



66 2<sup>ej</sup>  
Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

RELACION ENTRE LEYES DE  
ESCALAMIENTO PARA APARATOS DE  
FUSION NUCLEAR Y TRANSFORMA-  
CIONES DE INVARIANCIA DE  
MODELOS DEL PLASMA

T E S I S

Que para obtener el título de  
F I S I C O  
P r e s e n t a

*Francisco Javier Vargas Mancilla.*

México D.F. 1991.

FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I n d i c e

---

0. Introducción.	
I. Escalas y Dimensiones.....	1
1. Escalamiento.....	1
1.1. Respiración durante la incubación de un huevo....	3
1.2. Razón metabólica.....	5
2. Dimensiones.....	6
2.1. Horneado de un Pavo.....	8
2.2. Oscilaciones pequeñas de un Péndulo.....	11
II. Principio de Invariancia de Escala.....	14
1. Escalas.....	14
2. Análisis Dimensional.....	16
2.1. Fuerza de arrastre de un cuerpo en un fluido....	17
3. Invariancia de Escala.....	21
3.1. Invariancia de escala de la ecuación de Navier Stokes.....	22
4. Análisis Dimensional e Invariancia de Escala.....	24
4.1. Cambio de Escala en los sistemas físicos ordinarios.....	25
5. Principio de Invariancia de Escala en la Física de Plasmas.....	29
III. Principio de Invariancia de Escala para el Confinamiento global.....	34
1. Modelos Cuasineutrales.....	36
1.1. Cuasineutral Electrostático de Vlasov.....	36
1.2. Cuasineutral Electrostático de Fokker-Planck....	42
1.3. Cuasineutral $\beta$ -altas de Vlasov.....	44
1.4. Cuasineutral $\beta$ -altas de Fokker-Planck.....	45
2. Modelos No Cuasineutrales.....	47
2.1. Electrostático de Vlasov.....	47
2.2. Electrostático de Fokker-Planck.....	48
2.3. $\beta$ -altas de Vlasov.....	49
2.4. $\beta$ -altas de Fokker-Planck.....	50
3. Modelos de Fluidos.....	50
3.1. MHD Ideal.....	52
3.2. MHD Resistivo.....	53
3.3. Efectos de Radios de Larmor finitos.....	55
IV. Aplicaciones de las Constricciones.....	60
1. Modelos Teóricos.....	61
2. Leyes de Escalamiento Empíricas.....	63
2.1. Sistemas con calentamiento óhmico.....	64
2.1.1. Modelos Cuasineutrales.....	66
2.1.2. Modelos No Cuasineutrales.....	68
2.1.3. Modelos de Fluidos.....	69
2.1.4. Comparación con leyes de escalamiento empíricas.....	71

3.	Similaridad y Aparatos Similares.....	73
3.1.	Similaridad entre Aparatos de confinamiento.....	76
3.1.1.	Modelos Cuasineutrales.....	76
3.1.2.	Modelos No Cuasineutrales.....	77
3.1.3.	Modelos de Fluidos.....	78
3.2.	Similitud entre Sistemas de confinamiento con calentamiento adicional.....	79
3.2.1.	Modelos Cuasineutrales.....	80
3.2.2.	Modelos No Cuasineutrales.....	82
3.2.3.	Modelos de Fluidos.....	82
3.3.	Aparatos con calentamiento óhmico.....	83
3.4.	Escalamiento fuera de las familias.....	84
4.	Interpretación (Análisis Dimensional).....	86
V.	Leyes de escalamiento con las razones geométricas y cantidades adimensionales.....	90
1.	Tokamaks.....	91
2.	RFP's.....	95
3.	Efectos de la Radiación e Impurezas.....	98
VI.	Transporte turbulento local.....	103
1.	Turbulencia de Gradientes de Temperatura de los Iones.....	106
2.	Modelos de Fluido resistivo.....	119
2.1.	Turbulencia debida a Gradientes de Temperatura.....	119
2.1.1.	Transporte en Campos magnéticos estocásticos.....	125
2.2.	Turbulencia debida a Gradientes Resistivos.....	131
2.3.	Turbulencia de Ondas de Deriva Resistivas.....	141
2.4.	Turbulencia debida a Modos de Intercambio Resistivo.....	146
2.4.1.	Transporte en campos Magnéticos estocásticos.....	150
VII.	Conclusiones.....	154
VIII.	Apéndices.....	160
A.	Ecs. MHD reducidas en el límite de la razón de aspecto grande.....	160
B.	Modelo de ecuaciones para los Modos Ondulatorios.....	169
C.	Forma adimensional del modelo de ecuaciones para los Modos de Intercambio resistivo y las Ondas de Deriva resistivas.....	176
D.	Formulación de Términos II.....	181
IX.	Bibliografía.....	184

## INTRODUCCION

---

Uno de los principales problemas para la humanidad es la provisión prolongada de potencia eléctrica en las regiones industriales del mundo.

El objetivo de la investigación de la fusión nuclear es determinar si la energía obtenida de la fusión de los elementos ligeros puede ser liberada en una forma controlada para servir como fuente de energía para la humanidad. Este proceso de fusión, que es la fuente de potencia en el Sol y las estrellas, es la única alternativa que existe hoy a la fisión nuclear debido a que las reservas fósiles ya son escasas. Un reactor de fusión nuclear puede proporcionar ventajas sobre los de fisión nuclear debido a que el combustible necesario se encuentra en grandes cantidades, y a que se reducen los desechos radioactivos de vida media larga.

Las reacciones más favorables para la fusión nuclear son las que se llevan a cabo entre los isótopos del hidrógeno, como son el Deuterio y el Tritio, y muestran que estos isótopos son el combustible apropiado para un reactor de fusión nuclear. El Deuterio se puede obtener a partir del agua ordinaria, mientras que el Tritio se debe producir a partir de una reacción secundaria del Litio, el cual es un metal relativamente abundante. Esta reacción se puede llevar a cabo al rodear la región de fusión con Litio, el cual puede capturar electrones liberados de la reacción Deuterio-Tritio para producir Tritio y Helio. El Tritio es reciclado, dejando al Helio como único producto de desecho. En la tabla se muestran las reacciones más relevantes para la fusión nuclear.

Reacción de fusión	$D + T \rightarrow He^4 + n + 17.6 \text{ Mev}$
Reacciones que producen Tritio	$Li^6 + n \rightarrow He^4 + T + 4.8 \text{ Mev}$ $Li^7 + n \rightarrow He^4 + T + n - 2.5 \text{ Mev}$
Reacción completa	$D + Li \rightarrow 2He^4 + \text{Energía}$

Las reacciones de fusión son completamente distintas a las reacciones químicas y son mucho más difíciles de conseguir. Esto es debido a que la reacción de fusión se lleva a cabo entre los núcleos atómicos, los cuales se encuentran cargados positivamente, y la repulsión electrostática impide que logren el contacto necesario para la fusión. Las reacciones de fusión se llevan a cabo sólo si los núcleos se aproximan entre sí a altas velocidades como para vencer la repulsión electrostática entre ellos. Se pueden obtener abundantes reacciones de fusión calentando el combustible gaseoso a una temperatura de unos 100 millones de grados Kelvin. El gas que se encuentra a estas elevadas temperaturas se compone de un ensamble de núcleos cargados positivamente y electrones con carga negativa, al que se le denomina "Plasma Termonuclear". El plasma se forma al pasar una corriente intensa a través de un gas ligero, como el hidrógeno, lograndose la ionización.

Para que la energía liberada en las reacciones de fusión nuclear sea mayor a la utilizada para calentar el gas y para compensar las pérdidas de energía la energía del plasma debe ser confinada durante un tiempo mínimo  $\tau$ , con una densidad de número  $n$ , de tal forma que el producto  $n\tau$ , parámetro de confinamiento térmico, exceda el valor  $10^{14} \text{ cm}^{-3} \text{ s}$  para la reacción Deuterio-Tritio, donde la temperatura debe ser al menos de unos 5 ó 10 Kev. A este criterio se le denomina criterio de Lawson. Para otros combustibles se requieren mayores temperaturas y mayores tiempos de confinamiento.

El problema de confinar un plasma a altas temperaturas es relevante para el proceso de fusión nuclear controlada.

Debido a que un plasma es un ensamble de partículas cargadas, su comportamiento puede ser controlado por la presencia de campos magnéticos. En la presencia de un campo magnético, una partícula se ve forzada a moverse en trayectorias espirales a lo largo de las líneas de campo, reduciendo su movimiento a lo largo de estas. Para reducir las pérdidas de partículas es importante que estas líneas de campo magnético no interaccionen con las paredes del recipiente de confinamiento. La estructura más favorable de un sistema de confinamiento magnético, la cual evita que las líneas de campo magnético intersecten al recipiente, es la estructura toroidal.

Un campo toroidal a lo largo del eje mayor del toro no es suficiente para lograr el confinamiento del plasma debido a que el campo es curvo a través de la sección transversal menor, causando una deriva de partículas hacia el borde exterior del recipiente. Esta deriva de partículas puede evitarse al aplicar un campo poloidal adicional alrededor del eje menor para formar un campo magnético con una estructura helicoidal alrededor del toro. Este campo magnético confina al plasma.

El campo magnético toroidal se produce por un conjunto de bobinas colocadas a igual distancia alrededor de una cámara de vacío toroidal, y es común para todos los sistemas toroidales de confinamiento. El campo poloidal se consigue de varias formas.

El sistema de confinamiento de plasma denominado "Tokamak" es el sistema más favorable para producir las condiciones de un reactor de fusión nuclear. Un Tokamak consiste de una cámara de vacío toroidal con un conjunto de bobinas espaciadas a lo largo del eje

mayor del toro para producir el campo magnético toroidal. Un gran transformador de acero induce una intensa corriente en el plasma. Esta corriente produce el campo poloidal necesario para el confinamiento y además calienta al plasma. En esta configuración el campo toroidal es mucho más intenso que el campo poloidal.

En la configuración de Pinch, para los RFP's (pinch de campo invertido), las componentes toroidal y poloidal del campo magnético son comparables en intensidad. La estabilidad del plasma es fomentada en esta configuración debido a que el campo toroidal se invierte en la región externa del plasma con respecto a su dirección en el centro del plasma. Este sistema de confinamiento utiliza bajas intensidades del campo magnético, por lo que representa la posibilidad de un reactor de fusión "barato".

La configuración magnética Stellarator se forma a partir de la combinación de un campo magnético toroidal convencional con un campo helicoidal producido por corrientes a través de un conjunto de conductores helicoidales arrollados en la región externa del campo. El campo resultante forma un conjunto de superficies magnéticas helicoidales anidadas próximas entre sí alrededor del eje del plasma.

Los fenómenos de confinamiento de energía y transporte de partículas en una estructura de campo magnético dada son algunos de los problemas que deben resolverse en la Física de Plasmas con el objeto de construir un reactor de fusión nuclear controlada. Su solución permitiría determinar los parámetros de operación necesarios para un reactor de este tipo. Originalmente se pensaba que se podrían determinar estos parámetros a partir de procesos de tipo clásico o neo-clásico, como es el caso del transporte en el que se

incluyen colisiones entre partículas (colisiones coulombianas), de tal forma que se podría contar con una teoría predictiva. Sin embargo, existen evidencias muy fuertes, obtenidas a partir de los experimentos de fusión existentes, de que la conductividad térmica de los electrones y en menor medida la de los iones, son fenómenos altamente anómalos. Se han tratado de explicar este tipo de procesos anómalos en términos de turbulencias ocasionadas por microinestabilidades, más sin embargo el problema de proporcionar una teoría para la descripción de este transporte anómalo se dificulta por la gran diversidad de fenómenos que se necesitaría introducir, haciendo difícil la elección de los mecanismos que gobiernan el proceso, debido a que estos no son claros aún.

Aunque se pueda salvar esta dificultad, de decidirse por los mecanismos responsables en el transporte, permanece aún el problema del cálculo del tiempo de confinamiento anómalo, en términos de los estados saturados no lineales de algunas inestabilidades físicas del plasma. El tiempo de confinamiento de energía es un parámetro práctico importante para el estudio del plasma termonuclear, y la posibilidad de que se pueda escalar con otros parámetros relevantes para el sistema de confinamiento, de una forma predecible, es de interés para la interpretación de los experimentos existentes y para la extrapolación al diseño de nuevos experimentos.

En ausencia de fusión nuclear, el balance global de energía del plasma está dado por:

$$\frac{dW}{dt} = P_i - P_L$$

donde  $W$  es la energía almacenada en el plasma,  $P_i$  es la potencia de alimentación al plasma y  $P_L$  es la potencia que se pierde del plasma. El balance de energía puede expresarse como:

$$W^{-1} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}$$

donde  $\tau$  es el tiempo de confinamiento de energía y  $\tau'$  es el tiempo de reemplazo de energía (o calentamiento):  $\tau = W/P_L$  y  $\tau' = W/P_I$ .

Físicamente, el tiempo de confinamiento de energía es el tiempo necesario para disipar la energía almacenada por una potencia de pérdida constante, mientras que el tiempo de reemplazo de energía es el tiempo requerido para reemplazar la energía almacenada por una potencia de alimentación constante.

Uno de los objetivos de los grandes experimentos en Física de Plasmas, como son las series de tokamaks, es la determinación de la relación entre el tiempo de confinamiento de energía  $\tau$  y los parámetros del aparato de fusión, tales como el campo magnético y los radios mayor y menor del tokamak. A este tipo de relación se le da el nombre de "Ley de escalamiento para el confinamiento". Se han hecho intentos para deducir leyes de escalamiento empíricas para el tiempo de confinamiento de energía, a partir de los datos observados en los experimentos de fusión existentes (*Gorbunov, et al, 1970; Daughney, 1975; Hugill y Sheffield, 1978; Merezhkin y Mukhovator, 1981; Goldston, 1984; Liewer, 1985*). En este caso, se supone que el tiempo de confinamiento puede ser expresado como una función de ciertos valores característicos de variables físicas independientes, relevantes para el confinamiento del plasma, tales como la densidad del plasma  $n$ , su temperatura  $T$ , intensidad del campo magnético  $B$  y los radios, mayor  $R$  y menor  $a$ , junto con factores geométricos tales como la razón de aspecto  $a/R$  y el factor de seguridad  $q$ . Se busca entonces una función del tipo  $f(n, T, B, q, a/R, \dots)$ , usualmente en forma de ley de potencias  $\tau \sim n^p T^q B^r a^s \dots$ , donde los índices  $p, q, r, s, \dots$  se derivan a partir del ajuste de los

datos de una variedad de experimentos.

Algunas leyes de escalamiento empíricas que se han deducido son:

$$\text{Daughney, 1975: } \tau \sim nB^{-3/4}a^{3/4}.$$

$$\text{Hugill y Sheffield, 1977: } \tau \sim n^xB^ya^z,$$

$$\text{con } x = 0.61 \pm 0.08; y = 1.89 \pm 0.13; z = 1.57 \pm 0.17.$$

$$\text{Merezhkin y Mukhovatov, 1981: } \tau \sim nT^{-0.5}a^{0.25}R^{2.75}q.$$

$$\text{Goldston, 1984: } \tau \sim n^{-1}T^{-1}B^2a^{1.26}R^{0.5}q^{-2}.$$

$$\text{Liewer, 1985: } \tau \sim na^{1.4}R^{2.04}q.$$

El escalamiento del tiempo de confinamiento no está de ningún modo garantizado debido a que la pérdida de potencia de los electrones se debe a varios fenómenos físicos como son el transporte de energía (o potencia) de electrones ( $P_{t,r,e}$ ), la radiación ( $P_{rad}$ ) y el intercambio de energía entre electrones e iones ( $P_{e,i}$ ).

$$P_{L,e} = P_{t,r,e} + P_{rad} + P_{e,i}$$

Aunque cada fenómeno físico puede satisfacer una ley de escalamiento, la superposición de los fenómenos no necesariamente satisface un escalamiento. Afortunadamente el transporte de energía, el cual proviene de la conducción y la convección, es usualmente el mecanismo de pérdida de energía predominante en los plasmas confinados magnéticamente. En cualquier caso, debido a que el tiempo de confinamiento puede proporcionar información sobre los parámetros de operación de un reactor potencial de fusión, la ayuda de un escalamiento simple del tiempo de confinamiento, aunque sea aproximado, justifica su búsqueda. El problema principal con estas leyes de escalamiento consiste en que, al ser deducidas a partir de los experimentos de fusión existentes, son extrapoladas a los parámetros de escala de reactor sin conocer su validez. Además, la diversidad de estos escalamientos proviene de varias fuentes, como son el uso

de conjuntos de datos casi disjuntos, la elección de variables de escalamiento distintas, y ocasionalmente una confusión respecto a las limitaciones impuestas por el calentamiento óhmico.

Por otro lado, se puede intentar obtener leyes de escalamiento a partir de estudios teóricos del comportamiento del plasma termonuclear. Usualmente se intenta calcular el transporte anómalo identificando alguna inestabilidad lineal, para después estimar su amplitud de saturación y deducir el transporte correspondiente a este estado saturado. Sin embargo, por lo regular es necesario introducir ciertas hipótesis acerca del mecanismo de saturación no lineal o acerca de la naturaleza de la turbulencia del plasma para las cuales no hay certeza de su validez (McNamara y Taylor, 1971; Ohkawa, 1978; Parall y Pogutse, 1981; Kadomtsev y Pogutse, 1985; Romanelli, et al, 1986; Waltz, et al, 1987).

Como se ha visto, el plasma termonuclear presenta una dificultad especial para su estudio. Las inestabilidades con escalas de longitud grandes son el mayor obstáculo en la investigación hacia la construcción de un reactor de fusión termonuclear controlada. Para estos sistemas complicados, el Principio de Invariancia de Escala ofrece una técnica apropiada y menos laboriosa que los cálculos teóricos, que las aproximaciones empíricas y que el Análisis Dimensional convencional. Este principio (Connor y Taylor, 1977) permite el estudio de un sistema físico, por complicado que sea, sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones que lo describen, y evita algunas limitaciones del Análisis Dimensional.

En el capítulo I de este trabajo se describen algunas propie-

dades generales de los sistemas físicos en términos de las ideas de Escalas y Dimensiones. En el capítulo II se sugiere la idea de la invariancia de forma de las ecuaciones que describen a un modelo físico particular ante cambios de escala. En particular, en el capítulo III se aplican estas ideas al plasma termonuclear, estudiando el confinamiento magnético global para los distintos modelos propuestos. Las constricciones que surgen del análisis de invariancia de escala para cada modelo particular determinan la forma funcional del tiempo de confinamiento. En el capítulo IV se estudian diversas aplicaciones de las constricciones, como es el estudio de la validez de las distintas leyes de escalamiento que se han propuesto para el tiempo de confinamiento, tanto teóricas como empíricas. El confinamiento global no proporciona información sobre el escalamiento en términos de factores geométricos, tales como los radios mayor y menor de un tokamak. En el capítulo V se estudia el confinamiento en términos de razones geométricas y cantidades adimensionales. La forma en que cada modelo particular del plasma responde ante el cambio de escala define el tipo de estructura funcional del tiempo de confinamiento, quedando determinado salvo una función que solo depende de argumentos adimensionales. En el capítulo VI se estudian los efectos del escalamiento en los modelos que involucran un mecanismo particular responsable de la turbulencia presente en el plasma, por lo que se hace un estudio de la turbulencia local responsable del transporte de energía y de la conducción de calor.

## CAPITULO I

### Escalas y Dimensiones

---

En este capítulo se discuten las ideas seminales de Galileo y Fourier sobre el método de escalamiento y la idea de que cada cantidad física tiene una dimensión que le es propia. Estas ideas son aplicadas a algunos problemas interesantes, como es la respiración del embrión de un ave durante el período de incubación, la razón metabólica de un cuerpo, el horneado de un pavo, y las oscilaciones pequeñas de un péndulo, con el fin de obtener conclusiones sobre el empleo de las mismas.

.....

#### 1.- Escalamiento.

Una de las fantasías más curiosas que han cruzado por la mente del ser humano y que lo han preocupado, ha sido la idea de que puedan existir seres con dimensiones monstruosas, tales como arañas u hormigas de tamaños tan grandes que el ser humano sería una cosa insignificante frente a ellos, fácil de destruir. Galileo Galilei fue quien analizó esta posibilidad por primera vez hace más de tres siglos. En su libro, "Diálogos concernientes a dos nuevas ciencias", ofrece una discusión muy clara e interesante sobre los efectos del escalamiento de las dimensiones de un objeto físico. En él dice: "... puedes ver fácilmente la imposibilidad de aumentar el tamaño de estructuras a vastas dimensiones ... Si su altura se aumentara excesivamente, esta caerá y se aplastará bajo su propio peso". Se obtiene que el simple escalamiento de las dimensio-

nes de una estructura física, como el caso de una hormiga, a alguna dimensión monstruosa es físicamente imposible, y es posible afirmar que estas antiguas fantasías no son más que ficción.

Una de las cuestiones más importantes que presenta la naturaleza se refiere a la forma en que un sistema físico responde ante el cambio de su escala. Actualmente, esta es una de las cuestiones fundamentales de la Teoría Cuántica de Campos, de la Teoría de Transiciones de Fase, de la Dinámica de Sistemas Complejos, y de los intentos de unificación de las fuerzas de la naturaleza. Se han logrado grandes progresos en los últimos años, basados en las respuestas que se ofrecen a esta cuestión.

La principal característica del análisis de Galileo sobre las escalas y dimensiones de los sistemas físicos, fue el hecho de que percibió una relación para el peso  $W$  y la resistencia de la estructura en términos de una longitud característica de la estructura. El peso  $W$  aumenta linealmente con el volumen, mientras que la resistencia de la estructura aumenta solo como el área de una sección transversal. Esto significa que, para estructuras similares el volumen se escala como  $V \propto l^3$ , mientras que el área de una sección transversal como  $A \propto l^2$ , donde  $l$  es una longitud característica. Esta puede ser la altura de la estructura, de tal forma que la razón de resistencia al peso  $\eta$  será:

$$\eta \propto \frac{A}{V} \propto \frac{1}{l} \propto \frac{1}{W^{1/3}}$$

De esta forma, Galileo observó que los animales más pequeños parecen más fuertes que los grandes.

Adicionalmente, esta discusión puede ser usada para entender por qué los huesos y extremidades de los animales superiores deben ser proporcionalmente más corpulentos que los de los animales men-

res, considerando la razón resistencia a peso.

Este tipo de argumentos, basados en el escalamiento de estructuras similares, fueron usados extensivamente a finales del siglo pasado para entender las características extremas del mundo biológico. Las dimensiones y formas generales de los animales y plantas pueden ser visualizados como una forma de respuesta de la naturaleza a las constricciones de la gravedad, a los fenómenos de superficie, a flujos viscosos, etc.

### 1.1.- Respiración durante la incubación de un huevo.

Un ejemplo interesante puede aclarar estas ideas. Se puede preguntar por el fenómeno de la respiración durante la incubación del huevo de un ave, y cómo ciertas variables físicas se escalan de ave en ave.

En la fig. 1 se muestra la dependencia de la conductancia de Oxígeno  $K$ , y la longitud del poro  $l$ , con la masa del huevo  $W$ . La gráfica muestra que la pendiente, tanto para la conductancia  $K$  como para la longitud del poro  $l$ , es cercana a la que se obtiene en base a un simple análisis de escalamiento geométrico.

Los autores del artículo, al notar que la pendiente para  $l$  es muy pequeña, concluyen que la longitud del poro aumenta muy lentamente debido a que el cascarón del huevo debe de ser lo suficientemente delgado para que el ave pueda salir de él. Esta es una conclusión acerca de la dinámica del fenómeno, pero, ¿está garantizada?. De un escalamiento geométrico simple se espera que para huevos similares  $l \propto W^{1/3}$ , lo cual está en razonable acuerdo con los datos de la gráfica; el mejor ajuste de los datos da  $l \propto W^{0.4}$ .

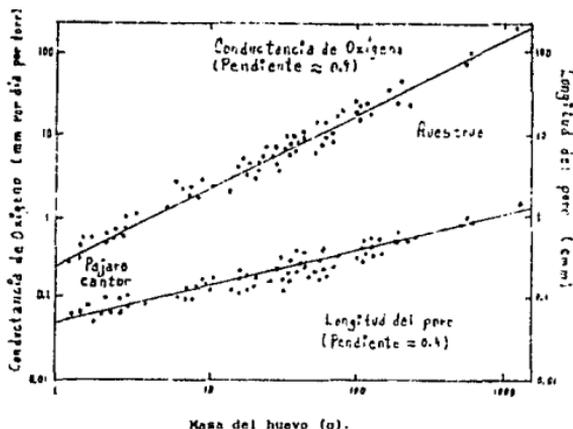


Fig. 1. Gráfica logarítmica de los parámetros relevantes para la respiración de las aves durante el periodo de incubación (Rahn et al, 1979).

Aunque estos datos están en razonable acuerdo con el escalamiento geométrico, no se pueden obtener conclusiones acerca de la dinámica del proceso. En vez de mostrar un crecimiento anómalo lento con respecto a la masa del huevo, los datos para  $I$  muestran en realidad un crecimiento anómalo rápido; 0.4 contra 0.33. Para  $K$  se tiene que  $K \propto W^{0.9}$ . Esta relación puede ser entendida también en base a argumentos geométricos. Se tiene que  $K$  es proporcional al área total disponible de los poros e inversamente proporcional a la longitud del poro. El área total de los poros será, el número de poros por el área del poro individual. Si se supone que el número de poros por unidad de área permanece constante de ave en ave. Se tienen dos factores que se escalan como un área, y uno como el inverso de una longitud. Se espera que  $K \propto (l^{2/3})^2 / W^{1/3} = W$  de nuevo en razonable acuerdo con los datos.

Este ejemplo muestra la importancia de una curva de escalamiento, no solo para establecer el fenómeno del escalamiento por sí mismo, sino para revelar las desviaciones de algunas prediccio-

nes ingenuas.

### 1.2.- Razón Metabólica.

Otro ejemplo interesante se refiere a la forma en que la razón metabólica (calor perdido por un cuerpo en un estado inactivo de reposo), varía de animal en animal. Se espera que esta razón metabólica esté dominada por los efectos de superficie, tales como sudoración y radiación. Si se denota por  $D$  a la razón metabólica, se espera que ésta se escale como  $D \propto W^{2/3}$ .

En la fig. 2 se muestran una serie de datos, graficados logarítmicamente, en la cual se puede observar que la razón metabólica  $D$  se escala de animal en animal. Esto significa que los datos para todos los animales caen sobre una curva simple, a pesar de que un elefante no se puede comparar con un ratón o con un chimpancé.

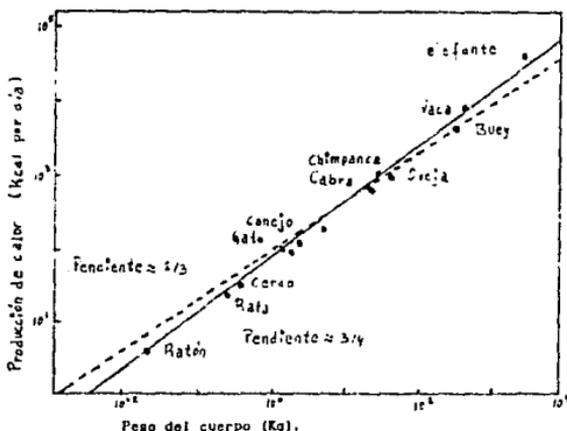


Fig. 2. Gráfica logarítmica de la razón metabólica como función del peso del cuerpo. La curva continua es el resultado del análisis basado en una dependencia superficial. La otra es el resultado del mejor ajuste de los datos (West, 1984).

Sin embargo, la pendiente de la curva que mejor se ajusta a los datos de la gráfica es  $3/4$  en lugar de  $2/3$ . Esto indica que e-

xisten otros factores, distintos de los superficiales, que juegan un papel importante en el proceso de la pérdida de energía de un cuerpo en reposo.

Típicamente, las desviaciones de un análisis geométrico o cinemático simple reflejan la dinámica del sistema, el hecho de que factores adicionales no considerados se presentan en el fenómeno estudiado, y esta dinámica puede ser entendida solamente al examinar el sistema con mayor detalle. A la inversa, no se pueden obtener conclusiones referentes a la dinámica del sistema a partir de un escalamiento ingenuo.

## 2.- Dimensiones.

El contenido físico del escalamiento de cantidades físicas se formula a menudo en términos de un lenguaje más general, el cual es la base de lo que se denomina Análisis Dimensional.

La idea fundamental del escalamiento de las cantidades físicas parece ser debida a Fourier. En 1822 se publica en Paris su libro "Theorie Analytique de la Chaleur" donde se encuentra, además de su principal contribución al Análisis Matemático, el "Análisis de Fourier", la idea fundamental de utilizar dimensiones para las cantidades físicas. Fourier introdujo la idea de que cada cantidad física "tiene una dimensión que le es propia, y que los términos de una y de la misma ecuación no pueden ser comparados si no tienen el mismo exponente de la dimensión". Además dice: "Hemos introducido esta consideración para verificar el análisis... Es el equivalente de los lemas que nos dejaron los griegos sin prueba".

La idea de dimensiones para una cantidad física está relacionada con la forma en que ésta cambia al variar el sistema fundamep

tal de unidades. Cuando las magnitudes de las unidades fundamentales de medición, las unidades con las cuales se miden las características básicas de las estructuras físicas, como son la longitud, la masa, el tiempo, etc., se alteran por un factor arbitrario, los valores numéricos de las cantidades físicas cambian también, en el mismo factor arbitrario original. El factor que describe la magnitud de este cambio está determinado por las dimensiones de la cantidad física. Por ejemplo, si la unidad de longitud se reduce por un factor  $L$ , los valores numéricos de todas las longitudes aumentarán en un factor  $L$ . Se dice entonces que la longitud tiene dimensiones  $L$ . Análogamente, si la masa tiene dimensiones  $M$  y el tiempo tiene dimensiones  $T$ , la velocidad tiene dimensiones  $LT^{-1}$ , etc. Los números  $L$ ,  $M$ ,  $T$  no son más que números positivos abstractos que se miden el cambio en la magnitud de las cantidades físicas al cambiar el sistema fundamental de unidades de medición. Así, todas las cantidades físicas se expresan en términos de estos números positivos en una forma muy particular. Como reglas de potencias de monomios. Sin embargo, fue mucho más tarde que los físicos comenzaron a usar el método de las dimensiones para estudiar cierto tipo de sistemas físicos.

Un comentario de Lord Rayleigh, aparecido en un artículo publicado en la revista "Nature" en 1915, hizo ver la importancia de las ideas de escalas y dimensiones al plantear que los resultados expresados en forma de leyes, los cuales son considerados como innovaciones sobre la base de elaborados experimentos, podrían obtenerse a priori después de unos cuantos minutos de consideración. Decía: "Me ha impresionado muy a menudo la escasa atención que se le ha dado al principio de similitud, aún por gente que ha aporta-

do trabajos originales en este campo". Después de este comentario da una serie de ejemplos que justificarán sus consideraciones sobre el poder del análisis de las dimensiones de las cantidades físicas. Para enfatizar las consideraciones de Rayleigh, se pueden ilustrar estas con un ejemplo curioso, y es el problema que se refiere al tiempo necesario durante el cual se debe de hornear un pavo, para que esté a punto para la cena de navidad.

### 2.1.- Horneado de un Pavo.

Hay muchos libros de cocina que recomiendan 20 minutos por libra aproximadamente, estableciendo una relación lineal del tiempo de horneado con el peso del pavo ( $t \sim W$ ). Sin embargo, hay ciertos libros de cocina especializados que reconocen la naturaleza no lineal de esta relación. El problema refleja una relación no lineal entre el tiempo de horneado y el peso del ave, la cual se desea poder determinar sin tener que resolver la ecuación de Difusión de Calor de Fourier.

La fig. 3 muestra la variación del tiempo de horneado con el peso del pavo (ave).

Se puede observar cómo es posible entender esta variación del tiempo de horneado con el peso, usando el principio de similitud. Para este problema se puede suponer que la distribución de temperatura  $T$  dentro del pavo (ave), depende de la temperatura del horno  $T_0$ , del peso del pavo  $W$ , de la densidad del pavo  $\rho$ , del coeficiente de difusión de calor  $K$  y del tiempo de horneado, (las temperaturas son medidas relativas a la temperatura del aire exterior).

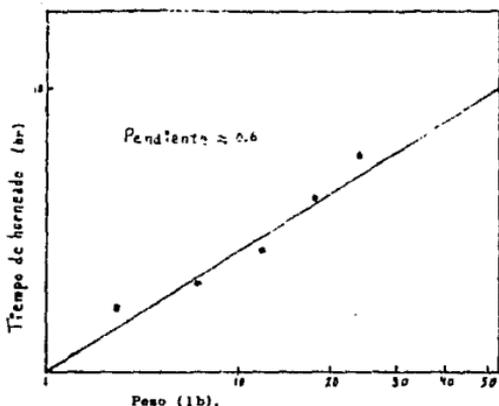


Fig. 3. Gráfica del tiempo de horneado de un pavo como función logarítmica de su peso (West, 1984).

Si las unidades de longitud se disminuyen en un factor  $L$ , los valores numéricos de todas las longitudes aumentarán en un factor  $L$ , lo que indica que la longitud tiene dimensiones  $L$ . Análogamente, la masa tiene dimensiones  $M$ , el tiempo tiene dimensiones  $T$ , y la temperatura tiene dimensiones  $T^\circ$ . Así,  $T$  y  $T_0$  tienen dimensiones  $T^\circ$ ,  $W$  tiene dimensiones  $M$ ,  $\rho$  tiene dimensiones  $ML^{-3}$  y  $K$  tiene dimensiones  $L^2T^{-1}$ . Si se considera la cantidad  $Kt$ , se observa que tiene dimensiones  $L^2$ , de tal forma que  $(Kt)^{3/2}$  tiene dimensiones  $L^3$ , y  $\eta = \rho(Kt)^{3/2}$  tiene dimensiones  $M$ . La distribución de temperatura se puede expresar en función de  $W$ ,  $T_0$ ,  $K$ ,  $t$  y  $\eta$  en lugar de la densidad del pavo.

$$T = T(T_0, W, K, t, \eta) \quad 1.1$$

Es posible formar la combinación  $\Pi = T/T_0$ , la cual es una cantidad adimensional, y pensar que  $\Pi$  depende también de  $T_0$ ,  $W$ ,  $K$ ,  $t$  y  $\eta$ . Como  $\eta$  tiene dimensiones  $M$ , esta dependencia de  $\Pi$  se puede expresar como:

$$\Pi = T/T_0 = \Pi(T_0, W, K, t, \eta) \quad 1.2$$

donde  $\pi_1 = \eta/W$ , el cual no cambia de valor numérico al cambiar el sistema fundamental de unidades de medición, al igual que  $T/T_0$ . Si la unidad fundamental de temperatura se disminuye en un factor arbitrario  $T^*$ , mientras que las unidades de masa, longitud y tiempo se mantienen invariantes, el valor numérico de la temperatura  $T_0$  aumentará en un factor  $T^*$ , mientras que  $\Pi$ ,  $W$ ,  $K$ ,  $t$  y  $\pi_1$  permanecen invariantes. Esto significa que  $\Pi$  no depende de  $T_0$ . Cambiando la unidad de masa solamente por un factor arbitrario  $M$ , se encuentra que el valor numérico de la masa cambiará en el mismo factor arbitrario, mientras que las cantidades  $\Pi$ ,  $K$ ,  $t$  y  $\pi_1$  permanecen invariantes. Esto significa que  $\Pi$  no depende de la masa. Cambiando la unidad de longitud, se encuentra que  $\Pi$  no depende del coeficiente de difusión de calor  $K$ . Por último, si la unidad de tiempo se cambia el valor numérico del tiempo cambiará, mientras que los términos  $\Pi$  y  $\pi_1$  permanecerán invariantes, indicando que el término  $\Pi$  no depende del tiempo. Así:

$$\Pi = \Psi(\pi_1) \quad 1.3$$

donde  $\Psi$  es una función no determinada aún que depende solo de un parámetro adimensional. Es imposible simplificar aún más la expresión 1.2 debido a que  $\Pi$  y  $\pi_1$  son adimensionales, y no cambian al cambiar el sistema fundamental de unidades. Sin embargo, aún sin simplificaciones adicionales, el resultado es interesante. Volviendo a las variables dimensionales originales se tiene que:

$$\frac{T}{T_0} = \Psi\left(\frac{\rho(Kt)^{3/2}}{W}\right) \quad 1.4$$

Este es el resultado de la observación básica de Fourier, de que "la física del problema es independiente de la elección de las unidades", lo cual impone ciertas restricciones a la posible forma de la función. Se puede observar que es necesario determinar cuales

son las variables relevantes al sistema para poder determinar aquellas cantidades que son adimensionales, y llevar a cabo el análisis de las dimensiones.

El punto importante de este resultado es que, debido a que el lado izquierdo es adimensional, la función arbitraria  $\Psi$  debe ser una función adimensional de una variable adimensional. Esta función no depende de la elección de las unidades, ya que las cantidades adimensionales permanecen invariantes ante cambios de escala.

Para aves geoméricamente similares, horneadas a la misma distribución de temperatura, y a la misma temperatura del horno, se obtiene una ley de escalamiento de la forma:

$$\frac{\rho (Kt)^{3/2}}{W} = \text{cte.} \quad 1.5$$

Si las aves tienen las mismas características físicas ( $\rho$  y  $K$  constantes), esta ecuación se reduce a:

$$t \propto W^{2/3} \quad 1.6$$

lo cual refleja una regla de superficie, y se puede observar que este resultado está de acuerdo con los datos de la gráfica.

## 2.2.- Oscilaciones pequeñas de un péndulo.

Otro ejemplo interesante es el caso de las oscilaciones pequeñas de un péndulo en un campo gravitatorio.

Se supone que el periodo  $\theta$  para oscilaciones pequeñas de un péndulo simple de longitud  $l$ , depende de la longitud del péndulo, de la masa de la plomada, y de la aceleración gravitacional. Estos parámetros relevantes para el problema pueden ser escritos en términos de varios números  $l$ ,  $m$ ,  $\theta$  y  $g$ , los cuales son obtenidos al comparar estos parámetros con ciertas unidades fundamentales de medición, cuya elección es arbitraria. En este caso, la longitud tie

ne dimensiones L, la masa tiene dimensiones M, el periodo  $\theta$  tiene dimensiones T y la aceleración gravitacional tiene dimensiones  $LT^{-2}$ . Si se forma la cantidad  $(l/g)^{-1/2}$  se podrá observar que tiene dimensiones T, de tal forma que, de los parámetros que se tienen disponibles, existe solo un único parámetro adimensional, el cual tiene la forma:

$$\Pi = \theta/\sqrt{l/g} \quad 1.7$$

Se puede suponer que  $\Pi$  depende también de  $l$ ,  $m$  y  $g$ . Si se disminuye la unidad de masa en un factor arbitrario  $M$ , manteniendo las unidades de tiempo y longitud invariantes, el número  $m$  aumenta en el mismo factor  $M$ , mientras que  $l$ ,  $g$  y  $\Pi$  permanecen invariantes. Esto significa que  $\Pi$  no depende de la masa. Si se disminuye la unidad de tiempo en un factor arbitrario  $T$ , sin que la unidad de longitud cambie, el valor numérico de  $g$  aumenta en un factor  $T^{-2}$ . Las cantidades  $\Pi$  y  $l$  permanecen invariantes, indicando que  $\Pi$  no depende de  $g$ . Por último, si se disminuye la unidad de longitud en un factor  $L$ , el valor numérico de  $l$  aumentara en un factor  $L$ , pero  $\Pi$  permanecerá invariante, lo cual indica que  $\Pi$  no depende de  $l$ . Así, se tiene que el término  $\Pi$  es una constante:

$$\Pi = \theta/\sqrt{l/g} = \text{cte.} \quad 1.8$$

Se obtiene que el periodo de oscilaciones pequeñas de un péndulo tiene la forma:

$$\theta = \text{cte.} \sqrt{l/g} \quad 1.9$$

La constante no se puede determinar a partir de las dimensiones de las variables del problema, sin embargo, se puede determinar a partir de los datos de un experimento.

Una de las características de este tipo de análisis es el he

cho de que para sistemas más complicados, con un gran número de variables, la elección de las variables relevantes se complica mucho más. Sin embargo, una vez determinadas estas variables, las dimensiones de estas son determinadas por las leyes fundamentales que obedecen (como la ecuación de difusión). Una vez que las dimensiones son conocidas, la estructura de la relación entre las variables es determinada por el principio de Fourier.

## CAPITULO II

### Principio de Invariancia de Escala

---

En este capítulo se discuten los problemas que se presentan al estudiar algunos sistemas físicos, y como surge la idea de obtener leyes de escalamiento para dichos sistemas. Se discuten las limitaciones de estos resultados, y cómo se presenta el Análisis Dimensional como una herramienta útil. Se observa que este resulta insuficiente a estos problemas, como es el caso que importa en este trabajo: El confinamiento de energía y transporte de calor en un plasma termonuclear confinado magnéticamente. Se presenta el concepto del Principio de Invariancia de Escala.

.....

#### 1.- Escalas.

Existen muchas preguntas y cuestionamientos acerca de los distintos fenómenos que se suceden en la naturaleza, como son las características extremas que se presentan en el mundo biológico, tales como las dimensiones y formas generales de los animales y plantas, las cuestiones referentes a la composición de la materia, sus propiedades y sus interrelaciones, etc. Estos objetos de estudio se presentan en un abanico de ordenes de magnitud, que van desde el micro hasta el macrocosmos.

De la diversidad de propiedades que presenta la naturaleza, una de las que más sobresalen es la extensa variedad de tamaños o escalas de longitud presentes en la estructura del mundo. En éste,

los sucesos que se diferencian por presentar una disparidad de tamaños tienen, por lo general, poca influencia mutua, de tal forma que los fenómenos asociados con una escala pueden ser tratados independientemente. Así, la interacción que existe entre dos moléculas de agua vecinas tiene idénticas propiedades si las moléculas se encuentran en el Océano Pacífico que si se encuentran en una gota de lluvia. Sin embargo, existe una clase de fenómenos para cuya explicación se presentan sucesos que involucran una gran variedad de escalas de longitud.

Por ejemplo, cuando se calienta el agua hasta su punto de ebullición, a una presión de 217 atmósferas, empieza a hervir sólo cuando la temperatura alcanza los 647 grados Kelvin. Esta combinación de presión y temperatura define el punto crítico del agua, en donde desaparece la distinción de líquido y gas; en condiciones de presión mayores hay una única fase líquida indiferenciada, y el agua no puede hacerse hervir por mucho que se eleve la temperatura. Cerca del punto crítico el agua genera fluctuaciones de su densidad en todas las escalas posibles. Las fluctuaciones toman la forma de gotas de líquido completamente mezcladas con burbujas de gas y hay tanto gotas como burbujas en todos los tamaños, desde pequeñas moléculas hasta el volumen de la muestra. En el punto crítico, la escala de las mayores fluctuaciones se hace infinita, sin que disminuyan las fluctuaciones menores. De esta forma, la teoría que pretenda describir al agua en la proximidad de su punto crítico debe considerar todo el espectro de escalas de longitud.

La gran variedad y multiplicidad de escalas de longitud representa un reto, ya que complica muchos de los problemas que aún no han sido resueltos en la física teórica y en algunos otros campos

de investigación. Se han encontrado soluciones exactas para tan solo unos cuantos problemas, sin embargo, para otros hasta las mejores aproximaciones resultan insatisfactorias. Por ejemplo, el estudio de un material ferromagnético a la temperatura en que se establece la imanación espontánea, de una mezcla de líquidos a la temperatura en que se hacen completamente miscibles, de una aleación a la temperatura en la que dos clases de átomos metálicos se distribuyen ordenadamente, de la superconductividad y de la superfluidez, de la formación de polímeros, del enlace de las partículas elementales, del estudio del flujo turbulento, etc..

## 2.- Análisis Dimensional.

Una de las ideas más interesantes que surgieron para tratar de estudiar y comprender ciertas características del mundo natural fue el empleo de Escalas y Dimensiones para los sistemas físicos. Galileo fue el pionero en el estudio de los sistemas físicos al plantearse la pregunta: ¿Que le sucede a un sistema físico cuando se altera su escala?. Así, una de las grandes aportaciones hechas por Galileo fue la de establecer que ciertos fenómenos tienen un comportamiento tal que se pueden escalar desde dimensiones pequeñas a otras mucho mayores, y plantear la posibilidad de que una misma ley física, o de otro tipo para campos distintos, pueda describir el comportamiento de dicho fenómeno, aunque este se presente a diferentes niveles de escalas de longitud. Estas ideas sobre el comportamiento de las variables físicas, al ser escaladas, dieron la base para evitar errores en la interpretación de los fenómenos físicos, y se presentaron como una alternativa de análisis de los mismos.

Las características físicas inherentes al escalamiento de parámetros de un sistema está íntimamente relacionado con un lenguaje más general, que respalda el escalamiento como alternativa de análisis, el cual es la base del método denominado Análisis Dimensional.

Uno de los problemas presentes es el análisis de sistemas físicos complejos, y parece ser que fue Fourier quien introdujo la idea fundamental del escalamiento. Esta idea plantea que todas y cada una de las cantidades físicas poseen una dimensión que les es propia, de tal forma que los términos de una ecuación no podrían compararse si estos no tienen el mismo exponente de la dimensión. Esto significa que la ley física que gobierna el comportamiento de un sistema físico no puede depender de la elección de las unidades. Existe una invariancia de las propiedades físicas ante el cambio de escala.

Esta idea fundamental de que cada cantidad física tiene una dimensión que le es propia establece la posibilidad de obtener información acerca de un sistema físico, en principio por complicado que este sea, sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones que describen a dicho sistema. Así, esta idea se convierte en una herramienta muy útil ya que las ecuaciones que describen a un sistema físico son, por lo general no-lineales, lo que las hace difíciles de resolver en general.

#### 2.1.- Fuerza de Arrastre de un Cuerpo en un Fluido.

Un ejemplo característico del empleo del Análisis Dimensional como técnica útil para conocer el comportamiento de un sistema sin necesidad de resolver el conjunto de ecuaciones dinámicas, es la

determinación de la fuerza de arrastre de un cuerpo que se mueve a través de un fluido viscoso de densidad  $\rho$ . Para determinar esta fuerza  $F$ , se pueden considerar a  $F$ ,  $\rho$ , la velocidad  $v$ , la viscosidad del fluido  $\mu$ , algún parámetro de longitud del cuerpo  $l$ , y la aceleración debida a la gravedad como el conjunto de variables del sistema. En este caso se excluyen otro tipo de variables, como serían la velocidad del viento y la amplitud de las ondas del fluido debido a que, bajo condiciones de calma, estas son secundarias en importancia. Por ello, estas consideraciones y conclusiones no serán válidas para veleros.

La física del problema está gobernada por la ecuación de Navier Stokes, (la cual incorpora la ley de Newton del arrastre viscoso, proporcionando las dimensiones de  $\mu$ ), y la ley de la fuerza gravitacional, (la cual proporciona las dimensiones para  $g$ ).

Las variables consideradas en este problema, las cuales se deben expresar en términos de tres unidades básicas, (masa  $M$ , longitud  $L$  y tiempo  $t$ ), son  $F$ ,  $\rho$ ,  $v$ ,  $\mu$ ,  $l$  y  $g$ , las cuales se pueden expresar en términos de sus dimensiones y arreglar sus exponentes en la siguiente forma:

$$\begin{array}{l}
 F \rightarrow M^1 L^1 t^{-2} \rightarrow 1 \quad 1 \quad -2 \\
 \rho \rightarrow M^1 L^{-3} t^0 \rightarrow 1 \quad -3 \quad 0 \\
 v \rightarrow M^0 L^1 t^{-1} \rightarrow 0 \quad 1 \quad -1 \\
 \mu \rightarrow M^1 L^{-1} t^{-1} \rightarrow 1 \quad -1 \quad -1 \\
 l \rightarrow M^0 L^1 t^0 \rightarrow 0 \quad 1 \quad 0 \\
 g \rightarrow M^0 L^1 t^{-2} \rightarrow 0 \quad 1 \quad -2
 \end{array}$$

Al tomar el primer determinante  $3 \times 3$ , de las tres primeras filas, se obtiene que es distinto de cero, por lo que las variables  $F$ ,  $\rho$  y  $v$  son variables independientes. Esto es, no se puede formar

un término  $\pi$  con estas tres variables. (Ver apéndice D).

Los términos  $\pi$  se obtienen utilizando las variables independientes restantes formando productos de las anteriores con las variables restantes:

$$\pi = F^a \rho^b v^c \zeta \quad 2.1$$

donde  $\zeta$  representa a las variables restantes, y los exponentes  $a$ ,  $b$  y  $c$  se determinan a partir de las dimensiones de  $\zeta$ .

Si se exige que el término  $\pi$ , ec. 2.1, sea invariante ante cambios de sistemas de unidades, se obtiene un conjunto de relaciones entre los índices de escala, cuya solución determina la forma funcional del término  $\pi$ .

$$\pi_1 = F^a \rho^b v^c \mu \rightarrow (M L t^{-2})^a (M L^{-3})^b (L t^{-1})^c M L^{-1} t^{-1} = M^0 L^0 t^0$$

$$\begin{array}{l} a+b+1 = 0 \\ a-3b+c-1 = 0 \\ -2a-c-1 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a = -1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 0 \end{array} \rightarrow \pi_1 = \frac{\mu}{F^{1/2} \rho^{1/2}}$$

$$\pi_2 = F^a \rho^b v^c l \rightarrow (M L t^{-2})^a (M L^{-3})^b (L t^{-1})^c L = M^0 L^0 t^0$$

$$\begin{array}{l} a+b = 0 \\ a-3b+c = 0 \\ -2a-c = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a = -1/2 \\ b = 1/2 \\ c = 1 \end{array} \rightarrow \pi_2 = \frac{\rho^{1/2} v l}{F^{1/2}}$$

$$\pi_3 = F^a \rho^b v^c g \rightarrow (M L t^{-2})^a (M L^{-3})^b (L t^{-1})^c L t^{-2} = M^0 L^0 t^0$$

$$\begin{array}{l} a+b = 0 \\ a-3b+c = 0 \\ -2a-c-2 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = -3 \end{array} \rightarrow \pi_3 = \frac{F^{1/2} g}{\rho^{1/2} v^3}$$

Estos son los términos adimensionales del problema que se estudia. Sin embargo, se pueden construir otros términos  $\pi$  a partir de estos mismos, los cuales caracterizan mejor la física del problema. Estos son:

$$P = \pi_2^{-2} = \frac{F}{\rho v^2 l^2}, \text{ Coeficiente de Presión.} \quad 2.2$$

$$R = \pi_1^{-1} \pi_2 = \frac{\rho v l}{\mu}, \text{ Número de Reynolds.} \quad 2.3$$

$$N_v = \pi_2^{-1} \pi_3^{-1} = \frac{v^2}{l g}, \text{ Número de Froude.} \quad 2.4$$

Como se puede observar, es posible construir otro tipo de tér

minos  $\pi$  a partir de los obtenidos originalmente, construyendo productos de potencias de estos mismos.

El Análisis Dimensional requiere que la solución para el coeficiente de Presión, cualquiera que sea su forma, se exprese en términos de los otros dos parámetros adimensionales, en una forma adimensional:

$$P = f(R, N_f) \quad 2.5$$

La fuerza de arrastre puede obtenerse fácilmente a partir de esta ecuación, reexpresándola en términos de las variables dimensionales. Sin embargo, se puede considerar la situación en la cual las ondas generadas por el cuerpo no son importantes. (Un caso extremo podría ser un submarino).

En este caso  $g$  no entra como variable en la solución para  $P$ , ya que ésta se manifiesta en la fuerza restauradora para las ondas de la superficie. Así,  $N_f$  se puede eliminar de la solución, construyendo esta a la forma:

$$P = f(R) \quad 2.6$$

En términos de las variables dimensionales del problema, ésta representación se puede escribir como:

$$F = \rho v^2 l^2 f(vl\rho/\mu) \quad 2.7$$

Esta expresión establece la dependencia funcional de la fuerza de arrastre en términos de los parámetros  $v$ ,  $l$ ,  $\rho$  y  $\mu$ , los cuales son característicos del problema estudiado, quedando indeterminada una función que depende de un solo parámetro adimensional. El problema se ha reducido a determinar la forma de la función  $f$  en términos del parámetro  $R$ .

El Análisis Dimensional no puede proporcionar información referente a la posible forma de la función  $f$  debido a las caracteris

ticas propias de la técnica, ya que ésta se aboca a la determinación de todos los posibles términos  $\pi$  existentes en el problema. Así, se presenta como una herramienta útil para la obtención de leyes de escalamiento, ya que éste reduce el problema a la determinación de una función que depende de un pequeño conjunto de parámetros independientes adimensionales, de tal forma que ayuda a distinguir caminos hacia donde dirigir el trabajo experimental.

### 3.- Invariancia de Escala.

Este tipo de análisis de un sistema físico tiene algunos problemas operativos, debido a que se necesitan determinar las variables que juegan un papel importante en el problema planteado, y cuales son irrelevantes para el mismo, para que, de esta forma, se construyan las cantidades adimensionales correspondientes y se realice el análisis. Para esto, se necesita una gran intuición y conocimiento del sistema para elegir aquellas variables que sean relevantes al problema.

Ante esta limitación para estudiar sistemas que contienen una gran cantidad de variables, a partir de las cuales se puede construir un número grande de cantidades adimensionales, es posible plantear una pregunta un poco diferente para el análisis del sistema. La idea de Fourier sobre la dimensión propia de una cantidad física puede ayudar a la formulación de la pregunta. Si los términos que constituyen una misma ecuación pueden ser comparados por poseer el mismo exponente de la dimensión, se debe de pensar que la ecuación pueda ser invariante ante cambios de escala, de tal forma que la ley física que se obtenga presente las mismas características de invariancia. Así, ¿que tipo de constricciones deberan

de surgir al exigir que el sistema de ecuaciones que describen el comportamiento de un sistema físico sea invariante ante una transformación general de escala?

### 3.1.- Inavariancia de Escala de la Ecuación de Navier-Stokes.

En sus trabajos de investigación de 1932, H. Lamb estableció que el Análisis Dimensional y las propiedades de invariancia de la ecuación de Navier-Stokes, bajo transformaciones de escala, están relacionadas mutuamente, de tal forma que se obtienen los mismos resultados usando una u otra técnica en el análisis. Se puede observar esta afirmación en la ecuación misma de Navier-Stokes para la velocidad  $v$  de un fluido incompresible, (Lamb, 1932; Landau y Lifshitz, 1959):

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right] v = -\nabla P + \mu \nabla^2 v \quad 2.8$$

donde  $P$  representa a la presión.

La forma en que se estudian las propiedades de invariancia de escala de esta ecuación es planteando una transformación general de escala que permita la invariancia de forma de la ecuación. Sea  $I$  la transformación general de escala:

$$I: v \rightarrow \alpha v; x \rightarrow \beta x; \rho \rightarrow \gamma \rho; t \rightarrow ct; P \rightarrow \delta P; \mu \rightarrow \phi \mu. \quad 2.9$$

Al aplicar la transformación  $I$  a la ec. 2.8 se busca determinar la relación existente entre los parámetros de escala al exigir la invariancia de forma de la ecuación ante el cambio de escala. Así:

$$(\gamma \alpha) \rho \left[ (c^{-1}) \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha \beta^{-1}) v \cdot \nabla \right] v = -(\delta \beta^{-1}) \nabla P + (\phi \alpha \beta^{-2}) \mu \nabla^2 v$$

Al exigir la invariancia de forma se obtienen las relaciones:

$$c^{-1} \alpha = \alpha^2 \beta^{-1}; \delta \beta^{-1} = \phi \beta^{-2} \alpha; \gamma \alpha^2 \beta^{-1} = \delta \beta^{-1}.$$

Existen tres parámetros de escala independientes, de tal forma que una posible solución es:  $c = \alpha^{-1} \beta$ ;  $\phi = \alpha \beta \gamma$ ;  $\delta = \alpha^2 \gamma$ .

La transformación de escala que permite la invariancia de forma de la ec. 2.8 es:

$$I': v \rightarrow \alpha v; x \rightarrow \beta x; \rho \rightarrow \gamma \rho; t \rightarrow \alpha^{-1} \beta t; P \rightarrow \alpha^2 \gamma P; \mu \rightarrow \alpha \beta \gamma \mu. \quad 2.10$$

La fuerza se debe transformar como  $\rho v x^3 / t$ , de tal forma que si se busca el escalamiento para F como una ley o regla de potencias en términos de las cantidades disponibles

$$F \sim \rho^p v^q a^r \mu^s, \quad 2.11$$

esta se debe escalar apropiadamente bajo la transformación I':

$$F \rightarrow \gamma \alpha^2 \beta^2 F \sim \gamma^{p+s} \alpha^{q+s} \beta^{r+s} \rho^p v^q a^r \mu^s.$$

Esto impone ciertas constricciones a los índices p, q, r y s de la siguiente forma:  $p + s = 1$ ;  $q + s = 2$ ;  $r + s = 2$ .

La solución a este sistema es:  $s = 1 - p$ ;  $q = p + 1$ ;  $r = p + 1$ .

Estas constricciones determinan la forma posible de F:

$$F \sim v a \mu \left[ \frac{\rho v a}{\mu} \right]^p = \rho v^2 a^2 \left[ \frac{\rho v a}{\mu} \right]^p = \rho v^2 a^2 (R)^p \quad 2.12$$

donde R es el número de Reynolds. Así, la fuerza de arrastre se de termina salvo un índice. Si se buscara una forma más general que u na ley de potencias se obtendría que:

$$F = \rho v^2 a^2 f(R) \quad 2.13$$

que es el resultado obtenido usando el Análisis Dimensional.

Se ha visto que el Análisis Dimensional no puede proporcionar información sobre la posible forma de la función f(R), quedando este trabajo desvinculado del análisis. El trabajo experimental puede dar información sobre la posible forma de f. Pero, ¿que sucederá si se introducen suposiciones adicionales sobre las características del proceso?, esto es, ¿Que sucederá si se supone el mecanismo físico que gobierna al fenómeno estudiado?.

Si se considera el límite en el cual  $R \ll 1$ , se pueden ignorar los términos inerciales en la ec. 2.8 y aplicar otra transforma-

ción de escala.

Eliminando los términos inerciales no lineales en la ec. de Navier-Stokes esta se reduce a:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad 2.14$$

Al aplicar la transformación de escala  $X$  a esta ec. se obtiene la transformación de escala que permite la invariancia de forma de la ec. 2.14, la cual es:

$$B: \mathbf{v} \rightarrow \alpha \mathbf{v}; \mathbf{x} \rightarrow \beta \mathbf{x}; \rho \rightarrow \gamma \rho; t \rightarrow ct; P \rightarrow \alpha \gamma c^{-1} P; \mu \rightarrow \beta^2 \gamma c^{-1} \mu \quad 2.15$$

Aplicando esta transformación a la ec. 2.10 se obtiene que:

$$F \rightarrow \gamma \beta^3 c^{-1} \alpha F - \gamma^{p+s} \alpha^q \beta^{r+s} c^{-s} \rho^p v^q a^r \mu^s$$

Las constricciones correspondientes para los índices de escalamiento son:  $p + s = 1$ ;  $r + 2s = 3$ ;  $q = 1$ ;  $s = 1$ .

Cuya solución es:  $p = 0$ ;  $r = 1$ ;  $q = 1$ ;  $s = 1$ .

La forma para la fuerza es entonces:

$$F = v a \mu \quad \text{ó} \quad F = k v a \mu \quad 2.16$$

donde  $k$  es una constante que sólo depende de la forma del cuerpo.

$$F = k v^2 a^2 \rho R^{-1}, \quad 2.17$$

de donde se obtiene que  $f(R) = k R^{-1}$ .

Sin embargo, se puede preguntar por la relación que existe entre el Análisis Dimensional y la Invariancia de Escala en términos de un marco más preciso.

#### 4.- Análisis Dimensional e Invariancia de Escala.

¿Que significa la idea de Invariancia de Escala?. Cuando se piensa en el concepto de invariancia de escala, la idea que surge es que la estructura propia de una ley física no puede depender de la elección de las unidades. La condición anterior se podría satisfacer si se utilizara un conjunto de variables que permanecieran

invariantes al cambiar el sistema de unidades. Estas variables adimensionales expresan el hecho de la independencia de la estructura de una ley física ante el cambio de unidades, mas sin embargo, es posible que no sea tan obvio que esta propiedad de las variables adimensionales sea equivalente a la "invariancia de forma" de las ecuaciones físicas.

Las leyes físicas se expresan generalmente en términos de un conjunto de variables dimensionales, las cuales cambian al cambiar de unidades. Además, en cualquier ecuación escrita en términos de un conjunto de variables dimensionales se encuentran las escalas fundamentales de masa  $M$ , longitud  $L$ , tiempo  $t$ , etc. las cuales son relevantes para el problema, y que nunca se expresan en forma explícita debido precisamente a la invariancia de forma. La pregunta necesaria es: ¿Cuales son las constricciones generales que se siguen al exigir que las leyes de la física conserven su estructura ante cambios del sistema de unidades?

#### 4.1.- Cambio de Escala en los Sistemas físicos ordinarios.

Lo que tiene importancia primordial aquí es el caso del cambio de escala en los sistemas clásicos ordinarios y el comprobar que la forma de las ecuaciones no depende de la elección de las unidades.

Para estudiar este comportamiento se puede pensar en una cantidad física dimensional, y verificar su estructura posterior a un cambio de unidades.

Sea  $K$  la cantidad física, la cual posee un conjunto determinado de dimensiones, y que es función de un conjunto finito de variables dimensionales  $(x_i)_{i=1}^n$ . Como  $K$  y  $x_i$  son variables dimensiona-

les, estas pueden ser expresadas en términos de un conjunto estandar de unidades, las cuales pueden ser la masa  $M$ , la longitud  $L$  y el tiempo  $t$ . Es posible que existan otras unidades independientes, pero para el propósito del ejemplo se trabajará solo con el conjunto propuesto.

Si se utiliza este conjunto de unidades, la magnitud de cada una de las variables se expresará en la forma:

$$K = M^a L^b t^c; \quad x_i = M^a L^b t^c \quad 2.18$$

Se puede describir el comportamiento de estas variables al cambiar el sistema de unidades, utilizando una transformación de escala bajo la cual los parámetros se transforman como:

$$M \rightarrow M' = \lambda_M M; \quad L \rightarrow L' = \lambda_L L; \quad t \rightarrow t' = \lambda_t t \quad 2.19$$

Existen dos formas de llevar a cabo el cambio de unidades en K:

a). Se observa como se transforma cada una de las variables  $x_i$ .

$$x_i \rightarrow x'_i = Z_i(\lambda) x_i$$

donde  $Z_i(\lambda) = \lambda_M^a \lambda_L^b \lambda_t^c$  y  $\lambda$  es una abreviación de  $\lambda_M$ ,  $\lambda_L$  y  $\lambda_t$ , de tal forma que la cantidad  $K$  se transforma como:

$$K \rightarrow K' = K(Z_1(\lambda)x_1, \dots, Z_n(\lambda)x_n) \quad 2.20$$

b). Se observa como se transforma la cantidad misma  $K$ .

$$K \rightarrow K' = Z(\lambda)K(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 2.21$$

donde  $Z(\lambda) = \lambda_M^a \lambda_L^b \lambda_t^c$ .

Como se trata solo de dos formas distintas de llevar a cabo el cambio de escala, las dos formas alternativas para  $K$  deben de ser iguales, por lo que se obtiene la identidad siguiente:

$$K(Z_1(\lambda)x_1, \dots, Z_n(\lambda)x_n) = Z(\lambda)K(x_1, \dots, x_n) \quad 2.22$$

Considérese un ejemplo concreto: Sea la ecuación  $E = mc^2$ . Para llevar a cabo un cambio de escala en esta ecuación, se puede transformar directamente  $E$  o transformar  $m$  y  $c$  separadamente y mu

tiplicar los resultados directamente. Es obvio que el resultado final es el mismo.

Existe una pregunta que surge inmediatamente al observar la identidad anterior, ec. 2.22. ¿La forma de la ecuación que resulta del cambio de escala depende de  $\lambda$ ? Esta cuestión es muy importante en el estudio de la invariancia de escala, ya que si la forma de la ecuación resultante depende de  $\lambda$ , las ideas de escalamiento e invariancia resultan inoperantes. Para asegurar que la forma resultante no depende de la elección de las unidades, se puede utilizar el truco de Euler de tomar las variaciones con respecto a  $\lambda$  y hacer posteriormente  $\lambda = 1$ . Por ejemplo, si se toman las variaciones en la escala de masa, se pueden determinar las variaciones con respecto a  $\lambda_M$ , y utilizando la regla de la cadena, obtener:

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_M} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial K}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial \lambda_M} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial Z}{\partial \lambda_M} \frac{\partial K}{\partial x_i} = \frac{\partial Z}{\partial \lambda_M} K.$$

Cuando se exige  $\lambda_M = 1$ , se tiene que:

$$\left[ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_M} \right]_{\lambda_M=1} = \alpha_1 ; \quad \left[ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_M} \right]_{\lambda_M=1} = \alpha,$$

De tal forma que se obtiene la ecuación diferencial:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{\partial K}{\partial x_i} = \alpha K. \quad 2.23$$

Se obtienen ecuaciones diferenciales análogas cuando se consideran las escalas de longitud y de tiempo. Así, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas que expresan el fundamento de la invariancia de escala de las leyes físicas. (Esto es, la invariancia de las propiedades físicas respecto a la elección de las unidades), el cual está implícito en el trabajo original de Fourier.

Se puede comentar adicionalmente que el Análisis Dimensional y el Escalamiento han jugado un papel preliminar en la elaboración

de una teoría que generaliza los aspectos de estos métodos a casos más sutiles o complicados, como son los ejemplos descritos al principio de este capítulo y la Teoría Cuántica de Campos, como un caso particular. Esta generalización ha recibido el nombre de "Grupo de Renormalización", debido a que éste tiene sus orígenes en el programa de renormalización usado para darle sentido a los infinitos inherentes a la teoría Cuántica de Campos. La renormalización requiere la existencia de un conjunto arbitrario de escalas fundamentales, que juegan un papel análogo al que tienen los parámetros de escala implícitos en cualquier ecuación dimensional; de tal forma que cualquier ecuación derivada dentro del marco de la teoría Cuántica de Campos, que represente a una cantidad física, no debe depender de la elección de estas escalas fundamentales. Las constricciones que resultan solo deberán representar una generalización del análisis dimensional ordinario. La única diferencia entre estos dos puntos de vista es que las variables presentes en la teoría cuántica de campos cambian en una forma mucho más complicada con la escala, que las variables clásicas. De esta forma, la solución a las ecs. 2.23 se presenta como un caso especial de la solución a las ecuaciones del grupo de renormalización, y se encuentra además que la solución es precisamente equivalente a las constricciones del análisis dimensional.

## 5.- Física de Plasmas y el Principio de Invariancia de Escala.

Otra rama de la física que ha ofrecido una dificultad especial para su estudio es la Física de Plasmas. Algunos de los problemas que deben de ser resueltos en la Física de plasmas son los fenómenos de confinamiento de energía y transporte de partículas en una estructura de campo magnético dada. El objetivo de ésta investigación es determinar las condiciones que deben satisfacerse para lograr la fusión nuclear controlada y determinar los parámetros de operación de un reactor de fusión nuclear.

Originalmente se pensaba que los procesos de tipo clásico o neoclásico, como es el caso del transporte en el que se incluyen colisiones entre partículas (colisiones coulombianas), podrían determinar estos parámetros, de tal forma que se podría contar con una teoría predictiva. Sin embargo, los experimentos existentes muestran que la conductividad térmica de los electrones, y en menor medida la de los iones, son fenómenos altamente anómalos. La turbulencia ocasionada por microinestabilidades ha servido como base para tratar de explicar este tipo de procesos anómalos. Sin embargo, el problema de proporcionar una teoría para la descripción de este transporte anómalo se dificulta por la diversidad de fenómenos que se tendrían que introducir en la descripción, y por las hipótesis acerca del mecanismo de saturación no lineal o acerca de la naturaleza de la turbulencia del plasma, haciendo difícil la elección de los mecanismos que gobiernan el proceso, debido a que estos no son claros aún. Aunque se puedan determinar mecanismos responsables del transporte, permanece aún el problema del cálculo del tiempo de confinamiento anómalo, es decir de los estados saturados no lineales de algunas inestabilidades físicas del plasma.

El tiempo de confinamiento de energía  $\tau$  es una medición práctica importante para el estudio del comportamiento del plasma termonuclear, y la posibilidad de que este pueda escalarse con otros parámetros relevantes para el sistema de confinamiento, de una forma predecible, es de interés para la interpretación de los experimentos existentes, y para su extrapolación al diseño de nuevos experimentos. Uno de los objetivos de los grandes experimentos en Física de Plasmas, como son las series de Tokamaks, es determinar la posible relación entre el tiempo de confinamiento de energía  $\tau$  y los parámetros del aparato. A ésta relación es a la que se le da el nombre de "Ley de escalamiento para el confinamiento". Se han hecho muchos intentos para deducir leyes de escalamiento empíricas para el tiempo de confinamiento de energía, a partir de los datos observados en los experimentos existentes (*Gorbunov, et al, 1970; Merezkin y Mukhovator, 1981; Goldston, 1984; Liewer, 1985*). Las leyes de escalamiento empíricas se expresan en términos de valores característicos de ciertas variables físicas independientes, usualmente en la forma de leyes de potencias  $\tau \sim n^p T^q B^r a^s \dots$  donde  $n$  es la densidad del plasma,  $T$  su temperatura,  $B$  la intensidad del campo magnético,  $a$  el radio menor del sistema de confinamiento, etc. y los parámetros  $p, q, r, s, \dots$  se derivan a partir del ajuste de los datos de una amplia variedad de experimentos. El problema principal con estas leyes de escalamiento consiste en que, al ser deducidas a partir de los experimentos existentes, son extrapoladas a los parámetros de escala de reactor, sin conocer su validez.

Por otro lado, los intentos de obtener leyes de escalamiento a partir de estudios teóricos del comportamiento del plasma termo-

nuclear no han sido satisfactorios.

El problema que se presenta en la técnica de obtención de leyes de escalamiento empíricas, y su extrapolación a los parámetros de reactor, así como las dificultades y errores presentes en los cálculos teóricos para este mismo fin, hacen sentir la necesidad de un marco general de referencia, dentro del cual se puedan discutir las distintas propuestas de leyes de escalamiento, tanto empíricas como teóricas, basándose exclusivamente en la física del proceso.

Como se ha visto, el plasma termonuclear presenta una dificultad especial para su estudio, debido a que las ecuaciones de la Física de Plasmas, las ecuaciones MHD por ejemplo, son considerablemente más complejas que aquellas que se pueden estudiar utilizando la técnica del Análisis Dimensional, y esto se refleja en el gran número de parámetros adimensionales disponibles en la descripción dimensional del plasma termonuclear. En particular se tienen los parámetros adimensionales  $\rho/a$ ,  $\lambda/a$  y  $\lambda_D/a$ , donde  $\rho$  es el radio de Larmor,  $\lambda$  es la trayectoria libre media entre colisiones,  $\lambda_D$  es la longitud de Debye y  $a$  es una longitud macroscópica característica del sistema de confinamiento. Se tiene también el parámetro  $\beta$ , el cual es la razón entre la presión del plasma y la presión del campo magnético. Junto con estas cantidades se tienen constantes tales como la razón de masa ión-electrón y varias razones geométricas particulares al sistema de confinamiento.

Se puede observar que para estos sistemas complicados el Análisis Dimensional convencional se vuelve engorroso al tratar de aplicarlo, debido a la gran cantidad de parámetros adimensionales

presentes en la descripción. Para evitar este problema, desde un punto de vista práctico, conviene plantear un enfoque alternativo a reserva de relacionar los dos enfoques en base a una interpretación en términos del Análisis Dimensional.

Las ideas de Escalas y Dimensiones proporcionan una alternativa para estudiar un sistema físico, en principio por complicado que sea, sin necesidad de resolver el conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de dicho sistema, y esta alternativa ofrece un avance importante en el estudio de estos, evitando cálculos complicados en la resolución de las ecuaciones correspondientes. Esta alternativa surge a partir de la discusión propuesta por Rayleigh (1915), por H. Lamb (1932) y por Landau y Lifshitz (1959) al vislumbrar las posibilidades de las ideas de invariancia de escala.

En 1977 Connor y Taylor (1977) proponen esta alternativa como técnica para el estudio de los fenómenos de confinamiento de energía y transporte de partículas (calor) en los sistemas de confinamiento magnético para plasmas termonucleares. Esta aproximación alternativa se basa en un principio de invariancia de las ecuaciones ante transformaciones de escala, el cual especifica que: "Si las ecuaciones que describen el transporte anómalo observado en los sistemas de confinamiento magnético son invariantes bajo alguna transformación de escala, cualquier tiempo de confinamiento calculado debe de exhibir las mismas propiedades de invariancia, no importando el medio por el que se haya calculado". Estas propiedades de invariancia imponen ciertas constricciones en la posible forma del tiempo de confinamiento, las cuales son características del no

delo del plasma representado por las ecuaciones. Estas constricciones reducen el número de parámetros que tienen que ser investigados empíricamente, y pueden servir para indicar que modelos del plasma pueden describir apropiadamente las propiedades del plasma observadas.

El principio de invariancia de escala refleja una característica fundamental de la naturaleza, y es que la estructura particular de una ley física no puede depender de la elección de las unidades; estas juegan un papel irrelevante. Y esto está relacionado con el hecho de que una ley física surge del estudio del conjunto de ecuaciones que describe adecuadamente al sistema físico, y si la estructura de las ecuaciones no depende de la elección de las unidades, o es invariante ante cambios de escala, la ley física debe exhibir las mismas propiedades de invariancia.

Un resultado muy importante de este principio consiste en que al extender este argumento a modelos más específicos de transporte turbulento, en los cuales son identificados el mecanismo físico para el transporte y la configuración magnética, se puede definir más exactamente la forma de los coeficientes de transporte local, y esto solo en base a argumentos de invariancia.

### CAPITULO III

#### Principio de Invariancia de Escala para el Confinamiento Global

---

(Connor y Taylor, 1977)

En este capítulo se describe cómo, a partir de un argumento de invariancia de escala aplicado al conjunto de ecuaciones de un modelo particular del plasma termonuclear, es posible obtener información sobre las propiedades de transporte correspondientes. Se obtiene información sobre el tiempo de confinamiento de energía y, en un caso especial, sobre el transporte de calor, que son característicos del modelo que se emplea.

.....

En los capítulos anteriores se ha descrito la forma en que las ideas de dimensiones, similitud e invariancia de escala se presentan como técnicas útiles en el estudio de cierto tipo de sistemas físicos complejos. El principio de invariancia de escala se presentó como una alternativa viable para el estudio del plasma termonuclear.

Una forma alternativa de expresar el principio de invariancia de escala es: Si el confinamiento del plasma es descrito por el conjunto de ecuaciones características de un modelo particular del plasma, el tiempo de confinamiento calculado a partir de este modelo debe reflejar las mismas propiedades de invariancia de escala de las ecuaciones, no importando el medio por el cual se obtuvo. Este principio constriñe la forma posible del escalamiento del

tiempo de confinamiento de una forma tal que es característica del modelo particular empleado.

El procedimiento general del empleo del principio de invariancia de escala en las ecuaciones del plasma es el siguiente: Se considera el conjunto completo de ecuaciones que describen el modelo particular de confinamiento del plasma, y se aplica una transformación general de escala a éstas, de tal forma que todas y cada una de las variables y parámetros de interés se escalan de distinta forma. Al exigir la invariancia de escala de las ecuaciones, se obtiene un conjunto de relaciones que especifican como se escalan cada una de las variables para que se cumpla ésta. A partir de estas relaciones se obtienen las transformaciones que se necesitan para la invariancia de escala de las ecuaciones.

Se supone que el tiempo de confinamiento de energía se puede expresar como una serie en términos de variables relevantes al sistema de confinamiento, como son las variables  $n$  densidad,  $T$  su temperatura,  $B$  intensidad del campo magnético y  $a$  un parámetro de dimensión lineal en la forma:

$$\tau = \sum_{p,q,r,s} C_{p,q,r,s} n^p T^q B^r a^s$$

donde  $n$ ,  $T$ ,  $B$  y  $a$  se toman de tal forma que sean valores característicos del confinamiento, por ejemplo, en el centro del plasma. Estos valores característicos son suficientes debido a que sus perfiles están completamente determinados por las ecuaciones que describen al modelo empleado, con sus condiciones a la frontera.

En base al principio de invariancia de escala,  $\tau$  debe ser invariante ante las transformaciones de escala que se determinaron, de tal forma que al aplicarlas a ambos lados de la ecuación ante-

rior los índices  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  se constriñen a satisfacer un conjunto de relaciones entre ellos. A partir de estas relaciones se determinan los índices independientes, los cuales determinarán la forma posible del tiempo de confinamiento de energía, representada por una función indeterminada de los argumentos  $n$ ,  $T$ ,  $B$  y  $a$ .

A continuación se presentan los distintos modelos para el confinamiento global, modelos convencionales del plasma, y la forma del tiempo de confinamiento que surge al aplicar el principio de invariancia a cada modelo.

#### 1.- Modelos Cuasineutrales.

En este tipo de modelos el campo eléctrico se determina a partir de la condición de cuasineutralidad de carga en el plasma.

##### 1.1.- Modelo Cuasineutral Electroestático de Vlasov.

Este es uno de los modelos más sencillos, en el cual se supone que las características que determinan el transporte anómalo están descritas completamente por las ecuaciones electrostáticas de Vlasov, tanto para los iones como para los electrones. Además, se supone que el campo eléctrico está determinado por la condición de neutralidad de carga en el plasma, y que, en el límite electrostático, el campo magnético puede ser considerado como fijo. De esta forma, se están ignorando los efectos que se presentan al considerar valores grandes del parámetro  $\beta$ , colisiones coulombianas, y fluctuaciones en la longitud de Debye. Este modelo describe a plasmas no colisionales con valores bajos de  $\beta$ . Al considerar este modelo se está abarcando el conjunto de modelos de Ondas de Deriva.

tales como el modelo de transporte debido a modos no colisionales de partículas atrapadas, o a modos de gradientes de temperatura de los iones.

Este modelo está determinado por las ecuaciones de Vlasov:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_i + \frac{q_i}{m_i} \left[ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad 3.1$$

para cada especie  $i$ , y por la condición de cuasineutralidad:

$$\sum_i e_i \int f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v = 0 \quad 3.2$$

Para llevar a cabo el análisis de este modelo particular, usando exclusivamente el principio de invariancia de escala, se determina el conjunto de transformaciones de escala que permitan la invariancia de forma de las ecs. 3.1,2. La transformación general de escala que servirá como base para el análisis es la siguiente:

$$\mathfrak{h}_0: f \rightarrow \alpha f; \mathbf{v} \rightarrow \beta \mathbf{v}; \mathbf{x} \rightarrow \gamma \mathbf{x}; \mathbf{B} \rightarrow \delta \mathbf{B}; \mathbf{E} \rightarrow \eta \mathbf{E}; t \rightarrow ct. \quad 3.3$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\eta$  y  $c$  son los parámetros de escala, a partir de los cuales se determinará la forma de la transformación de escala que corresponde a este modelo, determinando los parámetros que son independientes. Al aplicar esta transformación de escala a las ecs. 3.1,2 y exigir la invariancia de escala, se obtienen las relaciones necesarias, entre los parámetros de escala, para determinar la transformación:

$$\frac{\alpha}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\beta \alpha}{\gamma} \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\alpha}{\beta} \frac{e}{m} \left[ \eta \mathbf{E} + \beta \delta \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

$$\alpha \beta^3 \sum_i e_i \int f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v = 0$$

Al exigir la invariancia de forma se obtienen las relaciones:

$$\eta = \beta \delta; \alpha/c = \beta \alpha / \gamma = \eta \alpha / \beta,$$

cuya posible solución es:

$$\eta = \beta^2 \gamma^{-1}; c = \gamma \beta^{-1}; \delta = \gamma^{-1} \beta$$

Así, la transformación de escala que corresponde a este modelo es:

$$\xi_1: f \rightarrow \alpha f; v \rightarrow \beta v; x \rightarrow \gamma x; B \rightarrow \gamma^{-1} \beta B; E \rightarrow \beta^2 \gamma^{-1} E; t \rightarrow \gamma \beta^{-1} t.$$

En la transformación de escala  $\xi_1$  están incluidas tres transformaciones simples, las cuales representan a cada parámetro de escala independiente. Estas surgen al considerar un solo parámetro y hacer los demás igual a uno.

La determinación de la forma del tiempo de confinamiento se puede llevar a cabo por dos medios alternativos, los cuales expresan una característica fundamental implícita en el principio de invariancia. Se expondrán las dos formas.

Sea  $Q = \int v v^2 f(x, v) d^3 v$  la energía perdida por unidad de área, por unidad de tiempo. Se supone que este flujo puede ser expresado, en principio, en términos de  $n, T, B, a$ . Las razones geométricas  $a/R$  y  $q$  no pueden entrar en este escalamiento, debido a que no existe información acerca de ellas en las ecuaciones anteriores.

De esta forma, el flujo se expresa como :

$$Q = Q(n, T, B, a) \quad 3.4$$

Se supone que esta dependencia funcional del flujo de calor se puede expresar como una serie en la forma:

$$Q = \sum_{p, q, r, s} C_{p, q, r, s} n^p T^q B^r a^s \quad 3.5$$

Para aplicar la transformación  $\xi_1$  a la expresión propuesta para el flujo de calor, se determina la forma en que se transforman  $Q, n$  y  $T$  bajo  $\xi_1$ , basándose en las definiciones de cada cantidad.

$$Q = \int v v^2 f(x, v) d^3 v \quad 3.6$$

$$T = \frac{\int v^2 f(x, v) d^3 v}{\int f(x, v) d^3 v} \quad 3.7$$

$$n = \int f(x, v) d^3 v \quad 3.8$$

Así,  $Q \rightarrow \alpha \beta^6 Q$ ;  $T \rightarrow \beta^2 T$ ;  $n \rightarrow \alpha \beta^3 n$ .

Para llevar a cabo un cambio de escala en el flujo de calor.

se pueden transformar las expresiones 3.4,5 independientemente, pero tomando en cuenta que estas dos formas son equivalentes:

$$Q \rightarrow \sum_{p,q,r,s} C_{p,q,r,s} \alpha^p \beta^{3p+2q+r} \gamma^{-r+s} n^p T^q B^r a^s$$

$$Q \rightarrow \alpha \beta^6 Q$$

Si se exige la invariancia de Q ante la transformación de escala  $\delta_1$ , se obtienen las constricciones para los indices:

$$p = 1; 3p + 2q + r = 6; -r + s = 0$$

Una posible solución a estas relaciones es:

$$p = 1; r = -2q + 3; r = s.$$

Una vez conocidas las constricciones para los indices de escalamiento es posible determinar la forma de Q:

$$Q = \sum_q C_q n T^q B^{3-2q} a^{3-2q} = n a^3 B^3 \sum_q C_q (T/a^2 B^2)^q$$

Una forma general de escribir este resultado es:

$$Q = n a^3 B^3 G(T/B^2 a^2) \quad 3.9$$

Donde G es una función desconocida, pero que sólo depende del argumento  $T/a^2 B^2$ .

Si Q denota la energía pérdida del plasma por unidad de volumen y por unidad de tiempo (Potencia perdida por unidad de volumen), el tiempo de pérdida  $\tau$  se define por la ecuación  $Q = 3nT/\tau$ . Este tiempo  $\tau$  se denomina tiempo de confinamiento ya que se puede considerar que el plasma es confinado durante el periodo  $\tau$ . De esta forma el tiempo de confinamiento se puede determinar utilizando la relación:

$$\tau = \frac{n a T}{Q} \quad 3.10$$

$$\tau = \frac{n a T}{n a^3 B^3 G(T/B^2 a^2)} = \frac{T}{B^2 a^2} B^{-1} G^{-1} \left( \frac{T}{B^2 a^2} \right) \quad 3.11$$

de esta forma:

$$B \tau = F(T/B^2 a^2) \quad 3.12$$

Donde  $F = G^{-1}$ , y es una función no determinada.

Es posible trabajar directamente con  $\tau$ , y determinar su forma a partir del principio de invariancia de escala.

Se supone que  $\tau$  se puede expresar funcionalmente en términos de  $n$ ,  $T$ ,  $B$  y  $a$  como una serie en la forma:

$$\tau = \sum_{p,q,r,s} C_{p,q,r,s} n^p T^q B^r a^s. \quad 3.13$$

Al aplicar la transformación  $\delta_1$  a esta expresión se obtiene:

$$\tau \sim \beta^{-1} \tau = \sum_{p,q,r,s} C_{p,q,r,s} \alpha^p \beta^{3p+2q+r} \gamma^{-r+s} n^p T^q B^r a^s.$$

Al exigir la invariancia ante el cambio de escala, se obtienen las constricciones para los índices de escala:

$$p = 0; 3p + 2q + r = -1; s - r = 1.$$

cuya solución es:

$$p = 0; r = -2q - 1; s = -2q.$$

De esta forma, el tiempo de confinamiento se puede expresar como:

$$\tau = B^{-1} \sum_q C_q \left[ \frac{T}{B^2 a^2} \right]^q. \quad 3.14$$

El escalamiento general tiene la forma:

$$B\tau = F \left( \frac{T}{B^2 a^2} \right). \quad 3.15$$

Donde  $F$  es una función indeterminada que depende de un solo argumento, y se observa que las expresiones 3.12,15 son idénticas.

La relación exacta entre  $\tau$  y  $Q$  involucra los perfiles de temperatura y densidad; más sin embargo, estos perfiles están gobernados por las ecuaciones básicas que describen al modelo particular, de tal forma que la ley de escalamiento para  $\tau$  es consecuencia exacta del modelo empleado, así como las condiciones a la frontera no introducen efectos físicos dominantes adicionales.

Se puede observar que si se derivara una ley de escalamiento para  $\tau$  a partir de la ecuación de Vlasov para plasmas no colisiona

les, en el límite electrostático, no importando la forma como sea calculado, esta deberá de tener la forma deducida anteriormente. Esta es la idea de Fourier expuesta anteriormente.

Si se supone el escalamiento como una ley de potencias:

$$B\tau \sim [T/B^2 a^2]^q \quad 3.16$$

la cual solo contiene un índice libre.

Las constricciones generales a los índices dentro de este modelo se obtienen de la siguiente forma: Se plantea la forma general del escalamiento como una ley de potencias, y se hace corresponder a la expresión obtenida a partir del análisis anterior:

$$B\tau \sim n^p T^q B^r a^s = T^q a^{-2q} B^{-2q}$$

Las constricciones son:  $p = 0$ ;  $r = -2q$ ;  $s = -2q$ .

Antes de continuar con otros tipos de modelos del plasma, se puede pensar en las consecuencias de suponer la existencia de un coeficiente de transporte  $K$ , en lugar de suponer una ley de escalamiento para  $\tau$ .  $K$  satisface la ecuación  $Q = -K\partial T/\partial x$ , y es posible expresarlo en términos de las variables  $n$ ,  $T$  y  $B$ . En esta situación, el tiempo de confinamiento debe de ser proporcional a  $a^2$ , y esto se debe de reflejar en la ley de escalamiento.

Esto es, si  $Q = -k\partial T/\partial x$  se tiene que  $nA/T\tau \sim k\partial T/\partial x \sim kT/a$ , de tal forma que  $\tau \sim na^2/k$ . Como  $B\tau \sim (T/a^2 B^2)$ , se tiene que  $k \sim T/B$  y por lo tanto  $\tau \sim a^2 B/T$ . Así, se obtiene que el coeficiente  $k$  tendrá la dependencia:

$$k \sim T/B \quad 3.17$$

y el tiempo de confinamiento:

$$\tau \sim a^2 B/T. \quad 3.18$$

Este resultado corresponde al coeficiente de difusión de Bohm, el

cual parece ser el único coeficiente de transporte local compatible con la ecuación de Vlasov no colisional en el límite electrostático.

### 1.2.- Modelo Cuasineutral Electrostático de Fokker-Planck.

En este modelo se supone que el transporte anómalo está descrito por la ecuación de Fokker-Planck, incluyendo la integral de colisiones de Landau, para colisiones coulombianas, conjuntamente con la condición de neutralidad de carga, y el límite de la aproximación electrostática. [Este modelo difiere de la clasificación de Lacina (1971), ya que ésta incluye efectos de colisiones con partículas neutras]. Las Ondas de deriva colisionales y las Ondas disipativas de partículas atrapadas pertenecen a este modelo debido a su carácter colisional.

Al tomar en cuenta los modelos Cuasineutral Electrostático de Vlasov y de Fokker-Planck, es posible describir y analizar los modelos actuales de Ondas de Deriva para el transporte anómalo en los Tokamaks.

Las ecuaciones que describen a este modelo particular son:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \left[ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C(f, f), \quad 3.19$$

para ambas especies, y la condición de cuasineutralidad de carga. Se pueden considerar modelos en los cuales los operadores de colisiones se puedan escalar como el producto de dos funciones de distribución. En este caso  $C(f, f)$  representa al operador de colisiones coulombianas, el cual satisface esta condición.

Al aplicar la transformación de escala general  $\xi_0$ , 3.3, a las ecs. 3.2, 19 y exigir la invariancia de forma de las ecuaciones ante el cambio de escala, se obtienen las relaciones entre los pará-

metros de escala:

$$\frac{\alpha\eta}{\beta} = \frac{\alpha}{c} = \frac{\beta\alpha}{\gamma} = \alpha^2; \quad \eta = \beta\delta,$$

cuya solución posible es:

$$\alpha = \beta\gamma^{-1}; \quad c = \gamma\beta^{-1}; \quad \delta = \beta\gamma^{-1}; \quad \eta = \beta^2\gamma^{-1},$$

donde se debe tomar en cuenta que el operador  $C(f, f)$  se transforma como  $\alpha^2 C(f, f)$ .

La transformación que permite la invariancia de las ecuaciones ante cambios de escala es:

$$f_2: \quad f \rightarrow \beta\gamma^{-1}f; \quad v \rightarrow \beta v; \quad x \rightarrow \gamma x; \quad B \rightarrow \beta\gamma^{-1}B; \quad E \rightarrow \beta^2\gamma^{-1}E; \quad t \rightarrow \gamma\beta^{-1}t.$$

Bajo esta transformación se tiene que:

$$n \rightarrow \beta^4\gamma^{-1}n; \quad T \rightarrow \beta^2T; \quad \tau \rightarrow \beta^{-1}\gamma\tau.$$

Si se supone que  $\tau$  se puede expresar en la forma 3.13, se tiene que la invariancia de escala implica que:

$$\tau \rightarrow \beta^{-1}\gamma\tau = \sum C_{p,q,r,s} \beta^{4p+2q+r} \gamma^{-p-r+s} n^p T^q B^r a^s.$$

Las restricciones en los índices que surgen al exigir la invariancia ante cambios de escala son:

$$4p + 2q + r = -1; \quad -p - r + s = 1$$

Una posible solución es  $r = -1 - 2q - 4p$ ;  $s = -2q - 3p$ , de donde se tiene que  $\tau$  se puede expresar en términos de una función  $F$  no determinada aún, pero que depende sólo de dos argumentos:

$$B\tau = F\left(\frac{n}{B^4 a^3}, \frac{T}{B^2 a^2}\right) \quad 3.20$$

Las restricciones para la forma de  $\tau$  son:

$$r = -4p - 2q; \quad s = -3p - 2q.$$

Si se supone una ley de potencias se tiene:

$$B\tau = \left[\frac{n}{B^4 a^3}\right]^p \left[\frac{T}{B^2 a^2}\right]^q \quad 3.21$$

donde se puede observar que la ley de escalamiento contiene dos índices libres.

### 1.3.- Modelo Cuasineutral $\beta$ -altas de Vlasov.

Para plasmas que presentan valores grandes del parámetro  $\beta$ , a temperaturas del plasma altas, el transporte anómalo puede aún ser descrito por la ecuación de Vlasov no colisional ec. 3.1, sin embargo, se deben de incluir los efectos de un campo electromagnético consistente, que satisfaga las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t \quad 3.22$$

$$\nabla \times B = 4\pi J \quad 3.23$$

donde  $J = \sum_i e_i \int v f_i(x, v) d^3v$  es la densidad de carga.

La neutralidad de carga, ec. 3.2, puede considerarse si se supone que la longitud de Debye es despreciable.

Este modelo puede ser apropiado en el régimen de reactor termonuclear. Mediante este modelo se pueden describir adecuadamente las Ondas de deriva de Alfvén no colisionales para  $\beta$  altas, e incluye la física fundamental de los coeficientes de transporte obtenidos por Ohkawa (1978), Parall y Pogutse (1980) y Kadomtsev y Pogutse (1985).

El conjunto de ecuaciones que describe a este modelo particular son ecs. 3.1, 2, 22, 23.

Al aplicar la transformación de escala  $\xi_0$  a las ecuaciones anteriores y exigir la invariancia ante esta, se obtienen las relaciones entre los parámetros de escala:

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{\beta \alpha}{\gamma} = \frac{\eta \alpha}{\beta} = \delta \alpha ; \quad \frac{\delta}{\gamma} = \beta^4 \alpha ; \quad \frac{\eta}{\gamma} = \frac{\delta}{c}.$$

La solución a estas relaciones es:

$$\alpha = \beta^{-3} \gamma^{-2} ; \quad c = \gamma \beta^{-1} ; \quad \delta = \beta \gamma^{-1} ; \quad \eta = \beta^2 \gamma^{-1}.$$

La transformación de escala correspondiente es:

$\xi_j$ :  $f \rightarrow \beta^{-3} \gamma^{-2} f$ ;  $v \rightarrow \beta v$ ;  $x \rightarrow \gamma x$ ;  $B \rightarrow \beta \gamma^{-1} B$ ;  $E \rightarrow \beta^2 \gamma^{-1} E$ ;  $t \rightarrow \gamma \beta^{-1} t$ .  
 Bajo esta transformación de escala, los parámetros  $n$ ,  $T$ , y  $\tau$  se escalan como:

$$n \rightarrow \gamma^{-2} n; T \rightarrow \beta^2 T; \tau \rightarrow \gamma \beta^{-1} \tau.$$

Si se supone que  $\tau$  se puede expresar en la forma 3.13, la invariancia de escala implica que:

$$\tau \rightarrow \beta^{-1} \gamma \tau = \sum C_{p,q,r,s} \gamma^{-2p} \beta^{2q} (\beta \gamma^{-1})^r \gamma^s n^p T^q B^r a^s.$$

La idea de que la forma en que se escale una variable física es independiente de la forma de la misma, impone ciertas restricciones a los índices de escalamiento en la forma:

$$2q + r = -1; 2p + r - s = -1,$$

de manera que:  $r = -1 - 2q$ ;  $s = -2q + 2p$ .

El tiempo de confinamiento  $\tau$  toma la forma que le impone el principio de invariancia en términos de una función desconocida que depende de dos parámetros:

$$B\tau = F(na^2, T/B^2 a^2). \quad 3.24$$

Las constricciones para la forma de  $\tau$  son:

$$r + 2q = 0; 2p - 2q - s = 0,$$

donde se puede observar que si se supusiera una ley de potencias para el escalamiento, existirían dos índices libres.

#### 1.4.-Modelo Cuasineutral $\beta$ -altas de Fokker-Planck.

Al considerar este modelo se incluyen los efectos que surgen al considerar valores grandes del parámetro  $\beta$ , y se permite la posibilidad de colisiones entre partículas cargadas del plasma. De esta forma, se supone que el transporte anómalo está descrito apropiadamente por las ecuaciones de Fokker-Planck, incluyendo la integral de colisiones de Landau para colisiones coulombianas, mien-

tras que el campo electromagnético se determina autoconsistentemente a partir de las ecuaciones de Maxwell, y de la condición de neutralidad de carga. Así, este modelo es una combinación de los modelos cuasineutrales  $\beta$  altas de Vlasov y electrostático de Fokker-Planck. A partir de estos modelos es posible obtener las ecuaciones de dos fluidos propuestas por Braginskii (1965).

A menudo se piensa que este modelo es adecuado para describir fenómenos del transporte anómalo en los sistemas toroidales.

Las ecuaciones que describen a este modelo son: ecs. 3.2, 19, 22, 23.

Las relaciones entre los parámetros de escala que surgen al aplicar la transformación  $\beta_0$  a las ecuaciones anteriores y exigir la invariancia de forma ante el cambio de escala son:

$$\alpha = \beta^{-5}; \quad \gamma = \beta^{-4}; \quad \delta = \beta^5; \quad \epsilon = \beta^{-5}; \quad \eta = \beta^6.$$

Existe un solo parámetro que determina la transformación de escala correspondiente a este modelo, la cual tiene la forma:

$$\beta : f \rightarrow \beta^5 f; \quad v \rightarrow \beta v; \quad x \rightarrow \beta^{-4} x; \quad B \rightarrow \beta^5 B; \quad E \rightarrow \beta^6 E; \quad t \rightarrow \beta^{-5} t.$$

El tiempo de confinamiento se expresa en la forma 3.13, donde

$$n \rightarrow \beta^8 n; \quad T \rightarrow \beta^2 T; \quad \tau \rightarrow \beta^{-5} \tau.$$

Aplicando el principio de invariancia al tiempo de confinamiento:

se obtienen los índices de escala que son independientes, obteniendo la expresión:  $s = 2p + q/2 + 5r/4 + 5/4$ .

El tiempo de confinamiento toma la forma:

$$\beta \tau = F(na^2, Ta^{1/2}, Ba^{5/4}). \quad 3.25$$

Las constricciones que determinan la forma posible de la función

desconocida  $F$  son:  $s = 2p + q/2 + 5r/4$ .

A partir de este resultado, se puede observar que el escalamiento como ley de potencias contendrá tres índices libres.

## 2.- Modelos No Cuasineutrales.

En esta sección se estudiarán los efectos de las fluctuaciones de carga en las leyes de escalamiento.

En el conjunto de modelos del plasma descritos anteriormente, se observa una característica especial que es común a todos ellos. Se ha supuesto que la condición de neutralidad de carga en el plasma se satisface, de tal forma que el campo eléctrico queda determinado por esta condición. Más sin embargo, hay situaciones en las cuales no se podría suponer esta condición, debido a que se presentan inestabilidades en el plasma. Esto sucede, por ejemplo, cuando se llevan a cabo descargas en Tokamaks de baja densidad, y más comúnmente en los Espejos magnéticos, donde se presentan inestabilidades de altas frecuencias y pequeñas longitudes de onda en la velocidad de las partículas (Kadomtsev, 1961).

Así, se reconsiderarán los distintos modelos del plasma estudiados anteriormente, en los cuales se supuso válida la condición de neutralidad de carga, sustituyendo esta condición por una ecuación más específica, la ecuación de Poisson.

$$\nabla \cdot E = -4\pi \sum_i e_i \int f_i(x, v) d^3v \quad 3.26$$

### 2.1.- Modelo Electroestático de Vlasov.

Este modelo difiere del modelo cuasineutral electrostático de Vlasov en el hecho de que la condición de neutralidad de carga es removida por la ecuación de Poisson. Este modelo queda completamente determinado por la ec. de Vlasov no colisional 3.1 y la ec. de Poisson 3.26.

Las relaciones que surgen entre los parámetros de escala, al aplicar la transformación  $\xi_0$  a las ecuaciones anteriores y exigir

la invariancias de forma ante el cambio de escala son:

$$\alpha = \beta^{-1}\gamma^{-2}; \delta = \beta\gamma^{-1}; \eta = \beta^2\gamma^{-1}; \epsilon = \gamma\beta^{-1}$$

En las relaciones anteriores se observa que existen dos parámetros de escala independientes, y la transformación de escala correspondiente es:

$$h_5: f \rightarrow \beta^{-1}\gamma^{-2}f; v \rightarrow \beta v; x \rightarrow \gamma x; B \rightarrow \beta\gamma^{-1}B; E \rightarrow \beta^2\gamma^{-1}E; t \rightarrow \gamma\beta^{-1}t.$$

El tiempo de confinamiento se transforma adecuadamente bajo  $h_5$ , obteniéndose, al exigir la invariancia de escala, que la forma posible para  $\tau$ , en términos de una función desconocida aún, es:

$$B\tau = F\left(\frac{n}{B^2}, \frac{T}{B^2a^2}\right). \quad 3.27$$

Las constricciones a los índices de escalamiento son:

$$r + 2p + 2q = 0; s + 2q = 0$$

Existen dos índices libres en la ley de potencias.

## 2.2.- Modelo Electroestático de Fokker-Planck.

La descripción de este modelo se puede llevar a cabo mediante las ecs. de Fokker-Planck 3.19 y por la ecuación de Poisson 3.26.

Al aplicar  $h_0$  a las ecuaciones y exigir la invariancia de forma de estas ante el cambio de escala, surge la transformación de escala que caracteriza a este modelo particular, en la cual se puede observar que existe solamente un parámetro de escala.

$$h_6: f \rightarrow \beta^3f; v \rightarrow \beta v; x \rightarrow \beta^{-2}x; B \rightarrow \beta^3B; E \rightarrow \beta^4E; t \rightarrow \beta^{-3}t.$$

Esta es la transformación de escala que determina la forma posible del tiempo de confinamiento si se calculara a partir de las ecuaciones que describen a este modelo.

Se expresa  $\tau$  como una serie, y la aplicación de  $h_6$  a las ecuaciones anteriores proporciona que:

$$s = 3p + q + 3r/2 + 1/2$$

El tiempo de confinamiento se expresa como:

$$B\tau = G(na^3, Ta, Ba^{3/2}) \quad 3.28$$

Esta expresión puede ser escrita en otra forma alternativa, jugando con los índices de escalamiento:

$$\begin{aligned} \tau &= B^{-1} \sum C_{p,q,r} (na^3)^p (Ta)^q (Ba^{3/2})^r, \\ &= B^{-1} \sum C_{p,q,r} (n/B^2)^p (T/B^2 a^2)^q (B^2 a^3)^{p+q+r/2}. \end{aligned}$$

El escalamiento para  $\tau$  toma la forma:

$$B\tau = F\left(\frac{n}{B^2}, \frac{T}{B^2 a^2}, Ba^{3/2}\right), \quad 3.29$$

y las restricciones que definen la forma posible para la función desconocida  $F$  son:  $6p + 2q + 3r - 2r = 0$ . Así, existen tres índices libres para el escalamiento en forma de ley de potencias.

### 2.3.- Modelo $\beta$ altas de Vlasov.

El sistema de ecuaciones que determinan a este modelo son las ecuaciones 3.1, 22, 23, 26, y la transformación de escala que surge a partir de la invariancia de forma de las ecuaciones ante cambios de escala, la cual es característica del modelo empleado, es:

$$\mathfrak{h}_\beta: f \rightarrow \gamma^{-2} f; v \rightarrow v; x \rightarrow \gamma x; B \rightarrow \gamma^{-1} B; E \rightarrow \gamma^{-1} E; t \rightarrow \gamma t.$$

Como se puede observar, no hay escalamiento para la velocidad  $v$  debido a que las relaciones entre los parámetros implican que  $\beta = 1$ . La transformación  $\mathfrak{h}_\beta$ , determina la forma funcional de  $\tau$  al exigirse la invariancia de forma ante el cambio de escala, de tal forma que este se puede expresar como:

$$B\tau = G(na^2, T, Ba) \quad 3.30$$

Una forma alternativa, más conveniente, de expresar  $\tau$  es:

$$B\tau = F\left(\frac{n}{B^2}, \frac{T}{B^2 a^2}, Ba\right) \quad 3.31$$

y la restricción que define la posible forma de  $F$  es:

$$2p + r - s = 0$$

Si se expresa  $\tau$  como una ley de potencias, existirán tres índices libres que deberán de satisfacer la constricción anterior.

#### 2.4.- Modelo $\beta$ altas de Fokker-Planck.

Como se explicó, este modelo difiere del cuasineutral en la forma como se considera la carga eléctrica en el plasma. Las ecuaciones que describen a este modelo son ecs. 3.19,22,23,26.

Si se aplica la transformación general  $\xi_0$  a estas ecuaciones exigiendo la invariancia de forma, se observa que las relaciones entre los parámetros de escala son:

$$\alpha \epsilon^{-1} = \beta \alpha \gamma^{-1} = \eta \alpha \beta^1 = \alpha^2; \quad \eta = \beta \delta; \quad \eta \gamma^{-1} = \alpha \beta^3; \quad \delta \gamma^{-1} = \alpha \beta^4; \quad \eta \gamma^{-1} = \delta \epsilon^{-1}$$

La única solución posible es:  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \eta = \epsilon = 1$ .

No es posible escalar las distintas variables y parámetros presentes en las ecuaciones que describen a este modelo, de tal forma que no existe transformación posible que permita la invariancia de forma ante cambios de escala. Esta limitación en el análisis solo permite concluir que la ley de escalamiento para  $\tau$ , correspondiente a este modelo, tendrá la forma funcional no determinada aún:

$$B\tau = F(n, T, B, a) \quad 3.32$$

Así, no es posible obtener información para el tiempo de confinamiento a partir de este modelo particular utilizando el argumento de invariancia de escala.

#### 3.- Modelos de Fluidos.

El estudio del plasma termonuclear plantea la dificultad de entender la gran diversidad de fenómenos que se presentan en la dinámica del mismo. Mas sin embargo, existe una teoría fundamental

que permite la estimación de ciertas propiedades globales de equilibrio y estabilidad del plasma, la cual se conoce como Teoría Magneto-hidrodinámica (MHD).

Sea  $l$  una longitud que representa el tamaño del sistema y  $\lambda_D$  la longitud de Debye. Si se satisface la condición de que  $\lambda_D \ll l$ , se tiene que el plasma se puede considerar como un fluido, por lo que es adecuado tratarlo mediante un modelo continuo. Así, en este modelo no se considera importante la identidad de las partículas individuales, y solo se toma en cuenta el comportamiento de elementos de fluido. En un fluido ordinario las colisiones frecuentes entre partículas individuales mantienen a las mismas en determinados elementos de fluido, moviéndose conjuntamente. El plasma termonuclear consta de partículas cargadas. Sin embargo, puede ser descrito por el modelo de fluido, aunque las colisiones entre partículas sean poco frecuentes, debido a la presencia de campos magnéticos que confinan a las partículas cargadas a moverse en elementos de volumen. Esta descripción puede ser derivada a partir de los modelos apropiados de Vlasov o Boltzmann bajo ciertas condiciones adicionales. Sin embargo, debido a su amplio uso, y debido a que las aproximaciones adicionales conducen a constricciones extra en la ley de escalamiento, es conveniente analizarlos como modelos independientes (Braginskii, 1965).

Las ecuaciones que describen este modelo constan de una ecuación de continuidad, que relaciona la densidad  $\rho = m_i n_i$ , y la velocidad macroscópica  $v$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad 3.33$$

Una ecuación de momento:

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right] + \nabla p - J \times B = 0 \quad 3.34$$

y una ecuación de energía para la presión P, la cual esta relacionada con la temperatura a través de la ecuación  $P = nT$ :

$$\frac{\rho^w}{\gamma-1} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] (P \rho^w) = \eta |J|^2 \quad 3.35$$

donde  $\eta$  es la resistividad de Spitzer,  $\eta = T^{-3/2}$ , y  $w$  la razón de calores específicos.  $T = kT'$ , donde  $T'$  es la temperatura absoluta medida en grados Kelvin y  $k$  es la constante de Boltzmann, de tal forma que las unidades de T son Joules.

El modelo se completa con la ley de Ohm:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad 3.36$$

y con las ecuaciones de Maxwell 3.22,23, para la determinación del campo electromagnético.

Se supone que estas ecuaciones son apropiadas para describir los modos Ballooning Resistivos en los Tokamaks, ideal y resistivo y los modos de intercambio Resistivos en los Pinchs.

Dentro de este modelo se consideran dos caso; Modelo MHD ideal y MHD resistivo, siendo  $\eta$  el parámetro determinante.

### 3.1.- Modelo MHD Ideal.

Este modelo está descrito por las ecs. 3.22,23,33-36, conjuntamente con las relaciones  $P = nT$  y  $T = \langle v^2 \rangle$ , en las cuales se despreja la resistividad  $\eta$ .

La transformación general de escala que se emplea es:

$$\begin{aligned} \beta_0: \quad n &\rightarrow \alpha n; \quad v \rightarrow \beta v; \quad x \rightarrow \gamma x; \quad B \rightarrow \delta B; \quad E \rightarrow \eta E; \quad P \rightarrow cP; \quad J \rightarrow \kappa J \\ t &\rightarrow \phi t; \quad T \rightarrow \xi T; \quad \rho \rightarrow \iota \rho. \end{aligned}$$

Las relaciones entre los parámetros de escala, que surgen al exigir la invariancia de forma de las ecuaciones, son:

$$\begin{aligned} \xi &= \beta^2; \quad \phi = \gamma \beta^{-1}; \quad c = \alpha \beta^2; \quad \delta = \alpha^{1/2} \beta; \quad \eta = \alpha^{1/2} \beta^2; \\ \kappa &= \alpha^{1/2} \beta \gamma^{-1}; \quad \iota = \alpha, \end{aligned}$$

las cuales determinan la forma de la transformación de escala apropiada a este modelo, en la cual se encuentran tres parámetros de escala independientes:

$$\mathcal{E}_1: n \rightarrow \alpha n; v \rightarrow \beta v; x \rightarrow \delta x; B \rightarrow \alpha^{1/2} \beta B; E \rightarrow \alpha^{1/2} \beta^2 E; P \rightarrow \alpha \beta^2 P; \\ J \rightarrow \alpha^{1/2} \beta \gamma^{-1} J; t \rightarrow \gamma \beta^{-1} t; T \rightarrow \beta^2 T; \rho \rightarrow \alpha \rho.$$

Si se expresa  $\tau$  como una serie, ec. 3.13, se aplica  $\mathcal{E}_1$  a esta y se exige la invariancia de escala, se obtiene que el único índice independiente es  $p$ , y los demás índices satisfacen las relaciones:

$$r = -2p; q = -1/2 + p.$$

De esta forma, el tiempo de confinamiento se expresa como:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} F\left(\frac{nT}{B^2}\right) \quad 3.37$$

Las constricciones a los índices de escalamiento son:

$$p = q + 1/2; r + 2q = 0; s = 1.$$

Si se supone un escalamiento como ley de potencias, existirá un único índice libre.

### 3.2.-Modelo MHD Resistivo.

En este modelo particular se incluyen los efectos de la resistividad en las ecuaciones anteriores, ecs. 3.22, 23, 33-36 y se supone que esta es de Spitzer.

Las relaciones entre los parámetros de escala que surgen debido a la invariancia de escala de las ecuaciones determinan la forma de la transformación de escala que corresponde a este modelo:

$$\mathcal{E}_2: n \rightarrow \alpha n; v \rightarrow \beta v; x \rightarrow \beta^{-4} x; B \rightarrow \alpha^{1/2} \beta B; E \rightarrow \alpha^{1/2} \beta^2 E; F \rightarrow \alpha \beta^2 P; \\ \rho \rightarrow \alpha \rho; J \rightarrow \alpha^{1/2} \beta^5 J; t \rightarrow \beta^5 t; T \rightarrow \beta^2 T.$$

Las propiedades de invariancia de  $\tau$  ante la transformación  $\mathcal{E}_2$  determinan la forma de este al surgir las relaciones entre los índices de escalamiento:  $r = -2p; s = q/2 - p/2 + 5/4$ .

Así, siguiendo el mismo procedimiento anterior, el tiempo de confinamiento toma la forma:

$$\tau = \frac{(na^2)^{1/2}}{B} F\left(\frac{n}{B^2 a^{1/2}}, Ta^{1/2}\right) \quad 3.38$$

El término  $n/B^2 a^{1/2}$  se puede expresar como  $nT/B^2 Ta^{1/2}$ , de tal forma que el escalamiento se puede expresar como:

$$B\tau = n^{1/2} a F\left(\frac{nT}{B^2}, Ta^{1/2}\right). \quad 3.39$$

Las constricciones a los índices son:

$$2p + r - 1 = 0; \quad p - q + 2s - 5/2 = 0,$$

donde se observa que existiran dos índices libres si se supone un escalamiento como ley de potencias.

De la discusión anterior se obtienen algunos resultados interesantes, referentes a las suposiciones adicionales que se incluyen al considerar un modelo de fluido. En la ley de escalamiento para el modelo de fluido ideal, ec. 3.37, se tiene que exista una sola combinación de las cantidades  $na^2$  y  $T/a^2 B^2$  en la forma  $nT/B^2$ , mientras que estas mismas cantidades surgen como independientes en el escalamiento para el modelo de Vlasov  $\beta$ -altas. Se tiene que la suposición adicional de un modelo de fluido ideal constriñe la forma posible de la ley de escalamiento para el modelo de Vlasov  $\beta$ -altas, reduciendo en uno el número de índices libres. Esto mismo ocurre con el modelo de fluido resistivo y el modelo de Fokker-Planck  $\beta$ -altas, donde las cantidades  $na^2$  y  $Ba^{5/4}$  aparecen solo en la combinación  $na^2/a^{5/2} B^2$ , mientras que en el modelo de Fokker-Planck surgen como cantidades independientes. Esta suposición adicional reduce también el número de índices libres, constriñendo la forma posible de la ley de escalamiento del modelo señalado.

### 3.3.- Efectos de Radios de Larmor Finitos.

El conjunto de ecuaciones que se utilizaron para la descripción del plasma como un fluido, caracterizan un determinado modelo que se fundamenta en una serie de suposiciones sobre el comportamiento y características del plasma mismo, las cuales determinan el tipo y forma de las ecuaciones de este modelo y, adicionalmente, la forma posible de la ley de escalamiento correspondiente. La ecuación en la cual se llevan a cabo las principales suposiciones y simplificaciones es la ley de Ohm. La ley generalizada de Ohm, la cual se obtiene a partir de las ecuaciones para el primer momento en el modelo de un fluido, se puede escribir como:

$$E + \frac{1}{c} \left[ \mathbf{v} - \frac{\mathbf{J}}{en} \right] \times \mathbf{B} + \frac{1}{en} \nabla P_e - \eta \mathbf{J} = (m_e / ne^2) \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad 3.40$$

Esta representa la razón de cambio de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , y describe las propiedades eléctricas del plasma como un fluido. Si se supone que la densidad de corriente no cambia apreciablemente en el tiempo, comparada con el tiempo promedio entre colisiones, es posible eliminar el término  $m_e / e^2 n \partial \mathbf{J} / \partial t$ , ya que se tiene que  $m_e / e^2 n \sim E / \nu j$ , donde  $\nu$  es la frecuencia entre colisiones. Si se supone además que el plasma está a bajas temperaturas se tendrá que  $|\nabla P_e / n| \approx |\nabla T_e| \ll |eE|$ , por lo que es posible eliminar el término  $\nabla P_e / en$  y reducir la ecuación generalizada a la forma:

$$E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{cne} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}. \quad 3.41$$

El término  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  se denomina Corriente de Hall y se puede despreciar si se supone que estas corrientes, presentes en el plasma, son muy pequeñas comparadas con el término  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , es decir, si  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} \ll en \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . De esta forma se recobra la ley de Ohm, ec. 3.36, utilizada en el modelo de fluido.

Es posible analizar las consecuencias en la ley de escalamiento para  $\tau$ , al examinar estas aproximaciones considerando la ley generalizada de Ohm.

A continuación se consideran los modelos MHD Ideal y Resistivo utilizando la ec. 3.40.

### 3.3.1.- Modelo MHD Ideal.

Es posible determinar este modelo a partir de las ecuaciones 3.22,23, 33,34,35,40, despreciando la resistividad. La invariancia de estas ante la transformación  $\mathcal{E}_0$  determina la forma de la transformación de escala correspondiente a este modelo:

$$\mathcal{E}_1': \quad n \rightarrow \alpha n; \quad v \rightarrow \beta v; \quad x \rightarrow \alpha^{-1/2} x; \quad B \rightarrow \alpha^{1/2} B; \quad E \rightarrow \alpha^{1/2} \beta^2 E; \quad P \rightarrow \alpha \beta^2 P; \\ t \rightarrow \alpha^{-1/2} \beta^{-1} t; \quad T \rightarrow \beta^2 T; \quad \rho \rightarrow \alpha \rho; \quad J \rightarrow \alpha \beta J.$$

El principio de invariancia de escala permite determinar el conjunto de índices de escala independientes en la expresión de  $\tau$  como serie:  $r = -2q - 1$ ;  $s = 2p - 2q$ .

Estos determinan la forma funcional de  $\tau$ :

$$B\tau = F\left(na^2, \frac{T}{B^2 a^2}\right) \quad 3.42$$

cuyas restricciones son:  $r + 2q = 0$  y  $2p - 2q - s = 0$ .

### 3.3.2.- Modelo MHD Resistivo.

Las ecuaciones 3.22,23,33,24,25,40 describen a este modelo y la transformación general  $\mathcal{E}_0$  determina que si estas ecuaciones preservan su forma ante el cambio de escala, la transformación que permite esta condición debe de tener la forma:

$$\mathcal{E}_2': \quad n \rightarrow \beta n; \quad v \rightarrow \beta v; \quad x \rightarrow \beta^{-4} x; \quad B \rightarrow \beta^5 B; \quad E \rightarrow \beta^6 E; \quad \tau \rightarrow \beta^{-5} t; \\ P \rightarrow \beta^{10} P; \quad T \rightarrow \beta^2 T; \quad \rho \rightarrow \beta^8 \rho; \quad J \rightarrow \beta^9 J.$$

La forma funcional de  $\tau$ , que surge a partir del principio de invariancia

riancia, se puede expresar como:

$$Br = F(na^2, Ta^{1/2}, Ba^{5/4}). \quad 3.43$$

donde los índices de escala en la serie de Taylor satisfacen las constricciones:  $2p + q/2 + 5r/4 - s = 0$ .

Al llevar a cabo el análisis de invariancia de escala en los modelos de fluido, en la descripción del plasma, considerando la ley de Ohm generalizada, se observa que las aproximaciones hechas sobre esta ecuación determinan la forma posible de la ley de escalamiento para el tiempo de confinamiento, sin embargo, se observa que los tres términos incluidos proporcionan la misma información en el escalamiento para  $\tau$ . Esto es, si se incorporan estos términos en la ley de Ohm, uno a la vez, y se lleva a cabo el análisis de invariancia de escala, se obtienen las mismas propiedades en la ley de escalamiento para  $\tau$ , y esto se debe a que estos términos responden de igual forma al escalamiento de la transformación general  $\mathcal{E}_0$ .

El término  $\nabla P_e$  en juega un papel importante en la descripción del plasma como un fluido, ya que al incluirlo en la ley de Ohm se están contemplando los efectos de radios de Larmor finitos (RLF) debidos a la temperatura de los electrones, y esto se puede constatar al observar que  $|\nabla P_e/n| \approx |VT_e|$ , el cual no es despreciable ante el término  $|eE|$ , por lo que se están incluyendo los efectos debidos a altas temperaturas en el plasma. Es este término el que produce el campo eléctrico paralelo a través del efecto del radio finito de Larmor (RFL) por temperatura de los electrones.

Una observación importante es que al incluir los efectos RFL en el modelo de fluido ideal se obtienen las mismas característi-

cas del escalamiento para  $\tau$  que posee el modelo cuasineutral con  $\beta$  altas de Vlasov. Se obtiene la misma ley de escalamiento y las mismas constricciones para los indices del escalamiento. Análogamente, al incluir los efectos RFL en el modelo de fluido resistivo, se obtiene la misma ley de escalamiento para el tiempo de confinamiento  $\tau$  que la que se obtiene a partir del modelo cuasineutral para  $\beta$  altas de Fokker-Planck.

Para ofrecer un panorama general de las distintas leyes de escalamiento obtenidas para cada modelo estudiado, y para facilitar la comparación con los datos experimentales, se ofrecen estas en la tabla siguiente.

Tabla 1. Leyes de escalamiento para el tiempo de confinamiento de energía en modelos convencionales del plasma.  
Las constrictiones son en relación a la ec. 3.13.

Modelos	Ley de escalamiento	constricciones	Indi- ces.	argumentos a- dimensionales
1.1	$F\left(\frac{T}{B^2 a^2}\right)$	$p=0$ $r+s=-2q$	1	$F\left(\frac{\rho_1}{a}\right)$
1.2	$F\left(\frac{T}{B^2 a^2}, \frac{na^2}{B^4 a^5}\right)$	$3p+2q+s=0$ $4p+2q+r=0$	2	$F\left(\frac{\rho_1}{a}, \frac{\lambda}{a}\right)$
1.3	$F\left(na^2, \frac{T}{B^2 a^2}\right)$	$2p-2q-s=0$ $r+2q=0$	2	$F\left(\frac{\rho_1}{a}, \beta\right)$
1.4	$F\left(na^2, Ta^{1/2}, Ba^{5/4}\right)$	$2p+\frac{q}{2}+\frac{5r}{4}-s=0$	3	$F\left(\frac{\rho_1}{a}, \frac{\lambda}{a}, \beta\right)$
2.1	$F\left(\frac{n}{B^2}, \frac{T}{B^2 a^2}\right)$	$2p+2q+r=0$ $2q+s=0$	2	$F\left(\frac{\rho_1}{a}, \frac{\lambda}{a}, \beta\right)$
2.2	$F\left(\frac{n}{B^2}, \frac{T}{B^2 a^2}, Ba^{3/2}\right)$	$6p+2q+3r-2s=0$	3	$F\left(\frac{\rho_1}{a}, \frac{\lambda}{a}, \frac{\lambda}{a}, \beta\right)$
2.3	$F\left(\frac{n}{B^2}, \frac{T}{B^2 a^2}, Ba\right)$	$2p+r-s=0$	3	$F\left(\frac{\rho_1}{a}, \beta, \frac{\lambda}{a}, \beta\right)$
2.4	$F(n, T, B, a)$	-----	4	$F\left(\frac{\rho_1}{a}, \frac{\lambda}{a}, \beta, \frac{\lambda}{a}, \beta\right)$
3.1	$(na^2)^{1/2} F\left(\frac{nT}{B^2}\right)$	$p-q-1/2=0$ $r+2q=0; s=1$	1	$F(\beta)$
1.2	$(na^2)^{1/2} F\left(\frac{nT}{B^2}, Ta^{1/2}\right)$	$p-q+2s-5/2=0$ $2p+r-1=0$	2	$F(\beta, S)$

- 1.1.- Cuasineutral Electroestático de Vlasov.
- 1.2.- Cuasineutral Electroestático de Fokker-Planck.
- 1.3.- Cuasineutral  $\beta$ -altas de Vlasov.
- 1.4.- Cuasineutral  $\beta$ -altas de Fokker-Planck.
- 2.1.- Electroestático de Vlasov.
- 2.2.- Electroestático de Fokker-Planck.
- 2.3.-  $\beta$ -altas de Vlasov.
- 2.4.-  $\beta$ -altas de Fokker-Planck.
- 3.1.- MHD Ideal.
- 3.2.- MHD Resistivo.

## CAPITULO IV

### Aplicaciones de las Constricciones

---

(Connor y Taylor, 1979)

En este capítulo se describe la forma en que las constricciones obtenidas a partir del principio de invariancia de escala en el confinamiento convencional del plasma pueden ser utilizadas para analizar cálculos teóricos sobre el tiempo de confinamiento de energía, analizar la validez de las distintas leyes de escalamiento empíricas y analizar los intentos de extrapolación hacia los parámetros de reactor. Se discuten ideas sobre Similitud y Aparatos Similares, para describir familias de aparatos de confinamiento.

.....

En el capítulo anterior se describe la forma en que el tipo de transformación de escala, que se obtiene al aplicar el principio de invariancia de escala al conjunto de ecuaciones que describen a un modelo particular del plasma, determina la forma posible para el tiempo de confinamiento de energía en la forma de ley de escalamiento, imponiendo un conjunto determinado de constricciones en los índices de la ley de escalamiento, las cuales son características del modelo empleado. Esta clase de constricciones pueden servir para analizar cálculos teóricos tendientes a determinar el tiempo de confinamiento de energía, empleando ciertas hipótesis sobre el mecanismo de transporte de energía anómalo, analizar y discutir la validez de las distintas leyes de escalamiento propuestas a partir de los experimentos existentes, y analizar la extrapola-

ción hecha hacia los parámetros de reactor. De esta forma, se describen las características de Modelos teóricos, de Leyes de escalamiento empíricas, de Similitud y Aparatos similares y se ofrece una interpretación de los resultados en términos del Análisis Dimensional.

#### 1.- Modelos Teóricos.

En el análisis de los fenómenos que se presentan en la dinámica del plasma termonuclear, en un sistema de confinamiento magnético, vinculados con el transporte y confinamiento de energía anómala, los cálculos teóricos representan una labor compleja debido principalmente a que la dinámica del plasma es muy variada, y las ecuaciones que tratan de describir tal comportamiento son no lineales, para las cuales no se tienen formas de resolución apropiadas. Sin embargo, cualquier cálculo teórico acerca del tiempo de confinamiento y transporte de energía, no importando la forma en que fue obtenido, debe ajustarse apropiadamente a las constricciones que le corresponden, de acuerdo al modelo del plasma empleado y debe de ser consistente con los resultados obtenidos en la sección anterior. De esta forma, las constricciones se pueden emplear para verificar esta correspondencia entre los índices de la ley de escalamiento y las constricciones características.

Como ejemplo, se puede describir el caso del Modo Disipativo de Iones Atrapados, el cual incorpora varias inestabilidades de partículas atrapadas y de deriva, (Duchs et al, 1977). En este caso se tiene que la ley de escalamiento para el tiempo de confinamiento está bien representado por los índices:

$$p = 1; q = -7/2; r = 3; y s = 4.$$

Si se considera el modelo Electroestático Cuasineutral de Fokker-Planck, se tiene que los valores anteriores para los índices de escalamiento satisfacen las constricciones correspondientes a este modelo, las cuales tienen la forma:

$$3p + 2q + s = 0; 4p + 2q + r = 0.$$

De esta forma, se puede garantizar que el Modo Disipativo de Iones Atrapados está bien descrito por el modelo Electroestático Cuasineutral de Fokker-Planck.

Más aún, además de la aplicación tan trivial de las constricciones a la verificación de la relación entre los índices de las leyes de escalamiento obtenidas anteriormente y los cálculos teóricos, también pueden proporcionar una forma de clasificación de las diversas teorías propuestas para explicar los fenómenos presentes en el plasma.

Un ejemplo de esta aplicación toma como base los diversos resultados del problema del confinamiento en el transporte de Ondas de Deriva discutidos por Furth (1977). En esta aplicación todos los resultados obtenidos se pueden clasificar en una forma sencilla en términos de los dos índices independientes correspondientes al modelo Electroestático Cuasineutral de Fokker-Planck.

Tabla 2. Confinamiento debido a los modelos de Ondas de Deriva de Furth.

Modelo	p	q
Baha	-1	0
Iones Atrapados Disipativos	-7/2	1
Electrones Atrapados no-collisionales	-3/2	0
Electrones Atrapados Disipativos	-7/2	1
Pseudo clasico	1/2	-1

La ley de escalamiento para  $\tau$  en el modelo Electroestático Cuasineutral de Fokker-Planck, escrita como ley de potencias es:

$$B\tau \sim \left[ \frac{\Gamma}{B^2 a^2} \right]^q \left[ \frac{na^2}{B^4 a^5} \right]^p$$

con dos índices libres. La idea de que existan dos índices libres en el escalamiento significa que el confinamiento está determinado en términos de una función desconocida que sólo depende de dos parámetros. Esta dependencia se debe determinar en base a experimentos diseñados especialmente para determinar esta dependencia. Los valores propuestos para estos índices por la teoría, al igual que los propuestos empíricamente, deben de satisfacer las constricciones características de este modelo. Los índices libres no son arbitrarios, se deben ajustar al fenómeno físico que representan.

Por otro lado, se observa que esta propiedad de las constricciones establece que la teoría sólo tiene que proporcionar los valores correspondientes a un número limitado de índices, los determinados por el principio de invariancia de escala.

## 2.- Leyes de escalamiento empíricas.

Una de las aplicaciones más significativas del principio de invariancia de escala está relacionada con el examen de las distintas leyes de escalamiento empíricas propuestas a partir de los distintos experimentos de fusión existentes, dentro del contexto de las constricciones características de cada modelo discutido en el capítulo anterior.

Es muy interesante que, al examinar e identificar cual de los modelos del plasma es consistente con una ley empírica determinada se pueda, en principio, identificar la naturaleza de la física del plasma, la cual es directamente responsable del tipo de transporte anómalo en el plasma termonuclear.

Esta aplicación del principio de invariancia puede ser útil en la física de plasmas ya que, al analizar los distintos datos ob

tenidos de los experimentos de fusión, en el marco de las constricciones características del confinamiento global, es posible elegir un modelo teórico consistente con los datos, el cual deberá ser analizado con mayor detalle, buscando poder determinar exactamente los mecanismos responsables de dicho transporte.

Haciendo uso de la tabla 1, capítulo III, se observa que existen cuatro variables independientes en las leyes de escalamiento, las cuales representan cantidades características del aparato de confinamiento, como son:  $n$  densidad del plasma,  $T$  su temperatura,  $B$  campo magnético y  $a$  una longitud característica del aparato de confinamiento, radio menor de un tokamak.

#### 2.1.- Sistemas de confinamiento con calentamiento óhmico.

Existen situaciones en las cuales la temperatura no es una variable independiente, que se determina a partir de los demás parámetros del sistema. Este es el caso de los Pinch y Tokamaks de calentamiento óhmico. En estos sistemas de confinamiento la temperatura se determina a partir de la condición de balance de energía:

$$\frac{nT}{\tau} \sim \eta \frac{I^2}{a^4} \quad 4.1$$

En esta expresión  $\eta \sim zT^{-3/2}$  es la resistividad de Spitzer,  $I$  es la corriente total y  $z$  es la carga efectiva en el plasma.

Se puede determinar una relación para la temperatura, la cual está determinada por los parámetros  $n$ ,  $B$  y  $a$ . Para esto, se utiliza una de las ecuaciones de Maxwell, y se determina el campo magnético dentro del plasma para una geometría toroidal, aproximándola por una geometría cilíndrica. La ecuación que se necesita es:

$$\nabla \times B = -4\pi J, \quad 4.2$$

donde  $J$  es la densidad de corriente. Integrando esta ecuación so-

bre una superficie cilíndrica y utilizando el teorema de Stokes para integrales se tiene que  $2\pi aB = JA$ , obteniéndose que:

$$B \sim I/a, \quad 4.3$$

donde  $a$  es el radio del cilindro.

Como  $nT/\tau \sim \eta I^2/a^4$  se tiene que:

$$T \sim \eta \frac{\tau I^2}{na^4} = \eta \frac{\tau B^2}{na^2} \sim \frac{Z}{T^{3/2}} \frac{\tau B^2}{na^2}$$

Así, se obtiene que la temperatura se determina a partir de los parámetros  $n$ ,  $B$  y  $a$  a partir de la relación:

$$T^{5/2} \sim \frac{B^2 \tau}{na^2}. \quad 4.4$$

Tomando en cuenta esta constricción impuesta a la temperatura la forma de la ley de escalamiento general, como una regla de potencias:  $B\tau \sim n^p T^q B^r a^s$ , debe ser modificada y expresada de tal forma que el tiempo de confinamiento se exprese como:

$$B\tau \sim n^x B^y a^z. \quad 4.5$$

De esta forma, se elimina la temperatura como variable independiente en la ley de escalamiento para  $\tau$ .

Para comparar las leyes de escalamiento empíricas para aparatos de calentamiento ohmico con las leyes de escalamiento obtenidas a partir del principio de invariancia de escala, es necesario remover la temperatura de las expresiones de la tabla I y expresar las en la forma 4.5.

En la siguiente parte se removerá la temperatura de las leyes de escalamiento para los diversos modelos analizados anteriormente utilizando la relación para la temperatura 4.4.

El procedimiento general para la remoción de la temperatura en las expresiones para  $\tau$  anteriores, y obtener leyes de escalamiento para los aparatos de fusión con calentamiento ohmico es el

siguiente: Se expresa la ley de escalamiento para un modelo determinado del plasma como una ley de potencias, con los índices libres correspondientes. Se considera la relación obtenida para la temperatura y se remueve esta al sustituir  $T$  por  $(B^2\tau/na^2)^{2/5}$  en la ley de escalamiento. Al eliminar a  $T$  como variable independiente se determina  $\tau$  como función de los parámetros restantes  $n$ ,  $B$  y  $a$  alterando los índices para estos parámetros. Una vez hecho esto, se expresa  $\tau$  en la forma 4.5, y se determinan las constricciones a propiedades al modelo.

### 2.1.1. Modelos Cuasineutrales.

#### 2.1.1.1.- Modelo Cuasineutral Electroestático de Vlasov.

En este modelo se tiene que la ley de escalamiento correspondiente para  $\tau$  es:

$$B\tau = F(T/B^2a^2) - (T/B^2a^2)^q$$

Utilizando la relación 4.4 en esta expresión se tiene:

$$B\tau \sim \left[ \frac{T}{B^2 a^2} \right]^q = \left[ \frac{T^{5/2}}{B^5 a^5} \right]^m - \left[ \frac{B^2 \tau}{na^7 B^5} \right]^m$$

con  $m = 2q/5$ .

$$\text{Así: } \tau^m \sim (na^7 B^3)^m B\tau$$

$$\text{De esta forma: } B^m (na^7 B^3)^m \sim (B\tau)^{m-1}$$

$$\text{entonces: } B\tau \sim (na^7 B^4)^{m/(m-1)}$$

La ley de escalamiento se expresa como:

$$B\tau = G(na^7 B^4) \tag{4.6}$$

la cual contiene solo un índice libre.

Las constricciones correspondientes son:

$$n^x B^y a^z \sim n^x B^{4x} a^{7x}$$

de donde se tiene que:  $y = 4x$  ;  $z = 7x$ .

#### 2.1.1.2.- Modelo Cuasineutral Electroestático de Fokker-Planck.

La ley de escalamiento para este modelo es:

$$B\tau = F(T/B^2a^2, na^2/B^4a^5)$$

$$B\tau \sim \left[ \frac{T}{B^2a^2} \right]^q \left[ \frac{na^2}{B^4a^5} \right]^p \sim \left[ \frac{\tau}{na^7B^3} \right]^m \left[ \frac{na^2}{B^4a^5} \right]^p$$

donde se ha removido T.

Entonces:  $(B\tau)^{m-1} \sim (na^2)^{m-p} (B^4a^5)^{m-p}$

De esta forma:

$$B\tau \sim (na^2)^{(m-p)/(m-1)} (B^4a^5)^{(m-p)/(m-1)}$$

La ley de escalamiento general tiene la forma:

$$B\tau = G(na^2, a^5B^4) \quad 4.7$$

Las constricciones correspondientes son:

$$8x + 5y - 4z = 0$$

2.1.1.3.- Modelo Cuasineutral  $\beta$ -altas de Vlasov.

La ley de escalamiento correspondiente es:  $B\tau = F(na^2, T/B^2a^2)$ .

Eliminando a la temperatura como variable independiente:

$$B\tau \sim (na^2)^p (T/B^2a^2)^q \sim (na^2)^p (\tau/na^7B^3)^m$$

Entonces:  $(B\tau)^{m-1} \sim (na^7B^4)^m (na^2)^{-p}$

$$B\tau \sim (na^2)^{(m-p)/(m-1)} (B^4a^5)^{m/(m-1)}$$

La ley de escalamiento general es:

$$B\tau = G(na^2, B^4a^5) \quad 4.8$$

La misma ley de escalamiento para el modelo anterior.

Las constricciones características son:  $8x + 5y - 4z = 0$ .

2.1.1.4.- Modelo Cuasineutral  $\beta$ -altas de Fokker-Planck.

La ley de escalamiento correspondiente es:

$$B\tau = F(na^2, Ta^{1/2}, Ba^{5/4})$$

Si se elimina a T, se tiene que:

$$B\tau \sim (na^2)^p \left[ \frac{B^2a^{5/4}\tau}{na^2} \right]^m (Ba^{5/4})^r \sim (na^2)^{p-m} (Ba^{5/4})^{m+r} (B\tau)^m$$

De esta forma se obtiene que:

$$B\tau = (na^2)^{(p-m)/(1-m)} (Ba^{5/4})^{(m+r)/(1-m)}$$

La ley de escalamiento es entonces:

$$B\tau = G(na^2, B^4 a^5) \quad 4.9$$

La misma ley de escalamiento que en los dos modelos anteriores.

Las constricciones son:  $8x + 5y - 4z = 0$ .

## 2.1.2. Modelos No Cuasineutrales.

### 2.1.2.1.- Electroestático de Vlasov.

La ley de escalamiento tiene la forma:  $B\tau = F(n/B^2, T/B^2 a^2)$ .

Removiendo la temperatura se tiene que:

$$B\tau \sim (n/B^2)^{(m-p)/(m-1)} (a^7 B^6)^{m/(m-1)}$$

La ley de escalamiento general tiene la forma:

$$B\tau = G(n/B^2, a^7 B^6) \quad 4.10$$

Las constricciones correspondientes son:

$$14x + 7y - 6z = 0$$

### 2.1.2.2.- Electroestático de Fokker-Planck.

El escalamiento tiene la forma:  $B\tau = F(n/B^2, T/B^2 a^2, Ba^{3/2})$ .

Removiendo la temperatura:

$$B\tau \sim (n/B^2)^{(m-p)/(m-1)} (Ba^{3/2})^{(6m-r)/(m-1)} a^{-m/(m-1)}$$

La ley de escalamiento general tiene la forma:

$$B\tau = G(n/B^2, Ba^{3/2}, a) \quad 4.11$$

Y se observa que no hay constricciones.

### 2.1.2.3.- $\beta$ altas de Vlasov.

El escalamiento tiene la forma:  $B\tau = F(n/B^2, T/B^2 a^2, Ba)$ .

Removiendo la temperatura:

$$B\tau \sim (n/B^2)^{(m-p)/(m-1)} (aB)^{(6m-r)/(m-1)} a^{m/(m-1)}$$

El escalameinto general es:

$$B\tau = G(n/B^2, aB, a) \quad 4.12$$

No hay constricciones.

#### 2.1.2.4.- $\beta$ altas de Fokker-Planck.

La ley de escalamiento tiene la forma:  $B\tau = F(n, T, B, a)$ .

Al remover la temperatura solo se obtiene que el escalamiento general tiene la forma:

$$B\tau = G(n, B, a) \quad 4.13$$

y que no hay constricciones.

#### 2.1.3. Modelos de Fluidos.

##### 2.1.3.1.- MHD Ideal.

La ley de escalamiento correspondiente a este modelo es:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} F(nT/B^2)$$

La temperatura se puede remover en forma análoga a los modelos anteriores, obteniéndose que:

$$B\tau \sim (na^2)^{1/2} (n^2 a^4 / B^4 a^5)^{m/(1-m)}$$

donde  $m = 2q/5$ .

La ley de escalamiento general tiene la forma:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} G\left(\frac{n^2 a^4}{B^4 a^5}\right) \quad 4.14$$

Las constricciones a la posible forma de la función G son:

$$y + 2x - 1 = 0; \quad 2x + 4z - 5 = 0$$

##### 2.1.3.2.- MHD Resistivo.

La ley de escalamiento correspondiente es:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} F(nT/B^2, Ta^{1/2})$$

Eliminando T como variable independiente:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} (n/B^2 a^{1/2})^p (Ta^{1/2})^q$$

se obtiene que:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} (n^2 a^4 / B^4 a^5)^{(2p-m)/4(1-m)}$$

La ley de escalamiento general es entonces:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} G\left(\frac{n^2 a^4}{B^4 a^5}\right)$$

4.15

La misma ley de escalamiento que para el modelo ideal.

Las constricciones tienen la forma:

$$y + 2x - 1 = 0; \quad 2x + 4z - 5 = 0.$$

En la siguiente tabla se resumen los resultados anteriores.

Tabla 3. Leyes de escalamiento para plasmas con calentamiento óhmico.

Modelo del Plasma	Ley de escalamiento para $B\tau$	Constricciones en el escalamiento	Índices libres
2.1.1.1	$G(na^7 B^4)$	$z = 7x; y = 4x$	1
2.1.1.2	$G(na^2, B^4 a^5)$	$8x + 5y - 4z = 0$	2
2.1.1.3	$G(na^2, B^4 a^5)$	$8x + 5y - 4z = 0$	2
2.1.1.4	$G(na^2, B^4 a^5)$	$8x + 5y - 4z = 0$	2
2.1.2.1	$G\left(\frac{n}{B^2}, a^7 B^6\right)$	$14x + 7y - 6z = 0$	2
2.1.2.2	$G\left(\frac{n}{B^2}, Ba^{3/2}, a\right)$	-----	3
2.1.2.3	$G\left(\frac{n}{B^2}, aB, a\right)$	-----	3
2.1.2.4	$G(n, B, a)$	-----	3
2.1.3.1	$B\tau = (na^2)^{1/2} G\left(\frac{n^2 a^4}{B^4 a^5}\right)$	$4z + 2x = 1$ $y + 2x = 1$	1
2.1.3.2	$B\tau = (na^2)^{1/2} G\left(\frac{n^2 a^4}{B^4 a^5}\right)$	$4z + 2x = 1$ $y + 2x = 1$	2

- 2.1.1.1. Cuasineutral Electroestático de Vlasov.
- 2.1.1.2. Cuasineutral Electroestático de Fokker-Planck.
- 2.1.1.3. Cuasineutral  $\beta$ -altas de Vlasov.
- 2.1.1.4. Cuasineutral  $\beta$ -altas de Fokker-Planck.
- 2.1.2.1. Electroestático de Vlasov.
- 2.1.2.2. Electroestático de Fokker-Planck.
- 2.1.2.3.  $\beta$  altas de Vlasov.
- 2.1.2.4.  $\beta$  altas de Fokker-Planck.
- 2.1.3.1. MHD Ideal.
- 2.1.3.2. MHD Resistivo.

Al observar la tabla anterior, se puede notar que para los modelos del plasma con calentamiento óhmico, a diferencia de la situación más general, se tiene la misma condición de restricción en los índices de escalamiento para tres de los cuatro modelos elec-

trostáticos cuasineutrales a pesar de las diferentes suposiciones básicas características a cada modelo. Esta coincidencia no depende de la forma particular (clásica) de la ley de Ohm que ha sido adoptada. Este resultado surge siempre que la temperatura está determinada, en principio, por las ecuaciones del modelo Colisional  $\beta$ -altas de Fokker-Planck. De igual forma, se observa que ambos modelos de fluidos, MHD Ideal y Resistivo, determinan la misma forma para las constricciones en la ley de escalamiento en los sistemas con calentamiento óhmico. Al introducir el calentamiento óhmico en el modelo no-colisional de Vlasov (Cuasineutral Electroestático de Vlasov), o en el modelo de fluido ideal, lo que se está suponiendo es que, aunque la resistividad es la fuente del calentamiento, esta no es importante en el mecanismo de pérdida de energía.

#### 2.1.4. Comparación con leyes de escalamiento empíricas.

En la tabla 4 se muestran algunas leyes de escalamiento empíricas actuales para el confinamiento en sistemas toroidales (Tokamaks).

De acuerdo a Daughney (1975), los datos del ATC, el cual utilizaba calentamiento óhmico, y otras maquinas más, estan bien representados por la ec. 4.5, donde se tiene que los índices correspondientes son:  $x = 1$ ,  $y = 1/4$  y  $z = 3/4$ . Sin embargo, se encuentra que estos valores para los índices  $x$ ,  $y$ ,  $z$  no satisfacen, ni siquiera aproximadamente, algunos de los criterios de la tabla 3.

Tabla 4. Leyes de escalamiento empíricas para el confinamiento en Tokomaks.

Modelo	Forma de $\tau$	Índices. Tabla 1 o 3
Neo-Alcator (ohmico)	$n a^{1.04} R^{2.04} q$	$x=1; y=1; z=3.08$
Merezkin-Mukhovatov	$n T^{-0.5} a^{0.25} R^{2.75} q$	$p=1; q=-1/2; r=1; s=3$
Goldston	$n^{-1} T^{-1} B^2 a^{1.26} R^{0.5} q^2$	$p=-1; q=-1; r=3; s=1.76$

En 1978 Hugill y Sheffield (1978), basandose en un conjunto de datos más comprensible para tokamaks, concluyen que los datos observados se ajustan muy bien por la ec. 4.5 con  $x = 0.61 \pm 0.08$ ,  $y = 1.89 \pm 0.13$  y  $z = 1.57 \pm 0.17$ . Pero de nuevo, se observa que estos valores son incompatibles con cualquiera de los modelos de la tabla 3, y que la discrepancia excede a las incertidumbres asociadas a  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Una posible fuente de la discrepancia podría ser que el transporte de energía en los tokamaks de esa época no estaba dominado por el transporte de plasma sino por la radiación debida a impurezas o átomos neutros. El análisis de estos efectos en la ley de escalamiento se discutirá en el capítulo siguiente al introducir parámetros adimensionales en el escalamiento de  $\tau$ .

Se pueden analizar ahora los resultados de la tabla 4. Al comparar la ley Neo-Alcator, (Liever, 1985), para tokamaks con calentamiento óhmico con los resultados de la tabla 3, se encuentra que esta es consistente al menos con los modelos Cuasineutral electrostático de Fokker-Planck, Cuasineutral  $\beta$ -altas de Vlasov, y Cuasineutral  $\beta$  altas de Fokker-Planck, los cuales no pueden ser diferenciados, considerando que sus constricciones características óhmicas son idénticas. La ley de Merezhkin-Mukhovatov (1978), satisface las constricciones características del modelo Cuasineutral  $\beta$  altas de Vlasov de la tabla 1. Además, se tiene que la ley de Goldston (1984), derivada a partir de los experimentos con un sustancial calentamiento auxiliar obedece razonablemente bien las constricciones del modelo Cuasineutral  $\beta$  altas de Fokker-Planck, y más aún, satisface igualmente bien las constricciones del modelo de fluido MHD Resistivo.

Este tipo de información que se obtiene al comparar las leyes de escalamiento empíricas con los modelos obtenidos a partir del argumento de invariancia de escala puede ser una guía importante para la elección de los modelos teóricos para el transporte de energía anómalo en el plasma. Las constricciones características reducen también el número de parámetros que se deben variar para establecer una ley de escalamiento empírica. De esta forma, si se cree que el confinamiento está descrito por el modelo Cuasineutral  $\beta$ -altas de Fokker-Planck, se podría establecer la naturaleza de la función correspondiente  $F(n, T, B, a)$ , al variar solamente los parámetros  $n$ ,  $T$  y  $B$  debido a que la variación del parámetro  $a$  está completamente determinada por la variación de estos mismos.

Además, al observar la tabla 3, para plasmas calentados óhmica-mente, en la cual la temperatura no es una variable independiente, los modelos muestran que  $B\tau$  es función de  $N = na^2$  y  $Ba^{5/4}$ , de tal forma que:

$$T = \frac{B^{2/5} (B\tau)^{2/5}}{n^{2/5} a^{4/5}} = \frac{1}{B^{2/5} a} \left[ \frac{B^4 a^5}{n^2 a^4} \right]^{1/5} (B\tau)^{2/5} = a^{-1/2} F(na^2, B^4 a^5).$$

Por lo que la temperatura se escala como:

$$T = a^{-1/2} F(na^2, B^4 a^5) \quad 4.16$$

### 3.- Similaridad y Aparatos Similares.

Se ha visto que, al aplicar el principio de invariancia de escala a las ecuaciones que describen un modelo particular del plasma, este impone constricciones en los índices correspondientes de la posible forma de la ley de escalamiento, reduciendo el número de parámetros que tienen que ser investigados empíricamente.

En el ejemplo expuesto en el capítulo II, referente a la forma en que un cuerpo se mueve a través de un fluido viscoso, se no-

ta que  $F = \rho v^2 a^2 f(R)$ . En este caso  $f$  es una función desconocida que depende de los detalles de la forma del cuerpo, sin embargo, el problema se ha reducido a encontrar la función  $f$ , la cual depende de un solo parámetro. Este resultado conduce al concepto de similitud, el cual afirma que si se conoce el valor de  $F$ , teórica o empíricamente, para un caso particular, entonces se conocen los resultados para una familia de situaciones con diferentes valores de los parámetros restates manteniendo constante el parámetro  $R$ .

De igual forma, si se confía en que las propiedades de confinamiento del plasma termonuclear están controladas por la física de un modelo particular, entonces es posible definir una familia de aparatos similares, para los cuales se podrán predecir sus propiedades de confinamiento. Esto es, considerando valores de  $n$ ,  $T$ ,  $B$  y  $a$  tales que los argumentos de la función  $F$  de la tabla 1 no varíen, se pueden considerar familias de aparatos de confinamiento, en los cuales la variación de  $\tau$  esté determinada por el principio de invariancia de escala.

En la descripción del confinamiento del plasma termonuclear se encuentra conveniente definir un parámetro conocido como triple producto de fusión (TPF), definido como  $f = n\tau T$ , mediante el cual se pueden determinar, en forma gráfica, los regímenes de operación de un aparato de fusión nuclear graficando el TPF contra la temperatura, usualmente tomados en la región central del plasma.

Se observa que la región en la cual se presentan las condiciones óptimas de reactor requieren altos valores del TPF y de altas temperaturas. Se encuentra que la forma en que se relacionan el TPF, la temperatura y el tiempo de confinamiento no se puede dar a priori, y que existe un compromiso de obtener grandes valores del

TPF, altas temperaturas y tiempos de confinamiento grandes.

Por ejemplo, en la fig. 1 se muestra una gráfica del TPF contra la temperatura para un número selecto de aparatos Tokamaks en el periodo 1965-1989, en la cual se observa la localización de los distintos aparatos en relación a la región de operación de reactor de fusión nuclear.

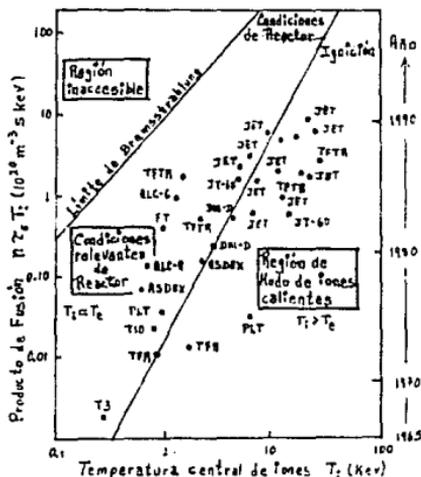


Fig. 1. Triple Producto de Fusión  $n_e n_i T_i$  vs. la temperatura central de Iones  $T_i$  para Tokamaks.

Cuando se estudia la similitud entre aparatos de confinamiento y se encuentran las dependencias de los parámetros relevantes que caracterizan el confinamiento, como son la temperatura  $T$ , el tiempo de confinamiento  $\tau$  y la densidad del plasma, representada por el TPF, se observa que al exigir que el TPF tenga valores altos el tiempo de confinamiento puede ser pequeño debido a que se garantiza que la temperatura también es alta. Esto no debe ser sorprendente debido al carácter no lineal del proceso de fusión nuclear controlada.

### 3.1.- Similitud entre aparatos de confinamiento.

(Connor y Taylor, 1979).

A continuación se revisarán los modelos más sencillos y se darán las características de la similitud que surgen entre los distintos aparatos de confinamiento.

#### 3.1.1. Modelos Cuasineutrales.

##### 3.1.1.1.- Modelo Cuasineutral Electroestático de Vlasov.

Si se supone que el confinamiento está bien descrito por el modelo Cuasineutral electroestático de Vlasov se tendrá que:

$$Br = F(T/a^2 B^2)$$

Se puede definir una familia de dos parámetros de aparatos similares, de tal forma que el argumento de  $F$  se mantenga constante, escalando las variables en la siguiente forma:

$$T \sim B^2 a^2 \tag{4.17}$$

En este caso  $Br = \text{cte}$  o  $\tau \sim B^{-1}$ .

Se puede notar que  $\beta = nT/B^2 \sim na^2$  no es invariante ante el escalado y que el producto de fusión  $f = nT\tau$  se escala como  $f \sim nBa^2$  sugiriendo que es mucho más ventajoso emplear aparatos grandes con campos intensos y altas densidades.

##### 3.1.1.2.- Modelo Electroestático de Fokker-Planck.

En este caso, la ley de escalamiento para  $\tau$  es:

$$B\tau = F\left(\frac{T}{B^2 a^2}, \frac{na^2}{B^4 a^5}\right)$$

Se define una familia de dos parámetros escalando  $T$  y  $n$ :

$$T \sim B^2 a^2 \text{ y } n \sim B^4 a^2 \tag{4.18}$$

De esta forma  $\tau \sim B^{-1}$ ,  $f \sim (Ba)^5$  y  $\beta \sim B^4 a^5$  y se observa que  $\beta$  no es invariante, y se sugiere la ventaja de grandes aparatos, junto con campos muy intensos.

### 3.1.1.3.- Cuasineutral $\beta$ -altas de Vlasov.

El confinamiento está representado por la ley de escalamiento

$$B\tau = F\left(na^2, \frac{T}{B^2a^2}\right).$$

La familia está descrita por el escalamiento:

$$n \sim a^{-2} \text{ y } T \sim B^2a^2. \quad 4.19$$

Se puede observar que  $\beta$  es invariante y que  $\tau \sim B^{-1}$  y  $f \sim B$ .

En este caso se sugiere la ventaja de aparatos con campos magnéticos intensos.

### 3.1.1.4.- Cuasineutral $\beta$ -altas de Fokker-Planck.

La ley de escalamiento que gobierna el confinamiento del plasma es la siguiente:

$$B\tau = F(na^2, Ta^{1/2}, Ba^{5/4}).$$

La familia de un parámetro se define al escalar las variables:

$$n \sim a^{-2}, T \sim a^{-1/2}, B \sim a^{-5/4}. \quad 4.20$$

De esta forma:  $\tau \sim B^{-1} \sim a^{5/4}$ ,  $f \sim a^{-5/4}$ , y  $\beta$  es invariante.

En este caso se sugiere la ventaja del diseño de aparatos compactos y campos intensos.

### 3.1.2. Modelos No cuasineutrales.

#### 3.1.2.1.- Electroestático de Vlasov.

El confinamiento está dado por:

$$B\tau = F(n/B^2, T/B^2a^2)$$

La familia está descrita por el escalamiento:

$$n \sim B^2 \text{ y } T \sim B^2a^2 \quad 4.21$$

Se observa que  $\beta$  no es invariante y que  $\tau \sim B^{-1}$  y  $f \sim B^2a^3$ .

Se sugiere la ventaja de aparatos grandes y campos intensos.

#### 3.1.2.2.- Electroestático de Fokker-Planck.

La ley de escalamiento para este modelo es:

$$B\tau = F(n/B^2, T/B^2a^2, Ba^{3/2})$$

La familia se determina por el escalamiento:

$$n \sim B^2, T \sim B^2a^2 \text{ y } B \sim a^{3/2} \quad 4.22$$

En este caso  $\beta$  no es invariante y  $\tau \sim a^{3/2}$  y  $f \sim a^{-5/2}$ .

De donde se sugieren aparatos compactos y campos intensos.

3.1.2.3.-  $\beta$  altas de Vlasov.

El confinamiento está dado por:

$$B\tau = F(n/B^2, T/T/B^2a^2, Ba)$$

La familia se determina con el escalamiento:

$$n \sim B^2, T \sim B^2a^2 \text{ y } B \sim a^{-1} \quad 4.23$$

Se observa que  $\tau \sim a$  y  $f \sim a^{-1}$ , de donde se sugieren aparatos compactos y campos intensos.

3.1.2.4.-  $\beta$  altas de Fokker-Planck.

La ley de escalamiento está dada por  $B\tau = F(n, T, B, a)$ .

Para este modelo no hay información.

3.1.3. Modelos de Fluido.

3.1.3.1.- MHD Ideal.

El confinamiento del plasma está determinado por la ley:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} F(nT/B^2).$$

La familia se define al escalar  $n$  y  $T$ :

$$T \sim B^2a^2 \text{ y } n \sim a^{-2} \quad 4.24$$

$\beta$  es invariante y  $\tau \sim B^{-1}$  y  $f \sim B$ .

Se recomiendan aparatos con campos magnéticos intensos.

3.1.3.2.- MHD Resistivo.

El confinamiento está descrito por la ley:

$$B\tau = (na^2)^{1/2} F(nT/B^2, Ta^{1/2})$$

La familia se determina con los escalamientos siguientes:

$$T \sim a^{-1/2} \text{ y } n \sim B^2 a^{1/2}$$

4.25

De esta forma  $\beta$  es invariante,  $\tau \sim B^{-1}$  y  $f \sim B$ .

Es conveniente el diseño de aparatos con campos magnéticos intensos.

### 3.2.- Similitud entre sistemas de confinamiento con calentamiento sustancial.

Se ha establecido también que, para los sistemas con calentamiento óhmico, la temperatura no es una cantidad independiente, de tal forma que se ve limitada la información que puede obtenerse a partir de las leyes de escalamiento empíricas, derivadas a partir de tales experimentos. Si se introduce la posibilidad de un calentamiento adicional dado por P esta restricción se remueve, y se puede explorar el escalamiento de  $\tau$  con respecto a la temperatura.

El papel del calentamiento adicional consiste solo en aumentar la temperatura del plasma en los sistemas de confinamiento y relajar el grado del escalamiento necesario para la ignición. Así, se puede considerar, en principio, una familia de máquinas en las cuales el calentamiento este dominado por la potencia de inyección P.

Como se tiene que la potencia P de calentamiento controla a la temperatura T a través de la relación

$$P = NaT/\tau,$$

4.26

es natural preferir a P como parámetro de escalamiento.

Se puede entonces elegir a P, N, I y a como el conjunto de variables que servirán para reexpresar los resultados de la tabla 1. En este caso  $N = na^2$  es la densidad lineal,  $I = Ba$  es la corriente en el plasma, y a es un parámetro lineal.

Tomando en cuenta la relación entre P y T, ec. 4.26, se reexpresarán los distintos resultados citados.

### 3.2.1. Modelos Cuasineutrales.

#### 3.2.1.1.- Cuasineutral Electrostático de Vlasov.

$$B\tau = F(T/B^2 a^2)$$

$$B\tau = F(PB\tau/NI^3) = F'(P/NI^3)$$

donde F' es una nueva función no determinada que sólo depende del argumento P/NI<sup>3</sup>, ya que se ha eliminado Bτ en el argumento de F.

La familia de aparatos similares está determinada por:

$$P \sim NI^3 \quad 4.27$$

El tiempo de confinamiento y la temperatura se escalan como:

$$\tau \sim \frac{a}{I} \sim a \left[ \frac{N}{P} \right]^{1/3} = \left[ \frac{na^5}{P} \right]^{1/3} \rightarrow n\tau \sim \left[ \frac{N^4}{a^3 P} \right]^{1/3},$$

$$T = \frac{P\tau}{Na} \sim \left[ \frac{P}{N} \right]^{2/3},$$

$$f = n\tau T \sim \left[ \frac{Pn^2}{a} \right]^{1/3} = \left[ \frac{PN^2}{a^5} \right]^{1/3}.$$

Se tiene que son convenientes los sistemas compactos con un intenso calentamiento.

#### 3.2.1.2.- Cuasineutral Electrostático de Fokker-Planck.

$$B\tau = F\left(\frac{N}{I^4 a}, \frac{I^4 a}{N} \frac{P}{I^7 a} B\tau\right) \rightarrow \tau = \frac{a}{I} F'\left(\frac{N}{aI^4}, \frac{P}{aI^7}\right).$$

La familia se define al escalar a N y P:

$$N \sim aI^4 \text{ y } P \sim aI^7, \quad 4.28$$

$$\tau \sim \left[ \frac{na^2}{I^4 a} \right] \frac{I^3 a^2}{na^2} \rightarrow n\tau \sim \left[ \frac{P}{a} \right]^{3/7},$$

$$T = \frac{P}{I^8 a^2} a(n\tau) = n\tau \frac{P}{I^7 a} \frac{1}{I} \rightarrow T \sim \left[ \frac{P}{a} \right]^{2/7}.$$

De esta forma se tiene que el producto de fusión se escala como:

$$f = n\tau T \sim (P/a)^{5/7}.$$

En este caso son ventajosos los sistemas compactos con intenso calentamiento.

### 3.2.1.3.- Cuasineutral $\beta$ -altas de Vlasov.

$$B\tau = F(na^2, T/B^2a^2) = F(N, PB\tau/NI^3) \rightarrow \tau = (a/I)F'(N, P/I^3)$$

Se puede definir una familia de aparatos similares si se exige que los valores de  $N$  y  $P/I^3$ , permanezcan fijos de aparato en aparato.

$$N = \text{cte. y } P \sim I^3, \quad 4.29$$

$$\tau \sim \frac{P^{1/3} na^2}{I na P^{1/3}} \rightarrow n\tau \sim 1/aP^{1/3},$$

$$T \sim \frac{Pa}{N^2} \frac{1}{aP^{1/3}} \sim P^{2/3} \rightarrow T \sim P^{2/3},$$

Así,  $f \sim P^{1/3}/a$ , lo cual muestra la ventaja de aparatos compactos con un calentamiento intenso.

### 3.2.1.4.- Cuasineutral $\beta$ -altas de Fokker-Planck.

En este caso se tiene que:

$$B\tau = F(na^2, Ta^{1/2}, Ba^{5/4}) = F\left(N, \frac{(B\tau)^2 P^2}{I^3} \frac{aI^4}{N^2 I^4}, aI^4\right) = F\left(N, (B\tau) \frac{2P^2}{I^2}, I^4 a\right),$$

$$\tau \sim \frac{a}{I} F'\left(N, \frac{P}{I^3}, I^4 a\right).$$

La familia queda determinada al exigir que  $N$ ,  $P/I^3$  e  $I^4 a$  sean constantes:

$$P \sim I^3, \quad a \sim I^4, \quad 4.30$$

$$\tau \sim \frac{B^3 a^5}{B^4 a^5} \sim \frac{na^2}{I^4 a} \frac{P}{n} \rightarrow n\tau \sim P,$$

$$T = \frac{Pn\tau a}{N^2} \sim \frac{P^2 a}{N^2} \rightarrow T \sim P^2 a.$$

Por lo que  $f = n\tau \sim P^3 a$ . Esto muestra la ventaja de aparatos grandes con intenso calentamiento.

### 3.2.2. Modelos No Cuasineutrales.

#### 3.2.2.1.- Electrostático de Vlasov.

$$B\tau = F(n/B^2, T/a^2 B^2) \rightarrow B\tau = F'(N/I^2, P/NI^3)$$

La familia está dada por:  $N \sim I^2$  y  $P \sim I^5$ .

$$\tau \sim (a^5/P)^{1/5}; T \sim P^{2/5} \text{ y } f \sim (P^3/a^5)^{1/5}$$

Se recomiendan sistemas compactos con intenso calentamiento.

#### 3.2.2.2.- Electrostático de Fokker-Planck.

$$B\tau = F(n/B^2, T/a^2 B^2, Ba^{3/2}) \rightarrow B\tau = F'(N/I^2, P/I^5, Ia^{1/2})$$

La familia está dada por:  $N \sim I^2$ ;  $P \sim I^5$  y  $I \sim a^{1/2}$ .

$$\tau \sim a/P^{1/5}; T \sim a \text{ y } f \sim P^{1/5}.$$

Se recomiendan sistemas con intenso calentamiento.1

#### 3.2.2.3.- $\beta$ altas de Vlasov.

$$B\tau = F(n/B^2, T/a^2 B^2, aB) \rightarrow B\tau = F'(N/I^2, P/NI^3, I)$$

La familia está dada por:  $N \sim I^2$ ;  $P \sim NI^3$  e  $I$  es invariante.

No hay información.

#### 3.2.2.4.- $\beta$ altas de Fokker-Planck.

No hay información.

### 3.2.3. Modelos de fluido.

#### 3.2.3.1.- MHD Ideal.

$$B\tau = (na^2)^{1/2} F(nT/B^2) \rightarrow B\tau = N^{1/2} F'(P/I^3)$$

La familia se determina:  $P \sim I^3$ .

$$\tau \sim aN^{1/2}/P^{1/3}; T \sim P^{2/3}/N^{1/2} \text{ y } f \sim naP^{1/3}$$

Se recomiendan sistemas grandes con intenso calentamiento.

#### 3.2.3.2.- MHD Resistivo.

$$B\tau = (na^2)^{1/2} F(nT/B^2, Ta^{1/2}) \rightarrow B\tau = N^{1/2} F'(P/I^3, Pa^{1/2}/NI)$$

La familia está dada por:  $P \sim I^3$ ;  $N \sim I^2 a^{1/2}$ .

$$\tau \sim a^{5/4}; T \sim P^{1/3} a^{1/4} \text{ y } f \sim Pa^{1/2}.$$

Se recomiendan aparatos grandes con intenso calentamiento.

### 3.3.- Aparatos con calentamiento óhmico.

Para los aparatos con calentamiento óhmico se pueden obtener algunos resultados interesantes.

En estos sistemas la temperatura está determinada por la relación:

$$T^{5/2} \sim \frac{B^2 \tau}{na^2} \quad 4.31$$

Esta expresión puede reescribirse en términos de P. La densidad de potencia de calentamiento está dada por  $P' = \eta J^2$ . Como  $\eta$  es de Spitzer  $\eta \sim T^{-3/2}$  y  $J \sim I/a^2$  se tiene que  $P' \sim I^2/T^{3/2}a^4$ . Así,

$$P \sim \frac{I^2}{T^{3/2}a} \quad 4.32$$

Se puede ver ahora a que modelo particular del plasma corresponde esta expresión para la potencia de calentamiento.

A partir de la expresión para P, ec. 4.32, se obtiene que:

$$T \sim \left[ \frac{I^3}{P} \right]^{2/3} \frac{I^2}{(I^4 a)^{2/3}}$$

Como se tiene que  $P = NaT/\tau$ :

$$\tau \sim \frac{a}{I} N \left[ \frac{I^3}{P} \right]^{5/3} \frac{1}{(I^4 a)^{2/3}}$$

A partir de esta relación se observa que es necesario exigir que los parámetros  $N$ ,  $P/I^3$  y  $aI^4$  sean constantes al moverse de aparato en aparato. Pero estas condiciones determinan la familia correspondiente al modelo Cuasineutral  $\beta$  altas de Fokker-Planck. Esto implica que la familia de sistemas que corresponde al modelo Cuasineutral  $\beta$  altas de Fokker-Planck determina a los sistemas con calentamiento óhmico. Una familia de experimentos calentados óhmicamente debe de mantener constantes los valores de los parámetros anteriores. Dentro de esta familia, el principio de invariancia de

termina que, al ser constante  $P/I^3$  y  $P - I^2/T^{3/2}a$ :

$$\frac{P}{I^3} - \frac{1}{T^{3/2}aI} = \frac{1}{(Ia^{1/4})} \frac{1}{T^{3/2}a^{3/4}} = \text{cte.}$$

De esta forma:

$$T^{3/2} - a^{-3/4} \text{ ó bien } T - a^{-1/2}, \quad 4.33$$

$$\tau - a/I = \frac{na^2}{n(Ia^{1/4})a^{3/4}}$$

por lo que:  $nt - a^{-3/4}$  y  $f - a^{-5/4}$ .

En este caso se indica que es posible un mejor funcionamiento en aparatos compactos con campos intensos.

### 3.4.- Escalamiento fuera de las familias.

La discusión anterior se basa en el concepto de familias, las cuales surgen al exigir que los argumentos de la función  $F$  del escalamiento se mantengan constantes. Aunque las familias de aparatos de confinamiento similares obtenidas anteriormente indican ciertas ventajas para el diseño de experimentos, estas no son necesariamente óptimas. Estas condiciones requerirían el escalamiento directo entre familias, el cual requiere algún conocimiento de la función  $F$  sobre un rango de sus parámetros. De esta forma, se puede extender el concepto de Similaridad, de un conjunto de valores de sus argumentos, a un rango de estos.

Vinculado a esto, es importante observar que las expresiones para  $\tau$ , obtenidas a partir del principio de invariancia de escala, permiten obtener información del escalamiento con respecto al tamaño del aparato de confinamiento a partir de los datos tomados en una máquina simple de tamaño fijo.

Se puede analizar el caso de los sistemas calentados óhmicamente, en los cuales:

$$\tau = aI^{-1}F_1(na^2, I^4a).$$

$$T = \frac{P\tau}{Na} = \frac{P}{NI} F_1 = \frac{P}{I} F_1 = \frac{I^5}{I^{3/2}I^4a} F_1 = \frac{I^5}{T^{3/2}} F_1.$$

De esta forma se tiene que:

$$T = I^2 F_1^{2/5}(na^2, I^4a).$$

El escalamiento correspondiente a la temperatura tiene la forma:

$$T = I^2 F_2(na^2, I^4a). \quad 4.34$$

Las funciones  $F_1$  y  $F_2$  pueden ser determinadas, al menos sobre una parte del rango de sus argumentos, a partir de las mediciones de  $\tau$  y  $T$ , como funciones de  $n$  e  $I$ , para un sólo valor de  $a$ . De esta forma, las observaciones en un aparato determinado, por ejemplo el Al cator, tienen una naturaleza universal y pueden ser aplicadas a todas las máquinas similares, de distinto tamaño.

El comportamiento de una máquina de radio  $a$ , a la corriente  $I$  y  $n$  como densidad, está dado en términos del comportamiento de una máquina similar de radio  $a_0$ , por:

$$\tau_0 = \tau_0(na_0^2, Ia_0^{1/4}) \sim a_0^{-3/4}/n,$$

$$\tau_1 = \tau_1(na_1^2, Ia_1^{1/4}) \sim a_1^{-3/4}/n.$$

De esta forma:

$$\frac{\tau_1}{\tau_0} = \left[ \frac{a_1}{a_0} \right]^{-3/4}. \quad 4.35$$

Ahora:

$$\frac{\tau_0(na_0^2, Ia_0^{1/4})}{\tau_1(na_1^2, Ia_1^{1/4})} = \frac{\tau_0(na_0^2/a_1^2, Ia_0^{1/4}/a_1^{1/4})}{\tau_1(n, I)} = \left[ \frac{a_1}{a_0} \right]^{3/4}.$$

Este paso se justifica por el hecho de que el confinamiento se puede expresar como una ley de potencias:  $n^p P^q I^r a^s$ . Entonces:

$$\tau_1(n, I) = \left[ \frac{a_0}{a_1} \right]^{3/4} \tau_0 \left[ n \frac{a_0^2}{a_1^2}, I \frac{a_0^{1/4}}{a_1^{1/4}} \right].$$

El comportamiento de una máquina de radio  $a_1$ , a la corriente  $I$  y densidad  $n$  está dado en términos del comportamiento de una máquina similar de radio  $a_0$  por:

$$\tau_1(n, I) = (a_0/a_1)^{3/4} \tau_0 \left[ n \frac{a_0^2}{a_1^2}, I \frac{a_0^{1/4}}{a_1^{1/4}} \right] \quad 4.3f$$

$$T_1(n, I) = (a_0/a_1)^{1/2} T_0 \left[ n \frac{a_0^2}{a_1^2}, I \frac{a_0^{1/4}}{a_1^{1/4}} \right]. \quad 4.3g$$

Se podrá notar que el comportamiento de la "nueva" máquina debe estar, usualmente, relacionado al de la máquina primaria en un régimen de operación diferente. Como los distintos sistemas se hallan usualmente en regímenes de operación diferentes hay una limitación práctica en la extrapolación ingenua.

#### 4. Interpretación. (Análisis Dimensional). (Kadomtsev, 1975).

El principio de invariancia de escala aplicado al conjunto de ecuaciones básicas que describen a un modelo particular del plasma, se presenta como una herramienta útil en el estudio del confinamiento magnético en la Física de Plasmas, ofreciendo un marco general de referencia en el cual es posible discutir las distintas propuestas, teóricas o empíricas, de obtención de las relaciones entre los parámetros relevantes para el confinamiento. La forma que adopta cada cantidad física relevante refleja ciertas características generales del modelo particular utilizado en el análisis.

Se ha observado también la relación que existe entre el Análisis Dimensional y el Principio de Invariancia de Escala, y la ventaja de este ante el análisis dimensional. Y la relación entre estas dos aproximaciones ofrece la posibilidad de una interpretación de las constricciones obtenidas en cada modelo, en términos

de un conjunto de parámetros adimensionales característicos del sistema de confinamiento (Kadomtsev, 1975).

La interpretación de los resultados obtenidos se puede dar en los términos siguientes: Al estudiar un plasma termonuclear puro, totalmente ionizado, la física inherente a este sistema puede ser descrita por un conjunto de cuatro parámetros adimensionales, los cuales están relacionados directamente con las variables de control del sistema ( $n, T, B, a$ ). Estos parámetros son  $\rho_i/a$ ,  $\lambda_e/a$ ,  $\beta$ ,  $\lambda_D/a$ , donde  $\rho_i$  es el radio de Larmor del ión,  $\lambda_e$  es la trayectoria libre media entre colisiones del electrón,  $\lambda_D$  es la longitud de Debye del electrón,  $\beta$  es la razón de la presión del plasma a la presión del campo magnético, conjuntamente con las razones geométricas  $q$ ,  $a/R$  en un sistema de confinamiento toroidal, y las razones  $T_e/T_i$  y  $m_e/m_i$ , donde  $q$  es el factor de seguridad y  $a/R$  es la razón de aspecto del sistema. Al estar relacionados los cuatro parámetros adimensionales con los parámetros de control del sistema, el tiempo de confinamiento de energía puede ser descrito en la forma:

$$\tau = \frac{m}{e} F \left( \frac{\rho_i}{a}, \frac{\lambda_e}{a}, \beta, \frac{\lambda_D}{a} \right) \quad 4.38$$

Esta forma del tiempo de confinamiento ofrece la posibilidad de una interpretación de los resultados anteriores en términos del análisis dimensional.

La ec. 4.38 representa la forma más general para el tiempo de confinamiento  $\tau$  en términos de las cuatro variables independientes adimensionales, y está relacionada con el modelo más general estudiado en el cap. III, Modelo  $\beta$ -altas de Fokker-Planck, en el cual se encuentran cuatro variables independientes determinando a  $\tau$ .

En los modelos Cuasineutrales, Electroestático y  $\beta$ -altas, se ha incluido la hipótesis de neutralidad de carga en el plasma, ob-

teniéndose que existen solo tres variables independientes determinan a  $\tau$ , y esto se puede explicar al pensar que la variable  $\lambda_D/a$  de la ec. 4.38 ha sido removida debido a la suposición de neutralidad de carga.

En los modelos de Vlasov es posible remover la variable  $\lambda_D/a$  de la ec. 4.38, debido a que describen a plasmas no colisionales reduciendo el número de parámetros a solo dos.

Por otro lado, la suposición de un modelo Electroestático remueve a la variable  $\beta$ , dejando a  $\tau$  solo en función de una variable  $\rho_i/a$ .

De esta pequeña discusión se puede observar que al introducir hipótesis adicionales en un modelo determinado del plasma es posible reducir el número de parámetros independientes en la expresión para  $\tau$ , reduciendo el trabajo experimental, (La determinación de leyes de escalamiento empíricas).

Esta correspondencia entre los parámetros independientes de la ec. 4.31 con los distintos modelos del plasma no es única, debido a que depende de la forma en que son elegidos los parámetros independientes. Por ejemplo: Si la densidad lineal  $(e^2/mc^2)na^2 = N$  se tomara como una de las variables en lugar de  $\rho_i^2/a^2$ ,  $\beta$  aparecería en la ley de escalamiento del modelo Cuasineutral electrostático de Vlasov, aunque este modelo no considere a  $\beta$ .

Debido a que es posible expresar el radio de Larmor del ión  $\rho_i$  en terminos del parámetro  $\beta$  y de la longitud  $d$ , donde  $d$  es la distancia en la cual una onda electromagnética ve reducida su amplitud en un 37% y se define como  $d = c/w_{pe}$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $w_{pe}$  es la frecuencia del plasma debida a los elec-

trones,  $\rho_1^2 = \beta(m_i/m_e)/d^2$ , la ley de escalamiento para el modelo cuasineutral  $\beta$ -altas de Vlasov se puede relacionar a la física de  $d/a$  y  $\beta$  en lugar  $\rho_1/a$  y  $\beta$ . Se puede considerar que los modelos electrostáticos dependen de  $\beta$  si se mantiene ingenuamente a  $d$  como parámetro independiente fijo en lugar de  $\rho_1$ .

Para los modelos de fluido MHD Ideal y Resistivo, los cuales no se refieren a las características o aspectos de las partículas individuales, se tienen solo dos parámetros adimensionales  $\beta$  y  $S$ , donde  $S$  es el número de Lundquist, el cual se define como la razón del tiempo de difusión resistivo  $\tau_r = a^2/\eta$  y el tiempo transiente Alfvén  $\tau_A = a\rho^{1/2}/B$ . De esta forma, el tiempo de confinamiento se puede expresar como:  $B\tau = (m_i n)^2 a F(\beta, S)$ , observándose que  $\tau$  es función de solo dos variables independientes, o posee dos exponentes libres. Si se considera la restricción al modelo ideal, la variable correspondiente a la escala de tiempo resistivo es removida, y la ley de escalamiento tendrá solo un exponente libre.

Debido a que se espera que las propiedades del confinamiento dependan de los valores característicos de parámetros físicamente significativos al sistema de confinamiento como  $\rho_1/a$ ,  $\lambda_e/a$  y  $\beta$ , es muy importante establecer leyes empíricas dentro de rangos relevantes de estas cantidades y variar una a la vez, manteniendo las otras fijas.

Como lo hizo notar Kadomtsev (1975), algunas variables, tales como  $\rho_1/a$  y  $\lambda_e/a$ , no pueden variar apreciablemente al moverse de los experimentos existentes a los parámetros de Reactor, por lo que pueden no ser necesarias grandes extrapolaciones de las leyes de escalamiento empíricas.

## CAPITULO V

### Leyes de escalamiento con las razones geometricas y cantidades dimensionales

---

(Connor y Taylor, 1984)

En este capítulo se estudia la forma en que ciertos factores geométricos entran en el escalamiento, en el límite de razón de aspecto grande para Tokamaks y el límite cilíndrico para Pinch. Así como el escalamiento en términos del parámetro  $Z$  (carga iónica), al estudiar los efectos de la Radiación e Impurezas en el escalamiento.

.....

En el capítulo anterior se mostró la forma en que las propiedades de invariancia de forma de las ecuaciones básicas del plasma bajo transformaciones de escala conducen a ciertas constricciones en la forma de las leyes de escalamiento para el confinamiento, y como estas proporcionan el marco general para la discusión de las leyes de escalamiento existentes, teóricas y empíricas.

Sin embargo, en esta aplicación a las ecuaciones básicas, las constricciones no proporcionan información sobre las características geométricas del sistema, como son la razón de aspecto ( $a/R$ ), el factor geométrico ( $q$ ), la carga iónica ( $Z$ ), etc. De esta forma, la idea del escalamiento del tiempo de confinamiento, como técnica útil en el estudio del plasma termonuclear, se presenta como poco eficaz si se introducen más procesos físicos en las ecuaciones básicas del plasma. En este caso, la idea de invariancia de escala pre

senta dificultades análogas al Análisis Dimensional.

Sin embargo, el principio de invariancia de escala, el cual puede ser considerado como una sistemática aproximación al análisis dimensional, tiene una característica adicional importante. Es posible obtener mayor información del conjunto de ecuaciones si se introducen ciertas características adicionales acerca del confinamiento o de la dinámica del proceso. Es posible determinar características del escalamiento con respecto a cantidades adimensionales, tales como el factor geométrico, al especificar el tipo de geometría que corresponde a dicho sistema y el ordenamiento que se emplea, así como introducir hipótesis acerca del proceso.

De esta forma se discutirán los límites Tokamak y RFP's y los efectos de radiación e impurezas.

#### 1.- Límite Tokamak.

El conjunto de ecuaciones conocidas como ecuaciones MHD Reducidas en el límite Tokamak y el método sobre el cual se basan han probado ser una herramienta muy útil para el tipo de cálculos numéricos, lineales o no lineales, que se presentan al estudiar el caso de la turbulencia en un plasma termonuclear.

La simplificación de las ecuaciones Magnetohidrodinámicas resistivas para un Tokamak en el límite de Razón de Aspecto Grande ( $a/R \ll 1$ ) fue realizada por H. R. Strauss (1983) (ver apéndice A), el cual, al tomar el parámetro  $c = a/R$  como parámetro de expansión de las ecuaciones, ordenó un conjunto de parámetros característicos del sistema en términos de  $c$ , otorgando rangos de importancia para los procesos presentes en el plasma:

$$c = a/R - B_p/B_t - P/B_t^2 \quad 5.1$$

donde  $B_p$  y  $B_t$  son los campos magnéticos poloidal y toroidal en el plasma,  $P$  es la presión del plasma,  $a$  y  $R$  son los radios menor y mayor del Tokamak.

Como se está trabajando con un sistema de confinamiento que ofrece una geometría toroidal, se introduce el sistema coordenado  $(r, \theta, \zeta)$ , donde  $r$  y  $\theta$  son coordenadas polares en el plano poloidal, de tal forma que  $R = R_0 + r \cos \theta$  y  $\zeta$  es el ángulo toroidal. En este sistema coordenado, el campo magnético poloidal y la velocidad de fluido poloidal se expresan en términos de las funciones de flujo  $\phi$  y  $\psi$  en la forma:

$$B_p = \frac{\nabla \psi \times \hat{e}}{R_0} \quad \text{y} \quad v_p = \frac{\hat{e} \times \nabla \phi}{B_0} \quad 5.2$$

donde  $B_0$  es el campo magnético toroidal en  $R = R_0$  y  $\hat{e}$  es el vector unitario toroidal.

La función de flujo  $\psi$  satisface la ecuación de inducción:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -R_0 B_0^{-1} B \cdot \nabla \phi + \eta \nabla_{\perp}^2 \psi. \quad 5.3$$

La función de flujo  $\phi$  satisface la ecuación de Vorticidad:

$$\rho R_0 B_0^{-1} \frac{d}{dt} \nabla_{\perp}^2 \phi = -(B \cdot \nabla) \nabla_{\perp}^2 \psi - \frac{\hat{e} \cdot \nabla \times (R^2 \nabla P)}{R_0}. \quad 5.4$$

Como en el ordenamiento de razón de aspecto grande se tiene que  $v \cdot v$  es pequeña, el conjunto de ecuaciones reducidas se cierra con la ecuación de convección de la presión:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad 5.5$$

donde:

$$B \cdot \nabla = B_0 R_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} + B_p \cdot \nabla$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_p \cdot \nabla$$

Además  $\eta$  es la resistividad y  $\rho$  es la densidad.

El conjunto de ecuaciones 5.3-5 representa un modelo para el confinamiento del plasma en un Tokamak de razón de aspecto grande,

con el cual se investigará el transporte anómalo en este tipo de sistemas.

A continuación se determinan las transformaciones de escala, de las variables dependientes e independientes, que permiten la invariancia de escala del conjunto completo de ecuaciones.

La transformación general de escala es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}: t &\rightarrow \lambda_1 t; B_0 \rightarrow \lambda_2 B_0; a \rightarrow \lambda_3 a; R_0 \rightarrow \lambda_4 R_0; \phi \rightarrow \lambda_5 \phi; \psi \rightarrow \lambda_6 \psi; \\ \eta &\rightarrow \lambda_7 \eta; \rho \rightarrow \lambda_8 \rho; P \rightarrow \lambda_9 P. \end{aligned}$$

Al aplicar la transformación  $\mathfrak{E}$  a las ecs. 5.3-5 y exigir que estas conserven su forma ante el cambio de escala se obtienen las relaciones entre los parámetros de escala:

$$\begin{aligned} \lambda_2 \lambda_3^2 &= \lambda_6; \lambda_1 \lambda_5 = \lambda_2 \lambda_3^2; \lambda_1^{-1} \lambda_6 = \lambda_5 = \lambda_3^{-2} \lambda_6 \lambda_7, \\ \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-2} \lambda_4 \lambda_5 \lambda_8 &= \lambda_2 \lambda_3^{-2} \lambda_4^{-1} \lambda_6 = \lambda_3^{-2} \lambda_4 \lambda_9, \end{aligned}$$

cuya solución determina las transformaciones de escala que permiten invariancia de forma en las ecuaciones características de este modelo, las cuales pueden representarse en una sola:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}': t &\rightarrow \lambda_1 t; B_0 \rightarrow \lambda_2 B_0; a \rightarrow \lambda_3 a; R_0 \rightarrow \lambda_4 R_0; \phi \rightarrow \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3^2 \phi; \\ \psi &\rightarrow \lambda_2 \lambda_3^2 \psi; \eta \rightarrow \lambda_1^{-1} \lambda_3^2 \eta; \rho \rightarrow \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_4^{-2} \rho; P \rightarrow \lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_4^{-2} P; \theta \rightarrow \theta. \end{aligned}$$

Como existen cuatro parámetros de escala independientes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  existen cuatro transformaciones de escala que permiten la invariancia de forma de las ecuaciones. El tiempo de confinamiento  $\tau$  se puede expresar como función de los parámetros característicos del plasma y del sistema de confinamiento:  $P, B_0, \eta$ , y  $\rho$ , junto con los parámetros geométricos  $a, R_0$  y  $q$  en la forma funcional:

$$\tau = \tau(P, B_0, \eta, \rho, a, R_0, q).$$

Esta relación se expresa como una serie en la forma:

$$\tau = \sum_{b,c,d,e,f,g,h} C_{b,c,d,e,f,g,h} P^b B_0^c \eta^d \rho^e a^f R_0^g q^h. \quad 5.6$$

Al aplicar la transformación de escala  $\mathfrak{E}'$  a la expresión 5.6 y exi

gir la invariancia de forma de esta ante el cambio de escala, se obtiene la forma en que  $\tau$  se escala, determinando las relaciones entre los índices de escala que determinan la forma funcional del tiempo de confinamiento:

$$\tau \rightarrow \lambda_1 \tau = \sum C \lambda_1^{-d+2e} \lambda_2^{2b+c+2e} \lambda_3^{2b+2d+f} \lambda_4^{-2b+g-2e} P^b B^c \eta^d \rho^e a^f R^g q^h.$$

Exigiendo la invariancia de forma se tiene que:

$$-d + 2e = 1; 2b + c + 2e = 0; 2b + 2d + f = 0; -2b + g - 2e = 0.$$

La solución a este sistema de ecuaciones es:

$$d = 2e - 1; c = -2e - 2b; f = -2b - 4e + 2; g = 2e + 2b,$$

de tal forma que el tiempo de confinamiento se expresará como:

$$\tau = \frac{a^2}{\eta} \sum_{b,e,h} C_{b,e,h} \left[ \frac{PR_0^2}{B_0^2 a^2} \right]^b \left[ \frac{\eta \rho^{1/2} R_0}{B_0 a^2} \right]^{2e} q^h. \quad 5.7$$

Esta expresión muestra que existen tres índices libres en la ley de escalamiento como ley de potencias.

La forma más general en que se puede expresar a  $\tau$ , es considerar una función, no determinada aún, que depende sólo de los argumentos correspondientes a los índices libres en la expresión 5.7:

$$\tau = \frac{a^2}{\eta} F \left( \frac{P}{B_0^2} \frac{R_0^2}{a^2}, \frac{\rho^{1/2} R_0 \eta}{B_0 a^2}, q \right), \quad 5.8$$

donde F es una función desconocida.

Es posible expresar a  $\tau$  en una forma más adecuada utilizando parámetros alternativos. Número de Lundquist  $S = a^2 B_0 / \eta \rho^{1/2} R_0 q$  que representa la razón del tiempo de difusión resistivo  $\tau_R = a^2 / \eta$  al tiempo de tránsito poloidal de Alfvén  $\tau_A = \rho^{1/2} R_0 q / B_0$  y  $\beta = 2P / B_0^2$ .

$$\tau = \tau_R F(\beta / c^2, S, q) \quad 5.9$$

Si se hubiera considerado el conjunto completo de ecuaciones del modelo de fluido resistivo, la expresión para  $\tau$  sería:

$$\tau = \tau_R F(\beta, S, q, c) \quad 5.10$$

Por lo que no se hubiera obtenido información alguna sobre la geometría del sistema de confinamiento, y ésta se reflejaría como una constricción extra en la ley de escalamiento.

La forma funcional para  $\tau$  expresada en la ec. 5.9 es incompatible con el transporte clásico ( $\tau \sim \tau_R/\beta$ ) y con el transporte de Pfirsch-Schüller ( $\tau \sim \tau_R/\beta q^2$ ), de tal forma que se puede decir que estos procesos no están descritos por el conjunto de ecuaciones reducidas.

## 2.- Límite RFP's.

Existe un límite análogo al empleado en la reducción de las ecuaciones MHD Resistivas para el caso de Tokamaks en el límite de razón de aspecto grande, el cual es apropiado para definir un conjunto de ecuaciones reducidas que describen el comportamiento de un plasma termonuclear en los sistemas de confinamiento helicoidales, y a partir del cual es posible estudiar la turbulencia de los modos  $g$  y de las ondas de deriva resistivas.

En el apéndice C, se describe detalladamente la forma en que son reducidas las ecuaciones MHD Resistivas en el límite RFP, (límite para sistemas de confinamiento helicoidal).

La reducción de las ecuaciones MHD Resistivas, para sistemas de confinamiento helicoidales (RFP), o en el límite Stellarator se lleva a cabo al suponer que la longitud de onda del campo magnético helicoidal aplicado es lo suficientemente corta como para que sus efectos puedan ser promediados usando el método de dos escalas de longitud (Strauss, 1980). Para esto se introduce una geometría toroidal con una métrica del tipo:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (1 + x/R_0)^2 dz^2 \quad 5.11$$

donde  $R = R_0 + x$  es el radio mayor del toro en  $x = 0$ ,  $x = r \cos \theta$  y  $z = R_0 \zeta$ , donde  $\zeta$  es un ángulo toroidal y  $z$  es el vector unitario toroidal. Se supone además que el campo magnético tiene la forma:

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z} + \delta \nabla \phi + \delta^2 (\nabla A x z + B_2 z) \quad 5.12$$

De esta forma, el parámetro de expansión  $\delta = c^{1/2}$  mide la intensidad relativa del campo magnético derivado del potencial escalar  $\phi$  con el campo principal  $B_0$ . Se tiene que  $c$  es el inverso de la razón de aspecto,  $c = (R - R_0)/R_0$ .

De esta forma, la función de flujo de la velocidad satisface la ecuación de Vorticidad:

$$\frac{R_0}{B_0} \frac{d}{dt} \Delta^2 \phi = -\mathbf{B} \cdot \nabla \nabla^2 \psi + R \nabla \Omega x \nabla P \cdot z. \quad 5.13$$

La función de flujo satisface la ecuación de inducción:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{R}{B_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \phi + \eta \nabla^2 \psi. \quad 5.14$$

El conjunto de ecuaciones se cierra con la ecuación de convección de la presión:

$$\frac{dP}{dt} = 0. \quad 5.15$$

En estas ecuaciones se incluyen los siguientes términos:

Derivada paralela, promediada a lo largo del campo magnético:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla = \delta^2 B_0 \frac{\partial}{\partial t} + \delta^2 \nabla \psi x z \cdot \nabla. \quad 5.16$$

Promedio del flujo magnético:

$$\psi = A - \frac{1}{2} B_0^{-1} \overline{\nabla \langle \phi \rangle x \nabla \phi \cdot \hat{z}}. \quad 5.17$$

Término de curvatura:

$$\Omega = 2x/R_0 + B_0^{-2} \overline{(\nabla \phi)^2}. \quad 5.18$$

donde  $A$  es la componente  $z$  del potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$ .

Como ejemplo adicional, se describirá la forma en que se escala el tiempo de confinamiento  $\tau$  con los parámetros adimensionales o factores geométricos para el caso de los sistemas de confinamiento.

to helicoidales.

Se aplica el principio de invariancia a las ecs. 5.13-18.

La transformación general de escala es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}: t &\rightarrow \lambda_1 t; B_0 \rightarrow \lambda_2 B_0; a \rightarrow \lambda_3 a; R_0 \rightarrow \lambda_4 R_0; \Phi \rightarrow \lambda_5 \Phi; \Psi \rightarrow \lambda_6 \Psi; \\ \eta &\rightarrow \lambda_7 \eta; \rho \rightarrow \lambda_8 \rho; P \rightarrow \lambda_9 P. \end{aligned}$$

En este caso, el factor de curvatura se escala como:  $\Omega \rightarrow \lambda_3^2 \Omega$ .

Al aplicar la transformación de escala general a las ecuaciones anteriores y exigir la invariancia de forma de estas ante el cambio de escala, se obtiene un conjunto de relaciones entre los parámetros de escala, las cuales definen la forma de la transformación de escala apropiada a este modelo.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 \lambda_3^2 \lambda_5^{-1}; \lambda_6 \lambda_1^{-1} = \lambda_5 = \lambda_6 \lambda_7 \lambda_3^{-2}; \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_8 &= \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 = \lambda_4 \lambda_9; \lambda_6 / \lambda_2 \lambda_3^2. \end{aligned}$$

La solución correspondiente a este sistema de ecuaciones es:

$$\lambda_5 = \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3^2; \lambda_6 = \lambda_2 \lambda_3^2; \lambda_7 = \lambda_1^{-1} \lambda_3^2; \lambda_8 = \lambda_1^2 \lambda_3^2 \lambda_4^{-2}; \lambda_9 = \lambda_2^2 \lambda_4^{-2}.$$

Existen cuatro parámetros de escala independientes, de tal forma que existirán cuatro transformaciones de escala que permiten la invariancia de forma de las ecuaciones anteriores.

La transformación que permite la invariancia de escala es:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}': t &\rightarrow \lambda_1 t; B_0 \rightarrow \lambda_2 B_0; a \rightarrow \lambda_3 a; R_0 \rightarrow \lambda_4 R_0; \Phi \rightarrow \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3^2 \Phi; \\ \Psi &\rightarrow \lambda_2 \lambda_3^2; \eta \rightarrow \lambda_1^{-1} \lambda_3^2 \eta; \rho \rightarrow \lambda_1^2 \lambda_3^2 \lambda_4^{-2} \rho; P \rightarrow \lambda_2^2 \lambda_4^{-2} P; \Omega \rightarrow \lambda_3^2 \Omega. \end{aligned}$$

Se supone ahora que el tiempo de confinamiento puede ser expresado como función de los parámetros y variables  $P$ ,  $B_0$ ,  $\eta$ ,  $a$ ,  $\rho$  y  $B_p/B$  como una serie:

$$\tau = \sum_{b,c,d,e,f,g,h} C P^b B_0^c \eta^d \rho^e a^f R_0^g (B_p/B)^h \quad 5.19$$

Al aplicar la transformación de escala a ambos lados de la ecuación 5.19 se tiene que:

$$\tau \rightarrow \lambda \tau = \sum C \lambda_1^{-d+2e} \lambda_2^{2b+c+2e} \lambda_3^{2d+f} \lambda_4^{-2b+g-2e} P^b B_0^c \eta^d \rho^e a^f R_0^g (B_p/B)^h$$

Al exigir la invariancia de escala de esta expresión se obtienen los índices de escalamiento independientes, los cuales determinan la forma funcional del tiempo de confinamiento:

$$d = 2e - 1; c = -2e - 2b; f = -4e + 2; g = 2e.$$

Es posible escribir el tiempo de confinamiento como:

$$\tau = \frac{a^2}{\eta} \sum_{b,e,h} C_{b,e,h} \left[ \frac{P}{B_0^2} \right]^b \left[ \frac{\rho^{1/2} R \eta}{a^2 B_0} \right]^{2e} \left[ \frac{B_p}{B} \right]^h. \quad 5.20$$

Expresando  $\tau$  en forma funcional se tiene:

$$\tau = \frac{a^2}{\eta} F \left( \frac{P}{B_0^2}, \frac{\rho^{1/2} R \eta}{a^2 B_0}, \frac{B_p}{B} \right). \quad 5.21$$

donde  $F$  es una función es una función por determinar.

En términos de parámetros adimensionales:

$$\tau = \frac{a^2}{\eta} F(\beta, S, B_p/B) \quad 5.22$$

donde  $\beta = P/B_0^2$  y  $S = \rho^{1/2} R \eta / a B_0^2$ .

### 3.- Efectos de Radiación e Impurezas. (Connor y Taylor, 1977).

En el capítulo IV se discutió la comparación de las leyes de escalamiento empíricas, obtenidas a partir de los experimentos de fusión existentes, con las leyes de escalamiento obtenidas a partir del argumento de invariancia de escala de las ecuaciones que describen cierto modelo del plasma, se encontró que estas leyes de escalamiento empíricas son incompatibles con cualquiera de los modelos convencionales del plasma, y que la discrepancia excede a las incertidumbres asociadas a los índices  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que determinan la ley de escalamiento, cuando se considera que la temperatura no es una variable independiente, pero que está determinada por las otras variables y por el tiempo de confinamiento, pensando en los experimentos de plasmas calentados óhmicamente.

Para intentar explicar estas discrepancias, se puede pensar que una de las posibles fuentes de error se debe a que el transporte de energía en los Tokamaks en operación no está dominado por el transporte del plasma, sino por la radiación debida a partículas neutras o impurezas.

Los efectos de la radiación, debida a la radiación de Bremsstrahlung o debido a impurezas, en las leyes de escalamiento pueden ser fácilmente incorporados en el modelo del plasma como fluido resistivo modificando la ley de Ohm, al introducir los efectos de una carga efectiva  $Z$  en la expresión para la resistividad  $\eta$ , y una expresión general para la pérdida de radiación en la ecuación de balance de energía:

$$\eta = ZT^{-3/2}$$

$$P_{\text{rad.}} \sim n^k T^l Z^m$$

La influencia de la masa atómica puede ser también investigada en este modelo al escribir la densidad como  $\rho = An$ , de tal forma que se obtiene leyes de escalamiento en las cuales se han incorporado ciertas variables adimensionales,  $Z$  y  $A$ .

De esta forma se puede investigar el escalamiento del tiempo de confinamiento en términos de parámetros adimensionales.

El modelo de fluido resistivo con el cual se estudiarán los efectos de la Radiación e Impurezas en la ley de escalamiento para el tiempo de confinamiento, está determinado por el conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad 5.23$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla P = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad 5.24$$

$$\frac{\rho^s}{s-1} \frac{d}{dt} (\rho \rho^{-s}) = \eta |\mathbf{j}|^2 + P_{\text{rad.}} \quad 5.25$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad 5.26$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} \quad 5.27$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J} \quad 5.28$$

Donde  $s$  es la razón de calores específicos.

Junto con las relaciones:

$$\rho = nA \quad 5.29$$

$$\eta \sim Z/T^{3/2} \quad 5.30$$

$$P_{\text{rad.}} \sim n^k T^l Z^m \quad 5.31$$

$$P = nT \quad 5.32$$

donde:  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$  es la derivada convectiva no lineal.

La transformación de escala general que se utiliza es:

$\mathcal{C}$ :  $n \rightarrow \alpha n$ ;  $v \rightarrow \beta v$ ;  $x \rightarrow \gamma x$ ;  $B \rightarrow \delta B$ ;  $E \rightarrow \eta E$ ;  $t \rightarrow \epsilon t$ ;  $P \rightarrow cP$ ;  $J \rightarrow \kappa J$ ;

$T \rightarrow \xi T$ ;  $Z \rightarrow \sigma Z$ ;  $A \rightarrow \mu A$ .

Al aplicar la transformación de escala  $\mathcal{C}$  a las ecs. 5.23-32 y exigir

la invariancia de escala de estas ante la transformación  $\mathcal{C}$  se

obtienen las relaciones entre los parámetros de escala:

$$\alpha \mu \phi^{-1} = \beta \alpha \mu \gamma^{-1}; \quad \phi = \gamma \beta^{-1}; \quad c = \alpha \xi; \quad \beta \alpha \mu \phi^{-1} = c \gamma^{-1} = \kappa \delta$$

$$c \phi^{-1} = \sigma \xi^{-3/2} \kappa^2 = \alpha^k \xi^l \sigma^m; \quad \eta = \beta \delta; \quad \sigma \xi^{-3/2} \kappa; \quad \eta \gamma^{-1} = \delta \phi^{-1}; \quad \delta \gamma^{-1} = \kappa$$

La solución a este conjunto de relaciones determina los parámetros

de escala independientes:

$$\xi = \mu \beta^2; \quad \gamma = \beta^{-1} \sigma \mu^{-3/2}; \quad \phi = \beta^{-5} \sigma \mu^{-3/2},$$

$$c = \beta^{(2k-2l+5)/(k-1)} \sigma^{-(m+1)/(k-1)} \mu^{(k-1-3/2)(k-1)},$$

$$\alpha = c \xi^{-1}; \quad \delta = c^{1/2}; \quad \eta = c^{1/2} \beta; \quad \kappa = c^{1/2} \beta^4 \sigma^{-1} \mu^{3/2}.$$

Si se introducen las siguientes definiciones:

$$b = \frac{2k-2l+5}{8(k-1)}; \quad d = \frac{k-1+3/2}{2(k-1)}; \quad c = \frac{m+1}{2(k-1)}. \quad 5.33$$

el parámetro  $c$  toma la forma:

$$c = \beta^{6b} \sigma^{-2c} \mu^{2d}.$$

La solución a las relaciones anteriores determina la transformación que permite la invariancia de forma de las ecuaciones dinámicas del modelo del plasma estudiado ante cambios de escala, la cual tiene la forma:

$$\begin{aligned} \Theta': n &\rightarrow \beta^{8b-2} \mu^{2d-1} \sigma^{-2c} n; & v &\rightarrow \beta v; & x &\rightarrow \beta^{-4} \sigma \mu^{-3/2} x; & B &\rightarrow \beta^{4b} \sigma^{-c} \mu^d B; \\ E &\rightarrow \beta^{4b+1} \sigma^{-c} \mu^d E; & t &\rightarrow \beta^{-5} \sigma \mu^{-3/2} t; & P &\rightarrow \beta^{8b} \sigma^{-2c} \mu^{2d} P; & T &\rightarrow \mu \beta^2 T; \\ J &\rightarrow \beta^{4b+4} \sigma^{-(c+1)} \mu^{d+3/2} J; & Z &\rightarrow \sigma Z; & A &\rightarrow \mu A. \end{aligned}$$

Existen tres parámetros de escala independientes, por lo que sólo existen tres transformaciones de escala que permiten la invariancia de las ecuaciones 5.23-32.

Se puede expresar ahora el tiempo de confinamiento como una serie:

$$\tau = \sum_{p,q,r,s,t,u} c_{p,q,r,s,t,u} n^p T^q B^r a^s z^t A^u. \quad 5.34$$

Al aplicar la transformación de escala  $\Theta'$  a la expresión anterior, ec. 5.34, y exigir la invariancia de forma de esta expresión ante el cambio de escala se obtiene un conjunto de relaciones entre los índices de escalamiento, cuya solución determina la forma del tiempo de confinamiento en este modelo particular.

$$(8b-2)p + 2q + 4br - 4s = -5$$

$$2cp + cr - s - t = -1$$

$$(2d-1)p + q + dr - 3s/2 + u = -3/2$$

A partir de estas tres relaciones se pueden determinar los parámetros independientes y expresar los restantes en términos de estos. Las solución a estas relaciones es:

$$s = (2b - 1/2)p + q/2 + br + 5/4,$$

$$t = (2c - 2b + 1/2)p - (c - b)r - q/2 - 1/4,$$

$$u = (3b - 2d + 1/4)p - q/4 + (3b/2 - d)r + 3/8.$$

Existen tres índices independientes en la ley de escalamiento.

El tiempo de confinamiento puede expresarse en la siguiente forma:

$$\tau = a^{5/4} Z^{-1/4} A^{3/2} \int_{p,q,r} C_{p,q,r} (n a^{2b-1/2} Z^{2c-2b+1/2} A^{3b-2d+1/4})^p \times (T a^{1/2} Z^{-1/2} A^{-1/4})^q (B a^b Z^{c-b} A^{3b/2-d})^r.$$

Ordenando términos y agrupándolos de una forma conveniente,  $\tau$  puede ser expresado en la forma:

$$B\tau = n^{1/2} a A^{1/2} F \left[ n a^{2b-1/2} Z^{2c-2b+1/2} A^{3b-2d+1/4}, T a^{1/2} Z^{-1/2} A^{-1/4}, B a^b Z^{c-b} A^{3b/2-d} \right]. \quad 5.35$$

El primer parámetro de la función  $F$  se puede reexpresar como:

$$\frac{nT}{B^2} \left[ B a^b Z^{c-b} A^{3b/2-d} \right]^2 \left[ \frac{T a^{1/2}}{Z^{1/2} A^{1/4}} \right]^{-1}.$$

De esta forma  $\tau$  se puede expresar como:

$$B\tau = n^{1/2} a A^{1/2} F \left( \frac{nT}{B^2}, \frac{T a^{1/2}}{Z^{1/2} A^{1/4}}, B a^b Z^{c-b} A^{3b/2-d} \right). \quad 5.36$$

Al considerar el escalamiento general para el tiempo de confinamiento, incorporando los parámetros  $Z$  y  $A$  que representan los efectos de la radiación e impurezas en el plasma, y pensando a este como una ley de potencias, se observa que contiene seis índices por determinar:

$$B\tau = - n^p T^q B^r a^s Z^t A^u. \quad 5.37$$

Sin embargo, a partir de la relación obtenida para  $B\tau$  ec. 5.36 solo se pueden considerar 3 índices como independientes, si es posible determinar la ley de radiación ec. 5.31.

Se puede obtener un resultado interesante si se consideran las características del escalamiento anteriores a la inversa. Es más útil notar que si los seis índices contenidos en la ley de escalamiento general, ec. 5.37, pueden ser determinados empíricamente, estos pueden proporcionar información suficiente para determinar la ley de radiación propuesta, ec. 5.31.

## CAPITULO VI

### Transporte Turbulento Local

---

En este capítulo se describe la aplicación de la invariancia de escala a modelos más específicos del plasma con el fin de describir la turbulencia local ocasionada por inestabilidades presentes en diversas regiones del plasma. Se describen varios tipos de turbulencia local y la forma específica de los coeficientes locales de transporte de energía que surgen a partir de la invariancia de escala.

.....

En la descripción del plasma termonuclear las propiedades del confinamiento global caracterizan al plasma. Estas propiedades están determinadas por la interacción de una gran variedad de procesos físicos que se presentan en distintas regiones del plasma. Debido a que estos procesos se presentan en regiones definidas del plasma tienen un carácter local. Por ejemplo, en la descripción convencional del confinamiento en los sistemas Tokamaks, se consideran tres tipos distintos de zonas radiales, (Duchs, et al, 1977; Romanelli, et al, 1986; Waltz, et al, 1987): Una región interna dominada por oscilaciones diente de sierra (sawteeth), una zona de confinamiento controlada por el transporte anómalo debido a microinestabilidades tales como los modos de Ondas de Deriva de Electrones Atrapados y los modos de Gradientes de Temperatura de Iones, y una región borde. Esta puede ser afectada por la turbulencia debida a inestabilidades características en la periferia del plasma,

tales como los modos ondulatorios (rippling), los modos de globo resistivos (ballooning) y las ondas de deriva colisionales, o por fenómenos que no corresponden a la naturaleza propia del plasma, tales como la radiación.

Existen regiones particulares del plasma donde se llevan a cabo procesos físicos que determinan las propiedades del confinamiento. Estos procesos determinan tipos de turbulencia local que definen las características del transporte en estas regiones.

Debido a que las propiedades del confinamiento global están determinadas por una gran variedad de procesos físicos en regiones particulares del plasma, es más conveniente considerar las propiedades de la turbulencia local en base a un conjunto de coeficientes de transporte local, los cuales pueden ser descritos por un modelo más sencillo del plasma. El estudio de las leyes de escalamiento empíricas, dentro del marco de las constricciones que surgen a partir del argumento de invariancia de escala, puede ser más útil.

El tiempo de confinamiento depende solo de dimensiones globales del sistema de confinamiento tales como los radios mayor  $R$  y menor  $a$ , campo magnético  $B$ , densidad del plasma  $n$ , su temperatura  $T$ , etc, mientras que los coeficientes de transporte local pueden depender de una cantidad mucho mayor de parámetros relevantes del sistema. Existen ciertas longitudes características que representan a los gradientes de las cantidades que estimulan la turbulencia y a la geometría del campo magnético.

$$L_T = \left[ \frac{d}{dr} \ln T \right]^{-1} \quad \text{escala de longitud del gradiente de la temperatura.}$$

$$L_\eta = \left[ \frac{d}{dr} \ln \eta \right]^{-1} \quad \text{escala de longitud del gradiente de la resistividad.}$$

$$L_s = \left[ \frac{r}{Rq^2} \frac{dq}{dr} \right]^{-1} \quad \text{escala de longitud del torcimiento magnético (shear).}$$

donde  $s = (r/q) dq/dr$  es el torcimiento magnético,  $q = aB_T/RB_p$  es el factor de seguridad y  $B_T$  y  $B_p$  son los campos magnéticos toroidal y poloidal respectivamente.

Estas escalas de longitud de los gradientes se hallan determinadas por las propiedades del transporte global y no solo por el problema local.

La difusividad térmica local  $\chi$  puede depender, en general, de un número determinado de estas longitudes características.

Se mostrará que los grados de libertad extra en la forma de  $\chi$  son compensados por constricciones adicionales que provienen de la suposición de la existencia de un coeficiente de transporte local. Estos coeficientes surgen debido a que la turbulencia local, que ocasiona el transporte, tiene una escala caracterizada por una longitud microscópica, tal como el radio de Larmor, que es distinta de la longitud macroscópica  $a$ .

De esta forma, a un nivel de turbulencia local, se definen estos coeficientes de transporte local como:

$$(\Delta r)^2 / \Delta t \quad 6.0$$

Como resultado de estas propiedades, es posible un escalamiento de invariancia extra, el cual constriñe también la forma de  $\chi$ . Esto permite que la identificación empírica de un modelo físico del plasma para  $\chi$  sea mucho más viable y, además, limita las posibles formas de  $\chi$  en los modelos teóricos, y en ciertos casos determina completamente su forma. Debido a esto, la técnica de invariancia de escala es una herramienta útil para complementar explícitamente los cálculos de la turbulencia no lineal. De esta forma, se describirán varios modelos de Turbulencia Local.

## 1.- Turbulencia debida a Gradientes de Temperatura de los Iones.

(Connor, 1986b).

Bajo un amplio rango de circunstancias, un plasma estable y confinado magnetohidrodinamicamente puede exhibir movimientos inestables a través de los cuales las partículas se encuentran en un proceso de convección a través del campo magnético por la deriva  $E \times B$ .

Las Ondas de Deriva o Modos de Deriva Universal son un grupo importante de estas inestabilidades en un plasma confinado. En este caso se consideran modos dominados por colisiones en los cuales la trayectoria libre media  $\lambda_{mf}$  es menor que la longitud de onda paralela al campo magnético  $\lambda_{\parallel}$ .

En general, las ondas de deriva ocurren con grandes longitudes de onda paralelas al campo, y las ondas dominadas por colisiones pueden ocurrir en regimenes donde  $\lambda_{mf} > R$ , donde  $R$  es el radio mayor. La restricción a grandes longitudes de onda y ondas dominadas por colisiones permite una descripción de fluido de las perturbaciones. Adicionalmente se supone que el equilibrio no está muy alejado del equilibrio térmico local.

Las ecuaciones del modelo de dos fluidos son usadas para describir la dinámica del plasma. Las ecuaciones son válidas para perturbaciones con frecuencias  $\omega$  mucho menores que la frecuencia de ciclotón del ión  $\omega_{ci}$  y longitudes de onda perpendicular  $\lambda_{\perp}$  y paralela  $\lambda_{\parallel}$  al campo magnético tales que  $\lambda_{\parallel} \gg \lambda_{mf}$  y  $\lambda_{\perp} \gg a_1$ , donde  $a_1$  es el promedio del giroradio del ión.

El equilibrio del plasma está determinado por los procesos de transporte de difusión y convección a través de los cuales se conduce a un decaimiento colisional proporcional a  $\nu_{col}/B^2$  donde  $\nu_{col}$

es la frecuencia de colisiones.

Los modos electrostáticos son básicamente derivas, ondas de deriva y ondas de sonido con frecuencias  $\omega \approx k_{\perp} v_{de}$  y  $\omega \approx k_{\parallel} c$  con  $v_{de}$  la velocidad diamagnética de electrones, los cuales son rápidos comparados con las escalas de tiempo del equilibrio, y lentos comparados con los modos electromagnéticos.

Los modos electrostáticos se desacoplan de los modos electromagnéticos, aproximadamente, con la corrección debida al acoplamiento que es del orden  $\omega^2/k_{\perp}^2 v_A^2 \approx \beta$ , donde  $\beta$  se supone pequeña y  $v_A$  es la velocidad de Alfvén.

El plasma está descrito por las ecuaciones de transporte para la densidad, velocidad y temperatura de iones y electrones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_{i,e} + \nabla \cdot (n_{i,e} \mathbf{v}_{i,e}) &= 0 \\ m_i n_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \right] \mathbf{v}_i + \nabla \cdot \Pi_i &= en_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}/c) - \nabla p_i - \mathbf{R} \\ 0 &= -en_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}/c) - \nabla p_e + \mathbf{R} \\ \frac{3}{2} n_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \right] T_i + n_i T_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_i - \Pi_i : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}_i + Q_i \\ \frac{3}{2} n_e \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \right] T_e + n_e T_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_e + Q_e \end{aligned}$$

y la condición de cuasineutralidad  $n_i = n_e$ , donde los efectos de las colisiones están contenidos en la fuerza friccional  $\mathbf{R}$ , el flujo de momento  $\Pi$ , el flujo de calor  $\mathbf{q}$  y el término de generación de calor  $Q$ .

Para los modos de bajas frecuencias se puede hacer una reducción de las ecuaciones anteriores considerando que para estos modos  $\omega/\omega_{ci} \sim c^2$  y  $k_{\perp} a_i \sim c \ll 1$ , donde  $k_{\perp}$  es la componente perpendicular del número de onda, y el flujo de partículas es determinado por iteración en  $c$ .

De la ecuación de momento se tiene que los términos que representan los efectos de inercia y colisiones se pueden despreciar a

primer orden en  $c$ , obteniéndose que:

$$\pm n_{i,e} (E + v_{i,e} \times B/c) - \nabla P_{i,e} = 0$$

de donde se tiene que:

$$n v_{i,e} = n_{i,e} (E \times B) / B^2 \pm c (B \times \nabla P_{i,e}) / e B^2$$

La divergencia de la velocidad del ión en el siguiente orden ( $c^2$ ) está dada por:

$$\nabla \cdot (n v_{i,e}^{(3)}) = \nabla \cdot \left[ (n_i m_i c^2 / e B^2) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_i^{(1)} \cdot \nabla \right) E_{\perp} \right]$$

donde se ha combinado la derivada convectiva y la parte finita del giroradio del tensor de Radios de Larmor Finitos  $\Pi_{RLF}$ , donde:

$$\Pi = \Pi_{RLF} + (n T_i / \nu_i) \nabla_{\perp} v_{\perp i}$$

en el régimen colisional (Horton y Varma, 1972).

La presencia de altos gradientes de temperatura de los iones excita una inestabilidad de deriva electrostática, la cual está determinada por el parámetro  $\eta_i = d(\ln T_i) / d(\ln n)$ , el cual representa la razón de las escalas de longitud de los gradientes de densidad y temperatura en el plasma. Si el parámetro  $\eta_i$  excede un valor crítico,  $\eta_i > 2/3$  se presenta esta inestabilidad la cual se conoce como Inestabilidad de Deriva de Gradientes de Temperatura.

Se supone que la presencia de estos modos de deriva inestables estimulan una conducción térmica de iones anómala.

Esta inestabilidad se ha propuesto como la causa del deterioro del confinamiento en el experimento Alcator C a altas densidades, cuando el gas de llenado produce perfiles de densidad relativamente planos. (Coppi, et al, 1985).

Los gradientes de presión de iones, necesarios para estimular estos modos, fueron producidos en los experimentos de calentamiento por haces neutros de alto poder en los Tokamaks, (Goldston, et al, 1979).

La investigación sobre los efectos anómalos asociados con los modos de gradientes de temperatura de iones se basa en el modelo del plasma como un fluido, de tal forma que la descripción de estos modos se basa en las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica.

Para los modos de deriva de gradientes de temperatura de iones, las ecuaciones de fluido que resultan necesarias son las ecuaciones de transporte para la densidad de iones  $N_i(r,t)$ , la velocidad paralela de iones  $v(r,t)$  y la presión de iones  $P(r,t)$ . La velocidad perpendicular de los iones está determinada, como ya se dijo en general para las inestabilidades electrostáticas, por el gradiente de presión y la deriva  $\mathbf{ExB}$  a primer orden, por la aceleración convectiva de iones y por el tensor de esfuerzos de radios de Larmor finitos en el siguiente orden.

En esta descripción de la inestabilidad electrostática el campo eléctrico está determinado por el potencial  $\phi$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi(r,t)$ , donde el potencial  $\phi$  queda determinado por la condición de cuasi-neutralidad  $N_i(r,t) = N_e(r,t)$ , donde  $N$  denota la densidad de número de cada especie. Se considera que las velocidades de fase de las fluctuaciones son pequeñas comparadas con la velocidad de Alfvén y la velocidad térmica de iones. Además, se consideran estados no lineales en los cuales el potencial medio  $\langle\phi^2\rangle^{1/2}$  es pequeño comparado con  $T_e/e$ .

La condición de cuasineutralidad se expresa como:

$$N(r,t) = N_i = N_e = N(x) (1 + e\phi(r,t)/T_e),$$

la cual determina el potencial electrostático.

La velocidad  $\mathbf{ExB}$  de los iones y electrones está dada por:

$$v_e(r,t) = c\mathbf{ExB}/B^2 = cbx\nabla\phi(r,t)/B$$

y la velocidad diamagnética de los iones por:

$$v_D(r, t) = cbx \nabla P_i(r, t) / B$$

donde  $b$  es el vector unitario en la dirección del campo magnético constante  $B$ , entonces  $v_{\perp i} = v_E + v_D$ .

La deriva de polarización de los iones está dada por:

$$v_p(r, t) = \frac{c^2 M}{e B^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_E + v_D) \cdot \nabla \right] E(r, t) \quad 6.1$$

Notando que  $v_E$  y  $v_D$  son incompresibles y suponiendo que la velocidad de los iones es adiabática, las ecuaciones de transporte para los iones serán, (Horton, et al, 1980):

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v_E \cdot \nabla N + \nabla_{\perp} \cdot (N v_p) + \nabla_{\parallel} (N v_{\parallel}) = 0 \quad 6.2$$

$$M_i N \left[ \frac{\partial}{\partial t} v_{\parallel} + v_E \cdot \nabla v_{\parallel} + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} v_{\parallel} \right] = -e N E_{\parallel} - \nabla_{\parallel} P \quad 6.3$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_E \cdot \nabla P_i + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} P_i + \gamma P_i \nabla_{\parallel} v_{\parallel} = 0 \quad 6.3'$$

En este caso  $\gamma$  representa la razón de calores específicos.

Se consideran fluctuaciones alrededor de los valores medios de la presión, densidad, velocidad paralela y potencial electrostático en la forma:

$$N = N_0 + \bar{N}; \quad \phi = \bar{\phi}; \quad v_{\parallel} = \bar{v}_{\parallel}; \quad P_i = P_0 + \bar{P}_i$$

donde  $\bar{N}$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $\bar{v}_{\parallel}$  y  $\bar{P}_i$  representan a las fluctuaciones.

Las fluctuaciones de la turbulencia local tienen características similares a los eigenmodos lineales,  $k_{\perp} L \ll 1$ ,  $k_{\parallel} \rho_i \ll 1$  y las amplitudes  $\bar{N}/N_0 \sim e \bar{\phi} / T \sim \bar{v}_{\parallel} / C_s \sim \bar{P}_i / P_0 \sim \rho_i / L$ , donde  $L$  es una longitud macroscópica y  $C_s = (T_e / M_i)^{1/2}$  es la velocidad del sonido.

El estudio de la turbulencia local, en base al principio de invariancia de escala, requiere la formulación de las ecuaciones en una forma adimensional, de tal modo que se introducen la normalización siguiente: En la dirección perpendicular al campo magnético las longitudes se expresan en términos del radio de Larmor

$\rho_1 = c(M_1 T_e)^{1/2} / eB$ , mientras que a lo largo del plasma cilíndrico se utiliza una coordenada  $z$ , normalizada a  $L_n$ . Además, se introducen formas adimensionales para el tiempo y las fluctuaciones. Así:

$$x = (r-r_0)/\rho; \quad y = r_0 \theta / \rho; \quad \xi = z/L_n; \quad \tau = C_s t / L_n; \quad \phi = e \tilde{\phi} L_n / T_e \rho$$

$$v = \tilde{v}_n L_n / C_s \rho; \quad n = \tilde{N} L_n / N_0 \rho; \quad P = \tilde{P}_1 L_n / P_0 \rho$$

Aquí,  $r_0$  es un radio de referencia en el plasma cilíndrico.

Si se toma en cuenta el ordenamiento y normalización anteriores, las ecs. 6.1,2,3' toman la forma adimensional siguiente:

$$(1 - v_n^2) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - v_n v + [\phi + P, \nabla_n^2 \phi] - K v_n^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \left[ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \quad 6.4$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -v_n (\phi + P) - [\phi, v] \quad 6.5$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -[\phi, P] - \Gamma v_n v - K \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 6.6$$

Los operadores  $[f, g]$  y  $\nabla_n$  se definen como:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{y} \quad \nabla_n = \frac{\partial}{\partial \xi} + s x \frac{\partial}{\partial y}$$

Y los únicos parámetros presentes son:

$$\Gamma = \gamma T_i / T_e; \quad K = (T_i / T_e) (1 + \eta_1) \quad \text{y} \quad s = L_n / L_s$$

La ventaja de introducir variables normalizadas, es que estas exhiben claramente los parámetros adimensionales restantes:  $L_n$ ,  $\Gamma$ ,  $L_s$  y  $K$ .

El principio de invariancia podría extraer la información referente a los parámetros adimensionales, pero el uso de variables normalizadas reduce el esfuerzo requerido, permitiendo la descripción de propiedades de invariancia más sutiles.

Se llevará a cabo el análisis de invariancia de escala de las ecs. 6.4,5,6 para obtener información sobre la turbulencia sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones anteriores no admiten transformación de escala que permita la invariancia de forma de las mismas. Como sólo existen los parámetros  $s$ ,  $K$  y  $\Gamma$  en el sistema de ecuaciones, se puede

concluir que las características de la turbulencia local descritas por las propiedades de invariancia de escala dependerán solamente de las cantidades  $s$ ,  $K$  y  $\Gamma$ .

El coeficiente de transporte se puede expresar en términos de las variaciones en la escala de longitud radial con respecto a las variaciones en la escala del tiempo, ec. 6.0, de tal forma que el coeficiente de transporte correspondiente a este modelo es:

$$D = (\rho^2 C_p / L_n) D(s, K, \Gamma) \quad 6.7$$

Otras características de la turbulencia se pueden deducir a partir de la normalización descrita anteriormente:

$\phi \sim (T_e \rho / e L_n) \bar{\phi}(s, K, \Gamma)$ ;  $l_{\text{sc}} \sim \bar{l}(s, K, \Gamma)$ ;  $\tau_c \sim (L_n / C_p) \bar{\tau}(s, K, \Gamma)$  6.8  
 donde  $\phi$  representa las fluctuaciones del potencial electrostático,  $l_{\text{sc}}$  la longitud de correlación a través del campo y  $\tau_c$  el tiempo de correlación.

Se desean determinar las funciones  $D$ ,  $\phi$ ,  $l_{\text{sc}}$  y  $\tau_c$ .

Para esto se introducen algunas suposiciones sobre la naturaleza de la turbulencia, con el fin de definir concretamente los mecanismos responsables de la turbulencia.

Se supone primero que se satisface la relación siguiente:

$$\phi \ll P$$

y que se puede ignorar además el término de compresión paralela en la ecuación 6.6. Se debe de suponer además que  $v_{\perp}^2 \ll 1$ , para mantener la validez del modelo de fluido adoptado, de tal forma que las ecs. 6.4, 5, 6 se reducen a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \nabla_{\perp} \cdot v + [P, v_{\perp}^2 \phi] - K \nabla_{\perp}^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \left[ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \quad 6.9$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\nabla_{\perp} \cdot P - [\phi, v] \quad 6.10$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -[\phi, P] - K \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 6.11$$

En este sistema de ecuaciones se tienen sólo dos parámetros,  $s$  y  $K$ , que son razones geométricas.

A partir de la transformación general de escala:

$$\varphi: \tau \rightarrow \alpha\tau; x \rightarrow \gamma x; y \rightarrow \beta y; \xi \rightarrow \delta \xi; \Phi \rightarrow c\Phi; v \rightarrow \eta v; P \rightarrow lP; K \rightarrow jK; \\ s \rightarrow \zeta s.$$

se obtiene la transformación de escala que permite la invariancia de forma de las ecs. 6.9,10,11 ante cambios de escala.

Las relaciones entre los parámetros de escala son:

$$\zeta = \delta^{-1}; c\alpha^{-1} = c\beta^{-1} = \eta\delta^{-1} = l\gamma^{-4} = j\gamma^{-3} \\ \eta\alpha^{-1} = c\eta\gamma^{-1}\beta^{-1} = l\delta^{-1}; l\alpha^{-1} = c l\gamma^{-2} = j c\beta^{-1}$$

La transformación tiene la forma:

$$\varphi_1: \tau \rightarrow \alpha\tau; x \rightarrow \alpha x; y \rightarrow \alpha y; \xi \rightarrow \alpha^2 \xi; \Phi \rightarrow \alpha \Phi; v \rightarrow \alpha^2 v; P \rightarrow \alpha^3 P; \\ K \rightarrow \alpha^2 K; s \rightarrow \alpha^{-2} s.$$

Se supone que el coeficiente de transporte, así como las fluctuaciones en el potencial electrostático, longitud de correlación perpendicular y tiempo de correlación, se pueden expresar como series en términos de los parámetros  $s$  y  $K$  en la forma:

$$D = \sum C_{a,b} K^a s^b \quad 6.12$$

Si se aplica la transformación  $\varphi'$  a la ec. 6.12 y se exige la invariancia de forma ante el cambio de escala, se obtienen las restricciones a los índices de escalamiento. Estas restricciones definen la forma funcional del coeficiente de transporte.

$$a = b + 1/2$$

De esta forma, el coeficiente de transporte se expresa como:

$$D = (\rho^2 C_{a,b} / L_n s^{1/2}) F(sK) \quad 6.13$$

Si se supone que  $\eta_1 > 1$  se tiene que  $K = L_n / L_T$  y la expresión anterior se puede expresar en términos de los parámetros que revelan la física de la turbulencia.

$$D = (\rho^2 C_u / L_n) (L_u / L_n)^{1/2} F(L_n^2 / L_T L_u) \quad 6.13'$$

En esta expresión se observa que existe sólo una dependencia descrita conocida, y una función por determinar, que depende sólo de un argumento adimensional.

Si se aplica el mismo procedimiento a las demás cantidades, se obtienen las leyes de escalamiento siguientes:

$$\phi = (T_u \rho / \epsilon) (L_n L_T)^{1/2} F_1(L_n^2 / L_T L_u); \quad P = P_0 \rho (L_n / L_T)^{3/2} F_2(L_n^2 / L_T L_u)$$

$$L_{ac} = \rho (L_n / L_T)^{1/2} F_3(L_n^2 / L_T L_u); \quad \tau_c = C_u^{-1} (L_n^3 / L_T)^{1/2} F_4(L_n^2 / L_T L_u)$$

De esta forma, la suposición  $\phi \ll P$  está justificada a posteriori si  $L_n \gg L_T$ , o si  $\eta_1 \gg 1$ .

Para definir más precisamente las características de la turbulencia se suponen dos límites:

a).- En este límite se supone:  $Ks \ll 1$

En términos de las longitudes características se tiene que:

$$L_n^2 / L_T L_u \ll 1$$

En este límite, se requiere la condición adicional:  $\partial\phi/\partial\tau \ll \partial\phi/\partial y$ , las variaciones temporales del potencial  $\phi$  son mucho menores que las variaciones espaciales en el parámetro  $y$ .

De tal forma que la ec. 6.9 se reduce a:

$$0 = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \nabla_u \cdot \mathbf{v} + [P, \nabla_u^2 \phi] - \kappa \nabla_u^2 \frac{\partial\phi}{\partial y} + \left[ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right] \quad 6.14$$

Al aplicar la transformación  $\mathfrak{p}$  a las ecs. 6.10, 11, 14 y exigir la invariancia de escala se obtiene que:

$$l\alpha^{-1} = c l \gamma^{-1} \beta^{-1} = j c \beta^{-1}; \quad c\beta^{-1} = \eta \delta^{-1} = l c \beta^{-1} \gamma^{-3} = j c \gamma^{-3}; \quad \beta = \gamma; \\ \eta \alpha^{-1} = l \delta^{-1} = c \eta \gamma^{-1} \beta^{-1}.$$

Si  $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = \beta_2$  se tiene que la transformación que permite la invariancia de escala de las ecs. 6.10, 11, 12 es:

$$\mathfrak{p}_2: \tau \rightarrow \beta_1 \tau; \quad x \rightarrow \beta_2 x; \quad y \rightarrow \beta_2 y; \quad \xi \rightarrow \beta_1 \beta_2 \xi; \quad \phi \rightarrow \beta_1^{-1} \beta_2^2 \phi; \quad v \rightarrow \beta_2^2 v;$$

$$P \rightarrow \beta_2^3 P; \quad k \rightarrow \beta_2^2 k; \quad s \rightarrow \beta_1^{-1} \beta_2^{-1} s.$$

El coeficiente de transporte correspondiente a este modelo tiene la forma:

$$D = g(\rho^2 C_s / L_n) K^{3/2} B \quad 6.15$$

con  $g$  una constante. Esto es,  $F(KB) = (KB)^{3/2}$ .

En términos de longitudes físicas:

$$D = \rho^2 C_s / L_n (L_n / L_T)^{3/2} \quad 6.15'$$

El escalamiento para las otras cantidades es:

$$\phi = (T\rho/eL_n) (L_n/L_T)^{3/2}; \quad l_{ec} = \rho (L_n/L_T)^{1/2};$$

$$\tau_c = (L_n/C_B) (L_T/L_n)^{1/2}; \quad P = P_0 \rho L_n^{1/2} L_T^{3/2}$$

Se observa que la suposición  $\partial\phi/\partial\tau \ll \partial\phi/\partial y$  se justifica cuando  $Ks \ll 1$ .

b).- En este límite se supone que:  $Ks \gg 1$ .

Esto significa que  $L_n^2/L_T L_n \gg 1$ , y la condición necesaria es:

$$\partial\phi/\partial\tau \gg \partial\phi/\partial y$$

Bajo esta suposición la ec. 6.9 se reduce a la forma:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \nabla_n \cdot \mathbf{v} + [P, \nabla_n^2 \phi] - K \nabla_n^2 \frac{\partial\phi}{\partial y} + \left[ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right] \quad 6.16$$

La exigencia de la invariancia de forma de las ecs. 6.10, 11, 16 ante la transformación  $\wp$  proporciona la transformación que permite la invariancia de forma de las ecuaciones a través de las relaciones:

$$c\alpha^{-1} = \gamma\delta^{-1} = lc\gamma^{-4} = jc\gamma^{-3}; \quad \eta\alpha^{-1} = c\eta\gamma^{-1}\beta^{-1} = l\delta^{-1}$$

$$l\alpha^{-1} = cl\gamma^{-1} = jc\beta^{-1}; \quad \gamma\zeta\beta^{-1} = \delta^{-1}; \quad \beta = \gamma$$

Si se supone que  $\alpha = \gamma_1$  y  $\gamma = \gamma_2$ , la transformación de escala se expresa en la forma:

$$\wp_3: \tau \rightarrow \gamma_1 \tau; \quad x \rightarrow \gamma_2 x; \quad y \rightarrow \gamma_2 y; \quad \xi \rightarrow \gamma_1 \gamma_2 \xi; \quad \phi \rightarrow \gamma_1^{-1} \gamma_2^2 \phi; \quad v \rightarrow \gamma_1^{-1} \gamma_2^3 v;$$

$$P \rightarrow \gamma_1^{-1} \gamma_2^4 P; \quad K \rightarrow \gamma_1^{-1} \gamma_2^3 K; \quad s \rightarrow \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} s.$$

Las características del análisis de invariancia de escala determinan la forma para el coeficiente de transporte:

$$D = g' (\rho^2 C_{\perp} / L_{\perp}) (K^2 s)^{1/4} \quad 6.17$$

Donde F ha sido determinada como  $F = g' (Ks)^{3/4}$ , con  $g'$  un constante por determinar.

En términos de las longitudes físicas:

$$D = g' \rho^2 C_{\perp} (L_{\perp}^3 L_{\parallel})^{-1/4} \quad 6.17'$$

Las demás cantidades se escalan como:

$$\Phi = (T\rho/e) (L_{\perp} / L_{\parallel}^3)^{-1/4}; \quad P = P_0 \rho (L_{\perp} / L_{\parallel})^{1/4};$$

$$l_{\perp c} = \rho (L_{\perp} / L_{\parallel})^{1/4}; \quad \tau_c = (L_{\parallel} L_{\perp}^3)^{1/4} / C_{\perp}$$

Se ha podido determinar que para  $\eta_1 \approx 2$ , se presenta un modo inestable, con una localización radial dada por  $\Delta x = L_{\perp} \rho_1 / L_{\parallel}$ , que es el resultado de investigaciones hechas sobre las propiedades de la inestabilidad de este modo, basadas en la teoría cinética no colisional en una geometría plana (sheared slab geometry) (Gribkov, et al, 1981), donde  $\rho_1$  es el radio de Larmor del ión.

Se ha encontrado que la estabilización en los tokamaks requiere altos valores del torcimiento magnético (shear),  $L_{\perp} = L_{\parallel}$ , los cuales no se han podido conseguir, (Coppi, et al, 1967). Las razones de crecimiento típicas son  $\gamma = 0.05\omega_p$ , donde  $\omega_p$  es la frecuencia diamagnética del ión.

Kadomtsev y Pogutse (1970), usando un tratamiento más preciso, basado en la estabilización por difusión turbulenta y suponiendo que la turbulencia es isotrópica en la dirección perpendicular al campo magnético, calcularon una conductividad térmica anómala del ión dada por:

$$\chi_1 \approx (1/40) (cT_{\parallel} / eB) (\rho_1 L_{\perp} / L_{\parallel}^2) \quad 6.18$$

Se han obtenido resultados similares a partir de estimaciones

cuasi lineales usando la hipótesis de la longitud de mezclado (Coppi et al, 1967; Antonsen et al, 1979), o usando argumentos de acoplamiento de modos, (Lee y Tang, 1985), como se espera para modos con  $\gamma \sim \omega$ .

Las características de este modo son consistentes con un tratamiento de la inestabilidad y su turbulencia asociada en términos de un modelo de fluido. Horton et al, (1980), lograron deducir un conjunto de ecuaciones de fluido, basadas en una distribución de Boltzmann para los electrones: Cuasineutralidad, una ecuación de momento a lo largo del campo magnético, y las ecuaciones de continuidad y energía de iones. Mostraron además que estas ecuaciones se pueden plantear en una forma universal dependiendo sólo de los parámetros  $L_n/L_s$ ,  $(1 + \eta_1)T_1/T_e$  y  $\rho_1/L_n$ .

Adicionalmente, en base a un cálculo de valor inicial en tres dimensiones de estas ecuaciones no lineales, obtuvieron una conductividad térmica anómala de iones:

$$\chi_1 \approx g(cT_1\rho_1/eBL_n)(L_n/L_s)^{1/2}(1 + \eta_1)^{1/2}c \quad 6.19$$

donde  $g \approx 0.3$  y  $|c| \leq 0.5$ .

Por otro lado, Lee y Diamond (1985), han podido obtener teorías analíticas de turbulencias basadas en estas ecuaciones, dentro del límite  $(\rho_1/L_n) \rightarrow 0$ , obteniendo:

$$\chi_1 \approx (cT_1\rho_1/eBL_n)(1 + \eta_1)^2(k_y\rho_1)_{res} \quad 6.20$$

donde es necesario realizar cálculos analíticos para determinar el valor de  $(k_y\rho_1)_{res}$ .

Ellos mismos han obtenido resultados satisfactorios, obteniendo una buena concordancia entre su código girocinético de partícula en una geometría plana (shearless slab) y un cálculo analítico de acoplamiento de modos de tres ondas cuando  $4 < \eta_1 < \alpha$ .

El resultado analítico es:

$$\chi_1 \approx \frac{cT}{eB} \rho_1 (qR)^{-2/3} L_T^{-1/3} (T_e/T_i)^{1/3} (k_y \rho_1)_{rms}^{5/3} \quad 6.21$$

donde  $qR$  representa un valor típico para la longitud de onda paralela en un sistema toroidal real.

El resultado 6.18 no se basa completamente en el conjunto de ecs. 6.4,5,6. Sin embargo, la física de este modelo está determinada por las ecuaciones:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\nabla_{\parallel} v \quad 6.22$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\nabla_{\parallel} (\Phi + P) - [\Phi, v] \quad 6.23$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -[\Phi, P] - \Gamma \nabla_{\parallel} v - k \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad 6.24$$

Esto es, los términos de radios de Larmor finitos proporcionales a  $\rho^2 v_{\perp}^2$ , y los términos que provienen de  $\omega_{pe}$  son ignorados.

La localización se consigue a través de los efectos de difusión turbulenta, donde se supone que la turbulencia es isotrópica en  $x$  e  $y$ , aunque las ecs. 6.22,23,24 no exigen esto.

Así, las ecuaciones anteriores se complementan con la condición:

$$\partial/\partial x \sim \partial/\partial y$$

Estas preservan su forma ante el cambio de escala, y la transformación de escala que permite esta invariancia tiene la forma:

$$\rho_1: \tau \rightarrow \delta_1 \tau; x \rightarrow \delta_2 x; y \rightarrow \delta_2 y; \xi \rightarrow \delta_1 \xi; \Phi \rightarrow \delta_1^{-1} \delta_2^2 \Phi; v \rightarrow \delta_1^{-1} \delta_2^2 v;$$

$$P \rightarrow \delta_1^{-1} \delta_2^2 P; k \rightarrow \delta_1^{-1} \delta_2 k; s \rightarrow \delta_1^{-1} s; \Gamma \rightarrow \Gamma.$$

Al aplicar esta transformación a la ec. 6.12 y exigir la invariancia de forma ante el cambio de escala, se obtiene que el coeficiente de transporte se puede expresar como:

$$D = C_1 \rho^2 L_y / L_T^2 \quad 6.25$$

Esto ilustra que las suposiciones requeridas para derivar el resultado 6.18 son mínimas.

## 2.- Modelos resistivos

En esta sección se describen las propiedades del transporte en un modelo de fluido resistivo. Este abarca a la turbulencia debida a Gradientes de Presión, la cual se ha propuesto como la causa del deterioro del confinamiento en los sistemas Tokamaks al aumentar el parámetro  $\beta$ , (Carreras, et al, 1983), y en los Pinchs, (An, et al, 1985; Carreras, et al, 1987), a la turbulencia debida a Gradientes Resistivos y a la turbulencia de Ondas de Deriva resistivas, las cuales se proponen como una explicación del transporte en la periferia de los tokamaks, (Garcia, et al, 1985; Terry y Diamond, 1985).

### 2.1.- Turbulencia debida a gradientes de Presión.

(Modelo de fluido resistivo) (Connor y Taylor, 1984).

Para discutir las características de la turbulencia local debida a gradientes de presión, en base a los argumentos de invariancia de escala, es necesario contar con el conjunto de ecuaciones que describen adecuadamente a este modelo.

Con el fin de obtener estas ecuaciones, se utilizarán las ecuaciones MHD reducidas de Strauss (1983), (Ver apéndice A), introduciendo la idea del límite de números de Reynolds grandes,  $S \gg 1$ .

Las ecuaciones MHD reducidas de Strauss tienen la forma:

Ecuación de convección de la presión:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{rR_0} [\Phi, P]_{\theta, r} = 0$$

Ecuación de inducción:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (R_0/B_0) B \cdot \nabla \Phi + \eta \nabla_{\perp}^2 \Psi$$

Ecuación de Vorticidad:

$$(\rho R_0 / B_0) \frac{d}{dt} v_{\perp}^2 \phi = B \cdot \nabla v_{\perp}^2 \phi + \frac{VR^2 \times \nabla P \cdot \hat{e}}{R_0}$$

En estas ecuaciones,  $\hat{e}$  representa al vector unitario toroidal.

En este límite, la turbulencia presente en el plasma genera ciertas fluctuaciones cuyas escalas de longitud tienen las siguientes características: Las escalas de longitud a través del campo magnético son pequeñas comparadas con las dimensiones del plasma, pero son comparables a las dimensiones del plasma a lo largo del campo. Muchas inestabilidades lineales importantes, tales como los modos de globo resistivos (ballooning), tienen esta propiedad. Para estudiar las características de este tipo de turbulencia es necesario considerar que las variables de interés están compuestas de una parte base, la cual está libre de fluctuaciones, y una parte fluctuante. Las variables  $\Psi$ ,  $\phi$  y  $P$  son escritas en la forma siguiente:  $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$ ;  $\phi = \phi_1$ ;  $P = P_0 + P_1$ , donde  $\Psi_0$  y  $P_0$  son las funciones que representan el estado no perturbado para la presión y la función de flujo, mientras que  $\Psi_1$ ,  $\phi_1$  y  $P_1$  son las funciones que representan a las fluctuaciones no lineales de la presión y las funciones de flujo. Adicionalmente, se introduce un conjunto de variables independientes que expresan el hecho de que existen dos escalas de longitud distintas asociadas al sistema de confinamiento  $r$ ,  $\theta$ , y  $\zeta = \zeta - q\theta$ .

Así, las cantidades fluctuantes varían rápidamente en  $r$  y  $\zeta$ , pero lentamente en  $\theta$ , mientras que las cantidades base varían lentamente en todas direcciones.

Para expresar esta propiedad explícitamente se hace necesario adoptar una forma adimensional para las ecuaciones generales, introduciendo una forma adimensional para las cantidades fluctuantes y un ordenamiento sistemático en el cual  $\eta \sim \delta^2$  o  $\delta \sim S^{-1/2}$ .

Estas formas adimensionales son: (Formulación de términos II).

$$P_1/P_0 = \delta \bar{P} \left( \frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}, \theta, \tau \right), \quad q\psi_1/r^2 B_0 = \delta^2 \bar{\Psi} \left( \frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}, \theta, \tau \right) \text{ y}$$

$$rR_0 \rho^{1/2} \phi_1/r^2 B_0 = \delta^2 \bar{\Phi} \left( \frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}, \theta, \tau \right),$$

donde se define  $\tau = B_0 t / qR_0 \rho^{1/2}$  y  $x = (r - r_0) dq/dr$  es una coordenada local. Así, este ordenamiento permite balancear los efectos lineales y no lineales en las ecs. MHD Reducidas de Strauss.

Al utilizar las formas adimensionales normalizadas, las ecuaciones de Strauss se pueden llevar a una forma adimensional, (ver apéndice A).

$$\frac{d\bar{P}}{d\tau} - q\kappa \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0 \quad 6.26$$

$$\frac{d\bar{\Psi}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} + \frac{q^2}{S} v_1^2 \bar{\Psi} \quad 6.27$$

$$\frac{d}{d\tau} v_1^2 \bar{\Phi} = \frac{\partial v_1^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta} + s q [\bar{\Psi}, v_1^2 \bar{\Psi}]_{x,y} + \frac{\beta^*}{q} \left[ s \text{Sen} \theta \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right) + \cos \theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right] \quad 6.28$$

Las ecs. 6.26, 27, 28 describen la turbulencia local en un plasma resistivo, para una configuración Tokamak.

Para estudiar las consecuencias de la invariancia de escala de estas ecuaciones, es necesario determinar las transformaciones de escala de las variables de interés, y de los parámetros locales  $\beta^*$ ,  $S$ ,  $\kappa$ ,  $s$ ,  $q$  las cuales permitan la invariancia de forma de las ecuaciones ante cambios en la escala.

Se utilizará una transformación general de escala y se determinarán las condiciones bajo las cuales la transformación permite la invariancia de forma de las ecuaciones anteriores.

$$B_0: q \rightarrow \mu_1 q; \quad K \rightarrow \mu_2 K; \quad x \rightarrow \mu_3 x; \quad \bar{\Phi} \rightarrow \mu_4 \bar{\Phi}; \quad \bar{\Psi} \rightarrow \mu_5 \bar{\Psi}; \quad \bar{P} \rightarrow \mu_6 \bar{P}; \quad S \rightarrow \mu_7 S; \\ y \rightarrow \mu_8 y; \quad \beta^* \rightarrow \mu_9 \beta^*; \quad s \rightarrow \mu_{10} s; \quad \tau \rightarrow \mu_{10} \tau.$$

Al aplicar la transformación  $B_0$  a las ecs. 6.26, 27, 28 y exigir la invariancia de forma ante el cambio de escala, se obtienen las relaciones entre los parámetros de esclamamiento que determi-

nan la transformación de escala correspondiente a este modelo:

$$\mu_1 = \mu_1^{-2} \mu_3^2; \mu_5 = \mu_1^{-2} \mu_3^2; \mu_6 = \mu_1^{-1} \mu_2 \mu_3; \mu_7 = \mu_1^2 \mu_3^{-2}; \mu_8 = \mu_3;$$

$$\mu_9 = \mu_2^{-1}; \mu_{10} = \mu_{11} = 1$$

La solución a estas relaciones determina la transformación de escala correspondiente al modelo:

$$\mathcal{S}_1: q \rightarrow \mu_1 q; K \rightarrow \mu_2 K; x \rightarrow \mu_3 x; \bar{\phi} \rightarrow \mu_1^{-2} \mu_3^2 \bar{\phi}; \bar{\psi} \rightarrow \mu_1^{-2} \mu_3^2 \bar{\psi};$$

$$\bar{P} \rightarrow \mu_1^{-1} \mu_2 \mu_3 \bar{P}; S \rightarrow \mu_1^2 \mu_3^{-2} S; Y \rightarrow \mu_3 Y; \beta^* \rightarrow \mu_2^{-1} \beta^*.$$

Se puede notar que esta transformación no respeta la periodicidad de las coordenadas angulares, pero aún así es válida, debido a que se aplica a fluctuaciones cuya escala de longitud es pequeña.

El coeficiente de transporte está definido por la ec. 6.6 y en términos de las variables  $\tau$  y  $x$  este se transforma como:

$$D = \frac{r^2 B_0}{R_0 \rho^{1/2} q^3 s^2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau}$$

Si se supone que es posible expresar este coeficiente de transporte como una serie en términos de los parámetros característicos de la turbulencia  $q$ ,  $K$ ,  $\beta^*$ ,  $S$  y  $s$  se tendrá que:

$$D' = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau} = \sum C_{a,b,c,d,e} q^a K^b \beta^{*c} S^d s^e$$

Al aplicar la transformación de escala  $\mathcal{S}_1$  a  $D'$  se tiene que:

$$D' \mu_3^{2D'} = \sum C_{a,b,c,d,e} \mu_1^{a+2d} \mu_2^{b-c} \mu_3^{-2d} q^a K^b \beta^{*c} S^d s^e$$

Bajo la invariancia de escala:

$$a + 2d = 0; b - c = 0; -2d = 2.$$

Se obtiene entonces que:

$$a = 2; b = c; d = -1$$

$$D' = (q^2/S) \sum_{c,e} C_{c,e} (\kappa \beta^*)^c s^e$$

De esta forma se tiene que el coeficiente de difusión local se puede expresar como:

$$D_0 = \frac{r^2 B_0}{R_0 q \rho^{1/2} S} F_0(K\beta^*, s) = \eta F_0(\alpha, s) \quad 6.29$$

donde  $F_0$  es una función desconocida aún, pero que solo depende de los parámetros  $\alpha$  y  $s$  siendo  $\alpha$ :

$$\alpha = Kk\beta^* = -2(R_0/B_0^2)(dP_0/dr)q^2$$

El parámetro  $\alpha$  es el que gobierna la estabilidad de los modos de globo (ballooning) MHD (Connor et al, 1978).

Lo único que expresa la función  $F_0$  es la forma en que los parámetros  $\alpha$  y  $s$  entran en el escalamiento de  $D_0$ , mas sin embargo, se requiere un trabajo experimental para vislumbrar la posible forma de la función  $F_0$ .

El principio de invariancia de escala permite determinar la forma de la función  $F_0$  si se define más precisamente el mecanismo de la turbulencia.

En la aproximación electrostática se puede suponer que el proceso no lineal dominante en la turbulencia es la convección de la presión por la velocidad de fluido e ignorar los gradientes de las fluctuaciones en la dirección poloidal y relativa a la dirección radial  $x$ , despreciando otros procesos no lineales.

Los modos de globo resistivos (ballooning) poseen estas características debido a que las fluctuaciones satisfacen la condición:

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tau} \ll \eta \nabla_A^2 \tilde{\Psi} \ll \omega_A \tilde{\Psi}$$

De esta forma, es posible despreciar el término  $\partial \tilde{\Psi} / \partial \tau$  en la ec. de inducción 6.27 y despreciar los gradientes de las fluctuaciones en la dirección poloidal y, comparados con la dirección radial  $x$ .

El conjunto de ecs. 6.26, 27, 28, las cuales describen la turbulencia local, se reducen a:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} = \frac{q^2 s^2}{S} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} \quad 6.30$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\beta^*}{sq} \operatorname{Sen} \theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \quad 6.31$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + q^2 s [\bar{\Phi}, \bar{P}]_{x,y} + K K q \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0 \quad 6.32$$

Si se aplica alguna transformación general de escala a las ecs.

6.30,31,32 y se exige la invariancia de forma ante el cambio de escala, se obtienen las relaciones entre los parámetros de escala:

$$\begin{aligned} \nu_5 &= \nu_2^2 \nu_3^{-2} \nu_6 \nu_9^2 \nu_{10}^{-1}; \quad \nu_3 = \nu_4; \quad \nu_1^{-1} = \nu_2 \nu_3^{-1} \nu_4^{-1} \nu_5 \nu_9 \\ \nu_1^{-1} \nu_3^{-2} \nu_5 &= \nu_3^{-2} \nu_6 = \nu_2^{-1} \nu_3^{-1} \nu_7 \nu_9^{-1} \nu_{11}; \\ \nu_1^{-1} \nu_7 &= \nu_2 \nu_3^{-1} \nu_4^{-1} \nu_5 \nu_7 \nu_9^2 = \nu_4^{-1} \nu_5 \nu_8 \nu_9 \end{aligned}$$

De tal forma que la transformación de escala que permite la invariancia de forma ante cambios de escala de las ecs. anteriores es:

$$\begin{aligned} B_2: \tau &\rightarrow \nu_1 \tau; \quad s \rightarrow \nu_2 s; \quad x \rightarrow \nu_3 x; \quad y \rightarrow \nu_3 y; \quad \bar{\Phi} \rightarrow \nu_1^{-1} \nu_2^{-1} \nu_3^2 \nu_9^{-2} \bar{\Phi}; \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \nu_1^{-2} \nu_2^{-1} \nu_3^2 \nu_9^{-2} \bar{\Psi}; \quad \bar{P} \rightarrow \nu_1^{-2} \nu_3 \nu_9^{-1} \nu_{11} \bar{P}; \quad K \rightarrow \nu_1^{-2} \nu_2 \nu_{11}^{-1} K; \quad q \rightarrow \nu_9 q; \\ S &\rightarrow \nu_1^{-1} \nu_2^2 \nu_3^{-2} \nu_9^2 S; \quad \beta^* \rightarrow \nu_{11} \beta^*. \end{aligned}$$

Al aplicar la transformación de escala  $B_2$  al coeficiente de difusión  $D'$  se obtiene:

$$D' \rightarrow \nu_1^{-1} \nu_3^2 D' = \sum_{a,b,c,d,e} C_{a,b,c,d,e} \nu_1^{-a-2b} \nu_2^{2a+b+d} \nu_3^{-2a} \nu_9^{2a+c} \nu_{11}^{-b+c} S^a K^b \beta^* c^d q^e$$

Si se exige la invariancia de forma de esta expresión, se tendrá que:  $a = -1$ ;  $b = 1$ ;  $c = 1$ ;  $d = 1$ ;  $e = 2$ .

De esta forma, se determina completamente el coeficiente de transporte  $D_0$ ,

$$D_0 = g_0 r^2 B_0 (sq R_0 \rho^{1/2})^{-1} K \beta^* / S \quad 6.33$$

Combinando las ecs. 6.29 y 6.33 se obtiene la forma de la función  $F_0$ :

$$F_0(\alpha, s) \sim \alpha / s$$

Reescribiendo  $K \beta^*$  y  $S$  en forma explícita en la ec. 6.33,

$$D_0 = 2g_0 R q^2 \eta (sB_0^2)^{-1} (-dP_0/dr)$$

donde  $g_0$  es una constante no determinada.

El coeficiente de difusión  $D_0$  ha sido completamente determinado salvo un factor  $g_0$  que no depende de los parámetros del plasma. Cabe remarcar que el coeficiente  $D_0$  es válido sólo para el plasma que satisface las condiciones de este modelo particular.

### 2.1.1.- Transporte en Campos Estocásticos.

Es posible estudiar las características del transporte local a lo largo de líneas de campo estocásticas en los sistemas de confinamiento Tokamaks.

El modelo de fluido resistivo implica el dominio de la convección de la presión por la velocidad de fluido sobre otros mecanismos no lineales presentes en el plasma. Sin embargo, se puede suponer que el mecanismo principal de pérdida de energía es el transporte a lo largo de líneas de campos estocásticos.

El modelo de campos estocásticos no está comprendido dentro del modelo de fluido resistivo, sin embargo, si se piensa que la estructura de campo magnético estocástico en el plasma está determinada por la turbulencia de fluido resistivo, es posible utilizar las transformaciones de escala del modelo de fluido resistivo para extraer información sobre este tipo de transporte.

Se puede considerar que las perturbaciones magnéticas presentes en la turbulencia de fluido resistivo destruyen las superficies magnéticas toroidales anidadas del plasma no perturbado.

Rechester y Rosenbluth (1978), dedujeron una expresión para el coeficiente de transporte. Este es el responsable de la difusión de las líneas de campo magnético en el plasma. Este tiene la

forma:

$$D_m = (\delta B_r/B)^2 L_c \quad 6.34$$

donde  $\delta B_r$  representa al campo magnético fluctuante y  $L_c$  la longitud de correlación de las fluctuaciones a lo largo del campo magnético no perturbado.

La longitud de correlación  $L_c$  no es fácil de determinar (Kroonnes, et al, 1983). Estas dificultades se salvan ya que la longitud de correlación está determinada por la turbulencia.

Al estudiar el plasma en un cierto tipo de sistema de confinamiento, se pueden presentar dos casos que caracterizarán la turbulencia y el tipo de transporte de energía.

#### 2.1.1.1.- Régimen colisional.

Si el plasma es altamente colisional, de tal forma que la trayectoria libre media sea menor que la longitud de correlación  $L_c$ , el efecto del transporte a lo largo del campo magnético estocástico no depende directamente del coeficiente  $D_m$ , pero está representado por el coeficiente:

$$D_i = (v_e^2/\nu_e) (\delta B_r/B)^2 \quad 6.35$$

donde  $v_e$  es la velocidad térmica de los electrones, y  $\nu_e$  es la frecuencia de colisiones.

Debido a que las fluctuaciones del campo magnético,  $\delta B_r$ , son consecuencia de la turbulencia, se deben de transformar adecuadamente bajo la transformación  $B_1$ .

Para determinar la forma en que  $\delta B_r/B$  se transforma, se utilizará la perturbación de la función de flujo  $\Psi$  en la forma siguiente:

$$\delta B_r/B = (r/R_0) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad 6.35'$$

Si se expresa  $(\delta B_r/B)^2$  como una serie en los parámetros  $q$ ,  $K$ ,  $\beta^*$ ,  $S$

y s, y se aplica la transformación de escala  $B_1$ , se obtiene:

$$\mu_1^{-4} \mu_3^2 \left[ \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{Y}} \right]^2 = \sum C_{a,b,c,d} \mu_1^{a+2d} \mu_2^{b-c} \mu_3^{-2d} q^a K^b \beta^c S^d s^e$$

Al exigir la invariancia de escala se obtiene:

$$\left[ \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{Y}} \right]^2 = (q^2 S)^{-1} \sum C_{a,b} (K \beta^*)^b s^e$$

Las fluctuaciones del campo magnético se pueden expresar como:

$$(\delta B_r / B)^2 = (r^2 / R_0 q^2 S) F_1(K \beta^*, s) \quad 6.36$$

De tal forma que el coeficiente de transporte anómalo para un plagma colisional, en un campo magnético estocástico, tendrá la forma:

$$D_1 = \langle v_e^2 \tau^2 / \nu_e R_0^2 q^2 S \rangle F_1(\alpha, s) \quad 6.37$$

donde  $F_1$  es una función aún desconocida, pero que sólo depende de los parámetros  $\alpha$  y  $s$ .

#### 2.1.1.2.- Régimen no colisional.

Con mucha frecuencia, los plasmas termonucleares son no colisionales, los cuales tienen la propiedad de que la trayectoria libre media es mayor que la longitud de correlación  $L_c$ . En este régimen, el transporte a lo largo del campo magnético estocástico está dado por el coeficiente de difusión  $D_2 = \nu_e D_1$ , de tal forma que depende directamente de  $D_1$ . Existe un problema para determinar el comportamiento del coeficiente de difusión  $D_2$ , debido a que este depende directamente de  $D_1$ , de tal forma que es necesario determinar la forma en que la longitud de correlación responde ante la transformación de escala  $B_1$ .

Al no ser una longitud característica simple, sus propiedades de transformación no pueden ser deducidas directamente.

Para determinar estas propiedades de transformación, se puede suponer que la difusión de las líneas de campo se lleva a cabo a

travez de una trayectoria azarosa, de tal forma que hay una longitud de paso característica dada por:  $\Delta r = (\delta B_r/B)L_c$ .

Esta definición de la longitud característica proporciona las propiedades de transformación de  $L_c$ , debido a que  $\Delta r$  y  $\delta B_r$  están gobernadas por la turbulencia local, de tal forma que se transforman adecuadamente bajo  $B_1$ .

Las propiedades de transformación de  $\delta B_r$  están dadas por la ecuación 6.36, y  $\Delta r$  se transforma como:

$$\Delta r = (r/sq)\Delta x$$

$$\Delta x \rightarrow \mu_3 \Delta x = \sum C_{a,b,c,d,e} \mu_1^{a+2d} \mu_2^{b-c} \mu_3^{-2d} q^a K^b B^c S^d s^e$$

Al exigir la invariancia de escala se obtiene:

$$\Delta x = qS^{-1/2} \sum C_{b,e} (K\beta^*)^b s^e$$

de tal forma que:

$$\Delta r = rS^{-1/2} F(\alpha, s) \quad 6.38$$

Como  $L_c = (\delta B_r/B)^{-1} \Delta r$ , se tiene:

$$L_c = qR_0 F_1(\alpha, s)^{-1/2} F(\alpha, s) \quad 6.39$$

El coeficiente de difusión  $D_n$  tiene la forma:

$$D_n = (r^2/qR_0 S) F_2(\alpha, s) \quad 6.40$$

donde  $F_2(\alpha, s) = F_1(\alpha, s)^{1/2} F(\alpha, s)$ .

El coeficiente de transporte anómalo para un plasma no colisional en un campo magnético con estructura estocástica es:

$$D_2 = (r^2 v_e / qR_0 S) F_2(\alpha, s) \quad 6.41$$

Al observar las ecs. 6.37 y 6.41, se puede decir que el problema de determinar los coeficientes de transporte, para los casos expuestos, se ha reducido a determinar la forma de dos funciones que sólo dependen de los parámetros  $\alpha$  y  $s$ .

Las funciones  $F_1(\alpha, s)$  y  $F_2(\alpha, s)$  se pueden determinar si se conside

ra el comportamiento adicional de la turbulencia, el cual dio origen a la transformación de escala  $B_2$ .

Si se aplica la transformación  $B_2$  a las fluctuaciones del campo  $\delta B_r$  se tiene:

$$\left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \right]^2 \rightarrow \nu_1^{-4} \nu_2^{-2} \nu_3^2 \nu_9^{-4} \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \right]^2 = \sum_{a,b,c,d,e} C \nu_1^{-a-2b} \nu_2^{2a+b+d} \nu_3^{-2a} \nu_9^{2a+c} \nu_{11}^{-b+c} \times S^a K^b \beta^{*c} s^d q^e$$

Bajo la invariancia de escala:

$$a = -1; b = 5/2; c = 5/2; d = -5/2; e = -2$$

$$(\delta \bar{\psi} / \delta y)^2 = \sum C' (S q^2 s^{5/2})^{-1} (K \beta^*)^{5/2}$$

de tal forma que:

$$(\delta B_r / B)^2 = g_1 (r^2 / R_0^2 q^2 S) (K \beta^* / s)^{5/2} \quad 6.42$$

Al comparar las ecs. 6.36 y 6.42 se determina que:

$$F_1(\alpha, s) = g_1 (\alpha / s)^{5/2}$$

donde  $g_1$  es una constante multiplicativa.

Si se aplica  $B_2$  a  $\Delta r$  se tiene:

$$\Delta x \rightarrow \nu_3 \Delta x = \sum C \nu_1^{-a-2b} \nu_2^{2a+b+d} \nu_3^{-2a} \nu_9^{2a+c} \nu_{11}^{-b+c} S^a K^b \beta^{*c} s^d q^e$$

Bajo la invariancia de escala:

$$a = -1/2; b = 1/4; c = 1/4; d = 3/4; e = 1.$$

$$\Delta x = \sum C' (q / S^{1/2}) (K \beta^*)^{1/4} s^{3/4}$$

$$\Delta r = g (r / S^{1/2}) (K \beta^* / s)^{1/4} \quad 6.43$$

Al comparar las ecs. 6.38 y 6.43 se concluye:

$$F(\alpha, s) = g (\alpha / s)^{1/4}$$

Como  $F_2(\alpha, s) = F_1(\alpha, s)^{1/2} F(\alpha, s)$ , se tiene:

$$F_2(\alpha, s) = g_2 (\alpha / s)^{3/2}$$

De esta forma, se tiene que, para el transporte a lo largo de líneas de campo estocásticas, los coeficientes de transporte son:

$$D_1 = g_1 \eta [(M/m) \beta]^{1/2} [(\nu_e / \nu_c) R_0 q] (\alpha / s)^{5/2}$$

para plasmas colisionales y

$$D_2 = g_2 \eta [(M/m)\beta]^{1/2} (\alpha/s)^{3/2}$$

para plasmas no colisionales, conjuntamente con:

$$D_{\perp} = g_{\perp} [(r^2/qR_0S) (\alpha/s)^{3/2}; \quad \tau_c = g_c Rq (\alpha/s)$$

$$\delta B_r/B = g' (r/R_0 qS^{1/2}) (\alpha/s)^{5/4}$$

donde los coeficientes de difusión y la amplitud de las fluctuaciones del campo magnético están completamente determinadas salvo una constante multiplicativa. Adicionalmente se observa que el nivel de fluctuaciones es proporcional a  $S^{-1/2}$ .

En las ecuaciones anteriores se ha utilizado:

$$r^2 v_e / R_0 q S = \eta v_e \rho^{1/2} / B_0 = \eta (v_e^2 \rho \beta / P)^{1/2} = \eta (M \beta / m)^{1/2}$$

con  $M/m = v^2 \rho / P$  y  $P = m v^2 \rho / M$

## 2.2.- Turbulencia debida a Gradientes Resistivos.

(Connor, 1986a).

Los plasmas de borde tokamak exhiben un tipo de turbulencia caracterizada por grandes fluctuaciones en la densidad y en el potencial electrostático en las regiones donde el transporte a través del plasma es significativo.

Una comprensión realista del comportamiento del transporte y de las fluctuaciones observadas puede ayudar a la optimización de los diseños propuestos para los divisores y los sistemas de limitadores, y a la obtención de una visión completa de los efectos de la turbulencia de borde en los regímenes de operación propuestos en los tokamaks, tales como el modo-H ASDEX y en los proyectos de bombeo en el borde.

Como la turbulencia de borde es bastante intensa y, en base a los experimentos, bien diagnosticada, proporciona una base para el desarrollo de modelos más realistas de la turbulencia no lineal del plasma.

La turbulencia estimulada por gradientes de resistividad, via ciertos mecanismos tales como los modos ondulatorios (rippling), ha sido propuesta como una posible explicación para las fluctuaciones de borde y para el transporte anómalo.

En base a previas investigaciones, se han discutido la Teoría cuasi lineal y lineal de los modos ondulatorios (rippling) (Carerras et al, 1982), una elemental teoría de la transición inicial a la evolución no lineal (Callen et al, 1983) y la viabilidad de los modos ondulatorios como una explicación de la turbulencia de borde observada en los tokamaks (Callen et al, 1983).

Los modos ondulatorios (rippling) son modos resistivos estimu

lados por un gradiente de resistividad en la presencia de una corriente a lo largo del campo magnético. Estos dependen de una perturbación de la resistividad en la ley de Ohm, la cual surge en la presencia de un gradiente radial de resistividad. Si la resistividad depende sólo de la temperatura (esto es, los efectos de impurezas son ignorados), entonces la inclusión de una conducción térmica del electrón paralela tiende a suprimir la perturbación resistiva y, por lo tanto, a reducir la razón de crecimiento para un número de modo poloidal dado  $m$ , (se considera  $m > 1$ ).

Un gran número de tratamientos de la evolución no lineal de la turbulencia de los modos ondulatorios han sido reportados en la literatura existente. En particular García et al, (1985), han compilado toda esta información y han proporcionado una discusión completa y sofisticada de la turbulencia debida a los gradientes resistivos, y han obtenido, adicionalmente, una expresión para la difusividad térmica:

$$D \approx 1.34 (L_s E_0 / L_\eta B_0)^{4/3} (\chi_s \langle k_{rms}^{\prime 2} \rangle)^{-1/3} \quad 6.44$$

donde  $L_s$  y  $L_\eta$  son las escalas de longitud del torcimiento (shear) magnético y del gradiente de resistividad,  $E_0$  y  $B_0$  son los campos toroidales eléctrico y magnético, y  $\langle k_{rms}^{\prime 2} \rangle$  es la raíz cuadrada media promedio sobre el espectro turbulento de  $k_{rms}' = m/rL_s$ .

En la evaluación de esta expresión, los autores usaron los resultados de una simulación numérica con helicidad múltiple, produciendo un valor de  $\langle m^2 \rangle_{rms} \approx 46$ .

Este resultado está en razonable acuerdo con las mediciones experimentales.

Como se ha visto, la turbulencia debida a gradientes resistivos, via la turbulencia de los modos ondulatorios, se presenta co-

mo una posible explicación de las fluctuaciones observadas en la región borde de los tokamaks.

Existe un conjunto de ecuaciones que describen adecuadamente a los modos ondulatorios el cual se obtiene al considerar el límite electrostático de las ecuaciones MHD resistivas en una geometría cilíndrica, (ver apéndice B), utilizando argumentos análogos a los aplicados en la deducción de las ecuaciones MHD reducidas de de Strauss.

El conjunto consta de dos ecuaciones no lineales, las cuales determinan las fluctuaciones del potencial electrostático y de la resistividad. Si se combina la ley de Ohm con la ecuación de vorticidad, en el marco de las ecuaciones MHD reducidas, se encuentra que las fluctuaciones del potencial electrostático satisfacen la ecuación:

$$(\rho/B_z^2) \frac{d}{dt} \nabla_\perp^2 \tilde{\phi} = - \frac{1}{\eta_0} \nabla_\perp^{(0)2} \tilde{\phi} - J_z \nabla_\perp^{(0)} \tilde{\eta} / \eta_0 \quad 6.45$$

en donde  $\tilde{\phi}$  representa las fluctuaciones del potencial electrostático,  $\rho$  la densidad de masa,  $J_z$  y  $B_z$  la corriente y el campo magnético a lo largo del eje del cilindro, y además, la resistividad se ha escrito como la suma de una parte promedio, que representa el estado base del sistema, y una parte que fluctúa rápidamente:

$$\eta = \eta_0 + \tilde{\eta}$$

Por otro lado, las fluctuaciones de la resistividad se determinan a partir de las ecuaciones de energía para el electrón:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\eta} - \chi_\perp \nabla_\perp^{(0)2} \tilde{\eta} = -(1/rB_0) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \frac{d}{dr} \eta_0 \quad 6.46$$

En las ecs. 6.45,46 se encuentran la derivada convectiva no-lineal

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + B_0^{-1} \nabla_\perp \tilde{\phi} \times e_z \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + (rB_z)^{-1} \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]$$

y los operadores gradientes, paralelo y perpendicular al campo mag

nético:

$$v_n^{(0)} = (B_0/rB_x) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}; \quad v_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

En este caso se tiene que las cantidades fluctuantes varían rápidamente en la dirección perpendicular al campo magnético, pero lentamente a lo largo de él.

Para expresar esto formalmente, se adoptará una forma adimensional para las cantidades fluctuantes introduciendo las variables dimensionales siguientes:

$$\tau = (B_x/Rq\rho^{1/2})t; \quad x = (r - r_0) \frac{1}{q} \frac{dq}{dr}; \quad z = R\xi$$

$$\phi = (qR\rho^{1/2}/r^2 B_x^2) \bar{\phi}; \quad \eta = \bar{\eta}/\eta_0; \quad C = x\xi + q\theta$$

en donde se tiene que  $r_0$  es un radio de referencia, de tal forma que  $x$  es una coordenada local. Para simular la geometría de un Tokamak, con radio mayor  $R$ , se introduce la variable  $\xi = z/R$ , que juega el papel de un ángulo toroidal, y se expresa el torcimiento magnético en términos del factor  $q$ :  $s = (r/q)dq/dr$ .

La forma en que las ecs. 6.45,46 se transforman en términos de las variables adimensionales, es la siguiente: Se supone que las variaciones de  $s$  con respecto a  $r$  son pequeñas, de tal forma que las derivadas de  $s$  con respecto a  $r$  se puedan despreciar.

Se define el operador  $[f, g]_{\theta, x}$  como:

$$[f, g]_{\theta, x} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Utilizando los elementos anteriores, la derivada convectiva no lineal toma la forma:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + (rB_x)^{-1} [\bar{\phi}, ]_{\theta, r} = \frac{\partial \tau}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} + (rB_x)^{-1} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\phi}} [\bar{\phi}, ]_{\theta, x}$$

Como se tiene que:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{q} \frac{dq}{dr} - (r-r_0) q^{-2} \left[ \frac{dq}{dr} \right]^2 + (r-r_0) q^{-1} \frac{d^2 q}{dr^2} + \dots$$

Se obtiene la forma de la derivada convectiva no lineal:

$$\frac{d}{dt} = (B_z/qR\rho^{1/2}) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + s[\Phi, ]_{\theta, x} \right] = (B_z/qR\rho^{1/2}) \frac{d}{dt} \quad 6.47$$

El gradiente perpendicular toma la forma:

$$v_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial x} + \left[ \frac{\partial x}{\partial r} \right]^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Como  $\partial^2 x / \partial r^2 = r_0^{-1} \partial s / \partial r$ , es posible despreciar este término. Así:

$$v_{\perp}^2 = r^{-2} \left[ s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] = r^{-2} \tilde{v}_{\perp}^2 \quad 6.48$$

El gradiente paralelo toma la forma:

$$v_{\parallel}^{(0)} = \frac{1}{qR} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + q \frac{\partial}{\partial \xi} - x \frac{\partial}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{qR} \nabla_{\parallel} \quad 6.49$$

Tomando en cuenta las expresiones 6.47, 48, 49:

La ec. 6.46 se transforma como:

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}_{\perp}^2 \Phi = -(r^2 B_z / \eta_0 q R \rho^{1/2}) v_{\perp}^2 \Phi - (J_z q R / B_z) \nabla_{\parallel} \eta$$

La ec. 6.45 se transforma como:

$$\frac{d\eta}{dt} - (x \rho^{1/2} / B_z q R) \nabla_{\perp}^2 \eta = - \frac{r}{\eta_0} \frac{d}{dt} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

Se definen los coeficientes  $S$ ,  $j$ ,  $K$ ,  $1/l$  como:

$$S = r^2 B_z / \eta_0 q R \rho^{1/2}; \quad j = R q J_z / B_z; \quad K = x \rho^{1/2} / q R B_z;$$

$$1/l = (r/\eta_0) (d\eta_0/dr)$$

Las ecs. 6.45, 46 toman la forma adimensional definitiva:

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}_{\perp}^2 \Phi = -S v_{\perp}^2 \Phi - j \nabla_{\parallel} \eta \quad 6.50$$

$$\frac{d}{dt} \eta - K \nabla_{\perp}^2 \eta = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad 6.51$$

Las ecs. 6.50, 51 describen a los modos Ondulatorios. En estas se llevará a cabo el análisis de invariancia de escala, para determinar las características de la turbulencia debida a estos modos. Se procede de forma análoga a la utilizada en los modelos anteriores, determinando las transformaciones de escala que permitan la invariancia de forma de las ecuaciones de este modelo, escalando

todas las variables y coeficientes de interés.

Así, la transformación de escala general es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}': x &\rightarrow \alpha_1 x; \tau \rightarrow \alpha_2 \tau; \theta \rightarrow \alpha_3 \theta; \phi \rightarrow \alpha_4 \phi; S \rightarrow \alpha_5 S; l \rightarrow \alpha_6 l; \eta \rightarrow \alpha_7 \eta; \\ K &\rightarrow \alpha_8 K; j \rightarrow \alpha_9 j; s \rightarrow \alpha_{10} s. \end{aligned}$$

Al aplicar la transformación  $\mathcal{E}'$  a las ecs. 6.50, 51 y exigir la invariancia de forma de las mismas, se obtienen las relaciones entre los parámetros de escala, que determinan la forma de la transformación de escala que permite la invariancia de forma de las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \alpha_2^{-1} &= \alpha_1^{-1} \alpha_3^{-2} \alpha_4 \alpha_{10}; \alpha_1^{-2} \alpha_2^{-1} \alpha_4 \alpha_{10}^2 = \alpha_1^2 \alpha_3^{-2} \alpha_4 \alpha_5 = \alpha_1 \alpha_3^{-1} \alpha_7 \alpha_9, \quad 6.52 \\ \alpha_3^{-2} &= \alpha_{10}^2 \alpha_1^{-2}; \alpha_2^{-1} \alpha_7 = \alpha_1^2 \alpha_3^{-2} \alpha_7 \alpha_8 = \alpha_3^{-1} \alpha_4 \alpha_6^{-1}; \alpha_1 = \alpha_3 \alpha_{10} \end{aligned}$$

De esta forma, la transformación de escala que permite la invariancia de forma es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: x &\rightarrow \alpha_1 x; \tau \rightarrow \alpha_2 \tau; \theta \rightarrow \alpha_1 \alpha_{10}^{-1} \theta; \phi \rightarrow \alpha_1^2 \alpha_2^{-1} \alpha_{10}^{-2} \phi; S \rightarrow \alpha_1^{-2} \alpha_2^{-1} S; \\ l &\rightarrow \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_9 l; \eta \rightarrow \alpha_2^{-2} \alpha_9^{-1} \alpha_{10}^{-1} \eta; K \rightarrow \alpha_2^{-1} \alpha_{10}^{-2} K; j \rightarrow \alpha_9 j; s \rightarrow \alpha_{10} s. \end{aligned}$$

(Se puede notar que la transformación de escala  $\mathcal{E}$  no respeta la periodicidad de las coordenadas angulares, pero es permisible debido a que se aplica a fluctuaciones con escalas de longitud pequeñas).

Se considera nuevamente la existencia de un coeficiente de transporte local, dado por la ec. 6.0.

Es posible expresarlo en términos de las variables adimensionales  $x$  y  $\tau$ , para aplicar directamente la transformación  $\mathcal{E}$ .

$$D = \frac{(\Delta x)^2}{t} - \frac{r^2}{s^2} \frac{B}{Rq\rho^{1/2}} \frac{(\Delta x)^2}{\tau}$$

Sea  $\hat{D} = (\Delta x)^2/\tau$  y se supone que  $\hat{D}$  se puede expresar como función de los parámetros  $S$ ,  $j$ ,  $K$ ,  $l$  y  $s$  en la forma de una serie.

Si se aplica la transformación  $\mathcal{E}$  a ambos lados de esta expresión:

$$\hat{D} \rightarrow \alpha_1^2 \alpha_2^{-1} \hat{D} = \sum C_{a,b,c,d,e} \alpha_1^{-2a+d} \alpha_2^{-a-c+2d} \alpha_9^{d+d} \alpha_{10}^{-2c+e} S^a j^b K^c l^d s^e$$

Al exigir la invariancia de forma de esta ecuación ante  $\mathcal{E}$ , se obtienen las relaciones entre los índices de escala:

$$-2a + d = 2; -a - c + 2d = -1; b + d = 0; -2c + e = 0.$$

La solución a estas relaciones es:

$$a = d/2 - 1; b = -d; c = 2 + 3d/2; e = 4 + 3d.$$

De esta forma, el coeficiente  $\hat{D}$  se puede expresar como:

$$\hat{D} = \sum_d C_d S^{d/2-1} j^{-d} k^{2+3d/2} l^d s^{4+3d} = (j/l)^{4/3} S^{-5/3} F\left(\frac{j^2}{SK^3 l^2 s^6}\right)$$

El coeficiente de transporte  $D$  tiene la forma:

$$D = \frac{r^2}{s^2} \frac{B}{R\varrho^{1/2}} \frac{1}{S^{5/3}} (j/l)^{4/3} F\left(\frac{j^2}{SK^3 l^2 s^6}\right) \quad 6.53$$

donde  $F$  es una función desconocida, pero que sólo depende de los parámetros indicados.

Es posible determinar la forma de la función  $F$ , a partir del principio de invariancia, si se define más exactamente la turbulencia. Si se supone que las fluctuaciones varían mucho más rápido en la dirección  $x$  (radial), que en la dirección  $\theta$  (poloidal), es posible eliminar el término  $\delta^2/\theta^2$  en la expresión para  $\tilde{v}_-^2$ :

$$\tilde{v}_-^2 = s^2 \delta^2 / \delta x^2$$

Las ecs. 6.50,51 preservan su forma debido a que  $\tilde{v}_-^2$  sólo cambia en su estructura interna.

Al aplicar la transformación  $\mathcal{E}$  a las ecs. 6.50,51, con la modificación hecha al laplaciano ortogonal, se observa que las relaciones entre los parámetros de escala se ven afectadas sólo por la eliminación del término  $\delta^2/\theta^2$ . Esto es, la relación  $\alpha_{10}^2/\alpha_1^2 = \alpha_j^{-2}$  desaparece de las relaciones 6.52, sin embargo, se conserva la transformación del laplaciano ortogonal.

La solución a las relaciones 6.52, eliminando la relación indicada, determina la transformación de escala:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' : x &\rightarrow \alpha_1 x; \tau \rightarrow \alpha_1^{-2} \alpha_3^2 \alpha_8^{-1} \tau; \theta \rightarrow \alpha_3 \theta; \phi \rightarrow \alpha_1^3 \alpha_3^{-1} \alpha_8 \alpha_{10}^{-1} \phi; \ell \rightarrow \alpha_6 \ell; \\ S &\rightarrow \alpha_1^{-2} \alpha_8 \alpha_{10}^2 S; K \rightarrow \alpha_8 K; \eta \rightarrow \alpha_1 \alpha_6^{-1} \eta; j \rightarrow \alpha_1 \alpha_3^{-2} \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_{10}^2 j; \\ s &\rightarrow \alpha_{10} s. \end{aligned}$$

Aplicando  $\mathcal{E}'$  al coeficiente  $\hat{D}$  se tiene:

$$\hat{D} \rightarrow \alpha_1^4 \alpha_3^{-2} \alpha_8 \hat{D} = \sum_{a,b,c,d,e} \alpha_1^{-2a+b} \alpha_3^{-2b} \alpha_6^{b+d} \alpha_8^{a+2b+c} \alpha_{10}^{2a+2b+e} S^a j^b K^c \ell^d s^e$$

La invariancia de escala determina que:

$$-2a + b = 4; -2b = -2; b + d = 0; a + 2b + c = 1; 2a + 2b + e = 0$$

cuya solución:  $a = -3/2; b = 1; c = 1/2; d = -1; e = 1$

determina la forma de  $\hat{D}$ :

$$\hat{D} = g S^{-3/2} j K^{1/2} \ell^{-1} s$$

y la forma para el coeficiente de transporte  $D$  es:

$$D = g \frac{r^2}{s} \frac{B}{Rq\rho^{1/2}} \frac{K^{1/2}}{S^{3/2}} \frac{j}{\ell}$$

Utilizando las definiciones de  $S, j, K$  y  $\ell$  se tiene:

$$D = g \eta^{3/2} \chi^{1/2} \frac{J}{sB^2} Rq\rho^{1/2} \frac{d}{dr} \text{Ln} \eta_0 \quad 6.54$$

donde  $g$  es una constante multiplicativa no determinada.

Es posible determinar la forma de la función  $F$  comparando la ec.

6.53 con la ec. 6.54. En este caso se obtiene que:

$$F = (SK^2 \ell^2 s^6 / j^2)^{1/6} \quad 6.55$$

Al inicio de esta discusión se planteó que Garcia, et al, tomando como base la extensa discusión sobre la turbulencia de los gradientes resistivos hecha por ellos mismos, propucieron una expresión para el coeficiente de transporte ec. 6.44, la cual predice que  $D \propto \chi_n^{-1/3}$ . Si se observa la expresión obtenida mediante el argumento de invariancia de escala, ec. 6.54, se notará que esta predice  $D \propto \chi_n^{1/2}$ , lo que muestra la incompatibilidad de las dos expresiones propuestas. Mas sin embargo, esta discrepancia es engaño

sa debido a que la ec. 6.44 contiene una cantidad que no se encuentra determinada,  $\langle m^2 \rangle_{rms}$ .

Para determinar la forma en que  $\langle m^2 \rangle_{rms}$  se escala con los parámetros  $S$ ,  $j$ ,  $K$ ,  $\ell$  y  $s$  se puede aplicar la transformación  $\mathcal{E}$  a esta expresión y exigir la invariancia de forma. Para esto se supone que  $m$ , siendo el número de modo poloidal, está relacionado con las variaciones en la dirección poloidal, de tal forma que  $m \sim \partial/\partial\theta$ , y que es posible determinar el término  $\langle m^2 \rangle_{rms}$  como una serie.

Aplicando  $\mathcal{E}$  a este término:

$$\langle m^2 \rangle_{rms} \rightarrow \alpha_j^{-2} \langle m^2 \rangle_{rms} = \sum C \alpha_1^{-2a+b} \alpha_3^{-2b} \alpha_6^{b+d} \alpha_8^{a+2b+c} \alpha_{10}^{2a+2b+e} S^a j^b K^c \ell^d s^e$$

Ante la invariancia de escala se tiene que:

$$a = 1/2; b = 1; c = -5/2; d = -1; e = -3$$

$$\langle m^2 \rangle_{rms} \sim S^{1/2} j K^{-5/2} \ell^{-1} s^{-3}. \quad 6.56$$

Una vez que se ha determinado el escalamiento para  $\langle m^2 \rangle_{rms}$  se puede revisar la ec. 6.44.

De esta expresión se tiene que:

$$D \propto (\chi_u \langle k_u'^2 \rangle_{rms})^{-1/3}.$$

Como  $k_u' = m/rL_s$ ,

$$D \propto (\chi_u \langle m^2 \rangle_{rms})^{-1/3}.$$

Como sólo se busca la dependencia con  $\chi_u$ , se tiene que:

$$\langle m^2 \rangle_{rms} \propto K^{-5/2} \propto \chi_u^{-5/2}$$

De esta forma se tiene que:

$$D \propto (\chi_u \chi_u^{-5/2})^{-1/3} = \chi_u^{1/2},$$

Y se observa que se recupera el resultado de la ec. 6.54,  $D \propto \chi_u^{1/2}$ .

Se encuentra que la ec. 6.54 está en concordancia con los tratamientos no lineales propuestos y recolectados por García, et al.

De esta forma:

$$D = \frac{J R g}{T B^2} \quad 6.57$$

$$T = \frac{s}{(\eta^2 \chi_{\perp} \rho)^{1/2}} \left[ \frac{d}{dT} \text{Ln} \eta \right] \quad 6.58$$

Aunque las razones de crecimiento para un número de modo fijo  $m$  se ven reducidas al aumentar  $\chi_{\perp}$ , se encuentra que el valor característico de  $m$  disminuye junto con  $\chi_{\perp}$ , de tal forma que la difusión aumenta. Este efecto está limitado por la condición de que el término relevante  $\langle m^2 \rangle_{r.m.s.}$  sea suficientemente grande para que sea apropiada una descripción de la turbulencia; esto es, para que las superficies racionales sean lo suficientemente densas para que los modos puedan interactuar entre sí.

La descripción electrostática podría ser también consistente para estos valores de  $m$  tan altos.

Al observar el escalamiento 6.57 se nota que este implica que la turbulencia no está tan restringida al borde del plasma, como se implica en el escalamiento 6.44. (Los efectos de altas temperaturas se ignoran en este modelo, tales como el efecto de los Radios de Larmor Finitos).

La combinación de las ecs. 6.44 y 6.56 muestra que la forma de la ec. 6.44 para la difusividad  $D$  está determinada por los argumentos de invariancia de escala, y es mucho más expresiva que lo que podrían implicar los cálculos no lineales particulares. Por otro lado, hay una ventaja en el cálculo de la ec. 6.44, y es el hecho de que este proporciona un valor para la constante  $g$ . Esto depende de la simulación numérica para  $\langle m^2 \rangle_{r.m.s.}$ , la cual se obtiene a partir de un conjunto particular de valores de los parámetros  $S$ ,  $j$ ,  $K$ ,  $l$  y  $s$ . Normalizando a este resultado, sería posible extender la validez de la ec. 6.44 con la ayuda de la ec. 6.56.

### 2.3.- Turbulencia de Ondas de Deriva Resistivas.

(Yagui, et al, 1987).

En esta sección se discuten las propiedades de invariancia de escala de la turbulencia de Ondas de Deriva Resistivas Electroestáticas en sistemas con geometría espiral.

Las ecuaciones que describen adecuadamente a este tipo de turbulencia se pueden derivar combinando la ecuación de inducción con la ecuación de vorticidad y con la ecuación de continuidad para electrones reducidas, en el límite de la aproximación electrostática, (ver apéndice C).

Como se está considerando un sistema que ofrece una geometría espiral, se utiliza un método de promedio sobre variaciones de longitud de onda corta del campo magnético debidas al arrollamiento espiral.

En las ecuaciones que describen a este modelo se hacen las suposiciones de incompresibilidad en la ec. de continuidad, y que el término de curvatura espiral se puede despreciar en la ec. de vorticidad.

El ordenamiento adecuado para el método de promedio se denomina "Expansión Stellarator", el cual fue desarrollado por Green y Johnson (1961).

Las ecs. que describen a este modelo son:

$$\frac{R\rho}{B_0} \frac{d}{dt} \nabla_{\perp}^2 \phi = \frac{R}{\eta B_0} (\tilde{B} \cdot \nabla)^2 (\phi - \frac{T}{e\rho_0} \rho) \quad 6.59$$

$$\frac{d}{dt} \rho = -M(e\eta B_0^2)^{-1} (\tilde{B} \cdot \nabla)^2 (\phi - \frac{T}{e\rho_0} \rho) \quad 6.60$$

Las ecuaciones se normalizan utilizando las cantidades:

$$\tau = t/\tau^*; \quad r^* = r/a; \quad z^* = z/R; \quad \phi^* = \tau^* \phi / B_0 a^2; \quad T^* = \rho_0^{1/2} RT / e B_0^2 r^2$$

$$n^* = neR/\rho^{1/2}; \quad \eta^* = \tau^* \eta / a^2; \quad \tau^* = \rho_0^{1/2} R / B_0$$

Como se desea describir las propiedades de la turbulencia lo-

cal, es necesario considerar que, en el límite de  $\eta^*$  pequeñas, la turbulencia involucra fluctuaciones cuya escala de longitud a través del campo magnético es pequeña comparada con las dimensiones del plasma, pero es comparable a estas a lo largo del campo magnético. De esta forma, si se desea explotar las características de las fluctuaciones, se puede considerar que las variables  $\phi^*$  y  $n^*$  se pueden expresar como la suma de una parte base, y otra que representa a las fluctuaciones:

$$\phi^* = \bar{\phi}; n^* = n_0^*(1 + \bar{n})$$

$n_0^*$  es el valor base y  $\bar{\phi}$  y  $\bar{n}$  son las fluctuaciones no lineales.

Se introducen además nuevas variables locales independientes:

$$x = (r - r_0)dq/dr; y = \zeta - q\theta; z = \theta$$

donde  $r_0$  es una superficie de referencia.

Existen dos escalas de longitud distintas. Las fluctuaciones varían rápidamente en las direcciones  $x$  e  $y$ , pero lentamente en la dirección  $z$ , mientras que las cantidades base varían lentamente en todas direcciones. Así, las ecs. 6.59,60 toman la forma:

$$\frac{d}{d\tau} \bar{n} + qK \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = -(qn_0^*)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\eta} \left[ \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi} - \frac{T^*}{q} \frac{\partial}{\partial z} \bar{n} \right] \quad 6.61$$

$$\frac{d}{d\tau} v_z^{2*} \bar{\phi} = -\frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\eta} \left[ \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi} - \frac{T^*}{q} \frac{\partial}{\partial z} \bar{n} \right] \quad 6.62$$

Los operadores  $v_z^{2*}$  y  $d/d\tau$  se definen como:

$$v_z^{2*} = q^2 s^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial z} - q \frac{\partial}{\partial y} \right]^2$$

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + qs \left[ [\bar{\phi}, ]_{x,z} - z[\bar{\phi}, ]_{y,z} - q[\bar{\phi}, ]_{x,y} \right]$$

$$[f, ]_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}$$

Si se supone adicionalmente que las fluctuaciones varían más rápido en la dirección  $x$  que en la dirección  $y$ , los operadores anteriores se reducen a la forma:

$$v_i^2 = q^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + q^2 s [\tilde{\Phi}, ]_{y,x}$$

Para investigar las propiedades de invariancia de escala de las ecs. 6.61,62, se aplica la transformación general de escala

$$\mathcal{B}_0: x \rightarrow \lambda_1 x; \eta \rightarrow \lambda_2 \eta; q \rightarrow \lambda_3 q; s \rightarrow \lambda_4 s; n_0 \rightarrow \lambda_5 n_0; \tau \rightarrow \lambda_6 \tau;$$

$$y \rightarrow \lambda_7 y; \tilde{\Phi} \rightarrow \lambda_8 \tilde{\Phi}; \tilde{n} \rightarrow \lambda_9 \tilde{n}; T \rightarrow \lambda_{10} T; K \rightarrow \lambda_{11} K; z \rightarrow \lambda_{12} z.$$

a las ecuaciones anteriores, y se exige la invariancia de forma de estas ante  $\mathcal{B}_0$ . Así, se obtienen relaciones entre los parámetros de escala que definen la transformación que permite la invariancia de forma de las ecs. 6.61,62 ante cambios de escala.

$$\lambda_{10} = \lambda_1^2 \lambda_3^{-2} \lambda_4^{-2} \lambda_5; \lambda_{11} = \lambda_1^{-1} \lambda_3 \lambda_4 \lambda_9 = \lambda_1 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-3} \lambda_5^{-1}; \lambda_7 = \lambda_1;$$

$$\lambda_9 = \lambda_1^2 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-4} \lambda_4^{-1} \lambda_5^{-1}; \lambda_8 = \lambda_1^4 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-6} \lambda_4^{-3}; \lambda_6 = \lambda_1^{-2} \lambda_2 \lambda_3^4 \lambda_4^2$$

La transformación tiene la forma:

$$\mathcal{B}: x \rightarrow \lambda_1 x; \eta \rightarrow \lambda_2 \eta; q \rightarrow \lambda_3 q; s \rightarrow \lambda_4 s; n_0 \rightarrow \lambda_5 n_0; y \rightarrow \lambda_7 y;$$

$$\tau \rightarrow \lambda_1^{-2} \lambda_2 \lambda_3^4 \lambda_4^2 \tau; \tilde{\Phi} \rightarrow \lambda_1^4 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-6} \lambda_4^{-3} \tilde{\Phi}; \tilde{n} \rightarrow \lambda_1^2 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-4} \lambda_4^{-1} \lambda_5^{-1} \tilde{n};$$

$$T \rightarrow \lambda_1^2 \lambda_3^{-2} \lambda_4^{-2} \lambda_5 T; K \rightarrow \lambda_1 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-3} \lambda_5^{-1} K.$$

Se supone que el coeficiente de transporte  $\mathcal{D}'$  se puede expresar como una serie en términos de los parámetros incluidos en las ecs. 6.61,62:

$$\mathcal{D}' = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau} = \sum C_{s,t,u,v,w,x} q^s \eta^t n_0^u K^v s^w n^{*x} \quad 6.63$$

Se puede observar que en la expresión 6.63 se encuentran seis cantidades de equilibrio, que son mayores a las cantidades independientes en la transformación de escala  $\mathcal{B}$ .

Se espera que el coeficiente de transporte sea descrito por  $\underline{u}$  na función desconocida que dependa de un sólo parámetro.

Para verificar esto se aplica la transformación  $\mathcal{B}$  a la ec. 6.63 y se exige la invariancia de forma. Esta exigencia proporcio-

na las relaciones entre los índices de escala que determinan la forma funcional del coeficiente de transporte.

$$\lambda_1^4 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-4} \lambda_4^{-2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau} = \sum C \lambda_1^{2u+v} \lambda_2^{1-v} \lambda_3^{s-2u-3v} \lambda_4^{-2u+w} \lambda_5^{u-v+x} \\ \times q^u \eta^{s+t} T^u K^v S^w n_0^{s+x}$$

La invariancia implica:

$$v = 4 - 2u; t = 3 - 2u; w = 2u - 2; x = 4 - 3u; s = -4u + 8.$$

Como se observa que existe un único índice de escala independiente el coeficiente de transporte dependerá de un argumento simple:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau} = \frac{q^8 \eta^{s_3} K^4 n_0^4}{s^2} F \left( \frac{T^s s^2}{q^4 \eta^{s_2} K^2 n_0^3} \right)$$

El coeficiente de transporte  $D_0 = (\Delta x)^2 / \Delta \tau$  se expresa como:

$$D_0 = \frac{K^2}{s^2} D_{ps} \Gamma \left( \frac{T^s s^2}{q^4 \eta^{s_2} K^2 n_0^3} \right) \quad 6.64$$

donde  $D_{ps}$  es el coeficiente de transporte pseudoclásico.

Se puede avanzar un poco más en la determinación del coeficiente de transporte  $D_0$  introduciendo alguna suposición adicional sobre la turbulencia local. Si se supone que las fluctuaciones satisfacen la condición:

$$\partial/\partial x - z\partial/\partial y \quad 6.65$$

en lugar de  $\partial/\partial x - \partial/\partial y$ , la coordenada  $z$  entra en la transformación de escala correspondiente a este modelo.

Aplicando  $B_0$  a las ecs. 6.61,62, tomando en cuenta la condición dada por 6.65, se obtiene la transformación de escala que caracteriza a estas fluctuaciones:

$$B': x \rightarrow \lambda_1 x; \eta \rightarrow \lambda_2 \eta; q \rightarrow \lambda_3 q; s \rightarrow \lambda_4 s; n_0 \rightarrow \lambda_5 n_0; z \rightarrow \lambda_6 z; \\ \tau \rightarrow \lambda_1^{-2} \lambda_2 \lambda_3^4 \lambda_4^2 \lambda_6^2 \tau; y \rightarrow \lambda_1 \lambda_6 y; \bar{\phi} \rightarrow \lambda_1^4 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-6} \lambda_4^{-3} \lambda_6^{-1} \bar{\phi}; \\ \bar{n} \rightarrow \lambda_1^2 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-1} \lambda_4^{-1} \lambda_5^{-1} \lambda_6^{-1} \bar{n}; T \rightarrow \lambda_1^2 \lambda_3^{-2} \lambda_4^{-2} \lambda_5 T; K \rightarrow \lambda_1 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-1} \lambda_5^{-1} \lambda_6^{-1} K$$

La ec. 6.63 responde ante la aplicación de la transformación  $B'$  de

la forma siguiente:

$$s = 4; t = 1; u = 1; v = 2; w = 0; x = 1$$

El coeficiente de transporte tiene la forma:

$$D_0 = g_0 \frac{r^2}{q^2 s^2 \tau} q^4 \eta^* T^* K^2 \eta_0^*$$

el cual se puede representar como:

$$D_0 = g_0 \frac{k^2}{s^2} D_p \quad 6.66$$

donde  $g_0$  es una constante. Esto es, para este tipo de fluctuaciones la función  $F$  es una constante.

Se debe de notar que la transformación de escala  $B'$  no respeta la periodicidad de la coordenada angular, más sin embargo esto es permisible debido a que el análisis de invariancia de escala se aplica a fluctuaciones de longitudes de onda pequeñas.

Se encuentra que el coeficiente de transporte 6.66 se perfila como el coeficiente para el transporte anómalo en la turbulencia de borde (Yagi, et al, 1987). Además se encuentra que el coeficiente de transporte aumenta hacia la región borde del plasma.

Si se aplica la transformación  $B'$  a las fluctuaciones de la densidad y de la función de flujo, suponiendo que estas se pueden expresar como series, en la forma 6.6, se obtiene que estas tienen la dependencia:

$$\bar{n} \sim T^{*1/2} K \eta_0^{*-1/2}; \quad \bar{\phi} \sim T^{*3/2} K \eta_0^{*-1/2}$$

Debido a que a lo largo del análisis se ha supuesto que  $T$  es constante, lo cual es válido cerca de la región de borde de la mayoría de los tokamaks, los resultados anteriores indican que las fluctuaciones aumentan hacia el borde.

## 2.4.- Turbulencia debida a los modos de Intercambio Resistivo.

(Yagi, et al, 1987)

Cuando se presenta un gradiente de densidad invertido en un campo gravitacional, o un gradiente de presión invertido en un campo magnético curvo se estimula una inestabilidad denominada Modos de Intercambio. De esta forma, los modos de intercambio en un plasma termonuclear confinado magnéticamente son estimulados por gradientes de presión locales y por la curvatura del campo magnético. Esta sección se limitará a los modos de Intercambio de tipo resistivo o Modos g.

La turbulencia debida a los modos de intercambio resistivo o modos g (Yagi, et al, 1987), para plasmas con valores finitos del parámetro  $\beta$  en sistemas de confinamiento magnético con estructura helicoidal, puede ser descrita por las ecuaciones reducidas de movimiento, de inducción y de continuidad (ver apéndice C).

Estas tienen la forma:

$$R\rho B_0^{-1} \frac{d}{dt} \nabla_{\perp}^2 \Psi = - \bar{B} \cdot \nabla_{\perp}^2 \Psi + RT \nabla \Omega \times \nabla n \cdot z \quad 6.67$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -RB_0^{-1} \bar{B} \cdot \nabla \phi + \eta \nabla_{\perp}^2 \Psi \quad 6.68$$

$$\frac{dn}{dt} = 0 \quad 6.69$$

donde  $z$  denota la dirección a lo largo del sistema toroidal,  $T$  la temperatura de los electrones, la cual se supone constante,  $\phi$  un potencial magnético dado por el arrollamiento helicoidal de los conductores.

El campo magnético promedio está dado por  $\bar{B} = z \times \nabla (\Psi + \Psi_s) / R + B_0 z$ .

El término de curvatura se define como  $\Omega = (\nabla \phi)^2 / B_0^2$  y la función de flujo  $\Psi_s$  está dada externamente por el campo magnético helicoidal  $\Psi_s = \nabla \langle \phi \rangle \times \nabla \phi \cdot z / 2B_0$ . La barra indica un promedio sobre la longitud de paso del campo espiral, y los paréntesis  $\langle \rangle$  representan u-

na integral con respecto a la variable que corresponde a rápidas variaciones a lo largo de la dirección z. La derivada convectiva está representada por  $d/dt$ .

Debido a que interesa el caracter local de la turbulencia, es posible introducir un conjunto de cantidades adimensionales normalizadas. Bajo estas variables las tres ecuaciones de campo pueden expresarse en una forma normalizada, la cual es apropiada para estudiar las propiedades de invariancia de escala para los modos g. Las formas adimensionales adecuadas son:

$$\begin{aligned} \tau &= t/r^* ; \phi^* = (\tau^*/r^2 B_0) \phi ; \Psi^* = (1/r^2 B_0) \Psi ; \eta^* = (\tau^*/r^2) \eta ; \\ T^* &= (\tau^*/e B_0 r^2) T ; n^* = (eR/\rho_0^{1/2}) n ; \tau^* = \rho_0^{1/2} R/B_0 . \end{aligned}$$

En el límite cuando se tienen valores pequeños del parámetro  $\eta^*$  la turbulencia presenta fluctuaciones cuyas escalas de longitud a través del campo magnético son pequeñas comparadas con las dimensiones del plasma, pero a lo largo del campo las escalas de longitud son comparables a las dimensiones del plasma. Estas características de las fluctuaciones pueden introducirse en las ecuaciones de campo al considerar que las funciones de flujo y la densidad se pueden considerar como compuestas de una parte fluctuante y una base:  $\Psi^* = \Psi_0^* + \bar{\Psi}$ ;  $\phi^* = \bar{\phi}$ ;  $n^* = n_0^*(1 + \bar{n})$ , donde  $\Psi_0^*$  y  $n_0^*$  son los valores base y  $\bar{\Psi}$ ,  $\bar{\phi}$  y  $\bar{n}$  representan a las fluctuaciones no lineales.

Para representar el caracter local de la turbulencia se introducen nuevas variables locales independientes  $x = (r - r_0) dq/dr$ ;  $z = \theta$ ;  $y = \xi - q\theta$ , donde  $r_0$  es una superficie de referencia. Esto significa que existen dos escalas de longitud en el sistema. Las fluctuaciones varían rápidamente en las direcciones x y y pero lentamente en la dirección z, mientras que las cantidades base varían lentamente en todas direcciones.

Considerando la normalización anterior, las fluctuaciones y las variables locales, se obtienen las ecuaciones que describen el comportamiento de las cantidades fluctuantes (ver apéndice C).

$$\frac{d}{dt} v_{\perp}^{2*} \bar{\Psi} = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} v_{\perp}^{2*} \bar{\Psi} + q^2 s [\bar{\Psi}, v_{\perp}^{2*} \bar{\Psi}]_{x,y} - \frac{\beta^* \partial \bar{n}}{q \partial y} \quad 6.70$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + \eta^* v_{\perp}^{2*} \bar{\Psi} \quad 6.71$$

$$\frac{d \bar{n}}{dt} - K q \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = 0 \quad 6.72$$

Los operadores y parámetros se definen como:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + q^2 s [\bar{\phi}, ]_{x,y}; \quad v_{\perp}^{2*} = q^2 s \left[ \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 + q^2 \partial^2 / \partial y^2;$$

$$[f, g]_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$s = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}; \quad K = (r/n_0^*) dn_0^*/dr; \quad \beta^* = (n_0 T_e r / B_0^2) \frac{\partial \Omega}{\partial r} = B_p r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

Bajo la suposición de que la turbulencia de los modos  $g$  tiene características de fluctuaciones electrostáticas es posible eliminar el término  $\partial \bar{\Psi} / \partial t$  en la ley de Ohm, debido a que la condición  $\partial \bar{\Psi} / \partial t \ll \eta^* v_{\perp}^{2*} \bar{\Psi} \ll \omega^* \bar{\Psi}$  se satisface.  $\omega^*$  se define como  $\omega^* = 1/2\pi \tau^*$ .

Para la turbulencia local las fluctuaciones pueden variar más rápido en la dirección radial  $x$  que en la dirección poloidal  $y$ , lo que significa que el mecanismo no lineal dominante es la convección de la densidad de la velocidad de fluido. Así, el operador laplaciano perpendicular se reduce a la forma:

$$v_{\perp}^{2*} = q^2 s^2 \partial^2 / \partial x^2$$

y el término  $[\bar{\Psi}, v_{\perp}^{2*} \bar{\Psi}]_{x,y}$  se puede despreciar en la ecuación de movimiento, 6.70. De esta forma, el modelo de ecuaciones que describen la turbulencia local de los modos  $g$  es:

$$\frac{d}{dt} q^2 s^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} q^2 s^2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} - \frac{\beta^* \partial \bar{n}}{q \partial y} \quad 6.73$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + \eta^* q^2 s^2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} = 0 \quad 6.74$$

$$\frac{d \bar{n}}{dt} - K q \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = 0 \quad 6.75$$

La transformación general de escala que servirá para determinar las propiedades de invariancia de escala del modelo de ecuaciones que describen a los modos  $g$  es:

$$S_0: \tau \rightarrow \lambda_1 \tau; x \rightarrow \lambda_2 x; y \rightarrow \lambda_3 y; \bar{\phi} \rightarrow \lambda_4 \bar{\phi}; \bar{\psi} \rightarrow \lambda_5 \bar{\psi}; \bar{n} \rightarrow \lambda_6 \bar{n}; \\ \eta^* \rightarrow \lambda_7 \eta^*; q \rightarrow \lambda_8 q; K \rightarrow \lambda_9 K; s \rightarrow \lambda_{10} s; \beta^* \rightarrow \lambda_{11} \beta^*.$$

Al aplicar la transformación  $S_0$  a las ecs. 6.71, 72, 73 y exigir la invariancia de forma de las ecuaciones ante el cambio de escala se obtienen las relaciones entre los parámetros de escala:

$$\lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} \lambda_4 \lambda_8 \lambda_{10}^2 = \lambda_2^{-2} \lambda_5 \lambda_8 \lambda_{10}^2 \lambda_{12} = \lambda_2^{-1} \lambda_6 \lambda_8^{-1} \lambda_{11};$$

$$\lambda_4 \lambda_8^{-1} \lambda_{12}^{-1} = \lambda_2^{-2} \lambda_5 \lambda_7 \lambda_8 \lambda_{10}^2; \lambda_1^{-1} \lambda_6 = \lambda_2^{-1} \lambda_4 \lambda_6 \lambda_8 \lambda_{10} = \lambda_2^{-1} \lambda_4 \lambda_8 \lambda_9,$$

junto con la relación  $\lambda_1^{-1} = \lambda_2^{-2} \lambda_4 \lambda_8 \lambda_{10}^2$  que proviene de la invariancia de forma de la derivada convectiva. La solución a estas relaciones define la transformación de escala particular:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \lambda_5^{-1/2} \lambda_8^{-1/2} \lambda_{10}^{-1/2}; \lambda_3 = \lambda_2; \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_5^{1/2} \lambda_8^{-3/2} \lambda_{10}^{-1/2};$$

$$\lambda_7 = \lambda_2^3 \lambda_5^{-1/2} \lambda_8^{-9/2} \lambda_{10}^{-5/2}; \lambda_9 = \lambda_2^{-1} \lambda_6 \lambda_8 \lambda_{10}; \lambda_{11} = \lambda_2^{-1} \lambda_5 \lambda_6^{-1} \lambda_8 \lambda_{10}^2.$$

La transformación de escala que permite la invariancia de forma de las ecs. 6.71, 72, 73 ante cambios de escala tiene la forma:

$$S: \tau \rightarrow \lambda_2 \lambda_5^{-1/2} \lambda_8^{-1/2} \lambda_{10}^{-1/2} \tau; x \rightarrow \lambda_2 x; y \rightarrow \lambda_2 y; \bar{\psi} \rightarrow \lambda_5 \bar{\psi}; \bar{n} \rightarrow \lambda_6 \bar{n};$$

$$\bar{\phi} \rightarrow \lambda_2 \lambda_5^{1/2} \lambda_8^{-3/2} \lambda_{10}^{-1/2} \bar{\phi}; \eta^* \rightarrow \lambda_2^3 \lambda_5^{-1/2} \lambda_8^{-9/2} \lambda_{10}^{-5/2} \eta^*; q \rightarrow \lambda_8 q;$$

$$K \rightarrow \lambda_2^{-1} \lambda_6 \lambda_8 \lambda_{10} K; s \rightarrow \lambda_{10} s; \beta^* \rightarrow \lambda_2^{-1} \lambda_5 \lambda_6^{-1} \lambda_8 \lambda_{10}^2 \beta^*.$$

Para analizar las características del transporte anómalo se supone que existe un coeficiente de transporte dado por 6.0, y que este se puede expresar como una serie en términos de los parámetros presentes en el modelo de ecuaciones.

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau} = \sum C_{stuvw} \eta^* q^t K^u s^v \beta^{*w}$$

Al aplicar la transformación  $S$  a la expresión anterior se determinan las constricciones apropiadas al coeficiente de transporte.

$$\lambda_2 \lambda_5^{1/2} \lambda_8^{1/2} \lambda_{10}^{1/2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau} = \sum C \lambda_2^{3s-u-w} \lambda_5^{-1/2s+w} \lambda_6^{u-w} \lambda_8^{-9/2s+t+u+2w} \\ \times \lambda_{10}^{-5/2s+u+v+2w} \eta^s q^t k^u s^v \beta^{*w}$$

La invariancia de forma ante cambios de escala implica que:

$$3s - u - w = 1; \quad -1/2s + w = 1/2; \quad ; \quad u - w = 0;$$

$$-9/2s + t + u + 2w = 1/2; \quad -5/2s + u + v + 2w = 1/2.$$

La solución a estas relaciones es:

$$s = 1; \quad t = 2; \quad u = 1; \quad v = 0; \quad w = 1.$$

Se determina el coeficiente de transporte salvo una constante C:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau} = C \eta^s q^t k^u \beta^{*w} \quad 6.76$$

Como se tiene que  $D_0 = (\Delta x)^2 / \Delta t$ ,

$$D_0 \rightarrow \frac{r^2}{q^2 s^2 \tau^*} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau}$$

De esta forma, el coeficiente de transporte  $D_0$  está dado por:

$$D_0 = C (K/s^2) \eta \beta^{*} \quad 6.77$$

Este coeficiente puede definirse como el coeficiente de transporte convectivo.

#### 2.4.1.- Transporte en campos magnéticos estocásticos.

La turbulencia presente en el plasma puede influir sobre la estructura del campo magnético (ver sección VI.2.1.1.).

Existe un mecanismo que induce un transporte anómalo, el cual está determinado por las fluctuaciones del campo magnético debidas a la turbulencia de los modos g. Este fenómeno se presenta cuando las perturbaciones magnéticas destruyen las superficies magnéticas toroidales anidadas del plasma en estado no perturbado, para crear una estructura de campo magnético estocástico. En este régimen se pueden considerar dos casos para los cuales existe un coeficiente de transporte particular (Rechester y Rosenbluth, 1978).

Si se supone que el plasma es altamente colisional de tal forma que la trayectoria libre media es pequeña comparada con la longitud de correlación de las fluctuaciones a lo largo de las líneas de campo no perturbado  $L_c$  (Krommes, et al, 1983), se define el coeficiente de transporte colisional como:

$$D_1 = (v_T^2/\nu_e) (\delta B_r/B)^2$$

donde  $v_T$  es la velocidad térmica de electrones y  $\nu_e$  la frecuencia de colisiones.

Si se supone que la trayectoria libre media es mucho mayor que  $L_c$ , el transporte a lo largo del campo estocástico está dado por el coeficiente de transporte no colisional:

$$D_2 = v_T (\delta B_r/B)^2 L_c$$

Para determinar las leyes de escalamiento para estos dos coeficientes es necesario determinar los escalamientos de  $(\delta B_r/B)^2$  y de  $L_c$ . Para determinar el escalamiento de las fluctuaciones del campo magnético se puede utilizar la perturbación de la función de flujo  $\bar{\Psi}$ :

$$(\delta B_r/B)^2 = \frac{r^2 q^2}{R^2} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \right]^2$$

Se expresa el término  $(\partial \bar{\Psi} / \partial y)^2$  como serie en términos de los parámetros que caracterizan a la turbulencia:

$$\left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \right]^2 = \sum C_{stuvw} \eta^{*s} q^t K^u s^v \beta^{*w},$$

y se aplica la transformación 8. Se obtienen las constricciones apropiadas a estas fluctuaciones.

$$\lambda_2^{-2} \lambda_5^2 \lambda_2^{3s-u-v} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \right]^2 = \sum C \lambda_5^{-1/2s+w} \lambda_6^{u-w} \lambda_0^{-9/2s+t+u+2w} \lambda_{10}^{-5/2s+u+v+2w} \eta^{*s} q^t K^u s^v \beta^{*w} X$$

La invariancia de forma implica que:

$$3s - u - w = -2; \quad -1/2s + w = 2; \quad u - v = 0; \quad -9/2s + t + u + 2w = 0$$

$$-5/2s + u + v + 2w = 0.$$

La solución a estas relaciones determina el escalamiento para las fluctuaciones del campo:  $s = 1$ ;  $t = -3$ ;  $u = 5/2$ ;  $v = -5$ ;  $w = 5/2$  y  $(\partial\psi/\partial y)^2 \sim \eta^0 q^{-3} (k\beta^+/s^2)^{5/2}$ .

De esta forma se tiene que:

$$(\delta B_r/B)^2 \sim \frac{r^2}{R^2} \frac{\eta^0}{q^2} \left[ \frac{k\beta^+}{s^2} \right]^{5/2} \quad 6.78$$

Para determinar el escalamiento de la longitud de correlación  $L_c$ , se puede observar que la difusión de las líneas de campo magnético pueden visualizarse como un proceso de camino azaroso con una longitud de paso característica  $\Delta r = (\delta B_r/B)L_c$ .

$\Delta r$  se puede escalar utilizando la transformación  $\mathcal{B}$ , observando que  $\Delta r = (dq/dr)^{-1} \Delta x = (r/qs) \Delta x$ .  $\Delta x$  se expresa como una serie, y al aplicar la transformación  $\mathcal{B}$  se obtienen las relaciones entre los parámetros de escala:

$$\begin{aligned} 3s - u - w &= 1; & -1/2s + w &= 0; & u - w &= 0; \\ -9/2s + t + u + 2w &= 0; & -5/2s + u + v + 2w &= 0. \end{aligned}$$

La solución determina el escalamiento de  $\Delta r$ :

$$\begin{aligned} s &= 1/2; & t &= 3/2; & u &= 1/4; & v &= 1/2; & w &= 1/4, \\ \Delta r &= \frac{r}{qs} \eta^{0/2} q^{3/2} K^{1/4} s^{1/2} \beta^{0/4}. \end{aligned} \quad 6.79$$

El coeficiente de transporte colisional tiene la forma:

$$D_1 \sim (v_T^2 r^2 / \nu_e R^2) \frac{\eta^0}{q} \left[ \frac{k\beta^+}{s^2} \right]^{5/2}.$$

Este se puede expresar en la forma:

$$D_1 = g (\rho^{1/2} v_T^2 \eta / \nu_e q R B_0) \left[ \frac{k\beta^+}{s^2} \right]^{5/2}, \quad 6.80$$

donde  $g$  es una constante.

Debido a que  $\eta$  es proporcional a la frecuencia de colisiones electrón-ión, el coeficiente  $D_1$  es independiente de  $\nu_e$ .

Para el coeficiente no colisional  $D_2$  se puede notar que:

$$D_2 = v_T (\delta B_r/B)^2 L_c = v_T \Delta r (\delta B_r/B).$$

En base al escalamiento para  $(\delta B_p/B)^2$  y  $\Delta r$  se tiene que el coeficiente de transporte en la difusión no colisional está dado por:

$$D_2 = g' v_T \frac{R^2 \eta}{R} \left[ \frac{KB}{S^2} \right]^{3/2}.$$

Definiendo la velocidad de Alfvén como  $v_A = (B_0^2/4\pi\rho)^{1/2}$  se tiene que el coeficiente de transporte  $D_2$  está dado por:

$$D_2 = (v_T/v_A) \eta \left[ \frac{KB}{S^2} \right]^{3/2}. \quad 6.81$$

Este resultado fue obtenido por Shaing y Carreras (1985) basandose en la teoría de la longitud de mezclado.

Yagi et al (1987) calcularon estos coeficientes de transporte  $D_0$ ,  $D_1$  y  $D_2$  con una dependencia radial para los parámetros del experimento del Heliotron E para valores altos de  $\beta$  (Harris et al, 1984). En este caso se supuso que los perfiles de densidad y temperatura de los electrones tienen la forma:

$$n_e = n_e(0) (1 - (r/a))^2 \text{ y } T_e = \text{cte.}$$

Los resultados obtenidos por Yagi et al, considerando  $T_e$  constante, muestran que  $D_0$  es más pequeño que  $D_2$ .  $D_2$  decrece cerca de la región borde del plasma en correspondencia con el decrecimiento de la densidad en esta región, mientras que  $D_1$  es el coeficiente más grande cerca de la región borde. Sin embargo, no es aplicable  $D_1$  cerca de la región borde debido a que la trayectoria libre media no es más pequeña que la longitud de correlación. Encuentran que se, si toma en cuenta otro perfil de temperatura en el cual  $T_e$  no es constante, el coeficiente  $D_1$  decrece hacia la región borde pero sigue predominando sobre  $D_2$ , mientras que la dependencia radial de  $D_0$  y  $D_2$  se mantiene cualitativamente sin cambio.

## CAPITULO VII

### CONCLUSIONES

---

Las ideas originales de Galileo sobre los conceptos de escalas y dimensiones mostraron ser una herramienta útil para entender ciertos fenómenos presentes en la naturaleza, y estas mismas ideas están presentes en el método denominado escalamiento de las cantidades físicas, el cual se atribuye a Fourier. Se muestra que estas ideas de escalamiento se presentan como una herramienta valuable en la comprensión de ciertos fenómenos, evitando la resolución del sistema básico de ecuaciones que describen a dicho sistema físico.

Sin embargo, en este método se trabaja sólo en base a ciertas cantidades adimensionales que caracterizan al sistema. Para otros sistemas más complejos, como es el plasma termonuclear, este método se vuelve engorroso.

Así, el Principio de Invariancia de Escala se presenta como alternativa de estudio de estos sistemas complejos, siguiendo la línea de las ideas básicas de escalas y dimensiones pero enfocando las en un marco conceptual más general, sin necesidad de resolver el conjunto básico de ecuaciones que describen a dichos sistemas. De esta forma, el trabajo se concentra en establecer las consecuencias que surgen al aplicar el Principio de Invariancia de Escala al plasma termonuclear escalando el tiempo de confinamiento y los coeficientes de transporte para distintos modelos del plasma. Se muestra que el principio constriñe la forma posible del escalamiento para el tiempo de confinamiento en una forma que es característica de cada modelo particular utilizado en la descripción del

plasma.

Se observa que el principio de invariancia de escala está relacionado con el método heurístico denominado Análisis Dimensional en el concepto mismo de obtención de leyes de escalamiento en base al análisis dimensional de las ecuaciones básicas del plasma.

El principio de invariancia establece un procedimiento general para obtener los mismos resultados que el análisis dimensional sin embargo, puede obtener propiedades de escalamiento ocultas o más sutiles que el análisis dimensional convencional no puede obtener, y se observa que es mucho más eficiente si se determina el sistema básico de ecuaciones en una forma adimensional.

Se identificarón las constricciones características que definen la forma posible del tiempo de confinamiento global considerado como una función de los parámetros  $n$ ,  $T$ ,  $B$  y  $a$  para modelos del plasma representados por un sistema básico de ecuaciones que describen los posibles mecanismos fundamentales para el transporte anómalo en general. Esta descripción supone que procesos físicos adicionales, tales como fenómenos atómicos en la frontera del plasma, no tienen una influencia significativa en las propiedades del confinamiento.

Se ofrece un marco teórico general de referencia para la discusión de las propuestas de escalamiento teóricas y empíricas para el confinamiento. De esta forma, los cálculos teóricos del confinamiento deben ajustarse a las constricciones apropiadas y este marco permite una clasificación y descripción adecuada de los cálculos teóricos existentes. Al comparar los datos empíricos para el confinamiento en el marco de las constricciones características se obtiene una técnica para relacionar el transporte anómalo obsej

vado con algun modelo particular del plasma. Por otro lado, si se confia en que un modelo particular del plasma describe adecuadamente el confinamiento, las constricciones características limitan el número de parámetros cuyas propiedades de escalamiento necesitan ser determinadas empíricamente. Las constricciones permiten construir familias de sistemas de confinamiento similares cuyas propiedades pueden ser deducidas del comportamiento de uno de tales sistemas. Estas propiedades indican generalmente la ventaja de la construcción de aparatos con campos intensos para los reactores de fusión.

La introducción de aproximaciones geométricas en las ecuaciones básicas, como es el límite Tokamak de razón de aspecto grande en las ecuaciones MHD resistivas, se determinan transformaciones de escala que incluyen escalamientos separados de longitudes en diferentes direcciones con respecto al campo magnético. Así, es posible determinar constricciones en el escalamiento del confinamiento con razones geométricas para modelos particulares del plasma. Análogamente, si es posible determinar transformaciones de invariancia que involucran escalamientos de cantidades adimensionales tales como la carga  $Z$  o la masa atómica  $A$ , las constricciones pueden involucrar a estas cantidades también.

El escalamiento global del tiempo de confinamiento resulta de la interacción de diferentes procesos físicos del plasma operando en distintas regiones locales de un aparato de confinamiento y exhibe un conjunto de constricciones muy débiles. Suponiendo que el transporte anómalo puede ser descrito en términos de coeficientes de transporte local es posible obtener información más precisa sobre el transporte turbulento.

Debido a que es posible separar las características de las fluctuaciones turbulentas de las características de las cantidades de equilibrio en las ecuaciones, es posible determinar transformaciones adicionales de invariancia de escala y es posible definir más precisamente las dependencias de los coeficientes de transporte turbulento con respecto a parámetros del sistema de confinamiento. Considerando los gradientes de ciertas longitudes locales  $L_\eta$ ,  $L_T$ ,  $L_s$ , etc. es posible una considerable libertad en las formas posibles para los coeficientes de transporte. Como en el confinamiento global se determinan las escalas de longitud locales en términos de una longitud características del sistema de confinamiento, como puede ser su tamaño, por el mismo conjunto de ecuaciones básicas, se tiene que si un modelo particular de la turbulencia local es apropiado para el confinamiento se podría determinar el escalamiento del tiempo de confinamiento salvo una dependencia en términos de razones geométricas como  $a/R$  y  $q$ .

Para determinar la dependencia de los coeficientes de transporte con respecto a los gradientes de las longitudes locales y de las razones geométricas se consideraron aproximaciones geométricas y se examinaron más detenidamente formas específicas para la turbulencia que se supone son relevantes para el confinamiento en los Tokamaks y los sistemas Pinchs.

Se encuentra que a menudo hay cierta arbitrariedad en las distintas formas para la difusividad térmica asociada, como en el caso de la turbulencia debida a Ondas de Deriva, sin embargo, las constricciones indican ciertas dependencias y sirven para clasificar la mayoría de los cálculos teóricos disponibles. En ciertos casos la forma de los coeficientes de transporte locales puede ser

constreñida más precisamente y en algunos casos puede ser determinada salvo una constante multiplicativa general, como sucede con la turbulencia del modo  $\eta_1$  y la turbulencia de fluido resistivo.

De esta forma, el Principio de Invariancia de Escala se presenta como una alternativa importante a las técnicas teóricas de obtención de coeficientes de transporte, complementando cálculos no lineales analíticos y numéricos.

Se presenta como una técnica más apropiada que muchos cálculos analíticos específicos debido a que esta depende solo de las propiedades de invariancia de escala de las ecuaciones básicas que describen la turbulencia, y no en el método y aproximaciones que es necesario emplear para intentar resolver el problema del transporte turbulento. Así, proporciona una medida de la generalidad de ciertos cálculos específicos teóricos.

El hecho de que muchos de los resultados del Principio de Invariancia sean precisos salvo una constante general de orden uno no significa que la técnica sea inapropiada para el estudio de sistemas físicos por no poder determinar esta constante.

Cálculos teóricos más específicos pueden demostrar la existencia o no existencia de una solución no trivial del estado estable de la turbulencia, mientras que la técnica de invariancia supone la existencia de tal solución. Así, los cálculos analíticos de la turbulencia de gradientes de temperatura de los iones y de la turbulencia de gradientes de presión de fluido resistivo han indicado la necesidad de un mecanismo de disipación adicional en el modelo básico de ecuaciones para alcanzar un estado estable, y esto se encontró sólo para introducir una débil dependencia logarítmica en los procesos disipativos extra.

El Principio de Invariancia de Escala es de hecho un método riguroso que indica la forma de obtener todas las constricciones para un coeficiente de transporte calculado a partir de un conjunto básico de ecuaciones.

Si se intenta sobresimplificar el conjunto básico de ecuaciones para determinar completamente la forma del coeficiente de transporte, entonces, el problema que se puede presentar con este coeficiente debe ser encontrado en la sobresimplificación impuesta y no en la técnica de obtención de este coeficiente.

Un papel importante que puede jugar la técnica de invariancia está asociado con las técnicas de computo numérico de la turbulencia y el transporte, debido a que estos cálculos deben llevarse a cabo sólo para un número limitado de parámetros, y la técnica de invariancia puede ser suficiente para establecer las dependencias funcionales permitidas para un determinado proceso. Adicionalmente es posible notar que el principio de invariancia se puede usar para discutir también ciertas características de la turbulencia misma como son amplitudes, longitudes y tiempos de correlación, etc.

En resumen: El Principio de Invariancia de Escala determina el conjunto de constricciones características a un modelo del plasma, y estas ofrecen un importante marco de referencia teórico para la discusión de las leyes de escalamiento empíricas para el confinamiento y se presenta como una técnica útil para clasificar y complementar los cálculos analíticos y numéricos de los coeficientes de transporte de la turbulencia local en el plasma termonuclear.

## APENDICE A

En este apéndice se deduce el conjunto de ecuaciones conocidas como ecs. MHD reducidas de Strauss en el límite de Razón de Aspecto Grande para Tokamaks (Strauss, 1983).

Uno de los problemas en la investigación de la fusión nuclear controlada en la Física de Plasmas consiste en que las ecuaciones que se disponen para la descripción del plasma son no lineales. Las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica resistiva (MHD) son un ejemplo de estas ecuaciones.

Existe un método denominado "Método de la Magnetohidrodinámica reducida", el cual se basa en la expansión de las ecuaciones de movimiento que describen al plasma en términos de un parámetro de expansión conocido como razón de aspecto, el cual ha mostrado ser un método apropiado para los cálculos numéricos, tanto lineales como no lineales, (Strauss, et al, 1980; Monticello, et al, 1981; Hicks, et al, 1981) y principalmente ha mostrado ser un método útil en los problemas de tipo resistivo.

Las ecuaciones reducidas correspondientes a Tokamaks con  $\beta$  finita suponen un ordenamiento  $\beta - \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es el parámetro de expansión el cual se define como  $\epsilon = (R - R_0)/R_0$ , inverso de la razón de aspecto. En este caso todos los términos de un orden relativo  $\epsilon^3$  son despreciados en las ecuaciones, reteniendo sólo aquellos de orden menor (Strauss, 1977). Mas sin embargo, los términos despreciados en este ordenamiento contienen aquellos términos que pro

porcionan el término de estabilización de Mercier para  $\beta$  bajas, el cual es proporcional a  $1 - 1/q^2$  (Mercier, 1960).

En este apéndice se lleva a cabo la expansión de las ecuaciones de movimiento en el siguiente orden de  $c$ , de tal forma que todos los términos de intercambio son incluidos obteniéndose así el criterio correcto de Mercier para  $\beta$  bajas. El propósito de este ordenamiento es el de tratar adecuadamente los Modos de Globo resistivos (ballooning) reteniendo términos de orden superior.

Se introduce un sistema coordinado que exprese la simetría toroidal de un Tokamak:

$$x = (R_0 - \xi \cos\theta) \cos\zeta; \quad y = (R_0 - \xi \cos\theta) \sin\zeta \quad \text{y} \quad z = \xi \cos\theta,$$

donde  $R_0$  es el radio mayor del toro,  $\zeta$  es un ángulo toroidal y los factores de escala son:  $h_\xi = 1$ ;  $h_\theta = \xi$  y  $h_\zeta = R_0 - \xi \cos\theta$ , donde  $R = R_0 - \xi \cos\theta$ . Así, el punto de partida de la expansión es el conjunto de ecuaciones de la Magnetohidrodinámica resistiva, las cuales se expresan en términos de los potenciales magnético y eléctrico para asegurar la condición  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , campo libre de divergencia.

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P \quad \text{A.1}$$

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma_P \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \rho \chi_{\parallel} (\mathbf{b} \cdot \nabla)^2 (P/\rho) \quad \text{A.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \nabla \phi - \eta \mathbf{J}_{\parallel} \mathbf{b} \quad \text{A.3}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \text{A.4}$$

junto con las ecuaciones que completan el conjunto:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$$

donde  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$  representa el vector unitario a lo largo del campo magnético.

La reducción de las ecuaciones se basa en la aproximación de razón de aspecto grande, donde  $c \ll 1$ . Se usa el siguiente ordenamiento siguiente: La escala de longitud poloidal es más pequeña

que la escala de longitud toroidal en un factor de orden  $c$ . El campo magnético poloidal es menos intenso que el toroidal en el mismo factor  $c$ . Tomando el campo toroidal de orden  $O(1)$  y suponiendo que la presión  $P$  es de orden  $O(c)$ , de tal forma que el parámetro  $\beta$  es de orden  $O(c)$ :  $\rho \sim O(1)$ ;  $\frac{\partial}{\partial \zeta} \sim c \nabla_{\perp}$ ;  $B_{\perp} \sim c B_{\zeta}$ ;  $B_{\zeta} \sim O(1)$ ;  $P \sim O(c)$ ;  $\beta \sim O(c)$ ;  $\frac{\partial}{\partial t} \sim O(c)$ , y los coeficientes de transporte se ordenan como  $\chi_{\perp} \sim O(1)$  y  $\eta \sim O(c)$ .

Para llevar a cabo la expansión de las ecuaciones MHD es necesario determinar primero la forma del campo magnético y del campo de velocidad.

El campo magnético se define en términos del potencial vectorial magnético como  $B = \nabla \times A$  de tal forma que:

$$B = \frac{1}{R} \left[ \nabla (R A_{\zeta}) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_{\zeta} \hat{e}_{\zeta} + A_{\theta} \hat{e}_{\theta}) \right] \times \hat{e}_{\zeta} + B_{\zeta} \hat{e}_{\zeta}$$

El campo magnético a lo largo de la dirección toroidal tiene una magnitud:

$$B_{\zeta} = \frac{I}{R} = B_0 (1 - (R - R_0)/R_0) + I_1/R_0 + O(c^2)$$

donde se tiene que  $I = I_0 + I_1$ . Aquí  $I_1$  es la perturbación a la corriente  $I_0$  y satisface el orden  $I_1 \sim c I_0$ . Así:

$$B = \nabla \psi \hat{e}_{\zeta} / R_0 + (B_0 + I_1/R_0) \hat{e}_{\zeta} - R_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} A \times \hat{e}_{\zeta} - B_0 (R - R_0)/R_0 + O(\text{sup.})$$

De esta forma se tiene que como  $B \sim c B_{\zeta}$  y  $B_{\zeta} \sim O(1)$ :

$$B = c \nabla \psi \hat{e}_{\zeta} / R_0 + B_0 \hat{e}_{\zeta} \quad A.5$$

donde se ha definido  $\psi = R A_{\zeta}$  como la función de flujo para el campo magnético y  $B_0 = I_0/R_0$  como el campo magnético en el centro del plasma.

Para determinar la forma de la velocidad se utiliza la ley de Faraday, ec. A.3, tomando la componente perpendicular al campo magnético:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v} + \nabla \phi \times \mathbf{b}$$

Como se supone que la velocidad es de orden  $c$ , y como el término del lado izquierdo de la ecuación es de  $O(c^2)$ , se tiene que a  $O(c)$  esta ecuación se reduce a:

$$v_{\perp} = \nabla\phi \times b / B_0$$

El vector unitario  $b$  contiene términos de orden superior a  $c$ . Si se toma la velocidad a  $O(c)$  esta tiene la forma:

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= B_0^{-1} \nabla\phi \times e_{\zeta} - c \\ v &= B_0^{-1} \nabla\phi \times e_{\zeta} + v_{\parallel} \hat{e}_{\zeta} \end{aligned} \quad A.6$$

Para verificar el equilibrio se toma la ecuación de momento A.1:

$$\rho \frac{dv}{dt} = J \times B - \nabla P$$

Como  $J = \nabla \times B$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} &= -\nabla(B^2/2 + B_{\zeta}^2/2) + B \cdot \nabla B - \nabla P \\ B_{\zeta}^2 &= I_0^2/R_0^2 - 2(I_0^2/R_0^2)(R - R_0)/R_0 + 2I_0 I_1/R_0^2 + O(c^2) \end{aligned}$$

y como  $B \cdot \nabla B = B_0^2 \nabla R / R_0$  a  $O(c)$ , se tiene:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla \left[ B^2/2 + B_0^2/2 - B_0^2(R - R_0)/R_0 + B_0 I_1/R_0 + P + O(c^2) \right] + B_0^2 \nabla R / R_0.$$

De tal forma que el equilibrio a  $O(c)$  es:

$$P + B_0 I_1 / R_0 = \text{cte.} \quad A.7$$

La reducción de las ecuaciones se lleva a cabo linealizando cada una de ellas al orden requerido.

Se toma la ley de Faraday y se considera la componente a lo largo de la dirección del campo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = v \times B + \nabla\phi - \eta J_{\parallel} b$$

Utilizando las formas para el campo y la velocidad se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = B \cdot \nabla\phi / B_0 \hat{e}_{\zeta} - \hat{e}_{\zeta} \cdot \nabla\phi / B_0 + \nabla\phi - \eta J_{\parallel} b$$

La componente de esta ecuación en la dirección del campo magnético a orden  $O(c^2)$  es:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{\zeta} = B_0^{-1} B \cdot \nabla\phi - (B_0 - P/B_0) (RB_0)^{-1} \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} + R^{-1} \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} - \eta J_{\parallel} b \cdot \hat{e}_{\zeta}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = RB_0^{-1} B \cdot \nabla \phi - \eta RJ_{\zeta} \quad \text{A.8}$$

En la dirección perpendicular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_{\xi} &= (P/B_0^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} A_{\theta} &= (P/\xi B_0^2) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \text{A.9}$$

La corriente en la dirección del campo tiene la forma:

$$\begin{aligned} J &= \nabla \times B = \nabla \times (R_0^{-1} \nabla \Psi \times \hat{e}_{\zeta} + B_0 \hat{e}_{\zeta}) = R_0^{-1} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla_{\perp} \Psi - \nabla_{\perp}^2 \hat{e}_{\zeta} \right] \\ J_{\zeta} &= -R_0^{-1} \nabla_{\perp}^2 \Psi, \end{aligned}$$

la cual es de  $O(c)$ .

De esta forma la ec. A.8 se expresa como:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = RB_0^{-1} B \cdot \nabla \phi + \eta \nabla_{\perp}^2 \Psi + \eta [(R - R_0)/R_0] \nabla_{\perp}^2 \Psi$$

A  $O(c^2)$  se expresa en la forma:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (R_0/B_0) B \cdot \nabla \phi + \eta \nabla_{\perp}^2 \Psi$$

Los términos de primer orden se pueden eliminar si se multiplica la ecuación de momento ec. A.1 por  $R^2$ , se toma el rotacional y se determina la componente  $\hat{e}_{\zeta}$ .

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P$$

Se tomará por separado cada término.

$$\nabla \times \left[ R^2 \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] = \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (R^2 \mathbf{v}) + \nabla R^2 \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + R^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{v} + R^2 \nabla \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{v} - R^2 (\nabla \times \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]$$

$$\nabla \times (R^2 \mathbf{v}) = B_0^{-1} \left[ \nabla R^2 \times (\nabla \phi \times \hat{e}_{\zeta}) + \nabla R^2 \times \hat{e}_{\zeta} B_0 v_{\parallel} - R^2 \nabla \cdot \nabla_{\perp} \phi \hat{e}_{\zeta} + R^2 \hat{e}_{\zeta} \cdot \nabla \nabla_{\perp} \phi + \nabla v_{\parallel} \times \hat{e}_{\zeta} + \nabla \phi \hat{e}_{\zeta} \cdot \nabla R^2 - \hat{e}_{\zeta} \nabla R^2 \cdot \nabla \phi \right]$$

$$\nabla \times (R^2 \mathbf{v}) \cdot \hat{e}_{\zeta} = -B_0^{-1} \nabla R^2 \cdot \nabla \phi - B_0^{-1} R^2 \nabla_{\perp}^2 \phi$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (R^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla \times (R^2 \mathbf{v}) + \nabla \cdot \nabla \nabla \times (R^2 \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla R^2 B_0^{-1} (-\hat{e}_{\zeta} \nabla_{\perp}^2 \phi + R^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla_{\perp} \phi) \\ &\quad - B_0^{-1} \left[ -\hat{e}_{\zeta} \nabla_{\perp}^2 \phi + R^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla_{\perp} \phi \right] \cdot \nabla (R^2 \mathbf{v}) - \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla R^2) \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

La componente en la dirección  $\hat{e}_{\zeta}$  es:

$$\nabla \times (R^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \hat{e}_{\zeta} = -B_0^{-1} \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla (R^2 \nabla_{\perp}^2 \phi)$$

$$\nabla \times (R^2 \mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 - \mathbf{B} \mathbf{J} \cdot \nabla R^2 + R^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{J} - R^2 \mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla (R^2 \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \nabla R^2 \mathbf{B}$$

La componente  $\hat{e}_{\zeta}$  es:

$$\nabla \times (R^2 \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} = -\mathbf{B} \cdot \nabla (R^2 R_0^{-1} \nabla_{\perp}^2 \Psi) - B_0 \mathbf{J} \cdot \nabla R^2$$

$$\text{donde } \mathbf{J}_{\zeta} = -R_0^{-1} \nabla_{\perp}^2 \Psi \sim O(\epsilon) \text{ y } \mathbf{J}_{\perp} = R_0^{-2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla_{\perp} \Psi \sim O(\epsilon^2).$$

De tal forma que a  $O(\epsilon^2)$  se tiene que:

$$\nabla \times (R^2 \nabla P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} = \nabla R^2 \times \nabla P \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla \times (R^2 \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} R^2 B_0^{-1} \nabla_{\perp}^2 \Phi$$

$$\nabla \times (R^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} = -\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla (R^2 B_0^{-1} \nabla_{\perp}^2 \Phi)$$

$$\nabla \times (R^2 \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} = -\mathbf{B} \cdot \nabla (R_0 \nabla_{\perp}^2 \Psi)$$

De esta forma, a orden  $O(\epsilon^2)$ , la ecuación se reduce a:

$$\rho_0 R_0 B_0^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla \right] \nabla_{\perp}^2 \Phi = \mathbf{B} \cdot \nabla \nabla_{\perp}^2 \Psi + R_0^{-1} \nabla R^2 \times \nabla P \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\zeta}$$

debido a que

$$R^{-2} B_0^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla R^2 \nabla_{\perp}^2 \Phi = B_0^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{\perp}^2 \Phi + O(\epsilon^3)$$

$$R^{-2} \mathbf{B} \cdot \nabla (R^2 \nabla_{\perp}^2 \Psi) = \mathbf{B} \cdot \nabla \nabla_{\perp}^2 \Psi + O(\epsilon^3)$$

Suponiendo que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \sim O(\epsilon^2)$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \sim O(\epsilon)$  y  $\beta \sim O(\epsilon)$ , el lado izquierdo de la ec. A.2 es de orden  $O(\epsilon^2)$ , mientras que el lado derecho es de orden  $O(\epsilon^3)$ . A orden  $O(\epsilon^2)$  esta se reduce a:

$$\frac{dP}{d\zeta} = 0$$

Las ecuaciones MHD reducidas, en el límite de razón de aspecto grande, son:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = -R_0 B_0^{-1} \mathbf{B} \cdot \nabla \Phi + \eta \nabla_{\perp}^2 \Psi \quad \text{A.11}$$

$$\rho_0 R_0 B_0^{-1} \frac{d}{d\zeta} \nabla_{\perp}^2 \Phi = -\mathbf{B} \cdot \nabla \nabla_{\perp}^2 \Psi + R_0^{-1} \nabla R^2 \times \nabla P \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} \quad \text{A.12}$$

$$\frac{dP}{d\zeta} = 0 \quad \text{A.13}$$

Donde el campo magnético y la velocidad tienen la forma:

$$\mathbf{B} = R_0^{-1} \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} + B_0 \hat{\mathbf{e}}_{\zeta}$$

$$\mathbf{v} = B_0 \nabla \Phi \times \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} + \mathbf{v}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\zeta}$$

La derivada convectiva tiene la forma:

$$\frac{d}{d\zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + B_0^{-1} \nabla \Phi \times \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} \cdot \nabla$$

y el gradiente en la dirección del campo es:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla = B_0 R_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} + R_0 \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} \cdot \nabla$$

En el límite de valores grandes del número de Reynolds magnético  $S$  la turbulencia presenta fluctuaciones cuya escala de longitud a través del campo magnético es pequeña comparada con las dimensiones del plasma pero que es comparable a las dimensiones del plasma a lo largo del campo.

Escribiendo  $\Psi = \Psi_0 + \Psi'$ ,  $P = P_0 + P'$  y  $\phi = \phi'$ , donde  $\Psi_0$  y  $P_0$  son los valores base de las funciones de flujo y  $\Psi'$ ,  $P'$  y  $\phi'$  son las fluctuaciones no lineales e introduciendo un conjunto nuevo de variables independientes  $r$ ,  $\theta$  y  $y = \zeta - q\theta$  es posible describir las características de las fluctuaciones. En este caso se tienen dos escalas de longitud distintas en el plasma. Las fluctuaciones varían rápidamente en la dirección  $r$  y  $y$  pero lentamente en  $\theta$  mientras que las cantidades base varían lentamente en todas direcciones. Estas características de las fluctuaciones se pueden formalizar expresando las cantidades fluctuantes en una forma adimensional e introduciendo un ordenamiento sistemático en el cual  $\eta = \delta^2$  y

$$P_0^{-1}P' = \delta \bar{P} \left[ \frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}, \theta, \tau \right]$$

$$q\Psi'/r^2 B_0 = \delta^2 \bar{\Psi} \left[ \frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}, \theta, \tau \right]$$

$$qR_0 \rho^{1/2} \phi'/r^2 B_0^2 = \delta^2 \bar{\phi}' \left[ \frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}, \theta, \tau \right]$$

donde  $\tau = B_0 t / R_0 q \rho^{1/2}$  y  $x = (r - r_0) \frac{dq}{dr}$  es una coordenada local.

Tomando en cuenta estas las adimensionales y el sistema coordenado local las ecuaciones que describen la evolución de las cantidades fluctuantes se expresan en forma adimensional, la cual es apropiada para la descripción de la turbulencia local.

Cada elemento de las ecuaciones se transforma adecuadamente:

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{dq}{dr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \theta \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \rightarrow -q \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \rightarrow \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rightarrow (B_0/R_0 \rho^{1/2}) \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$v_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \rightarrow \left[ \frac{d\mathbf{q}}{dr} \right]^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \theta \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[ -\mathbf{q} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right]^2$$

A orden  $O(\delta^{-2})$

$$v_1^2 \rightarrow v_1^2 = \frac{\mathbf{q}^2}{r^2} \left[ s^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} - \theta \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]$$

donde  $s = \frac{r}{\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dr}$  es el torcimiento magnético (shear).

Para la ecuación B.13:

$$\frac{d\bar{P}}{d\tau} = 0 \rightarrow \delta \frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} - \delta r \mathbf{q} \rho^{-1} \frac{d\bar{P}}{dr} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + \delta^2 r \rho^{-1} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + \delta^2 \mathbf{q}^2 s \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \right] +$$

$$\delta^2 \mathbf{q}^2 s \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right] + \delta^2 \mathbf{q} s \left[ \mathbf{q} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right] = 0$$

A orden  $O(\delta)$ :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} + \mathbf{q}^2 s \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \right] - \mathbf{q} \frac{r}{\bar{P}} \frac{d\bar{P}}{dr} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0$$

Definiendo  $\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{q}^2 s \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right]$  y  $K = r \rho^{-1} (d\bar{P}/dr)$

la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d\bar{P}}{d\tau} - \mathbf{q} K \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0$$

A.14

Para la ecuación A.11:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tau} = R_0 B_0^{-1} B \cdot \nabla \phi + \eta v_1^2 \bar{\Psi} \rightarrow \delta^2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tau} = \delta^2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} - \mathbf{q} s \left[ -\delta^2 \mathbf{q} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} \right]$$

$$- \delta^2 \mathbf{q} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} + \delta^2 \mathbf{q} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} - \delta^2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \delta^2 \theta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \Big]$$

$$+ \delta^2 \eta \mathbf{q} \rho^{1/2} R_0 B_0^{-1} \left( \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dr} \right]^2 \left[ \delta^{-1} \frac{\partial}{\partial x} - \delta^{-1} \theta \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 + r^{-1} \left[ -\delta^{-1} \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right]^2 \right) \bar{\Psi}$$

A orden  $O(\delta^2)$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} - \mathbf{q}^2 s \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \right] + \frac{\eta \mathbf{q}^3 \rho^{1/2}}{r^2 B} \left[ s^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} - \theta \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \bar{\Psi}$$

Definiendo el número de Reynolds magnético  $\mathcal{R} = r^2 B_0 / \eta \mathbf{q} R_0 \rho^{1/2}$ , el

laplaciano ortogonal  $v_1^2 = s^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \theta \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  y considerando la d

rivada convectiva  $\frac{d}{d\tau}$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d\bar{\Psi}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{q}^2}{\mathcal{R}} v_1^2 \bar{\Psi}$$

A.15

Para la ecuación A.12:

La ecuación A.12 se transforma en:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} v_1^2 \Phi - sq \left[ -q \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \theta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + q \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \delta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ & + \delta \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left. \right] v_1^2 \Psi = \frac{\partial}{\partial \theta} - sq \left[ -q \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \theta \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + q \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \delta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ & + \delta \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left. \right] v_1^2 \Psi + \frac{2q^1 R P}{r^3 B^2} \left( s \text{Sen} \theta \left[ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right] - \left[ -q \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right] \right) \end{aligned}$$

A orden  $O(1)$  el laplaciano perpendicular se transforma en:

$$v_1^2 \rightarrow q^2 r^{-2} v_1^2 \text{ con } v_1^2 = s^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \theta \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

y definiendo  $\beta^* = 2R_0 q^2 r^{-1} (P_0/B_0^2)$ , la ecuación anterior se reduce,

a orden  $O(1)$ , a:

$$\frac{d}{dt} v_1^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial \theta} v_1^2 \Psi + sq^2 [\Psi, v_1^2 \Psi]_{x,y} + \frac{\beta^*}{q} \left( s \text{Sen} \theta \left[ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right] + \text{Cos} \theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right)$$

Las ecuaciones que se obtienen son:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + q^2 y^{-1} v_1^2 \Psi \quad \text{A.16}$$

$$\frac{d}{dt} v_1^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial \theta} v_1^2 \Psi + sq [\Psi, v_1^2 \Psi]_{x,y} + \frac{\beta^*}{q} \left( s \text{Sen} \theta \left[ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right] + \text{Cos} \theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right) \quad \text{A.17}$$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} - q \kappa \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{A.18}$$

## APENDICE B

En este apéndice se deducen las ecuaciones del modelo de flujo resistivo bajo el criterio de la turbulencia debida a gradientes resistivos o modos ondulatorios (rippling), como ejemplo de la simplificación de las ecuaciones MHD resistivas en la geometría cilíndrica (Strauss, 1976; Strauss, 1977).

Para derivar las ecuaciones que interesan se considera un Tokamak con razón de aspecto grande, en el cual se introduce un sistema de coordenadas cilíndricas, representadas por  $(r, \theta, z)$ .

La aproximación usada consiste en ordenar todas las cantidades en términos del inverso de la razón de aspecto y despreciar los efectos toroidales, así como a todos los términos que tengan un mismo orden que los toroidales. De esta forma, las ecuaciones representan a un plasma cilíndrico delgado y largo con condiciones periódicas en la frontera.

Las ecuaciones MHD que se usarán son:

$$\rho \frac{dv}{dt} = J \times B - \nabla P \quad \text{B.1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (\nu \times B) + \nabla \times (\eta J) \quad \text{B.2}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{B.3}$$

$$\nabla \times J = 0 \quad \text{B.4}$$

Se usará un ordenamiento de Tokamak de razón de aspecto grande, de tal forma que las longitudes de escala sobre las cuales varían las propiedades del plasma son mayores en la dirección  $z$  que en las direcciones  $r$  y  $\theta$  por un factor de la razón de aspecto. En este caso la componente  $z$  del campo magnético es mayor que las componentes  $r$  y  $\theta$  por el mismo factor.

El ordenamiento que se seguirá en términos del parámetro  $c$ , que se

supone pequeño, es:

$$\begin{aligned} \partial/\partial r, \partial/\partial \theta \sim 1; \partial/\partial z \sim c; B_r, B_\theta \sim c; B_z \sim 1 + c^2; J_r, J_\theta \sim c^2; \\ J_z \sim c; P \sim c^2; \rho \sim 1; v \sim c; \eta \sim c; \partial/\partial t \sim \varepsilon. \end{aligned}$$

Los efectos toroidales entran en las ecuaciones con un ordenamiento  $c^3$ , aunque las variaciones toroidales de  $B_z$  debidas a corrientes poloidales en el plasma se indican con un orden  $c^2$ .

Se introduce la función de flujo  $A$  (componente  $z$  del potencial vectorial) para representar las componentes  $r$  y  $\theta$  del campo magnético, de tal forma que:  $B = \nabla A \hat{z} + B_z \hat{z}$  donde  $\hat{z}$  es el vector unitario en la dirección  $z$ . Así,

$$\nabla \cdot B = \nabla \cdot (\nabla A \hat{z}) + \nabla \cdot (B_z \hat{z}) = \frac{\partial}{\partial z} B_z \sim c^3.$$

Como se desprecian los términos de orden  $c^3$ , se encuentra que el campo magnético es libre de divergencia en esta aproximación.

De la ecuación de momento se observa que la componente  $z$  de la fuerza es de orden  $c^3$ :

$$\rho dv_z/dt = J \times B \cdot \hat{z} - \frac{\partial P}{\partial z} = (J_r B_\theta - J_\theta B_r) - \frac{\partial P}{\partial z} \sim c^3$$

de tal forma que se puede hacer  $v_z = 0$ .

Si se integra la ecuación de flujo, introduciendo el potencial

$$\text{vectorial para } B, \text{ se tiene que: } \nabla \times \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \nabla \times (\nabla \times B + \eta J)$$

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} B \cdot d\vec{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \nabla \times A \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\sigma} \nabla \times (\nabla \times B + \eta J) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\text{Así, } \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \nabla \times A \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} A \cdot d\vec{\lambda} = \oint (\nabla \times B + \eta J + \nabla \phi) \cdot d\vec{\lambda}$$

Tomando a  $\phi$  como un potencial de integración se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times A \hat{z} = \nabla \times B + \nabla \phi + \eta J,$$

Las componentes  $r$  y  $\theta$  de esta ecuación, que dan la variación de  $B_z$ , deben ser de orden  $c^3$ ; la parte variable de  $B_z$  es de orden  $c^2$ .

Esto es,  $(A_r, A_\theta \sim c^2$  y  $A_z = A - c)$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times A \hat{z} = (\nabla \times B) \times \hat{z} + \nabla \phi \times \hat{z} + \eta J \times \hat{z} = -B_z \nabla + \nabla \phi \times \hat{z} + \eta J \times \hat{z}$$

entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{z}} - \eta \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{z}} = -B_z \mathbf{v} + \nabla \phi \times \hat{\mathbf{z}} = 0$$

debido a que el lado izquierdo es de orden  $c^3$ .

Esto indica que es posible introducir una función de flujo  $U$  para la velocidad  $\mathbf{v}$ ,  $\phi = B_z U$ , de tal forma que:

$$\mathbf{v} = \nabla U \times \hat{\mathbf{z}} \quad \text{B.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

donde  $B_z$  es la componente  $z$  del campo magnético.

Debido a que el campo magnético longitudinal es intenso y constante, se tiene que el flujo es incompresible. De esta forma, a partir de la componente  $z$  de la ecuación de flujo, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \nabla \phi + \eta \mathbf{J}) \cdot \hat{\mathbf{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = \left( (\nabla U \times \hat{\mathbf{z}}) \times (\nabla A \times \hat{\mathbf{z}} + B_z \hat{\mathbf{z}} + \nabla \phi + \eta \mathbf{J}) \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} = (\nabla A \times \hat{\mathbf{z}} + B_z) \cdot \nabla U + \eta J_z$$

de tal forma que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = B_z \nabla U + \eta J_z$$

Al tomar el rotacional del campo  $\mathbf{B}$  se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla A \times \hat{\mathbf{z}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla \cdot \nabla A \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \nabla A + \hat{\mathbf{z}} \times \nabla B_z$$

de esta forma:

$$J_z = -\nabla^2 A \quad \text{y} \quad J_z = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla B_z + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$$

Sustituyendo  $\mathbf{J}$  en la ecuación de momento se tiene que:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = (J_z \hat{\mathbf{z}}) \times (B_z \hat{\mathbf{z}}) = -B_z (\nabla B_z - \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla B_z) + B_z \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{z}}$$

$$-\nabla^2 A [\nabla A - \hat{\mathbf{z}} (\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla A)] = -\frac{1}{2} \nabla \cdot B_z^2 + B_z \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{z}} - \nabla^2 A \nabla \cdot \mathbf{A}$$

entonces, la ecuación de momento toma la forma:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = B_z \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{z}} - \nabla^2 A \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla (P + \frac{1}{2} B_z^2)$$

Considerese a  $\rho$  constante,  $\rho = 1$  por simplicidad.

Tomando el rotacional de la ecuación anterior se puede eliminar el término de la presión y la parte variable de  $B_z$ .

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\nabla U \hat{\mathbf{z}} + \frac{\partial}{\partial z} \nabla U$$

$$\nabla \times (B_z \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{z}}) = \nabla \cdot B_z \times (\frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{z}}) + B_z \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} - B_z \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{A}) = (\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}) \times \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \frac{d}{dt} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) = \frac{d}{dt} (-\nabla^2 \hat{\mathbf{U}} + \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{U})$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( -\nabla^2 \hat{\mathbf{U}} + \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{U} \right) = \nabla \cdot \mathbf{B}_z \times \left( \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{A}} \right) + \mathbf{B}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} - \nabla (\nabla^2 \mathbf{A}) \times \nabla \cdot \mathbf{A}$$

eliminando los términos con órdenes mayores o iguales a  $\epsilon^3$  y ha-

$$\text{ciendo } \nabla \cdot \mathbf{B}_z \times \left( \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{A}} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ -\nabla^2 \hat{\mathbf{U}} + \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{U} \right] = -\mathbf{B}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} - \nabla (\nabla^2 \mathbf{A}) \times \nabla \cdot \mathbf{A}$$

La componente z es:

$$\frac{d}{dt} \nabla^2 \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{B}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \hat{\mathbf{A}} + \nabla \cdot \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{A}} \cdot \nabla \nabla^2 \mathbf{A} \text{ con } \mathbf{J}_z = -\nabla^2 \mathbf{A}.$$

Una forma alternativa es:

$$\frac{d}{dt} \nabla^2 \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{B} \cdot \nabla \nabla^2 \hat{\mathbf{A}}$$

Las ecuaciones no lineales obtenidas dan las razones de cambio de la vorticidad y el flujo magnético.

$$\frac{d}{dt} \nabla^2 \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{B} \cdot \nabla \nabla^2 \hat{\mathbf{A}} \quad \text{B.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{U} + \eta \mathbf{J}_z \quad \text{B.7}$$

Para describir adecuadamente las inestabilidades de los modos ondulatorios (modos rippling) las ecs. B.6,7 deben ser completadas con una ecuación que describa la evolución de la resistividad (balance térmico), la cual en su forma más simple toma la forma:

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathbf{B}_z^{-2} \mathbf{B} \cdot (\nabla \chi_{\parallel} \mathbf{B} \cdot \nabla \eta) \quad \text{B.8}$$

(García, et al, 1985; Furth, et al. 1963), donde  $\chi_{\parallel}$  es la conductividad paralela de calor de electrones.

Las ecs. B.6,7,8 constituyen el modelo básico de la turbulencia debida a gradientes de la resistividad, las cuales son usadas en los cálculos numéricos de esta turbulencia.

Es posible lograr una simplificación significativa del modelo básico empleando la aproximación electrostática, donde se tiene

que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  y  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = v_{\perp}^{(0)}$  y  $\mathbf{b}$  es el vector unitario paralelo al campo magnético en equilibrio.

Además, se escriben  $J_z$  y  $\eta$  como la suma compuesta de una parte promedio (variaciones lentas) y otra perturbada (variaciones rápidas),  $J_z = J_{z0} + \bar{J}_z$  y  $\eta = \eta_0 + \bar{\eta}$  en donde el subíndice cero indica que la cantidad está promediada y la barra ( $\bar{\quad}$ ) indica las perturbaciones.

En el límite electrostático, las ecs. B.6,7,8 toman la forma:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = B_z^{-1} \mathbf{B} \cdot \nabla \Phi + \eta J_z \rightarrow 0 = \mathbf{b} \cdot \nabla \Phi + \eta_0 (J_{z0} + \bar{J}_z) + \bar{\eta} J_{z0}$$

El término  $\bar{\eta} \bar{J}_z$  se desprecia por ser de orden superior.

$$\rho_m B_z^{-1} \frac{d}{dt} v_{\perp}^2 \Phi = -\mathbf{B} \cdot \nabla J_z \rightarrow \rho_m B_z^{-1} \frac{d}{dt} v_{\perp}^2 \Phi = -B_z \mathbf{b} \cdot \nabla (J_{z0} + \bar{J}_z)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B_z^{-2} \mathbf{B} \cdot \nabla (\chi_m \mathbf{B} \cdot \nabla \eta) \rightarrow \frac{d\bar{\eta}}{dt} = v_{\perp}^{(0)} (\chi_m v_{\perp}^{(0)} \bar{\eta}) - r^{-1} B_z^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{d}{dt} \eta_0$$

En este caso se tiene que:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \frac{d\eta_0}{dt} = \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \nabla_{\perp} \Phi \times \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \eta_0 = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \cdot \nabla \eta_0 =$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{d\eta_0}{dt}$$

Si se considera que  $\chi_m$  es constante (o que depende solo de  $r$ ) las ecuaciones toman la forma:

$$-v_{\perp}^{(0)} \Phi = \eta_0 (J_{z0} + \bar{J}_z) + \bar{\eta} J_{z0} \quad \text{B.9}$$

$$\rho_m B_z^{-1} \frac{d}{dt} v_{\perp}^2 \Phi = -B_z v_{\perp}^{(0)} (J_{z0} + \bar{J}_z) \quad \text{B.10}$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = \chi_m v_{\perp}^{(0)2} \bar{\eta} - r^{-1} B_z^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{d}{dt} \eta_0 \quad \text{B.11}$$

La ec. B.9 que es la ley de Ohm se ha linealizado como consecuencia de la aproximación electrostática, y como resultado adicional se puede eliminar la perturbación de la corriente  $\bar{J}_z$  de la ec.

B.10. Combinando la ec. B.9 con la ec. B.10 se tiene:

$$J_{z0} + \bar{J}_z = -\eta_0^{-1} v_{\perp}^{(0)} \Phi - \bar{\eta} \eta_0^{-1} J_{z0}$$

$$\rho_m B_z^{-1} \frac{d}{dt} v_{\perp}^2 \Phi = v_{\perp}^{(0)} \left[ -\eta_0^{-1} v_{\perp}^{(0)} \Phi - \bar{\eta} \eta_0^{-1} J_{z0} \right] = -\eta_0^{-1} v_{\perp}^{(0)2} \Phi - J_{z0} \eta_0^{-1} v_{\perp}^{(0)} \bar{\eta}$$

De esta forma se obtienen las ecuaciones no lineales que describen

el comportamiento de la función de flujo  $\bar{\psi}$  y de la perturbación de la resistividad  $\bar{\eta}$ .

$$\rho B_z^{-1} \frac{d}{dt} \nabla_\perp^2 \bar{\psi} = -\eta_0^{-1} \nabla_\perp^{(0)2} \bar{\psi} - \mathbf{J}_{z0} \eta_0^{-1} \nabla_\perp^{(0)} \bar{\eta} \quad B.12$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\eta} - \chi_\perp \nabla_\perp^{(0)2} \bar{\eta} = -r^{-1} B_z^{-1} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \frac{d}{dr} \eta_0 \quad B.13$$

Adicionalmente se tiene:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla = \nabla_\perp \psi \mathbf{x} \hat{\Delta} \cdot \nabla + B_z \frac{\partial}{\partial z} = B_z \nabla_\perp$$

En el límite electrostático:

$$\nabla_\perp \rightarrow \nabla_\perp^{(0)} = -B_z^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \psi_0 \hat{\Delta} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial z} = B_0 r^{-1} B_z^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_0 = 0; B_\theta = -\frac{\partial}{\partial r} \psi_0; B_z = B_z.$$

La derivada convectiva no lineal tiene la forma:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + B_z^{-1} \nabla_\perp \psi \mathbf{x} \hat{\Delta} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} B_z^{-1} [\bar{\psi}, ]_{0,r}$$

El operador gradiente perpendicular:

$$\nabla_\perp^2 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-2} \partial^2 / \partial \theta^2$$

Las cantidades fluctuantes varían más rápido en la dirección perpendicular al campo magnético y lentamente en la dirección paralela al campo, mientras que las cantidades en estado básico varían lentamente en todas direcciones. Estas características de las fluctuaciones se pueden expresar introduciendo un conjunto de variables adimensionales y expresando las fluctuaciones en forma adimensional:

$$\tau = B_z r^{-1} q^{-1} \rho^{-1/2} t; x = (r - r_0) \frac{1}{q} \frac{dq}{dr}; z = R \zeta; \psi = q R \rho^{1/2} r^{-2} B_z^{-2} \bar{\psi};$$

$$\eta = \bar{\eta} / \eta_0.$$

donde  $r_0$  representa un radio de referencia, de tal forma que  $x$  es una coordenada local, y para simular la geometría de un Tokamak se introduce la variable  $\zeta$  que juega el papel de un ángulo toroidal.

Se expresa el torcimiento magnético (shear) en términos del factor de seguridad  $q$ ,  $s = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}$ .

Se observa como se transforman todos los operadores:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} = (B_z/qR\rho^{1/2}) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + rBz_0^{-1}(\phi, \theta, x) \right] = (B_z/qR\rho^{1/2}) \frac{d}{dt}$$

$$v_x^2 \rightarrow r^{-2} \left[ (r^2/r_0^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] = r^{-2} \bar{v}_x^2$$

$$v_x^{(0)} \rightarrow \frac{1}{qR} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + q \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] = \frac{1}{qR} \bar{v}_x$$

Las ecuaciones se transforman adecuadamente:

La ec. B.12 se transforma como:

$$\rho B_z^{-2} \frac{d}{dt} \bar{v}_x^2 \bar{\phi} = -\eta_0^{-1} \bar{v}_x^{(0)2} \bar{\phi} - J_x \eta_0^{-1} \bar{v}_x^{(0)} \bar{\eta}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \bar{v}_x^2 \bar{\phi} = -(r^2 B_z / \eta_0 q R \rho^{1/2}) \bar{v}_x^2 \bar{\phi} - (J_x q R / B_z) \bar{v}_x \bar{\eta}$$

La ec. B.13 se transforma como:

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} - \chi_x \bar{v}_x^{(0)2} \bar{\eta} = -r^{-1} B_z^{-1} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \frac{d\eta}{dt} \rightarrow \frac{d\eta}{dt} - \chi_x (\rho^{1/2} / B_z q R) \bar{v}_x^2 \eta = \frac{r}{\eta} \frac{d\eta}{dr}$$

Si se definen los coeficientes  $\gamma$ ,  $j$ ,  $K$  y  $1/l$  como:

$$\gamma = r^2 B_z / \eta_0 q R \rho^{1/2}; \quad j = R q J_x / B_z; \quad K = \chi \rho^{1/2} / R q B_z; \quad 1/l = \frac{r}{\eta} \frac{d\eta}{dr}$$

las ecuaciones toman su forma dimensional requerida:

$$\frac{d}{dt} \bar{v}_x^2 \bar{\phi} = -\gamma \bar{v}_x^2 \bar{\phi} - j \bar{v}_x \bar{\eta} \tag{B.14}$$

$$\frac{d\eta}{dt} - K \bar{v}_x^2 \eta = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{B.15}$$

## APENDICE C

En este apéndice se describe la forma en que el modelo de ecuaciones de campo que describen la turbulencia de los modos g y de las ondas de deriva son escritas en forma adimensional.

Las ecuaciones que describen la turbulencia en los sistemas de confinamiento Stellarator están dadas por el modelo de ecuaciones de campo para las funciones de flujo ( $\phi, \rho, \psi$ ). Este modelo de ecuaciones contiene la descripción de la turbulencia debida a los modos de intercambio resistivo y a las Ondas de deriva resistivas. El modelo esta compuesto por una ecuación de movimiento:

$$\frac{\rho R}{B} \frac{d}{dt} v_{\perp}^2 \phi = -\bar{B} \cdot \nabla v_{\perp}^2 \psi + \frac{RT}{M} \nabla \Omega \times \nabla \rho \cdot \hat{z} \quad C.1$$

Una ecuación de continuidad:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{M}{eRB} \bar{B} \cdot \nabla v_{\perp}^2 \psi \quad C.2$$

Y una ecuación de inducción:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{R_c}{B} \cdot \left[ \nabla \phi \cdot \frac{T}{e\rho_0} \nabla \rho \right] + \eta v_{\perp}^2 \psi \quad C.3$$

Si se desprecia el término de la derivada paralela al campo en la ec. C.2 y el término que representa al gradiente de presión paralelo del electrón de la ec. C.3 se obtienen las ecuaciones que describen la turbulencia debida a los modos g en un Stellarator.

$$\frac{\rho R}{B} \frac{d}{dt} v_{\perp}^2 \phi = -\bar{B} \cdot \nabla v_{\perp}^2 \psi + RT \nabla \Omega \times \nabla n \cdot \hat{z} \quad C.4$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{R}{B} \bar{B} \cdot \nabla \phi + \eta v_{\perp}^2 \psi \quad C.5$$

$$\frac{dn}{dt} = 0 \quad C.6$$

Estas ecuaciones han mostrado ser importantes para el estudio de los modos g en los sistemas Stellarator. Shaing y Carreras (1985) usaron estas ecuaciones para estudiar el transporte anómalo debido a la turbulencia del modo g en el Heliotrón E y Wakatani et al, (1984a) y Yamaqiwa et al, (1985) resolvieron estas ecuaciones para

estudiar las disrupciones internas estimuladas por presión en el Heliotrón E.

Si se supone la aproximación electrostática la ec. C.3 se reduce a la forma:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{R}{\eta B} \bar{B} \cdot \left[ \nabla \phi - \frac{T}{e \rho_0} \nabla \rho \right] \quad C.7$$

Al sustituir la ec. C.7 en las ecuaciones C.1 y C.2, y despreciando el término de curvatura se obtiene:

$$\frac{R \rho}{B} \frac{d}{dt} \nabla_{\perp}^2 \phi = -\frac{R}{\eta B} (\bar{B} \cdot \nabla)^2 \left[ \phi - \frac{T}{e \rho_0} \rho \right] \quad C.8$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{M}{e\eta} B_0^{-2} (\bar{B} \cdot \nabla)^2 \left[ \phi - \frac{T}{e \rho_0} \rho \right] \quad C.9$$

Las ecs. C.8,9 son las mismas que obtuvieron Hasegawa y Wakatani (1983 y 1984b) para la turbulencia debida a las ondas de deriva resistivas en la región borde del plasma.

Forma adimensional del modelo de ecuaciones para la turbulencia debida a los modos g.

En el límite de valores pequeños del parámetro  $\eta^*$  la turbulencia de los modos g involucra fluctuaciones cuya escala de longitud a travez del campo magnético es pequeña comparada con las dimensiones del plasma, pero en la dirección del campo es comparable a las dimensiones del plasma. Estas características del plasma pueden analizarse expresando las funciones de flujo en términos de una parte que representa las fluctuaciones no lineales y otra el valor del estado base.

$$\psi^* = \psi_0^* + \bar{\psi}; \quad \phi^* = \bar{\phi}; \quad n^* = n_0 (1 + \bar{n})$$

donde  $\psi_0^*$  y  $n_0^*$  son los valores del estado base y  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\phi}$  y  $\bar{n}$  son las fluctuaciones no lineales. Además, se introduce un conjunto de cantidades adimensionales normalizadas:

$$\tau = \frac{t}{\tau}; \quad \eta^* = \frac{r}{r^2} \eta; \quad \phi^* = \frac{r}{r B} \phi; \quad T^* = \frac{r}{e B r^2} T; \quad \psi^* = \frac{1}{r^2 B} \psi;$$

$$n^* = \frac{e R}{\rho^{1/2}} n; \quad \tau^* = \frac{\rho^{1/2} R}{B_0}$$

Para el análisis de la turbulencia se introduce un conjunto de variables locales independientes:

$$x = (r - r_0) \frac{dg}{dr}; \quad y = \zeta - q\theta; \quad z = \theta.$$

donde  $r_0$  representa una superficie de referencia.

Empleando las coordenadas locales y las formas adimensionales anteriores las ecuaciones de campo se expresan en forma adimensional.

El ordenamiento utilizado en la transformación es el siguiente:

$$\eta^* \sim \delta^2; \quad \bar{\phi} \sim \delta^2; \quad \bar{\psi} \sim \delta^2; \quad \bar{n} \sim \delta; \quad \partial_x, \partial_y \sim \delta^{-1}; \quad \partial_\theta, \partial_z \sim 1.$$

Las ecs. C.4,5,6 se transforman como:

$$\frac{dn}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial n^*}{\partial \tau} + r(\phi^*, n^*)_{r,\theta} = 0$$

Ante el cambio de coordenadas:

$$\delta n^* \frac{\partial \bar{n}}{\partial \tau} - r \frac{dn^*}{dr} \left( -\delta q \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) + r n^* \frac{dq}{dr} \left[ \left( \delta \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} - \delta \theta \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right) \left( -q \frac{\partial \bar{n}}{\partial y} + \delta \frac{\partial \bar{n}}{\partial \theta} \right) \right. \\ \left. - \left( -\delta q \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \bar{n}}{\partial x} - \theta \frac{\partial \bar{n}}{\partial y} \right) \right] + r \bar{n} \left[ \left[ \frac{dq}{dr} \right] \left( \delta \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} - \delta \theta \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right) \frac{dn^*}{d\theta} \right. \\ \left. - \left( -\delta q \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) \frac{dn^*}{dr} \right] = 0$$

A orden  $O(\delta)$

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \tau} + q(r/n_0^*) \frac{dn^*}{dr} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} - q r \left[ \frac{dq}{dr} \right]_{[\bar{\phi}, \bar{n}]}_{x,y} = 0$$

Definiendo los parámetros  $K$  y  $s$  como:

$$K = (r/n_0^*) \frac{dn^*}{dr} \quad \text{y} \quad s = \frac{r}{q} \left[ \frac{dq}{dr} \right]$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{d\bar{n}}{d\tau} + qK \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = 0 \quad \text{C.10}$$

donde se definen los operadores:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} - q^2 s [\bar{\phi}, ]_{x,y} \quad \text{y} \quad [f, g]_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

La ec. C.5 se transforma en:

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial \zeta} = - \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} - r[\Psi, ]_{r,\theta} \right) \Phi^* + \eta \tau^* \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

Ante el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = & - \left\{ \delta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - r \left[ \frac{d\mathbf{q}}{d\zeta} \right] \left[ \left( \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \delta \theta \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \left( -\delta \mathbf{q} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \delta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \left( -\delta \mathbf{q} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \delta \theta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] - r \left[ \delta^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \left( -\delta \mathbf{q} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \delta^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \left[ \frac{d\mathbf{q}}{d\zeta} \right] \left( \delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \delta \theta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] \right\} \\ & + \delta^4 \eta \tau^* v_1^2 \Psi^* + \delta^2 \eta \tau^* \left[ \left[ \frac{d\mathbf{q}}{d\zeta} \right]^2 \delta^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \theta \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + r^{-2} \left( -\delta^{-1} \mathbf{q} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \delta^2 \Psi \end{aligned}$$

Como las fluctuaciones varían rápidamente en  $x$ ,  $y$  pero lentamente en  $z$  se tiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{1}{\mathbf{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

De esta forma se obtiene la ecuación:

$$\frac{d\Psi}{d\zeta} = -\frac{1}{\mathbf{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \eta^* v_1^2 \Psi \quad \text{C.11}$$

Donde se define el operador:

$$v_1^2 = \mathbf{q}^2 s^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \mathbf{q}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

De la ec. C.4 se tiene que:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} + r[\Phi^*, ]_{r,\theta} \right] v_1^2 \Phi^* = - \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} - r[\Psi^*, ]_{r,\theta} \right] v_1^2 \Psi^* + \frac{R\Gamma\rho^{1/2}\partial\Omega}{er^3B^2} \frac{\partial\Omega}{\partial r} \frac{\partial n}{\partial \theta}$$

a orden  $O(1)$  se tiene que esta toma la forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} - \mathbf{q}^2 s[\Phi, ]_{x,y} \right] v_1^2 \Phi = - \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} + \mathbf{q}^2 s[\Psi, ]_{x,y} \right] v_1^2 \Psi - \frac{n\Gamma r}{\mathbf{q}B^2} \frac{\partial\Omega}{\partial r} \frac{\partial n}{\partial y}$$

Definiendo el parámetro  $\beta^* = \frac{n\Gamma r}{B^2} \frac{\partial\Omega}{\partial r}$ , esta ecuación toma la forma:

$$\frac{d}{d\zeta} v_1^2 \Phi = -\frac{1}{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial z} v_1^2 \Psi - \mathbf{q}^2 s[\Psi, v_1^2 \Psi]_{x,y} - \frac{\beta^* \partial n}{\mathbf{q} \partial y} \quad \text{C.12}$$

Las ecuaciones C.10,11,12 son las formas adimensionales de las ecuaciones de campo que describen la turbulencia debida a los modos  $g$ .

Para la transformación de las ecuaciones que describen la turbulencia debida a las ondas de deriva resistivas se utiliza el si-

guiente ordenamiento:

$$\bar{n} = \delta; \bar{\phi} = \delta^2; \partial_x, \partial_y, \partial_z = \delta^{-1}; \partial_\tau = 1; \delta = \eta^{-1}.$$

La ecuación C.9 se transforma como:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{rB} [\bar{\phi}, ]_{r, \theta} \right] \bar{n} = -\frac{1}{eB} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{B}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \bar{\phi} - \frac{T}{en} \bar{n} \right] \right)$$

Ante el cambio de coordenadas:

$$n^* \frac{\partial \bar{n}}{\partial \tau} + r [\bar{\phi}^*, n^*]_{r, \theta} (1 + \bar{n}) + r n^* [\bar{\phi}, \bar{n}]_{r, \theta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \eta^{*-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\bar{\phi} - T^* \bar{n}]$$

De esta forma se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \tau} - k(1 + \bar{n}) \left( -q \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) + qs \left( -q [\bar{\phi}, ]_{x, y} + [\bar{\phi}, ]_{x, z} - z [\bar{\phi}, ]_{y, z} \right) = \\ - (n_0^* \eta^*)^{-1} \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{q} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} - \frac{T^*}{q} \frac{\partial \bar{n}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

La forma adimensional es la siguiente:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \tau} + K q \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} - K \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = -n_0^{*-1} \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} \eta^{*-1} \left[ \frac{1}{q} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} - \frac{T}{q} \frac{\partial \bar{n}}{\partial z} \right] \quad C.13$$

La ec. C.5 se transforma como:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + r [\bar{\phi}, ]_{r, \theta} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \bar{\phi} = -r^{-2} \eta^{*-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \bar{\phi} - T^* \bar{n} \right)$$

Ante las formas adimensionales:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + qs \left[ -q [\bar{\phi}, ]_{x, y} + [\bar{\phi}, ]_{x, z} - z [\bar{\phi}, ]_{y, z} \right] \right) \left( q^2 s^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 + \right. \\ \left. \left[ \frac{\partial}{\partial z} - q \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 \right) \bar{\phi} = -\frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta^{*-1} \left( \frac{1}{q} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} - \frac{T^*}{q} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

La forma adimensional es:

$$\frac{d}{d\tau} \eta^{2*} \bar{\phi} = -\frac{1}{\eta} \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{q} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} - \frac{T^*}{q} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \quad C.14$$

En este caso:

$$\begin{aligned} v_1^{2*} = q^2 s^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial z} - q \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 \\ \frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + qs \left[ -q [\bar{\phi}, ]_{x, y} + [\bar{\phi}, ]_{x, z} - z [\bar{\phi}, ]_{y, z} \right] \end{aligned}$$

Las ecuaciones C.13,14 son las formas adimensionales de las ecuaciones de campo que describen la turbulencia de las ondas de deriva resistivas.

## APENDICE D

Para la investigación experimental, la tarea de obtener resultados significativos mediante una investigación dada puede no ser tan ardua. Existe un teorema, de naturaleza matemática, que simplifica considerablemente el trabajo y contribuye a darles un sentido a las investigaciones experimentales. Este teorema se denomina Teorema  $\Pi$  de Buckingham, en honor de E. Buckingham (1867-1940).

### TEOREMA $\Pi$ .

Sean  $q_1, \dots, q_n$   $n$  parámetros físicos, relacionados funcionalmente por medio de una ecuación del tipo  $F(q_1, \dots, q_n) = 0$ .

Supongase que el número de dimensiones independientes que se presentan entre los parámetros es igual a  $r$ . Entonces la ecuación se puede expresar como una relación equivalente:

$$F_2(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$$

donde  $\pi_1, \dots, \pi_m$  son parámetros adimensionales, obtenidos a partir de los parámetros originales  $q_1, \dots, q_n$  y  $m = n - k$ , siendo  $k < r$ .

En esencia, el teorema  $\Pi$  afirma que el investigador experimental no tiene necesidad de tomar en consideración todas y cada una de las variables por separado, permitiendo que varíe cada una a la vez, para obtener una buena aproximación de una ley física.

Aunque el teorema  $\Pi$  indica que es posible la reducción del número de parámetros, no ofrece explicación respecto a cómo puede llevarse a cabo dicha reducción.

### Formulación de los términos $\Pi$ .

Sean los parámetros en consideración  $q_1, \dots, q_n$ .

Se selecciona de este grupo de variables el número mayor de parámetros que, al combinarse como productos de potencias de los mismos,

no formen un término  $\Pi$ . Este grupo constará de parámetros independientes y debe ser siempre menor o igual, en número, al número de dimensiones distintas de los parámetros.

Supongase que las dimensiones del conjunto de parámetros se designan por medio de  $D_1, \dots, D_m$ , y además que se puede encontrar un grupo de  $m$   $q_i$ 's y ordenarlo en una secuencia tal que cada  $q_i$  tenga una dimensión  $D_i$  que no posea ninguna otra  $q_i$  de la secuencia. Entonces no podrá formarse un producto de potencias de esos  $q_i$ 's que dé como resultado un término  $\Pi$  y, así, se tendrá el número máximo de variables independientes.

Matemáticamente, y en forma sistemática, se puede encontrar un conjunto máximo de parámetros independientes  $(q_i)_i^k$  que tengan dimensiones  $(D_i)_i^m$  como se indica:

1.- Se hace una lista de  $q_i$ 's con potencias apropiadas  $D_i$ :

$$\begin{array}{l} q_1 \rightarrow D_1^{a_{11}} \dots D_m^{a_{1m}} \\ \vdots \\ q_n \rightarrow D_1^{a_{n1}} \dots D_m^{a_{nm}} \end{array}$$

2.- Se ordenan los exponentes:

$$\begin{array}{l} q_1 \rightarrow a_{11} \dots a_{1m} \\ \vdots \\ q_n \rightarrow a_{n1} \dots a_{nm} \end{array}$$

Como  $m \leq n$  se selecciona un orden  $m \times m$  de la secuencia original.

3.- Se forma el determinante del orden  $m \times m$ . Si este determinante es distinto de cero las  $q_i$  asociadas son independientes. Si el primer determinante seleccionado es cero se repite el proceso con un segundo determinante, etc.

4.- Si todos los determinantes  $m \times m$  son cero, el número de  $q_i$  será menor que  $m$ . Se procede a seleccionar  $m-1$  hileras y se forman determinantes de  $(m-1) \times (m-1)$ . Si al menos un determinante  $m-1$  no es

cero, las  $q_i$  correspondientes serán independientes; de no ser así se repiten los pasos anteriores.

Supongase que se encuentra un número  $k$  de  $q_i$  independientes, entonces, el número de términos  $\pi$  que pueden obtenerse es  $n-k$ .

La construcción de los términos  $\Pi$  se hace de la siguiente forma:

Dados los  $k$  parámetros independientes  $q_1, \dots, q_k$  se selecciona un  $q_i$  de entre los  $n-k$  parámetros restantes. Por ejemplo, se selecciona el parámetro  $q_{k+1}$ . Se forma el producto

$$(q_1)^{b_1} \dots (q_k)^{b_k} q_{k+1}$$

donde  $(b_i)_i^n$  son constantes arbitrarias, y se trata de encontrar valores de estas constantes tales que el término  $\Pi_i = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k} q_{k+1}$  sea adimensional.

Esto significa, desde el punto de vista dimensional que:

$$(D_1^{a_{11}} \dots D_m^{a_{1m}})^{b_1} \dots (D_1^{a_{k1}} \dots D_m^{a_{km}})^{b_k} (D_1^{a_{k+1,1}} \dots D_m^{a_{k+1,m}}) = D_1^0 \dots D_m^0$$

Por lo tanto se tiene que:

$$D_1^{(b_1 a_{11} + \dots + b_k a_{k1} + a_{k+1,1})} \dots D_m^{(b_1 a_{1m} + \dots + b_k a_{km} + a_{k+1,m})} = D_1^0 \dots D_m^0$$

Igualando los exponentes se obtiene un sistema de  $m$  ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{array}{r} b_1 a_{11} + \dots + b_k a_{k1} = -a_{k+1,1} \\ \vdots \\ b_1 a_{1m} + \dots + b_k a_{km} = -a_{k+1,m} \end{array}$$

Este sistema puede resolverse para los exponentes desconocidos  $b_i$  y la cantidad adimensional puede encontrarse a partir de la ecuación para este término:

$$\Pi_i = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k} q_{k+1}$$

Después de aplicar este proceso para la variable  $q_{k+1}$ , para obtener  $\Pi_i$ , se selecciona la siguiente variable  $q$  y se determina el siguiente término  $\Pi$ , etc.

## CAPITULO IX

### Bibliografía

- An Z.G. et al, *Plasma Physics and Controlled Fusion Research*.  
(Proc. 10th Int. Conf. London 1984), 2(1985)231. IAEA Vienna.
- Antonsen T., Coppi B. y Englade R., *Nucl. Fusion*, 19(1979)641.
- Braginskii S.I., *Reviews of Plasma Physics* (editado por M.A. Leontovich) 1(1965)205. Consultants Bureau, Nueva York.
- Callen J.D. et al, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (Proc. 9th. Int. Conf. Baltimore 1982), 1(1983)297.
- Carreras B.A. et al, *Phys. Rev. Lett.* 50(1983)503.
- Carreras B.A. et al, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (Proc. 11th Conf. Kyoto, 1976) 2(1987)615. IAEA Vienna.
- Carreras B.A. et al, *Phys. Fluids*, 25(1982)1231.
- Connor J.W. y Taylor J.B., *Nucl. Fusion*, 17(1977)1047.
- Connor J.W. et al, *Phys. Rev. Lett.* 40(1978)396.
- Connor J.W. y Taylor J.B., *Heating in Toroidal Plasmas* (Proc. of Joint Varenna Grenoble Symposium) 1(1979)1.
- Connor J.W. y Taylor J.B., *Phys. Fluids*, 27(1984)2676.
- Connor J.W., *Nucl. Fusion*, 26(1986a)517.
- Connor J.W., *Nucl. Fusion*, 26(1986b)193.
- Connor J.W., *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 30(1988)619.
- Coppi B. et al, *Phys. Fluids*, 10(1967)582.
- Coppi B. et al., *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (Proc. 10th Int. Conf. London, 1984) 2(1985)93 IAEA Vienna.
- Daughney C., *Nucl. Fusion*, 15(1975)967.
- Duchs D.F. et al, *Nucl. Fusion*, 17(1977)565.
- Furth H.P. et al, *Phys. Fluids*, 6(1963)459.
- Furth H.P., *Nucl. Fusion*, 15(1977)487.
- Garcia L. et al, *Phys. Fluids*, 28(1985)2147.
- Goldston R.J., *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 26(1984)87.
- Gorbunov E.P. et al, *Nucl. Fusion*, 10(1970)93.
- Green J.M. y Johnson J.L., *Phys. Fluids*, 4(1961)875.
- Gribov V.M. et al, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (Proc. 8th. Int. Conf. Brussels 1980) 1(1981)571. IAEA Vienna.
- Hasegawa A. y Wakatani M., *Phys. Rev. Lett.*, 50(1983)682.
- Hicks H.R. et al, *J. Comput. Phys.*, 44(1981)46.
- Hinton F.L. y Horton Jr. C.W., *Phys. Fluids*, 14(1971)116.
- Horton JR. C.W. y Varma R.K., *Phys. Fluids* 15(1972)620.
- Horn W., Estes R.D. y Biskamp D. *Plasma Phys.*, 22(1980)663.
- Hugill J. y Sheffield J., *Nucl. Fusion*, 18(1978)15.
- Kadomtsev B.B., *Soviet Phys. JETP Lett.*, 13(1961)223.
- Kadomtsev B.B. y Pogutse O.P., *Reviews of Plasma Physics*, (editado por M. A. Leontovich) 5(1970)249 Consultants Bureau, New York.
- Kadomtsev B.B., *Soviet J. Plasma Phys.*, 1(1975)295.
- Kadomtsev B.B. y Pogutse O.P., *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, (Proc. of the 10th Int. Conf. London, 1984), 2(1985)69. IAEA Vienna.
- Krommes J.A. et al, *J. Plasma Phys.*, 30(1983)11.
- Lacina J., *Plasma Phys.*, 13(1971)303.

- Lamb H., *Hydrodynamics*, 1932, Cambridge University Press, sexta edición.
- Landau L.D. y Lifshitz F.M., *Fluid Mechanics*, vol 6 del Course of theoretical Physics, 1959.
- Lee W.W. y Tang W.M., "Gyrokinetic Particles simulation of ion temperature gradient drift instabilities", paper 2Q-19 presented at Sherwood Annual Controlled Fusion Theory Conference, Madison W1, 1985.
- Lee S.G. y Diamond P.H., "Spectrum of ion temperature gradient Turbulence and particle transport in Tokamaks". Paper 1S-24 presented at Sherwood Annual Controlled Theory Conference, Madison W1 1985.
- Liewer P.C., *Nucl. Fusion*, 25(1985)543.
- Merezkhin V.G. y Mukhovatov V.S., *Soviet Phys. JETP Lett.*, 33(1981)446.
- Monticello D.A. et al, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, (Proc. 8th Int. Conf. Brussels, 1980) 1(1982)227. IAEA Vienna.
- Ohkawa T., *Phys. Lett. A*, 67(1978)35.
- Parail V.V., Pogutse O.P., *Soviet Phys. JETP Lett.*, 32(1980)384.
- Rahn H. Ar A. y Paganelli Ch.V., *Scient. Amer.*, 240(1979)46.
- Rayleigh. "The principle of Similitud", *Nature*, 95(1915)66.
- Rechester A.B. y Rosenbluth M.N., *Phys. Rev. Lett.*, 40(1978)38.
- Romanelli R.E. et al, *Nucl. Fusion*, 26(1986)1515.
- Rosenbluth M.N. et al, *Phys. Fluids*, 19(1976)1987.
- Shaing K.C. y Carreras B.A., *Phys. Fluids*, 28(1985)2027.
- Strauss H.R., *Phys. Fluids*, 19(1976)134.
- Strauss H.R., *Phys. Fluids*, 20(1977)1354.
- Strauss H.R., *Plasma Phys.*, 22(1980)733.
- Strauss H.R. et al, *Nucl. Fusion*, 20(1980)628.
- Strauss H.R., *Nucl. Fusion*, 23(1983)649.
- Terry P.W. y Diamond P.H., *Phys. Fluids*, 28(1985)1419.
- Waltz R.E. et al, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (Proc. 11th Conf. Kyoto, 1986) 1(1986)345. IAEA Vienna.
- Wakatani M. y Hasegawa A., *Phys. Fluids*, 27(1984b)611.
- Wakatani M. et al, *Nucl. Fusion*, 24(1984a)1407.
- West G.B., *Los Alamos Science*, Summer/Fall(1984)1.
- Yagui M. et al, *Phys. Soc. Japan*, 56(1987)973.
- Yamagiwa M. et al, *J. Phys. Soc. Jpa.*, 54(1985)15.