

00362
10

24

R

TESIS DE MAESTRIA
ESTABILIDAD HIDRODINAMICA DE UNA PELICULA DE FLUIDO DESCENDIENDO
SOBRE UN CILINDRO EN ROTACION

QUE PRESENTA
GERARDO RUIZ CHAVARRIA
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRIA EN CIENCIAS (FISICA)

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. LUIS ANTONIO DAVALOS OROZCO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE CIENCIAS

ABRIL DE 1991



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

RESUMEN.....	3
1.- INTRODUCCION.....	4
2.- FLUJO SOBRE UN CILINDRO EN ROTACION	
2.1 FLUJO PRINCIPAL.....	15
2.2 ADIMENSIONALIZACION DE VARIABLES.....	20
3.- FUNDAMENTOS DE LA TEORIA LINEAL DE LA ESTABILIDAD	
3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	25
3.2 ECUACION DE VELOCIDAD.....	27
3.3 GENERALIZACION DE LA ECUACION DE ORR-SOMMERFELD.....	29
3.4 CONDICION CINEMATICA.....	35
3.5 CONDICIONES DE FRONTERA.....	35
4.- APROXIMACION PARA NUMEROS DE ONDA PEQUENOS	
4.1 INTRODUCCION.....	39
4.2 DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS.....	40
4.3 SOLUCION A ORDEN CERO.....	42
4.4 SOLUCION A PRIMER ORDEN.....	49
4.5 CALCULO DEL VALOR PROPIO C_i	53
4.6 ANALISIS DE LA ESTABILIDAD.....	57
5.- APROXIMACION PARA NUMEROS DE REYNOLDS PEQUENOS	
5.1 INTRODUCCION.....	71
5.2 SOLUCION A ORDEN CERO. CASO $m \neq 0$	74
5.3 SOLUCION A ORDEN CERO. CASO $m = 0$	87
5.4 ANALISIS DE RESULTADOS.....	89
CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS.....	105

APENDICE A. IDENTIDADES MATEMATICAS. 109

REFERENCIAS. 114

RESUMEN

En esta tesis se investiga la estabilidad lineal de una película de fluido de espesor constante que fluye por un cilindro en rotación. Se consideran dos casos: escurrimiento por el interior y escurrimiento por el exterior.

En el capítulo 1 se hace una revisión de los trabajos previos sobre estabilidad de películas escurriendo en cilindros (con o sin rotación). El capítulo 2 está dedicado al cálculo de los campos de velocidad y presión de una película de ancho constante que desciende por un cilindro en rotación. En el capítulo 3 se deduce un sistema de dos ecuaciones diferenciales, que describen la evolución de perturbaciones infinitesimales aplicadas al flujo que se calculó en el capítulo 2. Considerando la dificultad de resolver analíticamente estas ecuaciones, se procedió a obtener soluciones aproximadas en dos casos: a) para perturbaciones con número de onda pequeño (capítulo 4) y b) para números de Reynolds pequeños (capítulo 5).

En líneas generales, la rotación tiene efecto estabilizador sobre una película que escurre por la pared interior del cilindro. Por el contrario, si la película escurre por el exterior, la rotación es fuente de inestabilidad.

I.-INTRODUCCION

El escurrimiento de un líquido sobre superficies verticales ha llamado la atención de numerosos investigadores en el presente siglo. Uno de los estudios pioneros lo realizó W. Nusselt en 1916; él estaba interesado en la transferencia de calor que se produce en los aparatos de condensación. Suponiendo que hay un balance entre la gravedad y la viscosidad, Nusselt deduce un perfil de velocidades semiparabólico para una película de fluido que desciende por un plano vertical.

Los datos experimentales sobre el escurrimiento de un líquido sobre una pared vertical (Krantz y Goren, 1971) muestran que el campo de velocidades es más complicado que el predicho por Nusselt: sobre la superficie libre de la película de espesor constante se forman ondulaciones. Este último detalle tiene gran importancia ya que las ondulaciones aumentan la transferencia de calor hasta en un 20% en los aparatos de condensación (Mijeev y Mijeeva, 1979). Sin embargo, la formación de ondas no siempre es deseable, por ejemplo, en el caso del recubrimiento de superficies con pinturas.

El surgimiento de una onda sobre una película de espesor constante puede interpretarse como una inestabilidad del flujo. Una película de fluido de espesor uniforme con un campo de velocidades semiparabólico es solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad; sin embargo si las perturbaciones del flujo crecen, las características del mismo se pueden modificar radicalmente.

La manera usual de investigar las inestabilidades es superponiendo una perturbación arbitraria al flujo principal no perturbado; la evolución de la perturbación se investiga con las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad.

Una de las dificultades que surgen en las investigaciones sobre estabilidad hidrodinámica -y en general en la mecánica de

fluidos- es la no linealidad de las ecuaciones fundamentales. Desafortunadamente muy pocas ecuaciones diferenciales no lineales tienen solución en términos de funciones elementales (cabe mencionar que las funciones elementales han aparecido en el estudio de problemas lineales). Esto ya era conocido por los astrónomos, que desde hace tres siglos tratan con las ecuaciones no lineales del movimiento de los planetas. Inclusive ahora no se tiene soluciones analíticas sobre la estabilidad del sistema solar. Ejemplos que conducen a plantear ecuaciones diferenciales no lineales son el movimiento de un péndulo, los modelos de crecimiento de poblaciones o las curvas de persecución de predador y presa.

Se han obtenido algunas soluciones de ecuaciones no lineales mediante transformaciones que las convierten en ecuaciones diferenciales lineales. Otra manera de abordar problemas no lineales es la de investigar el comportamiento asintótico de las soluciones cuando los términos no lineales no juegan un papel importante. Más recientemente se ha dado un gran avance con el surgimiento de las computadoras. Con ellas se han explorado las características de las soluciones de muchas ecuaciones no lineales (Davis, 1960).

Dentro de la teoría de la estabilidad, uno de los intentos exitosos por sortear las no linealidades ha sido suponer que las perturbaciones al flujo son pequeñas en comparación con los campos de velocidad y presión del flujo principal. Con esta suposición se pueden desprestigiar los términos cuadráticos de las ecuaciones de momento, y entonces queda por resolver un problema lineal. El objeto de la teoría lineal de la estabilidad es determinar si una perturbación infinitesimal arbitraria crece, decrece o se mantiene constante. Con ella no se puede saber cual es el estado final de un flujo inestable, ya que el crecimiento de las perturbaciones invalida la hipótesis que permite desprestigiar los términos cuadráticos de la ecuación de momento.

Una proporción considerable de las investigaciones sobre estabilidad hidrodinámica considera que las perturbaciones son bidimensionales, es decir, $\vec{v}(x,y) = (u,v,0)$ y $p = p(x,y)$; lo que se justifica muchas veces por el teorema de Squire. Dicho teorema establece que para calcular el número de Reynolds crítico Re_c (si $Re < Re_c$ el flujo es estable y si $Re > Re_c$ el flujo es inestable; Re es el número de Reynolds) es suficiente considerar perturbaciones bidimensionales (Drazin, 1979).

Una de las ecuaciones fundamentales de la estabilidad hidrodinámica lineal fue deducida por Arnold Sommerfeld en 1906. El supone que las perturbaciones de la velocidad y la presión se pueden expresar como el producto de una función dependiente de la coordenada y multiplicada por una exponencial compleja $\exp[ik(x-ct)]$. Con esta descomposición de la perturbación quedan por resolver únicamente ecuaciones diferenciales ordinarias, pero a cambio aparecen dos nuevos parámetros: el número de onda k y una velocidad c . Dichas cantidades pueden ser reales o complejas. La teoría lineal permite estudiar tanto estabilidad espacial como temporal. En el primer caso c es una cantidad real, mientras que k es una magnitud compleja, cuya parte imaginaria da información sobre la estabilidad del flujo. Por el contrario, en la estabilidad temporal k es real y el parámetro c es una cantidad compleja, cuya parte real es la velocidad de propagación de la perturbación, y la parte imaginaria indica si la perturbación crece o se amortigua. Algunas investigaciones (Krantz y Goren, 1971) demuestran que la estabilidad temporal es equivalente a la estabilidad espacial cuando $\text{Im}(c) \ll \text{Real}(c)$.

Dentro de la teoría lineal los parámetros del flujo principal y de la perturbación no son independientes, hay una relación entre ellos:

$$\mathcal{F}(Re, k, c, \dots) = 0, \quad (1.1)$$

de donde se puede despejar c o k , dependiendo de si se investiga estabilidad temporal o espacial.

Un procedimiento usual en teoría de la estabilidad es la introducción de una función de corriente:

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp ik(x-ct), \quad (1.2)$$

que esta relacionada con el campo de velocidad de la perturbación $\vec{v} = (u, v, 0)$ de la siguiente manera:

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Mediante la aplicación del operador rotacional sobre las ecuaciones de momento se obtiene una ecuación que ya no contiene a la presión p . Si además se utiliza la función de corriente ψ se llega a una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden que describe las perturbaciones en un flujo unidireccional (Drazin, 1979):

$$\phi'''' - k^2 \phi'' + k^4 \phi = ik \operatorname{Re} [(U-c)(\phi'' - k^2 \phi) - U' \phi], \quad (1.4)$$

siendo i el número imaginario puro, Re el número de Reynolds y U el campo de velocidades del flujo principal. Aquí ya se ha eliminado el factor común $\exp ik(x-ct)$. Esta es la ecuación de Orr-Sommerfeld en coordenadas cartesianas.

La correspondiente ecuación de Orr-Sommerfeld en coordenadas cilíndricas es la siguiente (Solorio y Sen, 1987):

$$(\mathcal{D}^2 - k^2)z\phi = ik \operatorname{Re} [(U-c)(\mathcal{D}^2 - k^2) - \mathcal{D}^2 U] \phi, \quad (1.5)$$

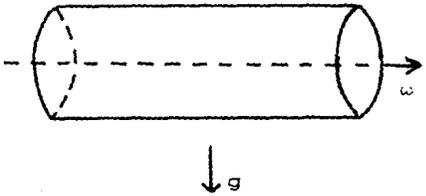
en donde

$$D^2 = r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

La ecuación 1.5 se reduce a 1.4 en el límite $r \rightarrow \infty$. Lo anterior significa que los resultados de la estabilidad en una geometría cilíndrica deben tender a los resultados de estabilidad en un plano cuando r tiende a infinito.

Una de las primeras investigaciones sobre la estabilidad del flujo sobre un cilindro se debe a Yih (1961), quien estudió la estabilidad de una película de fluido sobre un cilindro que rota sobre su eje (el eje del cilindro es perpendicular a la fuerza de gravedad, ver figura 1).

Yih considera que las perturbaciones tienen simetría axial y que la gravedad es despreciable. Colocándose en un sistema de referencia no inercial que rota con el cilindro, Yih obtiene una ecuación diferencial de sexto orden para la amplitud de la



componente radial de la velocidad; sobre su eje. El eje es perpendicular a la dirección de la gravedad. Yih obtiene una ecuación diferencial de sexto orden para la amplitud de la

$$[L - n^2 - \kappa Ra]^2 (L - n^2) U = 4n^2 Ra^2 U, \quad (1.6)$$

en donde $L \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$, $n \equiv 2\pi \frac{a}{\lambda}$, siendo a el radio del cilindro, $Ra \equiv \frac{\omega a^2}{\nu}$, ω la velocidad angular y ν la viscosidad cinemática, y que la velocidad radial se puede expresar como: $u = U(r) \exp(\kappa t) \cos(nz)$.

Mediante un método integral demuestra que las ondas viajeras siempre se amortiguan. Sin embargo, en la deducción de este resultado, ignora los efectos de ahorcamiento producidos por la tensión superficial.

El problema que resuelve Yih es el de determinar el signo de la parte imaginaria de λ (con el cual se puede conocer la estabilidad del flujo). La investigación para el caso $\text{Real}(\lambda) = 0$ (que corresponde a una superficie corrugada) se hace con métodos aproximados. Una suposición fundamental es considerar que el radio del cilindro es mucho mayor que el espesor de la capa de fluido; esto le permite desprestigiar algunos términos, quedándose finalmente con ecuaciones que son iguales a las del flujo por una pared plana.

Aun sin resolver las ecuaciones de momento y continuidad, Yih da una condición de estabilidad neutral, que es independiente del parámetro Ra ; se deduce de la condición de frontera sobre esfuerzos normales en la superficie libre, suponiendo que $\dot{\gamma} = 0$ y $p = 0$. En la superficie libre se deben equilibrar la tensión superficial con el gradiente de presión generado por la fuerza centrífuga. Con esta condición muestra que existe un intervalo de números de onda donde las perturbaciones son inestables.

Las principales limitantes de la investigación de Yih son, por un lado, que desprecia el efecto de ahorcamiento de la tensión superficial, y por el otro que sus soluciones aproximadas corresponden al problema de una película de líquido descendiendo por una pared vertical. Esto es, no se incluye el análisis de la influencia de la curvatura en la estabilidad del flujo.

En 1975 Lin y Liu presentan los resultados de una investigación teórica sobre el escurrimiento de un líquido en tubos y alambres. Las fuerzas que se toman en consideración son la gravedad, la fricción viscosa y la tensión superficial. Suponiendo que las perturbaciones se pueden expresar en la forma $\delta(r)\exp[ik(z-ct)]$, deducen una ecuación diferencial que describe el comportamiento de la superficie libre. Despreciando los términos no lineales, realizan un análisis de la estabilidad en dos casos diferentes: a) flujo de la película por la pared interior de un

tubo y b) flujo de la película por la superficie de un alambre. La condición de estabilidad se expresa en términos de dos parámetros: el número de Reynolds y el número de Weber; este último es el cociente de la tensión superficial y una presión característica. En el capítulo 2 se dará una definición precisa.

Uno de los factores fundamentales de la inestabilidad del flujo es el ahorcamiento capilar. Dicho factor es independiente del número de onda, y compite con la fuerza capilar asociada a la curvatura superficial en la dirección z . Demuestra además, que para $Re=0$, las perturbaciones con número de onda menor a $\frac{1}{\beta-1}$ son inestables (el signo más es para el flujo por un alambre y el signo menos para el flujo por un tubo). Aquí β es el cociente entre el radio del cilindro y el espesor de la película de fluido.

Poco tiempo después Krantz y Goren (1975) obtienen una solución al mismo problema, solo que con una adimensionalización diferente: suponen que las fuerzas capilares son del mismo orden de magnitud que la fuerza viscosa. Esto lo hacen para corregir algunos de los resultados de Lin y Liu cuando $Re=0$.

En el trabajo de Krantz y Goren se introduce una función de corriente y se deduce una ecuación diferencial de cuarto orden. (es la ecuación de Orr-Sommerfeld, pero hay un parámetro adicional). La solución analítica que ellos deducen se obtiene mediante un desarrollo en serie de potencias del número de onda k . A orden cero encuentran que la velocidad de fase de la onda es el doble de la velocidad del flujo en la superficie libre. A primer orden obtienen una condición de estabilidad, es decir, la parte imaginaria de c es en general distinta de cero.

Más recientemente Shlang y Sivashinsky (1982) deducen una ecuación no lineal que describe el comportamiento de la superficie libre cuando la tensión superficial es grande. Suponen que las perturbaciones son tridimensionales y las descomponen en términos de la forma: $\delta \exp[im\theta + ik(z-ct)]$. La idea de suponer una tensión

superficial grande surge del análisis de un problema similar, el de una película de líquido que escurre por una pared vertical; las inestabilidades ocurren a números de onda del orden del inverso de la raíz cuadrada del coeficiente de tensión superficial ($k \sim 1/\gamma_0$).

Despreciando los términos no lineales de la ecuación de momento, ellos resuelven una ecuación lineal. Demuestran que es posible la formación de anillos inclinados, moviéndose hacia abajo, tal como se ilustra en la figura 2. Encuentran además, que la curvatura tiene una influencia significativa sobre las perturbaciones azimutales ($m \neq 0$), y solo afectan débilmente a las ondas que se mueven hacia abajo ($m = 0$).

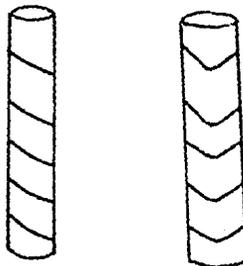


FIGURA 2.- Formación de anillos inclinados sobre una película que escurre por un cilindro.

Algunos criterios sobre la estabilidad del flujo de una película sobre un cilindro en rotación fueron reportados por Boudourides y Davis (1986). Esto se puede considerar como una continuación del trabajo de Yih de 1961 ya que se desprecian los efectos de la gravedad. Se analizan tanto el caso de un fluido viscoso, como el caso de un fluido no viscoso. En este trabajo se mencionan tres tipos de inestabilidades: centrífuga, capilar y de Rayleigh-Taylor.

Con respecto a la primera es necesario considerar que para que el flujo sea estable la magnitud del momento angular se debe incrementar con el aumento de la distancia al eje de rotación (criterio de Rayleigh, que se demostró originalmente para flujos sin una superficie libre); y además se debe satisfacer una

condición adicional en la interfase líquido-aire:

$$\pm V^2 - Sck^2 - 1) \geq 0. \quad (1.7)$$

El signo más es para el flujo por el interior y el signo menos es para el flujo por el exterior del cilindro. V es la velocidad de cuerpo rígido del fluido en la superficie libre (no hay velocidad hacia abajo; el líquido rota junto con el cilindro); S es el cociente entre la tensión superficial y la fuerza centrífuga, y k es el número de onda. De la ecuación 1.7 se concluye que para el flujo por el interior, las inestabilidades capilares se pueden eliminar aumentando la velocidad angular de rotación. Sin embargo, por el exterior tanto el ahorcamiento capilar, como la fuerza centrífuga son fuente de inestabilidades.

Boudourides y Davis indican que las inestabilidades capilares se producen en las interfases circulares por cambios de presión debidos a la tensión superficial. En una perturbación con simetría axial, las perturbaciones son inestables si poseen una longitud de onda mayor a la circunferencia de la superficie libre no perturbada. Este resultado ya lo habían reportado previamente otros autores (Lin y Liu, 1975; Krantz y Goren, 1976).

Las inestabilidades de Rayleigh-Taylor ocurren en una interfase entre dos fluidos de diferente densidad, cuando el fluido de mayor densidad se encuentra encima del más ligero. En el contexto del flujo en rotación el papel de la gravedad lo juega la fuerza centrífuga. Entonces, el flujo será inestable si el fluido más ligero rodea al de mayor densidad. Es evidente que este tipo de inestabilidad sólo aparece si hay estratificación del fluido que ocurre por el cilindro.

Recientemente, se reportaron (Hu y Joseph, 1989) los resultados de un análisis numérico de la estabilidad del flujo de Hagen-Poiseuille estratificado que se mueve por el interior de un

tubo en rotación. El flujo está formado por dos capas concéntricas de diferente densidad. Hu y Joseph analizan la estabilidad frente a perturbaciones tridimensionales de la forma:

$$\delta(r)\exp[im\theta + ik(z-ct)].$$

Se hizo un estudio de tres casos: a) ambos fluidos tienen la misma densidad. b) el fluido del centro es el de menor densidad y c) el fluido del centro es el de mayor densidad.

En el caso a) concluyen que a números de Reynolds pequeños las perturbaciones de simetría axial ($m = 0$) son las más inestables (debido primordialmente a efectos de tensión superficial). Sin embargo, la rotación puede estabilizar el flujo. Un aumento en el número de Reynolds hace que el modo más inestable (o el menos estable) ya no sea $m=0$, sino $m=1$. El análisis numérico también da resultados para el caso b). Si el fluido del centro es el más ligero, entonces la rotación juega un papel estabilizador; lo anterior está en concordancia con el criterio de Rayleigh-Taylor enunciado en el artículo de Boudourides y Davis. Finalmente para el caso c) se encuentra que el flujo es siempre inestable. Un resultado que también era esperado de acuerdo a las predicciones de Boudourides y Davis.

Una investigación exhaustiva sobre el escurrimiento de una capa de líquido por el exterior de un cilindro -con especial énfasis en la influencia de la curvatura - fue presentada por Solorio y Sen (1987). En dicho trabajo se investiga teóricamente la estabilidad sin las restricciones de los métodos analíticos: Solorio y Sen hacen un análisis numérico de la ecuación de Orr-Sommerfeld, obteniendo resultados que concuerdan con algunas soluciones analíticas reportadas con anterioridad (Lin y Liu, 1975; Krantz y Goren, 1976). También se comparan los resultados con los casos límites de un chorro circular y una placa plana.

obteniendo una concordancia satisfactoria.

La investigación de Solorio y Sen incluye también una parte experimental. Ellos utilizan tubos de diámetros que van de 1 mm. hasta los 2.5 cm. Los líquidos que escurren por los tubos son agua, así como mezclas de aceite SAE40 con diesel. Las cantidades que ellos determinan experimentalmente son la velocidad de fase de las ondas que aparecen en la película de fluido y el número de onda. La comparación entre el trabajo teórico y el experimental se hace con base en una hipótesis: se supone que las ondas que se forman sobre el líquido son las que corresponden al máximo crecimiento en la teoría lineal. Es técnicamente imposible medir la razón de crecimiento de una perturbación infinitesimal, por lo tanto, la comprobación de un cálculo de teoría lineal no se realiza midiendo experimentalmente el valor de c , sino de manera indirecta. Una de ellas se acaba de mencionar; otra podría ser comparando los valores teórico y experimental del número de Reynolds crítico.

En el presente trabajo se analiza la estabilidad de una película de fluido que desciende por la superficie (interior o exterior) de un cilindro en rotación. La originalidad de esta investigación radica en que no se desprecian ni la curvatura, ni la fuerza de gravedad, como se hacía en algunos de los trabajos previamente reseñados. Todos los resultados que se presentan aquí son analíticos; se han obtenido considerando la acción conjunta de la rotación, la tensión superficial, la gravedad y la viscosidad. Las perturbaciones al flujo son tridimensionales, tal como las expresaron Hu y Joseph en su artículo de 1989.

Las aplicaciones de esta investigación se pueden encontrar en aparatos de condensación, en dispositivos de transferencia de calor y masa, en el recubrimiento de superficies con pintura y en la producción de papel, por mencionar algunas.

2.-FLUJO SOBRE UN CILINDRO EN ROTACION

2.1.-FLUJO PRINCIPAL

En esta sección se usarán las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad para calcular el perfil de velocidades de una película de fluido que desciende por un cilindro que rota con una velocidad angular constante y antiparalela a la gravedad. El problema se abordará usando un sistema de referencia no inercial que rota con el cilindro. Por este motivo las ecuaciones de movimiento incluyen las siguientes fuerzas:

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) la fuerza de gravedad | $\rho \vec{g}$. |
| b) la fuerza centrífuga | $-\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. |
| c) la fuerza de Coriolis | $-2\rho (\vec{\omega} \times \vec{V})$. |
| d) la fuerza de fricción viscosa | $\mu \nabla^2 \vec{V}$. |

donde \vec{V} es la velocidad, $\vec{\omega}$ es la velocidad angular, ρ es la densidad del fluido, \vec{g} la aceleración de la gravedad, \vec{r} el vector de posición y μ la viscosidad dinámica. En la figura 3 se da una descripción gráfica del problema que se está tratando.

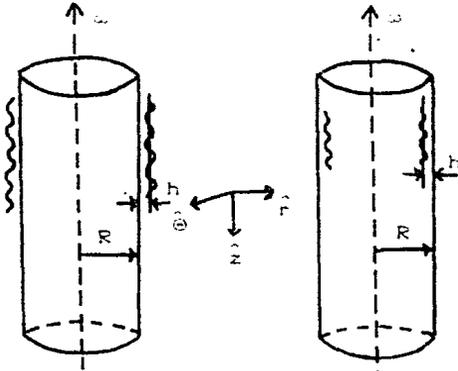


FIGURA 3.- Película de fluido descendiendo por un cilindro en rotación. Se indican las direcciones de la velocidad angular, la gravedad, y se muestra el sistema de coordenadas.

Se estudiará el escurrimiento de una capa de líquido de espesor constante que desciende por el interior o el exterior de un cilindro en rotación. Por tanto, el flujo estará confinado entre dos radios diferentes: R y $R+h$, para el flujo del líquido por el exterior y, R y $R-h$, para el

escurrimiento por las paredes internas del cilindro. R es el radio del cilindro y h es el espesor de la capa. Tomando en cuenta la geometría del flujo, lo más adecuado es utilizar coordenadas cilíndricas.

Se ha seleccionado un sistema de coordenadas cuyo eje z es paralelo a la fuerza de la gravedad. Además, los vectores unitarios \hat{e} y \hat{r} están orientados como se indica en la figura 3, de manera que se tiene un sistema de coordenadas derecho. De acuerdo a dicha elección, los vectores $\vec{\omega}$ y \vec{g} se expresan de la siguiente manera:

$$\vec{\omega} = -\omega\hat{z},$$

$$\vec{g} = g\hat{z}.$$

siendo ω y g las magnitudes de la velocidad angular y de la aceleración de la gravedad, respectivamente.

Los campos de velocidad y de presión (P) del flujo principal satisfacen la ecuación de Navier-Stokes (Sommerfeld, 1950):

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \nu \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) + 2\rho \vec{\omega} \times \vec{v} + \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.1)$$

donde P es la presión.

Además, para un fluido incompresible la divergencia del campo de velocidad es cero:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.2)$$

Por otra parte, se supondrá que el flujo ocurre en un cilindro cuya longitud es mucho mayor que su radio, y por tal razón, se pueden despreciar los efectos de borde. De lo anterior

se desprende que tanto \vec{v} como P no dependen de la coordenada z. Adicionalmente, se considera que el flujo tiene una componente radial de velocidad nula, es decir, $\vec{v} = (0, V, W)$. Finalmente, supondremos que el flujo principal no depende de la coordenada θ ya que todos los puntos sobre un cilindro con $r = \text{cte}$ y $z = \text{cte}$ son equivalentes

Usando todas las hipótesis hechas en el párrafo precedente concluimos que el campo de velocidad solo depende de r y que:

$$\vec{v} = V(r)\hat{\theta} + W(r)\hat{z}. \quad (2.3)$$

Las 3 ecuaciones escalares de momento, que se obtienen al sustituir 2.3 en la ecuación de Navier-Stokes, son:

$$-\rho \frac{Vz}{r} = -\frac{dP}{dr} + \rho(\omega^2 r - 2\omega V), \quad (2.4)$$

$$0 = \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right), \quad (2.5)$$

$$0 = \rho g - \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right). \quad (2.6)$$

Se resuelve primero la ecuación 2.5, para la velocidad en la dirección azimutal. La solución de la ecuación diferencial es del tipo r^n , donde n es un exponente aún desconocido. Entonces, la búsqueda de la solución de la ecuación diferencial se reduce a determinar las raíces de una ecuación algebraica de orden 2, que se obtiene al sustituir $V = r^n$ en la ecuación 2.5:

$$(n-1)^2 + 2(n-1) = 0. \quad (2.7)$$

Las soluciones de la ecuación algebraica son -1 y 1. Luego, la solución general de V es:

$$V = \frac{A}{r} + Br. \quad (2.8)$$

La componente de velocidad V satisface 2 condiciones de frontera. La primera es que V se anula en la superficie del cilindro:

$$\frac{A}{r} + Br \Big|_{r=R} = 0. \quad (2.9)$$

La otra es la anulación del esfuerzo tangencial $\sigma_{r\theta}$ en la superficie libre:

$$\mu \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \Big|_{r=R+qh} = 0,$$

o bien:

$$-\frac{2}{r^2} A \Big|_{r=R+qh} = 0, \quad (2.10)$$

en donde se ha introducido un parametro q para diferenciar los casos del flujo por el exterior ($q=1$) y el flujo por el interior del cilindro ($q=-1$). La solución a este sistema de ecuaciones lineales es $A=B=C$. Por lo tanto:

$$V = 0. \quad (2.11)$$

La anulación de la componente azimutal de la velocidad elimina la influencia de la fuerza de Coriolis en el flujo principal. El término de Coriolis sólo aparece en la ecuación 2.4, cuya solución determina el campo de presión. Luego, el gradiente de presión es inducido únicamente por el término que sobrevive en la ecuación 2.4, es decir, por la aceleración centrífuga. También se puede decir que el campo de velocidades es similar al obtenido en un flujo sin rotación puesto que ni la fuerza de Coriolis, ni

la fuerza centrífuga influyen sobre V y W .

La ecuación 2.6 se resuelve por medio de una integración directa:

$$W = \frac{-g}{\nu} \frac{r^2}{4} + \text{Cln}(Cr) + D. \quad (2.12)$$

Después de usar la condición de adherencia en la superficie del cilindro y la condición de esfuerzo tangencial σ_{rz} igual a cero, el resultado final es el siguiente:

$$W(r) = \frac{g}{4\nu} \left[R^2 - r^2 + 2(R+qh)^2 \ln(r/R) \right], \quad (2.13)$$

siendo ν la viscosidad cinemática.

La solución de la ecuación 2.4 se obtiene también por medio de una integración directa. Entonces, la presión es igual a:

$$P = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + E. \quad (2.14)$$

La constante E se puede calcular si consideramos que la curvatura de la superficie libre genera un salto en el valor de la presión. La superficie libre tiene la forma de un cilindro; por lo tanto, su curvatura es el inverso del radio. De lo anterior se concluye que:

$$\Delta P = q \frac{\sigma}{(R+qh)}. \quad (2.15)$$

en donde σ es el coeficiente de tensión superficial y ΔP es el salto en la presión. Entonces P es igual a:

$$P = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \frac{\sigma}{(R+qh)}. \quad (2.16)$$

El flujo de una película de líquido por el exterior, con las

características deducidas en los párrafos anteriores, sólo existirá si no hay cambios de signo en el campo de presión, es decir, si la tensión superficial domina sobre la presión producida por la fuerza centrífuga. En caso contrario el líquido se separaría de la superficie del cilindro.

Entonces, la condición de existencia del flujo por el exterior es la siguiente:

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2(R+h)^2 < \frac{\sigma}{(R+h)} \quad (2.17)$$

Por el contrario, si la película escurre por la pared interior del cilindro, la componente de presión inducida por la fuerza centrífuga debe dominar sobre la tensión superficial. Por lo tanto, la condición que se debe satisfacer es la siguiente:

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2(R-h)^2 > \frac{\sigma}{(R-h)} \quad (2.18)$$

2.2. -ADIMENSIONALIZACION DE VARIABLES

La introducción de variables adimensionales nos permitirá extender nuestros resultados a una gran variedad de condiciones, utilizando para ello criterios de semejanza. La adimensionalización se hará tomando las siguientes magnitudes características:

- a) Como longitud representativa se tomará el espesor de la capa de fluido h , excepto cuando se adimensionalice a la fuerza centrífuga, en cuyo caso se tomará como longitud representativa al radio del cilindro R .
- b) Como velocidad representativa consideraremos a la velocidad del flujo en la superficie libre $W(R+qh) \cong W_0$. De acuerdo a la ecuación 2.13 W_0 es igual a:

$$W_0 = \frac{g}{4\nu} \left[R^2 - (R+qh)^2 + 2CR+qh \right]^{1/2} \ln \left(\frac{C(R+qh)}{R} \right).$$

- c) El tiempo se adimensionalizará con h/W_0 .
d) La presión con ρW_0^2 .

Como resultado de la introducción de variables adimensionales en esta investigación aparecen los siguientes parámetros adimensionales:

1) Número de Reynolds $Re = \frac{W_0 h}{\nu}$. Representa el cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.

2) Número Centrifugo $\tau = \frac{u^2 R h}{W_0^2}$. Representa el cociente entre la fuerza centrifuga y las fuerzas de inercia.

3) Número de Taylor $\tau = \frac{2\omega h^2}{\nu}$. Representa el cociente entre la fuerza de Coriolis y la viscosidad.

4) Numero de Weber $We = \frac{\sigma}{\rho h W_0^2}$. Representa el cociente entre las variaciones de presión producidas por la capilaridad y una presión representativa.

5) Número de Froude $F = \frac{W_0}{(gh)^{1/2}}$. Se puede interpretar como el cociente entre dos velocidades representativas: la velocidad del flujo principal en la superficie libre y la velocidad de una onda en aguas poco profundas.

6) Radio adimensional del cilindro $\beta = \frac{R}{h}$. Es el cociente entre el radio del cilindro y el espesor de la capa de fluido.

De acuerdo al teorema π de Buckingham (White, 1983) solo debe haber 4 parámetros adimensionales independientes, ya que en este problema hay 7 magnitudes adimensionales: g , ρ , ν , ω , R , h y c . En

efecto, el número de Taylor se puede escribir en términos de Re , ξ y β :

$$\tau = 2 Re \left[\frac{\xi}{\beta} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$

También es posible expresar al número de Froude en términos de otros parámetros adimensionales. El cociente de los números de Reynolds y de Froude es una cantidad exclusivamente geométrica, que se expresa en términos del radio adimensional β y del parámetro q :

$$\frac{Re}{Fr^2} = \frac{4(1-\gamma)^2}{\gamma^2 - 2 \ln(\gamma) - 1} = G, \quad (2.20)$$

donde γ es el cociente entre el radio del cilindro y el radio de la superficie libre de la película de fluido:

$$\gamma = \frac{\beta}{\beta + q}. \quad (2.21)$$

De aquí en adelante, todas las cantidades son adimensionales, a menos que se indique lo contrario. Para evitar incluir más literales se ha decidido nombrar de la misma manera a las cantidades con dimensiones que a las cantidades adimensionales. Esto no provocará ninguna confusión ya que las primeras no se volverán a usar.

El perfil de velocidades adimensional se obtiene al dividir la ecuación 2.13 entre W_0 . El resultado es:

$$W(r) = \chi \left[\beta^2 - r^2 + 2C(\beta + q)^2 \ln(r/\beta) \right], \quad (2.22)$$

en donde $\chi^{-1} = \left[\beta^2 - (\beta + q)^2 + 2C(\beta + q)^2 \ln((\beta + q)/\beta) \right]$.

La figura 4 muestra gráficas de $W(r)$ para dos valores

distintos del radio adimensional β , cuando el flujo escurre por la pared exterior del cilindro. Se nota una débil dependencia de W con respecto a β .

Por otra parte, la figura 5 muestra dos gráficas de $W(r)$ dos valores distintos de β , cuando la película de fluido desciende por el interior del cilindro. También en este caso hay una dependencia débil de $W(r)$ respecto al radio adimensional del cilindro.

La forma adimensional de la ecuación 2.4 nos será útil para poder expresar la condición de frontera sobre los esfuerzos normales que satisfacen las perturbaciones. Luego de simplificar y reordenar se llega a lo siguiente:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\xi}{\beta} r. \quad (2.23)$$

La condición 2.18 se puede expresar también en términos de parámetros adimensionales, a saber:

$$\frac{\xi}{\gamma} < 2 \frac{We}{(\beta+1)^2}. \quad (2.24)$$

Esta ecuación será de gran utilidad cuando se analicen los resultados sobre la estabilidad de una película que escurre por el exterior del cilindro.

Podemos concluir de todo lo expuesto en este capítulo que el campo de la velocidad del flujo principal es igual al que se obtiene en un cilindro sin rotación (Solorio, 1987). Además, la fuerza de Coriolis no influye a este nivel sobre el flujo. La única diferencia, y la más importante, respecto al flujo sin rotación es la generación de un gradiente de presión por la fuerza centrífuga. Su influencia será notable sobre las perturbaciones del flujo.

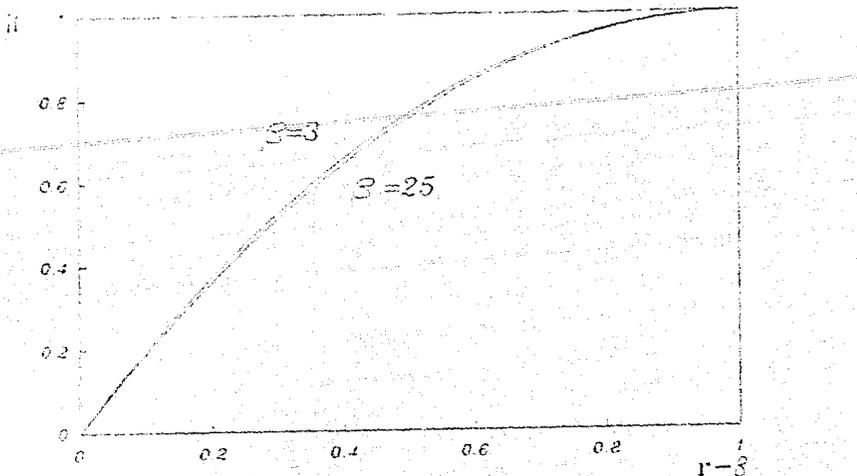


FIGURA 4.- Perfil de velocidad del flujo principal para dos valores del radio adimensional del cilindro (Flujo por el exterior). En la figura se grafica W vs. $x=r-\beta$, de manera que $x=0$ corresponde a la superficie del cilindro y $x=1$ corresponde a la superficie libre del fluido. Notese que W depende débilmente de β .

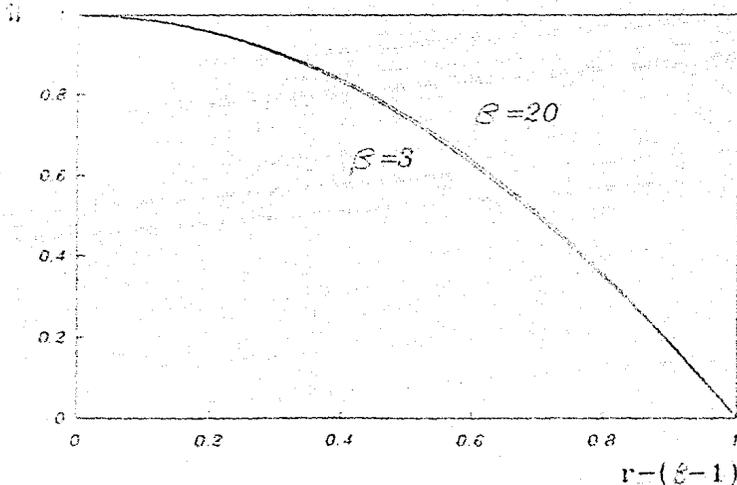


FIGURA 5.- Perfil de velocidad del flujo principal para dos valores del radio adimensional del cilindro (Flujo por el interior). En la figura se grafica W vs. W vs. $r-(\beta-1)$, de manera que $x=0$ corresponde a la superficie libre del fluido y $x=1$ corresponde a la superficie del cilindro. Notese que W depende débilmente de β .

3.-FUNDAMENTOS DE LA TEORIA LINEAL DE LA ESTABILIDAD

3.1. -PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La mecánica de fluidos se basa en las leyes de la mecánica newtoniana y en la conservación de la masa. De las primeras se deduce la ecuación de Navier-Stokes, mientras que la expresión matemática de la segunda es la ecuación de continuidad. De acuerdo a lo anterior, tanto el flujo laminar que se dedujo en el capítulo anterior, como el flujo perturbado son soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad.

Los campos de velocidad y presión del flujo perturbado se pueden expresar como la suma de una contribución del flujo principal más la perturbación, es decir:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v} \quad \text{y} \quad p = P + p, \quad (3.1)$$

en donde $\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ es el vector velocidad de la perturbación en coordenadas cilíndricas y p la perturbación en la presión. Usando esta descomposición es posible deducir un sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de la perturbación.

El vector velocidad $\vec{V} = (0, 0, W)$ y presión P son soluciones de la ecuaciones adimensionales:

$$-\frac{\xi}{\beta} \text{Re} \, r \hat{r} = -\text{Re} \nabla p + G \hat{z} + \nabla z \vec{v}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.3)$$

Por otra parte, el flujo perturbado satisface las ecuaciones:

$$\text{Re} \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\xi}{\beta} r \hat{r} - r \hat{z} \times \vec{v} = -\text{Re} \nabla p + G \hat{z} + \nabla z \vec{v}, \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.5)$$

donde $\frac{d}{dt}$ es la derivada material.

Las ecuaciones adimensionales que describen el comportamiento de una perturbación se obtienen al restar las ecuaciones 3.2 de 3.4 y 3.3 de 3.5. Si además, se eliminan los términos no lineales, obtenemos las ecuaciones básicas de la teoría lineal de la estabilidad:

$$\text{Re} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + v_r \frac{dW}{dr} - \nabla p \right] + \tau (v_\theta \hat{r} - v_r \hat{\theta}) = -\gamma \times \gamma \times \vec{v}, \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.7)$$

Cabe decir que los términos no lineales se han eliminado, bajo la suposición de que la perturbación es pequeña:

$$|\vec{v}| \ll |W| \quad \text{y} \quad |p| \ll |P|.$$

Luego, si separamos a la ecuación 3.6 en sus componentes se obtiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden para los campos de velocidad \vec{v} y presión p de la perturbación:

$$\text{Re} \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + W \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \tau v_\theta = \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \quad (3.8)$$

$$\text{Re} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + W \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] - \tau v_r = \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}, \quad (3.9)$$

$$\text{Re} \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + W \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{dW}{dr} + \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \nabla^2 v_z, \quad (3.10)$$

en donde el laplaciano de una función Φ en coordenadas cilíndricas

$$\text{es : } \nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (\text{Reitz, 1978}).$$

Adicionalmente, la perturbación satisface la condición de incompresibilidad, que se expresa a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3.11)$$

que es la manera en que se escribe 3.7 en coordenadas cilíndricas.

3.2. - ECUACION DE VORTICIDAD

Las ecuaciones 3.8-3.11 son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con 4 incógnitas: las componentes del vector \vec{v} y p . Con ellas ya se puede investigar la estabilidad del flujo frente a perturbaciones infinitesimales. Sin embargo, hay otra alternativa: deducir un sistema de ecuaciones con un menor número de funciones. Esto se puede lograr si se aplica el operador rotacional sobre la ecuación 3.6. Recuérdese que el rotacional de cualquier gradiente es igual a cero. La disminución en el número de funciones conlleva a un incremento en el grado de la ecuación resultante (que es de tercer grado, a diferencia de la ecuación de Navier-Stokes, que es de segundo grado).

En coordenadas cilíndricas el rotacional de una función vectorial $\vec{F} = (F_r, F_\theta, F_z)$ es:

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}. \quad (3.12)$$

La ecuación que resulta de aplicar el rotacional sobre la ecuación de Navier-Stokes se conoce usualmente como ecuación de vorticidad (la vorticidad se denota con el símbolo $\vec{\omega}$ y se define como $\text{rot } \vec{v}$):

$$\operatorname{Re} \nabla \times \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + v_r \frac{dW}{dr} \hat{z} + \nabla p \right] + r \nabla \times (v_\theta \hat{r} - v_r \hat{\theta}) = -\nabla \times (\nabla \times \nabla \times \vec{v}).$$

El rotacional es una función de las coordenadas espaciales y, por lo tanto, conmuta con la derivada respecto al tiempo. Por otra parte, para aplicar el rotacional sobre el segundo término de la ecuación (es decir, sobre la función vectorial $w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$) ocuparemos la identidad vectorial $\nabla \times (f \vec{g}) = f \nabla \times \vec{g} - \nabla f \times \vec{g}$. Entonces:

$$\nabla \times \left(w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) = w \nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \nabla w \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = w \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z} + \frac{dw}{dz} \left[-\frac{\partial v}{\partial z} \hat{\theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \hat{r} \right].$$

Además, el rotacional de $v_r \frac{dW}{dr} \hat{z}$ es:

$$\nabla \times \left[v_r \frac{dW}{dr} \hat{z} \right] = \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[v_r \frac{dW}{dr} \right] \hat{\theta}.$$

Falta todavía aplicar el operador rotacional sobre la fuerza de Coriolis. Al hacerlo directamente se obtiene:

$$\nabla \times (v_\theta \hat{r} - v_r \hat{\theta}) = -\frac{\partial}{\partial z} (-v_r) \hat{r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \hat{z}.$$

Esto se puede simplificar todavía con el uso de la ecuación de continuidad. El término entre parentesis es igual a $-\frac{\partial v_r}{\partial z}$. Entonces, el rotacional de la fuerza de Coriolis es igual a la derivada de la velocidad \vec{v} con respecto a z :

$$\nabla \times (v_\theta \hat{r} - v_r \hat{\theta}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}.$$

Con base en todo lo anterior la ecuación de vorticidad adquiere la siguiente forma:

(3.14)

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + W \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} + \nabla W \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[v_r \frac{dW}{dr} \right] \hat{\theta} \right] + \tau \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} =$$

$$\left[\nabla^2 \Omega_r - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} v_r \right] \hat{r} + \left[\nabla^2 \Omega_\theta + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} v_\theta \right] \hat{\theta} + \nabla^2 \Omega_z \hat{z}$$

Esta es una ecuación vectorial; sus componentes en las direcciones r , θ y z son respectivamente:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\partial \Omega_r}{\partial t} + W \frac{\partial \Omega_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \tau \frac{\partial v_r}{\partial z} = \nabla^2 \Omega_r - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} v_r \quad (3.15)$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\partial \Omega_\theta}{\partial t} + W \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial z} - \frac{dW}{dr} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{d}{dr} \left[v_r \frac{dW}{dr} \right] \right] + \tau \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \nabla^2 \Omega_\theta + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} v_\theta \quad (3.16)$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + W \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} + \frac{dW}{dr} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \tau \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla^2 \Omega_z \quad (3.17)$$

La evolución de las perturbaciones del flujo se puede deducir también con este sistema de ecuaciones, más las condiciones de frontera.

3.3. -GENERALIZACIÓN DE LA ECUACION DE ORR-SOMMERFELD

La ventaja de la ecuación vectorial 3.14 respecto a la ecuación 3.6 es la disminución del número de funciones, pues se ha eliminado p . Sin embargo todavía es posible deducir otra ecuación vectorial con un número menor de funciones. Para ello, se introduce una función \vec{F} , relacionada con el campo de velocidad \vec{v} , de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{F} \quad (3.18)$$

Se sabe que la divergencia del rotacional de una función arbitraria es cero: $\nabla \cdot \nabla \times \vec{f} = 0$. Entonces, independientemente de \vec{f} , la ecuación de continuidad se cumple automáticamente. La función \vec{f} se elige con la componente en z igual a cero:

$$\vec{f} = \gamma \hat{r} + \xi \hat{\theta}. \quad (3.19)$$

Una ventaja adicional de la introducción de \vec{f} es la disminución en el número de ecuaciones a resolver, pues la condición de continuidad aparece implícitamente en la ecuación 3.18.

Siguiendo la línea de simplificar el estudio de la estabilidad, todavía se harán algunas consideraciones. Por principio de cuentas, la ecuación 3.14 es lineal con coeficientes que dependen únicamente de la coordenada r . Este detalle da la posibilidad de expresar a las funciones γ y ξ de la siguiente manera:

$$\gamma = \psi(r) \exp[i(m\theta + k(z-ct))], \quad (3.20)$$

$$\xi = \psi(r) \exp[i(m\theta + k(z-ct))], \quad (3.21)$$

donde m debe ser un número entero para que se cumpla la condición de periodicidad en la coordenada azimutal, k es el número de onda de la perturbación y c es un número complejo, cuya parte real es la velocidad de propagación de la perturbación y la parte imaginaria da la razón de crecimiento o decaimiento de la perturbación. El parámetro c es un valor propio que se obtiene al resolver las ecuaciones e imponer condiciones de frontera. Esta forma de expresar a γ y ξ se le conoce como descomposición en modos normales. En adelante ϕ y ψ recibirán el nombre de funciones potenciales debido a que el campo de velocidades \vec{v} se deduce

tomando el rotacional de \vec{F} (se hace un paralelismo con la teoría electromagnética; el campo magnético \vec{B} se expresa en términos de una potencial vectorial):

$$\vec{\nabla} = \nabla \times \vec{F} = -\frac{\partial \gamma}{\partial z} \hat{r} + \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\gamma) - \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \hat{z}. \quad (3.22)$$

Un detalle que no debe pasarse por alto es que originalmente se tenía un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales; con la introducción de modos normales nos hemos quedado con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, pero a cambio han aparecido dos nuevos parámetros: el número de onda k y c .

De acuerdo a las ecuaciones 3.20-3.22, la descomposición en modos normales de la velocidad \vec{v} es:

$$v_r = -ik\phi(r) \exp[i(m\theta + k(z-ct))], \quad (3.23)$$

$$v_\theta = ik\psi(r) \exp[i(m\theta + k(z-ct))], \quad (3.24)$$

$$v_z = \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr}[r\phi(r)] - im\psi(r) \right) \exp[i(m\theta + k(z-ct))]. \quad (3.25)$$

El campo de presión de la perturbación se descompone también en modos normales:

$$p = g(r) \exp[i(m\theta + k(z-ct))]. \quad (3.26)$$

Las ecuaciones de balance de momento 3.8-3.10 que gobiernan la evolución de la perturbación, expresadas en términos de ϕ , ψ y g , quedan como sigue:

$$-Rek^2(c-W)\phi + Re g'(r) + ik\tau\psi = -ik \left[D^2 - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} - k^2 \right] \phi - \frac{1}{r^2} i 2mk\psi, \quad (3.27)$$

$$Rek^2(c-W)\psi + Re \frac{1}{r} img + i\tau k\phi = ik \left[D^2 - \frac{m^2}{r^2} - k^2 - \frac{1}{r^2} \right] \psi - \frac{1}{r^2} i 2mk\phi, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{Re} \frac{1}{r} ik(c-w) \left[\frac{d}{dr} [r\phi(r)] - im\psi(r) \right] - ik \operatorname{Re} \phi \frac{dw}{dr} + ikg &= \quad (3.29) \\
 = \left[D^2 - \frac{m^2}{r^2} - kz \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} [r\phi(r)] - im\psi(r) \right], &
 \end{aligned}$$

Donde $D^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$.

Las ecuaciones 3.28 y 3.29 se utilizarán más adelante, en la sección dedicada a las condiciones de frontera.

El siguiente paso es la introducción de los modos normales en la ecuación de vorticidad. Para ello se requiere conocer como se expresa el vector de vorticidad $\vec{\zeta}$ en función de ϕ y ψ . De acuerdo a la definición, la vorticidad es el doble rotacional de \vec{F} :

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \nabla \times \vec{F}. \quad (3.30)$$

El miembro derecho de la ecuación 3.30 se puede escribir de otra manera utilizando una identidad vectorial (Reitz, 1978), a saber:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla \nabla \cdot \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}. \quad (3.31)$$

El laplaciano de la función \vec{F} , en coordenadas cilíndricas, es (Reitz, 1978):

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \vec{F} &= \left[\nabla^2 \xi - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \xi \right) \right] \hat{r} \\
 &+ \left[\nabla^2 \gamma - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - \gamma \right) \right] \hat{\theta}, \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

o en términos de ϕ y ψ :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \vec{F} &= \left[(D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2}) \psi - i \frac{\partial m}{r^2} \phi \right] \exp i [m\theta + k(z-ct)] \hat{r} + \\
 &\left[(D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2}) \phi + i \frac{\partial m}{r^2} \psi \right] \exp i [m\theta + k(z-ct)] \hat{\theta}. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Por otra parte, la divergencia de la función vectorial \vec{F} tiene una expresión relativamente simple:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr}(r\psi) + im\phi \right] \exp i[m\theta + k(z-ct)]. \quad (3.34)$$

La vorticidad se obtiene restando la ecuación 3.32 del gradiente de la ecuación 3.33, dando por resultado:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} = & \left[\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr}(r\psi) + im\phi \right) \right] - \left[(D^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2})\psi - i\frac{2m}{r^2}\phi \right] \right] \exp i[m\theta + k(z-ct)] \hat{r} + \\ & \left[i\frac{m}{r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr}(r\psi) + im\phi \right) \right] - \left[(D^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2})\phi + i\frac{2m}{r^2}\psi \right] \right] \exp i[m\theta + k(z-ct)] \hat{\theta} \\ & ik \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr}(r\psi) + im\phi \right) \right] \exp i[m\theta + k(z-ct)] \hat{z}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Todavía son posibles varias simplificaciones, ya que algunos términos se cancelan. Después de todo, los componentes del vector $\vec{\Omega}$ son:

$$\Omega_r = \left[\left[k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right] \psi + i\frac{m}{r^2} \frac{d}{dr}(r\phi) \right] \exp i[m\theta + k(z-ct)], \quad (3.36)$$

$$\Omega_\theta = \left[im \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi}{r} \right) - \left[D^2 - k^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi \right] \exp i[m\theta + k(z-ct)], \quad (3.37)$$

$$\Omega_z = i\frac{k}{r} \left[\frac{d}{dr}(r\psi) + im\phi \right] \exp i[m\theta + k(z-ct)]. \quad (3.38)$$

El laplaciano aparece en el término de viscosidad de la ecuación de vorticidad y en la ecuación de momento. Considerando que todas las magnitudes que caracterizan a la perturbación tienen un factor de la forma $\exp i(kz + m\theta - ct)$, este operador se puede escribir como:

$$\nabla^2 = \left[D^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right]. \quad (3.39)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.23-3.25 y 3.36-3.39 en las ecuaciones 3.13-3.15 obtenemos un sistema que también describe la evolución de perturbaciones infinitesimales:

$$ik\text{Re}(W-c) \left[\left[k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right] \psi + i \frac{m}{r^2} \frac{d}{dr}(r\phi) \right] - i \frac{m}{r} \frac{dW}{dr} \phi + k^2 r \phi = \quad (3.40)$$

$$\left[D^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right] \left[\left[k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right] \psi + i \frac{m}{r^2} \frac{d}{dr}(r\phi) \right] - i \frac{2m}{r^2} \left[i m \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi}{r} \right) - \left[D^2 - k^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi \right], \quad (3.41)$$

$$ik\text{Re}(W-c) \left[i m \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi}{r} \right) - \left[D^2 - k^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi \right] + ik\text{Re} \left[-\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \left[\frac{d}{dr}(r\phi) - i m \psi \right] + \frac{d}{dr} \left[\phi \frac{dW}{dr} \right] \right] - k^2 r \psi = \left[D^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right] \left[i m \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi}{r} \right) - \left[D^2 - k^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi \right] + i \frac{2m}{r^2} \left[\left[k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right] \psi + i \frac{m}{r^2} \frac{d}{dr}(r\phi) \right].$$

$$-k^2 \text{Re} \left[(W-c) \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr}(r\psi) + i m \phi \right] + \psi \frac{dW}{dr} \right] + i \tau \frac{k}{r} \left[\frac{d}{dr}(r\phi) - i m \psi \right] = \quad (3.42)$$

$$ik \left[D^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr}(r\psi) + i m \phi \right].$$

Las ecuaciones 3.40-3.42 describen la estabilidad lineal de un flujo sobre un cilindro en rotación ante perturbaciones tridimensionales. En realidad sólo dos de las ecuaciones son independientes; una de ellas se puede expresar en términos de las otras dos recurriendo a la ecuación de continuidad. Por lo tanto, las ecuaciones 3.41 y 3.42 son una generalización de la ecuación de Orr-Sommerferd en coordenadas cilíndricas. En adelante se investigará la estabilidad del flujo de una película de fluido valiéndose de estas dos últimas ecuaciones. La solución a dichas ecuaciones y la aplicación de las condiciones de frontera permitirá obtener el valor propio c , cuya parte imaginaria determina la estabilidad.

En lo que resta de este capítulo se hará una deducción de las condiciones de frontera que deben satisfacer las funciones potenciales ϕ y ψ .

3.4. -CONDICION CINEMATICA

Sea η la perturbación en la posición de un elemento de fluido en la superficie libre. La derivada respecto al tiempo de η es igual a la componente radial de la velocidad de la perturbación, es decir, $v_r = \frac{d\eta}{dt}$. Esta última ecuación permite relacionar a η con las funciones potenciales ϕ y ψ evaluadas en la superficie libre. Supondremos que η también se puede expresar como una función de tipo ondulatorio: $\eta = \lambda \exp[ik(z-ct)]$. Entonces:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (W+v_z) \frac{\partial \eta}{\partial z} + v_r \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (3.43)$$

de donde se obtiene una relación entre λ y $\phi(\beta+q)$, a saber:

$$-ik\phi(\beta+q) = (-ikc + ikW)\lambda,$$

en la cual se han dejado solamente los términos lineales. Si despejamos λ obtenemos la relación conocida usualmente como condición cinemática:

$$\lambda = \frac{\phi}{c - W} \Big|_r = \beta + q \quad (3.44)$$

3.5. -CONDICIONES DE FRONTERA

La ecuación 3.41 es de cuarto orden, mientras que la ecuación 3.42 es de tercer orden. Entonces, para que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales esté plenamente determinada son necesarias las 7 condiciones de frontera siguientes:

- ** Condición de adherencia: velocidad cero en la interfase líquido-sólido

** Esfuerzos tangenciales iguales a cero en la superficie libre. Esto se traduce en $\sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0$.

** Balance entre esfuerzos normales y tensión superficial en la superficie libre. Lo anterior se expresa como sigue:

$$-p - p_0 + \sigma K + 2\mu\sigma_{nn} = 0, \quad (3.45)$$

donde p es la presión total, p_0 es la presión atmosférica y K es la curvatura de Laplace. Esta última cantidad es igual a la suma de los inversos de los dos radios de curvatura principales.

En términos de las funciones ϕ y ψ , las condiciones en la interfase sólido-líquido se expresan como sigue:

$$\phi = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (3.46)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (3.47)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r\phi) - i\mu\psi \right] = 0 \quad \text{en } r = \beta. \quad (3.48)$$

La última condición es equivalente a:

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (3.49)$$

ya que tanto ϕ como ψ se anulan en $r = \beta$.

Para dar una expresión analítica a las condiciones de frontera en la superficie libre, primero se deberá saber cómo se expresan los esfuerzos tangenciales σ_{rz} , $\sigma_{r\theta}$ y σ_{rr} en función del campo de velocidad (Shlang y Sivashinsky, 1982):

$$\sigma_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right], \quad (3.50)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} v_\theta \right) \right], \quad (3.51)$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.52)$$

en donde $(V_r, V_\theta, V_z) = (v_r, v_\theta, v_z) + (0, 0, W)$.

Que el esfuerzo tangencial σ_{rz} sea cero en la superficie libre ($r=\beta+q+\eta$) se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma_{rz} = \frac{\partial v}{\partial z} r + \frac{\partial v}{\partial r} z + \frac{d^2 W}{dr^2} \eta = 0 \quad \text{en } r = \beta + q. \quad (3.53)$$

en donde se ha hecho un desarrollo en serie alrededor de $r=\beta+q$ para evaluar $\frac{d^2 W}{dr^2}$ en la superficie libre. Si escribimos todo en función de ϕ y ψ se llega a la ecuación:

$$\left[D^2 - \frac{1}{r^2} + k^2 \right] \phi - \mu \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi \right] - \frac{G}{c} \frac{\phi}{r} = 0 \quad \text{en } r = \beta + q. \quad (3.54)$$

La anulación del esfuerzo tangencial $\sigma_{r\theta}$ en la superficie libre se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi \right] = 0 \quad \text{en } r = \beta + q. \quad (3.55)$$

Para escribir la condición de balance de esfuerzos normales y tensión superficial es necesario recordar la ecuación para la presión en el flujo principal:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho}{\beta} r. \quad (3.56)$$

Luego, la condición sobre los esfuerzos normales será:

$$-\frac{\partial P}{\partial r} \ell - g - \frac{2k}{Re} \phi' + We \ell \left[kz + \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{(\beta+q)^2} z \right] = 0 \quad \text{en } r = \beta + q. \quad (3.57)$$

Esta ecuación incluye a la función $g(r)$ y por este motivo no es utilizable en forma directa, pues las ecuaciones 3.41 y 3.42 ya

no incluyen a $g(r)$. Para eliminar a $g(r)$ se recurre a las ecuaciones 3.28 y 3.29. Al multiplicar la condición de frontera por $\frac{m}{r}$ y sumarle la ecuación 3.28 resulta una ecuación que ya no incluye a $g(r)$:

$$\begin{aligned}
 & -kz(W-c)\psi - ik \left[\psi'' + \frac{1}{r}\psi' - \left(kz + \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) \psi \right] - 2k \frac{m}{r^2} \phi + ik r \phi + 2k \frac{m}{r} \phi' + \\
 & i \frac{m}{r} \text{Re} \left[W e \left(kz + \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\xi}{\gamma} \right] \frac{\phi}{c-1} = 0 \quad \text{en } r = \beta + iq.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Otra manera de eliminar a la función g es por medio de la ecuación 3.29. Al multiplicar a la condición de frontera por $ik \text{Re}$ y luego sumarle la ecuación 3.29 se tiene:

$$\begin{aligned}
 & i \frac{k}{r} \text{Re}(W-c) \left[\frac{d}{dr}(r\phi) - im\psi \right] - \left[Dz - kz - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr}(r\phi) - im\psi \right] + 2kz\phi' + \\
 & ik \text{Re} \left[W e \left(kz + \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\xi}{\gamma} \right] \frac{\phi}{c-1} = 0 \quad \text{en } r = \beta + iq.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Desde un punto de vista físico ambas ecuaciones representan lo mismo. Tomando en cuenta su equivalencia, ambas nos serán útiles más adelante para descartar algunas de las soluciones de las ecuaciones 3.41 y 3.42.

4.-APROXIMACION PARA NUMEROS DE ONDA PEQUEÑOS

4.1. -INTRODUCCION

El sistema de ecuaciones diferenciales 3.41 y 3.42 es lineal y homogéneo; sin embargo los coeficientes dependen explícitamente de la coordenada r (algunos incluyen potencias de r , otros tienen términos logarítmicos). Esta última característica ha hecho difícil la resolución analítica de los problemas de la estabilidad lineal ya que solo se conocen soluciones para algunas ecuaciones diferenciales con coeficientes variables. Si a lo anterior agregamos que 3.41 y 3.42 están acopladas, todo se dificulta aún más.

Un camino que se ha seguido frecuentemente es explorar las características de las soluciones cuando uno de los parámetros es pequeño, por ejemplo, el número de onda k . En este caso no se deben resolver las ecuaciones completas, sino que algunos términos se desprecian y quedan ecuaciones más simples.

Este método se basa en un desarrollo en serie de potencias de las funciones ϕ y w , así como del parámetro c :

$$\begin{aligned}w &= \psi_0 + \psi_1 k + \psi_2 k^2 + \dots \\ \phi &= \phi_0 + \phi_1 k + \phi_2 k^2 + \dots \\ c &= c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \dots\end{aligned}\tag{4.1}$$

La introducción de un desarrollo en serie de potencias da lugar a un conjunto infinito de sistemas de ecuaciones, a partir de los cuales se obtienen los valores de c_0 , c_1 , c_2 , etc. Los cálculos se realizan hasta que aparece un término del desarrollo en serie de potencias de c con una parte imaginaria distinta de cero (por lo general sólo es necesario calcular c_0 y/o c_1).

En este capítulo se hará un estudio de la estabilidad del flujo frente a perturbaciones con número de onda pequeño. De acuerdo a los resultados de Shiang y Sivashinsky (1982) para un cilindro sin rotación, y con las suposiciones que hacen, es precisamente en la región de perturbaciones con longitud de onda grande donde aparecen las inestabilidades. A nosotros nos interesa investigar la influencia de un factor no incluido en el trabajo de los autores anteriores, es la rotación.

Uno de los resultados más relevantes que adelantamos es que, a números de onda pequeños, la fuerza de Coriolis no influye sobre la estabilidad. El número de Taylor aparece hasta segundo orden, mientras que ya a primer orden se deducen condiciones de estabilidad.

4.2. -DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS

Al sustituir la expansión en serie de potencias (4.1) en las ecuaciones 3.41 y 3.42 se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(\left[D^2 - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right] \left[i m \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_0}{r} \right) - \left[D^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_0 \right] + i \frac{2m}{r} \left[\frac{m^2}{r^2} \psi_0 + i \frac{m}{r^2} \frac{d}{dr} (r \phi_0) \right] \right) - \quad (4.2) \\ & \left(\left[D^2 - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right] \left[i m \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_1}{r} \right) - \left[D^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_1 \right] + i \frac{2m}{r} \left[\frac{m^2}{r^2} \psi_1 + i \frac{m}{r^2} \frac{d}{dr} (r \phi_1) \right] \right) k - \\ & - \left(i \operatorname{Re}(U - c_0) \left[i m \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_0}{r} \right) - \left[D^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_0 \right] + i \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_0) - i m \psi_0 \right] + \frac{d}{dr} \left[\phi_0 \frac{dU}{dr} \right] \right) \right) k \\ & + \dots = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(i \left[D^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \psi_0) + i m \phi_0 \right] - i \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_0) - i m \psi_0 \right] \right) k + \quad (4.3) \\ & \left(i \left[D^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \psi_1) + i m \phi_1 \right] - i \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_1) - i m \psi_1 \right] \right) k^2 + \\ & \left((U - c) \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \psi_1) + i m \phi_1 \right] + U_1 \frac{dU}{dr} \right) \operatorname{Re} k^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones 4.2 y 4.3 son del tipo $a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \dots = 0$. Tomando en cuenta que $1, k, k^2, k^3, \dots$ son linealmente independientes, entonces los coeficientes que multiplican a las potencias de k son iguales a cero. Esto nos permite obtener un conjunto de sistemas de ecuaciones diferenciales para las funciones ϕ_0 y ψ_0 , ϕ_1 y ψ_1 , etc.

También se debe hacer un desarrollo en serie de potencias de las condiciones de frontera. Al sustituir 4.1 en las ecuaciones 3.46, 3.47, 3.49, 3.54, 3.55, 3.58 y 3.59 resulta lo siguiente:

a) en la superficie del cilindro:

$$\phi_0 + \phi_1 k + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.4)$$

$$\psi_0 + \psi_1 k + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.5)$$

$$\phi_0' + \phi_1' k + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.6)$$

b) en la superficie libre:

$$\begin{aligned} & \left(\left[D^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_0 - i m \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_0 \right] - G \frac{\phi_0}{c_0 - 1} \right) + \quad (4.7) \\ & + \left(\left[D^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_1 - i m \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_1 \right] - G \frac{\phi_1}{c_0 - 1} + G \frac{\phi_0}{(c_0 - 1)^2} c_1 \right) k \\ & + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta + q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m}{r} \phi_0 + i r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_0 \right] \right) + \left(\frac{m}{r} \phi_1 + i r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_1 \right] \right) k + \dots = 0 \\ & \text{en } r = \beta + q, \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\left(i \frac{m}{r_2} \operatorname{Re} \left[W e \left(\frac{m^2 - 1}{r_2^2 - r_2} \right) - \frac{\epsilon}{\gamma} \right] \frac{\phi_0}{c_0 - 1} \right) + \quad (4.9)$$

$$\left(i \frac{m}{r_2} \operatorname{Re} \left[W e \left(\frac{m^2 - 1}{r_2^2 - r_2} \right) - \frac{\epsilon}{\gamma} \right] \frac{\phi_1}{c_0 - 1} - i \frac{m}{r_2} \operatorname{Re} \left[W e \left(\frac{m^2 - 1}{r_2^2 - r_2} \right) - \frac{\epsilon}{\gamma} \right] \frac{\phi_0}{(c_0 - 1)^2 c_1} \right) k +$$

$$\left(-i \left[\psi_0'' + \frac{1}{r} \psi_0' - C k z + \frac{m^2}{r_2^2} + \frac{1}{r_2} \right] \psi_0 \right) - \frac{2m}{r_2^2} \phi_0 + \left(i \tau \phi_0 + \frac{2m}{r} \phi_0' \right) k +$$

+ ... = 0

en $r = \beta + q$,

$$\left(\left[D^2 - \frac{m^2}{r_2^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_0') - i m \psi_0 \right] \right) + \quad (4.10)$$

$$+ \left(\left[D^2 - \frac{m^2}{r_2^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_1') - i m \psi_1 \right] + \frac{i}{r} \operatorname{Re}(U - c) \left[\frac{d}{dr} (r \phi_1') - i m \psi_1 \right] \right) k$$

$$\left(i \operatorname{Re} \left[W e \left(k z + \frac{m^2}{r_2^2} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{\epsilon}{\gamma} \right] \frac{\phi_0}{c_0 - 1} \right) + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta + q.$$

4.3-SOLUCION A ORDEN CERO

Para calcular el primer término del desarrollo en serie de potencias de $c - c_0$ es decir, c_0^{-1} se necesitan conocer las funciones ϕ_0 y ψ_0 . Dichas funciones son soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales que se deduce directamente de 4.2 y 4.3:

$$\left[D^2 - \frac{m^2}{r_2^2} - \frac{1}{r_2} \right] \left(i m \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_0}{r} \right) - \left[D^2 - \frac{1}{r_2} \right] \phi_0 \right) + i \frac{2m}{r_2^2} \left(\frac{m^2}{r_2^2} \psi_0 + i \frac{m}{r_2} \frac{d}{dr} (r \phi_0') \right) = 0, \quad (4.11)$$

$$\left[D^2 - \frac{m^2}{r_2^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \psi_0') + i m \phi_0 \right] - \frac{\tau}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_0') - i m \psi_0 \right] = 0, \quad (4.12)$$

mientras que las condiciones de frontera son:

$$\phi_0 = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.13)$$

$$\phi_0' = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.14)$$

$$v_0 = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.15)$$

$$\left[D^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_0 - i m \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} v_0 \right] - G \frac{\phi_0}{c_0 - 1} = 0 \quad \text{en } r = \beta + q, \quad (4.16)$$

$$\frac{m}{r} \phi_0 + i r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} v_0 \right] = 0 \quad \text{en } r = \beta + q, \quad (4.17)$$

$$\left[D^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_0) - i m v_0 \right] = 0 \quad \text{en } r = \beta + q, \quad (4.18)$$

$$i \frac{m}{r} Re \left[We \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\xi}{\gamma} \right] \frac{\phi_0}{c_0 - 1} = 0 \quad \text{en } r = \beta + q. \quad (4.19)$$

Notese que en la ecuación 4.19 el miembro izquierdo solo se anula si uno de los factores es igual a cero. Por principio de cuentas, los números adimensionales Re , We y ξ no se pueden anular arbitrariamente. Por otra parte, que $\frac{\phi_0}{c_0 - 1}$ sea cero implicaría la desaparición del valor propio ϕ_0 de las condiciones de frontera 4.13-4.18 y en ese caso su valor quedaría indeterminado. En consecuencia se debe cumplir que $\frac{m}{r} = 0$. De esto se concluye inmediatamente que $m=0$. Lo anterior muestra que cuando el número de onda k es pequeño no se pueden producir perturbaciones de carácter azimutal. Luego, las funciones γ y θ tienen un factor de la forma $\exp(i k(z - ct))$ y se concluye entonces que para números de onda pequeños las perturbaciones al flujo principal tienen carácter bidimensional. Además, el término $\frac{m}{r}$ se puede interpretar como un número de onda azimutal. En efecto, en la dirección θ solo se puede formar un número entero de ondas, es decir, $m\lambda = 2\pi r$ (λ es la longitud de onda). Por lo tanto:

$$\frac{m}{r} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Este detalle indica que los números de onda en las direcciones r y θ deben ser pequeños simultáneamente.

Haciendo $m=0$, la ecuación 4.11 se desacopla de 4.12 y el valor propio c_0 se determina resolviendo únicamente la ecuación diferencial 4.11 e imponiendo 4 condiciones de frontera sobre la función ϕ_0 .

Antes de resolver la ecuación 4.11 se hará una transformación, para que los resultados se puedan comparar directamente con los obtenidos por otros autores para la estabilidad del flujo en perturbaciones bidimensionales (Lin, 1975; Krantz, 1976; Solorio y Sen, 1987). Se ha decidido definir una nueva función ψ , relacionada con ϕ de la siguiente manera:

$$\psi = \frac{\phi}{r^2}. \quad (4.20)$$

Entonces, el problema a orden cero consiste en resolver la ecuación diferencial:

$$\left[D^2 - \frac{1}{r^2} \right] \frac{\psi_0}{r} = 0. \quad (4.21)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\psi_0 = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.22)$$

$$\psi_0' = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.23)$$

$$\psi_0'' - \frac{\psi_0'}{r} - G \frac{\psi_0}{c_0 - 1} = 0 \quad \text{en } r = \beta + q, \quad (4.24)$$

$$\psi_0''' - \frac{\psi_0''}{r} + \frac{\psi_0'}{r^2} = 0 \quad \text{en } r = \beta + q. \quad (4.25)$$

La función ψ_0 es solución de una ecuación diferencial de tercer orden, con tres condiciones de frontera. A pesar de que no se necesitan resolver explícitamente, de todos modos se presentan:

$$D^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \psi_0) - \frac{\tau}{r} \frac{d\phi_0}{dr} = 0, \quad (4.25)$$

con:

$$\psi_0 = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (4.27)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \psi_0 \right) = 0 \quad \text{en } r = \beta + q, \quad (4.28)$$

$$-i \left[\psi_0'' + \frac{1}{r} \psi_0' - \frac{1}{r^2} \psi_0 \right] + i \tau \frac{\psi_0}{r} = 0 \quad \text{en } r = \beta + q. \quad (4.29)$$

La ecuación 4.21 es de coeficientes variables, pero se puede resolver exactamente: las soluciones son de la forma $\phi_0 = r^n$. Los valores de n se obtienen de la ecuación:

$$n(n-2)^2(n-4) = 0, \quad (4.30)$$

que se ha obtenido sustituyendo $\phi = r^n$ en la ecuación 4.21. Las soluciones de 4.30 son: $n = 0, 2$ y 4 . La solución $n=2$ es doble, motivo por el cual solo se han determinado tres soluciones de la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$1, r^2 \text{ y } r^4.$$

La cuarta solución se obtiene al multiplicar r^2 por $\ln(r)$ (Kreider, 1973). Luego, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\phi_0 = A_1 + A_2 r^2 + A_3 r^2 \ln(r) + A_4 r^4. \quad (4.31)$$

Las condiciones de frontera dan lugar a un sistema de cuatro ecuaciones lineales homogéneas. En primer lugar, las condiciones de adherencia e impenetrabilidad en la superficie del cilindro se

expresan así:

$$A_1 + A_2\beta^2 + A_3\beta^2 \ln(\beta) + A_4\beta^4 = 0, \quad (4.32)$$

$$2A_2\beta + A_3\beta + 2A_3\beta \ln(\beta) + 4\beta^3 = 0. \quad (4.33)$$

Las condiciones de frontera en la superficie libre son:

$$2A_3 + 8A_4(\beta+q)^2 - \frac{G}{c_0-1} \left(A_1 + A_2(\beta+q)^2 + A_3(\beta+q)^2 \ln(\beta+q) + A_4\beta^4 \right) = 0, \quad (4.34)$$

$$16A_4(\beta+q) = 0. \quad (4.35)$$

De la ecuación 4.35 se concluye inmediatamente que el coeficiente A_4 es igual a cero. Por otra parte, usando las ecuaciones 4.32 y 4.33 se obtendrá otra ecuación que no incluye el coeficiente A_2 . Para ello multiplicamos a la ecuación 4.33 por β :

$$2A_2\beta^2 + A_3\beta^2 + 2A_3\beta^2 \ln(\beta) = 0,$$

de la cual se puede despejar el coeficiente A_2 , dando como resultado lo siguiente:

$$A_2 = - \left[\frac{1}{2} + \ln(\beta) \right] A_3.$$

Sustituimos ahora este resultado en la ecuación 4.32 y obtenemos:

$$A_1 - \left[\frac{1}{2} + \ln(\beta) \right] \beta^2 A_3 + A_3 \beta^2 \ln(\beta) = A_1 - \frac{1}{2} \beta^2 A_3 = 0.$$

Dicha ecuación nos permite expresar A_1 en función de A_3 y de esta manera el problema de la estabilidad de orden cero ya esta

practicamente resuelto. En la teoría lineal sólo se conocen los valores relativos de las amplitudes, o dicho de otra manera, una de los coeficientes $A_1 \dots A_4$ puede tomar un valor arbitrario.

El valor propio c_0 se obtiene a partir de la ecuación 4.34, si sustituimos los valores de A_1 y A_2 obtenidos anteriormente:

$$z = \frac{G}{c_0 - 1} \left[\frac{1}{2} \beta^2 - (0.5 + \ln(\beta))(\beta + q)^2 + (\beta + q)z \ln(\beta + q) \right]. \quad (4.36)$$

Tomando en cuenta que $\beta + q = 1/(1 - \gamma)$, procederemos a reescribir la ecuación 4.36

$$2(c_0 - 1) = \frac{G}{2(1 - \gamma)^2} \left[\gamma^2 - 1 - 2 \ln(\gamma) \right]. \quad (4.37)$$

Ahora, recordando la definición de G (ecuación 2.20):

$$G = \frac{4(1 - \gamma)^2}{\gamma^2 - 1 - 2 \ln(\gamma)},$$

se concluye que c_0 es un número real:

$$c_0 = 2. \quad (4.38)$$

Esta cantidad tiene una interpretación física sencilla. El que sea real implica que la perturbación se propaga en la forma de una onda. La velocidad de propagación es el doble de la velocidad del flujo en la superficie libre. Para determinar la estabilidad del flujo es necesario pasar al siguiente orden

Si tomamos $A_3 = 1$ entonces ϕ_0 es:

$$\phi_0 = \frac{1}{2}(\beta^2 - r^2) + r \ln(r/\beta). \quad (4.39)$$

Se han hecho algunas gráficas de la función ϕ_0 como función de r . La figura 6 corresponde a curvas ϕ_0 cuando la película escurre por el exterior; la diferencia entre ellas es el valor del

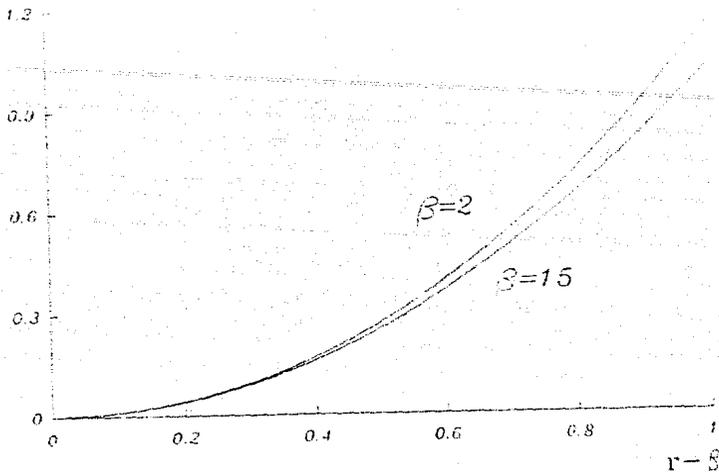


FIGURA 6.- Perfil de la función φ_0 para dos valores de β (2 y 15). El escurrimiento ocurre por el exterior. En la figura se grafican φ_0 vs $x=r-\beta$. Notese que en la superficie del cilindro φ_0 es cero y que el valor máximo se alcanza en la superficie libre.

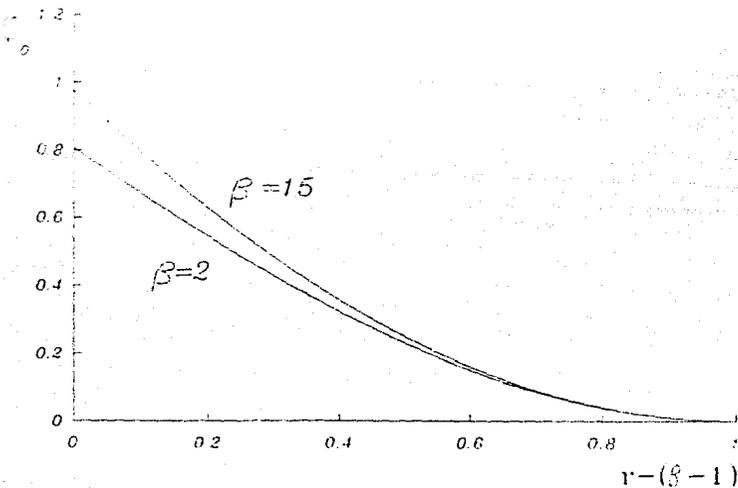


FIGURA 7.- Perfil de la función φ_0 para dos valores de β (2 y 15). Flujo por el interior. En la figura se grafica φ_0 vs $r-(\beta-1)$. La función φ_0 alcanza su valor máximo en la superficie libre, luego decrece y se anula en la superficie del cilindro. Notese además que φ_0 es una función creciente del parámetro β .

radio adimensional del cilindro β . En la figura 7 se grafica φ_0 cuando el fluido se mueve por la pared interior del cilindro.

4.4. -SOLUCION A PRIMER ORDEN

La solución a orden cero no incluye términos inducidos por la rotación y, por ese motivo, tanto el valor propio c_0 como la función de corriente φ_0 son iguales al caso de una película descendiendo bajo la sola acción de la gravedad. Esto ya no sucede a primer orden, pues las condiciones de frontera contienen un término inducido por la fuerza centrífuga.

La aproximación de primer orden es una ecuación de orden cuatro e inhomogénea:

$$-\left[Dz - \frac{1}{r^2}\right]^2 \frac{\varphi_1}{r} + i \operatorname{Re} \left\{ (c_0 - U) \left[Dz - \frac{1}{r^2} \right] \frac{\varphi_0}{r} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \frac{d\varphi_0}{dr} + \frac{d}{dr} \left[\frac{\varphi_0}{r} \frac{dU}{dr} \right] \right\} = 0. \quad (4.40)$$

Luego de algunas simplificaciones la ecuación anterior se reescribe de la siguiente manera:

$$-\mathcal{O}(\varphi_1) = i \operatorname{Re} \left\{ (c_0 - U) \mathcal{O} + \mathcal{O}(U) \right\} \varphi_0, \quad (4.41)$$

en donde \mathcal{O} es un operador diferencial de segundo orden definido como: $\mathcal{O} \equiv \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$. La dificultad para resolver esta ecuación diferencial radica en el término no homogéneo.

La parte inhomogénea de la ecuación 4.41 incluye los términos: $\mathcal{O}(\varphi_0)$ y $\mathcal{O}(U)$. Dichas cantidades se pueden calcular con base en los resultados del capítulo anterior:

$$\mathcal{O}(\varphi_0) = 2. \quad (4.42)$$

$$\mathcal{O}(U) = - \frac{G}{(1-\gamma)^2} \frac{1}{r^2}. \quad (4.43)$$

Por lo tanto el término entre paréntesis es:

$$\left[(c_0 - W_0 - \partial C W) \right] \varphi_0 = \left(4 - \frac{2G}{(1-\gamma)^2} \ln \left(\frac{r}{\beta} \right) + \frac{G}{2} (r^2 - \beta^2) + \frac{1}{2(1-\gamma)^2} G (r^2 - \beta^2) \right). \quad (4.44)$$

pero como $1/(1-\gamma) = \frac{\beta}{\gamma}$, la ecuación 4.44 se puede reescribir como sigue:

$$\left[(c_0 - W_0 - \partial C W) \right] \varphi_0 = \left(4 - \frac{2G}{(1-\gamma)^2} \ln \left(\frac{r}{\beta} \right) + \frac{G(r^2 - \beta^2)}{2} \left[1 + \frac{\beta^2}{r^2 \gamma^2} \right] \right). \quad (4.45)$$

Las condiciones de frontera son:

a) Condiciones de adherencia e impenetrabilidad en la superficie del cilindro:

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{en } r = \beta. \quad (4.46)$$

$$\varphi_1' = 0 \quad \text{en } r = \beta. \quad (4.47)$$

b) En la superficie libre los esfuerzos tangenciales son cero:

$$\varphi_1'' - \frac{1}{r} \varphi_1' - G \varphi_1 = -c_1 G \varphi_0 \quad \text{en } r = \beta + q. \quad (4.48)$$

c) Balance entre esfuerzos normales y tensión superficial:

$$i \operatorname{Re} \varphi_0' + i \operatorname{Re} \frac{r}{\beta} \varphi_0 + \left(\varphi_1''' - \frac{1}{r} \varphi_1'' + \frac{1}{r^2} \varphi_1' \right) + i \operatorname{Re} \omega \frac{1}{r^2} \varphi_0 = 0 \quad (4.49)$$

en $r = \beta + q$.

Desde aquí se puede concluir que la fuerza de Coriolis no juega ningún papel en la estabilidad inclusive a primer orden, y la única influencia de la rotación es a través de la fuerza centrífuga. La fuerza de Coriolis solo jugará un papel a partir del segundo orden, pero ya no será importante para determinar la estabilidad del flujo.

De la teoría de ecuaciones diferenciales lineales sabemos que la solución general de una ecuación no homogénea es la suma de la solución general de la parte homogénea más una solución particular de la ecuación no homogénea. Entonces, en primer lugar se buscará una solución general a la parte homogénea:

$$\Delta^2(\varphi_h) = 0. \quad (4.50)$$

La solución ya la conocemos, pues se trata de la misma ecuación que en la aproximación a orden cero. Esto se puede apreciar si consideramos la siguiente igualdad:

$$\left[D^2 - \frac{1}{r^2} \right] \frac{z \varphi_1}{r} = \frac{1}{r} \Delta^2(\varphi_h).$$

Por lo tanto:

$$\varphi_h = B_1 + B_2 r^2 + B_3 r^2 \ln(r) + B_4 r^4. \quad (4.51)$$

Entonces, la solución general de la ecuación 4.50 es:

$$\varphi_1 = B_1 + B_2 r^2 + B_3 r^2 \ln(r) + B_4 r^4 + \lambda(r), \quad (4.52)$$

siendo $\lambda(r)$ es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea. La parte más larga del cálculo de la solución es precisamente la determinación de la función λ . La ecuación 4.41 es del tipo:

$$\Delta^2(\varphi_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(r/\beta) + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 \frac{1}{r^2}, \quad (4.53)$$

en donde :

$$\alpha_1 = -i \operatorname{Re}(C) + \frac{G\beta^2}{2\gamma^2} - \frac{G\beta^2}{2},$$

$$\alpha_2 = i2\text{Re}G(\beta+q)z.$$

$$\alpha_3 = -i\text{Re}\frac{G}{z}.$$

$$\alpha_4 = i\text{Re}\frac{G}{z}\frac{\beta^*}{\gamma^2}.$$

La linealidad permite calcular la solución por partes. Sean f_0, \dots, f_3 tales que:

$$\partial^2(f_0) = \alpha_0,$$

$$\partial^2(f_1) = \alpha_1 \ln(r/\beta),$$

$$\partial^2(f_2) = \alpha_2 r^\sigma,$$

$$\partial^2(f_3) = \frac{\alpha_3}{r^2}.$$

Las soluciones son las siguientes:

$$f_0 = \frac{\alpha_0}{16} r^4 \ln(r/\beta),$$

$$f_1 = \frac{\alpha_1}{32} r^4 [\ln(r/\beta)]^2 - \frac{5}{2} \ln(r/\beta) + \frac{17}{8},$$

$$f_2 = \frac{\alpha_2}{192} r^\sigma,$$

$$f_3 = -\frac{\alpha_3}{8} r^2 [\ln(r/\beta)]^2.$$

Entonces, la solución particular $\lambda(r)$ es:

$$\begin{aligned} \lambda(r) = & -i\text{Re} \left[\frac{1}{4} r^4 \ln(r/\beta) - 2\text{Re}(\beta+q)z \frac{1}{32} r^4 \left[\ln(r/\beta) \right]^2 - \frac{5}{2} \ln(r/\beta) + \frac{17}{8} \right] \\ & + \frac{G\beta z^{1-\gamma^2}}{2\gamma^2} \frac{1}{16} r^4 \ln(r/\beta) - \frac{G}{2} \frac{1}{192} r^\sigma + \frac{G}{16} \frac{\beta^*}{\gamma^2} r^2 [\ln(r/\beta)]^2. \end{aligned} \quad (4.54)$$

1.5. -CALCULO DEL VALOR PROPIO c_1

La solución general de la ecuación 4.41 es:

$$\varphi_1 = B_1 + B_2 r^2 + B_3 r^2 \ln(r) + B_4 r^4 + \lambda(r). \quad (4.55)$$

La aplicación de las condiciones de frontera permitirá determinar el valor propio c_1 . Las ecuaciones 4.46-4.49 se traducen en:

$$B_1 + B_2 \beta^2 + B_3 \beta^2 \ln(\beta) + B_4 \beta^4 = -\lambda(\beta), \quad (4.56)$$

$$2B_2 \beta + B_3 (2 \ln(\beta) + 1) \beta + 4B_4 \beta^3 = -\lambda'(\beta), \quad (4.57)$$

$$2B_3 + 8B_4 (\beta+q)^2 - G \left[B_1 + B_2 (\beta+q)^2 + B_3 (\beta+q)^2 \ln(\beta+q) + B_4 (\beta+q)^4 \right] = \quad (4.58)$$

$$= - \left[\lambda'' - \frac{1}{\beta+q} \lambda' - G\lambda \right] - G\varphi(\beta+q)c_1,$$

$$15(\beta-q)B_4 = -i \operatorname{Re} \left[\varphi_0' + W e^{\varphi_0 (1-\gamma)^2} + \frac{\xi}{\gamma} \varphi_0 \right] \quad (4.59)$$

$$- \left[\lambda_0''' - \frac{1}{(\beta-q)} \lambda_0'' + \frac{1}{(\beta+q)^2} \lambda_0' \right].$$

Para simplificar los cálculos se definirán dos magnitudes, a saber:

$$\delta_3 = - \left[\lambda'' - \frac{1}{\beta+q} \lambda' - G\lambda \right], \quad (4.60)$$

$$\delta_4^* = -i \operatorname{Re} \left[\varphi_0' + W e^{\varphi_0 (1-\gamma)^2} + \frac{\xi}{\gamma} \varphi_0 \right] - \left[\lambda_0''' - \frac{1}{(\beta+q)} \lambda_0'' + \frac{1}{(\beta+q)^2} \lambda_0' \right], \quad (4.61)$$

Por otra parte, el término $G\varphi(\beta+q)$ puede escribirse en forma

más simple. En primer lugar $\rho(\beta+q)$ se puede escribir así:

$$\rho_0(\beta+q) = \frac{1}{2}(\beta+q)^2 \left[\gamma^2 - 1 - 2\ln(\gamma) \right]. \quad (4.62)$$

Además $(\beta+q)^2$ se puede escribir como $1/(1-\gamma)^2$. Entonces $\rho_0(\beta+q)$ es igual a :

$$\rho_0(\beta+q) = 2 \frac{1}{4(1-\gamma)^2} \left[\gamma^2 - 1 - 2\ln(\gamma) \right] = \frac{2}{G}. \quad (4.63)$$

Por tanto:

$$G_p(\beta+q) = 2. \quad (4.64)$$

Usando las ecuaciones 4.60, 4.61 y 4.62, se puede simplificar la escritura de 4.58 y 4.59. O sea:

$$-G \left[B_1 + B_2(\beta+q)^2 + B_3(\beta+q)^2 \ln(\beta+q) + B_4(\beta+q)^4 \right] + \quad (4.65)$$

$$+ 2B_3 + 8B_4(\beta+q)^2 = \delta_3 - 2c_1.$$

$$16(\beta+q)B_4 = \delta_4^* . \quad (4.66)$$

En la ecuación 4.66 solo aparece B_4 ; entonces:

$$B_4 = \delta_4 = \delta_4^* / (16(\beta+q)). \quad (4.67)$$

Si sumamos, después de multiplicar la ecuación 4.56 por -2 y a la ecuación 4.57 por β , se obtiene:

$$-2B_1 + B_3\beta^2 + 2\delta_4\beta^4 = 2\lambda(\beta) - \lambda'(\beta)\beta. \quad (4.68)$$

Ahora se despeja B_2 de la ecuación 4.68:

$$B_2 = -\frac{1}{\beta^2} \left[\lambda C(\beta) + B_1 + B_3 \beta^2 \ln C(\beta) + \delta_4 \beta^4 \right]. \quad (4.69)$$

Sustituimos el valor de E_2 en la ecuación 4.58:

$$2B_3 + 8\delta_4 C(\beta+q)^2 - G \left[B_1 + B_3 C(\beta+q)^2 \ln C(\beta+q) + \delta_4 C(\beta+q)^4 \right] + \quad (4.70)$$

$$\frac{G}{\gamma^2} \left[\lambda C(\beta) + B_1 + B_3 \beta^2 \ln C(\beta) + \delta_4 \beta^4 \right] = \delta_3 - 2c_1,$$

que se simplifica si factorizamos todos los términos que multiplican a B_1 , B_2 y B_3 . Además, si se deja el término independiente del lado derecho, llegamos a lo siguiente:

$$G \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma} \right) B_1 + \left(2 + C(\beta+q)^2 \ln C(\gamma) \right) G B_3 = \quad (4.71)$$

$$- 8\delta_4 C(\beta+q)^2 - \frac{G \lambda C(\beta)}{\gamma^2} + \delta_3 - 2c_1 + \delta_4 C(\beta+q)^2 (1+2\beta q) G.$$

Al despejar B_1 de la ecuación 4.68 se tiene:

$$B_1 - \frac{\beta^2}{2} B_3 = \delta_4 \beta^4 - \lambda C(\beta) + \frac{\beta}{2} \lambda' C(\beta). \quad (4.72)$$

Dividiendo la ecuación 4.71 entre $G \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma} \right)$, se puede despejar también B_1 :

$$B_1 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \left(C(\beta+q)^2 \ln C(\gamma) + \frac{2}{G} \right) B_3 = \quad (4.73)$$

$$\frac{\gamma^2}{G(1-\gamma)^2} \left(- 8\delta_4 C(\beta+q)^2 - \frac{G \lambda C(\beta)}{\gamma^2} + \delta_3 + -2c_1 + \delta_4 C(\beta+q)^2 (1+2\beta q) G \right).$$

Las ecuaciones 4.72 y 4.73 son del tipo $\alpha B_1 + \delta B_2 = b$. Ahora se probará que los factores que multiplican a B_3 en 4.72 y 4.73 son iguales. Primero, usando la definición de G dada en la ecuación 2.20, se concluye que:

$$\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \left[(\beta+q)z \ln(\gamma) + \frac{2}{G} \right] = -\frac{1}{2}\beta z.$$

Por lo tanto, los factores que multiplican a B_3 en 4.72 y 4.73 son iguales. De acuerdo a lo anterior se puede concluir que 4.72 y 4.73 son la misma ecuación. Luego, se puede escribir la siguiente igualdad:

$$\delta_4 \beta^4 - \lambda(\beta) + \frac{\beta}{2} \lambda'(\beta) = \quad (4.74)$$

$$\frac{\gamma^2}{G(1-\gamma^2)z} \left[-8\delta_4(\beta+q)z - G \frac{\phi(\beta)}{\gamma^2} + \delta_3 - 2c_1 + \delta_4(\beta+q)z(1+2\beta q)G \right].$$

Esta ecuación contiene el valor propio c_1 , que da información acerca de la estabilidad del flujo. Despejando se tiene lo siguiente:

$$c_1 = -\frac{1}{2} \left[8\delta_4(\beta+q)z + G \frac{\phi(\beta)}{\gamma^2} - \delta_3 - \delta_4(\beta+q)z(1+2\beta q)G \right] - \quad (4.75)$$

$$- \frac{G}{2} \left[\frac{1-\gamma^2}{\gamma} \right] \left[\delta_4 \beta^4 - \lambda(\beta) + \frac{\beta}{2} \lambda'(\beta) \right].$$

El paso final es sustituir los valores de δ_3 y δ_4 en la ecuación 4.75. Después de una gran cantidad de pasos algebraicos (que por simplicidad no se incluyen aquí) llegamos a una expresión relativamente sencilla del parámetro c_1 , en función de Re , We , ξ y β :

$$c_1 = iRe \left[\mathcal{F}(\beta, q) + \xi \mathcal{G}(\beta, q) + We \mathcal{H}(\beta, q) \right]. \quad (4.76)$$

Cuando el flujo es por fuera del cilindro, la variable q toma el valor 1, mientras que cuando el flujo es por dentro del cilindro q es igual a -1.

La expresión analítica de las funciones \mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{H} es la siguiente para cada caso:

(4.77)

$$\mathcal{F}(\beta, q) = \frac{G}{4} \left[\frac{1}{162} G(1+2\beta q)^2 (41+82\beta q+30\beta^2) - \frac{1}{8} (1+2\beta q+5\beta^2) (3+6\beta q+2\beta^2) \right] \\ + \frac{G}{4} \left[-\frac{3}{4} (\beta+q)^2 (1+2\beta q) \ln \left(\frac{\beta+q}{\beta} \right) + (\beta+q)^4 \ln^2 \left(\frac{\beta+q}{\beta} \right) \right].$$

$$\mathcal{Y}(\beta, q) = \frac{1}{2} \frac{\beta+q}{Y} \left[\frac{1}{G} - \frac{1}{8} \left(\frac{1+2\beta q}{\beta+q} \right)^2 \right]. \quad (4.78)$$

$$\mathcal{X}(\beta, q) = \frac{q}{2} \frac{1}{\beta+q} \left[\frac{1}{G} - \frac{1}{8} \left(\frac{1+2\beta q}{\beta+q} \right)^2 \right]. \quad (4.79)$$

Como puede apreciarse las funciones \mathcal{Y} y \mathcal{X} son muy parecidas. Este detalle permite que c_1 se pueda escribir también en la forma:

$$c_1 = i \operatorname{Re} \left[\mathcal{F}(\beta, q) + \left(\frac{\kappa}{Y} + q \frac{We}{(\beta+q)^2} \right) \mathcal{X}(\beta, q) \right], \quad (4.80)$$

en donde:

$$\mathcal{X}(\beta, q) = (\beta+q) \left[\frac{1}{G} - \frac{1}{8} \left(\frac{1+2\beta q}{\beta+q} \right)^2 \right]. \quad (4.81)$$

4.6. -ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD

En este capítulo se han calculado los primeros dos términos del desarrollo en serie de potencias del parámetro c . El primero (c_0) es la velocidad de fase de la perturbación. El segundo término es una cantidad imaginaria; por lo tanto, induce en los campos de velocidad y presión de la perturbación un factor de la forma: $\exp(kc_1)$, en donde $c_1 = c_1/\nu$. La aparición de esta exponencial real indica un crecimiento o decaimiento de la perturbación, dependiendo del signo de c_1 . Cuando $c_1 > 0$ el flujo es inestable, mientras que $c_1 < 0$ significa que las perturbaciones se amortiguan en el tiempo y por ende el flujo es estable. El caso $c_1 = 0$ corresponde a una perturbación que permanece invariable (estabilidad neutral).

El término c_i depende de 5 parámetros: Re , ξ , We , β y q . La dependencia de c_i respecto a Re , We y ξ es lineal, como se puede apreciar en la ecuación 4.76.

La influencia del número de Reynolds, de la rotación y de la tensión superficial se determina en gran medida por las funciones \mathcal{F} , \mathcal{G} y \mathcal{H} respectivamente. Para evitar confusiones se analizan por separado los casos a) escurrimiento por el exterior y b) escurrimiento por el interior.

A) Película escurriendo por el exterior del cilindro:

En primer lugar el valor del parámetro q es 1. Luego, en la figura 8 se tiene una gráfica de \mathcal{F} , \mathcal{G} y \mathcal{H} en función del radio del cilindro. Como se puede apreciar las tres funciones son positivas, lo que significa que c_i siempre es positivo y por ello el flujo es inestable.

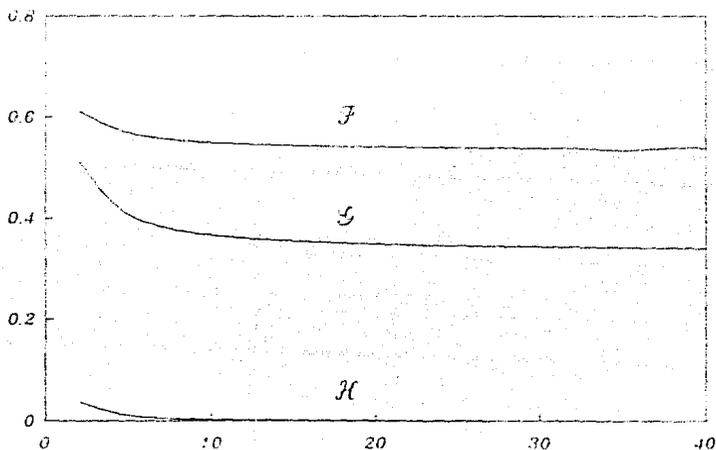


FIGURA 8.- Orden de las funciones \mathcal{F} , \mathcal{G} y \mathcal{H} vs. β . Escurrimiento por el exterior. Las tres funciones son positivas, lo que significa que el flujo siempre es inestable.

Por principio de cuentas un incremento en el número de Reynolds -dejando los demás parámetros constantes- induce un crecimiento en el valor de c_r . Dicho de otra manera, el aumento de las fuerzas de inercia con respecto a la fuerza viscosa hace que el flujo sea más inestable. Desde un punto de vista físico el número de Reynolds se puede incrementar, por ejemplo, si aumenta el flujo volumétrico; otra forma es usando un fluido cuya viscosidad es más pequeña.

La tensión superficial también genera inestabilidades en el flujo. En principio esto parece raro ya que las fuerzas capilares ejercen una influencia estabilizadora en una gran variedad de flujos (Drazin, 1970). Explicaremos enseguida de que manera se produce esta inestabilidad: un fluido tiende a un estado de mínima energía de superficie, que es también un estado con la mínima área de la superficie libre. Imaginemos ahora que la superficie libre se contrae (ahorcamiento) formando localmente un anillo de menores

dimensiones que las secciones de fluido adyacente, tal como se ilustra en la figura 9. Una perturbación con estas características da lugar a una disminución del área de la superficie libre y por lo tanto las fuerzas capilares favorecen su permanencia y crecimiento. Luego, el flujo se vuelve inestable. El ahorcamiento capilar se manifiesta inclusive en el rompimiento de la continuidad del flujo como lo muestran recientes

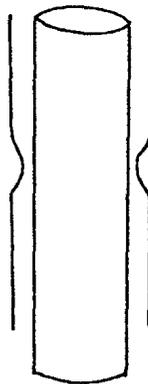


FIGURA 9

investigaciones experimentales (Solorio, 1990).

Por último, el ahorcamiento capilar solo es relevante para valores pequeños de β . Esto se deduce directamente de la figura 6: la función X decrece rápidamente con el aumento de β ; inclusive para valores pequeños de β la magnitud de X es pequeña si se le compara con F y Y .

Ya se dijo que la tensión superficial solo influye apreciablemente en la estabilidad del flujo cuando β es pequeño. Esto se debe primordialmente a que las variaciones en la curvatura (ΔK) de la superficie libre -las que produce una perturbación- son proporcionales al inverso del cuadrado del radio:

$$\Delta K = \frac{1}{r^2} \quad (4.82)$$

Entonces entre más pequeño sea el radio adimensional β , más grande será la influencia de la tensión superficial.

El otro factor que afecta la estabilidad del flujo es la rotación, que aparece en c_1 a través del parámetro ξ ; al igual que el número de Reynolds y que las fuerzas capilares, la rotación es un elemento de inestabilidad del flujo. La fuerza centrífuga empuja al fluido hacia afuera; esto induce un crecimiento de las perturbaciones y, por lo tanto, el flujo se torna inestable.

Como se puede apreciar en la figura 8, las funciones F y Y son del mismo orden de magnitud, lo que quiere decir que las fuerzas de inercia y la fuerza centrífuga ejercen efectos comparables sobre la estabilidad del flujo.

Ahora se dirán algunas palabras sobre la influencia de la curvatura en la estabilidad del flujo. En primer lugar, las funciones F , Y y X son decrecientes y cuando $\beta > 10$ las tres funciones toman un valor prácticamente constante. En otras palabras, la influencia de la curvatura lateral solo es importante si el radio del cilindro es pequeño, o con mayor precisión, si $\beta < 10$.

La ecuación que define a c_1 se puede escribir en la forma:

$$c_i = \text{Re} \left[1 + \xi \frac{\mathcal{Y}(\beta, 1)}{\mathcal{F}(\beta, 1)} \right] \mathcal{F}(\beta, 1) + \text{Re} \text{We} \mathcal{X}(\beta, 1). \quad (4.83)$$

Con valores de β mayores que 10 el cociente $\frac{\mathcal{Y}(\beta, 1)}{\mathcal{F}(\beta, 1)}$ es casi constante:

$$\frac{\mathcal{Y}(\beta, 1)}{\mathcal{F}(\beta, 1)} \cong 0.65. \quad (4.84)$$

Por lo tanto $c_i \cong \text{Re}(1 + 0.65\xi) \mathcal{F}(\beta, 1)$. Se concluye entonces que la rotación da lugar a inestabilidades que corresponden a un flujo sobre un cilindro sin rotación con un número de Reynolds Re^* mayor:

$$\text{Re}^* = \text{Re}(1 + 0.65\xi). \quad (4.85)$$

Por otra parte, se ha mencionado que las funciones \mathcal{Y} y \mathcal{X} son muy parecidas, no así su comportamiento (a veces una pequeña diferencia en la expresión analítica origina grandes diferencias), lo que dio pie a escribir el valor propio c_i en términos de las funciones \mathcal{F} e \mathcal{S} . La figura 10 contiene las gráficas de \mathcal{F} e \mathcal{S} en función de β . Resalta inmediatamente que \mathcal{F} es positiva, pero además prácticamente es constante. Cuando $\beta > 10$ el parámetro c_i se aproxima bastante bien con la expresión:

$$c_i = \text{Re} \left[0.84 - \left(\frac{\xi}{\gamma} + \frac{\text{We}}{(\beta - \alpha)^2} \right) 0.33 \right] \quad (4.86)$$

En la figura 11 se grafica c_i/Re vs We para dos valores de β : 2 y 8. Se ha optado por graficar c_i/Re considerando que hay una relación lineal entre c_i y Re . Las curvas de c_i vs. We , ξ o β con un valor arbitrario de Re tienen las mismas características que una gráfica de c_i/Re . Evidentemente las curvas son líneas rectas; la primera, con $\beta=2$, tiene una pendiente mayor que la pendiente a la recta correspondiente a $\beta = 8$. De esta manera también se

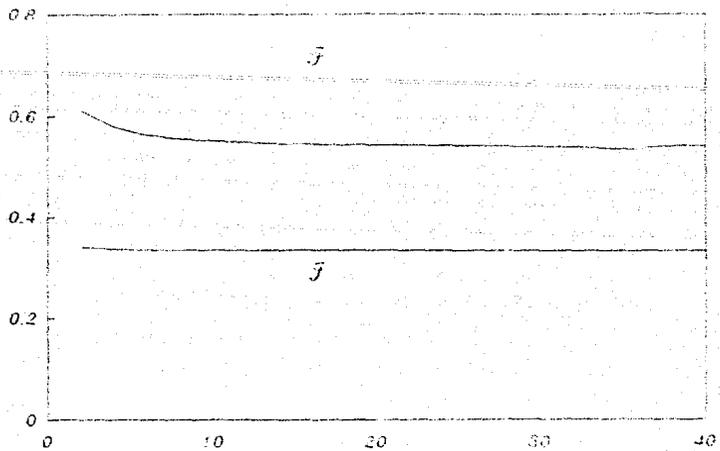


FIGURA 10.- Gráfica de las funciones F e G vs. β . Escurrento por el exterior. Nótese que ambas funciones son decrecientes, además G tiende rápidamente a un valor constante.

C_v/R_c
1.2 -

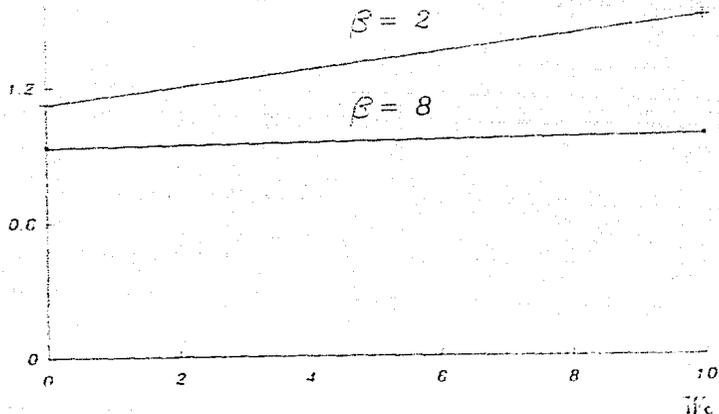


FIGURA 11.- Gráfica de C_v/R_c vs. We con dos valores de β . $\xi = 1$. La relación entre ambas variables es lineal, además la pendiente de la recta crece con la distribución de β .

ilustra que la tensión superficial solo es importante si el radio del cilindro es pequeño.

En la figura 12 aparece una gráfica de c_1/Re vs. ξ para dos valores distintos de β (2 y 10). También en este caso las curvas son líneas rectas. La pendiente de la curva correspondiente a $\beta=2$ es mayor que la pendiente de la recta correspondiente a $\beta=10$. Lo anterior significa que el efecto desestabilizador de la rotación es más apreciable cuando se tienen radios pequeños.

(C. A.)

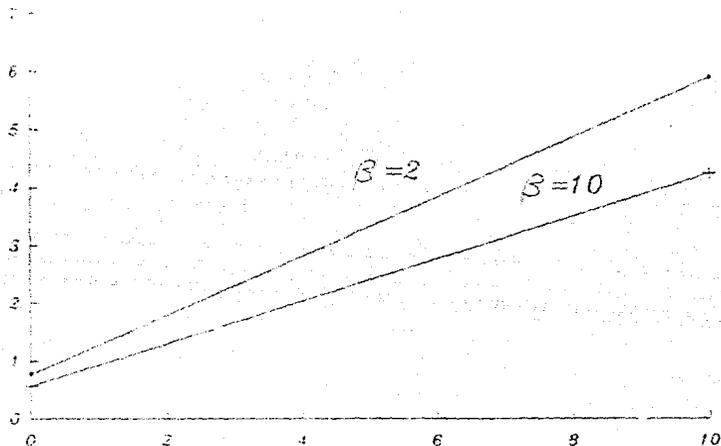


FIGURA 12.- Gráfica de c_1/Re vs. ξ ; acurrimento por el exterior y con dos valores de β . Wessl. La relación entre ambas variables es lineal, además c_1/Re es una función decreciente de β . El efecto desestabilizador de la rotación crece con el aumento de ξ .

Por otra parte, la figura 13 contiene una gráfica de c_1 vs β con los demás parámetros permanecen constantes: $Re=We=\xi=1$. El valor propio c_1 es una función decreciente de β y por lo tanto como conclusión se tiene que en los cilindros con radio pequeño es donde las perturbaciones infinitesimales con número de onda pequeño tienen la mayor tasa de crecimiento temporal.

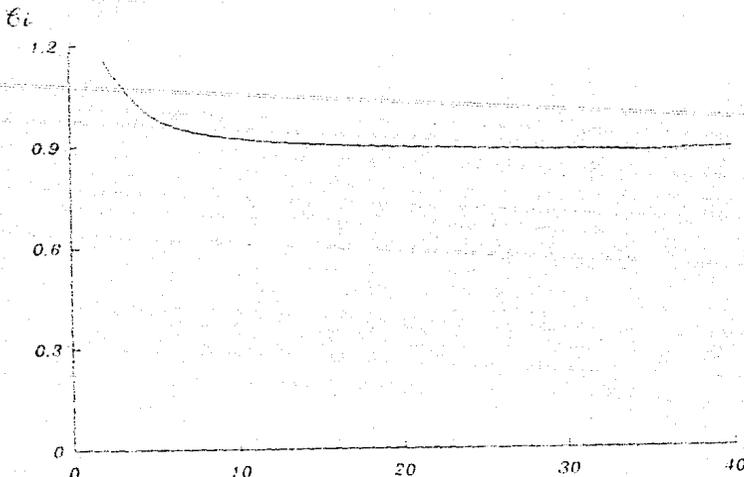


FIGURA 13. - Gráfico de c_i vs β , con $Re=1$, $We=1$ y $\xi=1$. Como se pueda apreciar este parámetro siempre es positivo y es decreciente con respecto a β . Su signo determina la inestabilidad del flujo.

B) Película escurriendo por el interior del cilindro:

El valor del parámetro q es -1 . La evaluación de las funciones \mathcal{F} , \mathcal{Y} y \mathcal{X} indica que la primera y la tercera son positivas, mientras que \mathcal{Y} es negativa. Esto se puede ver en la figura 14, que incluye las gráficas de \mathcal{F} , \mathcal{Y} y \mathcal{X} en función de β . De lo anterior se desprende que tanto las fuerzas de inercia como la tensión superficial producen inestabilidades en el flujo. Ahora, por el contrario, la rotación se opone al crecimiento de las perturbaciones. Si elegimos adecuadamente la magnitud de ξ es posible que c_i adquiera un valor negativo.

Es importante notar que \mathcal{F} y \mathcal{Y} son funciones cuya magnitud crece con β , mientras que la magnitud de \mathcal{X} decrece con rapidez. Lo anterior implica que, comparativamente, en los cilindros de radio pequeño los efectos de las fuerzas de inercia y de la rotación son más débiles. Por el contrario, la influencia de la tensión superficial crece con la disminución de β . Inclusive, las fuerzas capilares son más importantes en el surgimiento de inestabilidades

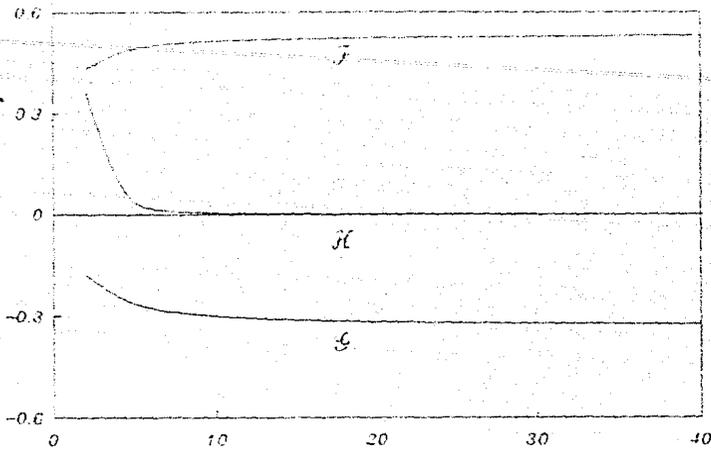


FIGURA 14.- Gráfica de F , G y H vs β . Flujo por el interior del cilindro. Se aprecia que F y H son positivas, mientras que G es negativa. Esto último indica que la rotación ejerce ahora un efecto estabilizador sobre el flujo.

cuando la película escurre por la pared interior del cilindro que cuando el líquido escurre por el exterior. Esto se puede entender fácilmente si se recuerda que las fuerzas capilares son proporcionales a la variación en la curvatura, y esta a su vez es proporcional al inverso del cuadrado del radio. Si el flujo escurre por el exterior $r=\beta-1$; por otra parte, si el flujo escurre por el interior entonces $r=\beta+1$. Inmediatamente se concluye que:

$$\frac{1}{(\beta+1)^2} < \frac{1}{(\beta-1)^2} \quad (4.87)$$

Al principio de este apartado B se mencionó que la rotación puede eliminar las perturbaciones del flujo (hasta ahora la conclusión se limita a perturbaciones de número de onda pequeño) si se elige adecuadamente el valor de ξ .

Existe un valor crítico del número centrífugo a partir del cual $c_1 \leq 0$. Este valor se determina haciendo $c_1=0$ y resolviendo para ξ :

$$\xi_c = - \frac{We \mathcal{R}(\beta, -1) + \mathcal{R}(\beta, -1)}{\mathcal{R}(\beta, -1)} \quad (4.88)$$

Esta cantidad siempre es positiva, lo que implica que en cualquier circunstancia es posible producir un flujo estable. En la figura 15 se ha hecho una gráfica en tres dimensiones de ξ_c en función de We y β ; ahí se puede apreciar que se necesitan valores grandes de ξ para estabilizar una película que escurre por un

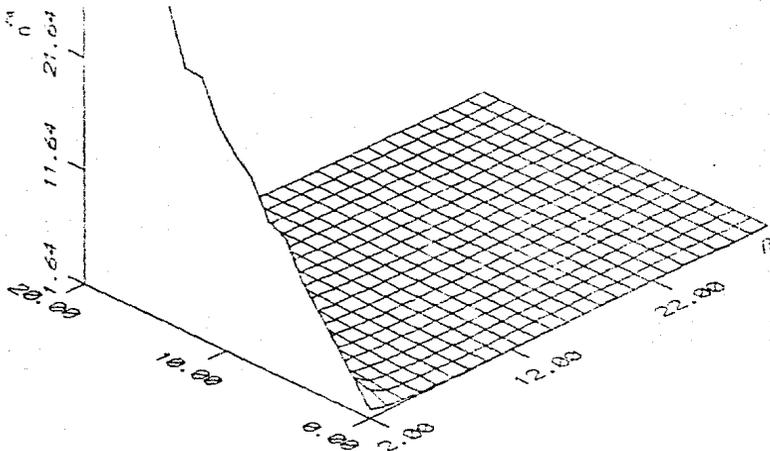


FIGURA 15.- Valor crítico de ξ en función de β y We (flujo por el interior). ξ_c solo adquiere valores grandes cuando β es pequeño, es decir, cuando el ahorcamiento capilar es importante.

cilindro cuyo radio es pequeño. Además, fuera de una pequeña región el comportamiento de ξ_c es bastante suave. Además, en la figura 16 hay una gráfica de las curvas de nivel de ξ_c . Ahí se observa que las curvas están poco espaciadas en la región de radios pequeños.

La relación entre ξ_c y We es lineal, pero si el número de Weber es pequeño ($We \ll \beta^2$) y el radio del cilindro es mayor a 10,

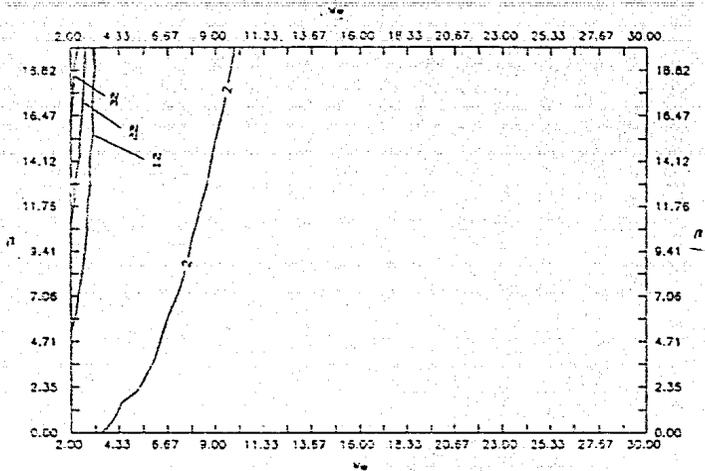


FIGURA 16. - Equipotenciales de ξ_c en el plano β -We (flujo por el interior). Se puede apreciar que el espaciamiento entre las sucesivas curvas de nivel disminuye conforme β decrece. Los equipotenciales corresponden a valores de ξ_c iguales a: 2, 12, 22 y 32.

entonces el valor crítico del número centrifugo adquiere un valor casi constante:

$$\xi_c \cong 1.64 \quad (4.89)$$

Si se elimina la hipótesis de que el número de Weber sea pequeño y se mantiene la condición $\beta \gg 10$, entonces ξ_c se puede expresar así:

$$\xi_c \cong \frac{0.33}{(\beta-1)^2} We + 1.64. \quad (4.90)$$

En la figura 17 se incluyen las curvas de \mathcal{F} e \mathcal{S} en función de β ; la primera es positiva y la segunda es negativa, pero \mathcal{S} es casi constante.

c_1 fue escrita en la forma de la ecuación 4.80 para mostrar que la tensión superficial y la fuerza centrifuga tienen elementos en común sobre la estabilidad del flujo. Si $\xi > \frac{\beta}{(\beta-1)^3} We$ el

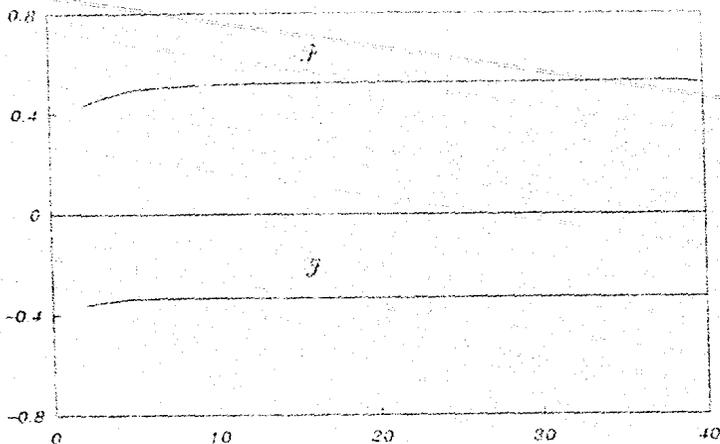


FIGURA 17.- Gráficas de F e J vs β . Flujo por el interior. La función F es positiva, mientras que J es negativa y tiende rápidamente a un valor constante.

segundo término de la ecuación 4.80 es negativo y por lo tanto la rotación anula las inestabilidades producidas por tensión superficial.

En la figura 18 se presenta la gráfica de $c_L Re$ vs We , tomando dos valores distintos de β (2 y 8) y con $\xi=1$. Ahí se aprecia que la relación entre ambas variables es lineal, y que la pendiente de la curva con $\beta=2$ es mayor que la pendiente de la recta con $\beta=8$. Así, el efecto de la tensión superficial decrece con el aumento de β .

La figura 19 contiene las gráficas de $c_L Re$ vs. ξ usando dos valores diferentes de β y con $We=4$. En valor absoluto, la pendiente de la curva con $\beta=10$ es mayor que la pendiente de la curva con $\beta=2$. Esto quiere decir que el efecto estabilizador de la rotación decrece con la disminución del radio adimensional del cilindro.

Cuando $\beta > 10$ el parámetro c_L se aproxima bastante bien con la expresión:

$$c_L = Re \left[0.53 - \left(\frac{\xi}{\gamma} - \frac{We}{(\beta+q)^2} \right) 0.33 \right] \quad (4.91)$$

Finalmente, en la figura 20 se muestra una gráfica de c_i vs β (los demás parámetros fijos: $Re=We=\xi=1$). Se puede apreciar que c_i cambia de signo con un valor pequeño de β . Esta es una diferencia notable con respecto a la estabilidad de una película que escurre por el exterior, en donde c_i siempre es positivo (ver figura 14).

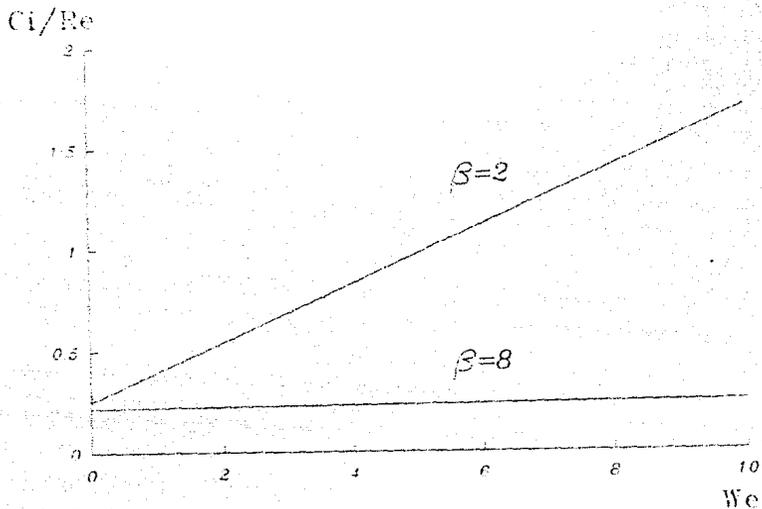


FIGURA 18. - Gráfica de c_i/Re vs We con dos valores de β . $\xi=1$. E scorrimento por el interior. Ambas curvas son líneas rectas con pendiente positiva. Esta última característica indica que la tensión superficial produce inestabilidades en el flujo (ahorcamiento capilar).

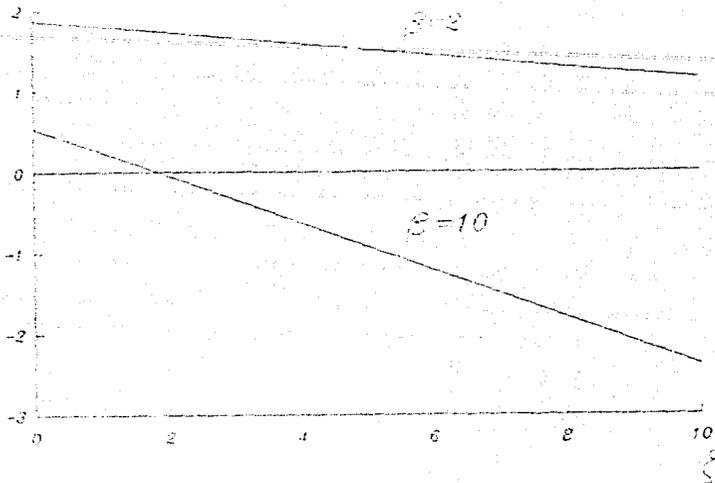
C_i/Re 

FIGURA 19.- Gráfica de C_i/Re vs ξ para dos valores de β . Flujo por el interior. $We=4$. Las 2 curvas son líneas rectas con pendiente negativa. Lo último indica que la rotación juega un papel estabilizador sobre el flujo. Notese que cerca de $\xi=2$ la curva con $\beta=10$ cambia de signo.

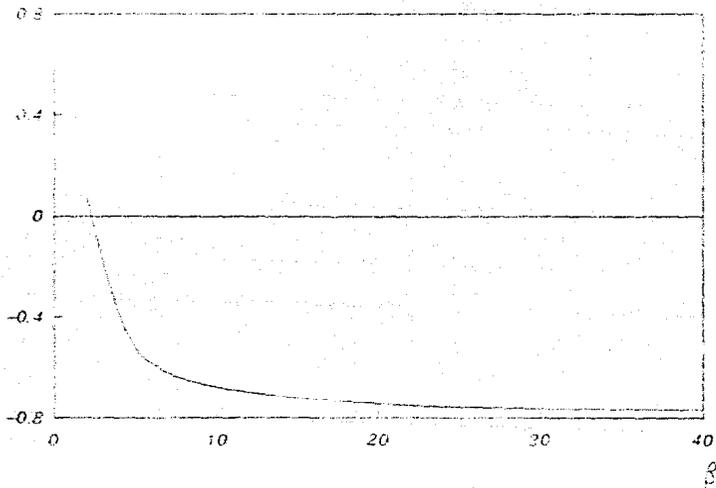
 C_i 

FIGURA 20.- Gráfica de C_i vs β . $Re=1$, $We=1$, $\xi=4$. Flujo por el interior. Notese que hay un cambio de signo, lo que implica estabilidad en el flujo a partir de cierto radio β .

5.- APROXIMACION PARA NUMEROS DE REYNOLDS PEQUENOS

5.1 INTRODUCCION

En el capítulo 4 se investigó la estabilidad del flujo frente a perturbaciones con número de onda pequeño. Entre otras cosas se mostró que tanto la tensión superficial, como la fuerza centrífuga y el número de Reynolds influyen sobre la estabilidad. Se concluyó que todos estos factores producen inestabilidades por el exterior del cilindro. Sin embargo, si el líquido escurre por el interior, la rotación estabiliza al flujo.

En esta sección se investigará la estabilidad del flujo cuando el número de Reynolds es pequeño. A diferencia del caso anterior donde se impusieron restricciones sobre la perturbación ($m=0$ y k pequeño), ahora k puede tomar un valor arbitrario y m puede ser distinto de cero. La condición sobre el número de Reynolds puede significar entre otras cosas que la película es delgada o que el flujo es muy viscoso. Además, se supone que el número de Taylor es despreciable. Esto se puede justificar si recordamos que $\tau = \frac{2\omega h^2}{\nu}$: la influencia de la fuerza de Coriolis sería poco significativa, por ejemplo, si el flujo es muy viscoso o si la capa de líquido es delgada.

Un detalle importante respecto a esta aproximación es que la suposición de una velocidad angular antiparalela a la gravedad se puede relajar; los resultados se pueden extender al problema de un cilindro en rotación, cuyo eje tiene una orientación arbitraria. Previamente ya se tenían algunos resultados -fundamentalmente para un flujo por el exterior del cilindro (Yih, 1959; Boudourides, 1986). Aquí haremos una extensión al flujo por ambas paredes (interior y exterior) sin ninguna restricción en el radio β . Además, se investigará la estabilidad del flujo ante perturbaciones tridimensionales, es decir, con un número azimutal m distinto de cero.

Estamos interesados en saber que efectos produce la rotación sobre perturbaciones con número de onda arbitrario, y si dichos efectos son semejantes a los deducidos en la aproximación para números de onda pequeños (estabilizar por el interior y desestabilizar por el exterior). Además, nos interesa conocer la influencia de la tensión superficial. En otros trabajos sobre estabilidad lineal (Yih, 1962; Drazin, 1979) la tensión superficial estabiliza en la región de números de onda grandes. Queremos saber que ocurrirá ahora.

Siguiendo un procedimiento semejante al del capítulo anterior, se hará un desarrollo en serie de potencias de ϕ , ψ y c :

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 + \phi_1 Re + \phi_2 Re^2 + \dots \\ \psi &= \psi_0 + \psi_1 Re + \psi_2 Re^2 + \dots \\ c &= c_0 + c_1 Re + c_2 Re^2 + \dots\end{aligned}\tag{5.1}$$

Al sustituir 5.1 en las ecuaciones 3.41 y 3.42 y reagrupar en potencias ascendentes de Re se obtiene:

$$\begin{aligned}& \left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right] \left[\lim_{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_0}{r} \right) - \left[D^2 - kz - \frac{1}{r^2} \right] \phi_0 \right] + i \frac{2m}{r^2} \left[\left[kz + \frac{m^2}{r^2} \right] \psi_0 + i \frac{m}{r^2} \frac{d}{dr} (Cr \phi_0) \right] + \\ & \left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right] \left[\lim_{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_1}{r} \right) - \left[D^2 - kz - \frac{1}{r^2} \right] \phi_1 \right] + i \frac{2m}{r^2} \left[\left[kz + \frac{m^2}{r^2} \right] \psi_1 + i \frac{m}{r^2} \frac{d}{dr} (Cr \phi_1) \right] Re - \\ & - ik(CW - c) \left[\lim_{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_0}{r} \right) - \left[D^2 - kz - \frac{1}{r^2} \right] \phi_1 \right] Re + \\ & - ik \left[-\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \left[\frac{d}{dr} (Cr \phi_1) - \lim \psi_1 \right] + \frac{d}{dr} \left[\phi_1 \frac{dU}{dr} \right] \right] Re - k^2 r \psi_0 + \dots = 0 \\ & ik \left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (Cr \psi_0) + \lim \phi_0 \right] + \\ & ik \left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (Cr \psi_1) + \lim \phi_1 \right] Re + \\ & + k^2 \left[(W - c) \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (Cr \psi_0) + \lim \phi_0 \right] + \psi_0 \frac{dU}{dr} \right] Re + i \frac{k}{r} \left[\frac{d}{dr} (Cr \phi_0) - \lim \psi_0 \right] r + \dots = 0\end{aligned}\tag{5.2}$$

(5.2)

(5.3)

También se debe hacer una expansión en serie de potencias sobre las condiciones de frontera. Las ecuaciones resultantes son:

$$\phi_0 + \phi_1 Re + \phi_2 Re^2 + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta \quad (5.4)$$

$$w_0 + w_1 Re + w_2 Re^2 + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta \quad (5.5)$$

$$\phi_0' + \phi_1' Re + \phi_2' Re^2 + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta \quad (5.6)$$

$$\left(\left[D^2 - \frac{1}{r^2} + kz \right] \phi_0 - i m \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_0 \right] - \frac{G \phi_0}{C_0 - 1} \right) + \quad (5.7)$$

$$\left(\left[D^2 - \frac{1}{r^2} + kz \right] \phi_1 - i m \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_1 \right] - \frac{G \phi_1}{C_0 - 1} + \frac{G \phi_0}{(C_0 - 1) z} c_1 \right) Re + \dots = 0$$

en $r = \beta + q$

$$\left(\frac{m}{r} \phi_0 + i r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_0 \right] \right) + \left(\frac{m}{r} \phi_1 + i r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_1 \right] \right) Re + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta + q \quad (5.8)$$

$$\left(-ik \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - kz - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{rz} \right] w_0 - 2k \frac{m}{r^2} \phi_0 + 2k \frac{m}{r} \phi_0' \right) + \quad (5.9)$$

$$\left(-kz(W - c) w_0 - ik \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - kz - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{rz} \right] w_1 - 2k \frac{m}{r^2} \phi_1 + 2k \frac{m}{r} \phi_1' \right) Re +$$

$$i m \frac{d}{dr} \left[w_0 \left(kz + \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{rz} \right) - \frac{z}{\gamma} \right] \frac{\phi_0}{C_0 - 1} + i k r \phi_0 \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta + q$$

(5.10)

$$\left(-i m \psi_0 - \left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_0) - i m \psi_0 \right] + 2k^2 \phi_0' \right) +$$

$$\left(i \frac{k}{r} (W - c) \left[\frac{d}{dr} (r \phi_0) - i m \psi_0 \right] - \left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \phi_1) - i m \psi_1 \right] + 2k^2 \phi_1' \right) Re +$$

$$i k Re \left[w_0 \left(kz + \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{rz} \right) - \frac{z}{\gamma} \right] \frac{\phi_0}{C_0 - 1} + \dots = 0 \quad \text{en } r = \beta + q$$

Las potencias del número de Reynolds: 1 , Re , Re^2 , etc. son linealmente independientes. Por otra parte, si se tiene la

combinación lineal $a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + \dots = 0$, entonces los coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots son todos cero. Por lo tanto los coeficientes de cada una de las ecuaciones 5.2-5.10 son iguales a cero. Lo anterior permite obtener para cada potencia un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas con sus respectivas condiciones de frontera.

5.2. -SOLUCION A ORDEN CERO. CASO $m \neq 0$

Las ecuaciones a orden cero dan información sobre la estabilidad del flujo en la vecindad $Re=0$. En esta parte de la investigación tendrán influencia la tensión superficial, la rotación, el radio del cilindro, así como los parámetros k y m .

El problema a resolver es un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right] \left[i m \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_0}{r} \right) - \left[D^2 - kz - \frac{1}{r^2} \right] \phi_0 \right] + i \frac{2m}{r^2} \left[\left[kz + \frac{m^2}{r^2} \right] \psi_0 + i \frac{m}{r^2} \frac{d}{dr} (r \phi_0) \right] = 0 \quad (5.11)$$

$$\left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \psi_0) + i m \phi_0 \right] = 0 \quad (5.12)$$

cuyas condiciones de frontera son:

$$\phi_0 = 0 \quad \text{en } r = \beta \quad (5.13)$$

$$\psi_0 = 0 \quad \text{en } r = \beta \quad (5.14)$$

$$\frac{d\phi_0}{dr} = 0 \quad \text{en } r = \beta, \quad (5.15)$$

$$\left[D^2 - \frac{1}{r^2} + kz \right] \phi_0 - i m \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \psi_0 \right] - \frac{G}{c_0 - 1} \phi_0 = 0 \quad \text{en } r = \beta + q \quad (5.16)$$

$$\frac{m}{r}\phi_0 + ir\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\psi_0\right) = 0 \quad \text{en } r = \beta + q \quad (5.17)$$

$$-ik\left[\psi_0' + \frac{1}{r}\psi_0 - \left(kz + \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right)\psi_0\right] - 2k\frac{m}{r^2}\phi_0 + 2k\frac{m}{r}\phi_0' + \quad (5.18)$$

$$ir\frac{m}{r}\left[S\left(kz + \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{\xi'}{\gamma}\right]\frac{\phi_0}{c_0 - 1} = 0 \quad \text{en } r = \beta + q$$

$$-\left[D^2 - kz - \frac{m^2}{r^2}\right]\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}(r\phi_0) - i\psi_0\right] + 2kz\phi_0' + ik\left[S\left(kz + \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{\xi'}{\gamma}\right]\frac{\phi_0}{c_0 - 1} = 0 \quad (5.19)$$

$$\text{en } r = \beta + q$$

Aquí definimos los parámetros $S = ReWe$ y $\xi' = Re\xi$ que se han incluido en la aproximación a orden cero. Se debe tener en cuenta que cuando Re tiende a cero, ni S ni ξ' se anulan necesariamente. Esto se debe a que en el flujo principal hay un balance entre la viscosidad y la gravedad, esto es:

$$g \sim \nu \frac{U}{h^2}$$

Por tanto $S \sim \frac{\sigma}{gh^2}$ y $\xi' \sim \frac{\omega^2 R}{g}$. Se puede apreciar que ninguno de los dos parámetros incluye a la velocidad representativa W_0 y a la viscosidad cinemática ν . Además, ξ' es igual al cociente de la fuerza centrífuga y la fuerza de gravedad. La inclusión de la tensión superficial y de la fuerza centrífuga pudo haberse hecho también mediante una adimensionalización diferente, de manera que ambos factores aparecieran incluso a orden cero (ver por ejemplo Krantz, 1976).

El método inicial de solución de las ecuaciones 5.11 y 5.12 fue por series de Frobenius. Mediante esta técnica se determinó que las soluciones se expresan en términos de las funciones

modificadas de Bessel. Con el fin de simplificar los cálculos se elaboró un método de solución que evita recurrir a series de Frobenius, y que se basa solamente en las propiedades de las funciones modificadas de Bessel.

Primero, las ecuaciones diferenciales deberán ser expresadas en función de una nueva variable $x=kr$. Con este cambio de variable las ecuaciones de la perturbación se reescriben así:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \left[i m \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi_0}{x} \right) - \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{1}{x^2} \right] \phi_0 \right] + \quad (5.20)$$

$$i \frac{2m}{x^2} \left[\left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) \psi_0 + i \frac{m}{x^2} \frac{d}{dx} (x \psi_0) \right] = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (x \psi_0) + i m \phi_0 \right] = 0 \quad (5.21)$$

Enseguida se define a $\frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (x \psi_0) + i m \phi_0 \right]$ como la función $\mathcal{N}(x)$, para que la ecuación 5.21 se transforme en:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \mathcal{N} = 0 \quad (5.22)$$

que es conocida en la física matemática como la ecuación modificada de Bessel y que a veces recibe el nombre de ecuación de Bessel de argumento imaginario (Lebedev, 1972). La solución general de 5.22 es:

$$\mathcal{N}(x) = A_1 I_m(x) + A_2 K_m(x) \quad (5.23)$$

A $I_m(x)$ se le conoce como función modificada de Bessel de primera especie y a $K_m(x)$ se le llama función de MacDonald o función modificada de Bessel de tercera especie. El subíndice m es el orden de la función, que en general es un número complejo, pero en nuestro caso es un número entero.

Hay varias manera de representar a las funciones I_m y K_m , por ejemplo, en serie de potencias o mediante una fórmula integral (Tijonov, 1980). Nosotros evaluamos estas funciones usando varias representaciones; por ejemplo, en la región de x pequeñas se usó el algoritmo del paquete Science and Engineering Tools, que calcula las funciones de Bessel recurriendo a las funciones de Kummer. Para valores intermedios también se uso la expansión en serie de potencias y para valores grandes de x , las funciones de Macdonald se evaluaron con la siguiente formula integral:

$$K_m(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh(u)} \cosh(mu) du \quad (5.24)$$

De entre varias fórmulas integrales esta fue la que requirió un menor tiempo en computadora.

Las funciones modificadas de Bessel satisfacen ciertas propiedades (Lebedev, 1972) que usaremos con frecuencia en este capítulo:

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \quad (5.25)$$

$$K_{-v}(x) = K_v(x) \quad (5.26)$$

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I_{\nu}'(x) \quad (5.27)$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x) \quad (5.28)$$

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K_{\nu}'(x) \quad (5.29)$$

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x) \quad (5.30)$$

siendo n un número entero y ν un número real.

Por claridad, algunas identidades matemáticas que se utilizan en este capítulo se demuestran en el apéndice A.

Para simplificar, de aquí en adelante, en lugar de ocupar la función potencial ψ , se usará la función asociada:

$$\zeta = x\psi. \quad (5.31)$$

Entonces despejando ϕ_0 de la definición de \mathcal{Y} se obtiene:

$$\phi_0 = \frac{i}{m} \left[\frac{d\zeta}{dx} - x\mathcal{Y} \right] \quad (5.32)$$

Es muy importante hacer notar que el parámetro m aparece dividiendo en esta ecuación. Esto limita la validez de los cálculos siguientes al caso $m \neq 0$, y por lo tanto se deberán realizar un cálculo aparte para determinar la estabilidad de perturbaciones con $m=0$.

La ecuación 5.32 permite expresar a 5.20 como una ecuación diferencial de ζ . Usando las identidades del apéndice A, se obtiene una ecuación diferencial de quinto orden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right]^2 \zeta = \\ \left[-x \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] - \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x} \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \mathcal{Y} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Todos los términos del miembro derecho de esta ecuación diferencial son iguales a cero, pues \mathcal{Y} es solución de la ecuación: $\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \mathcal{Y} = 0$. Por lo tanto, el problema se reduce a resolver una ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right]^2 \zeta = 0 \quad (5.34)$$

Mediante una integración directa se reduce en uno el orden de la ecuación diferencial.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right]^2 \zeta = A_7 \quad (5.35)$$

siendo A_7 la constante de integración. La parte homogénea de la ecuación 5.35 es bien conocida en la teoría de la elasticidad (Amenzade, 1979), y tiene cuatro soluciones linealmente independientes que se expresan en términos de las funciones modificadas de Bessel, a saber: $I_m(x)$, $xI_{m+1}(x)$, $K_m(x)$ y $xK_{m+1}(x)$. Por lo tanto la solución general de la ecuación 5.34 es:

$$\zeta(x) = A_3 I_m(x) + A_4 x I_{m+1}(x) + A_5 K_m(x) + A_6 x K_{m+1}(x) + \gamma(x) \quad (5.36)$$

siendo $\gamma(x)$ la solución particular de la ecuación inhomogénea 5.35.

Las funciones potenciales ϕ_0 y ψ_0 satisfacen siete condiciones de frontera. Por otro lado, la solución general del sistema de ecuaciones contiene en total 7 constantes. Entonces, al imponer las condiciones a la frontera se obtiene un sistema de 7 ecuaciones lineales con siete incógnitas. El parámetro c_0 es aquel que hace que el determinante del sistema de ecuaciones sea igual a cero. Esta condición de solubilidad es necesaria para que las funciones ϕ_0 y ψ_0 sean distintas de cero.

Una propiedad importante de las funciones de Bessel es que todas sus derivadas se pueden escribir en términos de funciones de Bessel de otros ordenes. Recurriendo a esta propiedad se elaboró un algoritmo de cálculo del valor propio c_0 que incluía únicamente cálculo de funciones modificadas de Bessel de distintos ordenes.

La condición de esfuerzos normales en la superficie libre se ha escrito de dos maneras equivalentes (ecuaciones 5.18 y 5.19). Esto es importante ya que, con el uso de ambas, se demostrará que una de las constantes es igual a cero.

La ecuación 5.18 se puede reescribir en términos de la función ζ y con la variable $x=kr$. Si además se usa la identidad II del apéndice A se obtiene la ecuación:

$$-\frac{i}{x} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \zeta + i \frac{2}{x^2} \frac{d\zeta}{dx} + 2m \frac{d}{dx} \left[\frac{\phi_0}{x} \right] + i \frac{m}{x} \left[S \left(1 + \frac{m^2-1}{x^2} \right) - \frac{\xi'}{k^2 \gamma} \right] \frac{\phi_0}{c_0-1} = 0 \quad (5.37)$$

en $x=k(\beta+q)$.

Sustituyendo ahora ϕ_0 como viene expresado en la ecuación 5.32 llegamos finalmente a una nueva forma de escribir esta condición de frontera:

$$-\frac{i}{x} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \zeta + i \frac{2}{x^2} \frac{d\zeta}{dx} + 2 \frac{m}{x} \phi_0' + i \frac{m}{x} \left[S \left(1 + \frac{m^2-1}{x^2} \right) - \frac{\xi'}{k^2 \gamma} \right] \frac{\phi_0}{c_0-1} = 0 \quad (5.38)$$

en $x=k(\beta+q)$.

También la ecuación 5.19 se debe expresar en función de ζ y de la variable x . El resultado es:

$$-\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (\zeta \phi_0) - i m \psi_0 \right] + 2 \phi_0' + i \left[S \left(1 + \frac{m^2-1}{x^2} \right) - \frac{\xi'}{k^2 \gamma} \right] \frac{\phi_0}{c_0-1} = 0 \quad (5.39)$$

en $x=k(\beta+q)$.

Procederemos ahora a realizar una simplificación del término: $\frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (\zeta \phi_0) - i m \psi_0 \right]$. De la definición de ϕ_0 se deduce que:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (\zeta \phi_0) = \frac{i}{m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right] \zeta - 2 \frac{i}{m} \frac{d\zeta}{dx} - \frac{i}{m} \frac{d\zeta}{dx}$$

por lo que:

$$\frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (\zeta \phi_0) - i m \psi_0 \right] = \frac{i}{m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2} \right] \zeta - 2 \frac{i}{m} \frac{d\zeta}{dx} - \frac{i}{m} \frac{d\zeta}{dx} \quad (5.40)$$

Si ahora multiplicamos la ecuación 5.39 por m/x y ocupamos la igualdad, se tiene:

$$-\frac{i}{x} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \left(\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2} \right] \zeta - x \frac{d\mathcal{N}}{dx} \right) + 2 \frac{m}{x} \phi_0' \quad (5.41)$$

$$+ i \frac{m}{x} S \left[\left(1 + \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) - \frac{\xi'}{k^2 \gamma} \right] \frac{\phi_0}{c_0 - 1} = 0$$

en $x = k(\beta + q)$.

Una simplificación más se obtiene si tomamos en cuenta que:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2} \right] x \frac{d\mathcal{N}}{dx} = \left(x \frac{d}{dx} + 2 \right) \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \mathcal{N} + 2\mathcal{N} \quad (5.42)$$

y dado que \mathcal{N} es la solución de la ecuación de Bessel, la primera parte del miembro derecho se anula, quedando únicamente $2\mathcal{N}$. Usando esta igualdad en la ecuación 5.41, obtenemos:

$$-\frac{i}{x} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right]^2 \zeta - \frac{i}{x} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \zeta + \frac{i}{x} 2\mathcal{N} + 2 \frac{m}{x} \phi_0' \quad (5.43)$$

$$+ i \frac{m}{x} S \left[\left(1 + \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) - \frac{\xi'}{k^2 \gamma} \right] \frac{\phi_0}{c_0 - 1} = 0$$

en $x = k(\beta + q)$.

Esta ecuación difiere de 5.38 solamente en el término $-\frac{i}{x} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2} \right]^2 \zeta$. Lo anterior significa que la constante A_7 es igual a cero. Concluimos entonces que la solución particular de la ecuación diferencial 5.35 es idénticamente cero. Con el resultado anterior el problema se reduce a resolver un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas.

La condición de frontera sobre esfuerzos normales se escribe en términos de las constantes A_1, \dots, A_6 :

$$\begin{aligned}
& \times \left[\lambda_2 I_m(\infty) - 2i I_m'(\infty) \right] A_1 + \times \left[\lambda_2 K_m(\infty) - 2i K_m'(\infty) \right] A_2 + \\
& + \left[2i I_m'(\infty) - \lambda_2 I_m(\infty) \right] A_3 + \left[2i K_m'(\infty) - \lambda_2 K_m(\infty) \right] A_4 + \\
& + \left[-i 2 I_m'(\infty) - \lambda_2 I_{m+1}(\infty) + (i 4 - \lambda_2) I_{m+1}'(\infty) + i 2 x I_{m+1}''(\infty) \right] A_5 + \\
& + \left[-i 2 K_m'(\infty) - \lambda_2 K_{m+1}(\infty) + (i 4 - \lambda_2) K_{m+1}'(\infty) + i 2 x K_{m+1}''(\infty) \right] A_6 = 0
\end{aligned}$$

en $x = k(\beta + q)$

$$\text{siendo } \lambda_2 = \frac{1}{c_0 - 1} \left[S \left(1 + \frac{m^2 - 1}{k^2 (\beta + q)^2} \right) - \frac{\zeta'}{k^2 \gamma} \right].$$

Otra de las condiciones de frontera es la anulación del esfuerzo tangencial $\sigma_{r\theta}$ en la superficie libre. Su expresión algebraica en términos de las funciones ζ y \mathcal{N} es:

$$2 \frac{d}{dx} \left[\frac{i}{x} \zeta \right] - \mathcal{N} = 0 \quad \text{en } x = k(\beta + q) \quad (5.45)$$

de la cual se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -I_m(\infty) A_1 - K_m(\infty) A_2 + \frac{2}{x} \left[I_m'(\infty) - x I_m(\infty) \right] A_3 + \frac{2}{x} \left[K_m'(\infty) - x K_m(\infty) \right] A_4 + \\
& + 2 I_{m+1}'(\infty) + 2 K_{m+1}'(\infty) = 0 \quad \text{en } x = k(\beta + q)
\end{aligned} \quad (5.46)$$

La tercera condición de frontera sobre la superficie libre es la anulación del esfuerzo tangencial σ_{rz} . Rearreglando términos, 5.16 se escribe como:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dz}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2} \right] \zeta + \left(2 - \frac{G}{k^2 (c_0 - 1)} \right) \left[\frac{d\zeta}{dx} - x \mathcal{N} \right] - 2 \mathcal{N}' - \frac{m^2}{x} \mathcal{N} = 0 \quad (5.47)$$

de la que se deduce:

$$\begin{aligned}
& \left[x(\lambda_1 - 2) I_m(\infty) - 2 I_m'(\infty) - \frac{m^2}{x} I_m(\infty) \right] A_1 + \\
& + \left[x(\lambda_1 - 2) K_m(\infty) - 2 K_m'(\infty) - \frac{m^2}{x} K_m(\infty) \right] A_2 +
\end{aligned} \quad (5.48)$$

$$(2-\lambda_1)I'_m(x)A_3 + (2-\lambda_1)K'_m(x)A_4 +$$

$$\left[-i2I'_m(x) - \lambda_1 I'_{m+1}(x) + (i4-\lambda_1)I'_{m+1}(x) + 2ixI''_{m+1}(x) \right] A_5 +$$

$$\left[i2K'_m(x) - \lambda_1 K'_{m+1}(x) + (i4-\lambda_1)K'_{m+1}(x) + 2ixK''_{m+1}(x) \right] A_6 = 0$$

$$\text{en } x=k(\beta+q),$$

$$\text{en donde } \lambda_1 = \frac{G}{k^2} \frac{1}{c_0-1}.$$

Las otras tres condiciones de frontera se aplican en la superficie del cilindro. Estas son:

$$-xI'_m(x)A_1 - xK'_m(x)A_2 + I'_m(x)A_3 + K'_m(x)A_4 \quad (5.49)$$

$$\text{en } x=k\beta$$

$$+ \left[I'_{m+1} + xI'_{m+1}(x) \right] A_5 + \left[K'_{m+1} + xK'_{m+1}(x) \right] A_6 = 0$$

$$-\left[I'_m(x) + xI'_m(x) \right] A_1 - \left[K'_m(x) + xK'_m(x) \right] A_2 + I'_m(x)A_3 + \quad (5.50)$$

$$+ K'_m(x)A_4 + \left[2I'_{m+1}(x) + xI'_{m+1}(x) \right] A_5 + \left[2K'_{m+1}(x) + xK'_{m+1}(x) \right] A_6 = 0$$

$$\text{en } x=k\beta$$

$$I'_m(x)A_3 + K'_m(x)A_4 + xI'_{m-1}(x)A_5 + xK'_{m-1}(x)A_6 = 0 \quad (5.51)$$

$$\text{en } x=k\beta$$

Las ecuaciones 5.44, 5.48 y 5.48-5.51 forman un sistema lineal y homogéneo con 6 incógnitas. Para que haya una solución distinta de la trivial el determinante de la matriz principal M debe anularse:

$$\text{Det}(M) = 0$$

$$(5.52)$$

Esta condición es la que determina el valor del parámetro c_0 . Se podría calcular la raíz de la ecuación 5.52 usando un método numérico, pero todavía se pueden dar algunas características de la solución. En primer lugar, c_0 aparece solamente en las ecuaciones 5.44 y 5.48; en ambos casos hay un factor de la forma: $\frac{\phi_0}{c_0-1}$. Mediante una combinación adecuada de 2 filas de la matriz \mathcal{M} se puede eliminar $\frac{\phi_0}{c_0-1}$ de una de ellas sin que se modifique el valor del determinante (Lang, 1980). De lo anterior se concluye que el determinante es una función lineal de la variable $\lambda = \frac{1}{c_0-1}$:

$$\text{Det}(\mathcal{M}) = \mathcal{A}\lambda + \mathcal{B} \quad (5.53)$$

lo que implica que solo hay una raíz de la ecuación 5.52. Por otra parte, mediante la inspección de 5.44 y 5.48 se concluye que el coeficiente \mathcal{A} es de la forma:

$$\mathcal{A} = \left[S \left(1 + \frac{m^2-1}{k^2 C (\beta+q)^2} \right) \quad -\frac{\xi'}{k^2 \gamma} \right] C + \frac{G}{k^2} D \quad (5.54)$$

El valor de λ que anula el determinante es:

$$\lambda = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \quad (5.55)$$

Si de esta ecuación despejamos el parámetro c_0 se obtiene lo siguiente:

$$c_0 = 1 - \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = 1 - \frac{G}{k^2} \frac{D}{\mathcal{B}} - \left[S \left(1 + \frac{m^2-1}{k^2 C (\beta+q)^2} \right) \quad -\frac{\xi'}{k^2 \gamma} \right] \frac{C}{\mathcal{B}} \quad (5.56)$$

Mediante una exploración numérica se demuestra que el coeficiente D es real y que C es una cantidad imaginaria. Entonces, el parámetro c_0 se puede poner en la forma:

$$c_0 = c_r(k, m, \beta, q) + i \left[q S \left(k^2 + \frac{m^2-1}{C(\beta+q)^2} \right) - \frac{\xi'}{\gamma} \right] F(k, m, \beta, q) \quad (5.57)$$

siendo c_r y F funciones reales.

Por otra parte, la manera de evaluar c_0 fue la siguiente: primero se calculó el determinante en $\lambda=0$:

$$N = \text{Det}(C_0) = Z \quad (5.58)$$

Luego se calculó el determinante en $\lambda=1$:

$$M = \text{Det}(C_1) = A + Z \quad (5.59)$$

Con las últimas dos ecuaciones se calculan A y Z , que resultan ser:

$$Z = N \text{ y } A = M - N \quad (5.60)$$

Por lo tanto, el valor propio c_0 es:

$$c_0 = 1 + \frac{N-M}{I} \quad (5.61)$$

Se utilizaron dos métodos de cálculo del valor propio c_0 ; uno de ellos fue la utilización del paquete Mathcad -versión 2.5- que tiene incluidos la definición de matrices y el cálculo de determinantes e integrales. Las funciones modificadas de Bessel se evaluaron recurriendo a su desarrollo en serie de potencias y/o a una fórmula integral. Con este método se obtuvieron varias características de la solución, que desembocan en la ecuación 5.57.

El otro método fue un programa escrito en Pascal, que utiliza algunas subrutinas del paquete Science and Engineering Tools. Este programa consta de varias partes, a saber: a) definición de números complejos y las 4 operaciones elementales, b) definición de las funciones modificadas de Bessel, c) un algoritmo de

integración (que se necesita para evaluar las funciones de Macdonald), d) definición de una matriz compleja e) cálculo del determinante de una matriz compleja y f) cálculo del valor propio c_0 usando todos los elementos señalados en los incisos a-e.

El paquete Science and Engineering Tools incluye una subrutina para el cálculo de funciones especiales; ahí se definen las funciones modificadas de Bessel recurriendo a las funciones de Kummer (en relación a estas se recomienda revisar el libro de Poole, 1960; que se cita en la bibliografía). El algoritmo sirve bastante bien para las funciones modificadas de Bessel de primera especie. Sin embargo, no se puede decir lo mismo en relación a las funciones de Macdonald. Una de las propiedades de dichas funciones es:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_m(x) = 0$$

Para $x > 4$ el método falla, ya que el valor asignado a $K_m(x)$ crece en valor absoluto con el incremento de x , adquiriendo valores de decenas o centenas alrededor de $x \approx 10$. Este problema se resuelve cambiando el algoritmo si $x > 4$. Las funciones de Macdonald se calculan usando la ecuación 5.24 que las define mediante una integral. La integración va de cero a infinito, sin embargo el integrando decrece muy rápido y es posible tener una aproximación satisfactoria tomando como límite superior un valor pequeño, usualmente entre 2 y 4.

La definición de las funciones de Macdonald a partir de las funciones de Kummer sirvió para evaluar c_0 en la región de radios pequeños y números de onda pequeños. Por su parte, la definición de las funciones de Macdonald mediante una fórmula integral se ocupó en el caso en que $k(\beta+q) > 4$.

5.3. -SOLUCION A ORDEN CERO. CASO $m=0$

Se ha dividido el estudio de la estabilidad en dos casos. El primero corresponde a $m \neq 0$, o en otras palabras, se considerara una perturbación tridimensional. El otro caso, $m=0$, corresponde a una perturbación bidimensional, y entonces los campos de velocidades y de presión de la perturbación son funciones de r , z y t . Los métodos matemáticos de solución son diferentes. En el caso $m \neq 0$ se calculan dos funciones: ξ y η , mientras que en el caso $m=0$ solo se calcula una función: ϕ_0 . La solución para perturbaciones tridimensionales ya se obtuvo en el apartado anterior. Esta sección se dedica a calcular la solución del caso $m=0$.

El problema con $m=0$ guarda algunas semejanzas con la aproximación a números de onda pequeños. Una de ellas es que sólo se debe resolver una ecuación diferencial; por lo tanto, se requieren únicamente 4 condiciones de frontera para determinar el valor propio ω_0 .

La ecuación diferencial que se debe resolver se deduce directamente de 5.20, considerando que $m=0$:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{1}{x^2} \right]^2 \phi_0 = 0 \quad (5.62)$$

Esta es la ecuación biarmónica de orden 1, cuya solución general se expresa en términos de las funciones modificadas de Bessel (Amenzade, 1979):

$$\phi_0 = A I_1(x) + B K_1(x) + C x I_2(x) + D x K_2(x) \quad (5.63)$$

y que se puede calcular usando las propiedades III y IV del apéndice A.

Las condiciones de frontera de 5.53 son las ecuaciones 5.13, 5.14, 5.18 y 5.19, con $m=0$. La sustitución de ϕ_0 en esas ecuaciones da lugar a un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. La primera de ellas es la anulación de ϕ_0 en la superficie del cilindro:

$$A I_1(x) + B K_1(x) + C x I_2(x) + D x K_2(x) = 0 \quad \text{en } x=k\beta \quad (5.54)$$

La otra condición en la interfase líquido-cilindro es la anulación de ϕ_0' . Por razones de simplificación de los cálculos, esa condición no se ocupará directamente, sino que utilizaremos una combinación de ésta y la anterior: Pediremos que se anule la función $\frac{d}{dx}(x^n \phi_0)$ en $x=k\beta$. El cálculo de la derivada de $x\phi_0$ es más sencillo que determinar ϕ_0' . En efecto, las funciones de Bessel satisfacen las siguientes dos propiedades (Lebedev, 1972):

$$\frac{d}{dx} [x^n I_n(x)] = x^n I_{n-1}(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} [x^n K_n(x)] = -x^n K_{n-1}(x) \quad (5.55)$$

Con estas propiedades se puede evaluar directamente la derivada de la función $x\phi_0$. La ecuación resultante es:

$$A I_0(x) - B K_0(x) + C x I_1(x) - D x K_1(x) = 0 \quad \text{en } x=k\beta \quad (5.56)$$

La condición de esfuerzos tangenciales se aplica directamente. Luego de hacer uso extensivo de las propiedades de las funciones modificadas de Bessel y de reagrupar convenientemente, se obtiene la siguiente ecuación:

$$A \left[2kz - \frac{G}{c_0 - 1} \right] x I_1(x) + B \left[2kz - \frac{G}{c_0 - 1} \right] x K_1(x) - \quad (5.57)$$

$$C \left[kz \left(I_0(x) + I_2(x) \right) - \frac{G}{c_0 - 1} I_2(x) \right] x^2 + D \left[kz \left(K_0(x) + K_2(x) \right) - \frac{G}{c_0 - 1} K_2(x) \right] x^2 = 0$$

en $x=k(\beta+q)$

Finalmente, la condición de frontera sobre esfuerzos normales es:

$$\begin{aligned}
 & \left[2k^3 \left(I_0(x) - \frac{I_1(x)}{x} \right) + i \frac{\mu x I_1(x)}{c_0 - 1} \right] A + \left[-2k^3 \left(K_0(x) - \frac{K_1(x)}{x} \right) + i \frac{\mu x K_1(x)}{c_0 - 1} \right] B \\
 & \left[2k^3 \left(x I_1(x) - I_2(x) \right) + i \frac{\mu}{c_0 - 1} x^2 I_2(x) - 2k x^2 I_0(x) \right] C + \\
 & \left[2k^3 \left(x I_1(x) - I_2(x) \right) + i \frac{\mu}{c_0 - 1} x^2 I_2(x) - 2k x^2 I_0(x) \right] D = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.68}$$

en $x = k(\beta + q)$

siendo $\mu = \left[S \left(k^2 - \frac{1}{(\beta + q)^2} \right) - \frac{\xi'}{\gamma} \right]$

La solución del problema se obtiene al hacer que el determinante de este sistema de 4 ecuaciones sea igual a cero. Siguiendo el mismo procedimiento esbozado en la sección anterior se concluye que el valor propio c_0 se puede expresar de la forma:

$$c_0 = c_r(k, \beta, q) + i \left[S \left(k^2 - \frac{1}{(\beta + q)^2} \right) - \frac{\xi'}{\gamma} \right] f(k, \beta, q)
 \tag{5.69}$$

lo que quiere decir que en cualquier caso el valor propio c_0 se puede escribir como se hace en la ecuación 5.57.

5.4. - ANALISIS DE RESULTADOS

Una de las principales características de la solución es que permanece invariable cuando cambiamos m por $-m$. Esto se puede demostrar considerando que el valor propio con $m \neq 0$ se ha obtenido mediante la resolución de un sistema de 2 ecuaciones diferenciales, a saber, 5.22 y 5.34. El cambio de m por $-m$ no modifica las ecuaciones ya que m siempre aparece elevada al cuadrado. Por lo tanto la solución general de ξ y χ es la misma en

ambos casos. En relación a las condiciones de frontera en la superficie del cilindro, ellas no dependen de m y por lo mismo la transformación de m a $-m$ no las afecta. En lo que toca a las otras condiciones de frontera (5.16-5.18) ellas incluyen en principio términos proporcionales a m , pero además hay términos proporcionales a ϕ_0 o sus derivadas. Recuerdese que $\phi_0 = \frac{i}{m} \left[\frac{d\psi}{dx} - \kappa \psi \right]$, es decir, ϕ_0 es proporcional al inverso de m . Si sustituimos dicha ecuación en las condiciones de frontera y luego multiplicamos por m , se obtendrán ecuaciones donde a lo sumo aparecen factores del tipo π^2 , y por esa razón, no hay cambios cuando se hace la transformación m por $-m$. La simetría en el número azimutal refleja la simetría de las fuerzas que se aplican sobre el flujo por la ausencia de la fuerza de Coriolis.

El valor propio c_0 es una cantidad compleja y, por lo tanto, a este orden ya se puede decir algo sobre la velocidad de fase de la perturbación y sobre su estabilidad. El término c_0 es directamente la velocidad de fase de la onda; depende de 4 parámetros, a saber: el número de onda, el número azimutal, el radio del cilindro y q .

Una de las primeras pruebas de los resultados ha sido tomar el límite de números de onda pequeños. Tomando en consideración que tanto k como $\frac{m}{r}$ se interpretan como números de onda, lo anterior implica que $k \rightarrow 0$ y $m \rightarrow 0$, o bien que $k \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$. Hemos tomado un valor de c_r al azar, siendo $k=0.1$, $m=2$, $\beta=20$, $q=1$. El valor numérico fue:

$$c_r(0.1, 2, 20, 1) = 1.961$$

Un análisis exhaustivo de los resultados indica que la función c_r tiende a 2 en la región de números de onda pequeños:

$$c_r \rightarrow 2 \quad (5.70)$$

$$\begin{matrix} k \rightarrow 0 \\ m/r \rightarrow 0 \end{matrix}$$

El límite concuerda con el resultado de la velocidad de fase de una perturbación en la aproximación de números de onda pequeños ($c_r = 2$). Como la velocidad de propagación de la perturbación es una función decreciente de k y de m , se puede concluir que las ondas son de carácter dispersivo. Por otro lado, los resultados numéricos indican que $1 < c_r < 2$ y que $c_r \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $\frac{m}{r} \rightarrow \infty$.

Además, se encuentra que c_r es una función creciente de β . Aún más, los cálculos indican que, fijando todos los parámetros, la variación de q hace que c_r sea menor cuando la película escurre por el interior en relación al caso en que la película escurre por el exterior. Expresado matemáticamente:

$$c_r(k, m, \beta, -1) < c_r(k, m, \beta, 1)$$

Esto se puede explicar como sigue: un incremento en la curvatura disminuye la velocidad de propagación de la onda. Cuando el flujo se mueve por el interior, el radio de la superficie libre es $\beta-1$, y cuando la película se mueve por el exterior, el radio de la superficie libre es $\beta+1$. Considerando que la curvatura lateral de la película es proporcional al inverso del radio, resulta evidente que la curvatura de la película interior es superior a la curvatura de la película externa.

Se han hecho varias gráficas de c_r vs. k y β , que ilustran todas las características mencionadas anteriormente. Las figuras 21 y 22 contienen curvas de nivel de c_r siendo $q=1$ y el parámetro m con valores de 0 y 1. Los intervalos que se gráficán son de 0 a 1 para el número de onda k y de 2 a 20 para el radio del cilindro.

Por otra parte, en las figuras 23 y 24 se presentan curvas de nivel de c_r vs k y β , cuando la película se escurre por la pared interior del cilindro ($q=-1$). También en este caso se han tomado dos valores de m : 0 y 1.

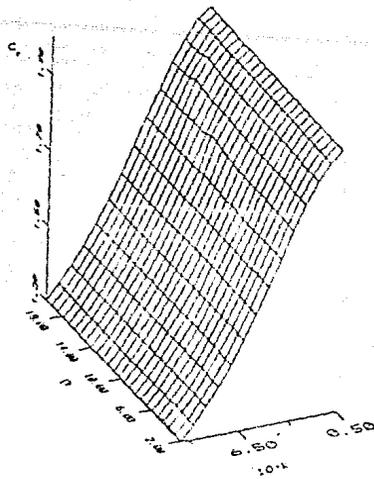


FIGURA 21.- Grafica de la velocidad de fase de la perturbación c_p en función de k y β . Flujo por el exterior. El número de onda está multiplicado por 10 debido a limitaciones en el paquete de graficación. La superficie corresponde al modo $m = 0$.

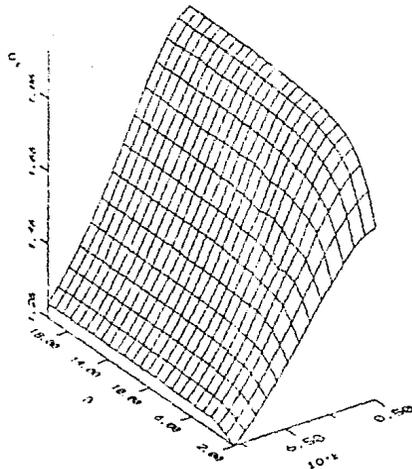


FIGURA 22.- Grafica de c_p vs k (multiplicado por 10) y β . La superficie corresponde al modo $m = 1$ y un flujo por el exterior. c_p es una función decreciente de k .

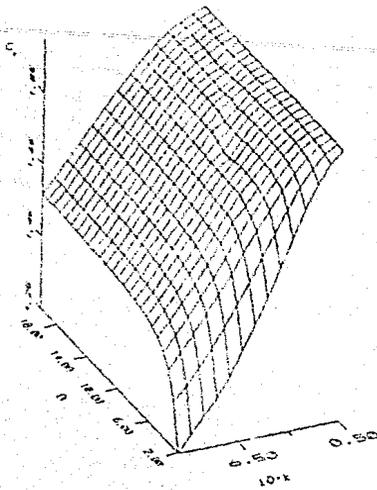


FIGURA 23. - Gráfica de c_T vs k (multiplicado por 10^4) y β . La superficie corresponde a un flujo por el interior y el modo $m = 0$. La velocidad de fase decrece con el aumento de k , lo que implica que las ondas son dispersivas.

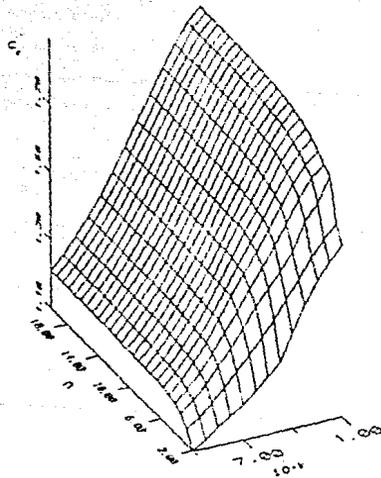


FIGURA 24. - Gráfica de c_T en función de k (multiplicado por 10^4) y β . La superficie corresponde a un flujo por el interior y el modo $m = 1$. c_T crece con el aumento de β y es decreciente respecto a k .

En relación a la estabilidad del flujo, lo primero que salta a la vista es su dependencia de los 6 parámetros del problema: k , m , β , S , ξ' y q . La parte imaginaria de c_0 se expresa como el producto de un factor que incluye a la rotación y a la tensión superficial, multiplicado por una función $F(k,m,\beta,q)$.

Una exploración numérica exhaustiva muestra que la función $F(k,m,\beta,1)$ no cambia de signo, es más, siempre es negativa. Por otra parte, la función $F(k,m,\beta,-1)$ tampoco cambia de signo y siempre es positiva. De lo dicho se concluye que la estabilidad del flujo la determina unicamente el término: $\left[S \left(k^2 + \frac{m^2 - 1}{(\beta + q)^2 z} \right) - \frac{\xi'}{\gamma} \right]$. En los párrafos siguientes se hará un análisis detallado de la estabilidad separando los casos $q=1$ y $q=-1$.

A) Flujo por el exterior ($q=1$).

Hay dos factores físicos que influyen sobre la estabilidad del flujo: la tensión superficial y la fuerza centrífuga. La primera se manifiesta con dos efectos contrapuestos. El primero es el ahorcamiento capilar que se describió en el capítulo anterior y el segundo tiene que ver con la curvatura del flujo perturbado en las direcciones z y θ ; El surgimiento de una perturbación con número de onda k y número azimutal m produce un cambio en la curvatura del flujo, siendo este cambio proporcional a $k^2 + \frac{m^2}{(\beta + q)^2 z}$. Esta variación en la curvatura induce fuerzas capilares que tienden a retornar a la superficie libre a su configuración inicial. Por lo tanto, actúan como un factor que estabiliza el flujo.

La rotación es una fuente de inestabilidades: las perturbaciones crecerán a costa de la fuerza centrífuga, que actúa en dirección radial y empuja el fluido hacia afuera.

La función $F(k,m,\beta,1)$ es negativa; entonces, toda perturbación que satisfaga la relación:

$$S \left(k^2 + \frac{m^2 - 1}{(\beta + 1)^2} \right) - \frac{\xi'}{\gamma} \geq 0. \quad (5.71)$$

no creciera en el tiempo.

Lo primero que veremos será la estabilidad del flujo en ausencia de rotación ($\xi' = 0$). La desigualdad 5.71 se convierte en:

$$k^2 + \frac{m^2 - 1}{(\beta + 1)^2} \geq 0 \quad (5.72)$$

Con $m=0$ existe un conjunto de números de onda que no satisfacen la desigualdad 5.72 ($0 < k < \frac{1}{\beta + 1}$) y esto significa que pueden surgir inestabilidades en el flujo. Con $m \geq 0$ la desigualdad siempre se cumple pues $k^2 \geq 0$ y $\frac{m^2 - 1}{(\beta + 1)^2} \geq 0$. De lo expresado en este párrafo se concluye que en un flujo sin rotación los únicos modos inestables son los correspondientes a $m=0$, es decir, los que no dependen de la coordenada θ .

La rotación modifica el cuadro descrito previamente. Supongase que ξ' es distinto a cero. El valor de ξ' no puede ser arbitrario, está limitado por la desigualdad 2.25:

$$\frac{\xi'}{\gamma S} < \frac{2}{(\beta + 1)^2}$$

Usando esta desigualdad se puede calcular un límite inferior para el término $S \left(k^2 + \frac{m^2 - 1}{(\beta + 1)^2} \right) - \frac{\xi'}{\gamma}$, a saber:

$$S \left(k^2 + \frac{m^2 - 1}{(\beta + 1)^2} \right) - \frac{\xi'}{\gamma} > S \left(k^2 + \frac{m^2 - 3}{(\beta + 1)^2} \right) \quad (5.73)$$

Si logramos hacer que el miembro derecho de la desigualdad sea mayor a cero:

$$k^2 - \frac{m^2 - 3}{(\beta + 1)^2} > 0. \quad (5.74)$$

entonces las perturbaciones se amortiguan.

Com $m \geq 2$ la desigualdad siempre se satisface. No se puede decir lo mismo respecto a $m=0$ y $m=1$, pues el término $\frac{m^2-3}{(\beta+1)^2}$ adquiere un valor negativo. Esto significa que la rotación produce dos modos inestables: $m=0$ y $m=1$. Mas adelante abundaremos al respecto.

La condición de estabilidad neutral viene dada por la ecuación:

$$S \left(k^2 + \frac{m^2-1}{(\beta+q)^2} \right) - \frac{\xi'}{\gamma} = 0, \quad (5.75)$$

de la que se puede despejar k (número de onda crítico k_c):

$$k_c = \begin{cases} \left[\frac{1-m^2}{(\beta+q)^2} + \frac{\xi'}{\gamma S} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{si} \\ 0 & \text{si} \end{cases} \quad (5.76)$$

$$\frac{1-m^2}{(\beta+1)^2} + \frac{\xi'}{\gamma S} < 0$$

Las perturbaciones con número de onda k menor a k_c crecen en el tiempo, mientras que si $k > k_c$ las perturbaciones se amortiguan. Si se aplica una perturbación al flujo, es de esperar que su descomposición espectral contenga valores de k y m arbitrarios. Entonces, si $k_c \neq 0$ el flujo será inestable (lo que sucede en nuestro caso con m igual a cero y uno).

La figura 25 muestra una gráfica de k_c vs. ξ' , siendo $m=0$, $\beta=10$ y $S=10$. Como se puede apreciar, k_c es una función creciente del parámetro ξ' , cuyo valor más pequeño es $\frac{1}{\beta+1}$, que se alcanza cuando no hay rotación. Además, de la ecuación 2.25 se deduce que k_c está acotado superiormente, siendo su valor máximo $\frac{\sqrt{(3-m^2)}}{\beta+1}$.

Se ha demostrado que en el escurrimiento con rotación, hay dos modos inestables. El valor del parámetro ξ' determina cual de los dos es el más inestable. En la figura 26 se presenta una gráfica de kC_1 vs k ($C_1 = \text{Im}(c_0)$) siendo $m=0$, $S=10$, $\beta=3$ y $\xi'=0.9$. El término

k_{crit}

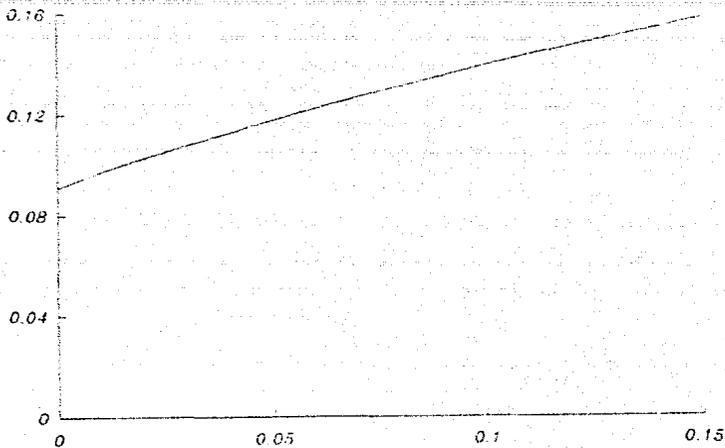


FIGURA 25.- Número de onda crítico (k_c) en función de ξ' . Si $k < k_c$ la perturbación es inestable y si $k > k_c$ la perturbación es amortiguada.

kC_i

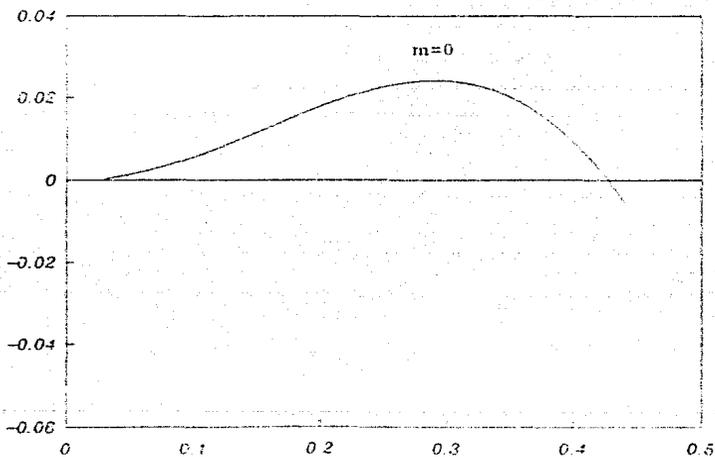


FIGURA 26.- Gráfica de kC_i vs k para el modo $m = 0$, siendo $S=10$, $\xi=0.9$ y $\beta=3$. kC_i da la razón de crecimiento de la perturbación. El valor máximo de kC_i es 0.024.

kC_1 da la razón de crecimiento de la perturbación y su valor máximo es 0.024. La figura 27 contiene una grafica de kC_1 vs k con los mismo valores de S , β y ξ' , pero ahora $m=1$. El valor máximo de kC_1 es 0.0336. De lo anterior se concluye, que en esas condiciones, el modo más inestable es $m=1$.

Para que $m=1$ sea el modo más inestable es necesario que el parámetro ξ' sobrepase cierto valor. Esto se puede apreciar en la figura 28, donde se han graficado el valor máximo de kC_1 vs ξ' para $m=0$ y $m=1$. Las curvas se cruzan cuando $\xi'=0.15$.

Por ultimo se dirán algunas palabras respecto a la función $F(k,m,\beta,1)$. Las figuras 29 y 30 contienen graficas de $F(k,m,\beta,1)$ vs. β y k con 2 valores distintos de m ($m=0$ y 1). Como se puede apreciar en todas ellas, solo en la región de k pequeña la función F varia apreciablemente. En la región de k intermedios y grandes, la función F depende débilmente de k . Por otro lado, en la región de β intermedios o grandes, F depende débilmente β . Usualmente, si

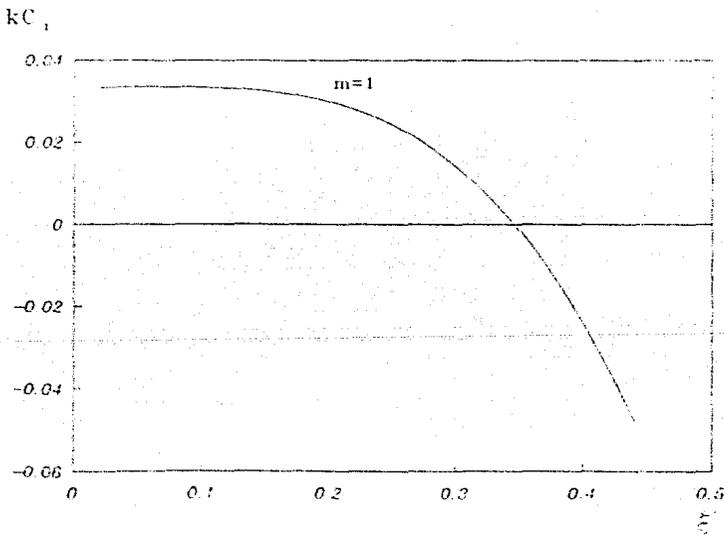


FIGURA 27.- grafica de kC_1 vs k para el modo $m = 1$. $S=10$, $\xi'=0.9$ y $\beta=3$. El valor máximo de kC_1 es 0.0336.

kC_1

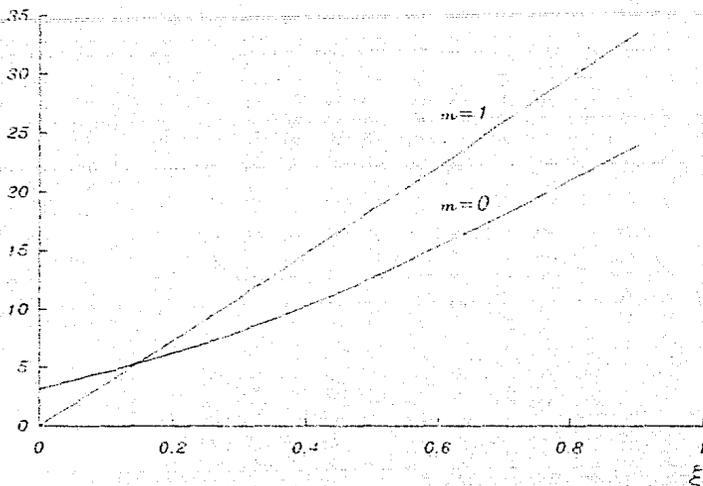


FIGURA 28.- Gráfica del valor máximo de kC_1 vs ξ para $m=0$ y $m=1$ ($\beta=3$, $S=10$). Ambas curvas se cruzan en $\xi=0.15$. Entonces, con $\xi > 0.15$ el modo más inestable es $m=1$.

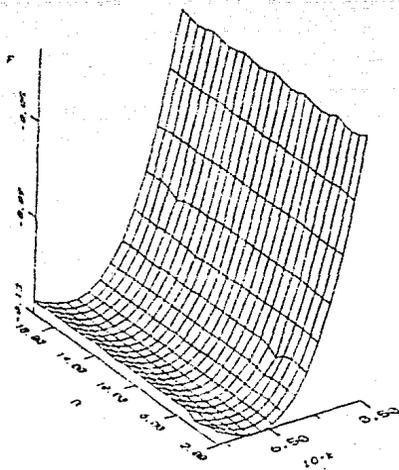


FIGURA 29.- Gráfica de F vs k (multiplicado por 10) y β . Ecurrimiento por el exterior y modo $m=0$. Como se puede apreciar F siempre es negativa.

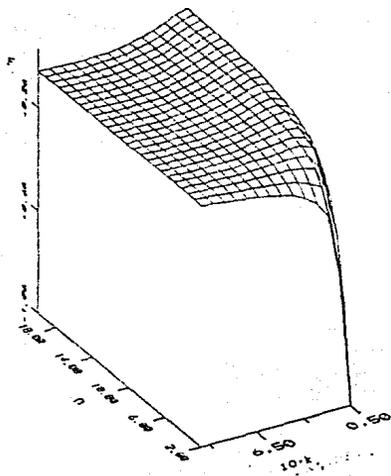


FIGURA 30.- Gráfica de \bar{F} vs k (multiplicado por 10) y β . Ecorrimiento por el exterior y modo $m = 1$. Como se puede apreciar \bar{F} siempre es negativa.

3)5 la función F adopta un valor practicamente constante (dejando fijos los otros parametros: k y m).

Un característica relevante es el comportamiento asintótico de F para valores grandes de k y β . Dentro de la definición de la función F estan incluidas las funciones modificadas de Bessel evaluadas en $x=k\beta$ y en $x=k(\beta+1)$. Se puede demostrar que la fórmula asintótica de I_m y K_m (Lebedev, 1960) con $x \rightarrow \infty$ no depende del valor de m . Esto se traduce en que el limite de F cuando $k/\beta \rightarrow \infty$ tampoco depende de m .

B) Flujo por el interior del cilindro ($q=-1$).

Los factores fisicos que influyen en la estabilidad del flujo son la tensión superficial y la fuerza centrífuga. Además, hay un factor geométrico -el radio del cilindro- que influye considerablemente en la región de β pequeños e intermedios. La tensión superficial tiene el efecto de ahorcamiento capilar que no depende del número de onda. Hay un efecto adicional de segundo

orden en k y m que juega un papel estabilizador, y que se mencionó en el inciso A.

En relación a la rotación, su influencia sobre la estabilidad es cualitativamente distinta si se compara con el caso $q=1$. Esto se debe a que ahora la fuerza centrífuga empuja al líquido hacia la pared del cilindro, inhibiendo el crecimiento de la perturbaciones.

Considerando que $F(k, m, \beta, -1)$ es positiva, la condición de estabilidad es:

$$S \left[k^2 + \frac{m^2 - 1}{(\beta + q)^2} \right] + \frac{\xi'}{\gamma} \geq 0 \quad (5.77)$$

y debe cumplirse para cualquier perturbación aplicada al flujo si queremos que el flujo sea estable. Como se puede apreciar, hay un solo término negativo, el que produce el ahorcamiento capilar.

Supongase ahora que no hay rotación ($\xi'=0$). La desigualdad anterior se transforma en:

$$k^2 + \frac{m^2 - 1}{(\beta + q)^2} \geq 0 \quad (5.78)$$

Con $m=0$ existe un intervalo de números de onda $0 < k < \frac{1}{\beta - 1}$ donde no se satisface la desigualdad. Esto significa que sobre el flujo surgirán ondas de longitud de onda grande (comparada con el espesor de la película). Con $m \geq 1$ la desigualdad se cumple para cualquier valor de k . De lo anterior se concluye que en un flujo sin rotación solo pueden crecer las perturbaciones con $m=0$.

La condición para que la desigualdad se cumpla independientemente de k y m es:

$$\xi' \geq \frac{S\gamma}{(\beta - 1)^2} \quad (5.79)$$

Mediante esta condición se garantiza la estabilidad del flujo.

La posibilidad de producir un flujo estable mediante la rotación induce naturalmente una definición de valor crítico de ξ' :

$$\xi'_c = \frac{S\gamma}{(\beta-1)^2} \quad (5.80)$$

que se obtiene de 5.79 si igualamos los miembros derecho e izquierdo. Si $\xi' < \xi'_c$ el flujo es inestable y si $\xi' \geq \xi'_c$ el flujo es estable.

El problema que se aborda aquí incluye dos fuerzas de cuerpo que se deducen de un potencial, como lo son la gravedad y la fuerza centrífuga y cuya suma vectorial es:

$$\vec{F} = \omega^2 r \hat{r} + \rho g \hat{k} \quad (5.81)$$

Así, el parámetro ξ' es justamente el cociente entre la componente radial de \vec{F} y su componente en la dirección z:

$$\xi' = \frac{F_r}{F_z} \quad (5.82)$$

Por otra parte, la condición de estabilidad neutral está dada por la ecuación:

$$S \left[k^2 + \frac{m^2 - 1}{(\beta + q)^2} \right] + \frac{\xi'}{\gamma} = 0 \quad (5.83)$$

De la que se puede despejar k (número de onda crítico, k_c):

$$k_c = \begin{cases} \left[\frac{1}{(\beta + q)^2} - \frac{\xi'}{\gamma S} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{si } m=0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \text{ o si el término entre } \\ & \text{paréntesis es negativo} \end{cases} \quad (5.84)$$

La figura 31 se presenta una gráfica de k_c vs. ξ' . Se puede observar que k_c es una función decreciente de ξ' , que alcanza su valor máximo cuando no hay rotación (el valor máximo es $\frac{1}{\beta-1}$); y el valor mínimo es cero.

Por último, las figuras 32 y 33 se presentan gráficas de $F(k, m, \beta, -1)$ vs. k y β utilizando 2 valores diferentes de m ($m=0$ y 1). Notese que $F(k, m, \beta, -1)$ es siempre positiva y que algunas de sus características son semejantes a las de $F(k, m, \beta, 1)$:

- a) En la región de β grandes la función $F(k, m, \beta, -1)$ depende débilmente de β .
- b) Solo en la región de k pequeños $F(k, m, \beta, -1)$ depende fuertemente de k .
- c) Para valores grandes de $k\beta$ la función $F(k, m, \beta, -1)$ tiende a valores que son independientes de m .

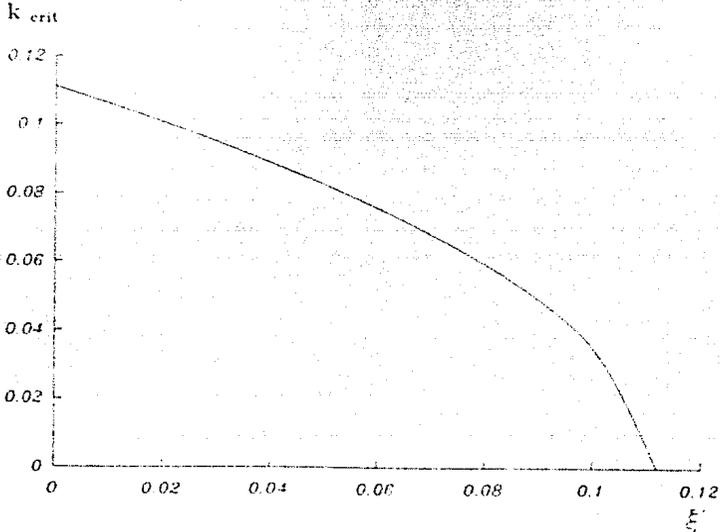


FIGURA 31. - Gráfica de k_c vs. ξ' ; flujo por el interior. $S=10$, $\beta=10$. k_c se anula con $\xi' = 0.11$. Es decir, si $\xi' > 0.11$ todas las perturbaciones se amortiguan en el tiempo.

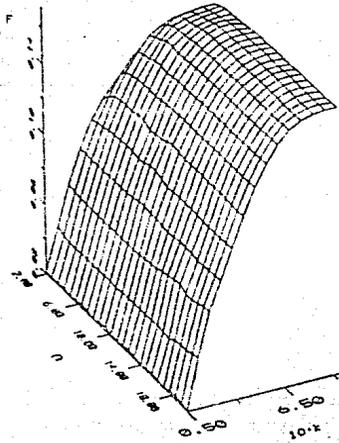


FIGURA 32. - Gráfica de F vs k (multiplicado por 10) y β . Escorrente por el interior y modo $m=0$. Como se puede apreciar F siempre es positiva.

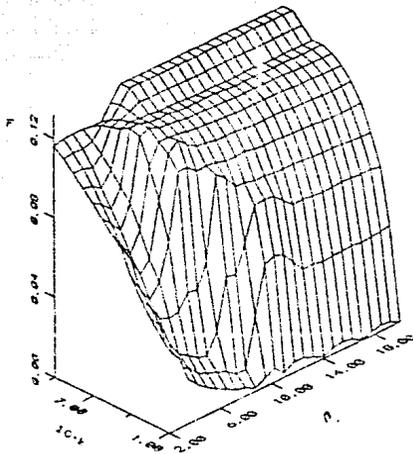


FIGURA 33. - Gráfica de F vs k (multiplicado por 10) y β . Escorrente por el interior y modo $m=1$. Como se puede apreciar F siempre es positiva.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se investigó la estabilidad lineal de una película de fluido newtoniano que desciende por un cilindro en rotación. Se consideraron dos posibilidades: a) escurrimiento por el interior y b) escurrimiento por el exterior. Luego de hacer una descomposición de las perturbaciones en modos normales, se dedujo un sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que describen la evolución de perturbaciones infinitesimales.

Tomando en consideración la dificultad de resolver exactamente el sistema de ecuaciones, se procedió a investigar la estabilidad en dos aproximaciones: 1) para números de onda pequeños y 2) para números de Reynolds pequeños.

En relación a la aproximación para números de onda pequeños, una de las primeras conclusiones de esta investigación es que, sobre la estabilidad, influyen la tensión superficial, la rotación, el radio del cilindro y el valor del número de Reynolds. La tensión superficial produce un ahorcamiento de la película, que puede dar lugar al rompimiento de su continuidad y que ocurre en la región de números de onda pequeños. Cabe destacar que el ahorcamiento capilar solo es importante cuando β es pequeño, como se puede apreciar de una análisis de la ecuación 4.76 y de las figuras 8 y 14.

Otro de los resultados es que la fuerza de Coriolis no influye significativamente sobre las perturbaciones con número de onda pequeño, aún más, el número de Taylor solo aparece en la aproximación a orden dos. Por el contrario, la fuerza centrífuga afecta la estabilidad del flujo para cualquier valor de k , pero su influencia depende la superficie del cilindro por donde escurre el fluido: inhibe el surgimiento de inestabilidades en películas que descienden por el interior y aumenta la razón de crecimiento de las perturbaciones en las películas que escurren por el exterior.

Se demostró, además, que una película escurriendo por el interior es estable a partir del valor de ξ dado en la ecuación 4.88.

La figura 34 incluye tres curvas de estabilidad neutral de una película de líquido que escurre por el interior de un tubo y que corresponden a diferentes valores de β . Las curvas fueron tomadas de un trabajo de Lin y Liu (Lin y Liu, 1975) y fueron calculadas para un flujo sin rotación. Es interesante notar que en la región de números de onda pequeños las perturbaciones son inestables ($\text{Im}(c_0) > 0$). Sin embargo, en el capítulo 4 se demostró que a números de onda

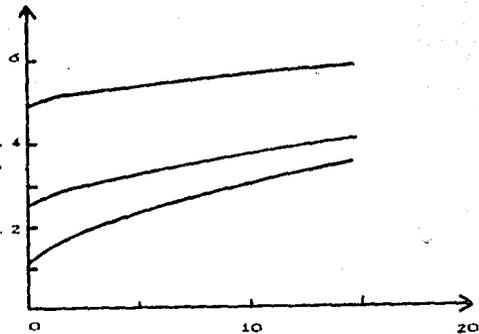


FIGURA 34.- Curvas de estabilidad neutral para una película de fluido que escurre por el interior de un cilindro ($We=100$). Tomado de Lin y Liu (1975).

pequeños la rotación puede anular el ahorcamiento capilar y las inestabilidades producidas por los términos de inercia. Esto quiere decir que la rotación desplaza hacia abajo las curvas de estabilidad neutral.

Cabe destacar que la hipótesis de número de onda k pequeño solo es compatible con $m=0$. Esto se puede entender si recordamos que $\frac{m}{r}$ se puede interpretar como un número de onda azimutal. Entonces, suponer que el número de onda sea pequeño implica que simultáneamente k y m lo sean. Pero la única posibilidad para m es que valga cero.

Varias conclusiones importantes se pueden sacar de la solución con Re pequeño. Una de ellas es que, en ausencia de rotación, el único modo inestable es $m=0$. Sin embargo, cuando el parámetro centrífugo es distinto de cero surge un nuevo modo

inestable para películas que escurren por el exterior: $m=1$. El valor de ξ' determina cual de los dos modos es el más inestable. Cuando ξ' es proximo a cero el modo que tiene la mayor tasa de crecimiento temporal es el de $m=0$. Sin embargo, por encima de un cierto valor crítico el modo $m=1$ se convierte en el más inestable. Esto se puede apreciar claramente en la figura 28. Por otra parte, si la película escurre por el interior, pero el parámetro ξ' no supera el valor $\frac{S_1}{(\beta-1)^2}$ hay un único modo inestable ($m=0$). Sin embargo, cuando $\xi' \geq \frac{S_1}{(\beta-1)^2}$ todos los modos son estables.

El valor del número de onda crítico que se grafica en la figura 34 con $Re=0$ es $\frac{1}{\beta-1}$ y coincide con el que obtuvimos nosotros con $\xi'=0$. El efecto de la rotación sobre k_c consiste en disminuir su valor e inclusive hacerlo igual a cero. Esto se aprecia en la figura 31 donde se grafica k_c vs ξ' .

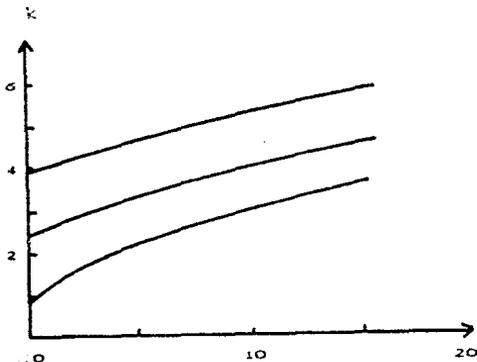


FIGURA 35. - Curvas de estabilidad neutral para una película de fluido que escurre por el exterior de un cilindro ($We=100$). Tomado de Lin y Liu (1975).

Por otra parte, la figura 35 incluye 3 curvas de estabilidad neutral de una película que escurre por el exterior de un tubo, que también fue tomada del mismo trabajo de Lin y Liu (el tubo no rota). El valor de k_c con $Re=0$ coincide con el que calculamos en este trabajo haciendo $\xi'=0$. La rotación se manifiesta en un aumento del número de onda crítico, tal como se puede ver en la figura 25.

Finalmente, en la solución con Re pequeño se ponen de manifiesto dos efectos contrapuestos de la tensión superficial: el ahorcamiento

capilar y un factor estabilizante proporcional a: $kz + \frac{1}{(\beta+q)z}$.

Una de las posibles extensiones de este trabajo sería el análisis de estabilidad sin las restricciones respectivas de k pequeño y Re pequeño. Esto requiere del empleo de un método numérico de solución de las ecuaciones 3.41 y 3.42. Otra posible extensión sería la investigación sobre estabilidad en fluidos no newtonianos.

Un camino más a seguir sería la construcción de una solución analítica donde se manifiesten claramente los efectos de la fuerza de Coriolis.

APENDICE A IDENTIDADES MATEMATICAS

En esta sección se demostrarán varias identidades matemáticas que se utilizan en el capítulo 5, que trata sobre la estabilidad a números de Reynolds pequeños. Se ocupan en la deducción de la ecuación 5.35, en el cálculo de la solución general y en las condiciones de frontera. La razón de incluirlas aparte se debe a que algunos términos aparecen reiteradamente y su sustitución por una expresión equivalente simplifica bastante los cálculos.

IDENTIDAD I.- Sea f una función continua y diferenciable. Sea además $D^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}$. Entonces:

$$\frac{d}{dx} \left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] f = \left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right] \frac{df}{dx} + 2 \frac{m^2}{x^3} f$$

DEMOSTRACION:

En primer lugar $\frac{d}{dx} D^2 f = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right] f$. Usando la regla de la cadena y reagrupando las derivadas llegamos a que:

$$\frac{d}{dx} D^2 f = \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{df}{dx} \right] + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\frac{df}{dx} \right] - \frac{1}{x^2} \left[\frac{df}{dx} \right]$$

pero lo anterior es igual a: $\left[D^2 - \frac{1}{x^2} \right] \left[\frac{df}{dx} \right]$.

Por otra parte, la derivada de $-\frac{m^2}{x^2} f$ es igual a:

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{m^2}{x^2} f \right] = -\frac{m^2}{x^2} \left[\frac{df}{dx} \right] + 2 \frac{m^2}{x^3} f$$

Por lo tanto, reuniendo las dos igualdades anteriores llegamos a la siguiente identidad:

$$\frac{d}{dx} \left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] f = \left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right] \frac{df}{dx} + 2 \frac{m^2}{x^3} f$$

que es lo que se deseaba probar.

IDENTIDAD II.- Sea f una función continua y diferenciable. Entonces, la siguiente igualdad es válida:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right] \frac{f}{x} = \frac{1}{x} \left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] f - \frac{2}{x} \frac{df}{dx}$$

DEMOSTRACION:

Se aplica el operador D^2 sobre $\frac{f}{x}$, dando:

$$D^2 \frac{f}{x} = \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \frac{f}{x^2}$$

pero esto se puede escribir en función de D^2 :

$$D^2 \frac{f}{x} = \frac{1}{x} \left[D^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \right] f$$

Por lo tanto:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right] \frac{f}{x} = \frac{1}{x} \left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] f - \frac{2}{x} \frac{df}{dx}$$

como se deseaba probar.

IDENTIDAD III.- Sea I_{m+1} la función modificada de Bessel de primera especie y de orden $(m+1)$. Dicha función satisface la siguiente relación:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] x I_{m+1} = 2 I_m$$

En donde I_m es la función modificada de Bessel de primera especie y orden m .

DEMOSTRACION:

Calcularemos primero la primera y segunda derivadas del producto $x I_{m+1}$:

$$\frac{d}{dx} [xI_{m+1}] = xI'_{m+1} + I_{m+1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [xI_{m+1}] = xI''_{m+1} + 2I'_{m+1}$$

Por lo tanto, el operador D^2 aplicado sobre xI_{m+1} es igual a:

$$D^2 xI_{m+1} = xD^2 I_{m+1} + 2I'_{m+1} + \frac{1}{x} I_{m+1}$$

De lo anterior se concluye que:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] xI_{m+1} = x \left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] I_{m+1} + \left[\frac{1}{x^2} I_{m+1} + \frac{2}{x} I'_{m+1} \right]$$

El miembro derecho de la última igualdad se puede reescribir de manera que uno de los términos se anule:

$$x \left[D^2 - 1 - \frac{(m+1)^2}{x^2} \right] I_{m+1} + \frac{2m+1}{x} I_{m+1} + 2I'_{m+1}$$

El primer término de la expresión anterior se anula, ya que I_{m+1} es solución de la ecuación diferencial:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{(m+1)^2}{x^2} \right] G = 0$$

Por otra parte, recordando las propiedades:

$$\frac{2^n}{x} I_n = I_{n-1} + I_{n+1}$$

$$2I'_m = I_{m-1} - I_{m+1}$$

concluimos que:

$$\frac{2^{m+1}}{x} I_{m+1} + 2I'_{m+1} = 2I_m$$

Por lo tanto:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] [xI_{m+1}] = 2I_m$$

como se deseaba probar.

IDENTIDAD IV.- Sea K_{m+1} la función modificada de Bessel de tercera especie y de orden $(m+1)$. Dicha función satisface la siguiente relación:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] [xK_{m+1}] = -2K_m$$

En donde K_m es la función modificada de Bessel de tercera especie y orden m .

DEMOSTRACION:

Se siguen los mismos pasos que en la demostración anterior, y solo varían dos propiedades, que son:

$$-2\frac{n}{x} K_n = K_{n-1} + K_{n+1}$$

$$-2K'_m = K_{m-1} - K_{m+1}$$

IDENTIDAD V.- Sea I_m la función modificada de Bessel de primera especie y orden m . Dicha función satisface la relación:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right] [xI_m] = 2I'_m$$

DEMOSTRACION:

La primera y la segunda derivadas del producto xI_m son iguales a:

$$\frac{d}{dx} [xI_m] = xI'_m + I_m$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [xI_m] = xI''_m + 2I'_m$$

Por lo tanto:

$$D^2 x I_m = x D^2 I_m + 2 I'_m + \frac{1}{x} I_m$$

Usando esta igualdad se demuestra que:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{xz} \right] x I_m = x \left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} \right] I_m + 2 I'_m,$$

pero la primera parte del miembro izquierdo es igual a cero, pues I_m es solución de la ecuación modificada de Bessel. De lo anterior concluimos lo que se deseaba probar:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{xz} \right] [x I_m] = 2 I'_m,$$

IDENTIDAD VI. - Sea K_m la función modificada de Bessel de tercera especie y orden m . Dicha función satisface la relación:

$$\left[D^2 - 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{xz} \right] [x K_m] = 2 K'_m$$

DEMOSTRACION:

Se siguen exactamente los mismos pasos que en la demostración anterior.

REFERENCIAS

- Amenzade Yu. A., 1979. Theory of Elasticity. Editorial Mir. Moscú, pp. 284.
- Boudourides, M.A., 1986. Stability criteria for swirl flows with free surfaces. J. of Applied Math. and Phys. 37(7), 597-607.
- Davis, H. T., 1962. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover. New York, pp. 566.
- Drazin, R. G., 1979. Hydrodynamic Stability. Cambridge University. Cambridge.
- Fujimora, K., 1990. Linear stability of a rotating film flow attached inside a circular cylinder. Phys. Fluids A. 2(7), 1182-1190.
- Hu, H. H. y Joseph, D. D., 1989. Stability of a core annular flow in a rotating pipe. Phys. Fluids A. 1(10), 1677-1685.
- Krantz, W. B. y Goren, S. L., 1971. Stability of thin liquid films flowing down a plane. Ind. Eng. Chem. Fundam., 10(1), 91/101.
- Krantz, W. B. y Zollars, R. L., 1976. The linear hydrodynamic stability of film flow down a vertical cylinder. AIChE Journal. 22(5), 930-934.
- Kreider, D.L., Kuller, R. G. y Ostberg, D. R., 1973. Ecuaciones Diferenciales. Fondo Educativo Interamericano. México, pp. 486.
- Lang, S., 1976. Algebra Lineal. Fondo educativo interamericano. Mexico. pp. 394.
- Lebedev N.N., 1972. Special functions and their applications. Dover Publications. New York, 308 pp.
- Lin, S.P. y Liu, W. C., 1975. Instability of film coating of wires and tubes. AIChE Journal. 21(4), 775-782.
- Mijeev, M. A. y Mijeeva, 1979. Fundamentos de termotransferencia. Editorial Mir, Moscú.

- Poole, E. G. C., 1960. Introduction to the theory of linear differential equations. Dover Publications. New York, 192 pp.
- Reitz, J. P. y Milford, F. J., 1978. Foundations of Electromagnetic Theory. Addison-Wesley. Reading, pp. 435.
- Shlang, T. y Sivashinsky, G. I., 1982. Irregular flow of a liquid film down a vertical column. J. Physique. 43(1982), 439-456.
- Solonio, F. J. y Sen, M., 1987. Linear stability of a cylindrical falling film. J. Fluid Mechanics. 183, 365-377.
- Solonio, F. J., 1990. Determinación experimental de la frecuencia, celeridad y número de onda en una película descendente cilíndrica de líquido. Memorias del XVI congreso ANIAC. Queretaro, 112-115.
- Sommerfeld, A., 1950. Mechanics of Deformable Bodies. Academic Press. New York.
- Tijonov, A. N. y Samarsky, A. A., 1980. Ecuaciones de la Física Matemática. Editorial Mir. Moscú, pp. 824.
- White, F. M., 1979. Mecánica de los fluidos. Mc Graw Hill. Mexico, pp. 757.
- Yih, Chia-Shun, 1961. Instability of a rotating liquid film with a free surface. Proc. Roy. Soc. A, 258, 63-89.