números naturales con m < n, entonces $1990^{2^n} + 1$ y $1990^{2^m} + 1$ son primos relativos. Supongamos lo contrario, entonces existe un primo p tal que p divide a $1990^{2^n} + 1$ y p divide a $1990^{2^m} + 1$. De modo que $1990^{2^n} \equiv -1 \pmod p$ y $1990^{2^m} \equiv -1 \pmod p$. Elevando la segunda congruencia a la potencia 2^{n-m}, tenemos que $1990^{2^n} \equiv 1 \pmod p$. Por la primer congruencia, tenemos que $2 \equiv 0 \pmod p$. Esto sólo es posible si p = 2, pero claramente 2 no divide a $1990^{2^n} + 1$. Entonces p no puede existir. Por tanto $1990^{2^n} + 1$ y $1990^{2^m} + 1$ son primos relativos para toda n diferente de m.

PROBLEMA 21.

a) Vamos a hacer un criba. Esto significa que primero escribimos los números del 1 al 40, luego comenzamos a seleccionar números, cada vez que seleccionamos uno nuevo, por culpa de él tendremos tres números en progresión aritmética. Repetimos el proceso: ahora trasladamos el intervalo [1,120] al [241,360] en este último hay 30 números buenos, por lo que en el intervalo [1,360] hay 60, que por una razón similar a la que dimos arriba, estos 60 números siguen cumpliendo la condición. Continuando este proceso podemos conseguir en los intervalos [1,40], [1,120], [1,360], [1,1080], [1,3240], [1,9720], [1,87480]; 15, 30, 60, 120, 240, 480, 960, 1920 números que cumplen la condición, respectivamente. Por tanto hemos conseguido 1920 números menores que 10^5 tales que 3 de ellos no forman una progresión aritmética.

PROBLEMA 22.

Sea $N = 10^3a + 10^2b + 10c + d$ donde a, b, c, d son elementos del conjunto $A = \{1,2,\ldots,9\}$. Como 11 divide a N, tenemos que 11 divide a $a - b + c - d$. Ya que $a + c$ y $b + d \leq 18$, entonces $-16 \leq a - b + c - d \leq 16$. Los múltiplos de 11 entre -16 y 16 son - 11, 0 y 11. Por tanto $a - b + c - d = -11$ o 0 u 11.

Sea $n^2 = abcd$. Como alguna de las cifras es 7 entonces 7 divide a n^2. Así que 7 divide a n. Entonces 7^2 divide a abcd. Esto implica que dos de las cifras son 7's.

Analicemos los 3 casos posibles:

a) $a - b + c - d = -11$.

No es posible que $a = 7$ porque de ser así, $b + d = c + 18$. El término de la izquierda es ≤ 18 y el de la derecha mayor que 18 lo que es absurdo. De manera similar, no es posible que $c = 7$. Y, como hay dos 7's entre las cifras, tenemos que $b = d = 7$. Esto implica que $a + c = 3$. Entonces $a = 1$ y $c = 2$ o viceversa. Pero entonces el producto de las cifras es $7^2 \cdot 2$ que no es un cuadrado perfecto. Esto prueba que este caso no es posible.

b) $a - b + c - d = 11$. Un análisis similar al del caso a) muestra que este caso tampoco es posible.

c) $a - b + c - d = 0$

Si dos sumandos de signo contrario son 7's, entonces en la suma se cancelan y obtenemos que los otros dos son iguales. Con esto obtenemos los siguientes números 77xx, 7xx7, x77x y xx77 donde x puede tomar los valores 1, ..., 9. Notemos que todos los números de las formas escritas arriba cumplen las condiciones del problema. Esto nos da 33 soluciones (cuando $x \neq 7$, tenemos 32 soluciones y hay que añadir el número 7777).

Si dos sumandos del mismo signo son 7's, entonces los otros dos restantes, supongamos que les llamamos e y f deben sumar 14. Además $7^2 \cdot e \cdot f = n^2$ implica que $e \cdot f$ es un cuadrado perfecto. Los únicos números que sumados dan 14 y cuyo producto es un cuadrado perfecto son $e, f = 7$. Entonces en este subcaso sólo obtenemos el número 7777 que ya había sido considerado arriba.

PROBLEMA 23.

Haremos la prueba de esta afirmación por inducción en n. Si $n = 1$, entonces la única r que se puede tomar es $r = 1$. El número de subconjuntos de un elemento que tiene un conjunto con un elemento es 1 (sólo se puede tomar un subconjunto). Por otra parte, en este caso $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n - r)!\ r!} = \frac{1!}{0!\ 1!} = 1$ (porque se conviene que 0!

= 1). Por tanto, la afirmación es cierta para n = 1.

Ahora supongamos que esta afirmación es cierta para un conjunto de n elementos y tomemos un conjunto $A = \{ a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ con n + 1 elementos. Sea r tal que $1 \leq r \leq n + 1$. Si $r = n + 1$, entonces sólo se puede tomar un subconjunto de A con n + 1 elementos a saber el propio A. Por otra parte, en este caso, $\binom{n+1}{r} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\ r!} = \frac{(n+1)!}{0!\ (n+1)!} = 1$. Por tanto, cuando $r = n + 1$, la igualdad sí se cumple.

Supongamos entonces que $r \leq n$. Los subconjuntos de A con r elementos se dividen en dos categorías, (a) los que no tienen a a_{n+1} y (b) los que si lo tienen. Los de la primera categoría son entonces subconjuntos del conjunto $\{ a_1, \ldots, a_n \}$. Por hipótesis de inducción, ya sabemos contar cuantos de estos hay y son $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n - r)!\ r!}$. Los de la categoría (b), como tienen r elementos y uno de ellos es a_{n+1}, entonces tienen que tener r - 1 elementos del conjunto $\{ a_1, \ldots, a_n \}$. De modo que los conjuntos considerados en (b) son la unión de un conjunto de r - 1 elementos de $\{ a_1, \ldots, a_n \}$ con $\{a_{n+1}\}$. Por tanto el número de conjuntos que cumplen (b) es igual al número de subconjuntos de r - 1 elementos que tiene el conjunto $\{ a_1, \ldots., a_n \}$. Y, por hipótesis de inducción hay $\binom{n}{r-1} = \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}$ conjuntos de estos. Por tanto, sumando los que cumplen (a) y los que complen (b), podemos decir que el número de subconjuntos de A con r elementos es:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} + \frac{n!}{(n - r)!\ r!} =$$

$$\frac{n!}{(n - r)!(r-1)!}\left(\frac{1}{n-r+1} + \frac{1}{r} \right) = \frac{n!}{(n - r)!(r-1)!}\left(\frac{n + 1}{(n-r+1)r} \right) =$$

$\frac{(n + 1)!}{(n-r+1)!r!} = \binom{n+1}{r}$. Que es lo que se quería probar.

Esto completa la inducción y termina la prueba de la afirmación.

PROBLEMA 24.

Por el problema 23, sabemos que el número $\binom{n}{r}$ cuenta cuantos subconjuntos de r elementos tiene un conjunto fijo con n elementos. De manera que el número $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ es un número natural. Notemos que este número es igual (cancelando los términos de $(n - r)!$) a $\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-r+1)}{r!}$, pero que este cociente sea entero significa que el número de abajo r! divide al de arriba notemos también que arriba aparecen r enteros consecutivos. Entonces nuestra afirmación está prácticamente probada. Pero para hacerla más clara, empecemos al revés. Es decir, tomemos r enteros consecutivos $m, m + 1, \dots, m + r - 1$. Primero consideremos el caso en que $m \geq 1$. Hacemos $n = m + r - 1$, entonces $m \geq r$ y, por lo que vimos antes, r! divide a $n(n - 1) \dots (n - r + 1) = (m + r - 1)(n + r - 2) \dots (m)$ que es el producto de los r enteros consecutivos que tomamos. Por tanto r! divide al producto de los r enteros consecutivos. Ahora consideremos el caso en que $m \leq 0$. Aquí hay dos posibilidades, la primera es que $m \leq -r$, entonces $m + r - 1 \leq -1$, de modo que $m(m + 1) \dots (m + r - 1) = (-1)^r(-m)(-m - 1) \dots (-m - r + 1)$ y como $-m - r + 1, \dots, -m -1, -m$ son r enteros positivos consecutivos, tenemos por el primer caso que vimos, que r! debe dividir a su producto. Entonces $m(m + 1) \dots (m + r - 1)$ es divisible por r!. La segunda posibilidad es que $-r < m \leq 0$, entonces $0 \leq m + r - 1$, de manera que 0 tiene que ser uno de los números $m, m + 1, \dots, m + r - 1$ y entonces su producto es igual a cero y, por tanto es divisible por r!. De este modo hemos considerado todos los casos posibles. Esto termina la prueba de la afirmación.

PROBLEMA 25.

Supongamos que si existen tales números. Escribimos $x = m/n$ y $y = r/s$, donde m, n, r y s son enteros y r y s son distintos de cero. Sustituyendo y multiplicando por n^2s^2, obtenemos la igualdad $m^2s^2 + r^2n^2 = 1990n^2s^2$. Haciendo $a = ms$, $b = rn$ y $c = ns$, tenemos que $a^2 + b^2 = 1990c^2$. Supongamos que la ecuación ya está reducida de tal forma que no haya un número que divida a los tres números a, b y c (Si hay un número d que divida a a, b y c, entonces escribimos $a = a_1d$, $b = b_1d$ y $c = c_1d$, al sustituir en la ecuación, queda una d^2 de ambos lados que se puede cancelar y entonces obtenemos una ecuación similar).

Si a y b son pares, entonces $a = 2a_2$ y $b = 2a_2$, sustituyendo obtenemos que $4a_2^2 + 4b_2^2 = 1990c^2$. Cancelando un 2, se sigue que 2 divide a $995c^2$ y entonces c es par. Esto es absurdo porque ya habíamos supuesto que a, b y c no tenían nada en común. Haciendo un razonamiento parecido se obtiene que no es posible que a sea par ni que b sea par. Por tanto a y b son impares y se pueden escribir en la forma $a = 2u + 1$ y $b = 2v + 1$.

Entonces $a^2 = 4(u(u + 1)) + 1$. Como el producto de dos números consecutivos siempre es par, entonces $4(u(u + 1))$ es divisible por 8. De manera que $a^2 \equiv 1 \pmod 8$. Similarmente $b^2 \equiv 1 \pmod 8$. Si c es impar tendríamos que $c^2 \equiv 1 \pmod 8$ y entonces $2 \equiv a^2 + b^2 \equiv 1990c^2 \equiv 1990 \equiv 6 \pmod 8$ y entonces $4 \equiv 0 \pmod 8$ lo que es absurdo. Y si c es par entonces $1990c^2 \equiv 0 \pmod 8$. Así que $2 \equiv a^2$

todas ellas, entonces p_1^2 divide a $x - n$, p_2^2 divide a $x - n + 1$, p_3^2 divide a $x - n + 2$, ... , p_n^2 divide a $x - 1$. Por tanto los números $x - n, \ldots, x - 1$, son n números consecutivos y cada uno de ellos es divisible por un cuadrado.

PROBLEMA 28.

1er. ARGUMENTO. Usando argumentos como los del problema 23, se puede deducir que el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es igual a 2^n. De acuerdo al problema 23, tenemos lo siguiente:

$\binom{n}{0}$ = Número de subconjuntos de A con 0 elementos

$\binom{n}{1}$ = Número de subconjuntos de A con 1 elemento

$\vdots$

$\binom{n}{k}$ = Número de subconjuntos de A con k elementos

$\vdots$

$\binom{n}{n}$ = Número de subconjuntos de A con n elementos.

Sumando tenemos que:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n}$ = Número de subconjuntos de A, que como sabemos es igual a 2^n.

2do. ARGUMENTO: Por el binomio de Newton: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Si hacemos $a = b = 1$ en esta igualdad tenemos que $2^n =$

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

PROBLEMA 29.

Sea A un conjunto de $m = 2n$ elementos. Por el problema 11 tenemos que: $2^m = 2 \sum_{i} \binom{m}{i}$ donde la i corre sobre los pares menores o iguales que m. De acuerdo con el problema 23, esta suma cuenta el número de subconjuntos de A que tienen un número par de elementos. Y por la igualdad de arriba, este número es igual a

$$\sum_{i \text{ par}} \binom{m}{i} = 2^m/2 = (\text{número de subconjuntos de A})/2.$$

PROBLEMA 30.

Para empezar, mostraremos que, en general, si $n = a_1 + \ldots + a_r$, entonces $\frac{n!}{(a_1)! \cdot \ldots \cdot (a_r)!}$ es un entero, donde cada a_i es un número natural. Esto se puede probar por inducción así: Si $r = 2$, el cociente se transforma en $\frac{n!}{(a_1)!(n - a_1)!}$ que, según vimos en el problema 23 es un entero. Ahora supongamos que la afirmación es cierta cuando se parte a n como la suma de r enteros. Para probarlo para $r + 1$, supongamos que $n = a_1 + \ldots + a_{r+1}$. Por hipótesis de inducción, el número $\frac{(a_1 + \ldots + a_r)!}{(a_1)! \cdot \ldots \cdot (a_r)!}$ es un entero y, por el caso $r = 2$, el número, $\frac{n!}{(a_1 + \ldots + a_r)!(a_{r+1})!}$ también es un entero, de manera que su producto es un entero. Pero su producto es igual a $\frac{n!}{(a_1)! \cdot \ldots \cdot (a_r)!(a_{r+1})!}$. Esto termina la prueba de la inducción.

Lo que hemos probado, no se puede aplicar directamente a nuestro problema puesto que $p_1 + \ldots + p_r = n + r - 1 > n$ (si $r > 1$). Pero si podemos usarlo en la siguiente forma.

Tomemos un primo cualquiera p, sea α la mayor potencia de p que divide al número $m = (p_1)! \cdots (p_r)!$ y sea β la mayor potencia de p que divide a $n!$. Como p es un primo cualquiera, será suficiente que probemos que $\alpha \leq \beta$ para tener que m divide a $n!$ y entonces tendremos que $n!/m$ es un entero.

El primo p puede ser igual a alguno de los p_i's o ser diferente de todos, vamos a considerar el caso en que $p = p_1$, si $p =$ otro p_i, entonces el tratamiento para probar que $\alpha \le \beta$ es similar y si p no coincide con ningún p_i el tratamiento es más fácil y no lo vamos a hacer.

Como $m = p_2 \cdots p_r ((p_1)!(p_2 - 1)! \cdots (p_r - 1)!)$ y p no divide a $p_2 \cdots p_r$, entonces α es igual a la máxima potencia de p que divide a $(p_1)!(p_2 - 1)! \cdots (p_r - 1)!$. Como $p_1 + (p_2 - 1) + ... + (p_r - 1) = p_1 + p_2 + p_r - r + 1 = n$, por lo que vimos arriba, $\frac{n!}{(p_1)!(p_2 - 1)! \quad \cdots \quad (p_r - 1)!}$ es un número entero, así que la máxima potencia de p que divide al denominador debe ser menor o igual a la máxima potencia de p que divide al numerador, es decir, $\alpha \le \beta$. Que es lo que queríamos probar.

PROBLEMA 31.

a) Cualquier número que consideremos tiene suma de dígitos menor o igual que el número que se obtiene sustituyendo todas sus cifras por 9's. De manera que, de los números que estamos considerando, el que tiene los dígitos que suman más es en el número 99 999 999 999, cuyos digitos suman 99. De manera que $f(a) \le 99$ para toda $a \in A$. Entonces, para toda $a \in A$, $f(f(a)) \le 18$; lo cual a su vez implica que $f(f(f(a))) \le 9$. Por tanto $f(f(f(a))) \in B$ para toda $a \in A$.

b) Cuando resolvimos el problema 4 e), mostramos que cualquier número es congruente con la suma de sus cifras módulo 9, de manera que $a \equiv f(a) \equiv f(f(a)) \equiv f(f(f(a))) \pmod 9$ entonces, dada i en B, los números que cumplen $f(f(f(a))) = i$ son los elementos de A que son congruentes a i módulo 9. Si consideramos los números que hay entre dos múltiplos consecutivos de 9, digamos $9s + 1$, $9s + 2, \ldots, 9s + 8$, $9s + 9$, en este conjunto hay uno que es congruente a 1, otro que es congruente a 2, ..., y uno que es congruente a 9 módulo 9, de manera para cada i en B, existe unicamente un elemento a $(a = 9s + i)$ de este conjunto tal que $f(f(f(a))) = i$. Entonces del 1 al 9, hay una a para cada i, del 1 al 18, hay dos a's para cada i, del 1 al 27 hay 3 a's para cada i, del 1 al 99 999 999 999 hay 11 111 111 111 a's para cada i y del 1 al 100 000 000 000 hay 11 111 111 112 a's para el 1, y hay 11 111 111 111 a's para cada una de las otras i's. Por tanto para $b = 1$ la función g toma su máximo y además $g(1) = 11\ 111\ 111\ 112$.

PROBLEMA 32.

Así como está la expresión, es muy difícil de calcular, lo que necesitamos hacer es llevarla a una forma conocida. En este caso, por el binomio de Newton, sabemos calcular expresiones del tipo $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^n b^{n-i}$. Nótese como le sumamos lo apropiado para transformar la expresión dada a una expresión adecuada.

$$a_n = (n + 1) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{i}{i+1} \cdot \frac{n!}{i!(n - i)!} =$$

$$(n + 1) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{i+1}{i+1} \cdot \frac{n!}{i!(n - i)!} - (n + 1) \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-}}{i+1} \cdot \frac{n!}{i!(n - i)!}$$

$$= (n + 1) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} + (-1)^0 \binom{n+1}{n+1} -$$

$$(-1)^0 \binom{n+1}{n+1} = (n + 1) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} 1^i \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} 1^i \binom{n+1}{i} - 1 =$$

$$(n + 1)(1 - 1)^n - (1 - 1)^{n+1} + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Por tanto $a_n = (-1)^{n+1}$ para toda n natural. Así que si n es impar, entonces $a_n = 1$ y es igual a -1 si n es par.

$f(1) + 2f(1) - (a - d) - f(3) = 2(a - d)$; o

$3f(1) - f(3) = 2(a - d)$ (II)

haciendo $n = 1$ en (ii), $f(3) = f(1) + 2d$, sustiyendo en (II), se tiene que $3f(1) - f(1) - 2d = 2(a - d)$ o $2f(1) = 2a$ entonces $f(1) = a$.

Haciendo $m = n + 1$ en (i), se obtiene:

$f(n + 1) + f(n) - f(2n + 1) = a - d$; o $f(n + 1) + f(n) - f(n) - (n + 1)d = a - d$; $f(n + 1) = (n + 1 - 1)d + a = a + nd$; por tanto $f(n + 1) = a + nd$.

De aquí que $f(1991) = a + 1990d$.

PROBLEMA 37.

Para calcular $f_{1990}(1990)$, la idea de la demostración es, evaluar $f_1, f_2, \ldots,$ hasta que $f_i = f_j$. Para esto calculemos:

$f_1(1990) = f_1(\cancel{2}\cdot 5\cdot 199) = (206)^2 = 2^2\cdot 103^2$

$f_2(1990) = f_1(2^2\cdot 103^2) = (210)^2 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2$

$\vdots$

Siguiendo estos cálculos encontramos que $f_7 = f_{12}$, $f_8 = f_{13}$, $f_9 = f_{14}$, $f_{10} = f_{15} = 2^4\cdot 3^2$, $f_{11} = f_{16}$. Así que tenemos 5 progresiones aritméticas:

$7 + 5n$, $8 + 5n$, $9 + 5n$, $10 + 5n$, $11 + 5n$.

Para la solución del problema es necesario que 1990 sea un término de alguna de las cinco, esto sólo se da en la progresión 4. Por tanto $10 + 5n = 1990$ si y sólo si, $n = 396$.

Por tanto $f_{1990}(1990) = 2^4\cdot 3^2$.

PROBLEMA 38.

Sea (a_1,b_1) una solución cualquiera. Definimos $a_2 = 2a_1 + b_1$ y b_2

$= a_1 + b_1$. Checaremos que esta nueva pareja también es solución. Sustituyendo

$a_2b_2 - 1 = (2a_1 + b_1)(a_1 + b_1) - 1 = 2a_1^2 + 3a_1b_1 + b_1^2 - 1$

$= (2a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_1b_1 - 1)$. Como (a_1,b_1) es solución, esta última expresión es igual a

$$(2a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_1^2 - b_1^2) = 3a_1^2 + 2a_1b_1$$
$$= (4a_1^2 + 4a_1b_1 + b_1^2) - (a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2)$$
$$= (2a_1 + b_1)^2 - (a_1 + b_1)^2 = a_2^2 - b_2^2.$$

Esto prueba que hay una infinidad de soluciones.

Observe que los números más pequeños a y b que satisfacen la ecuación son $a = 3$ y $b = 2$. $(a > 0,\ b > 0)$

PROBLEMA 39.

La suma de todos los elementos del conjunto es igual a $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \ldots + (n + 10) = 11n + 55$. Para que el conjunto pueda ser partido en dos, con las características mencionadas, el número $11n + 55$ tiene que ser par y esto es posible si y sólo sí, n es impar. Entonces sólo vamos a considerar n's impares.

Sean A y B dos conjuntos con las características deseadas. Como el conjunto tiene 11 elementos, uno de los dos conjuntos debe tener más elementos que el otro. Supongamos que A tiene más que B. Entonces A tiene al menos seis elementos y B tiene cuando más cinco. Denotemos por S_A a la suma de los elementos de A y por S_B a la suma de los de B. Entonces, lo menos que puede valer S_A es cuando sumamos los seis elementos menores del conjunto y lo más que puede valer S_B es cuando sumamos los cinco mayores. Es decir,

$6n + 15 = n + (n + 1) + \ldots + (n + 5) \leq S_A = S_B \leq (n + 6) + \ldots + (n + 10) = 5n + 40$. De aquí que $6n + 15 \leq 5n + 40$. Entonces $n \leq 25$. Notemos que de hecho, cuando $n = 25$, la igualdad se cumple así que podemos tomar $A_0 = \{ n, n + 1, \ldots, n + 5 \}$ y $B_0 = \{ n + 6, \ldots, n + 10 \}$. Si intercambiamos $n + 5$ con $n + 6$, es decir, si pasamos $n + 5$ a B_0 y $n + 6$ a A_0, entonces las suma de los elementos de A aumenta en uno mientras que la de los de B disminuye en uno. Entonces $S_A = 6n + 16$ y $S_B = 5n + 39$. Entonces $S_A = S_B$ sí y sólo si, $n = 23$. Por tanto para 23 también se pueden encontrar los conjuntos. Intercambiando el $n + 5$ de A_0 con el $n + 7$ de B_0, tenemos que se puede para $n = 21$. Intercambiando $n + 5$ con $n + 8$; $n + 5$ con $n + 9$; $n + 5$ con $n + 10$; $n + 4$ con $n + 10$; $n + 3$ con $n + 10$; $n + 2$ con $n + 10$; $n + 1$ con $n + 10$ y n con $n + 10$, obtenemos conjuntos para los casos en que $n = 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7$ y 5, respectivamente. Finalmente, para $n = 1$, los conjuntos en los que podemos partir el original son $A = \{1,2,3,4,5,8,10\}$ $B = \{6,7,9,11\}$. Y, para $n = 3$, podemos partir en $A = \{3,4,6,8,10,13\}$ y $B = \{5,7,9,11,12\}$.

PROBLEMA 40.

Después de calcular algunos casos particulares se da uno cuenta que $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$ para toda $n \geq 2$. Si probamos este hecho por inducción, habremos terminado.

i) Para $n = 2$ la fórmula es obvia.

ii) Supongamos que la fórmula es cierta para n, entonces $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$, sumemos F_nF_{n+1} a cada lado de la igualdad, entonces

$F_n^2 + F_nF_{n+1} = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$, o equivalentemente

$F_n(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) + (-1)^{n-1}$, es decir

$F_n \cdot F_{n+2} = F_{n+1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n-1}$, escrito en otra forma tenemos

$F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} + -(-1)^{n-1} = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n$, que es lo que se quería pobrar.

PROBLEMA 41.

Pensemos en un número F de la sucesión de Fibonacci, para probar que F está en A, tenemos que ver que $5F^2 \pm 4$ es un cuadrado perfecto. entonces tenemos que proponer una m tal que m^2 es uno de esos dos números. Para saber cual es la m que se tiene que proponer, se tienen que hacer algunos casos particulares hasta darse cuenta que se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$5F_n^2 + 4(-1)^n = (F_{n+2} - F_{n-2})^2$ para $n \geq 3$. Realmente lo importante del problema es darse cuenta que se cumple esta igualdad. Lo que resta es probar que es cierta y esto se hace muy fácilmente haciendo algunas reducciones y usando el problema anterior como sigue.

Sea $n \geq 3$ entonces $(F_{n+2} - F_{n-2})^2 = [(F_{n+1} + F_n) - F_{n-2}]^2$, sustituyendo también a F_{n+1} y F_n la expresión de arriba se convierte en $[(F_n + F_{n-1}) + (F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-2}]^2 = (F_n + 2F_{n-1})^2 = F_n^2 + 4F_nF_{n-1} + 4F_{n-1}^2 = F_n^2 + 4F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 + 4F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + 4(F_n^2 - (-1)^{n-1}) = 5F_n^2 + 4(-1)^n$. Que es lo que se quería probar.

PROBLEMA 42.

Para probar que las parejas que son soluciones tienen que ser pareja n_3, n_4 es también solución de la ecuación. Si $n_4 = 1$, el proceso termina, si no se concluye que $n_3 > n_4$ y definimos $n_5 = n_3 - n_4$.

Procediendo de esta manera podemos construir una sucesión de números naturales $n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$. Esta sucesión no puede ser infinita porque sólo podemos tomar números en el conjunto $\{1, \ldots, n_1\}$ y cada uno de ellos es estrictamente menor que el anterior. Entonces debe haber una n_r que sea igual a 1 donde se suspenda la construcción. Entonces $n_r = 1$ y como la pareja n_{r-1}, 1 es solución y $n_{r-1} > n_r = 1$ entonces $n_{r-1} = 2$. Regresándonos en la construcción tenemos $n_r = 1$, $n_{r-1} = 2$, $n_{r-2} = 3$, $n_{r-3} = 5$, ... , n_3, n_2, n_1. Por tanto n_1 y n_2 son términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Falta probar que si n y m son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci entonces $(n^2 - n\cdot m - m^2)^2 = 1$.

Hagámoslo por inducción. Si $n = m = 1$, claramente se cumple; supongamos que la suceción de Fibonacci esta definida como en el problema 19 y que si $n = F_{n-1}$ y $m = F_{n-2}$, entonces la igualdad se cumple. Probemos que la igualdad se sigue cumpliendo si $n = F_{n+1}$ y $m = F_n$. Por definición $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ y $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n = 2F_{n-1} + F_{n-2}$. Entonces $(F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2)^2 = ((2F_{n-1} + F_{n-2})^2 - (2F_{n-1} + F_{n-2})(F_{n-2} + F_{n-1}) - (F_{n-2} + F_{n-1})^2)^2 = (F_{n-1}^2 - F_{n-1}F_{n-2} - F_{n-2}^2)^2$ (desarrollando y simplificando) $= 1$. Con esto se termina la prueba.

PROBLEMA 43.

Para cada subconjunto de r elementos, supongamos que su elemento mayor es k, entonces k sólo puede ser igual a uno de los siguientes números r, r + 1, ... , n. Por otra parte, cuando fijamos un número k del conjunto {r, r + 1, ... , n}, podemos elegir r - 1 elementos del conjunto {1, 2, 3, ..., k - 1} y construir un subconjunto de {1, 2, ... , n} con r elementos teniendo a k como su máximo, esta elección se puede hacer de $\binom{k-1}{r-1}$ maneras (ver problema 23). Como esto se cumple para cada k, entonces

$$F(n,r) = \sum_{k=r}^{n} k\binom{k-1}{r-1} =$$

$$\sum_{k=r}^{n} k\left[\binom{k}{r} - \binom{k-1}{r}\right] =$$

$$r\left[\binom{r}{r} - \binom{r-1}{r}\right] + (r + 1)\left[\binom{r+1}{r} - \binom{r}{r}\right] + \ldots + (n - 1)\left[\binom{n-1}{r} - \binom{n}{r}\right] + n\left[\binom{n}{r} - \binom{n-1}{r}\right] =$$

$$-\binom{r}{r} - \binom{r+1}{r} - \ldots - \binom{n-1}{r} + n\binom{n}{r} =$$

$$n\binom{n}{r} - \sum_{k=r}^{n}\binom{k-1}{r} =$$

$$n\binom{n}{r} - \sum_{k=r}^{n}\left[\binom{k}{r+1} - \binom{k-1}{r+1}\right] =$$

$$n\binom{n}{r} - \left[\binom{n}{r+1} - \binom{r-1}{r+1}\right] =$$

$n\binom{n}{r} - \binom{n}{r+1}$, que haciendo las operaciones necesarias se llega a que es igual a $r\binom{n+1}{r+1}$.

PROBLEMA 44.

Los números naturales menores o iguales que 70 que se pueden escribir en la forma 3n + 35 m con n, m ≥ 0 son:

a) Todos los múltiplos no negativos de 3 a saber, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66 y 69.

b) Los números de la forma 35 + un múltiplo no negativo de 3 a saber, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65 y 68.

Ahora mostraremos que todos los números naturales mayores o iguales que 70 se pueden escribir en esta forma. Sea pues $s \geq 70$. Para empezar dividamos a s entre 3, entonces podemos obtener un número natural q y un entero r tales que $s = 3q + r$ donde r vale 0, 1 o 2. Analizamos los tres casos:

i) $r = 0$, entonces $s = 3q = 3n + 35m$ con $n = q$ y $m = 0$.

ii) $r = 1$, entonces $s = 3q + 1$. Notemos que $70 = 1 + 3(23)$. De manera que $s - 70 = (3q + 1) - (1 + 3(23)) = 3(q - 23)$. Como $s \geq 70$, entonces $3(q - 23) \geq 0$. Esto implica que $q - 23 \geq 0$. De modo que, haciendo $n = q - 23 \geq 0$ y $m = 2$, tenemos que $s = 3n + 35m$ se puede escribir como queríamos.

iii) $r = 2$, entonces $s = 3q + 2$. Notemos que $35 = 2 + 3(11)$. De aquí que $s - 35 = (3q + 2) - (2 + 3(11)) = 3(q - 11)$. Como $s \geq 70$, tenemos que $3(q - 11) > 0$. De modo que $q - 11 > 0$. Y si hacemos $n = q - 11 > 0$ y $m = 2$, entonces $s = 3n + 35m$ se puede escribir en la forma pedida.

Por tanto los números que se pueden escribir en la forma $3n + 35m$ con n y m enteros no negativos son los enlistados en a), los enlistados en b) y todos los que son mayores o iguales que 70.

PROBLEMA 45.

Para la solución de este problema haremos uso del teorema de la ϕ de Euler que dice que si a y b son enteros primos relativos, entonces $a^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$.

Multiplicando los números de la lista 1, 1001, 1001001, ..., por el número 999, obtenemos los números 999, 999999, 999999999, ... Estos números son iguales a $10^3 - 1$, $10^6 - 1$, $10^9 - 1$, ... Para que muchos de estos números sean divisibles entre m se necesita que muchos de los números de la forma 10^{3k} sean congruentes a 1 módulo m. Para esto basta con que alguna potencia de 10, digamos 10^{s_0}, sea congruente a 1 módulo m y entonces 10^{3ks_0} será congruente a $1^{3k} = 1$ módulo m para toda k. Para encontrar s_0 es para lo que ocupamos el teorema de la ϕ de Euler. Como $(10,m) = 1$, entonces $10^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. De aquí que $\left(10^{\phi(m)}\right)^{3k} \equiv 1 \pmod{m}$ para toda k. Entonces m divide a una infinidad de números de la lista 999, 999999, 999999999, ... Pero no queremos estos números sino los de la lista 1, 1001, 1001001, ... Si m fuera primo relativo con 999, entonces al dividir a 999999...999 = 999(1001...001) tendría que dividir a 1001...001 y habríamos terminado. Para arreglar esto, consideramos a $m_0 = 999m$. Entonces $(m_0,10) = 1$. De manera que $m_0 = 999m$ divide a una infinidad de números de la forma 999999...999 = 999(1001...001). Esto significa que 999(1001...001) = 999md para alguna d. De manera que 1001...001 = md. Entonces m divide a una infinidad de números de la lista 1, 1001, 1001001, ...

PROBLEMA 46.

Lo que tenemos que contar es cuantas p's aparecen en la descomposición en factores primos de $1\cdot 2\cdot \ldots n$. Como p es primo, en este producto, sólo pueden aparecer p's en los números que son múltiplos de p. Supongamos que los múltiplos de p menores o

$F_n^2 + F_nF_{n+1} = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$, o equivalentemente

$F_n(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) + (-1)^{n-1}$, es decir

$F_n \cdot F_{n+2} = F_{n+1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n-1}$, escrito en otra forma tenemos

$F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} + -(-1)^{n-1} = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n$, que es lo que se quería pobrar.

PROBLEMA 41.

Pensemos en un número F de la sucesión de Fibonacci, para probar que F está en A, tenemos que ver que $5F^2 \pm 4$ es un cuadrado perfecto. entonces tenemos que proponer una m tal que m^2 es uno de esos dos números. Para saber cual es la m que se tiene que proponer, se tienen que hacer algunos casos particulares hasta darse cuenta que se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$5F_n^2 + 4(-1)^n = (F_{n+2} - F_{n-2})^2$ para $n \geq 3$. Realmente lo importante del problema es darse cuenta que se cumple esta igualdad. Lo que resta es probar que es cierta y esto se hace muy fácilmente haciendo algunas reducciones y usando el problema anterior como sigue.

Sea $n \geq 3$ entonces $(F_{n+2} - F_{n-2})^2 = [(F_{n+1} + F_n) - F_{n-2}]^2$, sustituyendo también a F_{n+1} y F_n la expresión de arriba se convierte en $[(F_n + F_{n-1}) + (F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-2}]^2 = (F_n + 2F_{n-1})^2$ $= F_n^2 + 4F_nF_{n-1} + 4F_{n-1}^2 = F_n^2 + 4F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 + 4F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + 4(F_n^2 - (-1)^{n-1}) = 5F_n^2 + 4(-1)^n$. Que es lo que se quería probar.

PROBLEMA 42.

Para probar que las parejas que son soluciones tienen que ser

PROBLEMA 47.

Sabemos que si aparece un cero al final de un número es porque el número es divisible por 10, si aparecen dos ceros, es por que es divisible por 100, si aparecen s ceros es por que es divisible por 10^s. Entonces, para resolver el problema, tenemos que encontrar la máxima potencia de 10 que divide a 1000!. Y como cada 10 se forma con un 2 y un 5, entonces tenemos que encontrar la máxima potencia α de 2 que divide a 1000! y también la máxima potencia β de 5 que divide a 1000!. Por el problema anterior, α y β se calculan así:

$$\alpha = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{2^2}\right] + \left[\frac{1000}{2^3}\right] + \left[\frac{1000}{2^4}\right] + \left[\frac{1000}{2^5}\right] + \left[\frac{1000}{2^6}\right] + \left[\frac{1000}{2^7}\right]$$
$$+ \left[\frac{1000}{2^8}\right] + \left[\frac{1000}{2^9}\right] + \left[\frac{1000}{2^{10}}\right] = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7$$
$$+ 3 + 1 + 0 = 994.$$
$$\beta = \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{5^2}\right] + \left[\frac{1000}{5^3}\right] + \left[\frac{1000}{5^4}\right] + \left[\frac{1000}{5^5}\right] = 200 + 40 + 8 + 1 +$$
$0 = 249$. Hay que tomar la más pequeña de estas dos potencias porque para un 10 necesitamos tener un 2 y un 5. De aquí que la máxima potencia de 10 que divide a 1000! es 249. Por tanto 1000! se escribiría 249 ceros en el extremo derecho.

PROBLEMA 48.

$ab + cd = 1990$ (1)

$ac + bd = 1990$ (2)

$ad + bc = 1990$ (3)

Restando (2) de (1), (3) de (1) y (3) de (2) obtenemos las siguientes ecuaciones

$(a - d)(b - c) = 0$ (4)

$(a - c)(b - d) = 0$ (5)

$n/10^r$, le estamos quitando la parte no entera y al multiplicar por 10^r estamos colocando nuevamente el punto decimal en su lugar. Entonces el efecto que tiene la función $10^r[n/10^r]$ es el de colocar ceros en las primeras r cifras de la derecha del número n. De manera que al hacer la diferencia $n - 10^r[n/10^r]$ lo que se consigue es quedarse con el número formado con las primeras r cifras de la derecha de n.

Al aplicar la función $f_r(n) - f_{r-1}(n)$, lo que hacemos es tomar el número que se forma con las primeras r cifras de n y quitarle el de las primeras r - 1 cifras por los que se obtiene el número que empieza con la r-ésima cifra de n (contando desde la derecha) y, después de esta cifra tiene r - 1 ceros a la derecha. Al dividir entre 10^{r-1} lo que obtenemos finalmente es que $g_r(n)$ = r-ésima cifra de n (en el caso en que n tiene menos de r cifras, entonces $g_r(n) = 0$).

Cuando se aplica la función g, se forma un número de la manera siguiente: en el décimo lugar (contando siempre por la derecha) se pone la primer cifra de n, en el lugar noveno, se pone la segunda cifra de n étc. Entonces aplicar g(n) a números con menos de 10 cifras significa, primero aumentarle ceros a la izquierda hasta que tenga 10 cifras y después tomar el número que se obtiene al invertir el orden de sus cifras.

Entonces al sumar $\sum_{n=1}^{10^6} g(n)$, obtenemos los "invertidos" de todos los números de 6 cifras mas el número 1000, no es difícil convencerse de que con estos "invertidos" se obtienen exactamente todos los números de 10 cifras que tienen cuatro ceros a la derecha. De modo que la suma buscada es igual a 10000 + 20000 +

$30000 + \ldots + 9999990000 + 1000 = 10000(1 + 2 + \ldots + 999999) + 1000 = 10000(999999)1000000/2 + 1000.$

PROBLEMA 50.

Primero probaremos el caso en el que $d = 1$. Consideremos el conjunto A de los residuos que dejan los números $n\cdot 1$, $n\cdot 2$, ..., $n\cdot(s - 1)$, $n\cdot s$, al dividirlos entre s, aseguramos que $A = \{ 0, 1, \ldots, s - 1 \}$. Para empezar, todos los residuos están en A. Ahora, si $1 \leq i < j \leq s$, entonces $n\cdot i$ da un residuo diferente al de $n\cdot j$, pues si esto no ocurriera entonces $n\cdot i = m_1 s + r$ y $n\cdot j = m_2 s + r$ donde m_1, m_2 y r son enteros y $0 \leq r < s$. Restando una igualdad de otra, tenemos que $n(i - j) = s(m_1 - m_2)$. De manera que s divide a $n(i - j)$. Pero s y n son primos relativos así que s divide a $j - i$. Pero $0 < j - i < s$ y entonces $j - i$ no puede ser divisible por s. Esta contradicción prueba que $n\cdot i$ y $n\cdot j$ tienen diferentes residuos al dividirlos por s. Por tanto los residuos de $n\cdot 1$, $n\cdot 2$, ..., $n\cdot(s - 1)$, $n\cdot s$ son s números diferentes del conjunto $\{ 0, 1, \ldots, s - 1 \}$ y, por tanto, tienen que llenarlo todo. Esto prueba que $A = \{ 0, 1, \ldots, s - 1 \}$.

Escribamos a m en la forma $m = s\cdot q + r$ con $0 \leq r < s$. Por lo que probamos antes, existe una i tal que $1 \leq i \leq s$ y $n\cdot i \equiv r \pmod{s}$. Entonces existe q_1 tal que $n\cdot i = s\cdot q_1 + r$ lo cual implica que $r = n\cdot i - s\cdot q_1$. Sustituyendo r tenemos que $m = s\cdot q + r = s\cdot q + (n\cdot i - s\cdot q_1) = s(q - q_1) + n\cdot i$. Ya tenemos escrito a m como queríamos pero falta probar que $q - q_1 > 0$. Pero esto se muestra de la siguiente manera $sq + r = m > ns \geq n\cdot i = sq_1 + r$. De aquí que $q > q_1$. Esto completa la prueba del caso $d = 1$.

Para el caso general hagamos $n_1 = n/d$, $s_1 = s/d$ y $m_1 = m/d$. Entonces n_1 es el número que resulta de extraerle a n todo lo que tiene de común con s, esto implica que n_1 ya no tiene nada en común con s y menos con s_1. Por tanto n_1 y s_1 son primos relativos y $m_1 > n_1s_1$. Entonces podemos aplicar el caso que ya probamos y entonces existen enteros positivos x, y tales que $m_1 = n_1x + s_1y$. Esto implica que $m/d = (n/d)x + (s/d)y$. Por tanto $m = nx + sy$.

PROBLEMA 51.

Por el problema 46, podemos encontrar el mayor exponente de un primo $p < 50$ tal que divide a x. Así que podemos poner a x como un producto de primos elevados a alguna potencia determinada. Por tanto $x = 2^{47}\cdot3^{22}\cdot5^{12}\cdot7^{8}\cdot11^{4}\cdot13^{3}\cdot17^{2}\cdot19^{2}\cdot23^{2}\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41\cdot43\cdot47$, como la suma debe ser menor que 1060, entonces cada factor debe ser igual en promedio a $[1060/50] = 21$, los factores 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 y 47 los debemos poner tal cual, ya que si los multiplicamos por cualquier otro, el resultado difiere mucho de 21. Como el 17, 19 y 23 aparecen al cuadrado, los podemos poner 2 veces. Tomamos tres 2's para formar los números $2\cdot13$, $2\cdot13$, $2\cdot13$; cuatro más para formar $2\cdot11$ cuatro veces; cuatro más para formar $2^2\cdot5$ doce veces; con los 2's y 3's que quedan hacemos las siguientes combinaciones: $(3\cdot7)$ 8-veces; $(2^2\cdot3)$ 8-veces y (3^2) 3-veces. Así que

$x = (3^2)^3(2^2\cdot3)^8(2^2\cdot5)^2(3\cdot7)^8(2\cdot11)^4(2\cdot13)^3(17)^2(19)^2(23)^2\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41\cdot43\cdot47$. Donde el exponente α indica que el número aparece α-veces en el producto y no una vez el número elevado a la α. Por tanto x se compone de 50 factores y $3(3^2) + 8(2^2\cdot3) + 2(2^2\cdot5) +$

$8(3\cdot7) + 4(2\cdot11) + 3(2\cdot13) + 2(17) + 2(19) + 2(23) + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 = 1043 < 1060$.

PROBLEMA 52.

a) Demostraremos que $1 + kn$ es indescomponible para $k = 1, 2, 3, 4$. Supongamos lo contrario, es decir supongamos que existen enteros k_1 y k_2 mayores o iguales que 1 tales que $1 + kn = 1 + n(k_1 + k_2 + k_1\cdot k_2\cdot n)$. Entonces $k_1 + k_2 + k_1\cdot k_2\cdot n = k$. Así que $k = k_1 + k_2 + k_1\cdot k_2\cdot n > 1 + 1 + 2 = 4 \geq k$. Este absurdo termina la prueba de a).

b) Supongamos que existe solamente un número finito de indescomponibles $1 + k_1n$, $1 + k_2n$, ..., $1 + k_rn$. Formemos el número $M = n + (1 + k_1n)(1 + k_2n)\cdots(1 + k_rn)$. Notemos que M no es divisible entre ninguno de los números $(1 + k_1n)$, ..., $(1 + k_rn)$. M es claramente mayor que todos los indescomponibles, así que no puede ser ninguno de ellos. Esto implica que M tiene que ser descomponible. De manera que M se puede escribir en la forma $M = M_1M_2$ donde M_1 y M_2 pertenecen a V_n. Entonces $M_1, M_2 < M$. Como ningún indescomponible divide a M, tenemos que M_1 y M_2 son diferentes de los indescomponibles, de modo que M_1 y M_2 se pueden a su vez descomponer en la forma $M_1 = M_3M_4$ y $M_2 = M_5M_6$, de manera que $M = M_3M_4M_5M_6$. Donde $M_3, M_4 < M_1$ y $M_5, M_6 < M_2$. Podemos seguir este procedimiento y seguir factorizando indefinidamente a los M_i's y obteniendo M_i's cada vez más pequeños. Esto es absurdo por que los M_i's solamente se pueden escoger del conjunto finito $\{ 1, ..., M \}$. Esta contradicción muestra que el número de indescomponibles tiene que ser infinito.

PROBLEMA 53.

Empecemos escribiendo la sucesión en otra forma:

1	1 término
2 2	2 términos
3 3 3	3 términos
$\vdots$	
n n n n ... n	n términos

Para encontrar f(1990), primero encontremos la máxima n tal que: $1 + 2 + 3 + \ldots + n \leq 1990$. Es decir, $n(n + 1)/2 \leq 1990$; o $n^2 + n \leq 3980$, completando cuadrados y despejando a n, tenemos que $n = 62$. Además $1 + 2 + 3 + \ldots + 62 = 1953$, así que nos faltan 37 términos para llegar a 1990 términos. Estos 37 términos son iguales a 63.

Para sumar, completemos el cuadrado hasta el renglón 62 ... 62. Es decir, consideremos:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 62 & 62 & 62 & \ldots & 62 \end{matrix}$$

Así que f(1990) = suma de los números del cuadrado - suma de los números del triángulo superior + 37(63).

Claramente, la suma del cuadrado $= 62(1 + 2 + \ldots + 62) = 121086$.

Y, la suma del triángulo superior $= \sum_{n=1}^{61} n(n + 1)/2 = 1/2 \sum_{n=1}^{61} (n^2 + n) = 1/2(\sum_{n=1}^{61} n^2 + \sum_{n=1}^{61} n) = 39711$. Por tanto $f(1990) = 121086 - 39711 +$

2331 = 83706.

PROBLEMA 54.

Probaremos que los números a's para los que $M(a)$ tiene un único elemento, son exactamente los números primos.

Tomemos primero un primo p cualquiera y mostremos que $M(p)$ tiene un único elemento. Sea b tal que $p + b \mid pb$. Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $pb = s(p + b)$. Así que $p(b - s) = sb$. De modo que p divide a sb y, como p es primo, entonces $p|s$ o $p|b$. Si $p|s$, entonces existe $s_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s = p(s_1)$. Sustituyendo, obtenemos que $pb = p^2 s_1 + pbs_1$. De aquí que $b = s_1(p + b)$ lo cual es imposible pues el b es claramente menor que la expresión del lado derecho. Por tanto concluimos que $p|b$. Entonces existe $s_2 \in \mathbb{N}$ tal que $b = p(s_2)$. Esto implica que $p^2(s_2) = sp + pss_2$, así que $p(s_2) = s(1+s_2)$. De manera que $1 + s_2$ divide a ps_2 y es primo relativo con s_2, de modo que $1 + s_2$ es un número mayor que uno que divide a p y como p es primo, tenemos que $1 + s_2 = p$. De aquí que $b = p(p-1)$.

Hemos probado que si $p + b \mid pb$, entonces $b = p(p - 1)$. Así que $M(p)$ sólo podría tener a $p(p - 1)$. Y efectivamente lo tiene porque cuando $b = p(p - 1)$, entonces $p + b = p + p(p - 1) = p^2$ que divide a $pb = p^2(p - 1)$. Por tanto, $M(p) = \{ p(p - 1) \}$. Por tanto si p es primo, $M(p)$ tiene exactamente un elemento.

Falta probar que si a no es primo entonces $M(a)$ tiene al menos dos elementos.

Sea pues a un número compuesto, entonces hay al menos dos números naturales mayores que 1 que lo dividen (uno de ellos sería el mismo a). Dado un divisor $q > 1$ de a, si hacemos $b = a(q - 1)$, entonces $a + b = a + a(q - 1) = aq$ y $ab = a^2(q - 1)$ que es divisible por $aq = a + b$. De manera que b pertenece a $M(a)$. Como existen al menos dos q's de esas, entonces podemos contruir al menos dos b's en $M(a)$. Por tanto $M(a)$ tiene al menos dos elementos.

Es fácil checar que $M(1)$ no tiene elementos.

Por tanto los a's tales que $M(a)$ es un conjunto de un sólo elemento, son exactamente los primos.

PROBLEMA 55.

Por el problema 50, todos los números mayores que ab pueden ser expresados en la forma $ax + by$ con x, y enteros positivos. Entonces sólo nos falta probar que ab no se puede expresar de esta manera. Supongamos que si se puede, entonces $ab = xa + yb$, es decir, $a(b - x) = yb$. Como a y b son primos relativos, a debe dividir a y, lo cual implica que existe y_1 tal que $y = a \cdot y_1$ con $y_1 \geq 1$ (pues a y y son números naturales). Similarmente $x = bx_1$, donde x_1 es un número natural. De manera que $ab = abx_1 + aby_1$. De aquí que $1 = x_1 + y_1$, esto es absurdo pues $y_1 \geq 1$ y $x_1 \geq 1$. Por tanto ab no se puede expresar y es el más grande de los que no se pueden.

PROBLEMA 56.

a) Veamos cuantos hay de exactamente 11 dígitos. El primer dígito de la izquierda tiene que ser uno, los diez restantes pueden ser 0 o 1. Por tanto hay $1 \cdot 2^{10} = 1024$ números de exactamente 11 dígitos con la característica mencionada.

Analógamente podemos encontrar 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 2, números de exactamente 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 dígitos respectivamente. Por lo que el conjunto T tiene 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 2 = 2048 elementos. Y el más grande es el que se escribe como 1111111111 en base 3, es decir, el número $3^{10} + 3^{9} + \ldots + 3^{3} + 3^{2} + 3 + 1 = 88573$.

b) Sean n, m, r tres números en una progresión aritmética entonces $m - n = r - m$ o $2m = n + r$. Supongamos que n, m, r pertenecen a T. Entonces las expresiones de los números n, m, r en base 3 sólo tienen unos y ceros. Al multiplicar m por 2, los unos se convierten en doses y los ceros siguen siendo ceros. por lo que, en base 3, el número 2m es el resultado de cambiar los unos por doses en el número m. Como n y r tienen únicamente ceros y unos por lo que la suma de una cifra de n con una de r (todo en base 3) nunca es mayor que 2, entonces al hacer la suma, nunca se "lleva nada". De modo que para obtener una cifra igual 2 (resp. 0) en la suma, es necesario que las cifras correspondientes de n y r hayan sido ambas iguales a 1 (resp. 0). Pero $n + r = 2m$. Cuando una cifra de 2m es 2 (resp. 0), se tiene que la cifra correspondiente para m es 1 (resp. 0) y, por lo que dijimos arriba, las cifras correspondientes a n y r son unos (resp. ceros). De manera que donde m tiene unos, también n y r los tienen y donde m tiene ceros, también n y r tienen ceros. Esto prueba que los números m, n y r son el mismo. Esta contradicción termina la prueba de b).

PROBLEMA 57.

Recordemos que $2^r - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{r-1}$, de manera que $3^s = 2^r - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{r-1}$. Cuando r es impar, el lado derecho de esta igualdad se puede agrupar de la siguiente forma:

$(1 + 2) + (2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5) + \ldots + (2^{r-3} + 2^{r-2}) + 2^{r-1} =$

$3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2^4 + \ldots + 3\cdot 2^{r-2} + 2^{r-1}$, despejando 2^{r-1} obtenemos que 2^{r-1} es un múltiplo de 3, lo que es absurdo. Esta contradicción prueba que r tiene que ser par.

Así que $3^s = (1 + 2) + (2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5) + \ldots + (2^{r-2} + 2^{r-1})$

$= 3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2^4 + \ldots + 3\cdot 2^{r-2} =$

$3(1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{r-2})$.

De aquí que $3^{s-1} = 1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{r-2}$. Vamos a tratar de factorizar otro 3. Notemos que

$1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{r-2} =$

$(1 + 2^2 + 2^4) + (2^6 + 2^8 + 2^{10}) + \ldots + (2^{r-6} + 2^{r-4} + 2^{r-2}) =$

$3\cdot 7 + 3\cdot 7\cdot 2^6 + \ldots + 3\cdot 7\cdot 2^{r-6}$

$= 3[7(1 + 2^6 + \ldots + 2^{r-6})]$.

Esta expresión implica que 3^{s-1} es múltiplo de 7 lo que es absurdo. Por tanto esta igualdad no es posible. Notemos que para hacer la factorización estamos suponiendo que hay un múltiplo de 3 de sumandos en la suma $1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{r-2}$. De no ser así, entonces, de todos modos los podemos agrupar de 3 en 3 y nos sobrarían uno o dos términos que serían 2^{r-2} o $2^{r-4} + 2^{r-2}$. Si $s > 1$, en el primer caso, tendríamos que 2^{r-2} es múltiplo de 3 lo que es un absurdo. En el segundo caso, tendríamos que $2^{r-4} + 2^{r-2} = 2^{r-4}(1 + 4) = 2^{r-4}(5)$ es un múltiplo de 3 que también es un absurdo. Entonces la única posibilidad que queda es que $s = 1$ y

$c_1 = c_0 + n - 1 \equiv n - 1 \pmod{n}$

$c_2 \equiv c_1 + 2 \equiv 1 \pmod{n}$

$c_3 \equiv c_2 + n - 3 \equiv n - 2 \pmod{n}$

$c_4 \equiv c_3 + 4 \equiv 2 \pmod{n}$

$\vdots$

$c_{n-2} \equiv c_{n-3} + n - 2 \equiv k - 1 \pmod{n}$

$c_{n-1} \equiv c_{n-2} + 1 \equiv k \pmod{n}$

Entonces claramente los números $c_0, \ldots, c_{n-1}$ dan una permutación de los números $0, 1, \ldots, n - 1$ que es lo que queríamos mostrar.

PROBLEMA 59.

Los primos menores que 26 son 9, así que si tomamos un m en M, éste será de la forma: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, donde cada α_i es un entero mayor o igual que cero. A cada miembro de M le asignamos el vector $(x_1, x_2, \ldots, x_9)$, donde $x_i = 0$ si el exponente α_i de p_i es par y $x_i = 1$ si α_i es impar.

Como se pueden formar $2^9 = 512$ vectores de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_9)$, donde $x_i = 0$ o $x_i = 1$, y en M hay 1990 números, entonces existen dos números a y b en M a los que les corresponde el mismo vector. Si escribimos $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$, como les toca el mismo vector, entonces si α_i es par, se sigue que β_i también lo es y si αi es impar, entonces β_i es impar. De manera que $\alpha_i + \beta_i$ es siempre un número par de la forma $2\gamma_i$. De manera que $ab = p_1^{2\gamma_1} p_2^{2\gamma_2} \cdots p_r^{2\gamma_r} = (p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_r^{\gamma_r})^2$ es un cuadrado perfecto y esto es lo que teníamos que mostrar.

PROBLEMA 60.

Para darnos una idea, de como hay que colocar los números, hagamos lo siguiente: coloquemos el 1 en algún C_i, este cuadrado no podrá contener a ninguno de los números del 2 al 16, pues la distancia del 1 a cualquiera de estos es menor que 15. Así que el dos tendrá que quedar en otro cuadrado C_j, por la misma razón este cuadrado no podrá contener a ninguno de los números del 3 al 17, así seguimos hasta colocar el 16. Con esto hemos visto que los números del 1 al 16 tienen que quedar en cuadrados diferentes. El 17 no puede estar en los cuadrados que contienen a los números del 2 al 16, pues la distancia a cualquiera de estos es menor que 16. Así que el 17 queda en el mismo cuadrado que el 1. Analógamente el 18 no podrá estar en los cuadrados que contienen a los números del 3 al 17, pues su distancia a estos es menor que 16. Así seguimos colocando los números faltantes. Razonando de esta manera, se puede concluir que el cuadrado que contiene al 1, contiene también al 17, 33 y 49; el que contiene al 2, contiene al 18, 34 y 50; étc.

De esta manera en el cuadrado C_1, se colocan cualquiera de los números 1, 2, 3, ..., 16, es decir tenemos 16 formas de empezar. Una vez elegido alguno de estos, tenemos 4! formas de elegir los cuatro números que quedarán en C_1, por tanto tenemos 16(4!) formas de llenar el cuadrado C_1. Para C_2 habrá 15(4!) formas de elección, pues una vez elegido alguno de los números del 1 al 16 para C_1, nos quedan 15 números para elegir; para C_3 habrá 14(4!) formas de elección; seguimos este proceso hasta llegar a C_{16} que tendrá 1(4!) formas de elección. Por tanto, los números del 1 al 64 se podrán colocar de $16(4!)15(4!)14(4!)\ldots1(4!) = 16!(4!)^{16}$ formas.

APENCICE B

$a \mid b$	a divide a b
$a \equiv b \pmod{m}$	a es congruente a b módulo m
$a \leq b$	a es menor o igual a b
$a < b$	a es menor que b
$a \geq b$	a es mayor o igual que b
$a > b$	a es mayor que b
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$n!$	n factorial ($n! = 1 \; 2 \quad n$)
$\sum$	Sumatoria
$[x]$	El máximo entero que es menor o igual que x
ϕ	Función ϕ de Euler

BIBLIOGRAFIA

1. Algebra Superior.
Cárdenas, Lluis, Raggi, Tomas.
Editorial Trillas, México.

2. Folletos de preparación para las Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas.
Varios autores.
Publicados por la Sociedad Matemática Mexicana.

3. Fundamentos de la Teoría de los Números.
I. Vinogradov
Editorial MIR, Moscú.

4. International Mathematical Olympiads, 1959 - 1977.
Samuel L. Greitzer
Publicado por la Asociación de Matemáticas de América, Estados Unidos de América

5. International Mathematical Olympiads, 1978 - 1985 And Forty Supplementary Problems.
Murray S. Klamkim.
Publicado por la Asociación de Matemáticas de América, Estados Unidos de América

6. Introducción a la Teoría de los Números.
Niven y Zuckerman.
Editorial Limusa, México.

7. Lecciones Populares de Matemáticas.
Varios títulos de diversos autores.
Editorial MIR, Moscú.

8. Les mathématiques par les problèmes.
Mohammed Akkar, Marle - Inerese Akkar.
Editorial Sochepress, France.

9. Matemáticas Iniciales.
Luis Cruz Romo, Ernesto Lupercio Lara.
Editorial EASO, México.