



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Métodos numéricos en el estudio
de jets astrofísicos

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a :

Susana Biro McNichol

México, D.F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1991



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Resumen.....	1
Introducción.....	2
Capítulo 1	Motivación Astronómica..... 6
1.1	Objetos Herbig-Haro (HH)..... 6
1.1.a	Propiedades Espectrales
1.1.b	Propiedades Secundarias
1.2	Modelos de Objetos Herbig-Haro..... 14
1.3	Chorros Astrofísicos..... 21
1.3.a	Chorros Extragalácticos
1.3.b	Chorros Estelares
Capítulo 2	Un Modelo de Chorro Estelar..... 31
2.1	El Modelo..... 31
2.2	El Método Numérico..... 35
2.3	El Método Analítico..... 45
2.3.a	Zona de Expansión
2.3.b	Choque Incidente
2.3.c	Choque Reflejado
2.4	Una Comparación entre los dos Métodos..... 55
2.4.a	Resultados de Método Numérico
2.4.b	Resultados del Método Analítico
2.4.c	La Comparación
2.4.d	Modelo Mejorado
2.5	Recapitulando..... 74
Capítulo 3	Discos de Mach en Chorros Estelares..... 76
3.1	Reflexión Regular..... 77
3.2	Reflexión de Mach..... 80
3.3	Discos de Mach..... 83
3.3.a	Condición de aparición en la solución numérica

	3.3.b Aparición en flujos cilíndricos, no-adiabáticos	
	3.3.c Aparición en Chorros Estelares	
	3.4 Conclusiones.....	93
Capítulo 4	Chorros Estacionarios a Grandes Distancias.....	96
	4.1 Estudio Analítico.....	97
	4.1.a Conservación de Flujo de Masa	
	4.1.b Ecuaciones de Conservación	
	4.1.c Relación de Prandlt	
	4.2 Resultados Numéricos.....	102
	4.2.a Pérdida de Masa	
	4.2.b Chorro Estándar Largo	
	4.2.c Dependencias de Velocidad y Presión	
	4.3 La Comparación.....	112
	4.4 Conclusiones.....	114
	Conclusiones.....	116
Apéndice A	Ondas de Choque.....	119
	A.1 Ondas Sonoras.....	119
	A.2 Ondas de Choque.....	122
Apéndice B	El Programa Statjetna.....	129
	B.1 El Método Numérico.....	129
	B.2 El Programa.....	131
	B.3 Estructura del Programa.....	132
	Referencias.....	140

RESUMEN

En este trabajo se utiliza el modelo de Chorros Estelares de Cantó, Raga y Binette para estudiar dos fenómenos particulares en estos flujos: la aparición de choques frontales llamados Discos de Mach y el comportamiento del flujo a grandes distancias. El modelo tiene solución analítica y numérica e inicialmente se hace una comparación entre el comportamiento del flujo que predice cada solución para encontrar un modelo teórico general.

En la zona de reflexión (donde se encuentran dos choques) se determinan las condiciones para la aparición de un tercer choque tipo Disco de Mach. Se utiliza el código numérico para detectar su aparición y se encuentra que ésta depende de una combinación del número de Mach y la presión del flujo relativa a la presión del medio.

Se estudia el comportamiento de las variables del chorro a grandes distancias. Se obtienen expresiones analíticas para algunas variables en esta situación y se comparan con los resultados de la simulación numérica, encontrando una buena concordancia.

INTRODUCCION

Los chorros estelares son flujos de gas altamente colimado que se observan en regiones de formación estelar. Se piensa que el gas que los compone proviene del viento de estrellas jóvenes y que es colimado por las irregularidades en la densidad características de estas regiones. Su estudio es importante para estas regiones, puesto que da información acerca de la estrella, del medio circundante, y de la posible relación entre todos ellos.

Inicialmente estos chorros fueron observados como cadenas aproximadamente alineadas de nudos brillantes. La emisión de estos nudos es del tipo de aquella detectada en los objetos Herbig-Haro, es decir emisión característica de un gas en la zona de enfriamiento detrás de una onda de choque. Observaciones con mayor resolución muestran que la mayoría tienen además un nudo de mayor brillo en la punta, y se piensa que en es el lugar donde el chorro entra en contacto con el medio (superficie de contacto).

A partir de observaciones detalladas y algunos modelos teóricos, se ha podido dar un esquema para la estructura general de estos chorros. Esencialmente consisten de una zona en que el viento estelar es colimado y posiblemente acelerado, seguido de una zona intermedia en la cual el flujo no sufre cambios notables y terminando con el lugar donde el flujo es frenado por el medio. Las diferentes zonas se han modelado con distintos grados de éxito y se han realizado comparaciones con las observaciones. Para la zona de

colimación hay modelos analíticos como los de Cantó (1980), Königl (1982) y Raga y Cantó (1988) que suponen que gradientes de presión en el medio enfocarán al viento estelar inicialmente isotrópico. Para la zona de interacción con el medio ambiente existen trabajos tanto analíticos como numéricos como por ejemplo el de Hartigan *et al.* (1987), en los cuales se ha logrado reproducir los espectros de emisión observados de estas zonas suponiendo ondas de choque curvas ("bow shocks"). La zona intermedia ha sido modelada de varias formas distintas. Existen simulaciones numéricas dependientes del tiempo que incluyen la superficie de contacto como los trabajos de Norman *et al.* (1982), y Falle, Innes y Wilson (1987).

En el presente trabajo se utiliza el modelo desarrollado en Cantó, Raga y Binette (1989) y Raga, Cantó y Binette (1990) para la zona intermedia de los chorros estelares. Este modelo supone que en esta zona se tiene un flujo estacionario de gas supersónico, compresible, y no viscoso. Considera que existe simetría cilíndrica, ignora el efecto de intercambio de materia con el medio circundante, y supone que la composición química del gas es la típica del medio interestelar. Además, considera que el medio circundante es uniforme. Encuentra que dadas las condiciones anteriores, aparecen pares de choques internos al flujo, regularmente espaciados, y con una velocidad de choque aproximadamente constante a través de todos los pares. El tratamiento sencillo que este modelo hace de esta zona permite hacer un análisis cuidadoso del espacio de los parámetros, así como de los procesos atómicos dentro del gas.

En el Capítulo 1 se hace una revisión acerca de los objetos HH (los cuales están íntimamente relacionados con los chorros estelares), de sus propiedades y de su posible relación con los procesos de formación estelar. Se estudian los chorros astrofísicos en general, los chorros estelares y sus

En el Capítulo 2 se revisan la solución analítica y numérica del modelo de Cantó, Raga y Binette. Se hace una comparación entre los valores que predice cada una de las soluciones y se encuentra una concordancia razonable en la mayor parte de los valores. Aparece una discrepancia notable en el valor que predicen para su largo característico. Por esto, se relajan algunas suposiciones hechas en el tratamiento analítico y se encuentra una mejor coincidencia. Esta comparación aporta una idea más global sobre el comportamiento estos chorros, y además muestra como pueden ser complementarias las dos soluciones.

En el Capítulo 3 se estudia con mayor detalle el punto en que los choques internos son reflejados. Esta reflexión puede ser regular (aparecen dos choques oblicuos) o bien de Mach (dos choques oblicuos más un choque frontal). La forma del choque determina la forma de la emisión, por lo tanto es importante saber si se presenta reflexión de Mach. Se discuten las condiciones para que esta reflexión sea regular, y los casos en que deja de serlo (reflexión de Mach). Para ello se utilizó el código numérico, aprovechando el hecho de que en el momento en que aparece la reflexión de Mach, el algoritmo de integración del código ya no converge. Se determinan los valores característicos de las variables del chorro en esta zona muy cercana (pero justo antes) al punto de reflexión para conocer que tipo de reflexión se va a dar.

En el Capítulo 4 se estudia el comportamiento de las variables del chorro cuando se le permite avanzar una gran distancia. Se calculan analíticamente algunas cantidades características del flujo a grandes distancias y posteriormente se comparan con los resultados de la simulación numérica. En este análisis se detectó que la simulación numérica presentaba

una pérdida de masa apreciable cuando se integraba grandes distancias. Es común que esto suceda en códigos de este tipo. Se introdujo una corrección tal que se asegura que el flujo de masa permanezca constante a través de los pasos de integración.

MOTIVACION ASTRONOMICA

1.1 Objetos Herbig-Haro

Las pequeñas nebulosidades llamadas objetos Herbig-Haro constituyen una parte importante del estudio de la formación estelar. Se encuentran en regiones de nubes moleculares, asociados a estrellas de reciente formación y a los discos de acreción y flujos moleculares de alta velocidad que éstas presentan. En los últimos años la relación entre todos estos procesos se ha ido aclarando, pero aun queda mucho por explicar.

En los años cincuenta dos astrónomos descubrieron independientemente un nuevo tipo de objeto. Fueron Guillermo Haro y George Herbig quienes observaron tres curiosas nebulosidades compactas en la región de la nebulosa de Orión. Estos objetos se bautizaron Herbig-Haro (o HH) en honor a sus descubridores, y los primeros en ser descubiertos son HH1, HH2 y HH3 (Herbig 1950, Haro 1951). La razón por la que llamaron la atención es que tenían espectros muy peculiares, distintos a los espectros de las estrellas cercanas. Presentan emisión en líneas resultante de una gran variedad de energías de excitación y en particular emisión muy intensa de líneas prohibidas (como [SII] y [OI]), así como en líneas de la serie de Balmer del hidrógeno. Herbig (1950) sugirió que se trataba de un fenómeno de fotoionización, y que una estrella azul muy caliente, era su fuente de energía. Propuso, también, que se podía tratar de una estrella enana tardía (tipo espectral K o M). Haro (1951) eliminó ambas posibilidades haciendo

observaciones profundas en el visible y cercano infrarrojo (tal que debieran aparecer estrellas hasta de magnitud 19) en las cuales no fue detectada ninguna estrella dentro o en la inmediata vecindad de los objetos. Pasó mucho tiempo sin que se diera una explicación satisfactoria del origen de estos objetos. Sin embargo, se siguieron clasificando objetos tipo HH a partir de sus propiedades espectrales.

No fue sino hasta los años setenta en que Schwartz (1975) notó el parecido entre los espectros producidos por remanentes de supernova y objetos HH. Dado que ya se sabía que la emisión de las remanentes de supernova es debida al paso de un gas a través de una onda de choque, sugirió que en los objetos HH sucedía lo mismo. La comparación entre modelos de espectros producidos por ondas de choque y aquellos de los objetos HH mostró que en efecto, el fenómeno de onda de choque pudiera ser una buena explicación para la emisión de los objetos HH. Un problema central es el de determinar la fuente excitadora de los objetos HH. Osterbrock (1958) fue el primero en sugerir que dicha excitación pudiera resultar de un flujo muy energético proveniente de una estrella joven. Strom (1974) y sus colaboradores fueron los primeros en encontrar fuentes infa-rojas cercanas a objetos HH. Ahora hay más de 20 de dichas fuentes identificadas, y se sabe que son estrellas de reciente formación. A pesar de la diversidad de objetos HH identificados hasta la fecha, es generalmente aceptado que todos ellos son resultado de la interacción de un flujo supersónico de un viento estelar con el gas del medio circundante.

El criterio principal para la identificación de los objetos HH es el espectro que los caracteriza. Aunque presentan similitudes en su forma, se ha encontrado que un criterio puramente morfológico no es suficiente para identificarlos. Puesto que se sabe que tienen relación con otro tipo de objetos (e.g. nubes moleculares oscuras, estrellas tipo T Tauri y flujos

moleculares de alta velocidad), otro criterio es la proximidad a estos objetos. El catálogo más completo a la fecha (aunque ya han sido descubiertos muchos más objetos HH) es el de Von Hippel *et al.* (1988), en el cual aparecen 184 de éstos objetos, así como sus coordenadas, velocidades radiales, movimientos propios e información acerca de sus espectros.

A continuación se resumen las principales propiedades de los objetos HH utilizando los trabajos de revisión de Schwartz (1983), Cantó (1987), Dyson (1987) y Reipurth (1991). Las propiedades se pueden dividir en propiedades espectrales y propiedades secundarias. Aquí se resumen las características de estas propiedades.

1.1.a Propiedades Espectrales

A partir del espectro que emite un objeto se puede obtener información acerca de su composición química, temperatura, fracción de ionización, densidad electrónica y movimiento (por efecto Doppler). Se pueden tomar espectros de un objeto a diferentes bandas de frecuencias, y cada una da información importante. Se tienen observaciones de los objetos HH más conocidos y brillantes (HH1 y HH2) en casi todas las frecuencias. De los demás objetos hay observaciones en varias bandas, pero principalmente en el visible.

En el visible (longitudes de onda $3000 < \lambda < 7000 \text{ \AA}$) se observan líneas en emisión debidas a un amplio rango de excitación. Predomina la emisión en líneas permitidas y prohibidas de átomos neutros e iones de baja energía de excitación. Los objetos HH de baja excitación tienen líneas intensas (respecto de las líneas de la serie de Balmer) de [OI], [SII], [NI]. Estas mismas líneas son menos intensas en los objetos de alta excitación, y en cambio su espectro presenta líneas de alta excitación (como [OIII]) más intensas. En la tabla 1.1 se muestra el flujo (respecto del flujo de H β) de algunas líneas en emisión para un objeto de baja excitación (HH2-H) y uno de

alta excitación (HH7). En esta tabla se aprecia la amplia variedad de excitación de estos objetos.

Por lo general el continuo es débil y a veces hasta inexistente. Muchos objetos HH presentan un aumento en el continuo en el extremo azul. Este aumento se ha interpretado como resultado de la emisión de dos fotones del hidrógeno atómico.

Tabla 1.1 Comparación entre los flujos (relativos a $H\beta=100$) de líneas de emisión para un objeto HH de alta excitación (HH2-H) y uno de baja excitación (HH7). Extraído de Bohm 1983.

Identificación	F_{λ} (rel)		
	1	H-H 2H	H-H 7
O II	3726/29	169	87
Ca II	3933	14	69
[S II]	4068/76	64	119
H γ	4340	34	74
[Fe II]	4414/16	6	9
Mg I	4571	4	9
H δ	4861	100	100
[O III]	5007	63	210
[Fe II]	5158	4	20
[N I]	5198/5200	10	184
[O I]	6300	122	405
[O I]	6363	22	123
H α	6563	293	447
[N II]	6584	154	23
[S II]	6717	48	1266
[Ca II]	7291	8	79
[O II]	7319		
[Ca II]	7324	67	44
[O II]	7330		
[C I]	9248	8	596
[S II]	10317	11	-
[S II]	10376	12	26

A partir de los perfiles de algunas líneas se han medido las velocidades radiales de estos objetos (por efecto Doppler). En todos los casos estas velocidades son del orden de cien kilómetros por segundo, y en 75% de los casos son negativas, es decir que se acercan al observador.

En el cercano infrarrojo ($\lambda > 7000 \text{ \AA}$) se detectan líneas en emisión debidas a hidrógeno molecular que han sido importantes en el diagnóstico de

la componente molecular del gas que forma los objetos HH. Esta emisión puede deberse a excitación colisional o bien a absorción de radiación ultra-violeta. En el caso de los objetos HH se encuentra que la emisión es debida a excitación colisional (Reipurth 1991). En esta banda hay un aumento del continuo que se debe a una combinación de la reflexión por granos de polvo de la radiación de estrellas cercanas y de emisión libre-libre.

En el ultravioleta ($\lambda < 3000 \text{ \AA}$) el espectro es débil debido a la extinción por el polvo que rodea a los objetos HH lo cual dificulta las observaciones. En esta banda también se diferencian los objetos HH de alta y baja excitación. Los de alta excitación presentan líneas debidas a iones de alta excitación como lo son CIII y OIII, mientras que los objetos de baja excitación no muestran éstas, sino líneas de la serie de Lyman del hidrógeno molecular. El continuo presenta un aumento sustancial, que es continuación del que se observa en el óptico. Su origen se ha explicado como una combinación de emisión de dos fotones con emisión libre-ligado (series de Balmer y Paschen).

De los datos espectroscópicos es posible determinar la densidad, temperatura y fracción de ionización del gas. Para los objetos HH estos parámetros toman los siguientes valores:

Densidad Electrónica	2.5×10^3 a $5.5 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$
Temperatura Electrónica	7500 a 12000 K
Fracción de Ionización	0.07 a 0.8

Aunque la temperatura y la densidad son similares a las que se conocen para regiones fotoionizadas, la fracción de ionización es demasiado pequeña. Esto, sumado con las intensidades de líneas observadas apuntan a otro tipo de mecanismo de excitación para el gas en los objetos HH. Este mecanismo es el de ondas de choque, y se explica con detalle mas adelante.

Las observaciones no espectroscópicas en las frecuencias de radio e

infrarrojo son muy útiles en la detección de las estructuras que rodean a los objetos HH. En la siguiente sección se mencionan estas estructuras y su posible relación con los objetos HH.

1.1.b Propiedades Secundarias

Aunque el criterio principal para la identificación de un objeto HH es la forma de sus espectros, aparecen semejanzas interesantes en otras de sus propiedades. Estas pueden ser morfológicas, dinámicas o de su entorno, y aquí se les llama secundarias.

Los objetos HH se observan como nudos pequeños, compactos y brillantes con luminosidades que alcanzan valores de hasta $1.4 L_{\odot}$ (luminosidad del Sol). Sus dimensiones van de 300 a 2000 UA (1 Unidad Astronómica = 1.5×10^{13} cm que corresponde a la separación promedio entre la Tierra y el Sol) y sus masas son de aproximadamente $10 M_{\oplus}$ (masas terrestres). Presentan nebulosidades a su alrededor cuyo espectro es semejante pero de brillo mucho menor. Se encuentran en la vecindad de nubes moleculares oscuras, las cuales se sabe que presentan formación estelar. Aparecen cerca de estrellas de formación reciente y de los flujos moleculares de alta velocidad que estas presentan y se cree que todos estos fenómenos están relacionados entre sí. Algunos objetos HH se encuentran solos, mientras que otros son parte de agrupaciones. Las agrupaciones son a veces amorfas y otras veces están alineados.

Estos objetos se observan en las partes exteriores de nubes moleculares oscuras. Una razón para esto puede ser un efecto de selección: es decir hay objetos HH dentro de la nube pero no se observan por extinción. Otra posible razón es que solamente se forman en zonas con gradientes de densidad como las orillas de las nubes.

Los objetos HH tienen velocidades radiales y tangenciales del orden de los cientos de kilómetros por segundo. En un medio con temperaturas típicas de 10^4 K (como lo es éste), la velocidad del sonido es aproximadamente 10

kms^{-1} , así que estas velocidades son claramente supersónicas. La manera en que se explican estas velocidades es que el flujo de gas (que finalmente se manifiesta en el objeto HH) sufre un proceso de colimación. Este proceso toma un gas inicialmente subsónico y en expansión aproximadamente isotrópica y lo acelera y alinea. Se piensa que el mecanismo colimador puede ser un disco de acreción que se encuentre alrededor de la estrella.

La velocidad radial es la mayoría de las veces negativa, lo cual significa que los objetos HH se acercan al observador. El hecho de que se observen más objetos HH con velocidades radiales negativas se explica porque las nubes moleculares probablemente impiden ver la contraparte de los objetos HH con velocidad radial positiva, que estarían atrás de la nube molecular. Cuando hay agrupaciones, las velocidades tangenciales (o movimientos propios) de todos los objetos HH que ahí aparecen son aproximadamente paralelas. En muchos casos, la dirección de estas velocidades está alineada con una estrella (ver figura 1.1). Generalmente estas estrellas no se ven porque la extinción debida al polvo en las nubes moleculares es muy grande, pero se detectan en el infrarrojo. Se piensa que la fuente de energía de los objetos HH son estas estrellas. Se encuentra que dichas estrellas tienen una alta tasa de pérdida de masa de 10^{-8} y hasta $10^{-7} M_{\odot} \text{ año}^{-1}$ (M_{\odot} = masa solar = $2 \times 10^{33} \text{ g}$).

Para decidir cual estrella es la fuente de energía se toman en cuenta varios criterios. La cercanía a objetos HH: se considera que la fuente debe estar cercana al objeto. La dirección en que apuntan los movimientos propios: si se supone que la estrella impulsa al objeto HH, entonces ésta debe estar en dirección contraria a la velocidad tangencial de éste. El alineamiento de varios objetos HH (objetos HH tipo jet, que se verán con mas detalle adelante) con alguna estrella. La dirección general de los flujos bipolares en la zona: al parecer ambos fenómenos pueden ser generados por la misma

estrella. Con estos criterios, se han buscado fuentes en el infrarrojo. En el 50% de los casos que revisan Mundt, Brugel y Bürke (1987), éstas resultan ser estrellas tipo T Tauri.

Los flujos moleculares de alta velocidad se observan como lóbulos de emisión de la molécula de monóxido de carbono (CO). Estos lóbulos generalmente aparecen en pares (flujos bipolares) a ambos lados de una estrella tipo T Tauri, uno de ellos presenta corrimiento Doppler al rojo y el otro al azul, indicando que se mueven en direcciones opuestas. En muchas ocasiones (HH29, HH102 por ejemplo) se detectan objetos HH cerca o dentro del lóbulo corrido al azul. La razón por la que no se observan objetos HH en el lóbulo rojo es que estos sufren la extinción del medio. Se han observado más de 40 objetos HH cercanos a 10' (minutos de arco) o más de estos flujos.

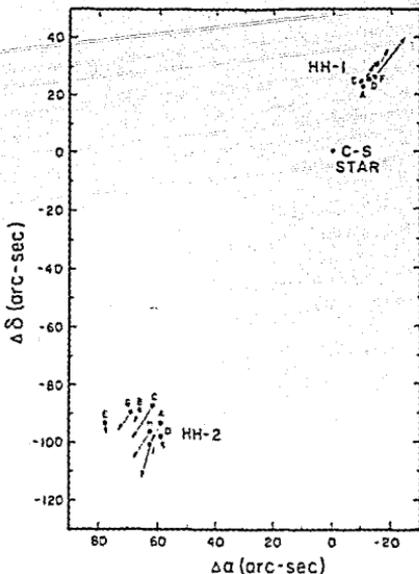


Figura 1.1 Gráfica de los movimientos propios de los objetos HH1 y HH2. Se observa que cada conjunto de objetos HH presenta velocidades aproximadamente paralelas. Se conoce una fuente de radio e infrarroja en el centro del sistema

1.2 Modelos de Objetos Herbig-Haro

En Astronomía siempre se tienen mediciones indirectas del objeto que se estudia puesto que es imposible acercarse a él y medir sus características directamente. Se vuelve necesario entonces formular un modelo para explicar las mediciones que se tienen y al mismo tiempo poder predecir futuras observaciones. Las propiedades observacionales de los objetos HH se revisaron en la sección 1.1. A partir de estas propiedades se tiene un panorama general de los objetos HH, y con éste se han planteado varios modelos que intentan explicar el fenómeno. Hay dos partes que se deben explicar acerca de los objetos HH, una es el mecanismo excitador y otra es el mecanismo de formación.

Todos los modelos vigentes en este momento coinciden en utilizar el fenómeno de ondas de choque como el mecanismo excitador del gas cuya radiación es observada. La mayoría también tienen en común que consideran a una estrella de reciente formación como la fuente de energía de los objetos. Difieren, sin embargo, en el planteamiento de la forma en que aparecen los choques, así como en el mecanismo mediante el cual el gas proveniente de la estrella es colimado. Varios de estos modelos se mencionan en grupos más adelante.

Por la importancia que tienen las ondas de choque en este trabajo, se revisan con detalle en el Apéndice A. Es conveniente revisar este apéndice simplemente para familiarizarse con la terminología que se utiliza más adelante. Por el momento basta decir que una onda de choque en un gas funciona como un mecanismo que transforma la energía cinética de un gas supersónico en energía térmica y posteriormente en radiación. En el frente de choque, la energía cinética es transformada en energía térmica. En la zona justo detrás del frente de choque, el gas intenta regresar a un estado de equilibrio, y en este proceso transforma su energía térmica en energía de radiación. Esta radiación es la que se observa, y su intensidad y espectro dependen de la velocidad que tenía el flujo antes de ser chocado. La figura A.1 del apéndice A muestra el comportamiento de la temperatura del gas al pasar por una onda de choque.

La primera persona que asoció ondas de choque con los objetos HH fue Schwartz (1975). En su trabajo, Schwartz utiliza los resultados del modelo de onda de choque plano-paralelo elaborado por Cox (1972) para remanentes de supernova. Comparando los espectros de objetos HH y aquellos que resultan del trabajo de Cox, concluye que la radiación de los objetos HH debe ser producida por una onda de choque. Desde el trabajo pionero de Cox (1972), se han afinado los modelos de ondas de choque para objetos HH (e.g. Hartigan,

Raymond y Hartman, 1987 o Raga, 1989), así como las observaciones (Mundt, Brugel y Bürke 1987), y se encuentra que efectivamente el espectro que predice una onda de choque concuerda con lo que se observa en los objetos HH.

Muchos de los modelos que existen se han hecho usando choques estacionarios (e.g. Raga 1989). Esto simplifica los cálculos permitiendo mayor resolución y aporta mucha información acerca del comportamiento y propiedades del fenómeno. Sin embargo, en los casos dependientes del tiempo que se han estudiado se encuentra que el efecto sobre el espectro de emisión es importante. En particular Falle, Innes y Wilson (1987) y Norman *et.al.* (1982) encuentran que con un análisis dependiente del tiempo aparecen choques secundarios detrás del choque principal. Estos cambian (a veces hasta en un factor de 2) la magnitud de la emisión que se predice. Es importante entonces tener cuidado con los resultados de los modelos estacionarios.

Hay algunas propiedades observacionales que no se pueden explicar adecuadamente con un choque plano-paralelo como el del modelo de Cox. Las líneas de emisión pueden llegar a tener anchos hasta de 500 km s^{-1} (Hartigan, Raymond, Hartman 1987). Aparecen, además, líneas en alta y baja excitación con intensidades que difícilmente se pueden explicar con la misma velocidad de choque. En general el espectro visible se puede explicar con una velocidad de choque de alrededor de 100 km s^{-1} , el ultravioleta requiere una velocidad de hasta 400 km s^{-1} y el infrarrojo tan pequeña como 50 km s^{-1} .

Un choque en forma de proa (bow shock) resuelve varios de estos problemas (Hartigan, Raymond, Hartman 1987). Aquí el choque es oblicuo (excepto por una pequeña parte en el centro, en que es frontal) al flujo, y como tiene forma de proa, diferentes partes del flujo se encuentran al choque a ángulos diferentes. Esto implica que habrán varias velocidades de choque y por lo tanto una variedad de excitaciones. La figura 1.2 muestra el paso de un gas por un choque en forma de proa. El ancho de las líneas es debido a que

parte del material que emite se aleja del observador mientras que parte se acerca. El choque puede hacer que la velocidad con que se dan estos movimientos sea alta y por ello el ancho aumente.

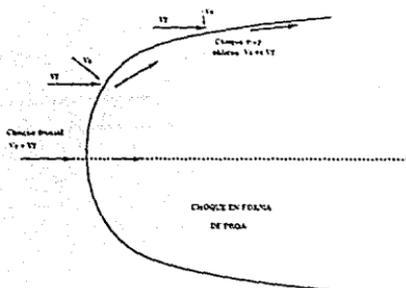


Figura 1.2 Paso de un gas a través de un choque en forma de proa. Cuando el choque es frontal la velocidad de flujo es también la velocidad de choque. Mientras más oblicuo es el flujo al frente de choque, menor es la velocidad de choque y por lo tanto la excitación resultante.

En algunos casos en que la forma de proa se ha podido observar en objetos HH, se comprueba que su parte cóncava apunta hacia la estrella fuente, y en algunos casos se ve un pequeño chorro que sale de la estrella y apunta al objeto HH. Los modelos que hasta ahora concuerdan mejor con las observaciones son los que consideran que aparecen ondas de choque en forma de proa que causan emisión del gas en su zona de enfriamiento.

Todos los modelos de la formación de objetos HH suponen la existencia de una estrella cuya tasa de pérdida de masa es alta, o bien que presentan un mecanismo efectivo de colimación de viento, o ambas cosas. Hay varios de dichos modelos y se mencionan brevemente a continuación.

Los modelos de balas interestelares plantean que los objetos HH son aglutinaciones de gas que se mueven a velocidades supersónicas causando un choque por delante de su trayectoria. Su origen puede estar en segmentos del

capullo protoestelar que son expulsados al romperse éste, o bien en parte del medio circundante que el viento estelar ha acelerado. Entre los trabajos que plantean y desarrollan esta idea están los de Norman y Silk (1979) y Rodríguez *et al.* (1980).

Los modelos como el de Schwartz y Dopita (1980) suponen aglutinaciones (nubecillas chocadas) como las anteriores, pero esta vez estacionarias. Estas son golpeadas por el viento estelar de tal manera que aparece un choque entre la estrella y ellas (figura 1.3). El origen de estas aglutinaciones se explica con las irregularidades de la densidad que existen en las nubes moleculares.

Tanto los modelos de balas, como los de nubes requieren de un viento estelar isotrópico muy fuerte ($M \approx 10^{-6}$ Mo año) o bien de un viento altamente anisotrópico. El modelo de balas concuerda mejor con las observaciones pues predice velocidades tangenciales para los objetos del orden de las velocidades de choque (lo cual se observa más frecuentemente).

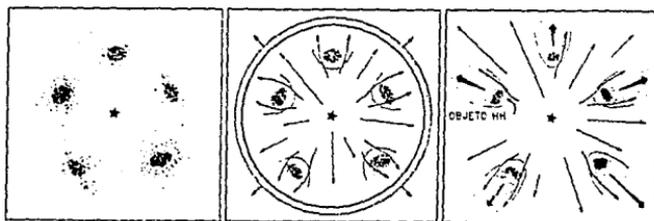


Figura 1.3 Se muestra el modelo en el cual las aglutinaciones estacionarias son golpeadas por el viento, estas pueden ser el origen de los objetos HH.

El modelo eruptivo, que fue planteado por Dopita (1978) y otros autores, dice que los objetos HH se forman a partir de un evento del tipo de FU Ori, en el cual una estrella aumenta su emisión (y tasa de pérdida de masa) repentinamente. Al encontrarse con el medio circundante, este flujo repentino puede generar ondas de choque, las cuales se observan como objetos

HH. No es un modelo que tenga mucha aceptación, pues sólo en dos casos se han encontrado estrellas tipo FU Ori en las cercanías de un objeto HH (HH57 y L1551). La figura 1.4 muestra la evolución temporal este fenómeno de manera esquemática.

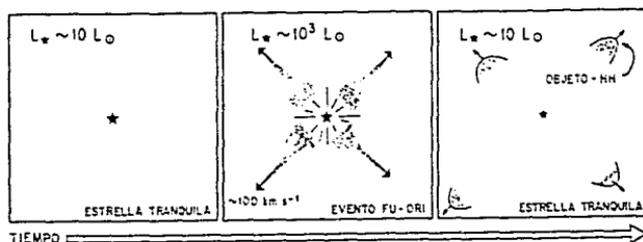


Figura 1.4 Se muestra el modelo en el que una estrella tipo FU Ori puede generar objetos HH. El aumento repentino en el viento de la estrella hace que aparezcan objetos HH.

El modelo de canalización de Königl (1982) propone una manera de obtener un flujo anisotrópico y supersónico a partir de un flujo isotrópico. Plantea que el viento de una estrella joven forma una burbuja dentro de la nube molecular que la rodea. Supone que la estrella tiene una estructura en forma de disco a su alrededor. La burbuja tiende a alargarse en la dirección en la cual la presión es menor (perpendicular al disco) y cuando su estructura tiene una forma inestable, se rompe formando una tobera de de Laval (figura 1.5). Dicha tobera acelera al gas hasta velocidades supersónicas, resultando un flujo que puede presentar choques en la frontera de la tobera o al final de ésta y son estos los que se observan como objetos HH.

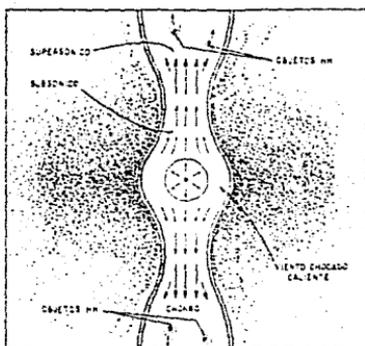


Figura 1.5 Modelo de canalización de Konigl. En este modelo un gradiente de presión genera una tobera de de Laval que acelera el gas. Este gas supersónico es el que da origen a los objetos HH.

El modelo de cavidades de Cantó (1980) propone otro mecanismo para colimar el flujo de una estrella. Dice que el viento estelar va formando dos cavidades (puesto que barre el material de la nube molecular) a lados opuestos de la estrella debido a gradientes de presión. Aquí una suposición importante es que el gas es altamente radiativo. Cuando el gas llega a la frontera de estas cavidades, es chocado por el cambio repentino de presión, deflectado por un choque oblicuo y se enfría detrás de éste. Todo el flujo es ahora dirigido hacia dos puntos opuestos a la estrella donde converge. En este punto vuelve a aparecer una onda de choque (ver figura 1.6). En este caso los objetos HH pueden ser los anillos de material chocado que se desplazan a lo largo de esta cavidad hacia el punto de convergencia y este punto mismo.

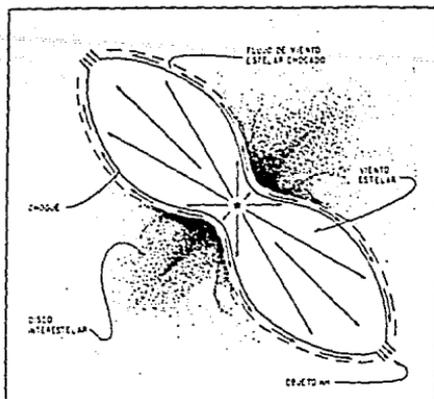


Figura 1.6 Modelo de Cavidades de Canto. El viento estelar pasa por choques oblicuos y es dirigido a dos puntos opuestos a la estrella. En este modelo, se pueden formar objetos HH en las paredes y en las puntas de estas cavidades.

Estos dos modelos corresponden a los límites de baja y alta eficiencia de enfriamiento respectivamente. Es difícil hacer una comparación entre ellos puesto que hacen suposiciones iniciales diferentes. Recientemente Raga y Cantó (1989) extendieron el modelo de Königl para el caso no adiabático y estudian el rango intermedio. Encuentran que se da mejor colimación cuando las pérdidas de energía por radiación son mayores.

El último tipo de modelo es el de jets o chorros estelares. En este caso se observan varios objetos HH alineados dentro del cuerpo del chorro, así como uno más brillante al final. También en este caso se han dado una variedad de explicaciones, pero todos los modelos que caen en este tipo coinciden en que consideran un flujo supersónico colimado en el cual aparecen choques internos. Estos choques se pueden deber a la diferencia de presión con el medio o bien a inestabilidades en la frontera entre el chorro y el medio. Aquí necesariamente debe haber un mecanismo de creación y colimación del chorro, que pudiera ser uno de los mencionados antes. Los chorros

estelares se estudian con mayor detalle en la siguiente sección.

Cada uno de estos modelos explica bien a diferentes objetos HH, pero hasta el momento no hay un modelo que los explique a todos.

1.3 Chorros Astrofísicos

Un chorro consiste de un fluido eyectado por una abertura angosta y que preserva aproximadamente su ancho conforme avanza. Para que esto suceda es necesario que el material que es eyectado tenga una velocidad de movimiento relativamente alta respecto de la velocidad del sonido en el gas considerado.

En astrofísica el fenómeno de los chorros aparece tanto a gran escala (galaxias), como a pequeña (estrellas). En general, es distinguible de las estructuras a su alrededor porque presenta emisión de algún tipo y está alineado con un objeto que se supone genera el gas que lo forma (Birdie 1984). Hay galaxias (especialmente las radiogalaxias y los cuasares), que emiten material en uno o dos chorros. Este material puede llegar a grandes distancias, donde se forman enormes lóbulos. Dado que estos chorros se detectan mejor en frecuencias de radio se acostumbra llamarlos chorros de radio.

También hay chorros que aparentemente se forman a partir del viento de estrellas jóvenes. Este viento es colimado por algún mecanismo, generándose chorros muy delgados y altamente supersónicos (ver, por ejemplo, el mecanismo propuesto por Raga y Cantó, (1989)). Los chorros en las estrellas se observaron primero en el visible y por lo tanto se llaman chorros ópticos.

Ambos tipos de chorros presentan semejanzas, por lo cual su estudio suele estar relacionado a pesar de la diferencia de escala.

1.3.a Chorros Extragalácticos

Las estructuras extra-galácticas como los cuasares y las galaxias activas (elípticas) presentan un fenómeno interesante. Ambos tipos de objetos se detectan en las frecuencias de radio y se encuentran fuertes emisiones en forma de lóbulos a ambos lados de la galaxia o cuasar (que se llamará fuente de aquí en adelante). Estos objetos resultan muy llamativos puesto que en ocasiones indican una cantidad de energía de alrededor de 10^{58} ergs. Los lóbulos aparecen alejados de la fuente y la manera en que el material es transportado desde la fuente hasta ellos es a través de unas estructuras alargadas que se ha dado por llamar chorros de radio, pues la mayor parte de su emisión está en dichas frecuencias.

Estos chorros de radio, pues, se buscan en fuentes extra-galácticas de radio. Se han hecho diversos estudios de este tipo, y se encuentra que entre 65 y 80% de las radiogalaxias tienen jets asociados, mientras que entre 40 y 70% de los cuasares los presentan (Birdle y Perley, 1984). Independientemente de su tipo, las fuentes de radio se clasifican en dos grupos de acuerdo con sus propiedades. Esta clasificación se debe a Fanaroff y Riley (1986), y separa las fuentes en FRI y FR II.

Las FRI son fuentes de radio débiles que tienen asociadas lóbulos con emisión débil también. Estos lóbulos pierden intensidad conforme se alejan de la fuente, y sus bordes no son bien definidos. En la banda de radio, la emisión de los lóbulos domina a la emisión de la fuente. Este tipo de fuentes presenta chorros con longitudes del orden de kiloparsecs (1 parsec = 3.08×10^{18} cm). Toda la estructura es de este orden, y se piensa que la velocidad del flujo no debe ser muy grande. En este tipo de fuentes aparecen dos chorros aproximadamente simétricos. Esto significa que sus tamaños y brillos son similares a distancias iguales de la fuente.

Las fuentes FR II son más poderosas que las anteriores. Aquí los lóbulos terminan en zonas de alta emisión llamados "hot spots" que probablemente son debidos al paso del gas a través de una onda de choque. Este tipo de fuente presenta chorros con largos del orden de cientos de kiloparsecs. Dado el tamaño y el brillo del final del chorro, se piensa que en este caso se tiene un flujo de mayor velocidad.

En ambos casos, se observa que el flujo de los chorros está relacionado con el campo magnético de la fuente. La radiación que se observa proveniente de estos chorros es un continuo no térmico del tipo de la radiación sincrotrónica. Se sabe que esta radiación es resultado de emisión de electrones que giran en torno a una línea de campo magnético a velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Acerca del gas que forma estos chorros solamente se puede afirmar que contiene los electrones relativistas que emiten la radiación sincrotrón. Se han detectado chorros que avanzan paralelos al campo y otros que van perpendiculares. Incluso se encuentran chorros con líneas de campo tanto paralelas como perpendiculares a la dirección de su flujo (Bridle y Perley, 1984). En la mayoría de los casos los chorros extra-galácticos presentan nudos de mayor brillo. Estos nudos se explican como resultado de inestabilidades en la frontera del chorro, o bien como condensaciones debidas a choques internos causados por gradientes de presión (figura 1.7). En muchos casos los chorros son curvos, y se cree que esto se debe a deformaciones causadas por presión del medio circundante.

Acerca de la causa de estos chorros y lóbulos aun no se tienen teorías definitivas. Evidentemente debe haber una fuente de grandes cantidades de energía dentro de las galaxias y los cuasares. La teoría más estándar explica toda esta energía como resultado de la emisión asociada con un disco de acreción que rodea un hoyo negro supermasivo.

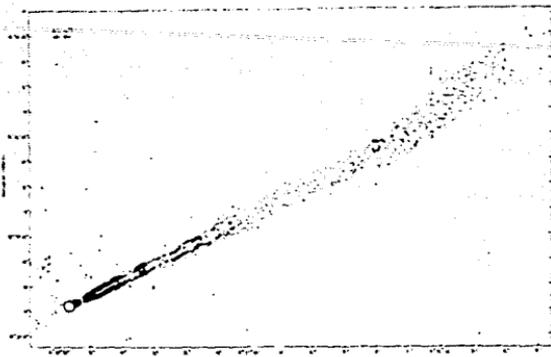


Fig 1.7 Chorro que se observa en la radio galaxia NGC6251. Este es un mapa tomado con el VLA. Presenta nudos de mayor brillo con separación aproximadamente equidistante (Birdie y Perley 1982).

1.3.b Chorros Estelares

Algunas estrellas de reciente formación presentan un flujo colimado (angosto y paralelo), en una o a veces dos direcciones opuestas. Este flujo tiene velocidades de cientos de kilómetros por segundo y emite radiación que lo distingue del medio que lo rodea. A esto se le llama un chorro estelar o a veces óptico (puesto que la mayor parte de su emisión es en esas frecuencias). Estos chorros tienen características en común con los objetos HH (véase la sección 1.1) y de hecho se encuentra que ambos fenómenos están íntimamente relacionados. Presentan espectros semejantes a los de objetos HH, lo cual significa que contienen ondas de choque de alguna forma. Hasta el momento se conocen alrededor de 20 chorros de este tipo. En su trabajo, Mundt, Brugel y Bürke (1987) compilan la información acerca de estos objetos y revisan sus características principales. Lo que sigue es una revisión de ese trabajo.

Propiedades

Aunque lo primero que se detectó fue el conjunto de puntos luminosos con emisión tipo HH ya mencionados, más adelante se encontró toda una estructura

a su alrededor, y lo que ahora se llama chorro es toda esta estructura. La figura 1.8 muestra dicha estructura. Los objetos HH en estos chorros se presentan en los choques oblicuos dentro del chorro y en el choque en forma de proa al final. Los chorros estelares se observan como elongaciones en la dirección radial de la estrella, que aparecen solas o en pares (en direcciones opuestas). En ocasiones estos pares de chorros son asimétricos. Esto se puede deber a que uno de ellos está ocultado por la nube molecular o bien a que la anisotropía del medio no permite que se formen dos chorros iguales. Una razón largo/ancho de 10 a 20 es típica, pero es posible que ésta llegue hasta 30 si se observa con mayor resolución. El largo de estos chorros se deduce del largo aparente junto con la distancia a la cual se encuentran. Es necesario, también, hacer una estimación del ángulo que forma éste con el plano del cielo. Con todas estas consideraciones, se encuentra que tienen largos típicos de 3×10^{17} cm (0.1 pc). Los anchos son de aproximadamente 2×10^{16} cm, sin embargo esta cantidad es muy imprecisa, puesto que se trata de dimensiones angulares muy cercanas al límite de resolución actual.

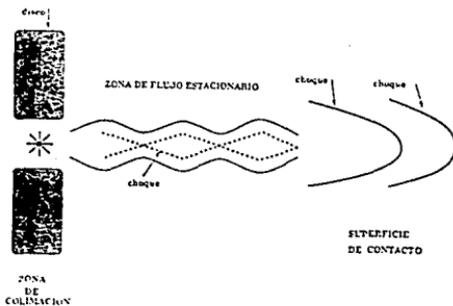


Figura 1.8 Estructura de un chorro estelar típico. Se denotan tres zonas, una de colimación del flujo, otra de flujo aproximadamente estacionario y una última en que el chorro hace contacto frontal con el medio.

Tanto las velocidades radiales (en la dirección al observador), como las tangenciales (perpendicular a la dirección anterior, o sobre el plano del

cielo) son supersónicas en estos chorros. La velocidad radial del material es aproximadamente constante a lo largo de un chorro dado, y típicamente varía entre los 100 y 150 km s⁻¹, aunque hay chorros con velocidades de flujo tan altas como 400 km s⁻¹. La velocidad tangencial varía entre 50 y 200 km s⁻¹.

El brillo no es uniforme a lo largo del chorro. Se encuentran nudos de mayor brillo, rodeados por nebulosidades, y separados por huecos o zonas de menor brillo. Se cree que existen más nudos de los que son visibles. Alejado del último nudo visible a veces se encuentra un choque de mayor intensidad y en forma de proa. La zona central del chorro concentra la mayor parte del brillo. La emisión de los nudos y las nebulosas que los rodean son semejantes, y difieren solamente en su intensidad. El espectro de esta emisión tiene líneas prohibidas como [OI] y [SII], así como las líneas de la serie de Balmer (especialmente H_α). Los chorros no presentan emisión de espectro continuo. Recordando la descripción de un objeto HH de baja excitación dada en la sección 1.1 se observa que son parecidos.

La densidad electrónica se deduce a partir de la razón de intensidades de las líneas a 6716 Å y a 6731 Å del Azufre [SII]. Se encuentran valores que van de 400 a 2000 cm⁻³. La densidad total de partículas (principalmente hidrógeno) es difícil de determinar puesto que hay evidencia de que el gas está parcialmente ionizado. En todos los casos revisados se encuentra una estrella alineada con la dirección del chorro. La mayoría de ellas se detectan en el infrarrojo, y se piensa que ésta es la que genera el flujo que constituye a los chorros. Una de las explicaciones que se han dado, es que el viento estelar es colimado de manera que resulta un chorro. De las estrellas estudiadas, se sabe que tienen luminosidades de 5 a 10 L_o y entre 1 y 10 M_o. En el 60% de los casos las estrellas presentan emisiones en H_α que las caracterizan como estrellas T Tauri.

Modelos

A partir de los datos anteriores se han propuesto varios modelos para el fenómeno de chorros estelares. Realmente se divide en partes el estudio de los chorros estelares. Mientras que unos modelos plantean mecanismos de generación de flujos colimados (e.g. Raga y Cantó, 1988), otros estudian el comportamiento del chorro mismo (e.g. Norman y Silk, 1979; Falle, Innes y Wilson, 1987 y Cantó, Raga y Binette, 1989). Otros más se concentran en el choque que aparece al final de la estructura completa (e.g. Hartigan, Raymond y Hartman, 1987). A continuación se mencionan de manera general algunos modelos, y se explican con mayor detalle aquellos con los cuales se trabaja más adelante.

La primera zona que se modela es la zona de colimación. Esta es la zona comprendida entre la fuente del flujo y el comienzo del chorro. En general se considera que el flujo de chorro proviene del viento de una estrella, y que este flujo, inicialmente isotrópico, es concentrado en uno o dos puntos opuestos debido a los gradientes de presión existentes en el medio. Ejemplos de este tipo de mecanismo son los modelos de Cantó (1980), Königl (1982), y Raga y Cantó (1988) que se mencionaron en la sección 1.2.

La siguiente zona es el chorro propiamente dicho. Los modelos acerca de esta zona coinciden en explicar los puntos de emisión observados como resultado de choques internos oblicuos. Difieren en cuanto al mecanismo que los genera. Algunos (e.g. Norman *et al.*, 1982) explican los choques como resultado de inestabilidades en la frontera del chorro con el medio, mientras que otros (e.g. Cantó, Raga y Binette, 1989) los explican en términos de gradientes de presión.

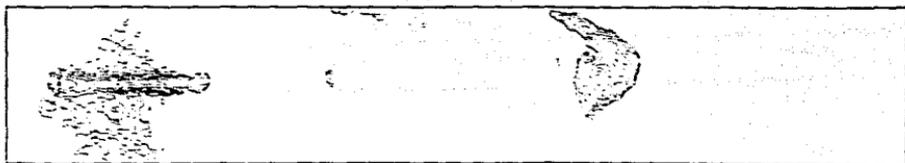
El flujo de esta zona se ha modelado numéricamente de manera estacionaria (Raga, Cantó, Binette, 1990). Esta simplificación permite tomar en cuenta los procesos atómicos, así como hacer un análisis más detallado de

la estructura y el espacio de parámetros. Solamente se estudia una zona del chorro que esta lejana a la superficie de trabajo (zona de interacción con el medio ambiente), y se encuentra que aparecen choques internos oblicuos regularmente espaciados. Este modelo se revisa con detalle en el capítulo 2. Hay, también, modelos dependientes del tiempo (e.g. Norman *et.al.*, 1982) que se estudian con detalle la interacción del chorro con el medio ambiente.

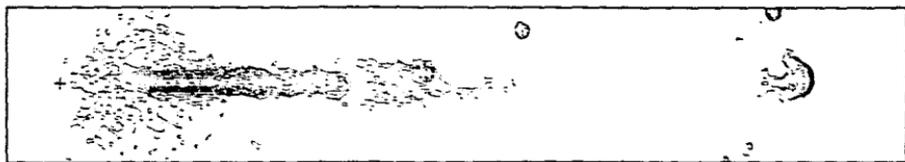
La última parte del chorro es la superficie de trabajo (working surface). Esta es también un nudo luminoso, aunque hasta 10 veces más intenso que los anteriores. En observaciones con buena resolución se ve que este nudo tiene en ocasiones forma de choque de proa (bow shock), con subestructuras complejas. Los modelos de esta parte de los chorros estelares plantean que se forman dos choques, uno que frena al material del chorro y otro que acelera al gas del medio ambiente. Con choques en forma de proa se han podido reproducir los espectros de varios objetos HH que son la punta de chorros (Hartigan, Raymond y Hartman, 1987). Se ha llegado a sugerir que incluso otros objetos HH (que no presentan chorros) pudieran ser consecuencia de un flujo estelar altamente colimado, y que solamente se observa la parte final.

Dos objetos que presentan claramente las zonas de chorro y superficie de trabajo son HH34 y HH111. La figura 1.9 muestra isocontornos de luminosidad en la línea prohibida [SII] tanto para el chorro asociado con el objeto HH34, como para HH111.

HH 34



5"



HH 111

Figura 1.9 Isocontornos de luminosidad a partir de una imagen CCD en [SII] de los chorros estelares asociados con los objetos HH34 y HH111. (Reipurth 1989)

Como se puede ver de esta revisión de las propiedades de los chorros extra-galácticos y estelares, se trata de dos fenómenos con semejanzas generales, pero diferencias importantes. Son semejantes en cuanto a la estructura general, pues ambos tipos de chorro consisten de un mecanismo de colimación, un chorro y una zona final de mayor brillo. En particular, la zona del chorro mismo se ha explicado de maneras muy semejantes para ambos tipos. Sin embargo, los mecanismos de colimación son diferentes, así como son distintas las composiciones del gas que fluye por el chorro. Resulta interesante entonces hacer analogías entre ambos tipos de chorros, pero es muy importante tener siempre presentes las diferencias. Puesto que los chorros estelares se encuentran más cerca de nosotros, es más fácil verificar resultados con ellos, y posiblemente de la experiencia obtenida con éstos se puedan hacer avances en el área de los chorros extra-galácticos.

UN MODELO DE CHORRO ESTELAR

De los datos observacionales de los chorros estelares, y de las propiedades físicas del medio que los rodea, es posible plantear modelos que permitan entender mejor su estructura y evolución. En este capítulo se revisa el modelo para un chorro estelar que ha sido estudiado por Raga, Cantó y Binette en varios trabajos, tanto de manera numérica, como analítica. Se estudian los resultados que arrojan ambos enfoques del modelo para un chorro típico y posteriormente se comparan estos resultados con las características observacionales de los chorros estelares conocidos.

2.1 El Modelo

En la sección 1.3 la estructura de los chorros estelares se dividió en tres partes. Estas son, una zona de colimación del gas (al principio), otra zona en la cual el flujo interacciona frontalmente con el gas del medio (al final), y una tercera (entre las dos anteriores) que comprende al chorro mismo. En este trabajo se estudia la esta zona intermedia del chorro. Recordando brevemente las propiedades observacionales de los chorros estelares que se presentaron en la sección 1.3, se tiene que estos chorros están formados de nudos brillantes aproximadamente equidistantes, rodeados o enlazados por una nebulosidad menos brillante (ver figura 1.5). La velocidad del gas dentro de los chorros es alta (cientos de kms^{-1}) y la razón largo a ancho de estas estructuras es de entre 20 y 30. Los estudios espectroscópicos

muestran que la radiación que presentan es semejante a la de los objetos HH de baja excitación, los cuales, se sabe que resultan de ondas de choque. A partir de las propiedades observadas de estos chorros, se han elaborado varios modelos teóricos. En el presente trabajo se utiliza el modelo de Raga, Binette y Cantó (1989) y Cantó, Raga y Binette (1989). Este modelo se desarrolla en forma numérica y analítica. Ambas formas utilizan las mismas ecuaciones para describir el sistema, y comparten algunas suposiciones y aproximaciones.

Las suposiciones que se hacen sobre el flujo son las siguientes. Se piensa al chorro como un flujo estacionario, compresible, no viscoso y que tiene simetría cilíndrica. Se ignora el efecto de intercambio de materia con el medio circundante. La composición química del gas se supone típica del medio interestelar, es decir aproximadamente 90% de hidrógeno, 10% de Helio y 0.1% de los demás elementos. Finalmente se considera que el medio circundante es uniforme (sus propiedades físicas como densidad, temperatura, presión, etc. son constantes).

El modelo considerado en este trabajo asume, además, que el chorro entra en contacto con el medio con una presión distinta a éste. En particular se considerará el caso en el cual la presión del chorro en el punto de inyección es mayor a la del medio ambiente. A partir de este punto el gas comienza a expandirse en un intento por igualar su presión a la del medio circundante. Al expandirse, baja la presión del gas hasta un punto en el cual es menor que la presión del medio, y el flujo es reconfinado a través de un frente de choque. Ahora se comienza a comprimir, y esta compresión induce un nuevo choque que deja al flujo moviéndose paralelamente a su eje y con presión otra vez mayor a la de su entorno. Este proceso se repite a todo lo largo del chorro. Los nudos de mayor emisión que se observan pueden ser las zonas de enfriamiento post-choque (véase Raga 1989).

Las ecuaciones que describen el comportamiento del gas a lo largo del chorro son las ecuaciones de la dinámica de gases. Estas ecuaciones expresan la conservación de masa, momento y energía. Para este caso particular se introduce una ecuación más, la de ionización. Esta es necesaria puesto que el gas pierde energía por radiación, lo cual depende de su grado de ionización. Se asume que el chorro tiene sección circular al comienzo, y que hay simetría alrededor de la dirección del flujo. Se utilizan coordenadas cilíndricas y se toma al eje de simetría en la dirección del flujo, lo cual simplifica las ecuaciones. Puesto que se supone que no hay intercambio de materia con el medio ambiente, la ecuación de conservación de masa se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v) = 0, \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad del gas, y u y v son las velocidades en la dirección x (a lo largo del eje de simetría) y r (perpendicular a éste) respectivamente.

Al igual que en la ecuación 2.1, si no hay intercambio de materia con el medio circundante, se debe conservar el momento en ambas direcciones (a lo largo del eje y radial). Las ecuaciones de conservación son:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u v) = 0, \quad (2.2)$$

en la dirección x , y

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r (\rho v^2 + P) \right) = \frac{P}{r}, \quad (2.3)$$

en la dirección r ; donde P es la presión térmica del gas en el chorro. En cuanto a la energía, la radiación que se observa es debida a la pérdida de energía que es radiada cuando el gas se enfría y recombina conforme se mueve a lo largo del chorro, en particular al atravesar las ondas de choque (ver

Apéndice A). La ecuación de energía es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[u (E + P) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r v (E + P) \right] + S = 0 \quad (2.4)$$

donde:

$$E = \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \frac{3}{2} P$$

es la energía total por unidad de volumen. S es la función de pérdida de energía por unidad de volumen debida a radiación. Para conocer S es necesario conocer el estado de ionización de cada elemento del gas. En este modelo se introduce una ecuación de tasa de ionización. Esta ecuación se preocupa solamente por la ionización del hidrógeno, sin considerar la ionización del Helio ni los demás elementos. Esta es una buena aproximación puesto que los choques que se espera que se desarrollen en el flujo son muy oblicuos, por lo que la ionización post-choque es baja. La ecuación de ionización del hidrógeno es:

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_{\text{HII}} u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n_{\text{HII}} v) = n_e \left[(n_{\text{H}} - n_{\text{HII}}) c(T) - n_{\text{HII}} \alpha(T) \right] \quad (2.5)$$

Aquí, n_{HII} es la densidad de partículas de hidrógeno una vez ionizado, n_{H} la densidad de partículas del hidrógeno, y n_e la densidad de electrones. $c(T)$ es el coeficiente de ionización colisional y $\alpha(T)$ es el coeficiente de recombinación. Esta ecuación dice entonces que el cambio en la cantidad de hidrógeno ionizado (lado izquierdo de la ecuación) se va a deber a dos procesos: la ionización colisional por electrones y la recombinación. El término de ionización es $n_e (n_{\text{H}} - n_{\text{HII}}) c(T)$, e indica la tasa de ionizaciones por unidad de volumen. Esta tasa depende de la densidad electrónica, de los átomos de hidrógeno neutros que haya, y de la temperatura a través del coeficiente de ionización colisional. El término $n_e n_{\text{HII}} \alpha(T)$ indica la tasa

de recombinaciones por unidad de volumen. La diferencia entre los dos es la tasa neta de ionización.

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas 2.1-2.5, se complementa con la ecuación de estado, en este caso la de un gas ideal, y forman un sistema completo. En general este sistema debe ser resuelto numéricamente. En la sección 2.2 se revisa el método numérico que se utilizó, así como los resultados que se obtuvieron para chorros con parámetros similares a los estimados de las observaciones.

En la sección 2.3 se presenta un modelo sencillo que acepta solución analítica del mismo problema. Este modelo permite obtener expresiones sencillas para algunos parámetros del chorro tales como la distancia entre choques sucesivos, la velocidad de choque de éstos, etc. En la sección 2.4 se hace una comparación entre los resultados obtenidos con ambos métodos, para estimar el efecto de las aproximaciones hechas en cada caso, y se repasan los resultados de ambos métodos para obtener las características esenciales del chorro. Finalmente se comparan estas características con las propiedades observacionales revisadas en el Capítulo 1.

2.2 El Método Numérico

El método numérico integra el sistema de ecuaciones 2.1-2.5 junto con la ecuación de estado para gas ideal. La resolución de este sistema se logra con un método de diferencias finitas que consiste en discretizar el espacio que se estudia, esto es, se hace la suposición de que basta estudiar al fluido en un número finito de puntos del espacio. Hecha esta suposición se escoge una rejilla sobre el espacio que se va a estudiar. La finura de dicha rejilla es tal que el cambio de las variables del fluido sea pequeño en cada cuadro. De esta manera las ecuaciones diferenciales parciales que describen los cambios en el fluido se convierten en ecuaciones de diferencias finitas. En esta

forma más simple, se pueden integrar las ecuaciones que representan al problema, obteniendo los valores de las variables para cada punto de la rejilla de integración. El programa con el cual se implementó el método numérico utilizado en este trabajo se llama Statjetna y fue escrito por el Dr. Alejandro Raga del Center for Investigation of Theoretical Astrophysics, en Toronto. Este programa utiliza el método de diferencias finitas (predictor-corrector) de MacCormack (Anderson, Tannehill y Pletcher, 1984), el cual es especialmente útil para resolver las ecuaciones de la dinámica de gases en su forma conservativa para un flujo supersónico y estacionario. Dicho programa está escrito en el lenguaje Fortran y fue implementado tanto en una computadora MicroVax 2000 como en una Sun 4/330 para este trabajo. La estructura y funcionamiento del programa se describen con detalle en el Apéndice B. Los datos obtenidos con este programa se graficaron con el paquete Supermongo, implementado en ambas computadoras, como parte de este trabajo.

Sin entrar en detalles (eso se hace en el Apéndice B) se puede decir que el funcionamiento del programa es como sigue. Inicialmente requiere del valor de las variables del gas al comienzo del flujo, así como de su comportamiento térmico (adiabático o no-adiabático) y el largo de la rejilla de intergración. Con todo esto inicializa un ciclo de integración y va calculando el valor de todas las variables del flujo sobre toda la rejilla y escribiendo el valor de estas variables sobre solamente cinco líneas de flujo para limitar el espacio de almacenado en disco. Al final se tiene algo como una fotografía del comportamiento de cada variable a todo lo largo del chorro. Puesto que se considera que hay simetría respecto del eje horizontal (x), solamente se hacen los cálculos para la mitad del chorro.

Este método resuelve el sistema de ecuaciones para cualesquiera valores iniciales. La única restricción que tiene es que la velocidad del fluido sea

siempre supersónica. En el caso de que el flujo se vuelva subsónico este método no sirve. Esto se debe a que el método es de integración "hacia adelante"; es decir, dados los valores de las variables en el punto x se determinan los valores de las variables en el punto $x+\Delta x$, donde Δx es en la dirección del flujo. Cuando el flujo es supersónico las condiciones del fluido "corriente abajo" no influyen sobre el fluido "corriente arriba" y la estrategia de integración hacia adelante funciona. Lo anterior no se cumple para un flujo subsónico y el método no converge. En el capítulo 3 veremos una aplicación de esta propiedad del método de integración, como criterio de la aparición de discos de Mach en los chorros. Para escoger valores iniciales relevantes al problema, se utilizó la revisión hecha por Mundt *et. al.* (1987), donde aparecen los valores típicos para los parámetros que se han podido medir o deducir de las observaciones de los chorros estelares. Las variables importantes para este programa toman valores dentro de los siguientes intervalos:

$r_j^0 = 10^{15}-10^{16}$ cm	(radio inicial del chorro)
$n_j^0 = 10^3-10^5$ cm ⁻³	(densidad de partícula inicial)
$V_j^0 = 50-300$ km s ⁻¹	(velocidad total inicial; $u_j^0 = V_j^0$)
$T_j^0 = 10^2-10^4$ K	(temperatura inicial del chorro)
$P_j^0/P_e = 1.5-30$	(razón de presión inicial del chorro a presión externa)
$M_j^0 > 5$	(número de Mach inicial)

A partir de estos intervalos, se escogió un modelo estandar con los siguientes valores:

$r_j^0 = 10^{16}$ cm
$n_j^0 = 10^4$ cm ⁻³
$V_j^0 = 150$ km s ⁻¹
$T_j^0 = 10^4$ K

$$P_j^0/P_e = 10$$

Se permite, además, que el gas tenga comportamiento no-adiabático (radiativo). Todos estos valores se escogieron porque son los que más comunmente se observan, o bien simplemente porque están en el centro del intervalo reportado por Mundt (1987). Son estos valores los cuales fueron introducidos al programa Statjet para conocer las propiedades generales de estos flujos. Para esta corrida estándar, se escogió una rejilla de 150 puntos en la dirección radial (perpendicular al flujo) y 4000 en la dirección axial (paralelo al flujo) para asegurar buena resolución. La salida del programa es un archivo que contiene los valores de las variables sobre cinco líneas de flujo. Los resultados se muestran en las figuras 2.1 y 2.2

En la figura 2.1(a) se grafican las posiciones radiales que toman las líneas de flujo a lo largo del eje x. El flujo es inyectado por la parte inferior, paralelamente al eje x. De aquí en adelante se llamará primera línea a la más cercana al eje vertical (x), y quinta a la más lejana. Se observa que el chorro sufre un ensanchamiento (expansión) seguido de un angostamiento (compresión). Este patrón se repite hasta el final de la zona estudiada. El primer ensanchamiento es un poco mayor que los siguientes. La distancia a la cual se repite este patrón es aproximadamente constante. Las líneas centrales sufren desplazamientos laterales menores que aquellas más cercanas al exterior, pero más abruptos.

En la figura 2.1(b) se utilizan dos grupos de datos. En líneas punteadas se repite la gráfica 2.1(a). Las líneas continuas representan isocontornos de presión (en escala logarítmica). Las zonas en las que se juntan muchas isobaras representan grandes cambios en la presión. Como se discute en el Apéndice A, una de las características de una onda de choque es que comprime al gas que pasa por ella en una zona muy pequeña. Es por ésto que se pueden interpretar estas zonas como ondas de choque. Dentro de cada repetición del

patrón de ensanchamiento y compresión se observan dos frentes de choque que parecieran reflejarse sobre el eje x . Al primero, que ocurre al final de la zona de ensanchamiento, se llamará choque incidente y al segundo, que ocurre cuando el gas se comprime hacia el eje, choque reflejado. Se puede apreciar que las zonas que representan choques coinciden con los lugares en los que el flujo es desviado (se notan esquinas en las líneas de flujo). Esto indica que el flujo se encuentra con el frente de choque de forma oblicua. En esta figura se puede apreciar que el flujo es dirigido por los choques.

La figura 2.1(c) muestra el valor de la presión sobre la tercera línea de flujo, a todo lo largo del eje x . En esta gráfica se observa un aumento notable en el valor de la presión justo detrás del lugar donde se forman los choques. Midiendo el cambio, se encuentra que la presión aumenta en un factor de más de 20 a través de los dos choques. El aumento en la presión tiene tres partes (ver la figura 2.1). La primera es debida al choque incidente, y la tercera al choque reflejado. La parte intermedia se debe a la compresión del gas cuando es deflectado por el primer choque hacia el eje de simetría (como embudo). El primer choque aumenta la presión en un factor de 3.8. El segundo choque solamente aumenta la presión 1.8.

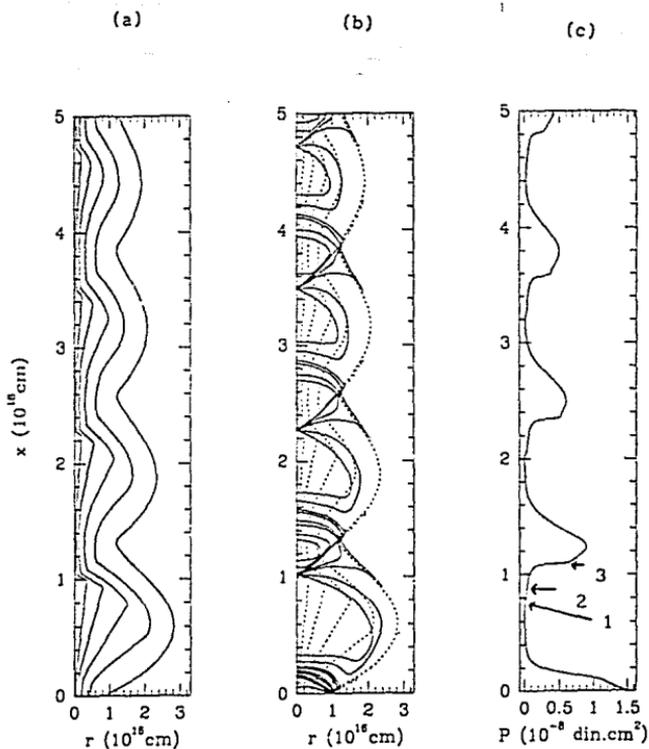


Figura 2.1 (a) Gráfica de la posición radial contra la posición axial (x) de cinco líneas de flujo; (b) en líneas punteadas se repite la gráfica anterior, y en líneas continuas se grafican isocontornos de presión; (c) valor de la presión sobre la tercera línea de flujo.

La figura 2.2(a) muestra el valor de la densidad sobre la tercera línea de flujo. Su comportamiento es similar al de la presión, y por las mismas razones. Al igual que en la presión, la densidad aumenta en tres zonas. Al

igual que en el caso anterior, el brinco debido al primer choque es de aproximadamente 3.8, indicando que el choque es fuerte, pues está cercano al valor de 4 esperado en este caso (ver Apéndice A). El segundo choque causa un brinco de 1.8 solamente, y por tanto este choque no es fuerte.

La temperatura sobre la tercera línea de flujo se muestra en la figura 2.2(b). Esta variable sufre varios cambios en cada repetición del patrón observado. Sube con el primer choque, y vuelve a subir con el segundo. En esto se asemeja a la presión y la densidad. Detrás de ambos choques, baja en dos pasos también. La primera caída de temperatura se debe a la pérdida de energía por radiación que caracteriza a una zona post-choque. La segunda es consecuencia de la expansión (adiabática, casi completamente) que debe darse entre un choque reflejado y el siguiente choque incidente.

En la figura 2.2(c) se muestran los valores de la fracción de ionización del Hidrógeno sobre la tercera línea de flujo. Esta variable tiene un comportamiento muy diferente a las anteriores, puesto que sufre un cambio apreciable al pasar por el primer par de choques, pero a partir de este punto su valor desciende monótonicamente. Esto se debe a que el tiempo característico en el cual la ionización del gas se ajusta a las condiciones del flujo (en particular a la temperatura) es menor que el tiempo en que varía la temperatura y por eso es incapaz de seguir las variaciones de ésta. La disminución monótonica se debe a la caída general de la temperatura a lo largo del chorro (ver fig 2.2(b)).

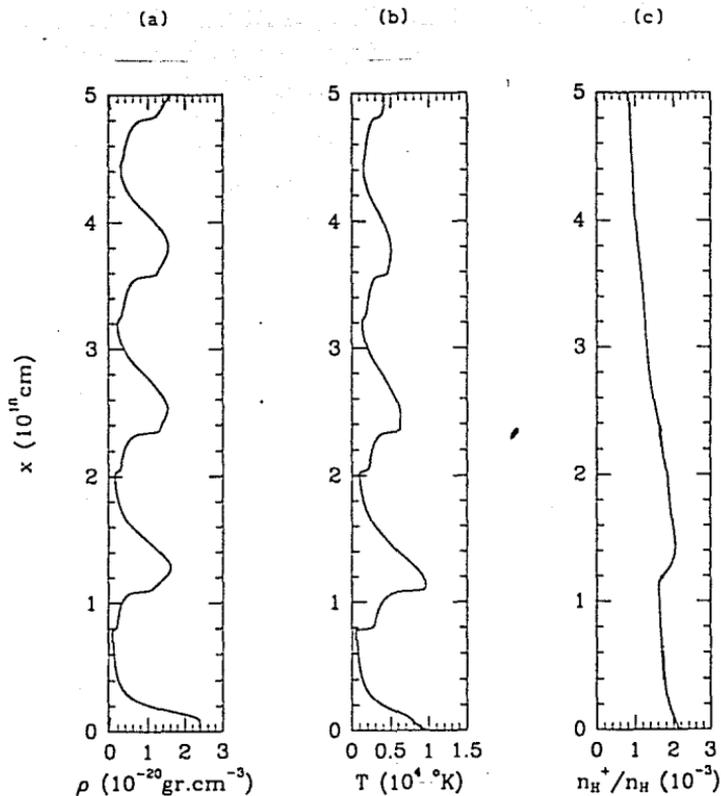


Figura 2.2 (a) Valor de la densidad sobre la tercera línea de flujo a lo largo del eje del chorro; (b) temperatura sobre la tercera línea de flujo; (c) fracción de ionización sobre la tercera línea de flujo.

En el trabajo de Raga, Binette y Cantó (1990) se estudian los chorros estelares cilíndricos, supersónicos y estacionarios. Se revisa el espacio de parámetros para analizar el efecto de cada uno de ellos sobre las características del chorro. A partir de un chorro estándar (como el que se describe arriba) se reduce el espacio de parámetros a tres: V_j^0 , T_j^0 y P_j^0/P_e .

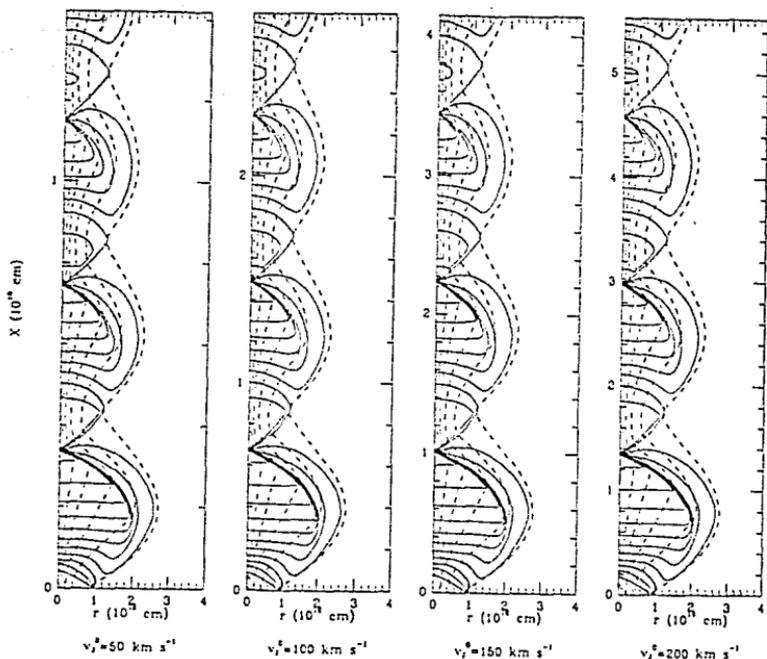


Figura 2.3 Estratificación de la presión para cuatro modelos de chorros con velocidades iniciales $V_j^0 = 50, 100, 150,$ y 200 km s^{-1} pero con todos los demás parámetros iguales (extraída de Raga, Cantó y Binette, 1990)

Variándolos en intervalos razonables para chorros estelares se encuentra su efecto sobre el flujo. Por ejemplo, fijando los demás parámetros, se varía la velocidad inicial del chorro desde 50 hasta 300 km s^{-1} . Se encuentra que el único efecto que tiene la velocidad es el de introducir un factor de escala en la dirección del flujo. Esta escala (l) depende linealmente de la velocidad de inyección V_j^0 . En la figura 2.3 se muestra este resultado. Repitiendo este ejercicio pero ahora variando solamente la temperatura desde 0.1×10^4 hasta $1.2 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ se encuentra que aquí no hay una dependencia

simple. La figura 2.4 muestra la dependencia con la temperatura. Para las temperaturas más altas ($> 10^4$) se cumple que el largo característico $l \propto M_j^0$. Por último se hace lo mismo pero ahora variando sólo la razón entre la presión de chorro al inicio y la presión del medio ambiente (P_j^0/P_e). Aquí una vez mas la dependencia parece ser compleja, pero se cumple que $l \propto (P_j^0/P_e)^{1/2}$. La figura 2.5 muestra la dependencia con la presión. Estas dependencias se pueden entender dentro del marco del modelo analítico, el cual se describe a continuación.

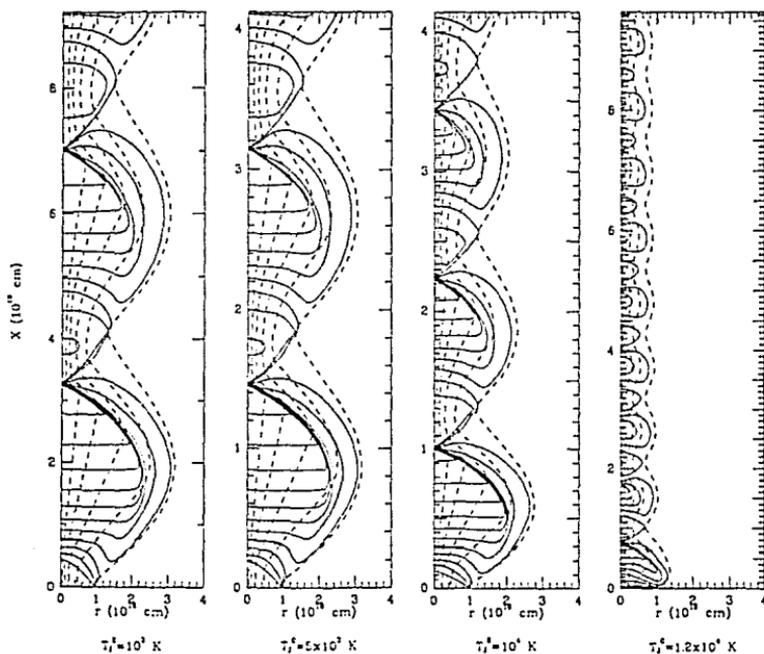


Figura 2.4 Estratificación de la presión para cuatro modelos de chorros con temperaturas iniciales $T_j^0 = 1000, 5000, 10,000$ y $12,000$ K pero con todos los demás parámetros iguales (extraída de Raga, Cantó y Binette, 1990).

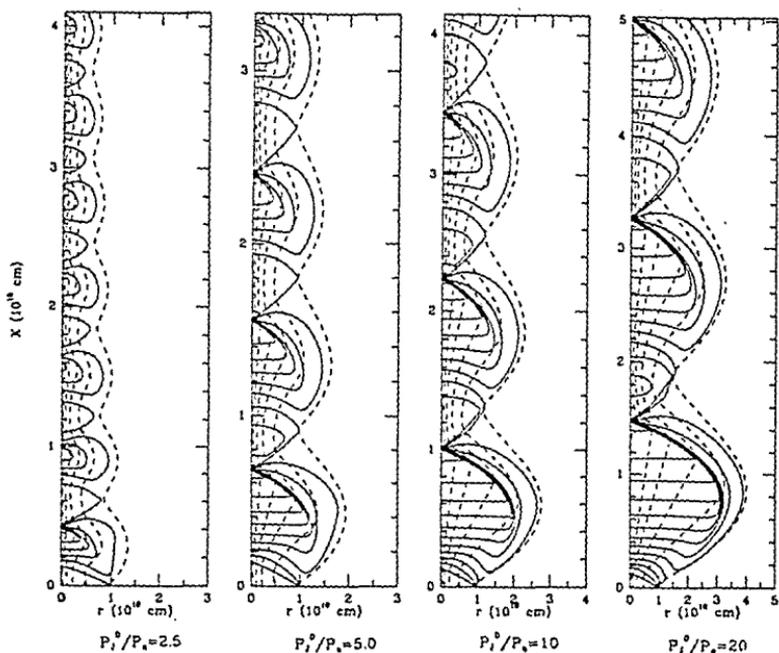


Figura 2.5 Estratificación de la presión para cuatro modelos de chorros con razones de presión iniciales $P_i^0/P_e = 2.5, 5, 10$ y 20 , pero con todos los demás parámetros iguales (extraída de Raga, Cantó y Binette, 1990)

2.3 El Método Analítico

Como ya se observó en la sección anterior, los chorros estelares presentan un patrón de choques que cruzan el centro del chorro a intervalos constantes. En este patrón se encuentra una sub-estructura. Inicialmente aparece una zona de expansión, seguida de un choque incidente, y luego un choque reflejado, después del cual vuelve a comenzar este patrón. Cantó, Raga

y Binette (1989) desarrollaron un modelo que permite describir analíticamente el comportamiento del flujo en cada una de estas regiones. El modelo se basa en una serie de suposiciones, las cuales se revisan a continuación.

Considérese un flujo bi-dimensional de gas en forma de un chorro con presión inicial mayor que la del medio que lo rodea y con velocidad V_j^0 , velocidad del sonido adiabática c_j^0 (tal que $V_j^0 > c_j^0$) y tasa de pérdida de masa M_j iniciales dadas. Supongamos que su ancho inicial es despreciable y que el medio circundante es uniforme (es decir que su presión P_e es igual para todo punto).

2.3.a Zona de expansión

Dadas estas condiciones iniciales, primero hay una zona de expansión y se espera que el gas se comporte como sigue. El chorro se va a expandir lateralmente con un ángulo que está determinado por la razón entre la presión del chorro (P_j^0) y la del medio que lo rodea (P_e), así como de su número de Mach. Este ángulo está dado por:

$$\alpha \cong \frac{2}{(\gamma-1)} \frac{(1-\kappa)}{M_j^0} \quad (2.6)$$

donde $\kappa = \left(\frac{P_e}{P_j^0} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma}$, (2.7)

y M_j^0 el número de Mach inicial ($M_j^0 \equiv V_j^0/c_j^0$).

Puesto que se asume que el chorro es altamente supersónico, se espera que el chorro conserve aproximadamente su velocidad total macroscópica en la zona de expansión:

$$V \cong V_j^0$$

y se supone que en esta zona el vector de velocidad tiene dirección radial (R) desde el punto de inyección (ver la figura 2.6).

Si se supone que la distribución de densidad sólo es función de R y se utiliza la conservación de masa, la densidad en esta zona resulta:

$$\rho = \frac{\dot{M}_j^0}{2\pi (1 - \cos\alpha) V_j^0 R^2} \quad (2.8)$$

es decir disminuye como $1/R^2$.

Esta zona de expansión seguirá hasta que la presión del gas en el chorro sea menor que P_e . En este punto aparecerá una onda de choque que colima el flujo.

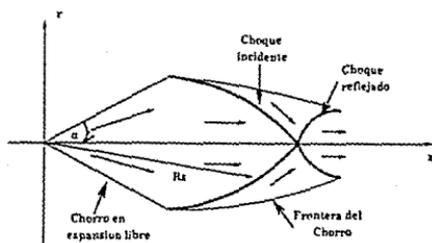


Figura 2.6 Esquema de el primer par de choques para un chorro con presión mayor que la del medio que lo rodea. El gas se expande hasta que su presión cae debajo de la del medio, es reconfinado por el choque incidente y deflecionado por el choque reflejado (tomado de Cantó, Raga y Binette, 1989).

2.3.b Choque Incidente

Puesto que este modelo supone que el flujo es estacionario, entonces la posición del choque incidente es fija, y se puede calcular a partir de la condición de equilibrio de presiones:

$$P_g(R_s, \theta) + P_{CE}(\theta) = P_e \quad (2.9)$$

donde P_g es la presión térmica justo detrás del choque, P_{CE} es la presión centrífuga, debida a la curvatura del choque (ver la figura 2.6) y R_s es el

radio o posición del choque. Para flujos altamente supersónicos se espera que el choque sea muy oblicuo y esto nos permite ignorar la presión centrífuga (sin embargo véase la sección 2.3.d). Haciendo esto, la ecuación de equilibrio de presiones resulta:

$$c_1 \rho_j^0 V_n^2 \cong P_e \quad (2.10)$$

donde V_n es función del ángulo θ , y es la componente de la velocidad normal al frente de choque, c_1 es un factor de orden unidad y para un gas adiabático y monoatómico toma el valor $c_1 = 3/4$. A esta ecuación se le sustituye la ecuación 2.8 para la densidad y se define la distancia característica:

$$R_0 \cong \left(\frac{c_1 \dot{M}_j^0 V_j^0}{2\pi (1 - \cos\alpha) P_e} \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

$$y \quad r = R_s / R_0 \quad (2.12)$$

Con estas simplificaciones la ecuación de equilibrio de presiones 2.10 se reduce a una ecuación sencilla para la posición del frente de choque:

$$r^2 + r'^2 = 1 \quad (2.13)$$

donde r' es la derivada de r respecto de θ . Esta ecuación tiene como solución general una circunferencia:

$$r = \text{sen}(\phi \mp \theta) \quad (2.14)$$

$$\text{con} \quad \phi = \text{constante}$$

Esto significa que el frente de choque aparecerá sobre dos secciones de circunferencia que pasan por el origen. La figura 2.6 muestra la forma general de estos frentes de choque, así como algunos parámetros importantes.

La constante ϕ se obtiene a partir de que $\theta = \alpha$ para $r = r_*$, con r_* el radio al cual las presiones del chorro y el medio ambiente son iguales ($P(r_*) = P_e$). El valor de r_* se obtiene utilizando las ecuaciones 2.8, 2.11 y 2.12 para expresar a la densidad como:

$$\rho(r) = \left(\frac{P_J^{\circ}}{c_1 v_J^{\circ 2}} \right) \frac{1}{r^2} \quad (2.15)$$

e introduciéndola en la expresión para una expansión adiabática:

$$\frac{P}{P_J^{\circ}} = \left(\frac{c_J^{\circ 2}}{\gamma P_J^{\circ}} \rho \right)^{\gamma} \quad (2.16)$$

de lo que resulta una expresión para P/P_J° :

$$\frac{P}{P_J^{\circ}} = \left[\left(\frac{1}{\gamma c_1} \right) \frac{1}{M_J^{\circ}} \left(\frac{P_e}{P_J^{\circ}} \right) \right]^{\gamma} \frac{1}{r^{2\gamma}} \quad (2.17)$$

y cuando $P = P_e$ se tiene:

$$r_e = \frac{1}{(\gamma c_1)^{1/2}} \frac{\kappa}{M_J^{\circ}} \quad (2.18)$$

con lo cual:

$$\phi = \alpha + \text{sen}^{-1} \left(\frac{1}{(\gamma c_1)^{1/2}} \frac{\kappa}{M_J^{\circ}} \right) \quad (2.19)$$

Es fácil ver que el ángulo ϕ es el que forma el frente de choque con el eje x (de ahora en adelante se llamará ϕ_1).

Dos tamaños característicos adimensionales en esta parte son la distancia a la cual las circunferencias cortan el eje x:

$$a_n = \text{sen } \phi_1 \quad (2.20)$$

y la separación máxima del eje que alcanza el frente de choque:

$$b_n = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi_1) \quad (2.21)$$

En el caso de un choque altamente supersónico, la expresión para el

largo característico (no adimensionalizada) toma la siguiente forma sencilla:

$$a \approx \frac{\phi}{\alpha} \varepsilon_I^{1/2} \left(\frac{M_J V_J^0}{\pi P_e} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

Es interesante observar que en términos de la variable adimensional r , los únicos parámetros de este modelo son κ y M_J^0 . Los demás parámetros sólo intervienen en la escala de longitud R_0 .

Se tiene entonces al gas que inicialmente se expandía, pasando por un choque oblicuo y curvo, que cambia su dirección, dirigiéndolo hacia el eje del chorro. Además, puesto que el choque es oblicuo, la velocidad del gas sigue siendo supersónica (con una magnitud aproximadamente igual a la de antes del choque).

2.3.c Choque Reflejado

Como ya se mencionó, el choque incidente recolima el flujo que se expandía libremente, doblándolo hacia el eje. Se forma entonces, un flujo cónico convergente. Este flujo cónico se angosta hasta que aparece un choque reflejado que comienza en el punto en el que el choque incidente toca el eje. El flujo será refractado por este segundo choque resultando un chorro angosto y cilíndrico cuya presión es casi veinte veces mayor que la del medio.

Se van a estimar los parámetros del choque reflejado. Cerca del eje del chorro, el choque reflejado se puede aproximar como cónico, con un ángulo de apertura (ϕ_R). Calculando el paso del chorro por el choque incidente (que se considera fuerte) y haciendo la suposición de que tanto antes del choque incidente como detrás del choque reflejado el flujo es paralelo al eje de simetría, se pueden calcular los parámetros del flujo al pasar por el par de choques. En la Figura 2.7 se muestra un esquema con los parámetros del flujo cercano al punto de reflexión.

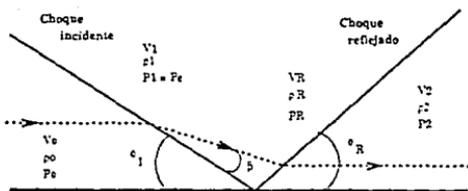


Figura 2.7 Esquema del punto de reflexión en la zona cercana al eje cilíndrico. Se muestra el paso de una línea de flujo a través de los choques incidente y reflejado.

Sean ρ_0 , T_0 , p_0 , V_0 , c_0 los valores de las variables del gas antes del choque incidente. El choque incidente es oblicuo a la dirección del flujo y deja al gas con una presión igual a la del medio ambiente. De las relaciones de Rankine-Hugoniot (R-H) sin hacer suposición de choque fuerte se sabe que:

$$\frac{P_e}{P_0} = \frac{2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (2.23)$$

Como se trata de un choque oblicuo, el número de Mach efectivo es:

$$M_0 = \frac{V_0}{c_0} \sin \phi_I \quad (2.24)$$

El ángulo que forma el choque incidente con la pared de reflexión se obtiene de la ecuación anterior:

$$\phi_I = \sin^{-1} \left(\frac{M_0 c_0}{V_0} \right) \quad (2.25)$$

Este ángulo depende de la razón entre el número de Mach absoluto y el efectivo. El número de Mach absoluto para un gas monoatómico se obtiene de la ecuación 2.23:

$$M_o = \left(\frac{(P_e/P_o)(\gamma+1) + (\gamma-1)}{2\gamma} \right)^{1/2} \quad (2.26)$$

A través del choque la velocidad que es normal al frente de choque cambia, pero la que es tangencial permanece igual. Esto se expresa:

$$V_o \cos \phi_I = V_1 \cos \beta \quad (2.27)$$

$$\xi_I V_o \sin \phi_I = V_1 \sin \beta \quad (2.28)$$

donde β es el ángulo que forman el choque incidente y el flujo chocado; ξ_I es el inverso del factor de compresión del primer choque, que se obtiene de las ecuaciones R-H:

$$\xi_I = \frac{(\gamma-1)M_o^2 + 2}{(\gamma+1)M_o^2} \quad (2.29)$$

Dividiendo la relación 2.28 entre la 2.27, se obtiene:

$$\tan \beta = \xi_I \tan \phi_I \quad (2.30)$$

Detrás de este choque el flujo permanece supersónico. Incluso, la densidad es ahora 4 veces mayor que la densidad inicial del chorro, y sigue aumentando conforme el flujo converge hacia la superficie de reflexión.

Para conocer el ángulo del choque reflejado se hace la suposición de que el flujo a través de él va a resultar paralelo al eje del chorro. Se sigue el mismo procedimiento que en el choque anterior, y de las ecuaciones del cambio de las velocidades:

$$V_1 \cos (\phi_I + \phi_R - \beta) = V_2 \cos \phi_R \quad (2.31)$$

$$\xi_R V_1 \sin (\phi_I + \phi_R - \beta) = V_2 \sin \phi_R \quad (2.32)$$

donde los valores con subíndice 1 son antes del choque reflejado y aquellos con subíndice 2 son detrás de este choque. Se obtiene una ecuación

trascendental para el ángulo del choque reflejado:

$$\tan \phi_R = \xi_R \tan (\phi_I + \phi_R - \beta) \quad (2.33)$$

Asumiendo que el choque incidente es fuerte, los parámetros de flujo justo detrás de este choque son:

$$\rho_1 = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \rho_0 \quad (2.34)$$

$$\tan \beta = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \tan \phi_1 \quad (2.35)$$

$$V_1 = V_0 \frac{\cos \phi_1}{\cos \beta} \quad (2.36)$$

Estas relaciones no son más que las relaciones de Rankine-Hugoniot (condiciones de salto) para el caso de choques oblicuos fuertes. El ángulo al cual se forma el choque reflejado es ϕ_R , y se determina de la misma manera que β . Haciendo la suposición de que el choque es fuerte, la ecuación 2.33 se puede escribir como:

$$\tan \phi_R = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \tan (\phi_I + \phi_R - \beta) \quad (2.37)$$

Para encontrar la densidad, ρ_2 , detrás del choque reflejado debemos estimar primero la densidad justo antes del frente de choque reflejado, ρ_R . Considerando que la densidad aumenta por el solo hecho de que disminuye la sección recta por la que pasa el chorro (como si pasara por un embudo), encontramos que:

$$\frac{\rho_R}{\rho_1} = \frac{\sin(\phi_1 + \phi_R - \beta) \sin \phi_1}{\sin \beta \sin \phi_R} \quad (2.38)$$

Con estos parámetros, y el hecho de que el choque reflejado también es fuerte, los parámetros del flujo detrás del segundo choque son:

$$\rho_2 = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \rho_R \quad (2.39)$$

$$V_2 = V_1 \frac{\cos(\phi_1 + \phi_R - \beta)}{\cos \phi_R} \quad (2.40)$$

Para chorros altamente supersónicos los ángulos serán pequeños. Si suponemos que el gas es monoatómico ($\gamma = 5/3$) y aproximamos las funciones de los ángulos, se encuentra que:

$$\phi_R \cong \beta \cong \frac{\phi_1}{4} \quad (2.41)$$

$$V_1 \cong V_2 \cong V_0 \quad (2.42)$$

$$\rho_1 \cong 4 \rho_0 \quad (2.43)$$

$$\rho_R \cong 16 \rho_1 \quad (2.44)$$

$$\rho_2 \cong 64 \rho_1 \quad (2.45)$$

La velocidad de choque en un choque oblicuo es la componente de la velocidad que es normal al frente de choque. Para el choque incidente esta velocidad es:

$$V_{S1} = V_0 \sin \phi_1 \quad (2.46)$$

y para el choque reflejado la velocidad de choque es:

$$V_{SR} = V_1 \sin (\phi_I + \phi_R - \beta) \quad (2.47)$$

Con la suposición de ángulos pequeños, utilizando las relaciones 2.41 y 2.42 en las relaciones 2.46 y 2.47 se tiene que las velocidades de choque para ambos choques son aproximadamente iguales, esto es:

$$V_{SI} \cong V_{SR}$$

En el caso de chorros muy supersónicos de gas altamente radiativo cuya presión inicial es mayor que la del medio se encuentra que hay una velocidad de choque característica: $V_{SI} \cong 18.7 \text{ km s}^{-1}$, que es independiente de los parámetros del chorro y del medio ambiente (Cantó, Raga y Binette, 1989). También con estas suposiciones, el largo característico (a) toma la forma:

$$a \cong 1.2 \left(\frac{M_J^0 V_J^0}{\pi P_0} \right)^{1/2} \quad (2.48)$$

Con todo lo anterior tenemos expresiones para los principales valores del flujo que pasa por el par de choques reflejados.

2.4 Una Comparación entre los dos métodos

En las secciones anteriores se planteó un modelo para chorros supersónicos con presión inicial mayor que la del medio ambiente. Se analizó dicho modelo de manera numérica y analítica por separado. Para poder establecer un modelo teórico general, resulta interesante hacer una comparación entre los resultados de ambos métodos. Por una parte, se debe de poder apreciar la calidad de la aproximación hecha en el método analítico. Por otra se podrá estudiar el efecto que tiene cada aproximación sobre el resultado general. Esto es muy útil al interpretar los resultados y compararlos con las observaciones. En el caso de la solución numérica se

encuentra que el espacio de los parámetros se puede reducir a dos (véase Raga, Cantó y Binette, 1989): la razón entre la presión inicial del gas y la presión del medio ambiente (P_j^0/P_e), y el número de Mach inicial del gas. Variando dichos parámetros es posible estudiar el comportamiento de los chorros en los rangos que resultan relevantes. Si se fija el valor del número de Mach, el único parámetro del modelo es la razón de presiones. Para el método analítico se encuentran varias expresiones sencillas tales que, si se conocen los valores iniciales de las variables del flujo (como velocidad, temperatura, densidad, presión), es posible calcular los valores de estas variables en todo el flujo. Puesto que ambos métodos parten de las mismas suposiciones, y de hecho el método analítico se ayudó en parte del numérico, resulta interesante comparar los resultados que arrojan ambos. Para poder hacer la comparación se debe recordar que el modelo analítico estudia específicamente el comportamiento del primer par de choques, por lo cual debemos restringirnos a estudiar esta parte de los resultados del método numérico.

La comparación va a consistir en el cálculo de los ángulos (de los choques respecto del eje) y las distancias (ancho del flujo y distancia entre choques) característicos con ambos métodos. Para dicho cálculo, se utilizan los valores iniciales que se escogieron como estándar en la sección 2.2. El parámetro que se varía es la razón de presiones (P_j^0/P_e).

Las variables que se van a estimar con ambos métodos están definidas en la Figura 2.8 y son las siguientes. El ángulo de apertura inicial (α) que es el ángulo resultante de la expansión lateral del gas, cuando es inyectado, conforme avanza hacia adelante. Los ángulos respecto al eje del chorro de los choques incidente (ϕ_1) y reflejado (ϕ_R). La longitud (a) que es la distancia del punto de inyección al punto donde los choques incidente y reflejado cruzan el eje. El ancho característico (b) que es el ancho máximo que alcanza

el choque incidente curvo. También se comparan las velocidades de choque V_{s1} y V_{s2} que son normales a la superficie de choque y que determinan que tan fuerte es éste.

2.4.a Resultados del Método Numérico

En el método numérico todas las variables características se miden de las gráficas como las que se discuten en la sección 2.2. Aquí la precisión depende fuertemente de la resolución que se tenga al graficar, así como de los criterios que se utilicen para medir cada valor. En este caso particular las gráficas se hicieron con una impresora de punto y esto implica una baja resolución. A continuación se ennumeran los criterios para la medición de estos datos.

El ángulo de apertura inicial (α) se muestra en la figura 2.8. Este ángulo se mide de la inclinación de la línea de flujo más externa. Inicialmente la línea muestra cierta curvatura (que indica aceleración del gas en la dirección vertical), pero muy pronto la línea de flujo se endereza, y es ésta dirección la que se utiliza para medir α . En este caso no hay mucha duda de cual es el ángulo.

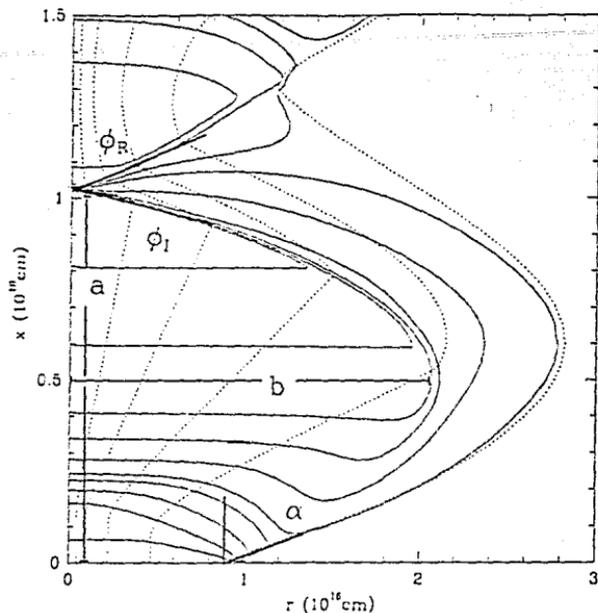


Figura 2.8 Esquema para aclarar como se midieron los parámetros. (α) es el ángulo de expansión inicial; (a) el largo característico; (b) el ancho característico; (ϕ_I) el ángulo del choque incidente y (ϕ_R) el ángulo del choque reflejado. Aquí las líneas punteadas son cinco líneas de flujo y las continuas son isocontornos de presión.

El ángulo del choque incidente (ϕ_I) se debe de medir muy cerca del eje, puesto que ésta es una condición que exige el método analítico, y de esta forma la comparación tiene sentido. Se utilizaron los puntos en los cuales las líneas de flujo se doblan para marcar este ángulo. El ángulo del choque reflejado (ϕ_R) se mide de la misma manera que el ángulo del choque incidente. El largo característico (a) es sencillamente la distancia desde el principio (punto de inyección) hasta el punto en que el primer choque cruza el eje de simetría. Este punto es aquel en el cual vemos que se juntan las isobaras al cruzar el eje x. En el caso del ancho característico (b) se toma la distancia desde el eje hasta el punto donde el choque incidente (que se distingue por una acumulación de isocontornos) tiene un máximo. El siguiente valor que se

quiere conocer es la velocidad de choque para el choque incidente. Esta se mide calculando la componente de la velocidad total en la dirección normal al frente de choque (ecn. 2.46). Finalmente, el último valor que interesa es la velocidad de choque en el choque reflejado. Para conocer esta velocidad se calcula la dirección del flujo justo antes de llegar al choque reflejado mediante una estimación de β (ecn. 2.41). La tabla 2.1 muestra los valores de dichas variables para distintos valores de la razón de presiones P_J^0/P_e .

Tabla 2.1 Valor del ángulo de apertura (α), ángulo del choque incidente (ϕ_I), ángulo del choque reflejado (ϕ_R), largo (a) y ancho (b) característicos calculados de las gráficas resultantes del método numérico para distintos valores del cociente de presiones P_J^0/P_e .

P_J^0 / P_e	$\alpha (^{\circ})$	$\phi_I (^{\circ})$	$\phi_R (^{\circ})$	a (10^{17} cm)	b (10^{15} cm)
2.5	1.640	5.59	2.012	3.870	0.640
5.0	2.450	4.34	2.833	6.730	1.127
7.5	3.143	4.96	2.670	8.350	1.720
10.0	3.148	5.27	2.854	10.16	2.116
15.0	3.376	5.48	2.840	12.39	2.700
20.0	3.455	5.36	3.190	15.11	3.090

Acerca de la exactitud de los valores de esta tabla puede decirse lo siguiente. Las distancias (a y b) tienen errores de medición no mayores que 5%, puesto que su medición es directa. Para los ángulos y la velocidad aparece un error mayor debido a que hay cierta subjetividad en la manera de medirlos. A partir de mediciones hechas por varias personas, se hizo una estimación del error y se encontró que éste es cuando mucho de 20%.

Además de los valores que aparecen en la tabla anterior, se midieron las velocidades de choque para los primeros dos choques. Esta velocidad se midió

para chorros con valores de la razón de presiones entre 2.5 y 20, y también para chorros con velocidades iniciales desde 50 hasta 200 km s⁻¹. Para todos estos chorros se encuentra que la velocidad de choque para el choque incidente es: $V_{SI} \approx 12.3 \text{ km s}^{-1}$, mientras que la velocidad del segundo choques es $V_{SR} \approx 16.88 \text{ km s}^{-1}$.

Es interesante notar que estos resultados muestran que los ángulos de los choques incidente y reflejado son muy parecidos para diferentes valores de P_j^0 / P_e , y que la razón entre el ángulo del choque incidente (ϕ_i) y el ángulo del choque reflejado (ϕ_R) es siempre aproximadamente 2. Las longitudes características dependen directamente de la razón de presiones. Entre mayor sea ésta, mayores son (a) y (b). Al parecer, (a) depende mas fuertemente de esta razón de presiones que (b). La dependencia del ancho con la presión pareciera contradecir el hecho de que los ángulos parecen no depender de las presiones. Se encuentra que la razón largo a ancho (a/b) es aproximadamente 50 para todos los valores de presión.

2.4.b Resultados del Método Analítico

En esta sección se obtienen los mismos valores discutidos arriba, pero ahora a partir de las expresiones resultantes de la solución analítica. Para la elaboración de esta tabla se utilizan los valores iniciales del modelo estándar. Además de dichos valores, el método analítico requiere de la tasa de pérdida de masa \dot{M}_j , el número de Mach M_j^0 , y la presión inicial dentro del chorro. Estos se calculan a partir de los valores ya conocidos y resultan:

$$\dot{M}_j = \pi r_j^2 \rho_j^0 u_j^0 = 1.18 \times 10^{20} \text{ g s}^{-1} = 1.8 \times 10^{-6} M_\odot \text{ año}^{-1}$$

$$M_j^0 = v_j^0 / c_j^0 = 14.42$$

$$P_j^0 = n_j^0 k T_j^0 = 1.518 \times 10^{-8} \text{ dn cm}^{-2}$$

Se utiliza una razón de calores específicos correspondiente a un gas monoatómico, $\gamma = 5/3$. Conocidos todos los valores anteriores, las expresiones

de la sección 2.3 se reducen a las siguientes:

De la ecuación 2.6, el ángulo de apertura inicial queda:

$$\alpha = 11.92 (1 - \kappa) \quad (2.49)$$

De la ecuación 2.19, el ángulo del choque incidente resulta:

$$\phi_I = \alpha \left(1 + 0.3 \frac{\kappa}{1-\kappa} \right) \quad (2.50)$$

y de la ecuación 2.33, suponiendo ángulos pequeños, el ángulo del choque reflejado es:

$$\phi_R = \frac{1}{3} (\phi_I - \beta) \quad (2.51)$$

La expresión 2.20 para el largo característico se reduce a:

$$a_n = \phi_I - 0.062 \kappa^{2.5} \quad (2.52)$$

y para el ancho característico simplemente se utiliza la ecuación 2.21.

En el método analítico las variables de distancias estaban normalizadas a la distancia R_0 (ecuación 2.11). En consecuencia también quedaron normalizados a_n y b_n . Para obtener los largos característicos en unidades que se puedan comparar con los resultados numéricos, se necesita calcular la distancia de normalización R_0 . Con todos los valores que se conocen, y haciendo aproximación para ángulos pequeños se tiene:

$$R_0 = 1.61 \times 10^{17} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{P_J^0}{P_e} \right)^{1/2} \text{ cm} \quad (2.53)$$

con ésta, serán $a = a_n R_0$ y $b = b_n R_0$ los valores de interés.

Análiticamente se encontró que la velocidad de choque permanece igual para los dos choques (Cantó, Raga, Binette 1989), y además que su valor es de aproximadamente:

$$V_{SI} \approx 18.7 \text{ km s}^{-1}$$

En la tabla 2.2 se muestran los valores que toman las variables para

distintos valores de la razón de presiones:

Tabla 2.2 Valor del ángulo de apertura (α), ángulo del choque incidente (ϕ_I), ángulo del choque reflejado (ϕ_R), largo (a) y ancho (b) característicos para distintos valores del cociente de presiones. Calculados con expresiones resultantes del método analítico.

P_j^o / P_e	$\alpha(^{\circ})$	$\phi_I(^{\circ})$	$\phi_R(^{\circ})$	a (10^{17} cm)	b (10^{15} cm)
2.5	1.990	4.967	1.25	2.730	1.080
5.0	3.278	5.970	1.59	3.690	1.279
7.5	3.957	6.345	1.70	4.431	1.540
10.0	4.398	6.654	1.81	5.037	1.758
15.0	4.982	7.062	1.90	6.057	2.143
20.0	5.375	7.337	2.00	6.908	2.476

En la solución analítica los ángulos tienen una clara dependencia con la razón de presiones. Sin embargo, tanto (ϕ_I) como (ϕ_R) toman valores pequeños en todos los casos. Los largos característicos también dependen de la razón de presiones. En este caso la razón largo a ancho (a/b) es siempre parecida a 28, y la razón de los ángulos de los choques es de 2.3 en promedio.

2.4.c La Comparación

A partir de las dos tablas anteriores se comparan los resultados de los dos métodos. El balance final de la comparación entre los resultados de los dos métodos es razonable. A continuación discutiremos en detalle cada uno de ellos. Se encuentra que el ángulo de apertura inicial (del cono de Mach) es siempre un poco mayor en el caso analítico. En la figura 2.9 aparecen en

triángulos los valores de α del resultado analítico, y en cuadros los valores de (α) de la solución numérica. Se puede observar que la dependencia es muy parecida, y que los valores se parecen más para razones de presión mas bajas (en que hay menor diferencia entre la presión del medio y la del chorro).

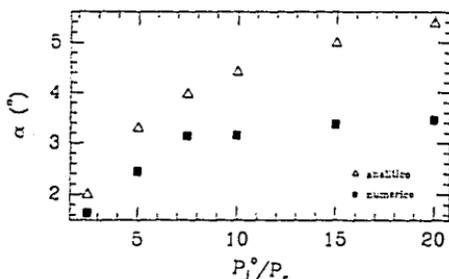


Figura 2.9 Valor del ángulo de Mach (α) para varias razones de presión iniciales, para las soluciones analítica y la numérica.

La dependencia del ángulo del choque incidente con el cociente de presiones también es muy parecido para ambas soluciones, y otra vez es mayor el ángulo de la solución analítica. En la figura 2.10 aparecen los valores del ángulo del choque incidente tanto para la solución numérica como para la analítica. Aquí se ve que presentan una dependencia distinta con la razón de presiones, pues mientras que la (ϕ_1) analítica aumenta con la razón de presiones, la numérica permanece aproximadamente constante. Es correcto que los ángulos sean siempre mayores en una solución, y esto debe reflejarse en que el largo característico sea menor y el ancho característico mayor cuanto mas grandes sean los ángulos.

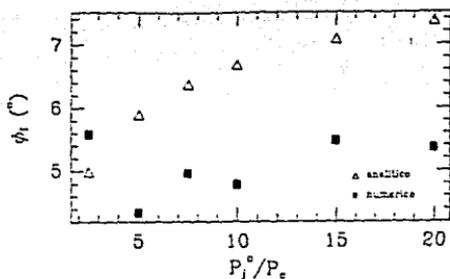


Figura 2.10 Valor del ángulo del choque incidente (ϕ_i) para varias razones de presión, para las soluciones analítica y numérica.

El ángulo que forma el choque reflejado con la horizontal es el doble en la solución numérica que en la analítica. La figura 2.11 muestra que la dependencia respecto del cociente de presiones en ambos casos es casi idéntica.

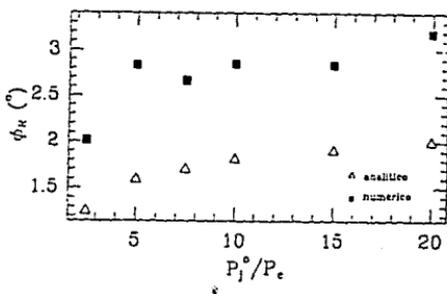


Figura 2.11 Valores del ángulo del choque reflejado (ϕ_R) para distintos valores de la razón de presiones, para las soluciones analítica y numérica.

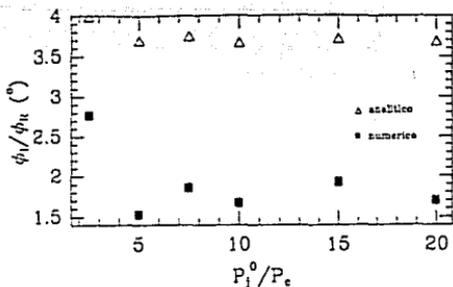


Figura 2.12 Valores del cociente (ϕ_i/ϕ_R) a varias razones de presión, para las soluciones analítica y numérica.

La razón entre el ángulo del choque incidente (ϕ_i) y el ángulo del choque reflejado (ϕ_R) es muy distinta en ambos resultados. En la figura 2.12 se ve que este valor es aproximadamente el doble en el caso analítico que en el numérico. Más adelante se verá como es posible explicar, e incluso corregir esta diferencia.

En el caso de la longitud característica si hay una discrepancia muy grande. Este largo es el doble en los resultados numéricos que en los analíticos. Una vez más la diferencia es menor para razones de presión pequeñas, y mucho mayor para razones de presión grandes. La figura 2.13 muestra estos largos característicos. Parte de esta discrepancia se puede deber a que en el caso analítico los ángulos son mayores y eso puede acortar al patrón total. Otra posible explicación de esto es que en la solución analítica se ha supuesto que el flujo parte de un punto lo cual, evidentemente, no es el caso. Más adelante se verá como se puede relajar esta suposición.

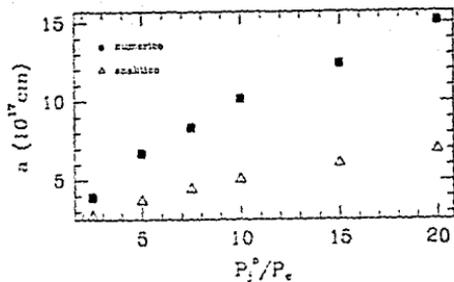


Figura 2.13 Valores del largo característico (a) para varios valores de la razón de presiones inicial, para las soluciones analítica y numérica.

El ancho característico (b) es muy semejante en ambas soluciones, sin embargo la dependencia con la razón de presiones es distinta: en el caso numérico el ancho (b) es mas sensible a la razón de presiones. La figura 2.14 muestra los valores de (b) para ambas soluciones. La razón largo a ancho es distinta, y éste se debe esencialmente al problema con el largo característico. Sin embargo, en cualquier caso es mayor que 28.

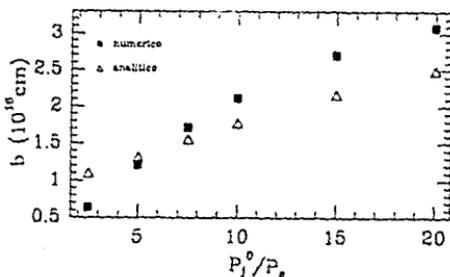


Figura 2.14 Valores del ancho característico (b) para varios valores de la razón de presiones inicial, para las soluciones analítica y numérica.

Acerca de la velocidad de choque se puede decir que, mientras que el

método analítico predice una velocidad de choque única (igual para el choque incidente y el reflejado) del orden de 18.7 km s^{-1} , el método numérico encuentra una velocidad para cada choque. La velocidad de choque del primer choque incidente vale aproximadamente 12.3 km s^{-1} , mientras que la del choque reflejado vale 16.88 km s^{-1} . Estos valores permanecen constantes ante la variación de la presión y la velocidad iniciales.

Esta comparación nos muestra que en general las aproximaciones hechas en la solución analítica no son malas, y que por lo tanto podemos utilizar ambos resultados combinados para obtener más información.

2.4.d Modelo Mejorado

En la sección anterior se encontró que aunque las soluciones analítica y numérica coinciden razonablemente en varios puntos, hay ciertas discrepancias en dos parámetros. Se encontró que la longitud característica, (a), es el doble en la solución numérica que en la analítica. Se obtuvo también que la razón entre el ángulo del choque incidente y el ángulo del choque reflejado vale el doble para el caso analítico que para el numérico. Puesto que en la solución analítica se hicieron suposiciones limitantes, es de suponerse que algunas de ellas no son correctas. En esta sección se relajan algunas de estas constricciones y se estudia el efecto que esto tiene sobre las variables que no coincidieron. Las primeras dos constricciones que se quitan corrigen al largo característico, y la tercera muestra en que casos la razón entre los ángulos (ϕ_I/ϕ_R) se ajusta mejor a la solución numérica.

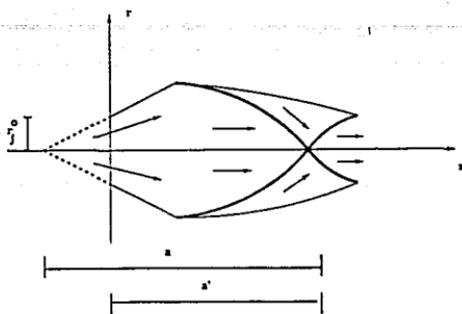


Figura 2.15 Corrección a la solución analítica. Se recorre el origen de manera que el flujo ahora tiene un ancho inicial. Esto cambia el valor del largo característico (a).

La primera suposición que se hizo es que el chorro proviene de un punto. Esto evidentemente no puede ser cierto. Una manera de dar un ancho inicial sin alterar el resto del modelo es recorrer el punto inicial hacia la dirección positiva del eje x (ver figura 2.15) de tal forma que el radio del chorro en $x=0$ corresponde al radio inicial del chorro. Este desplazamiento acorta la dimensión característica (a), que va desde el comienzo al punto donde se refleja el choque, pero no cambia los otros valores. Del modelo así replanteado resulta:

$$a' = a - \frac{\kappa^{\gamma/(\gamma-1)} \cos\alpha}{(2-\epsilon)^{1/2} M_j^0} \quad (2.54)$$

Se ve que la a' sólo va a cambiar mucho cuando la presión del chorro sea menor que la del medio. Esto sucede cerca del eje justo antes de llegar al choque incidente. Esta corrección tiene mas efecto sobre los valores cuya razón de presiones inicial es baja. El efecto neto que tiene la corrección es hacer mas semejantes las pendientes de las (a) para ambas soluciones, aunque siguen difiriendo por una constante.

Otra aproximación que se hizo fue despreciar la presión centrífuga. La presión centrífuga es aquella que aparece cuando el gas fluye por una curva. Si se incluye la expresión para esta presión en la ecuación de equilibrio de presiones, resulta una ecuación integro-diferencial muy complicada que no se puede resolver analíticamente. Esta ecuación es:

$$\frac{1}{(r^2+r'^2)} - (1-c_1) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2\gamma} + \frac{1}{c_1} \left(\frac{r^2+2r'^2-r'r'}{(r^2+r'^2)^{3/2}} \right) \frac{1}{r \cos\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{r'}{(r^2+r'^2)^{1/2}} \cos\theta \, d\theta = 1 \quad (2.55)$$

aquí r es el radio adimensionalizado con la R_0 , y r' es su derivada respecto del ángulo θ .

Es complicado resolver esta ecuación para conocer el lugar del choque. Se hizo un programa que la reduce a tres ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Este sistema se resuelve con el método Runge-Kutta. A partir del número de Mach inicial del flujo, y de la razón entre la presión del chorro y la del medio, el programa calcula el punto en el cual aparece el choque. Integrando desde este punto, obtiene los valores que va tomando el radio para los diferentes valores de θ (es decir la forma y tamaño del choque incidente). En particular de este programa se puede extraer un valor para la distancia entre el punto de inyección y el punto en que se refleja el choque (a). La figura 2.16 es un ejemplo de los datos que arroja este programa. Aquí es posible medir la magnitud de (a) de manera muy sencilla. Incluir la presión centrífuga hace que aumente la longitud (a), y la asemeja mucho a los resultados de la solución numérica.

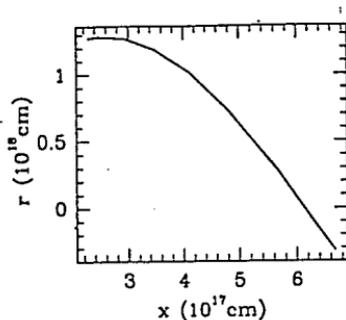


Figura 2.16 Forma y tamaño del frente de choque incidente calculado a partir de la ecuación 2.54.

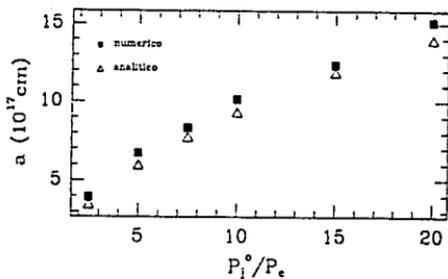


Figura 2.17 Valor del largo característico (a) para varias razones de presión, para la solución numérica y la analítica. Aquí se aplican las correcciones al cálculo del largo característico (a) analítico.

Las dos correcciones anteriores se pueden combinar para obtener un mejor resultado. Si a los valores de (a) que se obtienen considerando la presión centrífuga se les aplica la fórmula de corrección 2.55, entonces la longitud que resulta debe contener ambas correcciones. En la figura 2.17 aparece de

nuevo la comparación entre la (a) numérica, y la analítica, la cual ahora es calculada utilizando las dos correcciones. Como se puede ver, la concordancia entre ambos métodos es ahora excelente.

La tercera condición del planteamiento analítico que se puede relajar es la de que el choque reflejado es fuerte. Esta suposición tiene un efecto notable sobre el valor de (ϕ_I/ϕ_R) . Aunque hay evidencia clarísima de que el choque incidente debe ser fuerte, no es así para el choque reflejado (ver por ejemplo la figura 2.2(a)). En esencia, la suposición de que un choque es fuerte aproxima el número de Mach como infinito y con ello elimina la dependencia con el número de Mach en las expresiones. La corrección que se va a hacer ahora consiste en recalcular el choque reflejado, guardando la dependencia del número de Mach para éste. Como el choque incidente es fuerte se cumple aún la ecuación 2.30 para los ángulos:

$$\tan \beta = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \tan \phi_I, \quad (2.56)$$

pero en el choque reflejado se tiene:

$$\tan \phi_R = \xi_R \tan (\phi_I + \phi_R - \beta) \quad (2.57)$$

donde:

$$\xi_R = \frac{(\gamma-1)M_R^2 + 2}{(\gamma+1)M_R^2} \quad (2.58)$$

donde M_R es el número de Mach efectivo del gas justo antes del choque reflejado y tiene una dependencia con los ángulos y el número de Mach absoluto como sigue:

$$M_R = \frac{V_1 \operatorname{sen}(\phi_I + \phi_R - \beta)}{c_R} \quad (2.59)$$

en esta expresión, c_R es la velocidad del sonido justo antes del choque reflejado dada por:

$$c_R = c_1 \left(\frac{\rho_R}{\rho_1} \right)^{(p-1)/2} \quad (2.60)$$

En esta ecuación, c_1 es la velocidad del sonido justo detrás del choque incidente; ρ_R/ρ_1 es el cambio de densidad entre la salida del choque incidente y la entrada del choque reflejado y p es un índice politrópico tal que si el gas se comporta adiabáticamente entre los choques, $p = 5/3$, y en el caso de que permanezca isotérmico, $p = 1$. El cociente ρ_R/ρ_1 está dado por la ecuación 2.38. Estas ecuaciones son suficientes para describir el choque reflejado. Si se hace la aproximación de ángulos pequeños se obtienen las siguientes ecuaciones simplificadas:

de la ecuación 2.30
$$\beta = \frac{1}{4} \phi_I \quad (2.61)$$

de la ecuación 2.33
$$\phi_R \cong \xi_R \left(\frac{3}{4} \phi_I + \phi_R \right) \quad (2.62)$$

de la ecuación 2.38
$$\frac{\rho_R}{\rho_1} \cong 4 + 3 \frac{\phi_I}{\phi_R} \quad (2.63)$$

Se está buscando una expresión para ϕ_I/ϕ_R . De la ecuación simplificada 2.62 esta variable se puede expresar como una función del factor ξ_R :

$$\frac{\phi_I}{\phi_R} = \frac{4}{3} - \frac{(1 - \xi_R)}{\xi_R} \quad (2.64)$$

y la expresión para ξ_R , si suponemos un gas monoatómico ($\gamma=5/3$), toma la

forma:

$$\xi_R = \frac{M_R^2 + 3}{4 M_R^2} \quad (2.65)$$

Por otra parte, si en la ecuación 2.59 se utilizan todas las expresiones simplificadas que se han obtenido, se obtiene una ecuación para M_R como sigue:

$$M_R = \frac{3}{S^{1/2} 4^{(p-1)/2}} \frac{\xi_R^{(p-1)/2}}{(1-\xi_R)} \quad (2.66)$$

El sistema formado por las ecuaciones 2.65 y 2.66 se puede resolver dado el valor de p . Si el gas se comporta adiabáticamente ($p=5/3$) entonces:

$$\xi_R = 0.55$$

$$M_R = 1.56$$

$$\phi_1/\phi_R = 1.06$$

mientras que, si es isotérmico ($p=1$):

$$\xi_R = 0.4$$

$$M_R = 2.23$$

$$\phi_1/\phi_R = 2$$

De aquí se encuentra que en efecto la suposición de que el choque reflejado es fuerte era incorrecta. Quitando esta suposición se puede calcular el valor de la razón (ϕ_1/ϕ_R) y resulta que, dependiendo del comportamiento térmico del gas, este valor varía entre 1 y 2. Es una buena aproximación pensar que en la zona entre el primero y el segundo choque, el gas tiene comportamiento isotérmico. Esto implica que la razón entre los ángulos de los choques toma un valor de 2. En la figura 2.17 se aprecia que para este valor, los resultados analíticos coinciden mejor con los numéricos. De hecho, el valor que resulta de la solución numérica está entre 1.5 y 2.

Esto pudiera ser indicación de que el comportamiento del gas está entre los extremos adiabático e isotérmico.

2.5 Recapitulando

En este capítulo se caracterizaron los chorros estelares. Mediante la solución (numérica y analítica) de un modelo teórico para estos chorros y una comparación entre los resultados que cada solución arroja, se ha llegado a tener un panorama general de las características y el comportamiento de éstos.

Se hicieron las suposiciones de que el chorro es un flujo estacionario, compresible, no viscoso y altamente supersónico, cuya presión en el punto de inyección es mayor que la presión del medio que lo rodea. Se encontró que el flujo reacciona a los gradientes de presión formando un par de choques internos. Dichos choques, junto con una zona de expansión inicial, constituyen un patrón que se repite a lo largo del chorro. La distancia a la cual se repite este patrón (que se ha llamado largo característico) es aproximadamente constante y depende de las variables del chorro en el punto de inyección como sigue:

$$a \cong \lambda \left(\frac{\dot{M}_J^0 V_J^0}{\pi P_0} \right)^{1/2}$$

El ancho máximo del flujo es, también, aproximadamente constante para cada chorro dependiendo de sus variables en el punto de inyección. La razón largo a ancho en estos chorros es de alrededor de 30, es decir que los chorros son delgados. Los ángulos a los cuales se forman los dos choques son pequeños. Esto implica que los choques son muy oblicuos al flujo, y que por lo tanto la velocidad de flujo permanece aproximadamente igual al pasar por

los choques. Debido a esto, la velocidad de flujo es otra constante del flujo (aproximadamente igual a su valor en el punto de inyección) a todo lo largo del chorro. La velocidad de choque es semejante para ambos choques y tiene valores de aproximadamente:

$$V_{SI} \cong V_{SR} \cong 18 \text{ kms}^{-1}$$

y no depende de las variables del chorro. La dependencia que presentan estos chorros con la presión y la temperatura iniciales no es sencilla.

Recordando la sección 4 del capítulo 1 en la que se revisan las propiedades observacionales de los chorros estelares, se ve que este modelo coincide con las principales propiedades que ahí se listan. Podemos mencionar, por ejemplo, que los nudos brillantes (equidistantes) presentan emisión del tipo que se da en zonas de enfriamiento detrás de frentes de choque, y que este modelo encuentra que se forman pares de choques a distancias regulares. Las observaciones reportan velocidades de flujo supersónicas y constantes y el modelo es consistente con eso. Aunque la razón largo a ancho reportada por Mundt (1987) es de 20 y el modelo teórico encuentra un valor mas cercano a 30, esto no es sorprendente puesto que el ancho del chorro está cerca del limite de resolución de los aparatos con que se han observado. Una observación con mayor resolución probablemente muestre valores menores para el ancho.

DISCOS DE MACH EN CHORROS ESTELARES

En este capítulo se analiza si es posible que haya reflexión de Mach en chorros estelares. Como ya se vió en el capítulo anterior, la emisión que se observa en los chorros estelares se explica como emisión en la zona de enfriamiento detrás de choques internos oblicuos. Estos choques en realidad son uno solo que es reflejado en el centro del chorro por efecto de convergencia de material hacia esta zona. Esta reflexión puede darse de forma simple, con dos frentes de choque como se vió en el Capítulo 2 (reflexión regular), o bien puede aparecer un tercer choque vertical (llamado disco de Mach) en el vértice de los dos anteriores (reflexión de Mach, ver la figura 3.4). Analíticamente sólo es posible resolver este problema para un flujo plano-paralelo y adiabático por su sencillez. En la sección 3.1 se repasa la reflexión regular y las condiciones límite para este caso simplificado. En la sección 3.2 se estudia la reflexión de Mach y el comportamiento de un flujo de gas al pasar por estos choques. En la sección 3.3 se intentan determinar las condiciones iniciales de un chorro cilíndrico, radiativo que son necesarias para que aparezca la reflexión de Mach. Puesto que analíticamente es complicado, la única forma de estudiar esto es mediante la solución numérica. Numéricamente hay un criterio para la aparición de reflexión de Mach que depende del método de integración. Para determinar si este criterio es correcto, se comparan las soluciones que dan el método numérico y el analítico para el caso plano-paralelo y adiabático, y habiendo

determinado que la condición de aparición de discos de Mach en la solución numérica es correcta, se procede a determinar (en los resultados del programa que resuelve numéricamente el problema) las condiciones de un flujo cilíndrico y radiativo en la zona de reflexión para determinar si los discos de Mach pueden aparecer en chorros estelares.

3.1 Reflexión Regular

En el Capítulo 2 (sección 2.2) se encontró que los chorros estelares presentan una sucesión de choques internos. Estos choques son oblicuos a la dirección del flujo y se forman en pares. El primer choque es resultado del gradiente de presión entre el chorro y el medio. Puesto que es oblicuo a la dirección del flujo, deflece a éste hacia el centro del chorro (ver la figura 2.2). Dada la simetría cilíndrica, esta deflexión sucede desde todos los puntos hacia el eje de simetría. El resultado es una compresión del gas en este punto, y por consiguiente un gradiente de presión que induce un nuevo choque que parte del mismo punto en que el choque incidente termina. Esto es lo que se llama reflexión regular. Una vez más, es conveniente estudiar analíticamente una versión simplificada del caso real. Esto se hace a continuación.

Se va a considerar un flujo supersónico, plano-paralelo, de gas cuyo comportamiento energético es adiabático. En particular, si se tiene un flujo de gas con dirección paralela a una pared y el gas cruza un frente de choque plano y oblicuo, este choque es reflejado (Landau y Lifshitz, 1980). Esto significa que el frente de choque se deshace al hacer contacto con la pared a causa de un fuerte gradiente de la densidad (o la presión) y aparece un nuevo frente de choque en este punto cuya dirección es distinta a la inicial (ver figura 3.1). El primer choque deflece al flujo dirigiéndolo hacia la pared, y causando una compresión del flujo. El segundo choque aparece por efecto de

esta compresión. Otra condición para la aparición de este segundo choque es que el flujo permanezca supersónico, de otra forma, el gradiente de densidad solamente desviará al flujo. En el modelo de chorros estelares revisado en el capítulo anterior se consideró siempre el caso con reflexión regular. Sin embargo es posible que alguna de las condiciones necesarias para su aparición no se den, y se formen choques con geometrías distintas, o incluso ya no se formen choques.

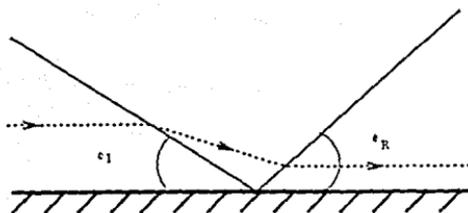


Figura 3.1 Reflexión regular en un flujo plano-paralelo de un gas con comportamiento adiabático. Se divide en tres zonas: 1) prechoque, 2) interchoque y 3) postchoque.

El caso de reflexión regular en un flujo plano-paralelo de gas adiabático cuya presión es menor que la del medio ambiente se resuelve analíticamente en la sección 2.3. A partir de los valores iniciales de las variables del flujo, es posible calcular el ángulo del choque incidente (ecuación 2.19) y dado este, quedan determinados los valores de todas las variables del gas al pasar por el primer choque (de las relaciones Rankine-Hugoniot para choques oblicuos). Con estos valores, se puede determinar el ángulo al cual se forma el segundo choque (ϕ_R). De esta manera

queda totalmente definido el flujo del gas a través del choque reflejado. Lo que es importante de esta solución, es que basta determinar dos variables iniciales del flujo para conocer la forma de ambos choques, así como todas las variables en cada zona. Estos valores iniciales pueden ser: la razón entre las presiones del flujo y el medio (P_o/P_e) y el ángulo al cual aparece el primer choque (ϕ_1) o el número de Mach del gas ($M_o \equiv V_o/c_o$) antes de entrar al choque incidente. A partir de estos valores iniciales se van encontrando las variables del flujo utilizando expresiones analíticas sencillas (ecuaciones 2.19 a 2.33) para todas las variables del flujo. La única complicación aparece en la expresión para el ángulo del choque reflejado. Esta (ecuación 2.33) es una ecuación trascendental en la que ϕ_R depende de los ángulos ϕ_1 y β , así como de sí mismo. Se resuelve numéricamente usando el método Newton-Raphson. Para cada pareja (P_o/P_e) y M_o (o ϕ_1) el sistema de ecuaciones tiene, en principio, dos soluciones. Sin embargo para algunos valores no es posible encontrar solución. Por ejemplo dado el cociente (P_o/P_e) existe solución (es decir un par de soluciones) para $M_o \geq M_{oc}$ donde M_{oc} depende del cociente (P_o/P_e). Para $M_o < M_{oc}$ no existe solución, lo cual indica que la reflexión regular no es posible y entonces debe aparecer un disco de Mach. De igual forma se puede encontrar un ángulo máximo o crítico para el choque incidente, ϕ_{1c} , a partir del cual (es decir para $\phi_1 > \phi_{1c}$) no existe reflexión regular.

Es interesante caracterizar este punto crítico en el cual el flujo pasa del régimen de reflexión regular al de reflexión de Mach para después decidir si algún chorro estelar puede presentar discos de Mach. Para ello es necesario recorrer el camino que va desde un par de los tres valores iniciales que se mencionan arriba, hasta llegar a la solución de la ecuación 2.33. Se escribió un pequeño programa que tiene por entrada el ángulo del choque inicial (ϕ_1) y la razón de presiones P_o/P_e y utiliza las ecuaciones

2.19 a 2.33 para obtener finalmente el ángulo ϕ_R crítico. El resultado de estos cálculos aparece en la figura 3.2. En esta figura se grafican los valores del ángulo del choque incidente crítico (ϕ_{IC}) en función del cociente P_o/P_e . La línea que une estos puntos divide en dos zonas al espacio definido por las razones de presión (P_o/P_e) y los ángulos incidentes (ϕ_I). Por debajo de la línea es posible la reflexión regular, y en la zona arriba de esta curva ya no es posible. En la siguiente sección se describe qué sucede cuando no se puede formar una reflexión regular.

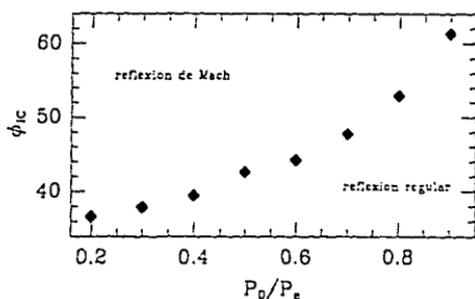


Figura 3.2 Gráfica de el ángulo crítico para diferentes razones de presión. La línea que une a los ángulos críticos divide en dos comportamientos, uno de reflexión regular y otro de reflexión de Mach.

3.2 Reflexión de Mach

En el momento en el que deja de haber reflexión regular, aparece un tercer choque normal al flujo. Tanto Landau y Lifshitz (1980) como Courant y Friedrichs (1958) dicen que una intersección estacionaria entre un choque fuerte y una superficie sólida es imposible debido a los fuertes gradientes de presión que aparecen. En el caso de los chorros estelares, no se tiene precisamente una superficie sólida, sino más bien es la simetría la que tiene

un efecto de reflejar al flujo. La aparición de este tercer choque se puede entender de manera cualitativa como sigue. Las condiciones para que aparezca un segundo choque (reflejado) son que el flujo siga siendo supersónico después de pasar por el primer choque y que la convergencia de material hacia el eje de simetría genere un gradiente de densidad. Un choque oblicuo tiene la característica de que solamente afecta (choca) a la componente de la velocidad que es normal al frente de choque. El flujo que se estudia en el Capítulo 2 permanece supersónico aun después de pasar por muchos choques porque estos todos son muy oblicuos (ángulos pequeños) por lo cual la magnitud de la velocidad permanece aproximadamente igual. En la sección anterior se encuentra que, dada una razón de presiones P_0/P_e , hay un ángulo máximo para que siga habiendo reflexión regular. Esto se puede entender porque, a ángulos mayores, el flujo es chocado más frontalmente y ya no es lo suficientemente supersónico para formar un segundo choque. Este comportamiento se ha estudiado en el laboratorio, pero solamente con flujos apenas supersónicos ($M \approx 2$). En estos trabajos se encuentra que el gas (aire) sí forma estos Discos de Mach. Se encuentra que el patrón de choques incidente-reflejado se separa de la pared (eje de simetría), y aparece un nuevo choque que es perpendicular a la pared (Chow y Chang, 1974).

En la figura 3.3 se muestra un esquema del conjunto de tres choques que se acostumbra llamar reflexión de Mach. Como se puede ver, ahora el flujo se divide en dos zonas: una parte del gas pasa por el par de choques incidente-reflejado, y la parte más cercana al centro pasa por un solo choque normal. El resultado de esto es que el flujo de la parte (a) sigue siendo supersónico, mientras que en la parte (b) pasa a ser subsónico. Por lo visto, para que aparezcan discos de Mach es necesario tanto que la presión del gas sea menor que la del medio (cosa que definitivamente se cumple en la parte final de la zona de expansión), como que hayan números de Mach bajos (que es

equivalente a tener ángulos del choque incidente grandes, ver figura 3.2). Esta segunda condición no es consistente con la suposición que se hizo en el Capítulo 2 de que los chorros estelares son altamente supersónicos ($M > 5$) o, lo que es lo mismo, que los ángulos de los choques son pequeños.

Chow y Chang (1974) estudian teóricamente flujos de aire para encontrar discos de Mach. Para poder comparar sus resultados con experimentos de laboratorio, trabajan en el régimen apenas supersónico ($M \approx 2$). Concientes de que hay dos tipos de comportamiento separados por valores críticos de algunas variables del flujo, buscan esos valores críticos. Una vez que saben qué condiciones son necesarias para la aparición de los Discos de Mach, se interesan en determinar la posición en que estos aparecen, y el tamaño que toman. Encuentran que ambas cosas son función tanto de la razón de presiones, como del número de Mach inicial del flujo. La posición es única y una vez que esta es definida, el tamaño del disco puede ser desde 0.1 hasta 2.5 veces el radio inicial del flujo. Sus resultados concuerdan muy bien con experimentos realizados por Love *et al.* (1959).

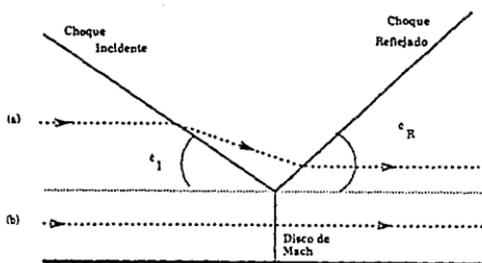


Figura 3.3 Reflexión de Mach. Se muestra el paso del flujo a través de dos choques (a) y a través de uno solo (b). El flujo en la parte (a) permanece supersónico y en la parte (b) se convierte en subsónico.

Algunas personas que han estudiado chorros piensan que en los chorros estelares como los que se vieron en el Capítulo 2 puede aparecer una reflexión de Mach. Falle, Innes y Wilson (1987) encuentran que siempre se forman, y de hecho logran verlos en sus soluciones numéricas (dependientes del tiempo). El propósito de esta sección es de determinar cuando los chorros estelares tienen reflexión regular y cuando reflexión de Mach. En las secciones anteriores se encontró analíticamente un criterio para el cambio de un régimen de reflexión al otro, pero solamente para el caso simple de un flujo plano-paralelo y adiabático. Puesto que los chorros estelares se han modelado como un flujo radiativo con simetría cilíndrica, es necesario extender el criterio anterior a este tipo de flujo. Para ello se tiene que hacer uso de la solución numérica del modelo teórico (sección 2.2). En la sección 3.3.a se encuentra la condición para la aparición de discos de Mach en flujos plano-paralelos, pero utilizando el código numérico. En la sección 3.3.b se caracteriza el punto crítico (de cambio de régimen) para flujos cilíndricos y radiativos en general. En la sección 3.3.c se estudia con detalle la zona cercana al punto de reflexión para extraer los valores de las variables del flujo que se pueden utilizar para determinar la presencia de discos de Mach en chorros estelares.

3.3.a Condición de aparición en la solución numérica

En la solución numérica hay una manera indirecta de detectar la aparición de discos de Mach. El método de integración de MacCormack, con el cual se resuelven las ecuaciones de la dinámica de gases que describen al flujo, exige que el flujo sea supersónico en todo momento. Como la aparición

de los discos de Mach implica flujos subsónicos (corriente abajo del disco), el método debe dejar de converger para flujos en los cuales sea necesaria la aparición de discos de Mach. Si este criterio es correcto, debe ser posible encontrar los valores críticos de ϕ_{IC} o M_{oc} , para luego determinar las condiciones de flujo que permiten la formación de Discos de Mach utilizando el programa STATJETNA (ver el Apéndice B). Hecho esto para flujos plano-paralelos y adiabáticos, debe ser posible utilizar el mismo criterio para flujos cilindricos y radiativos y de esta manera esclarecer la presencia de discos de Mach en chorros estelares.

Para verificar que los valores críticos que dan la solución numérica y la analítica (figura 3.2) coinciden se hicieron varias corridas del programa STATJETNA para el caso plano-paralelo, adiabático y con presión menor que la del medio externo y con los valores iniciales del chorro estándar (ver sección 2.2). Se determinó cuales de estos valores resultan en discos de Mach. Puesto que en el programa no es posible fijar el ángulo del choque incidente, ahora los parámetros con que se va a trabajar son P_o/P_e y M_o (el número de Mach al comienzo). Para cada valor de la razón de presiones (todas menores que 1, puesto que se trata de la parte final de la zona de expansión) se corrió STATJETNA con velocidades de flujo cada vez menores hasta que el programa cesaba de funcionar justo en la rutina que implementa el método predictor-corrector de MacCormack. Se usa V_o porque es una variable de entrada del programa, y V_o es equivalente a M_o simplemente porque $M_o = V_o/c_o$ y c_o es conocida al comienzo. Fue posible precisar el valor de V_o hasta milésimas de km s^{-1} . Se encontró que hay un número de Mach mínimo para cada razón de presiones tal que aun es posible la reflexión regular. Dicho número mínimo se determinó para varios valores de P_o/P_e (de 0.2 a 0.9) y se muestran en la figura 3.4. En esta figura aparecen también los números de Mach críticos para la solución analítica, dichos números se calcularon utilizando

los valores de la figura 3.2 y la relación:

$$M_{oc} = \frac{V_o}{c_o} \operatorname{sen} \phi_{IC} \quad (3.2)$$

que fue extraída de la sección 2.3.c.

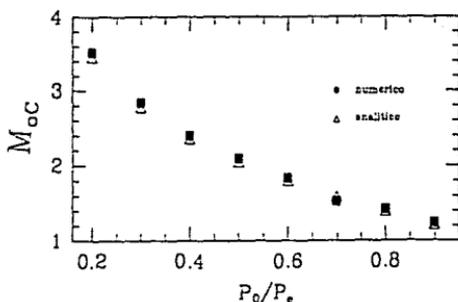


Figura 3.4 Número de Mach mínimo para la reflexión regular. Se muestran los resultados del cálculo analítico y de la solución numérica.

Como se puede ver en la figura 3.4, la solución numérica encuentra casi exactamente los mismos valores críticos que la analítica. De hecho la máxima diferencia entre uno y otro es de menos del 2%. Se sabe, entonces, que el criterio de que el programa no converja es una buena forma de detectar el punto crítico para la aparición de discos de Mach en el flujo plano-paralelo y adiabático. Se va a hacer la suposición de que este criterio se puede extender a la simetría cilíndrica y también al caso en el que el gas tiene comportamiento radiativo.

3.3.b Aparición en flujos cilíndricos no-adiabáticos

Se quiere ahora obtener una gráfica semejante a la figura 3.4 que separe

el régimen de reflexión regular del de reflexión de Mach para un flujo con simetría cilíndrica de gas radiativo. Para ello bastó repetir el procedimiento de la sección 3.3.a, cambiando la geometría plano-paralela por cilíndrica, y el comportamiento adiabático por radiativo. Esto se hizo en dos pasos. Primero se encontraron los números de Mach críticos para el caso cilíndrico pero aun adiabático, y más adelante se determinaron estos valores críticos para el caso cilíndrico y radiativo.

En la figura 3.5 aparecen los valores críticos de M_{oc} para razones de presión que van desde 0.2 hasta 0.9, para geometrías plano-paralela y cilíndrica, ambos adiabáticos. Se observa que los valores críticos del número de Mach son siempre consistentemente mayores en el caso cilíndrico.

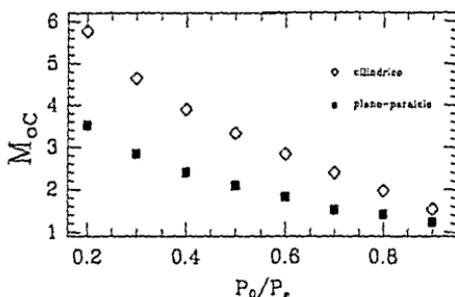


Figura 3.5 Gráfica del valor crítico para M_{oc} a varias presiones, para el caso de simetría plano-paralela y cilíndrica, en ambos casos el gas se comporta adiabáticamente.

El siguiente paso es determinar M_{oc} para el caso que realmente sirve para nuestros chorros estelares, es decir un flujo de gas radiativo con simetría cilíndrica. En este caso se presentaron problemas para determinar la aparición de los discos de Mach cuando se trataba de razones de presión pequeñas (menores que 0.5). El problema era que el valor de la temperatura (y

por lo tanto la presión) sufría una caída muy brusca en la zona inicial de expansión del gas y el código no podía calcular un paso de integración lo suficientemente pequeño para seguir estos cambios. Sabiendo que no hay una razón física para este cambio, se buscó la causa en el código y se encontró que la condición de frontera en el eje de simetría estaba generando estos cambios. Esta condición supone reflexión (se explica en el Apéndice B) e introduce algún problema. Se eliminó la condición, y tras haber determinado que este cambio no tenía grandes efectos sobre los resultados anteriores, se procedió a calcular los valores críticos ya tan deseados.

En la figura 3.6 aparecen los valores críticos M_{oc} para el cilindro adiabático y el cilindro radiativo. Se encuentra que para el caso radiativo el valor crítico es menor para razones de presión menores que 0.4, pero que abajo de este valor, el valor crítico M_{oc} crece para el cilindro radiativo. La diferencia entre los dos ahora tiene que ver con el comportamiento energético, y no es trivial cuantificarlo ni explicarlo. Recordando que arriba de la curva crítica es posible la reflexión regular, y que por debajo aparecen los discos de Mach, entonces se ve que en el caso cilíndrico radiativo es mucho más frecuente la reflexión de Mach. Esto es cierto especialmente para razones de presión pequeñas. La zona de razones de presión pequeñas fue problemática. Para valores de P_o/P_e menores que 0.2 fue imposible determinar una M_o . En adelante se va a suponer que el comportamiento que muestra M_{oc} es divergente en cero, y que por lo tanto entre $P_o/P_e = 0.2$ y 0 el valor de M_{oc} aumentará siempre. En la siguiente sección se verá que es justamente a razones de presión pequeñas a las que se encuentran los chorros estelares.

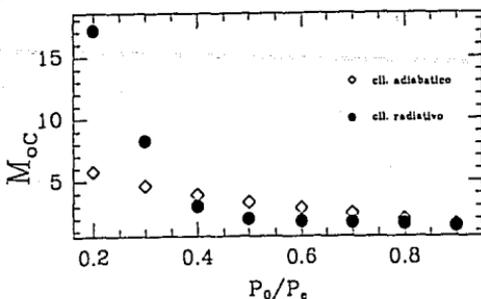


Figura 3.6 Números de Mach críticos para el caso cilíndrico-adiabático y el cilíndrico-radiativo a varias presiones.

3.3.c Aparición en Chorros Estelares Repetidas veces se ha mencionado que es necesario estudiar solamente la zona del chorro muy cercana al punto de reflexión, pero esta zona precisa no se ha definido aún. Hasta este momento se han utilizado los valores del chorro estándar para caracterizar el punto en el que se cambia de régimen y solamente se ha cambiado el valor de P_0/P_e , porque se sabe que, antes del punto de reflexión, la presión del gas en el chorro ha bajado mucho debido a la expansión adiabática que sufre en el cono de Mach. Ahora se quiere definir el punto a partir del cual se va a correr el programa para estar seguros de que se está estudiando solamente la reflexión. Se sabe que sólo se debe considerar la zona muy cercana al eje de simetría. Se encuentra que el comportamiento de las primeras dos líneas de flujo (definidas en el Capítulo 2) es muy semejante y por lo tanto se define el punto de partida como la distancia x_0' a la cual la segunda línea de flujo cruza el choque incidente (ver figura 3.7). Este va a ser ahora el nuevo punto de partida para la

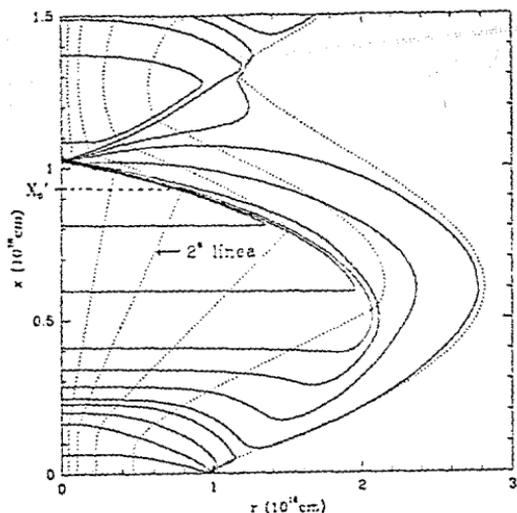


Figura 3.7 Se indica la nueva posición inicial para la integración: x_0' definida por la distancia a la cual la segunda línea de flujo cruza el choque incidente. En líneas continuas se muestran isocontornos de presión; las líneas de flujo son las punteadas.

integración ($x=0$), y es necesario conocer los valores de las variables que pide el código al comienzo a esta distancia x_0' . Se utilizaron las variables iniciales del chorro estándar (sección 2.2) y se observó solamente la primera línea de flujo. Se encontraron los siguientes valores:

$$V_0' \cong 150 \text{ km s}^{-1} \cong V_0$$

la velocidad permanece casi exactamente la misma;

$$r_0' = 3.4 \times 10^{15} \text{ cm} \cong r_0/3$$

el radio es aproximadamente una tercera parte del radio inicial del chorro total;

$$T_0' = 375 \cong 4^{-2} T_0$$

la temperatura es dos órdenes de magnitud menor que la temperatura al comienzo, esta caída se debe a la expansión adiabática; con este valor se puede obtener un valor aproximado del número de Mach:

$$M_o' = V_o' / c_o' = 75$$

donde $c_o' = 10.4 (T_o/10^4)^{1/2}$

$$n_o' = 150 \text{ cm}^{-3} \approx 10^{-2} n_o$$

y la densidad también se reduce en dos órdenes de magnitud. En el caso de la presión hacen falta algunas aclaraciones. Aunque la presión del gas sobre la primera línea de flujo es tres órdenes de magnitud menor, la nueva razón de presiones que se va a utilizar no va a ser simplemente P_o'/P_o , puesto que en realidad el gradiente de presión con el que se encuentra el gas no es ése. Recordemos que en la sección 2.3.d se introdujo una corrección a la solución analítica del modelo tal que considera el efecto de la presión centrífuga. Se vió que esta corrección tenía un efecto importante sobre el largo característico, y también que esta corrección es más grande mientras mas pequeña sea la presión del chorro. En efecto, lo que se tiene es que la presión está estratificada en al menos tres zonas. Una zona consiste del gas de chorro (P_j), y su presión depende del radio como se ve en la sección 2.3. Otra zona más es la de la presión del medio externo, que tiene una presión constante (P_e). Surge una nueva zona, intermedia a las dos anteriores, en la cual la presión que predomina es la presión centrífuga (P_c). Esta presión es mayor que la del gas, pero menor que la del medio. La figura 3.8 muestra esquemáticamente esta estructura de presiones. Dado ésto, la razón de presiones real con la cual este nuevo flujo comienza es P_j/P_c , y este valor se puede extraer de la salida del código, resultando:

$$P_j/P_c = 0.14$$

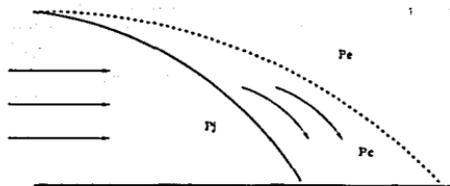


Figura 3.8 Estructura de presiones cerca del primer choque (incidente). Aparecen tres zonas con presiones distintas: la zona pre-choque (P_j), la zona pos-choque, en la cual aparece una presión centrifuga (P_c) y la zona alejada del choque (P_e).

En la sección anterior se vió que la aparición de discos de Mach depende solamente de una combinación de la razón de presiones y el número de Mach al inicio de esta zona de reflexión. Basta conocer el punto en el espacio de parámetros determinado por P_j/P_c y M_o que corresponde a un flujo dado, para decidir si éste va a presentar discos de Mach o no. Para el chorro estelar estándar, este punto ya fue determinado, y es:

$$(P_j/P_c = 0.14, M_o = 75) \quad (3.3)$$

Antes de discutir qué implica este punto, resulta interesante averiguar que valores toman P_j/P_c y M_o dentro de los rangos de variables que Mundt (1987) reporta para chorros estelares (ver sección 2.2). Dado el espacio de parámetros, es suficiente determinar las parejas de valores ($P_j/P_c, M_o$) evaluadas en el punto x_o' que resultan de variar independientemente la velocidad y la razón de presiones dentro de los rangos reportados.

Se repitió el ejercicio de medir todas las variables del flujo a la distancia x_o' para chorros estándar excepto que se variaron las velocidades desde 50 hasta 300 km s^{-1} . Se encontró el siguiente intervalo de valores:

$$(P_j/P_c = 0.14, M_o = (25, 150)) \quad (3.4)$$

Fijando ahora la velocidad inicial en $V_0 = 150 \text{ km s}^{-1}$, y variando la razón de presiones P_j/P_c desde 2.5 hasta 20, se encontró otro intervalo:

$$(P_j/P_c = (0.02, 0.18), M_0 = (38, 91.2)) \quad (3.5)$$

Con (3.4) y (3.5) se puede definir un nuevo intervalo que comprenda a ambos como sigue:

$$(P_j/P_c = (0.02, 0.18), M_0 = (25, 150)) \quad (3.6)$$

con el cual se puede determinar de manera más general la presencia o ausencia de discos de Mach en chorros estelares.

En la figura 3.9 se muestran los valores de M_0 crítica para el caso cilíndrico y radiativo. Aparece también el rectángulo que representa el rango de la expresión 3.6. El rectángulo queda dividido por la línea que une los puntos críticos. Esto quiere decir que algunos de los chorros deberán presentar discos de Mach y los restantes tendrán reflexión regular (aquellos con números de Mach y razones de presión mayores).

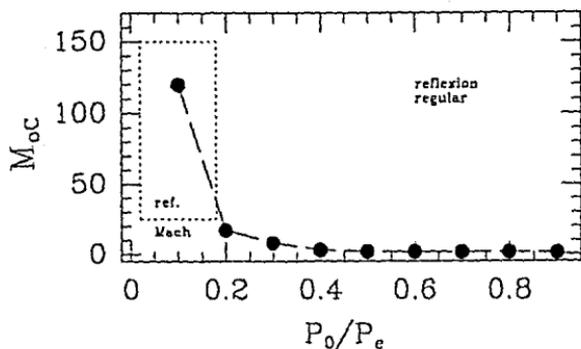


Figura 3.9 Valores críticos de M_{oc} para el caso cilíndrico radiativo. El recuadro muestra la zona en el espacio P_0/P_e , M_{oc} que corresponde a los chorros observados.

3.4 Conclusiones

La pregunta que se hizo en este capítulo es: ¿Habrán discos de Mach en los chorros estelares? La respuesta más corta es: sí, en la mayoría de los casos. Para los valores de presión y velocidad observados en los chorros conocidos, el modelo teórico predice que se formarán discos de Mach en el punto de reflexión de los choques internos oblicuos cuando no sean muy altos ni el número de Mach, ni la razón de presiones. Se pueden decir algunas cosas acerca de estos discos. Hay dos razones para pensar que son pequeños. La primera es simplemente porque en el código numérico no aparecen (salvo cuando se hace una amplificación). Es decir que no miden ni siquiera 1/150 del radio inicial del chorro (esto es, la resolución máxima en la dirección radial),

pues si lo midieran, el programa no convergería. La segunda razón es que, si el tamaño del disco fuera una parte importante del chorro, entonces el espectro resultante sería completamente diferente a los que se han observado. Se tendría la radiación resultante de los choques oblicuos y además una componente importante debida a un choque frontal (o normal). Este choque tendría una velocidad de choque muy similar a la velocidad de flujo (que es mucho mayor que la que se da en choques oblicuos) y por lo tanto causaría una excitación del gas mucho mayor. Esto no es lo que se observa, así que podemos suponer que los discos de Mach son pequeños.

Si se quisiera conocer el tamaño de estos discos, posiblemente se podría aumentar la resolución en la dirección radial hasta que el tamaño del paso de integración en la dirección radial (Δr) fuera del orden del radio del disco. En este momento el programa no convergería y se tendría la certeza de la aparición de discos de Mach.

Un resultado interesante es que basta conocer la pareja de valores (P_0/P_e , M_0) para saber si un flujo va a presentar reflexión de Mach o no. Esto se puede aplicar a todo tipo de flujos.

CHORROS ESTACIONARIOS A GRANDES DISTANCIAS

Hasta este momento se ha modelado el comportamiento del flujo a través del primer par de choques (sección 2.3, 2.4 y Capítulo 4) o cuando mucho a través de unos cuantos (3 o 4) de estos nudos (sección 2.2). Se encuentra que en esta zona el flujo permanece supersónico, sigue colimado, aún presenta choques fuertes (aunque sumamente oblicuos). Resulta interesante preguntarse que sucede con la forma y las variables del flujo a muy grandes distancias. Es necesario, sin embargo, definir qué se entiende por grandes distancias. Observacionalmente se encuentra que los chorros estelares miden alrededor de 3×10^{17} cm (con entre 5 y 10 nudos visibles) y que el chorro generalmente termina con un par de choques más fuertes llamados superficie de contacto. La distancia total entre la fuente del flujo y la superficie de contacto es de dos a tres veces mayor que la longitud visible del chorro (Mundt 1987). Por lo tanto se debe estudiar al flujo a distancias del orden de 10^{19} cm, o bien de 20 o más pares de choques.

La pregunta de qué les sucede a los chorros lejos de su punto de inyección se va a tratar de responder de manera analítica y numérica. No se debe de olvidar que el modelo que se utiliza en este trabajo supone que el flujo es estacionario y que no hay intercambio de materia con el medio circundante. Hoy se sabe que si se consideran la dependencia con el tiempo y el intercambio de materia aparecen cambios importantes en el comportamiento del flujo (Raga, Cantó, Binette, 1990 y Raga, Cantó, Binette en imprenta).

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera. En la sección

4.1 se estudia analíticamente el problema de tres maneras distintas. En la sección 4.2 se reportan los resultados numéricos. Aquí se muestra que fue necesario aplicar una corrección al código pues éste sufría una fuga de masa. En la sección 4.3 se comparan los valores que se predicen analíticamente con aquellos que arroja el programa. En la sección 4.4 se extraen algunas conclusiones.

4.1 Estudio Analítico

Hasta este momento la solución analítica del modelo de un chorro estelar ha estudiado con detalle el paso del gas a través del primer par de choques (secc. 2.3). Ahora se quiere analizar que sucede cuando el chorro ha sufrido muchos de estos choques. A partir de algunas suposiciones sobre las variables y el comportamiento del flujo, es posible obtener expresiones analíticas que describen su comportamiento cuando ha corrido una gran distancia. A continuación se revisan tres tratamientos analíticos independientes. En los tres casos se encuentran relaciones para el radio final del chorro. Los resultados de éstos sirven tanto para tener una idea global de lo que le va a suceder al flujo (las dependencias que existen, los cambios totales de las variables, etc.), como para verificar más adelante que el código numérico se comporta bien en este límite de grandes distancias.

4.1.a Conservación del Flujo de Masa

Los choques internos que aparecen en estos chorros son la manera en que el gas intenta ajustar su presión a la del medio. En los primeros choques se ve que este equilibrio no se ha logrado aún (ver figura 2.2). Sin embargo, si se nota una disminución en la fuerza de los choques (y por lo tanto en la magnitud de los gradientes de presión). Es lógico suponer que si se deja correr un chorro de estos una distancia suficiente, su presión tenderá a igualarse a la del medio. Esto es:

$$P_x \rightarrow P_e \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

De aquí en adelante se utiliza el subíndice x para indicar el valor de cierta variable a una distancia x del inicio del chorro.

En este modelo para chorros se ha considerado que no hay intercambio de material entre el gas del chorro y el del medio que lo rodea. Esto significa que el flujo de masa (la cantidad de masa que pasa por la sección recta del chorro) es una constante a cualquier distancia del chorro. Se va a suponer que esto es válido incluso a muy grandes distancias. Esta condición se puede expresar como sigue:

$$M_x = M_o$$

o bien:

$$\pi r_x^2 V_x \rho_x = \pi r_o^2 V_o \rho_o \quad (4.2)$$

En esta expresión las variables con subíndice o son las del gas en el punto de inyección; r es el radio del chorro, V la velocidad en la dirección axial y ρ la densidad del gas.

Utilizando las condiciones 4.1 y 4.2 y la relación de gas ideal se puede obtener una expresión sencilla para el radio del chorro a grandes distancias como sigue:

$$\frac{r_x}{r_o} = \left(\frac{T_x/T_o}{P_e/P_o} \right)^{1/2} \left(\frac{V_o}{V_x} \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

Aquí T_x es la temperatura del gas en el chorro. Como P_e/P_o está dada en el punto de inyección, y además la velocidad en la dirección x no decrece apreciablemente ($V_o/V_x \approx 1$), en realidad el radio depende solamente de la raíz cuadrada de la temperatura.

4.1.b Ecuaciones de Conservación

En esta sección se va a enfocar la atención sobre las ecuaciones de conservación para extraer de ellas alguna información sobre el comportamiento

del chorro a grandes distancias. Para ello se van a considerar solamente los flujos de masa, momento y energía en la dirección x (en la que fluye el gas). El flujo de momento en la dirección radial no se va a tratar porque solamente interesan los flujos en la dirección x . Se buscan expresiones para las integrales de estas tres cantidades cuando el flujo ha corrido grandes distancias. Para lo que sigue, se hace la suposición de que la velocidad en la dirección radial es cero a grandes distancias (ya que las presiones se han igualado).

La ecuación de conservación de masa es:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v) = 0 \quad (4.4)$$

Integrando el segundo término:

$$\int_0^{r_b} \frac{2\pi r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v) dr = 2\pi (\rho r v) \Big|_0^{r_b} = 2\pi \rho_b r_b v_b \quad (4.5)$$

donde las variables con subíndice b son los valores en la orilla del chorro.

Por otra parte se tiene que:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{r_b} 2\pi r (\rho u) dr = \int_0^{r_b} 2\pi r (\rho u) dr + \left(\frac{dr_b}{dx} \right) 2\pi \rho_b u_b r_b \quad (4.6)$$

donde u_b es la velocidad de la orilla en la dirección x , y (dr_b/dx) es la derivada de la orilla del chorro. Ahí en la orilla, $dr_b/dx = v_b/u_b$, por lo que la expresión 4.6 es igual a:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{r_b} 2\pi r (\rho u) dr = \int_0^{r_b} 2\pi r \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dr + 2\pi \rho_b v_b r_b \quad (4.7)$$

de donde se obtiene el primer integrando, con lo cual la integral de la ecuación 4.4 es la siguiente:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^r 2\pi r (\rho u) dr \right) = 0 \quad (4.8)$$

es decir:

$$\int_0^r 2\pi \rho u r dr = \text{cte} \quad (4.9)$$

Partiendo ahora de la ecuación de conservación de momento en la dirección x:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u v) = 0 \quad (4.10)$$

y volviendo a integrar. El resultado es la siguiente expresión:

$$\int_0^r 2\pi r (P + \rho u^2) dr - \pi r_b^2 P_b = \text{cte} \quad (4.11)$$

Finalmente para el caso de la ecuación de energía:

$$\frac{\partial}{\partial x} [u (E + P)] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v (E + P)] + S = 0 \quad (4.12)$$

con:

$$E = \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \frac{3}{2} P$$

y suponiendo que se trata de un gas adiabático, es decir que $S = 0$, resulta:

$$\int_0^r 2\pi [u (E + P)] dr = \text{cte} \quad (4.13)$$

El conjunto de las ecuaciones 4.9, 4.11 y 4.13 tiene varias utilidades. Por la forma en que están escritas se pudieron introducir fácilmente al

código numérico para corroborarlas (ver si hay dicha conservación en el código conforme avanza). Además, haciendo algunas aproximaciones, es posible reducirlas a relaciones sencillas que expresen la magnitud de algunas variables del flujo (como por ejemplo el radio) de tal manera que se puedan verificar al menos con el código, y en el mejor de los casos con los datos observacionales.

Las ecuaciones 4.9, 4.11 y 4.13 se simplifican si se hace la suposición de que el gas del chorro es adiabático, su presión final es igual a la del medio externo ($P_f = P_e$) y además la velocidad radial del gas es cero tanto en el punto de inyección como en el punto final considerado x_f . Sean ρ , v , P , c, \dots los valores de las variables del gas al final de un chorro muy largo. Con todo esto, las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente forma:

$$r_o^2 \rho_o u_o = r^2 \rho u \quad , \quad (4.14)$$

$$r_o^2 (P_o + \rho_o u_o) - r^2 P_e = r^2 \rho u^2 \quad , \quad (4.15)$$

$$r_o^2 u_o \left(-\frac{1}{2} \rho_o u_o^2 + \frac{1}{2} P_o \right) = r^2 u \left(-\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} P_e \right) \quad . \quad (4.16)$$

Suponiendo que el flujo es altamente supersónico ($M \gg 1$) y re-escribiendo estas relaciones, es posible expresar el radio final del chorro en función de la razón inicial entre las presiones de forma muy sencilla como sigue:

$$\frac{r_x}{r_o} \cong \left(\frac{P_o}{P_e} \right)^{1/2} \left[\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{P_e}{P_o} \right) \right]^{1/2} \quad . \quad (4.17)$$

Ya que P_e/P_o es una constante del flujo, el radio final tiene un valor determinado para chorros adiabáticos.

4.1.c Relación de Prandtl

Prandtl (1906) reportó un trabajo teórico (basado en experimentos) sobre la formación de ondas estacionarias en chorros de fluidos cuya presión inicial es igual a la del medio que los rodea. Haciendo una serie de

suposiciones sobre el flujo, llega a una relación entre la longitud de estas ondas y el ancho del chorro. Esta relación es interesante, pues es muy parecida a lo que se obtiene en la solución analítica (ec. 2.20).

Específicamente, lo que hace Prandtl es suponer que se va a tener un flujo de gas adiabático cuya presión es igual a la del medio que lo rodea. Este flujo es estacionario y tiene simetría cilíndrica. No tiene intercambio de materia con el medio que lo rodea. Las perturbaciones que va a sufrir son pequeñas. A partir de estas suposiciones, utiliza las ecuaciones de la Hidrodinámica y al resolverlas encuentra que aparecen ondas de compresión y rarefacción a lo largo del chorro a intervalos regulares. Deducir una relación entre la longitud de onda (separación entre dos máximos de compresión a lo largo del chorro) y el ancho del flujo que es como sigue:

$$\frac{l}{d} = \frac{a}{2b} = 1.3 \sqrt{M^2 - 1} \quad (4.18)$$

La variable l es la distancia entre dos ondas y d es el ancho (total) máximo del flujo; M es el número de Mach del gas que forma al chorro; las variables a y b son las longitudes características que se manejaron en el Capítulo 2. La expresión 4.18 sólo es válida para flujos supersónicos ($M > 1$).

4.2 Resultados Numéricos

Se quiere tener información de la manera en que cambian las variables del flujo a todo lo largo de un chorro, así como de los valores finales a que tienden cuando se da el equilibrio de presión. Puesto que el código numérico hace muchas menos aproximaciones que la solución analítica, puede aportar mucho mayor detalle. Este hecho fue especialmente útil para los chorros a grandes distancias, pues bastó tener la paciencia de esperar a que corriera el programa para a cambio obtener mucha información.

Para determinar cuantos puntos de integración es necesario utilizar, se corrió el programa con el chorro estándar (ver secc. 2.2) sobre una rejilla de 150 (dirección radial) por 40,000 (dirección axial) puntos. El número en la dirección axial es diez veces el utilizado en el Capítulo 2. Con estos datos se buscó la distancia (o número de puntos) en x para la cual las variables ya no cambian notablemente. En particular se midió el valor del radio y se decidió que 20,000 puntos eran suficientes. Ahora, con una rejilla de $150 \times 20,000$ se corrió el código para el jet cilíndrico, radiativo, estándar (ver la sección 2.2).

4.2.a Pérdida de Masa

Para esta parte del trabajo se le agregaron las expresiones 4.9, 4.11 y 4.13 a la rutina AVER del programa STATJETNA (ver Apéndice B) de tal forma que ahora también se escriben los valores del flujo de masa (\dot{M}), el flujo de momento (\dot{P}) y el flujo de energía (\dot{E}) cuando se escoje calcular los valores integrados a todo lo ancho del chorro. Lo primero que se encontró fué que, en una distancia relativamente corta, habían pérdidas considerables del flujo de masa (M). Algo similar sucedía con el momento y la energía. Además se observó que estas cantidades sufrían oscilaciones (coincidentes con los nudos o pares de choques) de exactamente la misma forma en los tres casos (ver la figura 4.1).

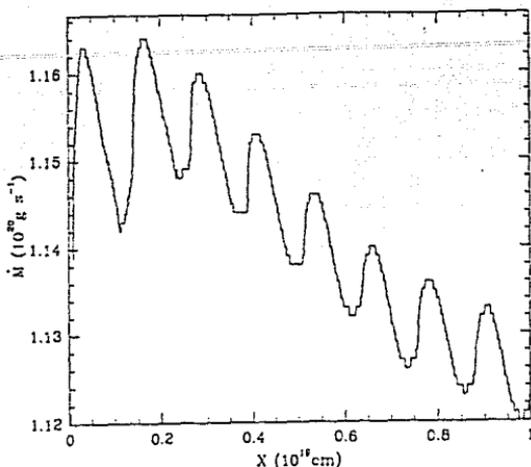


Figura 4.1 Valor del flujo de masa (\dot{M}) a lo largo del chorro estelar. Se observa una pérdida de mas del 2% en esta cantidad.

Puesto que cierta pérdida de masa es normal en este tipo de códigos, se siguió adelante a la comparación entre el valor de el radio final que resultaba de las expresiones analíticas y el que se medía de la salida del programa. Se encontró que estos valores no coincidían. Se concluyó que esto era efecto de la única aproximación que en realidad hace el código numérico, la discretización. Al calcular el radio del borde del chorro, la rutina EDGE tiene que aproximar, redondeando, y ésto resulta en que a cada paso hay una pérdida de la cantidad integrada. En este caso se encontró que la única cantidad que efectivamente estaba sufriendo pérdidas era el flujo de masa (\dot{M}), y que incluso ésta sólo presentaba pérdidas en la densidad. La pérdida en las otras dos cantidades se debía simplemente a que ambas incluyen ρ en sus expresiones.

La primera modificación al programa que se intentó con el fin de disminuir la pérdida de masa fue aumentar la resolución. Se había estado

trabajando con 150 puntos en la dirección radial. Se encontró que aun doblando este número, las pérdidas seguían siendo grandes. Se ganó un 1%, pero el tiempo de integración se cuadruplicó. Para determinar si era costeable este aumento en resolución, se hizo la prueba de medir el porcentaje de pérdida de masa, y el tiempo de integración para varias resoluciones. El resultado aparece en la figura 4.2. Claramente más allá de 150 no vale la pena aumentar la resolución pues los tiempos se vuelven muy grandes.

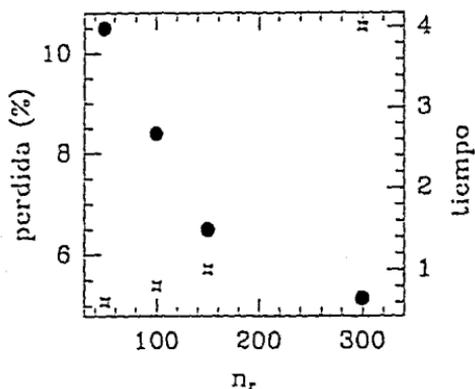


Figura 4.2 Valores de pérdida de masa y tiempo de proceso para diferentes resoluciones. La pérdida se mide en porcentaje de la variable M y el tiempo esta normalizado al tiempo que tarda con $N_r=150$. Esta esta se observa que no es costeable aumentar la resolución mucho más allá de 150 puntos.

La segunda manera en que se atacó el problema fue la definitiva. Este problema de pérdida de masa es muy común en este tipo de códigos, así como lo es su solución. La solución consiste en forzar la conservación de la cantidad M y se hizo de una manera sencilla. En el punto de inyección se calcula el flujo de masa inicial del chorro (\dot{M}) como sigue:

$$\dot{M}_1 = \sum_{j=1}^{r_b} 2\pi \rho(1,j) v(1,j) r(1,j) \Delta r \quad (4.19)$$

Los índices i y j representan posición en la dirección axial y radial de la rejilla respectivamente. A cada paso de integración (para cada i), se vuelve a calcular \dot{M}_1 , con la cual se obtiene un factor de corrección $K = \dot{M}_1 / \dot{M}_1$ (>1), el cual se utiliza para corregir cada $\rho(1,j)$ para todas las j que queden dentro del borde del chorro ($r < r_b$) como sigue:

$$\rho_{\text{corr}} = K \cdot \rho$$

de tal manera que se asegura que M es constante. Una vez corregida la densidad, el código propaga la corrección a \dot{E} y \dot{P} .

Con esta corrección se logró que las cantidades \dot{M} , \dot{P} y \dot{E} fueran exactamente constantes, aun a muy grandes distancias. De esta manera se sabe que los cambios en las variables del flujo serán debidos a causas físicas reales, y no a errores del código.

4.2.b Chorro Estándar Largo

Se corrió el programa STATJET para un chorro estándar, es decir un flujo cilíndrico, con los siguientes valores iniciales:

$$\begin{aligned} r_o &= 10^{16} \text{ cm} \\ v_o &= 150 \text{ kms}^{-1} \\ T_o &= 10^4 \text{ }^\circ\text{K} \\ n_o &= 10^4 \text{ cm}^{-3} \\ P_o/P_e &= 10 \end{aligned}$$

sobre una rejilla de integración de $150 \times 20,000$ puntos. Esto se hizo tanto para el caso de un gas radiativo, como el de un gas adiabático, y se guardaron los valores de todas las variables sobre cinco líneas de flujo, así como la imagen de la presión en toda la superficie del flujo. Todo lo que sigue se refiere a los datos provenientes del chorro radiativo. Cuando se

utilicen los del caso adiabático se hará notar.

Inicialmente se analiza el comportamiento del flujo en su totalidad, desde el punto de inyección hasta el final. Esto permite entender el comportamiento general, la manera en que cambian las variables del gas conforme busca el equilibrio de presión. En la figura 4.3 se muestran los valores de la presión, densidad y temperatura sobre la primera línea de flujo, a todo lo largo de la zona que se estudió. En todos los casos las variables tienden a un valor aproximadamente constante, aunque aun al final siguen habiendo oscilaciones. Estas oscilaciones se pueden dividir en dos tipos. Durante alrededor de 10 nudos el flujo sigue sufriendo choques fuertes. A partir de cierto punto, se trata solamente de ondas sonoras. La presión cae al valor de la presión externa en 16 nudos. La densidad aumenta y luego disminuye, pero su valor final es mayor que el inicial. En esta misma distancia, la temperatura cae a un 15% de su valor inicial, y sigue bajando. La fracción de ionización cae a un valor cercano a cero muy pronto, pero en toda la distancia estudiada nunca llega exactamente a cero.

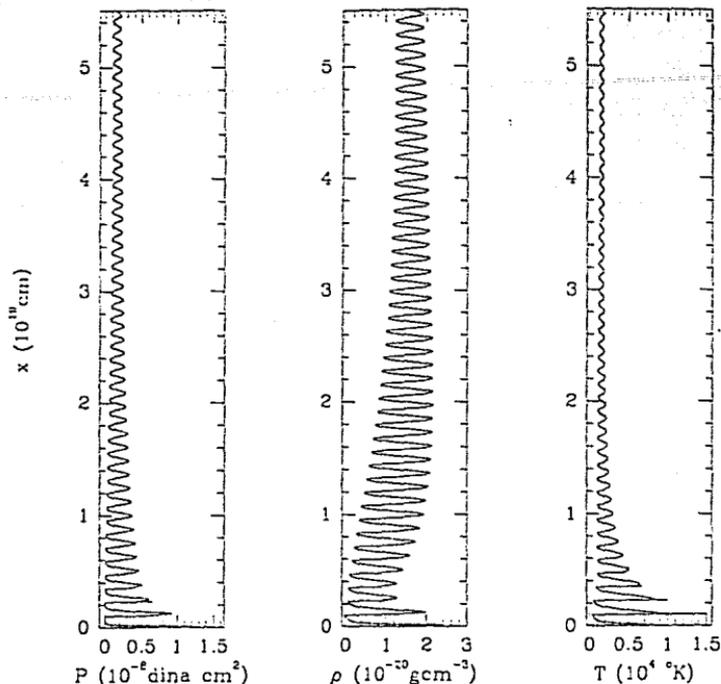


Figura 4.3 Valor de las variables Presión, Densidad y Temperatura sobre la línea de flujo mas cercana al eje, a todo lo largo del chorro.

La figura 4.4 muestra algunos segmentos de la imagen de presiones. Las líneas continuas son isocontornos de presión. En (a) se ve el principio del flujo. Esto es idéntico a lo que ya se comentó en el Capítulo 2. En (b) se muestra una zona intermedia (después de más de 20 nudos) donde posiblemente se está dando el cambio entre ondas de choque y ondas sonoras. En (c) se muestra la zona final, los cambios en la presión aquí siguen estando uniformemente espaciados, pero son realmente suaves. Estas seguramente son ondas sonoras.

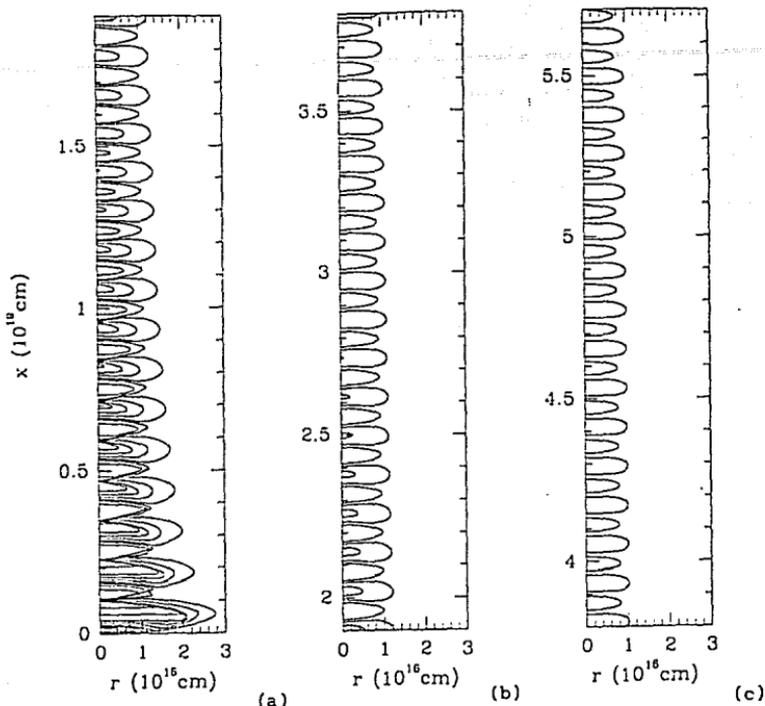


Figura 4.4 Isocontornos de presión a todo lo largo del chorro. En (a) los isocontornos indican la presencia de choques, en (b) parece darse la transición entre un régimen de choques y un de ondas sonoras y finalmente en (c) solamente hay ondas sonoras.

Ahora se estudia el valor final de las variables del flujo. En la figura 4.3 se ve que éstas tienden a valores aproximadamente constantes. Sin embargo, al hacer un acercamiento se observa que aún muestran oscilaciones. El valor que se va a utilizar es el valor medio de estas oscilaciones. Este criterio se utiliza para todas las variables. El error de medición en este caso es despreciable ($< 0.1\%$). Los valores de las variables se reportan respecto del valor en el punto de inyección. En la tabla 4.1 aparecen los valores finales de las variables del flujo, para dos chorros estándar, uno radiativo y el otro adiabático.

Tabla 4.1 Valores finales de algunas variables de chorros estelares. La primera columna muestra resultados para un gas radiativo, y la segunda para gas adiabático.

	Radiativo	Adiabático
P_f/P_o	0.1	0.1
V_f/V_o	1	1
T_f/T_o	0.155	0.68
ρ_f/ρ_o	0.65	0.142
r_f/r_o	1.2	2.67

Resumiendo estos resultados, al final el flujo es muy supersónico y su presión es igual a la del medio. En el flujo radiativo, la temperatura es tan baja que ya no va a radiar (y por lo tanto no será visible), y su radio es un poco mayor. En el flujo adiabático, naturalmente no cae tanto la temperatura, y por lo tanto se expande, aumentando su radio y cayendo su densidad. El radio final es más del doble del inicial.

4.2.c Dependencias de la Velocidad y la Presión

Se ha visto cómo se espera que se comporte un chorro estelar estándar a grandes distancias. Se quiere poder asegurar que algo semejante sucede para cualquier chorro. Para ello, se repitieron las mediciones de la sección anterior, pero ahora para chorros con diferentes velocidades y razones de presión iniciales.

En el Capítulo 2 se reporta (Raga, Cantó, Binette 1989) que en los primeros nudos el cambio de la velocidad inicial sólo tiene el efecto de

modificar la escala en la dirección del eje, es decir alarga o acorta el patrón. Para verificar que el efecto permanece a grandes distancias, se hicieron corridas de chorros estándar, pero con velocidades iniciales $V_0 = 50, 100, 150, 200, 250, 300 \text{ km s}^{-1}$. Se encontró que efectivamente la velocidad no afecta los valores finales que nos interesan.

Para estudiar el efecto de la presión se tomaron los siguientes valores para la razón de presiones al inicio: $P_0/P_e = 2.5, 5, 7.5, 10, 15, 20, 30$. En este caso sí se observa una dependencia del valor final de algunas variables con el valor de la presión al inicio.

La velocidad y la temperatura finales no dependen de P_0/P_e . La densidad, el radio y la presión sí muestran una dependencia con este valor. En la figura 4.5 aparecen los valores de P_f, r_f y ρ_f para los diferentes valores de P_0/P_e .

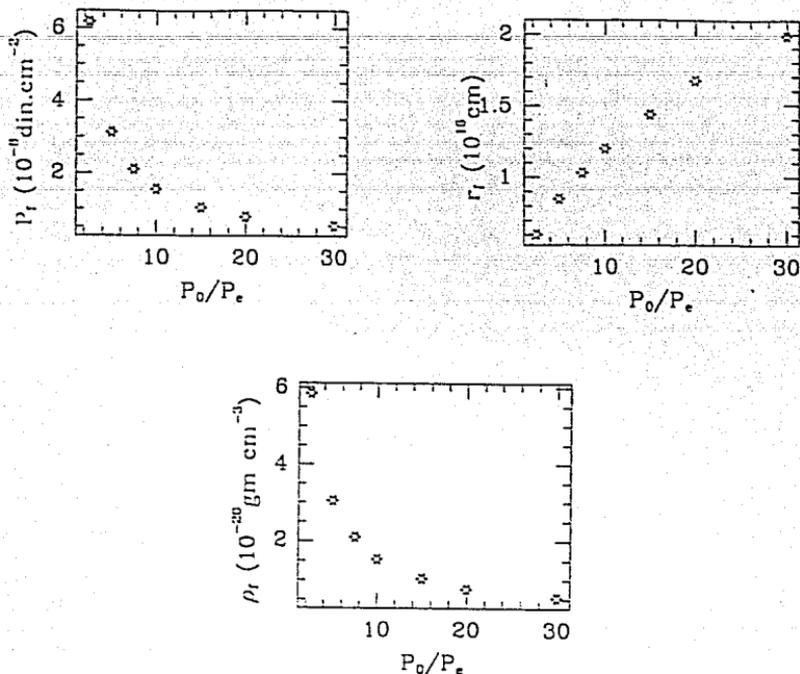


Figura 4.5 Valores de la presión, radio y densidad para diferentes valores de la razón de presiones P_0/P_e al final de un chorro estacionario muy largo (5×10^{19} cm).

4.3 La Comparación

En las secciones anteriores se da una predicción analítica (sección 4.2) y una descripción numérica (sección 4.3) del comportamiento de los chorros lejos del punto de inyección. Ahora se quisiera verificar la consistencia entre ambos. Las expresiones para el radio final 4.3 y 4.17, y para la razón largo a ancho 4.18 del estudio analítico requieren de algunos valores iniciales y otros finales del flujo. Los iniciales se conocen, y los finales se calculan indirectamente de las cantidades que se midieron en la sección anterior (resultado del código). Para esta comparación se van a utilizar los

datos que resultan del chorro estándar.

La expresión 4.3 para la razón r_f/r_o resulta de suponer que la presión del chorro tiende al valor de la presión del medio, y que hay conservación de flujo de masa. Para esta ecuación ya se tienen las cantidades T_f/T_o , P_e/P_o y V_f/V_o . Simplemente sustituyendo, resulta:

$$r_f/r_o = 1.244$$

mientras que de mediciones directas de las gráficas del código,

$$r_f/r_o = 1.2$$

La diferencia es de sólo 3%.

La expresión 4.17 para la razón r_f/r_o se obtuvo de integrar las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía con la suposición de que la velocidad radial al final es cero, y de introducir las condiciones simplificantes de igualdad de presiones ($P_f = P_e$) y de un flujo altamente supersónico ($M \gg 1$). Para esta ecuación basta conocer P_o/P_e . Aquí el valor para el radio final resulta ser:

$$r_f/r_o = 2.5$$

Este valor se debe comparar con el radio final del chorro adiabático. En este caso el valor que se encontró fue:

$$r_f/r_o = 2.67$$

por lo que la diferencia es del 6%.

Finalmente, la expresión 4.18 (relación de Prandtl) para la razón largo a ancho (l/d) viene de analizar un flujo con presión inicial igual a la del medio ambiente que sufre una pequeña perturbación. Aquí hace falta conocer el número de Mach al final (que ya se calculó) y con este queda un valor analítico:

$$a/2b = 47.66$$

y de las gráficas, el valor numérico es:

$$a/2b = 49.58$$

Una vez más la diferencia es de solamente el 3%.

En la tabla 4.2 se resumen los resultados anteriores:

Ecuación	Analítico	Numérico	Error
4.3	1.244	1.2	3%
4.17	2.5	2.67	6%
4.18	47.66	49.58	3%

Tabla 4.2 Se muestra la comparación de los resultados analíticos y numéricos para las tres expresiones que se obtuvieron en la sección 4.1.

La comparación resultó muy positiva. Los valores que se esperan de las aproximaciones analíticas se encuentran también con el código numérico. Esto asegura que el código se comporta bien, aún a muy largas distancias.

4.4 Conclusiones

Con lo aprendido en las secciones anteriores se puede describir como se espera que se comporte un chorro estelar típico después de pasar por muchos pares de choques. Uno de estos chorros va a tener siempre una zona al principio en la cual los cambios en la forma no son grandes. Esta zona comprende entre 5 y 10 nudos, dependiendo del gradiente inicial de presiones. El gas va a tender a igualar su presión a la del medio. Conforme baja el gradiente de presión entre el gas de chorro y el medio, la fuerza de los choques reflejados disminuye, y eventualmente estos se convierten en meras ondas sonoras (de compresión y descompresión). La velocidad del flujo permanece prácticamente igual desde el punto de inyección, y el radio solamente aumenta 20%. Además, la temperatura cae notablemente. Con todo ésto, el chorro al final es un flujo aún colimado, y más supersónico que al inicio.

Esta descripción es congruente con las observaciones (secc 1.1). La zona entre el último nudo visible y la superficie de contacto se puede explicar como esta parte en que ya no hay choques porque el gradiente de presión ya no es suficiente. La fuerza de los choques en la superficie de contacto se entiende bien también, puesto que las velocidades siguen siendo altas, y el gas es aún más supersónico.

Para tener un modelado realmente completo de esta parte (y de todo el chorro) hace falta considerar efectos que han sido despreciados, y que ahora se sabe que son importantes. Los gradientes de presión dentro del gas del medio ambiente, la zona de intercambio de materia entre el chorro y el medio y la dependencia con el tiempo resultan ser decisivos en el comportamiento del flujo. Norman, Smarr y Winkler (1985), Raga, Cantó y Binette (1990) y Raga, Cantó y Binette (en imprenta) estudian cada uno de estos efectos por separado. Un modelo completo comprendería todos estos efectos. Desafortunadamente esto implica un cálculo numérico pesadísimo, y no queda claro que tanta información se puede extraer de un modelo tan complicado.

Un resultado interesante que surgió de este análisis fue el de la corrección de la pérdida de masa en el código numérico. Por una parte nos presentó un problema que es común en el modelado numérico de flujos. Por otra, permitió corregir el código ante esta pérdida, lo cual asegura que los resultados sean consistentes con la suposición de conservación de masa.

CONCLUSIONES

A continuación se repasan brevemente las conclusiones a las que se llegó en cada uno de los capítulos:

En el Capítulo 2 se revisaron las soluciones numérica y analítica del modelo de chorros estelares de Cantó, Raga y Binette. A partir de la comparación de las dos soluciones se extrajo un modelo teórico general. Las predicciones de este modelo son que el flujo reacciona a los gradientes de presión formando un par de choques internos. Dichos choques, junto con una zona de expansión inicial, constituyen un patrón que se repite a lo largo del chorro. La distancia a la cual se repite este patrón (que se ha llamado largo característico) es aproximadamente constante y depende de las variables del chorro en el punto de inyección de la siguiente forma:

$$a \cong \lambda \left(\frac{M_j^0 v_j^0}{\pi P_e} \right)^{1/2}$$

donde M_j^0 es la tasa de pérdida de mas del chorro en el punto de inyección, v_j^0 la velocidad del chorro, P_e la presión de medio ambiente y λ un parámetro que depende muy débilmente de la razón de presiones P_j^0/P_e .

El ancho máximo del flujo es, también, aproximadamente constante para cada chorro dependiendo de sus variables en el punto de inyección. La razón largo a ancho en estos chorros es de alrededor de 30, es decir que los chorros son delgados. Los ángulos a los cuales se forman los dos choques son pequeños. Esto implica que los choques son muy oblicuos al flujo, y que por lo tanto la velocidad de flujo permanece aproximadamente igual al pasar por

los choques. Debido a esto, la velocidad de flujo es otra constante del flujo (aproximadamente igual a su valor en el punto de inyección) a todo lo largo del chorro. La velocidad de choque es semejante para ambos choques y tiene valores de aproximadamente:

$$V_{SI} \cong V_{SR} \cong 18 \text{ kms}^{-1}$$

y no depende de las variables del chorro. La dependencia que presentan estos chorros con la presión y la temperatura iniciales no es sencilla. Las predicciones de este modelo coinciden cualitativamente con algunas observaciones de chorros estelares.

En el Capítulo 3 se determinaron las condiciones para la aparición de Discos de Mach en Chorros Estelares. Para los valores de presión y velocidad observados en los chorros conocidos, el modelo teórico predice que se formarán discos de Mach en el punto de reflexión de los choques internos oblicuos cuando no sean muy altos ni el número de Mach, ni la razón de presiones (entre el gas y el medio que lo rodea). Hay dos razones para pensar que estos discos son pequeños: la primera es que en el código numérico no aparecen (aún a altas resoluciones) y la segunda es que, si el tamaño del disco fuera una parte importante del chorro, entonces se tendría una parte importante de la radiación debida a un choque frontal (con velocidad de choque característica mayor). Un resultado general obtenido en este capítulo es que basta conocer la pareja de valores: cociente de presiones inicial a externa (P_0/P_e) y número de Mach (M_0) para saber si un flujo va a presentar reflexión de Mach o no.

En el Capítulo 4 se obtuvo una descripción del comportamiento de un chorro estelar típico después de pasar por muchos pares de choques. Dicho chorro va a consistir de una zona en la cual aparecen pares de choques (nudos de emisión visible), seguido de una zona en la cual ya solamente habrán ondas

de compresión y rarefacción. Esto se debe a que el gas va a tender a igualar su presión a la del medio. La velocidad del flujo permanece prácticamente igual desde el punto de inyección, y el radio solamente aumenta 20%. Además, la temperatura cae notablemente. Con todo esto, el chorro al final es un flujo aún colimado, y más supersónico que al inicio, puesto que su temperatura cinética ha caído uno o dos órdenes de magnitud, mientras que su velocidad es sólo algo menos que cerca de la estrella. Un resultado interesante que surgió de este análisis fue el de la corrección de la pérdida de masa en el código numérico. Por una parte nos presentó un problema que es común en el modelado numérico de flujos. Por otra, permitió corregir el código ante esta pérdida, lo cual asegura que los resultados sean consistentes con la suposición de conservación de masa.

Para tener un modelado realmente completo de esta parte (y de todo el chorro) hace falta considerar efectos que han sido despreciados, y que ahora se sabe que son importantes. Los gradientes de presión dentro del gas del medio ambiente, la zona de intercambio de materia entre el chorro y el medio y la dependencia con el tiempo resultan ser decisivos en el comportamiento del flujo. Norman, Smarr y Winkler (1985), Raga, Cantó y Binette (1990) y Raga, Cantó y Binette (en imprenta) estudian cada uno de estos efectos por separado. Un modelo completo comprendería todos estos efectos.

ONDAS DE CHOQUE

Cuando un fluido (un gas, por ejemplo) sufre una perturbación, su reacción depende de la magnitud de este cambio. Cuando la perturbación es pequeña, esta simplemente se propaga sin cambiar el estado del gas. A esto se le llama una onda sonora. En el caso de que la perturbación es grande (o repentina) esta altera las variables del gas, dejándolo fuera de equilibrio. Esto tiene efectos posteriores, pues el fluido debe sufrir nuevos cambios (ahora más paulatinos) para regresar a un estado de equilibrio. Estas grandes perturbaciones se llaman ondas de choque. A continuación se revisa el tema de las ondas sonoras como una introducción a las ondas de choque.

A.1 Ondas Sonoras

Una onda sonora es una perturbación pequeña de la presión o la densidad, que se propaga en un fluido compresible. En el estudio de fluidos en general se utilizan las ecuaciones hidrodinámicas de conservación de masa, momento y energía. Estas ecuaciones tienen una forma general complicada. Sin embargo se simplifican haciendo algunas consideraciones. Si suponemos que el fluido es compresible, no viscoso (no hay pérdida de energía por fricción), homogéneo (inicialmente $\rho = \text{cte}$), adiabático (no tiene intercambio de energía térmica con el medio) y laminar (las variables del gas sólo cambian en una dirección y son constantes sobre planos paralelos), las ecuaciones de la hidrodinámica se reducen a la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{cons. de masa}) \quad (A.1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{cons. de momento}) \quad (A.2)$$

donde ρ es la densidad, P la presión y u la velocidad del fluido. La variable x es la dimensión característica del flujo laminar y t es simplemente el tiempo.

La ecuación de energía tiene en general una forma compleja, y sus formas sencillas dependen de más suposiciones aun. Por el momento se omite.

Si aparece una perturbación pequeña en el flujo se pueden estudiar los cambios que sufre de la manera que sigue. Sean:

$$P = P_0 + P_1 \quad P_1 \ll P_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad \rho_1 \ll \rho_0$$

las cantidades perturbadas, con P_1 y ρ_1 las perturbaciones. La condición de que las perturbaciones sean pequeñas implica que, al pasar la onda, las variables del fluido no cambian lo suficiente para que este salga de equilibrio. Sustituyendo estas cantidades en A.1 y A.2 y eliminando términos de segundo orden resultan:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (A.3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0 \quad (A.4)$$

Si se hace la derivada parcial respecto del tiempo de A.3, la derivada parcial respecto de x de A.4 y se restan las ecuaciones resultantes, se obtiene una expresión para el cambio de la densidad como sigue:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} = 0 \quad (A.5)$$

Donde se ha definido:

$$c = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s^{1/2}$$

Esta es la ecuación de onda en una dimensión expresada para la densidad. Se puede obtener una ecuación para la presión de manera análoga a la que se acaba de describir, pero no es necesario, pues como se verá a continuación, la ecuación de la energía que da una relación entre presión y densidad.

La solución de esta ecuación es una función de onda con velocidad c , que se propaga en cualquier sentido de x . A la cantidad dada por a se llama la velocidad del sonido. Esta toma diferentes formas dependiendo de la ecuación de la energía que se use. Hay dos casos en los cuales se simplifican mucho estas expresiones.

Haciendo algunas suposiciones, es posible introducir la ecuación de la energía de dos maneras alternativas. En el caso de un gas adiabático, la ecuación de energía es:

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

con $\gamma = c_p/c_v$ una cantidad adimensional que es la razón entre coeficientes de capacidad calorífica a volumen y presión constante respectivamente. Entonces la velocidad del sonido para un gas adiabático resulta:

$$c_a = \left(\frac{\gamma k T}{\mu m_H} \right)^{1/2} \quad (A.6)$$

con k la constante de Boltzmann, y μm_H la masa promedio por partícula.

En el caso de un gas isotérmico ($T=T_0$) la ecuación de energía es:

$$P = \rho \left(\frac{k T_0}{\mu m_H} \right)^{1/2}$$

y con esta, la velocidad del sonido para un gas isotérmico es:

$$c_1 = \left(\frac{kT_0}{\mu_H} \right)^{1/2} = \text{constante} \quad (A.7)$$

En ambos casos c es la velocidad con la que se propaga naturalmente una perturbación en un gas. Esta velocidad depende directamente de la temperatura, e inversamente de la densidad. Del análisis anterior se ve que si un fluido sufre una perturbación pequeña de su densidad, el resultado es una onda de compresión (o rarefacción) cuya velocidad está relacionada con la energía del fluido. Dicha velocidad es la velocidad característica o natural con la cual se propaga una perturbación en un medio dado.

A.2 Ondas de Choque

Cuando se pide que la perturbación sea pequeña en las ondas sonoras se esta imponiendo, en realidad, que el gradiente en las cantidades como presión y temperatura sea pequeño. Esto asegura que el cambio de las variables del fluido sea reversible. Este tipo de fenómeno se puede describir completamente con ecuaciones de conservación en forma diferencial como las que acabamos de ver. Sin embargo en muchas ocasiones se dan cambios bruscos (como sucede en explosiones) que no son reversibles. En este caso las variables sufren cambios que son mayores que su magnitud, y estos cambios se dan de manera abrupta. Ahora ya no sirven las mismas ecuaciones, puesto que el fluido no regresa a su estado inicial, sino que queda fuera de equilibrio. A este fenómeno se le llama onda de choque.

Representar matemáticamente un cambio irreversible así es complicado. Afortunadamente se encuentra que el ancho de la zona en que se dan los cambios es despreciable (del orden de un camino libre medio), lo cual permite aproximar esta zona como una superficie de discontinuidad. Este tratamiento es más sencillo. Solamente hace falta que haya conservación de masa, momento

y energía a través de esta superficie para poder escribir una relación entre estas cantidades a ambos lados de la discontinuidad. Antes y después de este punto se utilizan ecuaciones diferenciales de primer orden, pues ahí los cambios son graduales.

Las ondas de choque se dan cuando un fluido sufre una perturbación de P o p a una velocidad relativa supersónica. En este caso el fluido es incapaz de reaccionar de manera suave al cambio y sufre cambios abruptos que lo sacan de equilibrio. Un ejemplo de esto es un gas dentro de un cilindro, que tiene una velocidad constante mayor que la velocidad del sonido que lo caracteriza y que se encuentra repentinamente con una pared. La primera parte del gas que toca la pared se debe frenar completamente. Como viene más rápido que la velocidad con la cual es capaz de avisarle al gas que viene detrás, lo que sigue también se entera del cambio de manera repentina. Como el gas no tiene para donde ir, se va acumulando contra la pared, y la superficie sobre la cual se frena el gas se aleja de la pared. Visto desde un sistema de referencia sobre esta superficie (de aquí en adelante el sistema siempre estará sobre el frente de choque), al pasar el gas, su velocidad baja, su densidad sube y su temperatura también sube. Estos cambios, como ya se dijo, son grandes, y dejan al gas fuera de equilibrio térmico. En la zona detrás de la discontinuidad el gas procura regresar al equilibrio por medio de nuevos cambios en sus variables. En particular, el gas se enfría por medio de radiación.

Al conjunto de todos estos cambios se llama onda de choque. Se divide en tres zonas para su estudio. Tiene una zona que precede al choque en la cual hay fotoionización debida al enfriamiento detrás de la discontinuidad. La discontinuidad se llama frente de choque. La zona en que el gas regresa al equilibrio se llama zona de relajamiento. A continuación se explican las tres zonas. En la figura A.1 se indican estas zonas, así como los cambios de las

variables del gas en cada una.

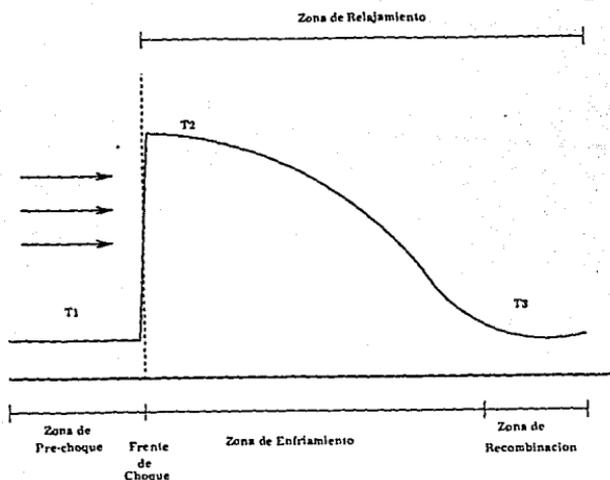


Figura A.1 Estructura completa de una onda de choque. Se muestran solamente los cambios en la variable temperatura.

La zona de prechoque (a veces llamado precursor del choque) está formada por el gas que aun no llega al frente de choque. Este gas es fotoionizado por la radiación que emite el gas ya chocado al enfriarse. Como generalmente este gas suele ser neutro, la región de fotoionización se puede extender a grandes distancias. La emisión debida a la recombinación subsecuente es mucho mas débil que aquella que aparece detrás del choque y es difícil distinguirla (Raga 1985).

El frente de choque es una definición matemática de una zona muy pequeña en la cual se dan cambios grandes de las variables del gas. Se le aproxima por una superficie de discontinuidad. Se pide que la masa, el momento y la energía se conserven a través de esta superficie, y las relaciones resultantes tienen su forma más sencilla si se toma el sistema de referencia

sobre el frente de choque. Tomando esto en cuenta, así como las suposiciones hechas en la sección A.1, las ecuaciones de conservación toman la siguiente forma:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (\text{masa}) \quad , \quad (\text{A.8})$$

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (\text{momento}) \quad , \quad (\text{A.9})$$

$$u_1^2 + w_1 = u_2^2 + w_2 \quad (\text{energía}) \quad , \quad (\text{A.10})$$

donde:

$$w = \frac{\gamma P}{\gamma - 1 \rho}$$

u es la velocidad, ρ la densidad, P la presión y las cantidades con subíndice 1 son antes del frente de choque y las de subíndice 2 son después del choque.

Estas tres ecuaciones, junto con la ecuación de estado del gas ideal forman un sistema cuya solución son las relaciones que indican el cambio de las variables termodinámicas a través del frente de choque. Se llaman las relaciones Rankine-Hugoniot y son:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{(\gamma + 1) + (\gamma - 1) M_1^2} \quad , \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma + 1) + 2\gamma (M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1)} \quad , \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[(\gamma + 1) + 2\gamma (M_1^2 - 1)] [(\gamma + 1) + (\gamma - 1) (M_1^2 - 1)]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad (\text{A.13})$$

Obsérvese que en todos los casos, el cambio que van a sufrir las variables depende solamente de la variable M_1 . Aquí se define $M_1 = \frac{v_1}{c_1}$ donde c_1 es la velocidad del sonido adiabática del gas antes de atravesar el frente de choque. En general $M = \frac{v}{c}$ se le llama el número de Mach. Cuando $M < 1$ se tiene el caso subsónico, mientras que si $M > 1$ se trata de un caso supersónico. Entre mayor sea M , mas grandes serán los cambios que sufre el gas a través de un choque. Se llama choque fuerte cuando $M \gg 1$ y débil si $M \approx 1$.

Las relaciones Rankine-Hugoniot se simplifican considerablemente para choques fuertes. Esto se logra tomando el límite cuando $M \rightarrow \infty$ y resulta:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (A.14)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \quad (A.15)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} M_1^2 \quad (A.16)$$

Es interesante notar que el salto de densidad tiene un límite, mientras que los de presión y temperatura dependen del número de Mach. Si tomamos $\gamma = \frac{5}{3}$ (gas monoatómico), entonces $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4$. Esto es, que un choque fuerte ($M \gg 1$) en un gas ideal monoatómico comprime al gas a cuatro veces la densidad que tenía antes.

Cuando el gas pasa el frente de choque, queda fuera de equilibrio térmico y de ionización. Este equilibrio tiende a reestablecerse en la zona de relajamiento. Los procesos físicos que caracterizan esta región son

ionización, excitación colisional y recombinación. Todos ellos son inelásticos, por lo cual la temperatura del gas disminuye conforme el gas se aleja del frente de choque. Detrás del choque la velocidad resultante es subsónica, por lo cual la presión permanece aproximadamente constante. Puesto que la temperatura baja, para que la presión se mantenga constante, la densidad debe aumentar.

Una vez más se pueden expresar las ecuaciones de conservación. En este caso se pide que haya conservación en las cantidades antes del choque, y las expresiones resultan:

$$\rho_1 u_1 = \rho_3 u_3 \quad (A.18)$$

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_3 + \rho_3 u_3^2 \quad (A.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_3 u_3 \left(\frac{1}{2} u_3^2 + w_3 \right) \right) = -Q \quad (A.20)$$

donde las cantidades con subíndice 3 se refieren a cualquier parte de la zona de relajamiento, y Q es el enfriamiento neto por radiación. Para ver qué pasa con la energía es necesario integrar la ecuación A.20 desde justo atrás del frente de choque hasta el punto que interesa.

Un caso particular de choques son los choques isotérmicos. Estos son choques al final de los cuales la temperatura toma el mismo valor que la inicial. En este caso la ecuación de conservación de energía se reduce a :

$$T_1 = T_3 \quad (A.21)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones A.18, A.19 y A.21 junto con la ecuación de estado del gas ideal se encuentra que:

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_3} = \gamma M_1^2 \quad (A.22)$$

Esta relación indica que en un choque isotérmico, la compresión puede ser muy grande si el flujo es muy supersónico.

Hay algunas definiciones que es útil hacer, puesto que se van a utilizar frecuentemente en el presente trabajo. A continuación se revisan.

Se define velocidad de choque como la componente de la velocidad (relativa, ya que el sistema de referencia esta sobre el frente de choque) que es normal a la superficie de choque. Hasta este momento se ha tratado con un choque que es normal al flujo. Esto implica que la velocidad del flujo y la velocidad de choque son lo mismo. En este caso toda la velocidad sufre un cambio (según la relación R-H correspondiente). Este es el caso más sencillo, sin embargo es mucho más común que el choque presente un cierto ángulo respecto de la dirección de flujo. A este se le llama un choque oblicuo. En un choque oblicuo el salto solamente será sentido por la componente de la velocidad que sea normal al choque. La componente tangencial permanece igual. Para tratar ondas de choque oblicuas, basta conocer la componente normal de la velocidad. Esta es ahora la que se utiliza en las relaciones A.9 a A.11). En las relaciones Rankine-Hugoniot no aparece directamente la velocidad, pero como $M=u/c$, en estas se toma una nueva $M = (u \text{ sen } \theta)/c$. La figura A.2 muestra el efecto de un choque oblicuo sobre la velocidad de un flujo.

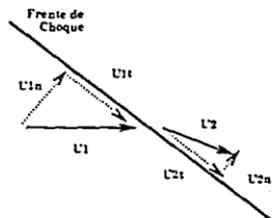


Figura A.2 Efecto de una onda de choque oblicua sobre la velocidad. La componente normal U_n disminuye y la tangencial U_t permanece igual. El efecto neto es una desviación de la dirección de la velocidad.

EL PROGRAMA STATJETNA

El programa con el cual se implementó el método numérico utilizado en este trabajo fue escrito por el Dr. Alejandro Raga del CITA en Toronto. Este programa utiliza un método de integración numérica, por diferencias finitas, con valores a la frontera que resuelve intrínsecamente ondas de choque, llamado el Método de MacCormack. Está escrito en el lenguaje Fortran y fue implementado en las computadoras MicroVax 2000 y SUN 4/300 para este trabajo. La estructura y funcionamiento del programa se describen con detalle a continuación. Los datos obtenidos con este programa se graficaron con el paquete Supermongo (escrito por P. Monger y R. Lupton), implementado también la SUN y en la VAX.

B.1 El Método MacCormack

El algoritmo con que se integraron las ecuaciones de la hidrodinámica que modelan los chorros estelares en este trabajo se llama el Método de MacCormack. La aplicación particular que se utilizó aquí está escrita para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas en dos dimensiones, y se extrajo del libro de Anderson, Tannehill y Pletcher (1984). El Método MacCormack sirve para integrar ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de primer orden. Es un método de diferencias finitas que consiste de dos pasos (predictor-corrector). Es especialmente útil para el presente problema pues

resuelve los choques que puedan aparecer en el flujo sin tener que hacer ningun tratamiento especial("shock trapping method"). Esto significa que tiene una viscosidad artificial intrínseca que tiene el efecto de estirar la discontinuidad del choque a que abarque varios puntos de la rejilla, haciendo así integrable el choque. Perteneces al grupo de métodos llamados de integración hacia adelante ("marching methods"), lo cual significa que solamente utiliza los valores contiguos justo anteriores para calcular el valor de una función en un punto dado.

Los métodos de diferencias finitas se utilizan para resolver EDP. El primer paso para aplicar este tipo de método es sustituir el dominio del problema (que es continuo) por una rejilla finita. Es decir, si se tiene una función $U(x,y)$ con dominio $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$; se sustituye el dominio de U con $U(x',y')$. Aquí $x'=i\Delta x$ y $y'=j\Delta y$; con i, j números enteros y $\Delta x, \Delta y < 1$ de tal manera que seguimos teniendo $0 \leq x' \leq 1$ y $0 \leq y' \leq 1$. Una forma sencilla de notación que se utiliza es: $U_{i,j+1}$, en función del valor precedente. Lo siguiente que es necesario es sustituir la derivada con una diferencia finita. Recordando la definición de la derivada parcial de $U(x,y)$ en el punto (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x_0 + \Delta x, y_0) - U(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (B.1)$$

Si U es continua en (x_0, y_0) y Δx es lo suficientemente pequeña, entonces esta es una buena aproximación de la derivada. Nótese que la expresión B.1 no es más que la expansión en serie de Taylor en la cual se han despreciado (truncado) los términos de orden mayor que uno. En este ejemplo, el valor de la derivada de U se calculó tomando la diferencia hacia adelante $(+\Delta x)$, es decir usando un valor a la derecha del punto x_0 . Se puede hacer también con diferencia hacia atrás $(-\Delta x)$.

El método MacCormack tiene dos pasos de integración. En cada paso integra la misma EDP con diferencias finitas. Primero con diferencias hacia adelante (paso predictor) y luego con diferencias hacia atrás y promediando entre ambos valores resultantes (paso corrector). Está diseñado para resolver ecuaciones del tipo de Burghes en su forma conservativa como la siguiente:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x} - \frac{\delta F_i}{\delta r} - S = 0 \quad (\text{B.2})$$

y la forma específica de los pasos es:

$$U_{1,j+1} = U_{1,j} - \frac{\Delta x}{\Delta r} (F_{1,j+1} - F_{1,j}) + \Delta x S \quad (\text{B.3})$$

Paso Predictor (diferencias hacia adelante)

$$U'_{1,j+1} = \frac{1}{2} \left(U_{1,j} + U_{1,j+1} - \frac{\Delta x}{\Delta r} (F'_{1+1,j} - F'_{1+1,j-1}) \right) \quad (\text{B.4})$$

Paso Corrector (diferencias hacia atrás)

B.2 El Programa

Para integrar las ecuaciones del modelo con el método MacCormack como se ha descrito, se tiene que aproximar el dominio del problema mediante una rejilla. Primero se redujo a dos dimensiones simetría cilíndrica. En este caso, la rejilla será rectangular, con un lado el radio del chorro (r), y el otro lado el largo del chorro (x). La posición $r=0$ corresponde al centro del chorro, y aquí se impone una condición de reflexión. Es necesario que las ecuaciones se puedan expresar en la forma de la EDP B.2. Puesto que las ecuaciones 2.1-2.5 ya están escritas en forma conservativa, es sencillo determinar los valores de los términos U , F y S para cada una de ellas:

$$U1 = \rho u \qquad F1 = \rho v \qquad S1=0 \qquad (B.5)$$

$$U2 = \rho u^2 + P \qquad F2 = \rho uv \qquad S2=0 \qquad (B.6)$$

$$U3 = \rho uv \qquad F3 = \rho v^2 + P \qquad S3 = \frac{P}{r} \qquad (B.7)$$

$$U4 = u (E + P) \qquad F4 = v (E + P) \qquad S4=S \qquad (B.8)$$

$$U5 = n_{HII} u \qquad F5 = n_{HII} v \qquad S5=L \qquad (B.9)$$

Las variables u y v son las velocidades en la dirección x y r respectivamente. E es la energía por unidad de volumen. P es la presión y n_{HII} la densidad de partículas de hidrógeno que están ionizadas. S es la función fuente de energía y L la función fuente de partículas ionizadas. Es importante notar aquí que los términos U_i y F_i han quedado completamente en función de las variables ρ, v, u y P . Se deben dar los valores para las variables del gas (P, T, ρ, V , etc) en la posición $x=0$ a todo lo ancho de la rejilla (condición inicial). Para todas las variables que requiere el programa, el perfil de la variable es de escalón, es decir que tiene un valor constante a todo lo ancho del chorro, y otro valor constante diferente en la zona del medio ambiente. El valor de la fracción de ionización al inicio se calcula suponiendo que el gas del chorro se encuentra en equilibrio

Hechas todas estas consideraciones, y suponiendo que se conocen los valores iniciales (en el punto de inyección del chorro) de las variables del flujo ($r, \rho, T, P, u, v, n_{HII}, \dots$), se pueden integrar las ecuaciones sobre toda la rejilla obteniendo una descripción del comportamiento de las variables en cada punto. La forma específica en que esto se hace se describe en la siguiente sección.

B.3 Estructura del Programa

El algoritmo de este programa toma los valores ρ_0, u_0, v_0, T_0 , y P_0 . Con ellas calcula $F10-F50$ y $U10-U50$. Enseguida entra en un ciclo en el cual usa

los j -ésimos valores de las U 's para calcular los $j+1$. Hecho esto obtiene las variables del gas y las F 's y entra en un nuevo ciclo.

La estructura del programa aparecè en la Figura B.1. Este es un diagrama de flujo, que indica cuales rutinas se corren y en que orden. Aquí vemos que se divide en dos partes. La primera parte tiene como función inicializar algunas constantes del flujo y todos los valores del chorro a lo largo de la columna número uno, mencionada en la sección 2. La segunda parte es el ciclo de integración. Este utiliza el método predictor-corrector para ir llenando los cuadritos de la rejilla definida al comienzo.

La explicación de qué es lo que hace cada una de las rutinas se da a continuación. Por simplicidad se ennumeran en orden de aparición según la Figura B.1.

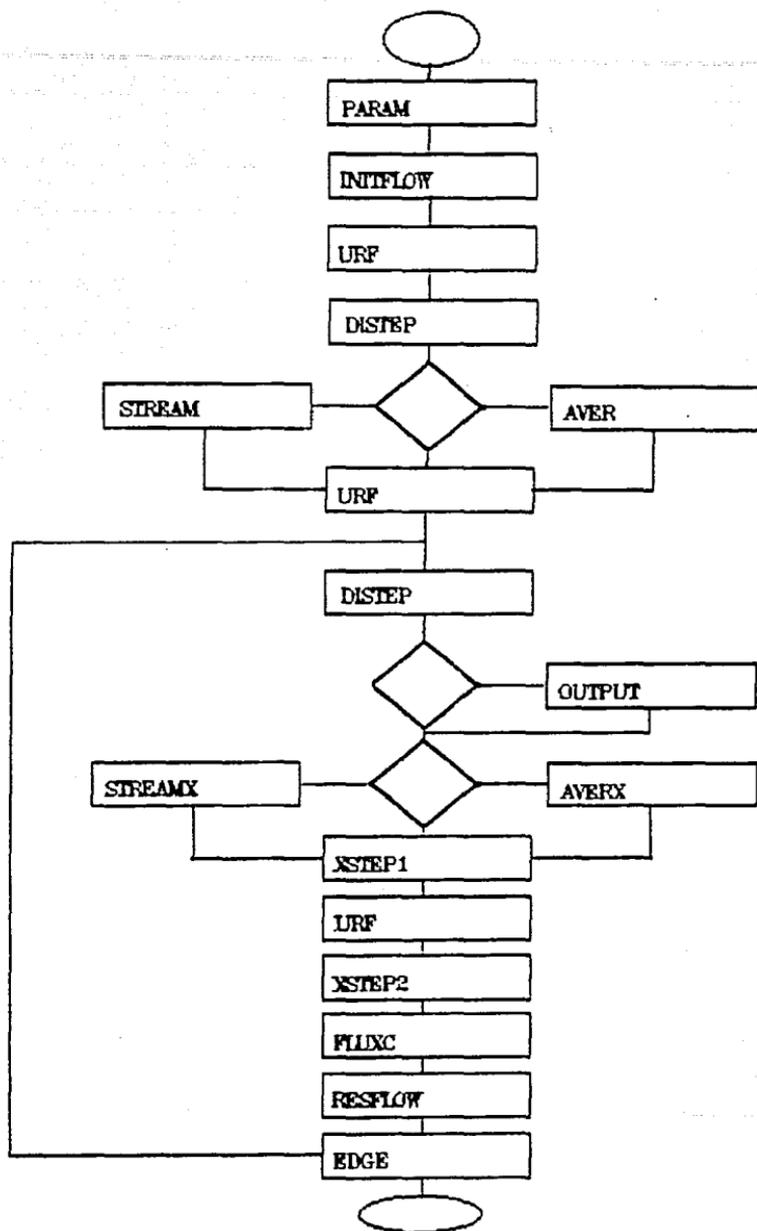


Figura B.1 Diagrama de Flujo del programa Statjet. Las figuras ovaladas indican el comienzo y el final del programa. Las figuras de rombo marcan los lugares en que existen varios posibles caminos.

PARAM: lee los parámetros iniciales del chorro. Estos son número de puntos de integración en x , dimensión máxima en la dirección radial, radio inicial, razón entre la presión del chorro y la del medio circundante, densidad de partícula del chorro, temperatura, fracción de ionización y ángulo inicial de dispersión. En la columna número uno, el perfil de todas las variables es el de un escalón, es decir que fuera del chorro la variable vale cierta constante y dentro vale otra constante que puede (como es en general) ser diferente. Asimismo permite al usuario escoger una variable con la cual quiere escribir una imagen. Tiene la posibilidad de usar un sistema de coordenadas cilíndrico o cartesiano, así como de hacer cálculos para gas adiabático (sin enfriamiento por radiación) o no-adiabático (con enfriamiento por radiación). Abre los archivos de escritura del programa. Hay tres formas de escribir los datos. Se escriben los valores de las variables que nos interesan a lo largo de una línea de flujo, o bien a lo largo de varias líneas de flujo. Además, se pueden escribir las variables como si se viera una sola raya sin resolución espacial. Este caso es interesante porque en muchas de las observaciones sucede que no se tiene resolución espacial, y de esta forma se puede comparar lo observado de alguna forma con el código numérico.

INITFLOW: inicializa los valores del flujo tanto dentro como fuera del chorro (primera columna). Primero calcula presiones, densidades, temperaturas y fracciones de ionización. Luego, con estos valores y los que leyó de entrada calcula el valor de las U 's que se ennumeran en la sección B.2.

URF: una vez calculados los flujos, los decodifica para obtener los valores de velocidad (en ambas direcciones), densidad, presión, temperatura y fracción de ionización. Para el caso de un gas no-adiabático, calcula además las funciones fuente de ionización y energía. Con todos estos valores ahora arma las F 's tal como se expresan en la sección 2.

Esta rutina llama a su vez a tres rutinas más. La primera de ellas es TEMP. Esta rutina es simplemente una función que calcula la temperatura de un punto en particular dados su densidad y presión. Utiliza la relación para gasideal:

$$T = \frac{P}{nk} \quad (B.10)$$

RATE es otra de las sub-rutinas usadas por URF. Lo que esta hace es calcular la tasa de ionización del hidrógeno y la pérdida de energía. Finalmente ALOSS usa una expresión analítica de la función de enfriamiento de un gas no-adiabático para calcular el valor de la pérdida de energía. Esta rutina tiene además una corrección que la hace mas precisa. El código elaborado por el Dr. Luc Binette (también del CITA) hace algo semejante a lo que éste, pero toma en cuenta a todos los elementos (en vez de sólo H y He). Lo que se hizo fue comparar el enfriamiento dado por ambos códigos para varias temperaturas alrededor de las que nos interesan (que son alrededor de 10^4K) y a cada una de ellas calcularle un coeficiente de corrección. Con esto, se evita computar con el código complicado (y por lo tanto tardado) y se tiene una buena aproximación del valor de la pérdida de energía debida a radiación.

DISTEP: calcula el tamaño del paso de integración en la dirección x. Este paso tiene que ser lo suficientemente pequeño para que se tenga una buena resolución de las variables de interés. Para lograr esto es necesario ir sensando la forma en que estas cambian. No es necesario sensar todas estas variables. Basta con cuidar la velocidad, la pérdida de energía por radiación y la ionización. Para todos los casos, lo que se hace es encontrar una distancia característica. Esta es el producto de el tiempo característico y la velocidad del flujo. Un tiempo característico es la razón entre la cantidad medida (por ejemplo la energía) y el cambio de ésta por unidad de tiempo. Escoger una distancia menor o igual a esta distancia característica nos

asegura que la cantidad estudiada va a cambiar una cantidad razonable en este intervalo.

STREAM: inicializa la posición de la (o las) líneas de flujo sobre las cuales interesa conocer los valores de las variables del flujo. En el caso de que sólo se quiera una línea, se puede escoger en que posición inicial se coloca, así como qué volumen de material a su alrededor se va a utilizar para calcular las variables de escritura. Cuando se quieren los valores sobre varias líneas de flujo, estas se colocan a lo ancho de todo el chorro. En nuestro caso todas las corridas de varias líneas están hechas con cinco. Estas se distribuyen en el chorro de manera que hay mas líneas cercanas al eje de simetría, que es la zona donde ocurren mayores cambios..

AVER: esta rutina inicializa los valores para escritura de los valores promedio de las siguientes variables del chorro: u, v, ρ , P, fh (fracción de ionización), T, S (emisión del azufre una vez ionizado), H α (emisión de hidrógeno en la serie de Balmer), y los flujos de masa, momento y energía. Mas que un promedio, lo que aquí se obtiene es la integración de la variable de interés a todo lo ancho del chorro, para cada punto a lo largo del chorro. Esto se logra con la función AINTEG. Lo que hace esta función es calcular la sumatoria:

$$\int_{r=0}^{r_{\max}} F(x,r) r dr \approx \int_0^{r_{\max}} F r dr \quad (B.15)$$

Es importante notar que se hacen las integrales de la intensidad de emisión de las líneas H α y [SII]. Para ello se usan las funciones HALPHA y SII. HALPHA encuentra la emisión en la línea H α como la suma de la energía emitida en recombinación y aquella proveniente de excitaciones colisionales. SII calcula la emisión combinada de las líneas de azufre [SII] en 6717 y 6731

angstroms.

OUTPUT: esta es la rutina que se encarga de escribir en forma binaria la imagen de la variable que se haya escogido. Esta imagen medirá n_x por n_y puntos y es interesante graficar los isocontornos que se forman para la variable dada.

STREAMX: para las líneas de flujo escogidas en **STREAM** calcula y escribe los valores de las variables del chorro cada cinco ciclos.

AVERX: aquí se calculan los valores de las intergales mencionadas en **AVER** con cada ciclo de integración.

XSTEP1: este es el paso predictor que utiliza el valor de la variable de la columna anterior en un punto contiguo para calcular el valor en el punto de interés (forward). Tiene la forma siguiente (como la ecn. B.3):

$$U_P = U - \frac{\Delta x}{\Delta y} \left(F_{J+1} - F_J \right) + \Delta x \left(S_0 - S \right) \quad (B.16)$$

XSTEP2: es el paso corrector. Este consiste de sacar el promedio entre el valor que ya se calculó en **XSTEP1** y el que se obtiene usando ahora el valor en el punto anterior (izquierdo). La expresión que hace esto es (como B.4):

$$U_P = \left(U + U_P - \frac{\Delta x}{\Delta y} (F_J - F_{J-1}) + \Delta x (S_0 - S) \right) \quad (B.17)$$

FLUX: aquí se "planchan" los valores calculados. Esto significa que se suavisan las diferencias de los valores de las variables entre los puntos contiguos en la dirección radial. Es conveniente hacer esto porque disminuye el error numérico. La forma en que se logra esto es:

$$U_r = \frac{3}{4} U_r + \frac{1}{8} U_{r+1} + \frac{1}{8} U_{r-1} \quad (\text{B.18})$$

RESFLOW: se recorre una columna para adelante para continuar la integración.

EDGE: es la rutina que corrige los efectos de la discretización del fluido. En particular, como sólo hay 150 puntos en la dirección radial, es muy probable que el borde del chorro no caiga exactamente en uno de ellos. Por lo tanto al calcular la masa (por ejemplo) siempre va a faltar o sobrar un poco de masa. La rutina EDGE cuida de sumar o restar esta cantidad para mejorar la precisión de los resultados.

REFERENCIAS

- Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H., 1984, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, pp.272-277.
- Bridle A.H., Perley R.A., Astrophysical Jets, Reidel Publishing Company, pp 57-66.
- Bridle A.H., Perley R.A., Ann. Rev. Astron. Astrophys., 1984, 22, 319.
- Böhm K.H., 1983, Rev.Mex.Astron.Astrof, 7, 55.
- Cantó J., 1980, Astr. and Ap., 86, 327.
- Cantó J., 1985, Cosmic Gas Dynamics, ed F.D. Kahn, p 267.
- Cantó J., Raga A., Binette L., 1989, Rev.Mex.Astron.Astrof, 17, 65.
- Chow W., Chang I., 1974, AIAA Journal, 13, 762.
- Courant R., Friedrichs K., Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers Inc.: 1958, pp305-342.
- Cox D.P., 1972, Ap. J., 178, 143.
- Dopita M.A., 1978, Ap. J. Suppl., 37, 117.
- Dyson J.E., Williams D.A., Physics of the Interstellar Medium, Manchester University Press: 1980, p106.
- Dyson J.E., 1987, IAU Symposium No. 122, p159.
- Falle, S.A., Innes D.E., and Wilson M. J., 1987, M.N.R.A.S., 225, 741.
- Fomalont E.B., Astrophysical Jets, Reidel Publishing Company, pp 37-46.
- Haro G., 1952, Ap.J., 115, 572.
- Hartigan P., Raymond J., Hartman L., 1987, Ap.J., 316, 323.
- Herbig G.H., Ap.J., 113, 697.
- Königl A., 1982, Ap. J., 261, 115.
- Landau L. D., Lifshitz E. M., Fluid Mechanics, Pergammon Press, 1980.
- Mundt R., Brugel E.W., Bürke T., 1987, Ap. J., 319, 275.
- Norman C.A., Silk J., 1979, Ap. J., 288, 197.
- Norman M.L., Smarr L., Winkler K-H A., Smith M.D., 1982, Astron. Astrophys., 113, 285.
- Osterbrook D.E., 1958, Publ. Astron. Soc. Pac., 70, 399.
- Prandtl L., 1906, Phys. Zs., 8, 23.
- Raga A.C., Cantó J., 1989, Ap. J., 344, 404.

- Raga A.C., 1989, ESO Workshop on Low Mass Star Formation, p281.
- Raga A.C., Cantó J., Binette L., 1990, Ap. J., 360, 612.
- Reipurth B., 1989, ESO Workshop on low mass star formation, p247.
- Richtmyer, Morton, Difference Methods for initial Value Problems,
Interscience Publishers, 1967.
- Rodriguez L.F., et. al., 1980, Ap. J., 235, 845.
- Schwartz, R. D. 1975, Ap. J., 195, 631.
- Schwartz R. D., 1983, Annu. Rev. Astron. Astrophys., 21, 209.
- Schwartz R. D., Dopita M. A., 1980, Ap. J., 236, 543.
- Strom K.M., Strom S.E., Grasdalen G.L., 1974, Ap.J., 187, 83.
- Von Hippel T., Bell Burnell S. J., Williams P.M., 1988, Astron.
Astrphys. Suppl., 74, 431.
- Wilson M., Falle S., 1985, M.N.R.A.S., 216, 971.