01173 1 2ej

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

ESTIMACION DE VIDA RESIDUAL BAJO CARGAS DE AMPLITUD CONSTANTE, DE AMPLITUD VARIABLE O ALEATORIAS

ARMANDO ANDRADE GARCIA

TESIS

Presentada a la División de Estudios de Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener
el grado de:

MAESTRO EN INGENIERIA

(MECANICA EN DISEÑO)

CIUDAD UNIVERSITARIA

ENERO 1991

ESTIMACION DE VIDA RESIDUAL BAJO CARGAS DE AMPLITUD CONSTANTE, DE AMPLITUD VARIABLE O ALEATORIAS

CAPITULO 1

INTRODUCCION

Es un hecho que bajo condiciones de carga repetida, fluctuante o interrumpida, varios materiales experimentan fractura a esfuerzos por debajo del cual se esperaba que ocurriera la falla bajo cargas monotónicas, este fracturamiento ocurre a menudo a niveles de esfuerzo inferiores al punto de cedencia del material. A este fenómeno se le conoce como *FATIGA*. El enfoque tradicional consiste en determinar una curva de esfuerzo contra número de ciclos, conocida como S-N, y de esta manera encontrar el esfuerzo de fatiga. Dichas curvas suponen un material libre de fisuras y no se dispone de información sobre la influencia del tamaño de grieta en la vida residual de los componentes.

El objetivo de la presente tesis es desarrollar la capacidad de predicción de vida residual en componentes estructurales, motivado por el hecho de que gran parte de los equipos de Centrales Generadoras de energi eléctrica en el pais estan aproximándose al término de su vida nominal. Durante los pasados 25 años se han venido desarrollando técnicas que han permitido determinar la vida por fatiga. Conforme el conocimiento de materiales y estructuras se ha expandido, ha sido evidente que en muchos casos es posible conocer el tiempo que transcurre desde la localización de una pequeña fisura, hasta el tamaño crítico de grieta que precede al colapso. Este conocimiento se engloba en la *MECANICA DE FRACTURA*. No obstante el alcance que estos nuevos conocimientos arrojan, esta materia no forma aún parte de ninguna currícula de estudios de posgrado en México.

El trabajo comienza con una revisión de los antecedentes históricos del problema, señalando la importancia que tiene el conocimiento del fenómeno de fatiga. En el segundo capítulo se presentan las bases teóricas que parten de la determinación del estado de esfuerzo en la punta de la grieta. Con estos esfuerzos se determina el *Factor de Intensidad de Esfuerzo* (FIE), que es el parámetro mas empleado en fatiga. Se comenta sobre las soluciones cerradas para obtener el FIE, así como los métodos numéricos mas comúnmente usados, como el de los Elementos Finitos, el de Colocación de Frontera y el de las Ecuaciones Integrales de Frontera. Conocidos los esfuerzos ocasionados por la fisura interesa determinar la dirección en que se propagará la grieta. De esta manera es factible determinar con mayor exactitud la nueva distribución de esfuerzosconforme avanza la grieta, pues las soluciones cerradas de que se dispone no consideran cambio en la dirección. Para tal fin se presentan las teorías del Esfuerzo Tangencial Máximo ($\sigma_\theta$max), de la Máxima Disipación de Energía Elástica ($G(\theta)$ max)y de la Mínima Densidad de Energía de Deformación ($S(\theta)$ min). Habiendo sentado los fundamentos el capitulo tercero discute el crecimiento de grieta bajo cargas de amplitud constante. Este tratamiento es el que se emplea frecuentemente en la práctica, aunque no es el representativo de las situaciones que se viven en la práctica. Se introduce el concepto de fatiga y propagación de grieta y la relación entre la carga y el crecimiento de grieta, así como una muestra de varias de las llamadas "Leyes" formuladas para correlacionar la vida o numero de ciclos contra el tamaño de grieta.

El procedimiento para evaluar la vida útil es presentado junto con un ejemplo que ilustra la dependencia de los parámetros involucrados, como lo es el material, magnitud de esfuerzo y tamaño inicial de fisura. Posteriormente, en el capitulo 4 se estudia el problema de fatiga bajo cargas de amplitud variable, entendiéndose como tales las que pueden constar de una sobrecarga aislada, un conjunto de grupos ó capas de esfuerzo de diferente amplitud o bien un espectro totalmente aleatorio. Se establecen los conceptos pertinentes y se presenta el fenómeno de retardo. Se presentan los resultados de una exhaustiva búsqueda bibliográfica en la que se encontraron 12 modelos, se observa que desde los iniciales de Wheeler, Willenborg, Barsom y Elber, no se ha llegado a determinar un modelo único. Con el fin de contar con una herramienta útil para el diseño se implementaron los criterios anteriores en un sistema interactivo computarizado, que emplea el elemento finito para problemas en dos dimensiones. Se presentan los algoritmos desarrollados, así como los detalles de su implementación y ejemplos que clarifican los conceptos empleados. Finalmente se presenta un resumen y las conclusiones que se obtienen junto con las recomendaciones para trabajos futuros.

1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Como lo muestra la fig.1, *[1]*, la evolución del diseño estructural para incluir la Mecánica de Fractura ha pasado por una serie de etapas. En la primera etapa el diseñador se basaba en la experiencia de diseños anteriores que no fallaban y el único método que existía para evaluar un modelo nuevo era simplemente de "prueba y error". No fue sino hasta finales del siglo XVIII, con el desarrollo de los conceptos de esfuerzo y deformación y su incorporación en la matemática de la naciente teoría de la elasticidad que fué posible el contar con procedimientos cuantitativos de diseño, iniciándose así la segunda etapa. Sin embargo, al evaluar las concentraciones de esfuerzo se toparon con un problema, esto es, la existencia de singularidades de esfuerzo y, por lo tanto, esfuerzos que se hacían infinitos. Esto marcó el preámbulo para la Mecánica de Fractura. El resultado que se muestra en la tercera etapa es el obtenido por Inglis en 1913 al estudiar la concentración de esfuerzo en el extremo del eje mayor de un agujero elíptico en una placa a tensión. Este resultado relaciona el esfuerzo máximo local σ, con el esfuerzo nominal o remoto σ_{nom}, donde "remoto", según el principio de St Venant equivale a una distancia mayor que 10 veces el tamaño de la discontinuidad, y con la mitad del eje mayor, a, y el radio de curvatura al punto de interés, ρ. Para el caso de un agujero circular, con radio = a se tiene $\sigma = 3\ \sigma_{nom}$. Es interesante notar que como se trata de una relación entre radios y no entre tamaños absolutos un agujero diminuto produce la misma concentración que un grande. Sin embargo, si hacemos tender esta relación a un valor sumamente pequeño, lo cual físicamente correspondería a una fisura, entonces el esfuerzo se volvería prácticamente infinito y una estructura con una grieta entonces, de acuerdo a este resultado, no podría soportar ninguna carga.

Esta paradoja fue resuelta por Griffith en 1921, quien es considerado como el padre del estudio científico de grietas. El reconoció que una concentración alta de esfuerzo era necesaria para el crecimiento de grietas, pero no suficiente,e identificó el trabajo local de la grieta al propagarse, con la energía requerida para la formación de las nuevas superficies. Desgraciadamente, como su trabajo lo realizó con vidrio, que es sumamente frágil, por un tiempo la Mecánica de Fractura no pasó de ser un curiosidad científica sin aplicabilidad al diseño en ingeniería. Esta situación prevaleció hasta poco después de la segunda guerra mundial cuando, influenciado por las fallas de los barcos Liberty, algunos de los cuales se partieron en dos, así como por accidentes con las carcasas de proyectiles y puentes, se dió el impulso necesario en los Estados Unidos para el estudio de fractura. Posteriormente, a mediados de los 50's, dos aviones Comet sufrieron accidentes catástroficos en vuelo, con lo que en Europa se comenzó también el estudio de mecánica de fractura. Irwin, en 1948, avanzó un paso al generalizar las ideas de Griffith a metales y otros materiales de ingeniería. Posteriormente, en 1957, relacionó el factor de intensidad de esfuerzo (a discutirse posteriormente), con el balance energético de Griffith y el índice de tenacidad del material. Esto corresponde a la cuarta etapa.

La última parte del diagrama representa la actividad mas reciente, que consiste en el reconocimiento explícito de que existen fisuras en toda estructura, ya sea por defectos iniciales en el material, por agrietamiento en la fabricación o por condiciones de servicio. Debido a que ahora existen métodos mas refinados de Evaluación No Destructiva (NDE), la localización y medida de fisuras es mas factible, con lo que se puede garantizar la integridad estructural de un componente conteniendo una grieta. Esto se logra combinando NDE con la mecánica de fractura mediante 1) suponer un tamaño inicial de grieta, 2) estimar su tasa de crecimiento, 3) calcular el tamaño crítico de la misma. Si se considera que las grietas existen de un tamaño tal que pueden no ser detectadas con NDE, al conocer la tasa de crecimiento es posible programar los intervalos de inspección. Esto se conoce como "tolerancia al daño".

Adaptación empirica de diseños satisfactorios anteriores

↓

Aplicación de la Teoria de Elasticidad a la Resistencia de Materiales. Grandes factores de seguridad

↓

Estudio de las concentraciones de esfuerzo

$$\sigma = \sigma_{nom} \left(1 + 2 \sqrt{a / \rho} \right)$$

↓

Empleo de la Mecánica de Fractura:

Determinar el tamaño de grieta critico para una carga dada, o la carga que puede soportar un componente con una grieta dada, por la relación:

$$K (a, \sigma, B) = K_{IC}$$

↓

Tolerancia al Daño basado en estimar la tasa de crecimiento de la mínima grieta detectable, hasta la falla.

fig. 1 Evolución del diseño estructural

CAPITULO 2

2. Bases teóricas

La predicción de vida útil de componentes consiste de dos pasos. En el primero se debe conocer el estado de esfuerzo de la pieza debido a la fisura, el cual está determinado por el parámetro K, o Factor de Intensidad de Esfuerzo (FIE). Una vez evaluado este factor se procede a integrar la ley de propagación seleccionada, que esta en función de constantes del material evaluadas experimentalmente y presentadas en la forma de curvas que representan en el eje de las ordenadas la relación de crecimiento de grieta a con el número de ciclos N y en el de las abscisas la tasa del FIE, conocidas como curvas da/dN vs ΔK.

2.1 Ecuaciones de esfuerzo y deformación

Se considera un sistema coordenado X, Y, Z donde para cada punto (x, y, z) se desea concocer sus componentes de esfuerzo. El caso general σx, σy, σz, τxy, τxz y τyz puede reducirse generalmente a uno de esfuerzo plano para el cual $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, ó de deformación plana siendo entonces $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, por lo que $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$.

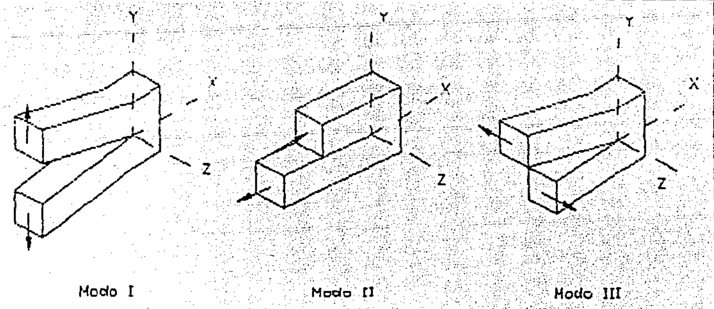


Fig. 2.1 Modos básicos de fracturamiento

En mecánica de fractura se reconocen tres modos básicos de fracturamiento en un cuerpo fisurado, que pueden ser representados en un plano. Se considera la grieta en el plano x, z, tomando el frente de la grieta paralelo al eje z, como lo indica la fig. (2.1). El modo I es de apertura, o de tensión, separándose las caras de la grieta simétricamente con respecto a los planos x,y y x,z. En el modo II, o de deslizamiento, las caras se deslizan simétricamente con respecto al plano x,y, y antisimétricamente en el x,z. Por último, el modo III o de desgarre, tiene deslizamiento de las caras en forma antisimétrica con respecto a los planos x,y y x,z. Las ecuaciones de equilibrio quedan entonces, para el caso plano despreciando fuerzas de cuerpo

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (2.1)$$

Siguiendo la nomenclatura tradicional donde los desplazamientos en x y y se denotan por u y υ respectivamente, las deformaciones se evalúan como

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\ ,\quad \varepsilon_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\ ,\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} \qquad (\ 2.2\ )$$

Las relaciones esfuerzo-deformación vienen dadas por

$$\begin{aligned} E\,\varepsilon_x &= \sigma_x - \mu\,\sigma_y \\ E\,\varepsilon_y &= \sigma_y - \mu\,\sigma_x \\ G\,\gamma_{xy} &= \tau_{xy} \end{aligned} \qquad (\ 2.3\ )$$

Las constantes del material G, o módulo de corte, y E, o módulo de elasticidad, tienen la siguiente dependencia con la relación de Poisson, μ:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (\ 2.4\ )$$

El sistema de ecuaciones de equilibrio (2.1) no está determinado, pues se dispone únicamente de dos ecuaciones para tres incógnitas. Sin embargo, gracias al ingenioso artificio de la función de esfuerzo de Airy, ψ, dichas ecuaciones se satisfacen automáticamente si

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\ ,\quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\ ,\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \qquad (\ 2.5\ )$$

La función ψ debe ser tal que las deformaciones se relacionen con los desplazamientos formando una estructura deformada continua, lo que se conoce como *compatibilidad*.

Considerando que ψ es continua y sustituyendo (2.2) y (2.5) en (2.3) encontramos las ecuaciones de compatibilidad ó

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \qquad (2.6)$$

o, en forma condensada con el operador nabla

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \psi \right) = 0 \qquad (2.7)$$

donde $\nabla^2 \psi$ satisface la ecuación de Laplace.

Por lo tanto, para un caso general el problema consiste en encontrar la función ψ, que sea continua y satisfaga las ecuaciones de equilibrio (2.1).

2.2 El factor de intensidad de esfuerzo

A continuación se desarrollan las expresiones para el campo de esfuerzo asociada a cada modo. Debido a su relativa simplicidad el modo III será el primero en desarrollarse. La ecuación a resolver es entonces la de Laplace y, según las leyes de las funciones analíticas complejas *[2]*, se puede ver que las partes real e imaginaria de una función compleja son soluciones de la ecuación de Laplace, siendo esta una de las razones principales para el empleo del método de variable compleja.

2.2.1 Problema antiplano (modo III)

Para este caso $u = v = 0$, $w = w(x, y)$ y se llega a la ecuación

$$\nabla^2 \omega = 0 \qquad (2.8)$$

Un método conveniente para obtener la solución consiste en emplear la Variable Compleja. Tal técnica la utilizó Westergaard en 1939 y posteriormente, Irwin, en 1957 la aplicó en mecánica de fractura. Su principio es considerar un variable compleja z, definida por $z = x+iy$ ó, en coordenadas polares, $z = re^{i\theta}$, donde $i = \sqrt{-1}$. El complejo conjugado se denomina como $\bar{z} = x-iy = re^{-i\theta}$. De donde se obtiene

$$\begin{aligned} x &= Re(z) = (z + \bar{z}) / 2 \\ y &= Im(z) = (z - \bar{z}) / 2i \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Donde Re y Im son las partes real e imaginaria, respectivamente. Empleando la regla de la cadena

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2.10)$$

por lo tanto

$$4\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2 \qquad (2.11)$$

Sea $f(z)$ una función analitica[1] de la variable compleja z, la cual se puede escribir como

$$f(z) = A\,(x,\ y) + i\ B\,(x,\ y) \qquad (2.12)$$

donde A y B son funciones reales de x y y. Se puede escribir

1. Se dice que una funcion $f(z)$ es analítica en un punto $z=zo$ si está definida y tiene derivada en todo punto en alguna vecindad de zo. Se dice que es analítica en un dominio D si es analítica en todo punto en D. En lugar de analítica tambien se usan los términos holomórfica y regular.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = f'(z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = i\, f'(z) \qquad (2.13)$$

La prima representa diferenciación con respecto al argumento de la función. Se sigue que

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2.14)$$

Sustituyendo lo anterior en (2.12) se obtiene

$$\frac{\partial A}{\partial x} + i\,\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} - i\,\frac{\partial A}{\partial y} \qquad (2.15)$$

Igualando las partes real e imaginaria se consiguen las ecuaciones de Cauchy-Riemmann

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\,\frac{\partial A}{\partial y} \qquad (2.16)$$

Las cuales se pueden combinar para dar

$$\nabla^2 A = \nabla^2 B = 0 \qquad (2.17)$$

volviendo a la ec. (2.8) entonces la respuesta se escribe como

$$w = \frac{1}{G}\left[f(z) + f(\bar{z})\right] \qquad (2.18)$$

donde $f(\bar{z}) = A(x,y) - i\,B(x,y)$ es el complejo conjugado de $f(z)$

Sustituyendo la definición de deformación en la ecuación anterior junto con la ec. (2.12) se obtiene

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G}\left[f'(z) + f'(\bar{z})\right]$$
$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\left[f'(z) - f'(\bar{z})\right] \qquad (2.19)$$

Por la ley de Hooke se puede escribir

$$\sigma_{xz} - i\,\sigma_{yz} = 2\,f'(z) \qquad (\ 2.20\ )$$

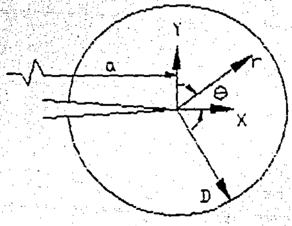


fig. 2.2 Región de estudio y sistema coordenado

Para ligar lo anterior al problema de fractura se considera la región y sistema coordenado mostrado en la fig. (2.2), donde la singularidad de esfuerzo se encuentra contenida en *D*. Para encontrar el carácter dominante de los esfuerzos y desplazamientos se supone la siguiente función holomórfica *[1]*

$$f(z) = C\,z^{\lambda+1}, \qquad C = A + iB \qquad (\ 2.21\ )$$

donde A, B y λ son constantes reales por determinar. De la condición de frontera de desplazamientos finitos en la punta de la grieta ($|z|=r=0$) se obtiene $\lambda > -1$. Sustituyendo (2.21 en (2.20)

$$\sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = 2(\lambda+1)Cz^{\lambda} = 2(\lambda+1)r^{\lambda}(A+iB)(\cos\lambda\theta + i\,\mathrm{sen}\lambda\theta) \qquad (\ 2.22\ )$$

por lo que

$$\sigma_{xz} = 2(\lambda+1)r^{\lambda}\,(A\cos\lambda\theta - B\,\mathrm{sen}\,\lambda\theta)$$
$$\sigma_{yz} = 2(\lambda+1)r^{\lambda}\,(A\cos\lambda\theta + B\,\mathrm{sen}\,\lambda\theta) \qquad (\ 2.23\ )$$

Para esfuerzos, la condición de frontera consiste en que las superficies de la grieta se encuentran libres de esfuerzo, esto es, $\sigma_{yz} = 0$ en $\theta = \pm\pi$ por lo que

$$\begin{aligned} A\,\mathrm{sen}\,\lambda\pi + B\cos\lambda\pi &= 0 \\ A\,\mathrm{sen}\,\lambda\pi - B\cos\lambda\pi &= 0 \end{aligned} \qquad (\ 2.24\ )$$

La solución no trivial se obtiene al buscar que el determinante de los coeficientes del sistema anterior sea nulo, lo cual conduce a

$$\mathrm{sen}\,2\lambda\pi = 0 \qquad (\ 2.25\ )$$

la cual, para $\lambda > -1$ tiene las raices

$$\lambda = -1/2,\ n/2, \qquad n = 0,1,2,.. \qquad (\ 2.26\ )$$

La contribución más importante la tiene el primer término para el cual $A = 0$ y las ecuaciones (2.23) y (2.18) se convierten respectivamente en

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\,\mathrm{sen}\,(\theta/2) \\ \cos\,(\theta/2) \end{Bmatrix} \qquad (\ 2.27\ )$$

con

$$w = \frac{2K_{III}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,\mathrm{sen}(\theta/2) \qquad (\ 2.27a\ )$$

B se escoge de tal forma que

$$K_{III} = \lim_{r\to 0}\left\{ \sqrt{2\pi\, r}\ \sigma_{yz}\Big|_{\theta=0} \right\} \qquad (\ 2.28\ )$$

K_{III} se conoce como el *Factor de Intensidad de Esfuerzo* (FIE) para el modo III, el cual se establece por las condiciones de frontera y esta en función de las cargas aplicadas y de la geometría del cuerpo agrietado. Como se aprecia en (2.27) los componentes de esfuerzo poseen una singularidad en el término inverso de la raíz cuadrada en la punta de la grieta, lo que se traduce en un aumento asintótico de esfuerzo y desplazamiento conforme nos acercamos a dicho punto.

2.2.2 Problema plano (modos I y II)

Volviendo a la ecuación de compatibilidad con la función de Airy (2.7) y empleando la ec. (2.11) se puede escribir

$$\nabla^2 \psi = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \, \partial \bar{z}} = f(z) + f(\bar{z}) \qquad (2.29)$$

Donde $f(z)$ es una función holomórfica. La ecuación anterior puede ser integrada para obtener la siguiente función real

$$\psi = 0.5 \left[\bar{z}\, \Omega(z) + z\, \Omega(\bar{z}) + \omega(z) + \omega(\bar{z}) \right] \qquad (2.30)$$

siendo $\Omega(z)$ y $\omega(z)$ también funciones holomórficas.

Sustituyendo la ecuación anterior en la (2.5) se puede escribir

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \, \partial \bar{z}} = \sigma_x + \sigma_y = 2\left[\Omega'(z) + \Omega'(\bar{z}) \right] \qquad (2.31)$$

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} = \sigma_y - \sigma_x - 2\, i\, \tau_{xy} = 2\left[z\, \Omega''(\bar{z}) + \omega''(\bar{z}) \right] \qquad (2.32)$$

y

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Omega'(z) + \Omega'(\bar{z}) + z\Omega''(\bar{z}) + \omega''(\bar{z}) \qquad (2.33)$$

sea

$$D = u + i\, v \qquad (2.34)$$

la expresión compleja para los desplazamientos, por lo tanto es

$$2\,\frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \varepsilon_x - \varepsilon_y + 2\,i\,\gamma_{xy} \qquad (\ 2.35\ )$$

y

$$\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \qquad (\ 2.36\ )$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.3) en (2.31-2.33) obtenemos

$$2G\,\frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = -\left[\, z\Omega''(\bar{z}) + \omega''(\bar{z})\,\right] \qquad (\ 2.37\ )$$

y

$$\frac{2G}{1-2\mu}\left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}}\right) = 2\left[\,\Omega'(\bar{z}) + \Omega'(\bar{z})\,\right] \qquad (\ 2.38\ )$$

Integrando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$2GD = \varkappa\,\Omega(z) - z\Omega'(\bar{z}) - \omega'(\bar{z}) \qquad (\ 2.39\ )$$

siendo

$$\varkappa = \begin{cases} 3 - 4\mu & \text{deformación plana} \\ \dfrac{3-\mu}{1+\mu} & \text{esfuerzo plano} \end{cases} \qquad (\ 2.40\ )$$

Para examinar ahora el carácter de los campos de esfuerzo y desplazamiento pertenecientes al modo I se posiciona nuevamente el origen del sistema coordenado en la punta de la grieta. Debido a la simetría con respecto al plano de la grieta es posible asumir la siguiente solución

$$\Omega = A\ z^{\lambda+1} \ , \quad \omega = B\ z^{\lambda+1} \qquad (\ 2.41\ )$$

Al igual que en el problema antiplano, A,B y λ son constantes reales por determinar. Para desplazamientos singulares en la punta de la grieta $\lambda > -1$. Sustituyendo la ecuación anterior en la (2.33) se encuentra

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = (\lambda+1)r^{\lambda} \{ A [2 \cos \lambda\theta + \lambda\cos(\lambda-2)\theta] + B \cos \lambda\theta - i [A \lambda\mathrm{sen}(\lambda-2)\theta + B \mathrm{\ sen\ } \lambda\theta] \} \quad (2.42)$$

la cual debe ser igual a cero para $\theta = \pm \pi$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} A (2+\lambda) \cos \lambda\pi + B \cos \lambda\pi &= 0 \\ A \lambda \mathrm{\ sen\ } \lambda\pi + B \mathrm{\ sen\ } \lambda\pi &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

la solución no trivial se logra si

$$\mathrm{sen\ } 2\lambda\pi = 0 \quad (2.44)$$

Comparando la ecuación (2.44) con la (2.25) se nota que la contribución mas importante se logra con $\lambda = -1/2$, para la cual $A = 2B$. Sustituyendo los valores anteriores en las ecs. (2.31), (2.39) y (2.42) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \mathrm{sen}(\theta/2)\mathrm{sen}(3\theta/2) \\ 1 + \mathrm{sen}(\theta/2)\mathrm{sen}(3\theta/2) \\ \mathrm{sen}(\theta/2)\cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Como se aprecia, se tiene una singularidad de esfuerzo en la punta de la grieta ($r = 0$). Los desplazamientos son

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) \, [\varkappa - 1 + 2\mathrm{sen}^2(\theta/2)] \\ \mathrm{sen}(\theta/2) \, [\varkappa + 1 - 2\cos^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad (2.\ 6)$$

El *Factor de Intensidad de Esfuerzo* K_I para el modo I se define entonces como

$$K_I = \lim_{r\to 0} \left\{ \sqrt{2\pi r} \, \sigma_y \Big|_{\theta=0} \right\} \quad (2.47)$$

Siguiendo un procedimiento similar, pero considerando las condiciones para el modo II o de deslizamiento se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\theta/2)[2+\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)] \\ \text{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2)[1-\text{sen}(\theta/2)\text{sen}(3\theta/2)] \end{Bmatrix} \qquad (2.48)$$

y

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\theta/2)\ [\kappa + 1 + 2\cos^2(\theta/2)] \\ -\cos(\theta/2)\ [\kappa - 1 - 2\text{sen}^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \qquad (2.49)$$

con

$$K_{II} = \lim_{r\to 0} \left\{ \sqrt{2\pi\ r}\ \tau_{xy} \Big|_{\theta=0} \right\} \qquad (2.50)$$

definido como el *Factor de Intensidad de Esfuerzo* para el modo II.

2.3 Soluciones cerradas

La solución de las ecuaciones previas para la determinación del FIE es complicada. Existen algunas soluciones en los casos de cuerpos de anchurainfinita debido a la dificultad para satisfacer las condiciones de frontera. Cuando la relación entre el tamaño de grieta y el ancho de la placa es mayor que 0.1 el tratar de encontrar soluciones cerradas es prácticamente imposible y en dichos casos se recurre a los métodos numéricos.

2.4 Métodos numéricos

A continuación se describen los tres métodos mas comunmente empleados, los cuales son el método de los elementos finitos (MEF), el de colocación en la frontera y el de ecuaciones integrales de frontera, también conocido como método de los elementos de frontera.

2.4.1 Método de los elementos finitos

Sin duda el mas conocido es el de los Elementos Finitos, del cual existen gran variedad de programas comerciales. Las primeras aplicaciones del MEF consistían en la evaluación directa del campo de esfuerzos y desplazamientos en la punta de la grieta utilizando los elementos convencionales. Dado que el método se basa en suposiciones de los desplazamientos ó esfuerzos, definidos en términos de funciones polinomiales sobre elementos de tamaño finito no es entonces posible obtener una representación exacta del comportamiento en la región de la singularidad. Para lograr una solución adecuada es necesario emplear una malla bastante cerrada alrededor de la grieta, lo que resulta poco práctico. Como alternativa se investigaron elementos singulares *[3]* en los cuales la singularidad se representaba directamente en las funciones de forma lo que ocasionaba problemas con la compatibilidad entre elementos. Otra modelación consistió en resolver los FIE como grados de libertad. Sin embargo, estas opciones eran complicadas y no disponibles en los programas de propósitos generales del mercado. Mas tarde Barsoum *[4]* y Henshell & Shaw *[5]* descubrieron independientemente los elementos de puntos cuartos, los cuales bautizaron de ese modo debido a que, con solo mover los nodos intermedios a una distancia de un cuarto del lado conteniendo a la grieta se consigue la singularidad deseada. A continuación se demuestra lo anterior empleando elementos isoparamétricos cuadráticos.

Siguiendo la nomenclatura comúnmente utilizada en MEF, la geometría de un elemento isoparamétrico plano de 4 lados con 8 nodos se mapea a un espacio normalizado rectangular (ξ,η) donde tanto ξ como η están confinados a los límites $(-1.0 \leq \xi,\eta \leq 1.0)$ conforme a la siguiente transformación

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)\ x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)\ y_i \qquad (2.51)$$

siendo N_i las llamadas *funciones de interpolacion o de forma* que vienen dadas para este caso como

$$N_i = [(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)-(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)-(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)]\xi_i^2\eta_i^2/4 +$$

$$+ \ (1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1-\xi_i^2)\eta_i^2/2 + (1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)(1-\eta_i^2)\xi_i^2/2 \qquad (2.52)$$

para el nodo i, cuyas coordenadas son (x_i,y_i) en el sistema x-y y (ξ_i,η_i) en el sistema transformado $\xi-\eta$. $(\xi_i,\eta_i = \pm 1)$ para los nodos en las esquinas y cero para los nodos intermedios. Por ser isoparamétrico las mismas funciones de forma son empleadas para interpolar los desplazamientos por lo que

$$u = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)\ u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)\ v_i \qquad (2.53)$$

La matriz de rigidez se encuentra de la siguiente manera

$$\{ \varepsilon \} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \qquad (2.54)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (2.55)$$

donde

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad (2.56)$$

siendo [J] la matriz Jacobiana, la cual esta dada por

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \cdots\cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$(2.57)$$

De la ley de Hooke obtenemos los esfuerzos como

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \varepsilon \} \qquad (2.58)$$

donde [D] es la matriz de propiedades del material. La matriz de rigidez [K] es entonces

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det |J| \, d\xi \, d\eta$$

$$(2.59)$$

Para obtener un elemento singular y poderlo emplear en la punta de la grieta, los esfuerzos en la ecuación (2.58) y las deformaciones (2.54) deben ser singulares. Esta singularidad se logra simplemente moviendo el nodo intermedio una distancia 1/4 de lado separada de la esquina que contiene a la punta de la grieta, lo que se demuestra a continuación

La forma de N_i en la familia serendipity de todos los elementos isoparamétricos son polinomios no singulares y por lo tanto $\partial N_i/\partial\xi, \partial N_i/\partial\eta$ son también no singulares. La única opción es lograr que el Jacobiano J sea singular o, en otras palabras, que el determinante de J desaparezca en la punta de la grieta donde

$$\det|J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \qquad (2.60)$$

Ahora se examinará el comportamiento de un elemento cuadrilátero de 8 nodos con los nodos intermedios de dos lados adyacentes movidos a la posición 1/4, como lo muestra la fig. (2.3). Por simplicidad se evalua la singularidad sobre la línea 1-2, donde $\eta = -1$. Las funciones de interpolación sobre dicha línea son

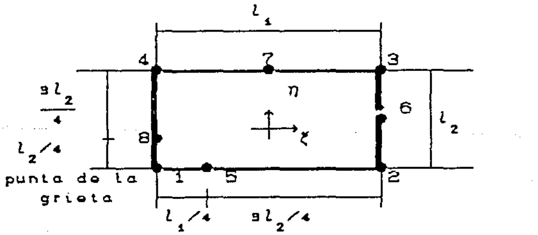


fig. 2.3 Elemento rectangular de puntos cuartos

$N_1 = -1/2\ \xi(1-\xi)$; $N_2 = 1/2\ \xi(1+\xi)$; $N_5 = (1-\xi^2)$

de la ecuación (2.51)

$$x = -1/2\ \xi(1-\xi)x_1 + 1/2\ \xi(1+\xi)x_2 + (1-\xi^2)x_3 \qquad (2.62)$$

Mover el punto intermedio a 1/4 sobre la línea 1-2 equivale a escoger $x_1 = 0$, $x_2 = L$, $x_3 = L/4$ por lo que la ecuación anterior queda como

$$x = 1/2\ \xi\ (1+\xi)\ L + (1-\xi^2)\ L/4 \qquad (2.63)$$

Despejando ξ se obtiene

$$\xi = (-1 + 2\sqrt{x/L}) \qquad (2.64)$$

El término $\partial x/\partial\xi$ del Jacobiano queda como

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2}(1 + \xi) = \sqrt{x\,L} \qquad (2.65)$$

Donde se puede ver que en el punto ($x = 0$, $\xi = -1$) el Jacobiano se vuelve singular. Considerando ahora los desplazamientos de los nodos que forman la línea 1-2 (nodos locales 1,2 y 5) los cuales se obtienen según

$$u = -1/2\xi(1-\xi)u_1 + 1/2\xi(1+\xi)u_2 + (1-\xi^2)u_5 \qquad (2.66)$$

Sustituyendo la ecuación (2.53) para pasar a coordenadas locales

$$u = -1/2\ (-1+2\sqrt{x/L})(2-2\sqrt{x/L})u_1 + 1/2(-1+2\sqrt{x/L})(2\sqrt{x/L})u_2$$
$$+ (4\sqrt{x/L} - 4x/L)\ u_5 \qquad (2.67)$$

Por lo que la deformación en la dirección x es entonces

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = J^{-1}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L}\right]u_1$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{}{\sqrt{xL}} + \frac{4}{L}\right]u_2 + \left[\frac{2}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L}\right]u_5 \qquad (\ 2.68\ )$$

Como se puede apreciar se ha conseguido la singularidad $1/\sqrt{r}$ requerida en el elemento.

El elemento triangular singular se obtiene al colapsar el lado 1-4 del cuadrilátero anterior. En este caso la singularidad es investigada sobre la linea formada por el eje x, donde $\eta = 0$ (fig. 2.4)

$$x = -1/4(1+\xi)(1-\xi)l_1 - 1/4(1+\xi)(1-\xi)l_1 + 1/2(1-\xi^2)l_1/4$$
$$+ 1/2(1+\xi)l_1 + 1/2(1-\xi^2)l_1/4 \qquad (\ 2.69\ )$$

simplificando

$$x = (\xi^2 + 2\xi + 1)l_1/4 \qquad (\ 2.70\ )$$

despejando ξ

$$\xi = (\ -1 + 2\sqrt{x / L}\ ) \qquad (\ 2.71\ )$$

la cual es idéntica a la (2.64) y, por lo tanto, el término $\partial x/\partial \xi$ es también singular. Los desplazamientos y deformaciones a lo largo del eje x son similares a los de las ecuaciones (2.67) y (2.68) respectivamente, por lo quela singularidad de deformación es de la misma manera $1/\sqrt{r}$

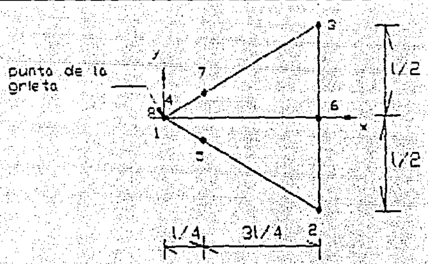


fig. 2.4 Elemento triangular colapsado

2.4.2 Metodo de las ecuaciones integrales de frontera

Este método parte del teorema de trabajos recíprocos de Maxwell-Betti, el cual establece que, para un cuerpo lineal elástico sujeto a a dos diferentes condiciones de carga, el trabajo realizado por la primera condición sobre los desplazamientos producidos por la segunda es igual al trabajo hecho por la segunda carga actuando sobre los desplazamientos de la primera condición. Matemáticamente

$$\int_S T_i^{(1)} u_i^{(2)}\, dS + \int_V F_i^{(1)} u_i^{(2)}\, dV =$$

$$\int_S T_i^{(2)} u_i^{(1)}\, dS + \int_V F_i^{(2)} u_i^{(1)}\, dV \qquad (2.72)$$

donde los superíndices indican las cantidades para la carga dada. La demostración del teorema se obtiene a partir del trabajo virtual y del hecho de que $\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}$ para un material lineal elástico. Si decimos que la primer condición de carga es la de interés y para la segunda consideramos un sistema de cargas unitarias ortogonales en la dirección x_j actuando en el punto ρ entonces, en ausencia de fuerzas de cuerpo y definiendo $T_{ij}(\rho,Q)$ y $U_{ij}(\rho,Q)$ como las tracciones y desplazamientos en la dirección x_i en el punto Q de la frontera debido a las cargas unitarias en ρ. la ecuación anterior se convierte en

$$u_i(\rho) = -\int_S T_{ij}(\rho,Q)\ u_j(Q)dS + \int_S U_{ij}(\rho,Q)\ T_j(Q)dS \qquad (2.73)$$

para un punto interior ρ y donde por conveniencia se ha suprimido el superíndice *ı*. Para evaluar un punto en la frontera se introduce un corte esférico con origen en ρ siendo el radio la línea conectando ρ con un punto P sobre la superficie posteriormente se hace tender a cero el radio y en el límite, conforme ρ tiende a P en la frontera, la ecuación integral se convierte en

$$\frac{1}{2}\ u_i(P) = -\int_S T_{ij}(P,Q)\ u_j(Q)dS + \int_S U_{ij}(P,Q)\ T_j(Q)dS \qquad (2.74)$$

En la porción S_u de la frontera donde los desplazamientos $u_j(Q)$ se conocen, las tracciones $T_j(Q)$ se desconocen y viceversa para la parte S_T. Para resolver ambas incógnitas la ecuación anterior se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas. Para llegar a lo anterior, la frontera se representa por un conjunto de segmentos sobre los cuales se imponen funciones de interpolación en términos de los valores nodales desconocidos y cada valor nodal representará una ecuación. Una vez que se han determinado la respuesta en la frontera se puede, mediante la ecuación (2.73) obtener los valores en cualquier punto interior ρ. Habiendo establecido el campo de desplazamiento en la proximidad de la punta de la grieta se puede calcular la apertura de la grieta y/o los esfuerzos y extrapolar estimados para los factores de intensidad de esfuerzo, por ejemplo, para el modo I

$$K_I = \frac{2G}{\varkappa+1} \lim_{r\to 0} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \; v \Big|_{\theta=\pi} \right\} \qquad (2.75)$$

o bien

$$K_I = \lim_{r\to 0} \left\{ \sqrt{2\pi\, r} \; \sigma_y \Big|_{\theta=0} \right\} \qquad (2.76)$$

2.4.3 Colocación de frontera

En su forma mas simple esta técnica reemplaza por un sistema de ecuaciones algebraícas a las ecuaciones diferenciales elásticas mediante una expansión en series con coeficientes que se adaptan o *colocan* para satisfacer las condiciones de frontera. Como ejemplo *[6]* del método se considerá una grieta a en el extremo de una placa de anchura infinita W y longitud L. la grieta ocupa un segmento del eje X y la punta de la grieta se localiza en $z = 0$, las cargas y la geometría son simétricas al eje X. El campo de esfuerzo es del modo I siendo posible considerar la siguiente función de esfuerzo

$$Z(z) = \frac{K}{\sqrt{2\pi\, z}} + \sum_{n=1}^{N} A_n\, z^{n-1/2} \qquad (2.77)$$

σ_y y τ_{xy} son cero en $y = 0$ cuando x es negativo, por lo que es posible satisfacer las condiciones de frontera exactamente sobre la línea de la grieta. Sin embargo, dado que N es finito, las condiciones anteriores no se pueden cumplir exactamente. Si $A_1, A_2, \ldots A_N$ y K son tales que los requerimientos son casi satisfechos a lo largo de la línea entonces la influencia de los errores restantes en el campo de esfuerzo cercano a la grieta será pequeña. Una consideración similar se aplica a las fronteras superior e inferior (donde se encuentra ejercida la carga), donde las condiciones son $\sigma_y = \sigma$ y $\tau_{xy} = 0$. A lo largo de las líneas $x = -a$ y $x = W-a$ se seleccionan los puntos de colocación en la frontera a valores iguales de ω en la ecuación $y = a \tan \omega$ siendo ω el ángulo medido desde la rama negativa del eje X. Un método similar se emplea para escoger los puntos de colocación en $x = W-a$ ahora empleando $y = (W-a) \tan \omega_2$ donde ahora ω_2 es el ángulo medido desde la rama positiva. Los métodos anterfores se emplean para los puntos de la línea $y = L/2$, empleándose sólamente la mitad superior por la simetría.

El procedimiento de solución consiste en escribir las ecuaciones para $\tau_{xy} = 0$ y $\sigma_x = 0$ en los puntos seleccionados sobre $x = -a$ y $x = W - a$, así como las ecuaciones para $\tau_{xy} = 0$ y $\sigma_y = 1$ (dado que K es proporcional a σ) en los puntos escogidos a lo largo de $y = L/2$. Si se eligen $(N+1)/2$ puntos el resultado es un conjunto de ecuaciones lineales en términos de los parámetros K, A_1, A_2, ...A_N, cuyo número debe ser el necesario para determinar todos los valores. Sin embargo, para una cantidad dada de tiempo de cómputo resulta mas eficiente limitar N, seleccionar el número de puntos de colocación de frontera de 3 a 4 veces $(N+1)/2$ y emplear minimos cuadrados para determinar los mejores valores para los parámetros.

2.5 Predicción del ángulo de propagación de la grieta

Como se ha visto anteriormente, para calcular el FIE se necesita realizar un análisis de esfuerzos en la geometría que contiene a la grieta. Para casos simples de condiciones de carga y geometría se dispone de ecuaciones sencillas, sin embargo, si el crecimiento de grieta trae consigo un cambio de dirección entonces se debe determinar el FIE nuevo para esa posición. Es por eso que en esta sección se presentan las teorías generalmente utilizadas para la predicción del ángulo de propagación. Se empieza por analizar el concepto de energía y su disipación. y, tal como se mencionó en la introducción, Griffith, al explicar la paradoja de los esfuerzos infinitos en muescas consideró un material frágil con una grieta simple de longitud $2a$, como la muestra la fig. (2.5), y consideró los cambios en la energía del sistema asociados con una extensión incremental de la grieta. La disipación de energía (U) del sistema, al variar con la longitud de la grieta, se muestra en la fig. (2.6) siendo la variación, para el caso de esfuerzo plano

$$U = \frac{\sigma^2}{2E}\pi a^2 \quad \therefore \quad \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\sigma^2}{E}\pi a \qquad (2.77)$$

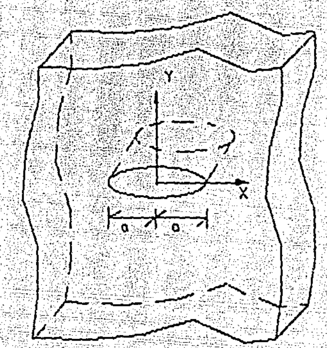


fig. 2.5 Grieta de Griffith

Para deformación plana sólamente se sustituye E por $E/(1-\mu^2)$.

Mientras que como resultado de la relajación del material se libera energía, se requiere una entrada de energía W para producir el crecimiento en la punta. Por simplicidad se asume que la energía requerida para incrementos iguales de longitud de grieta es constante, lo que supone que W aumenta linealmente con un incremento de longitud de la grieta fig. (2.6). El signo positivo de W representa entrada de energía al sistema, la cual se emplea en la creación de nuevas superficies de grieta (energía superficial). U es negativo, lo que indica la disminución de energía de deformación. De la fig. (2.6) es evidente que para incrementar la longitud de la grieta en la región $a \leq a^*$ se requiere introducir energía al sistema, mientras que para $a > a^*$ la energía es liberada como resultado de la extensión de la grieta, por lo que ésta se propagará. Por lo anterior, la inestabilidad de las grietas se relaciona con un valor estacionario de la curva de energía total $(W+U)$, ya que, pasando de este punto, la liberación de energía durante la extensión incremental de la grieta, excede la energía requerida para formar nuevas superficies de grieta.

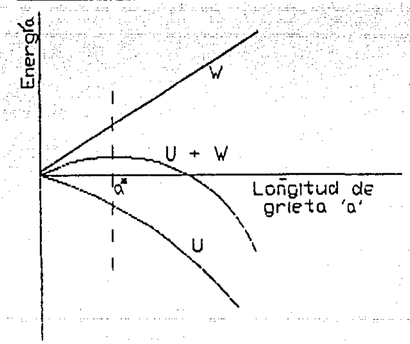


fig. 2.6 Variación de energía contra tamaño de grieta

El concepto de tasa de liberación de energía de deformación G (en honor a Griffith) se define por la pendiente

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} \qquad (2.78)$$

La absorción de energía durante una extensión incremental de la grieta se expresa como

$$R = \partial W \, / \, \partial a \qquad (2.79)$$

Por lo que la condición para crecimiento inestable de la grieta se puede escribir como

$$G = R \qquad (2.80)$$

En materiales dúctiles, como los metales, ocurre deformación plástica cerca de la punta. Dado que la zona plástica se produce antes del crecimiento de la grieta, la energía para formar dicha zona se puede considerar como la energía requerida para la propagación de grieta, por lo que para metales, R es principalmente energía plástica.

Dado que Griffith derivó su ecuación para vidrio, que es un material sumamente frágil, supuso que R es la única energía de superficie, y, por lo tanto, es constante. Bajo esta suposición, se puede definir un valor critico constante de G, G_{cr}, en el cual ocurrirá la propagación inestable de la grieta. Este valor es una propiedad del material, y es

$$G_{cr} = \frac{\sigma_c^2}{E} \pi a \qquad (2.81)$$

donde σ_c es el nivel de esfuerzo a la ruptura

Por otra parte, para la grieta de Griffith el FIE esta dado por [7] como

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \qquad (2.82)$$

por lo que

$$G_{cr} = \frac{K_{Ic}^2}{E} \varkappa \qquad (2.83)$$

siendo $\varkappa = 1$ para esfuerzo plano ó $(1-\mu^2)$ para deformación plana ,

Irwin estableció que, para un problema del modo I, la fractura ocurre cuando K_I alcanza un valor crítico K_{Ic}, que corresponde a la tenacidad del material. Sin embargo las fisuras existen en configuraciones generalizadas y se encuentran sujetas a carga, por lo que su falla no está restringida al modo I. Por lo tanto se requiere de un criterio general de modos mixtos para poder estudiar el proceso de crecimiento.

Una característica básica de la extensión de fractura en modo mixto, que es inherentemente diferente del clásico modo I de Griffith, es que la fisura no se extiende en un plano coincidente con la grieta original. Por lo tanto el balance de energía clásico de Griffith no se puede llevar a cabo de manera sencilla, y sería incorrecto encontrar la tasa de liberación de energía mixta sumando G_I y G_{II}, dado que las direcciones en los modos I y II no son iguales. Shi *et al* [8] resolvieron problemas en los cuales se involucraban valores de K_I y K_{II} y propusieron un funcional

$$f_{cr} = f(K_I,\ K_{II}) \qquad (2.84)$$

donde establecen que la combinación de FIE para los modos I y II causará la iniciación de la grieta al alcanzar cierto valor crítico. Sin embargo, no especificóuna forma de encontrar el funcional que relaciona K_I y K_{II}. A continuación se presentan y discuten diferentes alternativas que se han propuesto con este objetivo.

2.5.1 Teoría del esfuerzo tangencial máximo

Este criterio, propuesto por Erdogan y Sih *[9]*, postula que la extensión de la grieta comienza cuando el esfuerzo tangencial σ_θ es máximo y el esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}$ es cero. Conviene entonces expresar los esfuerzos cercanos a la punta de la grieta en coordenadas polares

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[K_I\left(1+\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{2} K_{II}\,\mathrm{sen}\theta - 2K_{II}\tan\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II}\,\mathrm{sen}\theta\right] \qquad (2.85)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[K_I\,\mathrm{sen}\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1)\right]$$

Haciendo $\partial\sigma_\theta/\partial\theta = 0$, o el equivalente, $\tau_{r\theta} = 0$ se obtiene para θ

$$K_I\,\mathrm{sen}\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1) = 0 \qquad (2.86)$$

2.5.2 Teoría de la máxima liberación de energía.

Este criterio se basa en el concepto de Griffith-Irwin de la liberación de energía para el modo I. Simplemente postula *[10]* que la grieta se extenderá en la dirección de la tasa de máxima liberación de energía, la que se define por

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = 0 \quad ; \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2} < 0 \qquad (2.87)$$

cuando G alcance el valor crítico del material G_{cr}.

Hussain *et al* [10] encontraron que los FIE K_I y K_{II} en la punta de la grieta son

$$K_I(\theta) = \frac{4}{(3+\cos^2\theta)} \left(\frac{1+\theta/\pi}{1-\theta/\pi}\right)^{-\theta/2\pi} \left[K_I \cos\theta - 3/2\ K_{II} \operatorname{sen}\theta\right] \tag{2.88}$$

$$K_{II}(\theta) = \frac{4}{(3+\cos^2\theta)} \left(\frac{1+\theta/\pi}{1-\theta/\pi}\right)^{-\theta/2\pi} \left[K_{II} \cos\theta + 1/2\ K_I \operatorname{sen}\theta\right] \tag{2.89}$$

Si se considera que la propagación de la grieta se llevará a cabo en el plano original, la tasa de liberación de energía se escribe

$$G = G_I + G_{II} \tag{2.90}$$

para esfuerzo plano $G = \dfrac{1}{E}\left[K_I^2 + K_{II}^2 \right]$

para deformación plana $G = \dfrac{1}{E}\left[K_I^2 + K_{II}^2 \right]$

Los FIE en la punta de la extensión infinitesimal de la grieta, dados por (2.88-9) pueden sustituirse en la (2.90) para obtener la tasa de liberación de energía asociada con un ángulo θ. Para esfuerzo plano esta relación es

$$G(\theta) = \frac{4}{E}\left(\frac{1}{(3+\cos^2\theta)}\right)^2 \left(\frac{1+\theta/\pi}{1-\theta/\pi}\right)^{-\theta/\pi} \left[\left(1+3\cos^2\theta\right)K_I^2 - 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta K_I K_{II} + \left(9 + 5\cos^2\theta\right)K_{II}^2\right] \tag{2.91}$$

y el ángulo de fractura esta dado por (2.87). El valor de

Gcr se encuentra por medio de (2.81).

2.5.3 Teoría de la densidad de energía de deformación mínima

Sih [8], buscando una cantidad que brindara una descripción de la dirección de la grieta, así como de la propiedad del material, estudió la concentración de energía en la punta de la grieta y postuló que la fractura se inicia a una distancia crítica de la punta de la grieta en la dirección θo a lo largo de la cual la densidad de energía de deformación es mínima.

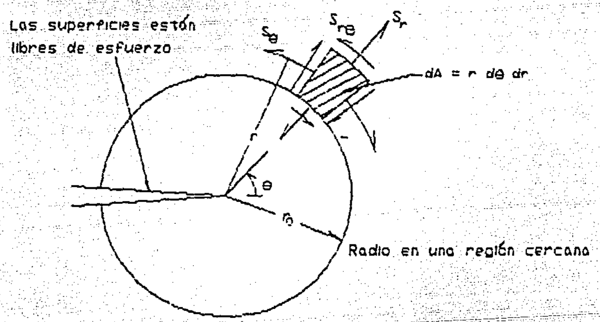


fig. 2.7 Esfuerzos en una región cercana a la punta de la grieta

Si se considera una región cercana a la punta de la grieta como la mostrada en la fig. 2.7 la energía almacenada en un elemento $dA = r d\theta dr$ el diferencial de trabajo esta dado por

$$dW = \frac{1}{2}\left[\sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \tau_{r\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)\right] dA \qquad (\ 2.92\ )$$

Sustituyendo las ecuaciones de esfuerzo y desplazamiento en coordenadas polares en la ecuación anterior obtenemos la forma cuadrática del campo de densidad de energía de deformación

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{r}\left(a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \right) \qquad (\ 2.93\ )$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16G}\left[(1 + \cos\theta)(\varkappa - \cos\theta)\right] \\ a_{12} &= \frac{1}{16G}\operatorname{sen}\theta\left[2\cos\theta - (\varkappa - 1)\right] \\ a_{22} &= \frac{1}{16G}\left[(\varkappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)\right] \end{aligned} \qquad (\ 2.94\ )$$

las cuales dependen de las constantes $\varkappa$ y G, siendo G el módulo de corte $G = E/2(1+\mu)$ y

$$\varkappa = \begin{cases} \dfrac{3-\mu}{1+\mu} & \text{para esfuerzo plano} \\ 3-4\mu & \text{para deformación plana} \end{cases} \qquad (\ 2.95\ )$$

La función de energía de deformación es inversamente proporcional a la distancia radial r y se hace singular cuando $r \rightarrow 0$. La magnitud de éste campo se denomina por S y se designa como el factor de densidad de energía de deformación

$$S = a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \qquad (2.96)$$

El ángulo de propagación se encuentra entonces haciendo

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \qquad (2.97)$$

y el inicio ocurre cuando S alcanza un valor crítico S_{cr} que es una constante del material

CAPITULO 3

FATIGA BAJO CARGA DE AMPLITUD CONSTANTE

3.1 Antecedentes

Hasta ahora se ha visto como influye la presencia de una fisura o grieta sobre el campo de esfuerzos, sin embargo, como se ha declarado al principio del trabajo, el objetivo final es la evaluación de la vida residual. A continuación se mostrarán algunos de los términos asociados con fatiga (fig. 3.1). Los ingenieros caracterizan los materiales llevando a cabo ensayos con un ciclo de carga similar al de dicha figura. Este experimento se llevaba hasta la ruptura y se graficaban los datos como una curva de esfuerzo contra número de ciclos, lo que se conoce como curvas *S-N*. Como se aprecia, existe una disminución en el esfuerzo que se conoce como "esfuerzo de fatiga". El enfoque consistía entonces en determinar dicha curva para conocer tal valor de esfuerzo. El empleo de la curva, mostrado en la fig. 3.2 podía considerarse para un espécimen con muesca o sin ella, mas sin embargo la naturaleza progresiva de la fatiga no se había tomado en cuenta. No fue hasta los 40's-50's que se reconoció este hecho y que los investigadores comenzaron a considerar tres etapas de fatiga, las cuales fueron identificadas como *inicio*, *propagaci^n* y *falla*.

Por lo que toca al diseño estructural se encuentran entonces dos tendencias para el diseño por fatiga: seguridad-vida y falla-vida ó diseño tolerante a fallas .

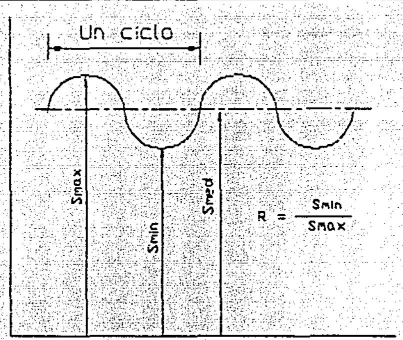


fig. 3.1 Terminología en fatiga

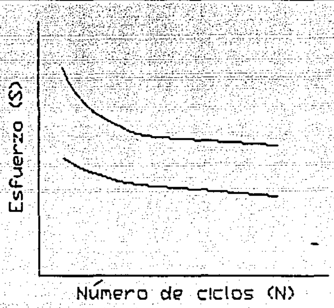


fig. 3.2 Gráfica típica de S-N

En la primera se basa en la suposición de que el material o bien no contiene ninguna fisura o que el nivel de esfuerzo es demasiado bajo para propagarla. Por el contrario, en falla-vida, se parte de una estructura que poseé una grieta inicial y se trata de determinar el tiempo que transcurrirá hasta la falla, la que se presentará al alcanzar la grieta un tamaño crítico.

Para utilizar entonces el segundo criterio es necesario entonces realizar pruebas sobre especímenes con fisuras iniciales. Conforme se aplican los ciclos, la grieta aumenta (propagación de grieta) y se va monitoreando su tamaño contra el número de ciclos, fig. (3.3).

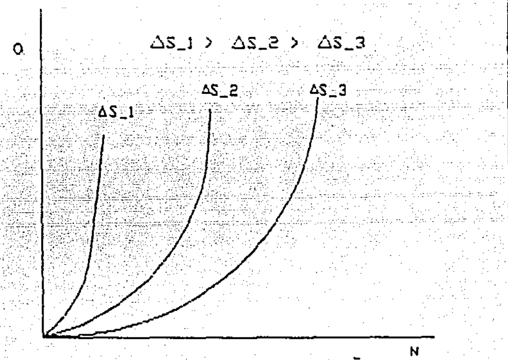


fig. 3.3 Efecto de la variación del esfuerzo

Una desventaja de tales curvas es que si se incrementa el nivel de esfuerzo la grieta crece con mayor rapidez y, por lo tanto, se obtiene una curva diferente, debido al hecho de que la tasa de crecimiento es muy lenta al inicio de la propagación, el tamaño inicial influye grandemente sobre la curva, fig. 3.4.

3.2 La curva da/dn vs ΔK

Para evitar la multiplicidad de curvas se pensó entonces en relacionarlas con el factor de intensidad de esfuerzo, en virtud de que este parámetro ya toma en cuenta las variables anteriores. Se vió entonces que graficando el diferencial de crecimiento de grieta contra el cambio en el FIE se lograba una sola curva representativa, la cual se conoce como *da/dN vs ΔK*.

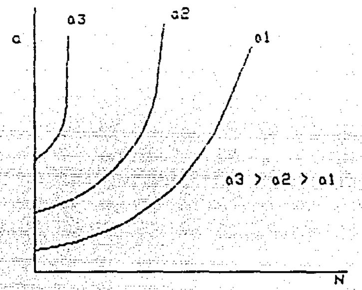


fig. 3.4 Influencia del tamaño inicial de la grieta sobre la vida residual

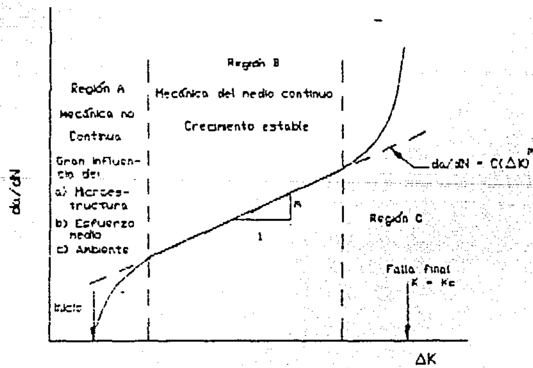


fig. 3.5 Zonas de la curva da/dn vs ΔK

Tal curva es característica del material y es de primordial importancia el conocerla para poder realizar el cálculo de vida útil. Como se ve en la fig. 3.5 la curva consta de tres regiones diferentes. En la región I la teoría escapa del medio continuo y hay gran influencia de la microestructura. Esta zona se llama zona de inicio y el factor de intensidad de esfuerzo cíclico es tan bajo que el crecimiento de grieta por ciclo es casi cero. Basado en experimentos se ha encontrado que este valor ,ΔK_{th}, se encuentra en el rango *[11]*

$$1.5 \times 10^{-4} \sqrt{in} < \frac{\Delta K_{th}}{E} < 1.5 \times 10^{-4} \sqrt{in} \qquad (3.1)$$

donde E es el módulo de elasticidad en ksi y K_{th} es el factor de intensidad de esfuerzo de inicio en $ksi\sqrt{in}$. Otra expresión que se utiliza a menudo para determinar el valor de inicio para aceros es

$$\Delta K_{th} = 6.4(1 - 0.85R) \qquad (3.2)$$

donde R es la relación de carga P_{min}/P_{max}.

En la segunda región es en donde se evalúa el crecimiento y se caracteriza por un crecimiento estable lineal. Es para esta zona que se han desarrollado las "leyes" de crecimiento de grieta. La referencia *[12]* presenta una descripción de 33 de ellas. Sin embargo la mas ampliamente utilizada es la debida a Paris

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^{n} \qquad (3.3)$$

donde C y n son constantes. En general el exponente n

varía entre 2.0 y 4.0 para la mayoría de los metales. Es en esta zona donde se producen las estrías ó líneas de desgarre típicas de la superficie de fatiga.

La tercera región se refiere generalmente como la de régimen de falla estática, debido a que la ruptura ocurre en un número muy pequeño de ciclos, a valores de K que se aproximan a los de la tenacidad del material ó factor de intensidad de esfuerzo crítico Kc. En esta región la tasa de crecimiento de grieta predicha por la extrapolación de la región II sería no conservadora, experimentándose una aceleración del crecimiento que conduce a la ruptura final con un número muy reducido de ciclos.

3.3 Principales leyes de propagación

Como se ha mencionado anteriormente la propagación se calcula en la región II de la curva da/dN vs K. La ley mas empleada es la de Paris (3.3) donde las constantes C y n se obtienen al ajustar los datos sobre la curva. Su significado geométrico es que C se refiere al cruce con el eje da/dN y n es la pendiente de la recta. Posteriormente Forman *[13]* modificó la ley de Paris argumentando que da/dN debería ser infinito cuando K alcanza su valor crítico, esto es, cuando K_{max} es igual a Kc. Además estableció una relación para tomar en cuenta la razón de esfuerzo R, quedando su ley entonces como

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\,(\Delta K)^n}{(1 - R)\,Kc - \Delta K} \qquad (3.4)$$

donde

C y n son constantes para ajustar la curva da/dN vs ΔK

Kc es la tenacidad

R es la relación de esfuerzo = $\sigma_{min} / \sigma_{max}$

Uno de lo resultados de la presente tesis indica que para magnitudes de la relación de esfuerzo R mayores de 0.3 los valores obtenidos mediante Paris empiezan a divergir de los de Forman, por lo que habrá de tenerse en cuenta la experiencia previa de ensayos anterior para realizar la predicción del crecimiento de grieta.

3.4 Procedimiento para evaluación de vida residual

Se puede establecer los pasos necesarios para calcular la vida remanente de una estructura sujeta a cargas de amplitud variable según [13]

1. Sobre la base de calidad de inspección en ensayos no destructivos (NDE) estimar el tamaño inicial de grieta a_o presente en la estructura así como la relación del factor de intensidad de esfuerzo K para el sistema a analizar.
2. Conociendo la tenacidad Kc y el esfuerzo nominal máximo obtener, de acuerdo a la relación de K el tamaño crítico de grieta a_{cr} que causaría la fractura.
3. Seleccionar una ley de propagación (3.3) ó (3.4) y obtener los parámetros necesarios. Por ejemplo, para el caso de acero martensitico $C = 0.66 \times 10^{-8}$, $n = 2.25$
4. Determinar ΔK empleando la expresión para el factor de intensidad de esfuerzo, el tamaño inicial a_o y el rango de esfuerzo ciclico
5. Integrar la ley de crecimiento seleccionada entre los

límites de a_o y a_{cr} (en Kc) para obtener la vida total.

En el capítulo anterior se han visto métodos para evaluar el FIE y afortunadamente se puede disponer de un gran número de expresiones conocidas, por ejemplo *[6]*. Como muestra se tiene que, para una grieta en el borde de una placa infinita sujeta a tensión uniforme, K es

$$K_I = 1.12\ \sigma \sqrt{\pi}\ \sqrt{a} \qquad (3.5)$$

Si se emplea la ley de Paris (3.3) la integración para obtener el número de ciclos se puede realizar, para la ec. (3.5) sin ningún problema, como se efectúa a continuación

Escribiendo ΔK como $\Delta K_I = 1.12(\sigma_{max} - \sigma_{min})\sqrt{\pi}\sqrt{a}$ y separando variables se obtiene

$$dN = \frac{1}{C\left[1.12\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)\sqrt{\pi}\right]^{n} a^{n/2}} \qquad (3.6)$$

Integrando ambos miembros

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{a^{-n/2}}{C\left[1.12\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)\sqrt{\pi}\right]^{n}}\, da \qquad (3.7)$$

como los miembros del denominador son constantes

$$N = \frac{1}{C\left[1.12\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)\sqrt{\pi}\right]^{n}} \int_{a_i}^{a_f} a^{-n/2}\, da \qquad (3.8)$$

Obteniéndose finalmente la siguiente expresión para evaluar la vida consumida por una grieta al crecer de un tamaño inicial a_i hasta un final a_f

$$N = \frac{a_f^{(1-n/2)} - a_i^{(1-n/2)}}{C\left[1.12\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)\sqrt{\pi}\right]^n (1 - n/2)} \qquad (3.9)$$

para simplificar la ecuación anterior se puede escribir

$$A_1 = 1 - n/2 \;\; ; \;\; A_2 = 1.12(\sigma_{max} - \sigma_{min})\sqrt{\pi} \;\; ; \;\; A_3 = C\, A_2^n\, A_1$$

y así obtener

$$N = \frac{a_f^{A_1} - a_i^{A_1}}{A_3} \qquad (3.10)$$

Las ecuaciones anteriores pueden modificarse para evaluar los siguientes casos:

Si se desea conocer la <u>vida total</u> a partir de una grieta inicial dada primeramente se debe determinar el tamaño crítico de grieta. Para obtenerlo se iguala el valor máximo del FIE, obtenido con el esfuerzo máximo, con la tenacidad, esto es

$$Kc = 1.12\, \sigma_{max} \sqrt{\pi} \sqrt{a_{cr}}$$

$$a_{cr} = \left[\frac{Kc}{1.12\, \sigma_{max}\sqrt{\pi}}\right]^2 . \qquad (3.11)$$

Si se desea saber el <u>tamano de grieta tras N ciclos</u> entonces, despejando a de (3.10) se obtiene

$$a_f = \left[N\, A_3 + a_i^{A_1}\right]^{(1/A_1)} \qquad (3.12)$$

Desafortunadamente, solo este caso sencillo puede resolverse en forma cerrada. Por ejemplo, si se desea utilizar la ley de Forman (3.4), donde ΔK se encuentra en el numerador y denominador ó, si la placa es de anchura finita, entonces la ecuación (3.5) se convierte en

$$K_I = Y\,\sigma\,\sqrt{a} \qquad (3.13)$$

con

$$Y = 1.99 + 0.76\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 8.48\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 27.36\left(\frac{a}{W}\right)^2$$

donde a es la longitud de grieta y W es el ancho la la placa

En caso de querer evaluar el crecimiento de acuerdo a Forman es necesario entonces recurrir a integración numérica, donde (3.5) se escribe como

$$\Delta N = \frac{(1 - R)\,Kc \;-\; \Delta K}{C\,(\,\Delta K\,)^n}\,\Delta a \qquad (3.14)$$

Otra complicación surge cuando se quiere determinar la vida total. De acuerdo a (3.11) se puede conocer el tamaño de grieta crítico y emplear este valor en la integración. Como se observa en la expresión (3.13) no es posible despejar a. En este caso el procedimiento es iterativo y se va calculando el valor de K_{max} incrementando por un Δa la longitud inicial. Este procedimiento se repite hasta que el criterio de falla es satisfecho el cual es

$$K_{max} \geq Kc \qquad (3.15)$$

siendo entonces el tamaño crítico aquel para el que se cumple la ecuación anterior.

3.4 Ejemplo de aplicación

A continuación se presenta un ejemplo sencillo de una placa con grieta en un borde sujeta a una tensión remota uniforme donde se verá el papel que desempeñan los parámetros que intervienen en el cálculo. Esto servirá para sensibilizar al analista sobre la influencia de modificar la tenacidad, el tamaño de grieta inicial ó bajar el nivel de esfuerzo, mostrándose al final una gráfica con las curvas de tamaño de grieta contra vida para cada opción. Se supondrá un acero martensítico con los siguientes datos:

Coeficiente	$C = 6.6E-09$
Exponente	$n = 2.25$
grieta inicial	$a_i = 0.3$ in
Esfuerzo máximo	$\sigma_{max} = 45$ Ksi
Esfuerzo mínimo	$\sigma_{min} = 25$ Ksi
Tenacidad	$Kc = 150$ Ksi$\sqrt{in}$

a) Cálculo de vida útil considerando placa de anchura infinita, ley de Paris e integración exacta

Primeramente se calcula el tamaño crítico de grieta según (3.11) por lo que

$$a_{cr} = \left[\frac{150}{1.12(45)\sqrt{\pi}}\right]^2 = 2.82 \text{ in}$$

El número de ciclos se determina con la expresión (3.10) como

$$N = \frac{2.82^{-0.125} - 0.3^{-0.125}}{-3.2644E-06} = \underline{86,986 \text{ ciclos}}$$

b) Repetir el cálculo ahora con una grieta inicial de 0.15"

Simplemente se sustituye en la expresión anterior 0.3 por 0.15 y se obtiene <u>119,215 ciclos</u>

c) Mismos datos que (a) pero con una tenacidad de 200 Ksi $\sqrt{in}$.

La tenacidad influye directamente sobre el tamaño de grieta crítico. De (3.11) resulta $a_{cr} = 5.01$ in.

Sustituyendo 2.82 de la ecuación de (a) por 5.01 queda 105,640 ciclos

d) Igual que (a) pero bajando el esfuerzo máximo a 40 Ksi

Como se aprecia de (3.11) el tamaño crítico es inversamente proporcional al esfuerzo máximo, siendo ahora a_{cr} 3.568, ademas cambia A_3 en (3.10), dando finalmente una vida de 181,071 ciclos

e) Suponer que no existe solución analítica para la integral y resolverla numéricamente, asi como calcular el tamaño crítico considerando que no se pudiese emplear la ecuación (3.11). Obtener la vida útil asi como a_{cr} asumiendo un incrementos de grieta de 0.1 in.

Para lograr lo anterior se emplea la ley de Paris como

$$\Delta N = \frac{\Delta a}{C\ (\ \Delta K\ )^{n}} \qquad (\ 3.16\ )$$

En el apéndice A se presenta un programa de computadora para calcular el crecimiento de grieta contra número de ciclos empleando las leyes de Paris o Forman. Utilizando dicho programa se obtiene, para un incremento de 0.1 en (a) un tamaño crítico de 2.85 y N = 87,700, para (b) a_{cr} = 2.9, N = 119,788, (c) a_{cr} = 5.05, N = 105,969, (d) a_{cr} = 3.65, N = 182,901. Los datos anteriores se han graficado en el apéndice lo que proporciona una imagen clara del efecto de modificar los parámetros sobre la vida total. Se puede concluir entonces que no hay diferencia significativa en cuanto a precisión. La única desventaja es el número de operaciones que se requieren, por lo que es de mucha utilidad contar con algún medio de computación, que puede ser tan sencillo como una calculadora de bolsillo programable. Por otra parte, además de conocer las cantidades totales, es práctica común presentar los resultados finales como curvas de grieta contra número de ciclos, (figs. 3.9,10,11), por lo que se requieren puntos discretos de evaluación, los cuales se proporcionan directamente en los métodos numéricos.

CAPITULO 4

CRECIMIENTO DE GRIETA BAJO CARGAS DE AMPLITUD VARIABLE O ALEATORIA

Para lograr un diseño confiable es necesario tomar en cuenta las variaciones de esfuerzo o desplazamiento al calcular la vida del componente. Las primeras evaluaciones se realizaron considerando cargas de amplitud constante integrando la ley de Paris generalmente. Sin embargo,mas tarde los investigadores encontraron que cuando las cargas son de amplitud variable, o existen sobrecargas aisladas, el comportamiento es diferente, obteniéndose resultados conservadores.

En la práctica, las solicitaciones sobre maquinaria nunca son del tipo sinusoidal o triangular, con amplitud y frecuencia constante, como las producidas en las pruebas de fatiga. Las cargas en servicio tienen usualmente amplitud variable o son totalmente aleatorias. Ejemplos de lo anterior son las ráfagas de viento sobre los aviones en vuelo, las cargas debidas a vibración en máquinas desbalanceadas, en las turbinas de generación eléctrica durante los paros y arranques debida a la variante demanda de energía y otras varias aplicaciones.

4.1 Definición de conceptos

Como se mencionó anteriormente existen diferentes condiciones de carga, las cuales se agrupan en Amplitud Variable por un lado y Aleatorias por otro. En su aspecto mas simple se puede considerar cargas cíclicas constantes sujetas a sobrecargas periódicas, fig. 4.1a. También se pueden encontrar condiciones de mas de un tipo de carga cíclica con diferentes valores de esfuerzos máximos y mínimos agrupados. Al conjunto de ciclos de mismo valor de S_{max} y S_{min} se le llama *capa*. Si existe un grupo de capas repetitivas a cada unidad se le llama *bloque*, fig. 4.1b. Cuando los valores de esfuerzo no guardan ninguna relación aparente se denomina *espectro aleatorio*, fig. 4.1c

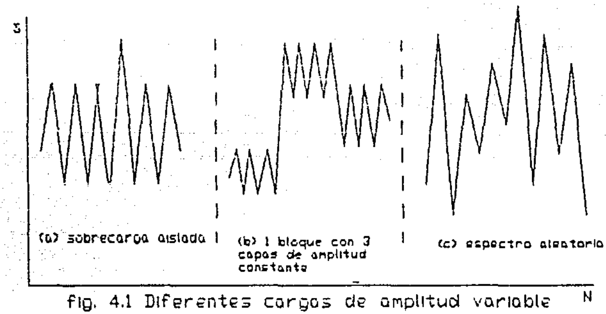


fig. 4.1 Diferentes cargas de amplitud variable

4.2 El fenómeno de retardo

Mediante la inspección de la superficie de falla, por el estudio de las estrías de la superficie de fractura, se descubrió el fenómeno de retardo. Este consiste en que después de la aplicación de una sobrecarga el crecimiento de grieta se vuelve muy lento en comparación al ocasionado por cargas constantes, como lo indica la fig. 4.2, donde se observa la diferencia en la curva de tamaño de grieta contra número de ciclos, la cual se denotará en adelante como a vs N, al momento de aplicación de la sobrecarga, contra la curva a carga constante.

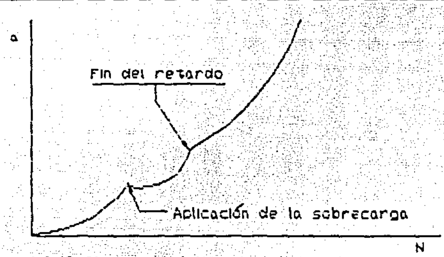


fig. 4.2 Influencia del retardo en la curva a-N

Para explicar lo anterior surgieron tres teorías, estas son: 1) achatamiento de la punta de la grieta, 2) esfuerzos residuales y 3) cierre de grieta. A continuación se describe brevemente cada uno de ellos:

1) *Achatamiento de la punta* Sugiere que después de la aplicación de la sobrecarga la punta de la grieta se vuelve roma como consecuencia del flujo plástico localizado. Se requiere entonces recuperar la punta antes que la tasa de crecimiento sea la del ΔK original

2) *Esfuerzos residuales de compresion* desarrollados *adelante* de la punta de la grieta posteriores a la sobrecarga que tienden a cerrar la grieta y que reducen entonces el rango de intensificación de esfuerzo efectivo ocasionando el retardo. Es necesario que la punta de la grieta atraviese completamente esta región para que el retardo cese.

3) *Cierre de grieta.* Este modelo propuesto por Elber *[21]* a diferencia del anterior, supone que se desarrollan esfuerzos residuales en la *estela* de la punta debido al cierre de las caras, por lo que la grieta sólo abrirá hasta que se alcance la magnitud de dicho esfuerzo, al cual llamó *esfuerzo de apertura* de la grieta.

4.3 Investigación de modelos existentes

Con la idea de implantar en un sistema de computadora modelos de fatiga el punto de partida fue el Manual de Teoría del programa NASCRAC *[14]*. Sin embargo, no obstante que dicho programa es relativamente nuevo (1989), solo dispone de dos modelos, Willenborg *[15]* y Wheeler *[16]*, los cuales fueron desarrollados en 1970 y 1971 respectivamente. El plan inicial fue realizar un estudio del estado del arte en fatiga para decidir sobre el o los modelos que se incluirían en el programa FRANC en desarrollo por el grupo de Fractura de la Universidad de Cornell. A continuación se presentan los principales modelos encontrados:

4.3.1 Willenborg

Este modelo *[15]* se basa en esfuerzos residuales en la zona plástica de la punta de la grieta y predice el retardo debido a sobrecargas. Se basa en la determinación del tamaño de la zona plástica (zp) y el cálculo del esfuerzo requerido para rebasarla, encontrando entonces un valor de esfuerzo efectivo que modifica ΔK. Básicamente Willenborg propone que después de una sobrecarga el esfuerzo residual reduce K_{max} y K_{min} en una cantidad K_{red}, la que se define como:

$$K_{red} = K_{max,req} - K_{max,i} \qquad (4.1)$$

siendo $K_{max,req}$ el valor de K_{max} requerido para exceder la zp creada por la sobrecarga y $K_{max,i}$ la magnitud de K_{max} debida al ciclo i posterior a la sobrecarga. En el primer ciclo (i=1), $K_{max,req}$ es igual al K_{max} del ciclo de la sobrecarga. Conforme la grieta viaja por la zp creada, $K_{max,req}$ disminuye hasta que iguala a $K_{max,i}$ y el retardo cesa. Mientras que $a_i \leq a_o + r_{po} - a_i$ (ver fig. 4.3) $K_{max,req}$ se calcula según

$$\frac{1}{C\pi}\left(\frac{K_{max,req}}{\sigma_{yp}}\right)^2 = a_o + r_{po} - a_i \qquad (4.2)$$

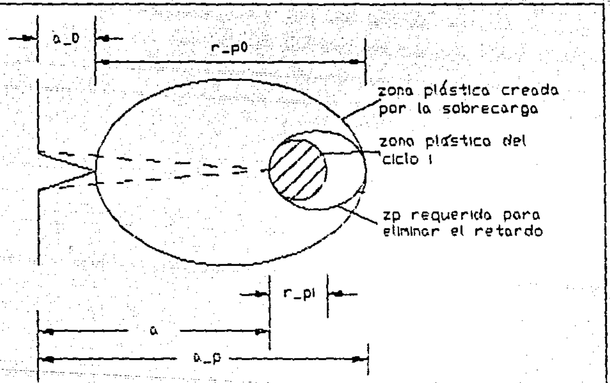


fig. 4.3 Nomenclatura en Wheeler y Willenborg

Basados en la discusión anterior los factores efectivos de intensidad de esfuerzo se calculan como

$K_{max,eff,i} = K_{max,i} - K_{red} = 2K_{max,i} - K_{max,req}$

$K_{min,eff,i} = K_{min,i} - K_{red} = K_{min,i} - K_{max,req} + K_{max,i}$

$R = K_{min,eff,i} \;/\; K_{max,eff,i}$ (4.3)

Los valores anteriores son posteriormente empleados en la ley de propagación seleccionada, utilizando entonces las constantes determinadas en pruebas de amplitud constante

4.3.2 Modelo de Wheeler

Este fue el primer modelo que se adoptó en los estudios de retardo, *[16]* y emplea el mismo principio que el de Willenborg sobre la zona plástica. Se parte del principio acumulativo de Miner modificándolo para incluir un factor de retardo. Esto es

$$a = a_o + \sum_{i=1}^{k} Cp_i f(\Delta K_i) \qquad (4.4)$$

donde Cp es un factor de retardo definido en función del avance de la grieta por la zona plástica, (ver fig. 4.3) siendo

$$Cp = \begin{cases} \left(\dfrac{r_{pi}}{a_p - a_i}\right)^m & a_i + r_{pi} < a_p \\ 1 & a_i + r_{pi} \geq a_p \end{cases} \qquad (4.5)$$

k es el número de ciclos y m es un exponente de forma que debe determinarse mediante la calibración de los experimentos para hacerlos coincidir con los resultados numéricos. r_{pi} es el tamaño de la zona plástica en el ciclo actual i, el cual se evalúa tomando la expresión general de esfuerzo $\sigma = K \;/\; \sqrt{\pi r}$ y considerando que la plasticidad se consigue cuando σ es igual a σyp. Esta condición se cumple cuando K iguala al K_{max}, sustituyendo r por r_{pi} y las literales anteriores en la ecuación de esfuerzo y resolviendo para r_{pi} se obtiene finalmente

$$r_{pi} = \frac{1}{\gamma\pi}\left(\frac{K_{max,i}}{\sigma_{yp}}\right)^2 \qquad (4.6)$$

siendo γ = 2 para esfuerzo plano ó γ = 6 para deformación plana

4.3.3 Willenborg generalizado o Gallagher

Gallagher *[17]* propuso una modificación al modelo de Willenborg en las expresiones para los FIE efectivos máximos y mínimos de la siguiente forma

$$K_{max,eff} = K_{max} - \phi\left[K_{max,ol}\sqrt{1-\Delta a / r_{po}} - K_{max}\right]$$
$$K_{min,eff} = K_{min} - \phi\left[K_{max,ol}\sqrt{1-\Delta a / r_{po}} - K_{max}\right] \qquad (4.7)$$

donde ϕ es una constante de proporcionalidad a obtenerse en términos de la siguiente relación de sobrecarga

$$\phi = \frac{1 - K_{max,th} / K_{max,ol}}{S_{so} - 1} \qquad (4.8)$$

siendo $K_{max,th}$ el valor del umbral, $K_{max,ol}$ el de sobrecarga y S_{so} la magnitud de interrupción de sobrecarga.

4.3.4 Modelo de Vroman/Chang

Como se ha visto, los modelos anteriores calculan el retardo que sigue después de la aplicación de una sobrecarga. Sin embargo, también se ha notado que si existen cargas de compresión puede presentarse un fenómeno de aceleración. Vroman *[18]*, en lugar de calcular un FIE efectivo máximo y mínimo evaluó un ΔK_{eff} de la siguiente manera

$$\Delta K_{eff} = 4/3\left[K_{max} - 3/4 K_{min} + 1/3 K_{max,ol}\sqrt{(a_{ol} + r_{po} - a)/r_{po}}\,\right] \qquad (4.9)$$

El valor anterior lo empleó en la ley de Walker *[12]* para cargas de tensión-tensión cíclicas ($R \geq 0$).

Chang *[19]*, encontró la siguiente expresión similar a la anterior

$$\Delta K_{eff} = \left(K_{max} - K_{min} \right) - 1/s \left[\sqrt{(a_{ol} + r_{po} - a)/r_{po}} - K_{max} \right] \qquad (4.10)$$

Como se puede apreciar, la magnitud de K_{eff} es siempre menor que $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ si existe sobrecarga lo que da un valor menor que en la contraparte de carga de amplitud constante, resultando en retardo.

Para R < 0 (tensión-compresión), la ley de propagación de Walker se toma como

$$da/dN = C\left[(1-R)^{q} K_{max}\right]^{n} \qquad (4.11)$$

donde q es un índice de acelaración determinado por

$$q = \frac{\ln(\alpha) \; / \; \ln(1-R)}{n} \qquad (4.12)$$

y α es la tasa del crecimiento de grieta para un R negativo con respecto a su contraparte $R = 0$ mientras que n es el exponente de crecimiento calculado para $R = 0$

4.3.5 Modelo de Minggao/Willenborg

Buscando mejorar los resultados que se obtienen con el modelo de Willenborg, Minggao *[20]* partió de la base que el factor δ que poseé estrictamente los valores de 2 para esfuerzo plano ó 6 para deformación plana era inadecuado y encontró que, dado que la condición de esfuerzo o deformación plana varía con ΔK, a través del crecimiento de grieta, se obtenía una mejor expresión si

$$\gamma = 6 \,/\, (1 + 2S) \qquad (4.13)$$

siendo

$$S = \frac{\left[\Delta K - \Delta K_{th} \right]}{\left[(1 - R) Kc \right]} \qquad (4.14)$$

El parámetro S relaciona la porción del esfuerzo plano que se ocupa en generar la superficie de fractura. Esto se comprueba al notar que al inicio de la propagación S es cero, obteniéndose $\gamma = 6$ en (4.13), mientras que al final se tiene $S = 1$ ó $\gamma = 2$.

4.3.6 Modelo de Barsom

Este modelo *[21]* trata espectros de origen aleatorio y, a diferencia de los modelos de retardo, en los que el cálculo se realiza ciclo por ciclo, Barsom relaciona éste crecimiento con un FIE efectivo que es característico de la curva de densidad probabilística. En un inicio partió de curvas de funciones de densidad de Rayleigh y con el valor de la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados ó rms, como se le conoce generalmente. Así pues él realiza sus cálculos tomando ΔK en la expresión seleccionada de la ley de propagación por un ΔK_{rms} definida como

$$\Delta K_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta K_i^2}{m}} \qquad (4.15)$$

4.3.7 Modelo de Elber

Elber *[22]* fue el primero en proponer un criterio diferente para explicar el retardo. Se basó en experimentos que le sugirieron el fenómeno de *cierre de grieta*, según el cual existe una estela plástica detrás de la punta, ocasionada por la compresión de las caras a la descarga. Explicó que parte del esfuerzo mínimo nominal es gastado en vencer tal esfuerzo previo, por lo que dedujo que habría que calcular dicho valor, llamado *esfuerzo de apertura de la grieta* σ_{op}, fig. 4.4

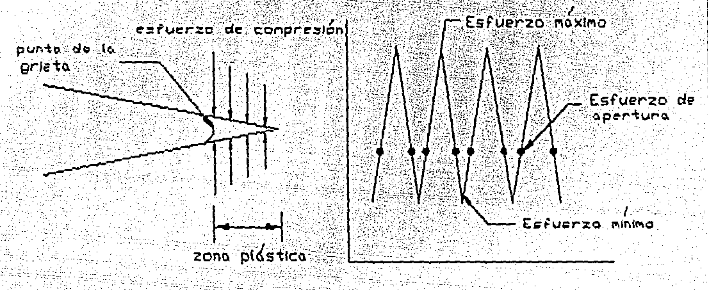


fig. 4.4 Concepto de esfuerzo de apertura

Su criterio fue inicialmente para cargas de amplitud constante y posteriormente lo extendió para amplitud variable. En ambos casos se determina un valor efectivo tal que

$$\Delta K_{eff} = \left(\sigma_{max} - \hat{\sigma} \right) \sqrt{\pi \; r} \qquad (4.15)$$

siendo

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma_{op} & \sigma_{min} \leq \sigma_{op} \\ \sigma_{min} & \sigma_{min} > \sigma_{op} \end{cases} \qquad (4.16)$$

Elber trabajó sobre aleación de aluminio 2024-T3 y para tal material encontró la siguiente relación para determinar el esfuerzo de apertura bajo cargas de amplitud variable

$$\frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{op}}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} = 0.5+0.4R \qquad (4.17)$$

En el siguiente capítulo relacionado con la implantación en computadora se profundizará mas sobre este modelo.

4.3.8 Modelo de Maarse

En esencia es el mismo de Elber pero empleando cargas en lugar de esfuerzos, esto es *[23]*

$$\Delta K_{eff} = S\ \Delta K \qquad (4.18)$$

$$da/dN = C^{*}\ (S\ \Delta K)^{n^{*}} \qquad (4.19)$$

y

$$S = \frac{P_{max} - P_{op}}{P_{max} - P_{op}} \qquad (4.20)$$

Las constantes del material C^{*} y n^{*} deben basarse en ΔK_{eff} y carga constante. Difieren de las generales C y n, dado que el cierre de grieta también ocurre bajo dicho tipo de carga. La determinación de la carga P_{op} a la cual la grieta se abre completamente al incrementarse desde P_{min} es la parte modular de éstas consideraciones. Esta cantidad se puede determinar mediante un añálisis elastoplástico por MEF. Maarse propone una estimación basada en el grosor del espécimen B, ancho W y FIE en la forma de

$$K = \frac{P}{B\sqrt{W}}\ f\left[\frac{a}{W}\right] \qquad (4.21)$$

dado

$$P = P_{op} = A\ \frac{R_{ycb}}{f(a/W)\ \sqrt{a_s - a}} \qquad (4.22)$$

R_{ycb} es dos veces la distancia entre la punta de la grieta y la frontera elastoplástica, $(a_s - a)$ es la longitud de la zona de esfuerzos compresivos residuales y A se define como

$$A = \frac{\sigma_{yp} \; B \sqrt{2\pi W}}{8\left(1 - \mu^{2}\right)} \qquad (4.23)$$

4.3.9 Modelo de Minggao/Maarse

Minggao modifica el modelo de Maarse en la siguiente forma *[20]*

$$da/dN = C^{*}\left(\Delta K_{eff}\right)^{n^{*}} = C^{*}\left(K_{max} - K_{op}\right)^{n^{*}} \qquad (4.24)$$

donde K_{op} es el FIE correspondiente a la carga de apertura, P_{op}, C^{*} y n^{*} son constantes experimentales. Poniendo la tasa del efecto del cierre de grieta como

$$C_f = P_{op} \;/\; P_{max} = K_{op} \;/\; K_{max} \qquad (4.25)$$

reescribe la ecuación anterior como

$$da/dN = C^{*}\left[K_{max}\left(1 - C_f\right)\right]^{n^{*}} \qquad (4.26)$$

además encuentra que la pendiente para varios valores diferentes de R son aproximadamente paralelas, lo que implica que la variación del exponente experimental n es muy pequeña, lo que supone $n = n^{*}$, por lo tanto

$$C^{*} = C\left(\frac{1 - R}{1 - C_f}\right)^{n^{*}} = C\left[\frac{1 - R}{1 - (P_{op}/P_{max})}\right]^{n} \qquad (4.27)$$

donde C y n son las mismas constantes que en la ley de Paris.

4.3.10 Modelo de Gemma

En este modelo *[24]* se trata a la tasa de reducción del crecimiento de grieta causada por cada secuencia de carga alta-baja con una relación empírica basada en carga constante. La modificación consiste en el reemplazo del término de tasa de crecimiento por una potencia λ. El orden de λ es un parámetro adimensional definido en términos de cada secuencia alta-baja del espectro. Se fundamenta en que la propagación de grieta en carga constante puede caracterizarse por una relación empírica de la forma

$$da/dN = C\ f(R)\ (\Delta K)^{n} \qquad (4.28)$$

siendo $f(R)$ una función que modela la dependencia de la relación de esfuerzo R. En general K está dada por

$$K = \sigma \sqrt{\pi a}\ F \qquad (4.29)$$

donde F es una función de la geometría de la grieta y de la carga. Para alguna forma especifica de F es posible ajustar una curva empleando una relación sencilla de potencia. Sea

$$\left(\sqrt{\pi a} \right)_i^{n} = \phi_i a^{\beta i} \quad i=1,2,3\ldots \qquad (4.30)$$

Los subíndices se refieren al rango específico de longitud de grieta. Escribiendo 4.28 como

$$da^{\alpha i} / dN = f(R)(\Delta\sigma)^{n} B_i \qquad (4.31)$$

siendo $\alpha_i = 1-\beta_i$; $B_i = C\alpha_i\ \phi_i$

Empleando la condición inicial $a(N_o) = a_o$ la solución de (4.31) es

$$a = \left\{ a_o^{\alpha i} + f(R)\ (\Delta\sigma)^{n} B_i\ (N - N_o) \right\}^{1/\alpha i} \qquad (4.32)$$

la cual da el comportamiento para cargas constantes. Como mencionamos anteriormente, introduciendo el parámetro λ ó tasa de sobrecarga σ_{max}/σ_{ol}, que es unidad en el caso de carga constante y es dada por

$$\lambda_j = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ol}}\left[1+2\left[\frac{\sigma_{ul}}{\sigma_{ol}}\right]\ln\left[\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{\sigma_{ol}-\sigma_{ul}}\right]\right] \quad (4.33)$$

Reemplazando el operador diferencial de (4.31) por el correspondiente a cargas de espectro, y tomando la relación de sobrecarga λ obtenemos para el espectro j_{th}

$$\frac{d^{\lambda j}\left(a^{\alpha i} - ao_j^{\alpha i}\right)}{d^{\lambda j}\left(N - No_j\right)} = f\left(R_j\right)(\Delta\sigma)_j^n B_i \quad (4.34)$$

donde $(\Delta\sigma)_j = \left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)_j$; ao_j y No_j son la longitud inicial de la grieta y el ciclo inicial respectivamente del espectro *jesimo*. La solución de la ecuación anterior es

$$a = \left\{ao_j^{\lambda i} + \left[f\left(R_j\right)\left[\Delta\sigma\right]_j^n B_i\left(N - No_j\right)\right] \Big/ \Gamma\left(1 + \lambda_j\right)\right\}^{1/\alpha i} \quad (4.35)$$

donde Γ es la función Gama.

El procedimiento para calcular ciclos es diferente. Consideremos otra forma de la ec. (4.34)

$$\frac{da^{\lambda}}{dN^{\lambda}} = G(\Delta K, \bar{R}) \quad (4.36)$$

pero ahora definiendo λ en términos del FIE

$$\lambda_j = \frac{K_{max}}{K_{ol}}\left[1 + 2\left[\frac{K_{ul}}{K_{ol}}\right]\ln\left[\frac{K_{max}-K_{min}}{K_{ol}-K_{ul}}\right]\right] \quad (4.37)$$

suponiendo que $G(\Delta K, R)$ es independiente de la longitud de grieta durante un subciclo dado podemos integrar (4.36) y obtener, para el *iesimo* subciclo

$$a_i = ao_i + \frac{G(\Delta K, R)}{\Gamma(1 + \lambda_i)}\left(N_i - No_i\right)^{\lambda_i} \quad (4.38)$$

donde ao_i, No_i son las condiciones iniciales. Dado que

$\Delta N_i = 1$ la tasa de crecimiento de grieta para el subciclo *iesimo* es dada por

$$\frac{da}{dN_i} = \frac{\Delta a_i}{\Delta N_i} = \frac{G\left(\Delta K_i, R_i\right)\left(N_i - No_i\right)^{\lambda_i}}{\Gamma\left(1 + \lambda_i\right)} -$$

$$\frac{G\left(\Delta K_{i-1}, R_{i-1}\right)\left(N_{i-1} - No_{i-1}\right)^{\lambda_{i-1}}}{\Gamma\left(1 + \lambda_{i-1}\right)} \qquad (4.39)$$

El método tiene ciertas ventajas. Predice crecimiento acelerado y requiere únicamente datos de carga constante como función de la relación de esfuerzo R. Su desventaja es que no distingue entre espectros de sobrecarga (ol)-subcarga (ul) ó ul-ol, por lo que predice comportamiento similar en ambos casos, además que como el mismo autor señala, λ (ec. 4.33) no está identificado con ningún mecanismo (cierre, zona plástica) por lo que es sumamente *ad hoc*.

4.3.11 Modelo de Kujawski

Estrictamente hablando éste no es un modelo de propagación de grieta, sino de definición del tamaño de la zona plástica, vital en los modelos de fatiga. Kujawski define el siguiente factor, *[23]*

$$\bar{R}p = \frac{1 - \bar{n}y}{1 + \bar{n}y} r_p \qquad (4.40)$$

siendo r_p el tamaño de la zona definido en la ec. (4.6) y

$$\bar{n}_y = \frac{1 + n\left(W_y^p / W_y^e\right)}{1 + \left(W_y^p / W_y^e\right)} \qquad (4.41)$$

$$W_y^e = \int_0^{\varepsilon_y^e} E\,\varepsilon_y^e\,d\varepsilon_y^e = \frac{\sigma_y^2}{2E} \qquad (4.42)$$

$$W_y^p = \int_0^{\varepsilon_y^p} E\varepsilon_y^p d\varepsilon_y^p = \frac{1}{1+n}\,\sigma_y\left[\frac{\varepsilon_y^p}{\alpha}\right]^n \varepsilon_y^p = \frac{1}{1+n}\sigma\varepsilon^p \qquad (4.43)$$

W_y^e y W_y^p son las densidades de energía de deformación elástica y plástica respectivamente, n es el exponente de endurecimiento a la deformación que viene de la relación de Ramberg-Osgood

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \alpha\left[\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right]^{1/\alpha} \qquad (4.44)$$

el parámetro α se escoge para ajustar a datos experimentales.

4.3.12 Modelo de Matsuoka

Este modelo *[24]* se basa en el cierre de grieta y estudia el fenómeno de retardo atrasado, según el cual éste no comienza inmediatamente después de la aplicación de una sobrecarga. Matsuoka introdujo los parámetros w_D y w_B que corresponden al tamaño de la zona afectada por la sobrecarga y a la distancia de la grieta en la tasa mínima de progación (punto de inflexión, fig. 4.5)

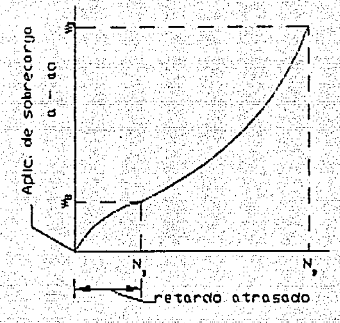


fig. 4.5 Nomenclatura en Matsuoka

Matsuoka sugirió que la tasa de crecimiento subsecuente a una sobrecarga podría describirse por

$$\left(da/dN\right)_D = C_o(U_D \Delta K)^m = U_D^m \ (da/dN)_C \qquad (\ 4.45\ )$$

donde $(da/dN)_D = C_o \Delta K^m$ es la tasa de crecimiento de grieta bajo carga constante y U_D es el parámetro de apertura durante el retardo. Tras largo trabajo en experimentación encontró la siguiente relación para U_D

$$U_D = \begin{cases} 1-(R/2)\left[w_D/w_B - 1\right](a - a_o)/w_D & 0 \le a-a_o \le w_B \\ 1-(R/2)\left[1-(a - a_o)/w_D\right] & w_B \le a-a_o \le w_D \end{cases}$$

$$(\ 4.46\ )$$

Desafortunadamente éste "modelo" no pasó mas que de ser un ajuste empírico, debido a que no halló la manera para calcular w_D y w_B. Para el caso de acero HTPO desubrió la siguiente relación

$$w_D = [2.5\ (R/2)^2 - 1]\ w_M \qquad (4.47)$$

donde w_M es el tamaño de la zona plástica producida por K y w_B=0.53 wo. Por lo tanto el trabajo de Matsuoka no fue secundado por otros investigadores.

CAPITULO 5

IMPLEMENTACION EN UN SISTEMA INTEGRADO DE FRACTURA

5.1 Introducción

En este capítulo se discuten los cuatro modelos más importantes de los descritos anteriormente describiéndose en detalle con miras a su implantación en un sistema integrado de mecánica de fractura, **FRANC**, desarrollado en la Universidad de Cornell. Se presentan las funciones principales de dicho programa, como lo es la estructura de datos empleada y su capacidad para generar la malla adaptándola a la geometría cambiante durante la propagación. Posteriormete se pasa a la implantación de cuatro de los modelos presentados en el capítulo anterior. Como se puede apreciar en los criterios estudiados, se parte del conocimiento del factor de intensidad de esfuerzo (FIE) para realizar el análisis de vida residual. En los artículos originales de los métodos siempre se utilizó la fórmula más sencilla, que corresponde a una grieta con fisura en el centro ó borde en una placa infinita. Sin embargo en casos reales la geometría y carga no son tan simples y no existe una relación fija para el FIE, el cual debe ser calculado para diferentes tamaños de grieta. Al no existir solución analítica se recurre a los métodos numéricos, siendo uno de los mas populares el de los elementos finitos. La desventaja de éste consiste en que al modificarse la geometría al ir avanzando la fisura es necesario entonces generar una malla diferente. FRANC es capaz de ejecutar esta tarea en forma eficiente. Desgraciadamente el programa original estaba muy limitado para fatiga al contar únicamente con la ley de Paris para cargas de amplitud constante por lo cual se procedió a fortalecer el programa con criterios para amplitud variable y se le añadió la ley de Forman.

5.2 FRANC, un enfoque interactivo integral para el modelado del proceso de fractura

El rápido avance de la tecnología ha traído como consecuencia que el analista de esfuerzos se encuentre inmerso en mas de un área de su especialidad. En los últimos veinte años ha habido grandes desarrollos en la computación, aparte de las mejoras a los métodos numéricos. Para el caso concreto de los elementos finitos se han visto grandes avances en las partes de pre y postprocesamiento. La tarea más tediosa de la generación de la malla, que involucra la contabilidad de nodos, elementos, conectividades, condiciones de frontera, etc. son ahora ejecutadas en forma automática o semiautomática. Para evaluar los resultados solo es necesario echar un vistazo a una pantalla con los contornos de esfuerzos en lugar de tratar de asimilar la gran cantidad de información nodal que se genera. Todo lo anterior se debe a los sorprendentes avances en hardware y software para computación gráfica. Actualmente es posible emplear una estación de trabajo de tamaño tal que se acomoda perfectamente al escritorio del analista, y que tiene la velocidad y memoria de las grandes computadoras de hace diez o quince años asi como la capacidad gráfica solo disponible en máquinas muy especializadas de hace pocos años. Estas estaciones de trabajo son el ambiente ideal para el analista de esfuerzo que trata con la simulación por computadora. Finalmente, el desarrollo de los modeladores de sólidos ha fomentado el desarrollo de estructuras de datos que puedan manejar y almacenar eficientemente la información poligonal necesaria para las tres etapas del método de los elementos finitos (preproceso, análisis, postproceso). Estos tópicos se han conjuntado en la realización de **FRANC** *[27]* y a continuación se describen, así como la forma en que se integraron.

5.2.1 Análisis por elementos finitos

El método de los elementos finitos es empleado en **FRANC** para calcular los esfuerzos y desplazamientos en cualquier estructura sujeta a cualesquiera condiciones de frontera. Para evaluar adecuadamente los parámetros que gobiernan el proceso de fractura es necesario calcular adecuadamente los desplazamientos cercanos a la punta de la grieta para algún problema dado. En **FRANC** los procedimientos de elemento finito se tratan como una colección de subrutinas que son llamadas por la interface del usuario bajo su supervisión. Las rutinas llaman a las matrices de rigidez de los elementos, ensamblan las ecuaciones y resuelven para los desplazamientos. **FRANC** soporta análisis para esfuerzo plano, deformación plana y problemas axisimétricos. Los tipos de materiales incluyen isotrópicos y ortotrópicos elástico-linealesLos elementos finitos son isoparamétricos de 6 y 8 nodos así como interfaces de 6 nodos, los cuales permiten al analista desacoplar el cortante y normal a lo largo de una interface. Los elementos para la singularidad de la punta de la grieta son los cuadráticos de 8 nodos descritos en el segundo capítulo.

5.2.2 Mecánica de fractura

FRANC puede modelar propagación cuasi-estática, así como debida a fatiga. Se cuenta con las teorías de propagación del esfuerzo tangencial máximo, de la máxima liberación de energía y de la densidad de energía de deformación mínima (secciones 2.5.1-3). Cada una de éstas teorías se puede manipular para formar una curva en el plano K_I/K_{Ic}-K_{II}/K_{Ic}. La fig. 5.1 es una muestra empleando la teoría de la densidad de energía de deformación mínima. El cuadradito 1 indica la localización de la punta de la grieta en dicho espacio. Si dado sus FIE ésta cae dentro del área, la grieta se encuentra en un punto de propagación inminente. Las hipótesis anteriores son empleadas para calcular el ángulo de propagación y, partiendo de una posición inicial dada, se evalúa analíticamente la dirección que seguirá la grieta. El incremento de longitud puede ser calculado de acuerdo a un número de ciclos determinado o se puede proporcionar alguna cantidad por el analista. La fig. 5.2 es una impresión del resultado que se presenta por pantalla.

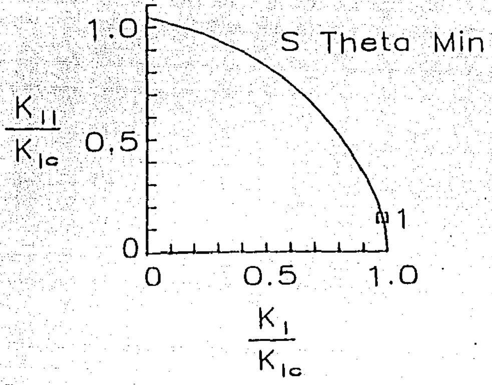


fig. 5.1 Area de propagación

5.2.3 Generación de malla

La parte más tediosa de cualquier análisis por elementos finitos lo representa la generación de la malla. En zonas de alta concentración de esfuerzo es necesario realizar una malla muy cerrada, lo que aumenta el trabajo de preparación. Para el caso de fisuras entonces se requiere, además, ubicar elementos especiales en la punta de la grieta. Todo lo anterior es necesario para ejecutar una corrida con una longitud de grieta dada. Sin embargo, al propagarse la hendidura la geometría local cambia y debe realizarse una nueva malla, al menos en una región cercana a la punta. Esto desalienta al analista.

Sería entonces deseable el contar con un algoritmo que ejecutara la tarea anterior automáticamente y que produjera

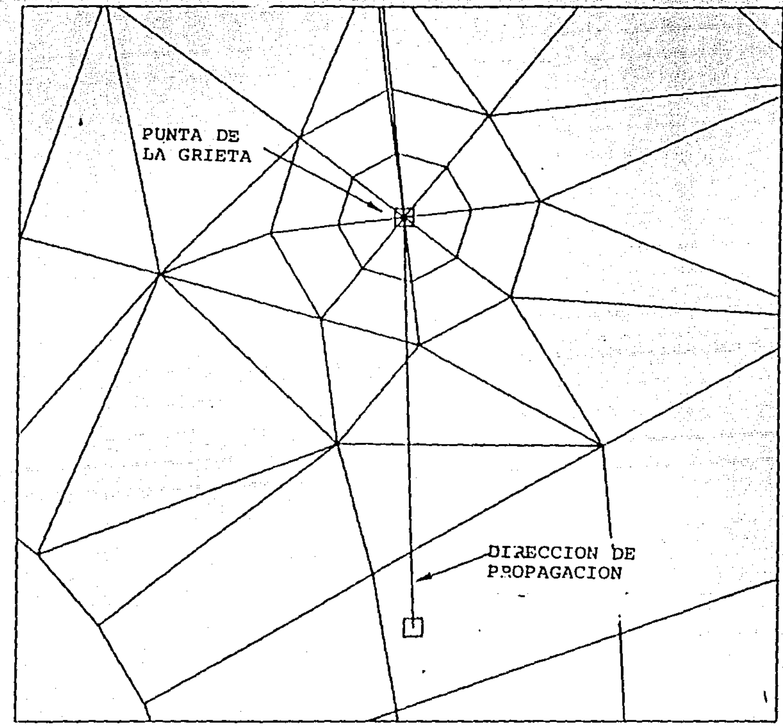


fig. 5.2 Dirección predicha de crecimiento

mallas aceptables para cualquier geometría. Desafortunadamente lo anterior representa una utopía debido a las múltiples condiciones que se pueden presentar. La estrategia que se siguió en FRANC fue de emplear un algoritmo sencillo que generara una malla de prueba, dejando al usuario la libertad de modificar la malla si ésta no es satisfactoria en sus relaciones de aspecto. Esto es acorde con la interactividad del programa, aparte que no se deja a un lado la experiencia del analista. La velocidad que se tiene actualmente, con el equipo descrito en la sección 5.2.5, es de entre 30 a 60 segundos por cada nueva malla, lo que en forma manual se llevaría mas de 4 horas. En la fig. 5.3 se muestran cuatro pasos para la generación. En 5.3a se ve la región cercana a la grieta, donde se han borrado algunos elementos. La fig. 5.3b señala la malla después que la fisura se ha extendido y que se ha añadido una roseta de elementos singulares de puntos cuartos alrededor de la nueva punta. El programa propone una malla para cerrar el espacio libre 5.3c. En este caso notamos que existen elementos con relaciones de aspecto muy desfavorables. El analista por medio del cursor puede borrar elementos y/o añadir nodos, llegando a la malla final 5.3d.

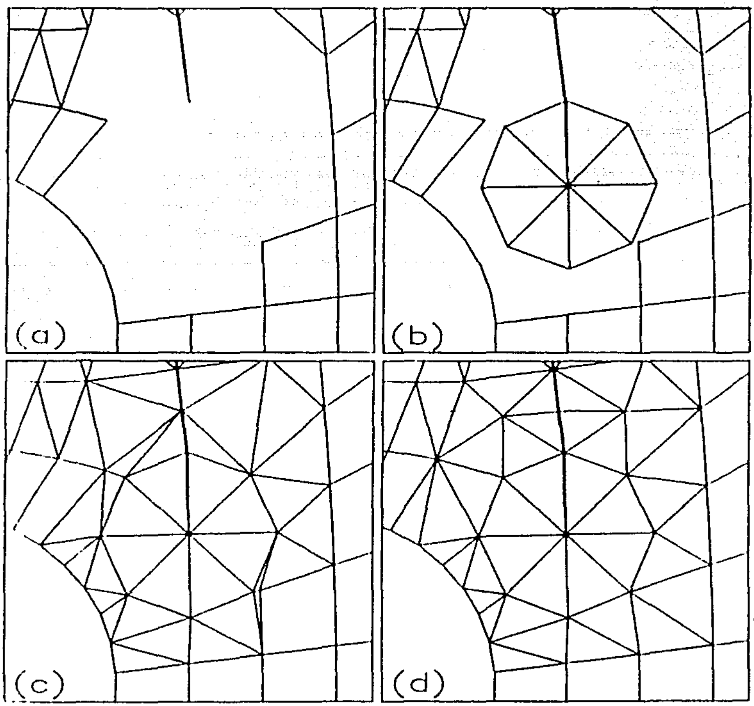
5.2.4 Postproceso

Esta parte es sumamente importante, pues es la que proporciona al analista la información por la cual emitirá su juicio sobre la pieza estudiada. Mediante elementos finitos simplemente obtiene valores puntuales de desplazamiento y esfuerzo. Sin embargo, por medio de herramientas gráficas es posible simular y obtener información que ayuda a entender el comportamiento de la estructura. Podemos dividir el postproceso en tres áreas:

a) Indicación de la calidad de la malla, b) Señalación del

fig. 5.3 Etapas en la regeneración de la malla en la punta de la grieta

(a) Se borran los elementos que rodean a la punta.
(b) Se extiende la grieta y se añaden elementos singulares de puntos cuartos.
(c) El programa genera una malla de prueba.
(d) La malla anterior es mejorada por el usuario borrando algunos elementos y añadiendo nodos.



comportamiento y c) Información de la respuesta cuantitativa. Los indicadores de la calidad de malla informan al analista de la índole del modelo. Mediante esta fase se conoce si su discretización es suficientemente refinada, comparando valores nodales para elementos adyacentes

La segunda área se refiere a la posibilidad de simular la respuesta o comportamiento del sistema considerado. Se puede juzgar sobre la correcta aplicación de las cargas considerando la lógica de los resultados. Comprender lo que le sucede a la pieza es fundamental para las mejoras de diseño.

La tercera sección del postproceso es la extracción de información cuantitativa. La información numérica por elementos finitos es demasiado voluminosa, cuando en realidad solo es importante conocer el estado de regiones críticas. FRANC dispone de tres categorías de información seccional. Existen herramientas para proporcionar información a lo largo de una línea dada, en un punto o mostrar todo el sistema. Los desplazamientos nodales son un ejemplo de una herramienta puntual. Para el caso de fractura es fundamental conocerlos para determinar el FIE. Las funciones de línea sirven para graficar esfuerzos o desplazamientos a lo largo de un trazo de interés para el analista. La línea puede definirse por dos puntos cualesquiera, no necesariamente nodos. También es posible graficar la respuesta a lo largo de un círculo con centro en un nodo y radio definido por el usuario. Los desplazamientos y esfuerzos sobre la línea son calculados dividiendo ésta en puntos y evaluándolos empleando las funciones de forma una vez identificados los elementos que atravieza.

Los indicadores de campo completo muestran la respuesta de toda la malla. FRANC poseé diferentes métodos para acomodar las exigencias del analista. El mas simple, y seguramente el mas importante, lo constituye la malla deformada, ya que es en el que interviene grandemente la intuición del analista. Una técnica mas sofisticada consiste en graficar los vectores de esfuerzos principales en los puntos de Gauss. Esto es valioso en mecánica de fractura ya que en general una grieta en un material isotrópico tiende a propagarse perpendicularmente al esfuerzo de tensión máxima. El programa también cuenta con la analogía en 3D para la línea, lo que equivale a una red rectangular. Los resultados se despliegan en una superficie 3D con las líneas ocultas para mayor claridad. El último tipo de postproceso es el contorno de esfuerzo. Estos son calculados nuevamente en los puntos de Gauss y posteriormente son suavizados a los puntos nodales donde las contribuciones de esfuerzo debido a los elementos adyacentes es promediado para finalmente interpolar éstos valores para los órdenes del contorno.

5.2.5 Computación gráfica interactiva

El valor del empleo de la computación gráfica en elemento finito es obvio. La habilidad para observar un dibujo del modelo analizado junto con una gráfica de la respuesta es invaluable. En **FRANC** se trató de llevar al máximo la interacción gráfica entre el analista y el modelo hasta el punto de hacer de ésta interacción parte integral de varios de los algoritmos desarrollados en el programa, lográndose crear un diálogo natural entre el usuario y el código. Este se efectúa a través de una colección de rutinas cuyo nombre se va desplegando por pantalla conforme se avanza sobre el árbol de la estructura. Se emplea el paradigma de interacción por menúes dado que para la mayoría de la gente es mas fácil reconocer una rutina o función, que recordar su nombre. El usuario simplemente apunta con el cursor el nombre de la función en pantalla requiriéndose un mínimo de uso del teclado.

Las rutinas básicas de graficación se encuentran reunidas en un paquete con 23 entradas. Esta es la única parte del programa que depende del dispositivo. Sin embargo pueden ser fácilmente adaptadas en cualquier paquete gráfico independiente, tal como PHIGS o GKS. Esta decisión se tomó pensando en obtener mas provecho de las características específicas del dispositivo. Actualmente **FRANC** se encuentra instalado en estaciones de trabajo de Digital Equipment Corporation tipo Vaxstation II y Vaxstation II/GPX, las cuales estan basadas en dispositivos MicroVAX II, en DECstation que emplean UNIX en su versión para VAX, conocida como ULTRIX, y en estaciones APOLLO.

5.2.6 Diseño de la estructura de datos

Para lograr los atributos que se deseaban en FRANC era necesario idear una estructura de datos que fuera eficiente en la localización de unidades para su fácil manejo. La estructrura empleada se diseñó alrededor de la conocida como "filo alado", la cual fue inicialmente desarrollada y se usa primordialmente para representar las fronteras en los modeladores de sólidos. El emplear dicha estructura para programas de elemento finito en 2D fue la primera aplicación publicada que se conoce. Básicamente consiste de tres entidades topológicas: vértices, filos y caras. Haciendo una analogía con elementos finitos los vértices corresponden a nodos mientras que las caras representan a los elementos. La característica principal de la estructura de datos es que cada elemento topológico contiene información de los adyacentes, esto es, cada entidad apunta por lo menos a otra entidad topológica adyacente. La estructura se diseña de tal modo que la información se proporcione basada en filos, debido a que se conoce de antemano la multiplicidad de los elementos adyacentes en un filo. Un filo tiene contigüidad con dos vértices, dos caras y 4 filos (fig. 5.4). De hacerse el diseño de la estructura basado en vértices o caras se hubiera tenido el problema de no saber *a priori* la multiplicidad de las proximidades

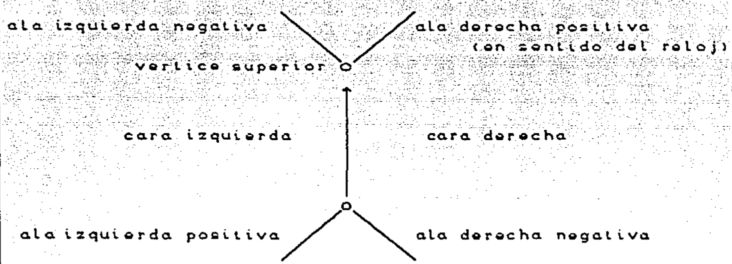


fig. 5.4 Topología local de un filo en la estructura de datos de tipo "filo alado"

La base de datos se accesa por modificación o por averiguación. Los cambios se llevan a cabo por medio de operadores de Euler, lo que garantiza que la topología satisface siempre la ecuación:

$$v - f + c = 2 \qquad (5.1)$$

que relaciona los vértices v, filos f y caras c. Para los propósitos de elementos finitos se crearon operadores tales como: *anade elemento de 8 nodos*, *anade elemento de 6 nodos*, *borra elemento* etc.

Una de las ventajas principales de la estructura de datos seleccionada es la rapidez con que se efectúan sondeos de adyacencia. Con tres elementos topológicos existen nueve posibilidades como: dada una cara encuentra los vértices adyacentes ó dado un vértice encuentra todas las caras adyacentes. Todas las preguntas se ejecutan en tiempo lineal o constante, por lo que lo único que deterioraría el tiempo de respuesta sería el aumento de tamaño del problema.

La información de contigüidad es sumamente útil para las tareas de elementos finitos. Por ejemplo, es muy sencillo identificar los filos en la frontera de una estructura analizada lo que permite borrar durante la propagación de grieta únicamente los elementos que no pertenecen al borde físico del cuerpo. De la misma manera es muy fácil identificar los elementos adyacentes a un nodo por lo que si éste es movido a otra posición se puedan volver a calcular las matrices de rigidez de dichos elementos.

5.2.7 Integración del programa

Un aspecto clave en FRANC es la integración de los anteriores tópicos en un programa coherente muy flexible y sencillo de usar. Esto se logra dividiendo el programa en capas de tal modo que se tiene en el núcleo los detalles de almacenamiento y manipulación de datos y en la periferia las rutinas funcionales. Con esto se logra modularidad y un nuevo usuario puede aumentar el programa con funciones específicas sin preocuparse de los detalles internos del código.

La fig. 5.5 muestra un diagrama de la interacción de los componentes en FRANC. El núcleo lo forma la base de datos, que es el receptáculo de toda la información requerida por los diversos módulos del programa. Esta base es únicamente accesible a través de rutinas especiales. Todas las rutinas de alto nivel requieren el empleo de dos tipos de rutinas de acceso, esto es, modificación e información, para almacenar y/o extraer datos de la base. Esta técnica de acceso se conoce como *ocultamiento de datos*. El ocultamiento de datos separa los detalles de almacenamiento actuales, de los empleados por las rutinas de mas alto nivel. De esta manera el mecanismo presente de alamacenamiento puede ser cambiado sin afectar a los de mas alto nivel. Un ejemplo de lo anterior sería cambiar el almacenamiento de residente en memoria virtual a residente en archivo.

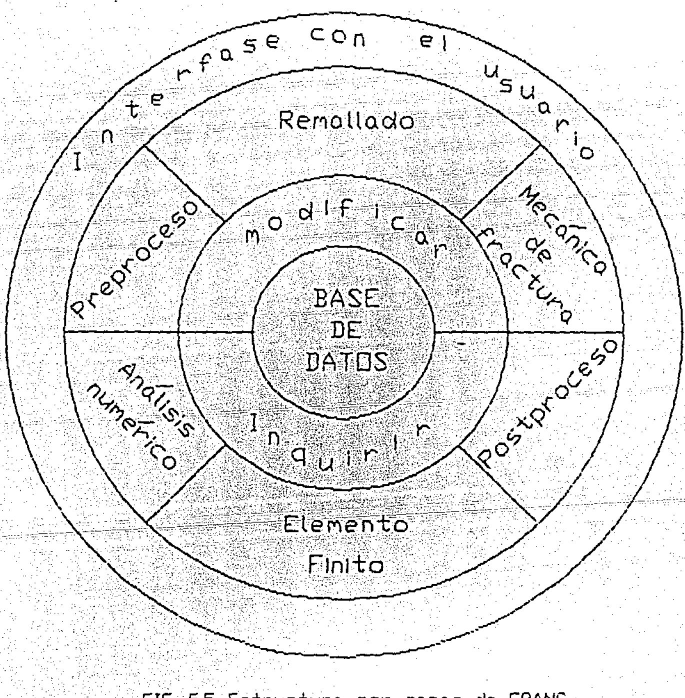


FIG. 5.5 Estructura por capas de FRANC

La capa sobre las rutinas de bases de datos es la colección de rutinas que implementan la funcionalidad del programa, las cuales se engloban en seis categorías. Las rutinas de preprocesamiento ejecutan las modificaciones a la descripción del modelo y condiciones de frontera. Las de remallado alteran la malla para la propagación de grieta. Las de mecánica de fractura implantan las diferentes teorías de propagación y evaluación de parámetros pertinentes. Las de postprocesamiento despliegan información de esfuerzos y desplazamientos. Las rutinas de elementos finitos tienen a su cargo la evaluación de matrices de rigidez, minimización de ancho de banda, resolución de desplazamientos y obtención de esfuerzos. Las rutinas de análisis numérico realizan las funciones necesarias para la solución de sistemas no lineales.

La última capa es la interface con el usuario. Esta es una colección de menúes con los nombres de las opciones que permiten al analista interactuar con el programa. A cada alternativa le corresponde un nuevo menu encontrándose ramificados en forma de árbol.

Una ventaja tremenda mediante esta disposición es que se logra una herramienta de prueba ideal para investigación en mecánica de fractura. El investigador únicamente necesita concentrarse en implantar sus rutinas específicas de su aplicación particular, empleando procedimientos preexistentes para el manejo de datos, creación y/o manejo de menúes, entradas y salidas gráficas y entradas y salidas de archivos.

5.3 Implantación en FRANC de modelos de amplitud variable

Como se ha visto en el capítulo anterior, para evaluar la vida útil es necesario integrar una relación del factor de intensidad de esfuerzo (FIE). Como dicho valor no es función constante para cargas y geometrías complejas el cálculo del FIE se realiza por medio de métodos numéricos, siendo uno de los mas comunes el de elementos finitos, sobre el cual está basado FRANC. Entonces el primer paso consiste en determinar el FIE para un tamaño de grieta inicial. Como en las relaciones se requiere un valor de ΔK esto se logra mediante la introducción del rango, en la opción *SET RANGES* de la pantalla, de la cual se muestra una impresión en la fig. 5.6(ver apendice). Por lo tanto se requiere que el análisis de elementos finitos se realice con una carga unitaria. Las fig. 5.7 a 5.10 (apendice) muestran como las relaciones de esfuerzo son lineales, asi como lo es el cálculo de $\bar{K}$. En este ejemplo se muestran los resultados para una grieta en el borde de una placa de espesor finito y tensión remota uniforme de σ_{max} = 25 ksi, σ_{min} = 15 ksi contra los de σ_{max} = 0.25 ksi, σ_{min} = 0.15 ksi. A la carga inicial se la multiplicó por 10 y se nota que es válido entonces el calcular K inicialmente para cargas unidad siendo entonces

$$\Delta K = \Delta(\text{rango})\ (K) \qquad (5.2)$$

Lo anterior resulta bastante conveniente para el caso de espectros aleatorios con evaluación mediante Barsom, tomando entonces los valores del rango los correspondientes a $\sigma_{max,rms}$ y $\sigma_{min,rms}$.

Volviendo al punto de partida, no se conoce de antemano una relación para K tal como $K(a)$, y únicamente podemos evaluar valores discretos. La exactitud de la predicción depende en parte de la magnitud del incremento de grieta. Aunado a lo anterior tampoco es posible conocer previamente el tamaño crítico de grieta a_{cr} tal como la ec. (3.11). Una forma de resolver el problema es dar incrementos a juicio del analista tales que el estado deformado sea lógico, guardando el valor de K calculado junto con el tamaño de la grieta. Este proceso es iterativo hasta que el valor de K máximo iguala a la tenacidad del material Kc. A continuación se ahondará en los detalles de la implantación de los cuatro modelos seleccionados:

5.3.1 Barsom o rms para espectros aleatorios

Con el fin de evaluar diferentes criterios para espectros aleatorios con énfasis en aplicación en la industria aeronáutica, la Asociación Americana de Pruebas y Materiales (ASTM por sus siglas en Inglés) realizó una prueba piloto que consistió de 8 muestras para las cuales se encontró su vida útil experimentalmente, y cuyos espectros fueron enviados a 5 especialistas de reconocido prestigio *[28]*. En dicho exámen el modelo de Barsom, no obstante su sencillez, fue el que brindó la mejor predicción. (ver figuras B.1 y B.2 del apéndice). Como se ve en la ec. (4.15) Barsom encontró que escribiendo ΔK en función de la raiz cuadrada del promedio de los cuadrados ó:

$$\Delta K_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta K_i^2}{m}} \qquad (5.3)$$

La raiz cuadrada del promedio de los cuadrados del FIE bajo cargas de amplitud constante es igual a la fluctuación del esfuerzo, por tanto la tasa de crecimiento promedio puede predecirse de los datos de amplitud constante empleando cualquier ecuación de crecimiento de grieta simplemente sustituyendo ΔK por ΔK_{rms}. Como se ha visto en FRANC sólo disponemos de un valor de K. En este punto es donde es sumamente ventajoso el emplear cargas normalizadas evaluando entonces la expresión anterior como

$$\sigma_{max,rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_{max_i}^2}{m}} \qquad (5.4)$$

y

$$\sigma_{min,rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_{min_i}^2}{m}} \qquad (5.5)$$

Una vez obtenidos estos valores obtenemos la razón de esfuerzo

$$R_{rms} = \frac{\sigma_{min,rms}}{\sigma_{max,rms}} \qquad (5.6)$$

Esto es evaluado en FRANC en la pantalla *FATIGUE* bajo la opción *EVAL RMS*. Como puede verse en la fig. (5.11) del apéndice que muestra la pantalla de computadora, la información de entrada se lee de un archivo de datos que contiene los valores del espectro como pares de datos de máximo y mínimo y se despliegan los valores absolutos máximo y mínimo encontrados en el espectro, el número de datos (m en 5.3-5) así como los resultados de dichas ecuaciones. Estas magnitudes corresponden al factor de carga, rango de amplitud y *R*, por lo que las cantidades previas son modificadas, como se observa en la sección de datos de la pantalla.

5.3.2 Amplitud constante equivalente a espectros aleatorios de Elber.

Como se describió en el capítulo anterior este modelo se basa en el fenómeno de cierre de grieta observado en pruebas piloto donde se encontró que la carga que causa la apertura de la grieta permanecía esencialmente constante cuando las grietas crecían bajo cargas de espectros aleatorios con secuencias repetitivas.

Elber estableció que la tasa de crecimiento es una potencia del rango del FIE efectivo únicamente, siendo por ejemplo la ley de Paris

$$\frac{da}{dN} = C\left(\Delta \bar{K}_{eff}\right)^{n} \qquad (5.7)$$

calculándose ΔK_{eff} con respecto a la carga para la cual la grieta se abre completamente.

Elber buscó alguna manera de reemplazar una carga aleatoria repetitiva por una secuencia corta de amplitud constante. Esta última secuencia se escoge de tal forma que el crecimiento total de la grieta, el modo y el tamaño crítico sean equivalentes para las dos secuencias de carga, fig. 5.12. El esfuerzo máximo para la secuencia equivalente se escoge igual al valor máximo encontrado en el espectro aleatorio, por lo que la longitud de grieta en la falla bajo amplitud constante representa la longitud mínima bajo cargas aleatorias. El esfuerzo mínimo de la secuencia constante es seleccionado de tal forma que el esfuerzo de apertura sea el mismo para las dos secuencias, lo que produce rangos equivalentes del FIE máximo siendo por tanto los contornos de la zona plástica similares, a la vez que simplifica la ecuación de equivalencia como se verá posteriormente. El número de ciclos en la secuencia equivalente se elige de manera que el crecimiento ocasionado por dichos ciclos sea el mismo que el causado por la secuencia aleatoria.

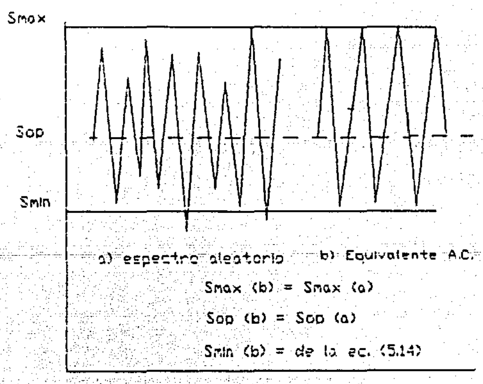


fig. 5.12 Nomenclatura en el modelo de Elber

Veamos ahora el proceso de cálculo: Si σ_i es el máximo, $\tilde{\sigma}_i$ es el esfuerzo mínimo de la excursión *iesima* de la secuencia aleatoria, σ_{op} es el esfuerzo de apertura, $\hat{\sigma}_i$ es el esfuezo efectivo mínimo y a es la longitud de grieta entonces, de acuerdo a la ecuación (5.7) el incremento de grieta debido a la carga *iesima* es

$$\delta a = C\left(\sigma_i - \hat{\sigma}_i \right)^n \left(\sqrt{\pi a}\, F \right)^n \qquad (5.8)$$

donde

$$\hat{\sigma}_i = \begin{cases} \sigma_{op} & \tilde{\sigma}_i \leq \sigma_{op} \\ \tilde{\sigma}_i & \tilde{\sigma}_i > \sigma_{op} \end{cases} \qquad (5.9)$$

Sí σ_{max} es el valor mas alto de esfuerzo máximo en la secuencia aleatoria el incremento de grieta δa puede ser expresado como una fracción λ_i del crecimiento causado por un ciclo de la carga de amplitud constante equivalente

$$\delta a = \lambda_i\, C \left(\sigma_{max} - \hat{\sigma}_{op} \right)^n \left(\sqrt{\pi a}\, F \right)^n \qquad (5.10)$$

como se ha establecido lineas arriba, para lograr la equivalencia se iguala (5.8) con (5.10) obteniendo

$$C\left(\sigma_i - \hat{\sigma}_i \right)^n \left(\sqrt{\pi a}\, F \right)^n = \lambda_i C \left(\sigma_{max} - \hat{\sigma}_{op} \right)^n \left(\sqrt{\pi a}\, F \right)^n \qquad (5.11)$$

Despejando λ_i y sumando todas las excursiones se llega a

$$N_{eq} = \sum \lambda_i = \frac{1}{\left(\sigma_{max} - \hat{\sigma}_{op} \right)^n} \sum \left(\sigma_i - \hat{\sigma}_i \right)^n \qquad (5.12)$$

Esta expresión relaciona los ciclos calculados en la secuencia equivalente de amplitud constante con los ciclos de la aleatoria. Para evaluar entonces los ciclos de amplitud constante Elber empleó la expresión que experimentalmente descubrió (ec. 4.17)

$$U = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{op}}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} = 0.5 + 0.4\ R \quad (-0.1 \le R < 0.7) \quad (5.13)$$

de la cual se puede encontrar el valor de σ_{min} que queda como

$$\sigma_{min} = 1.25 \left[\sqrt{1.6\ \sigma_{max}\ \sigma_{op} - 0.79\ \sigma_{max}^{2}} - 0.1\ \sigma_{max} \right] \quad (5.14)$$

Los pasos requeridos para calcular la vida en espectros aleatorios son entonces:

1) Encontrar el valor del esfuerzo de apertura de la grieta σ_{op}. Este es el punto critico de éste modelo, dado que Elber no encontró alguna relación analítica y únicamente midió el σ_{op} para aluminio. Poco tiempo después Newman *[29]* desarrolló un método numérico para evaluarlo. Sin embargo, como él mismo reconoce, su procedimiento es laborioso y fué ideado para evitar el análisis por elemento finito, siendo mas complejo que lo deseado para uso en diseño. Un buen estimado se encuentra en Kaninen *[30]*, con la relación $\sigma_{op}/\sigma_{max} = 0.56$ En su artículo Elber experimentalmente determinó σ_{op} para 6 espectros, si se evalúa el promedio de σ_{op}/σ_{max} se obtiene 0.549.
2) Evaluar el número de ciclos equivalente N_{eq} por medio de la ecuación (5.12)
3) Encontrar el esfuerzo mínimo equivalente σ_{min} por la ec. (5.14)
4) Calcular el número de ciclos N_{cal} para una secuencia

equivalente de amplitud constante con σ_{max} siendo el valor máximo del espectro aleatorio y σ_{min} el evaluado en el paso (3)

5) Obtener el número de ciclos que se lleva el espectro aleatorio, el cual es igual a

$$N_{random} = \frac{N_{cal}}{N_{eq}} \qquad (5.15)$$

La fig. 5.13 del apéndice muestra la salida de **FRANC** para este modelo, que se accesa al seleccionar *EQUIV ELBER*

5.3.3 Implantación del modelo de Wheeler

Este primer modelo desarrollado para explicar el retardo parte de modificar la regla de Miner del daño acumulativo por medio de un factor de retardo C_p, definido en (4.5) como

$$C_p = \begin{cases} \left(\dfrac{r_{pi}}{a_p - a_i}\right)^m & a_i + r_{pi} < a_p \\ 1 & a_i + r_{pi} \geq a_p \end{cases} \qquad (5.16)$$

La fig. 4.3 muestra la nomenclatura empleada. Como se puede apreciar mientras que la zona plástica del ciclo actual se encuentra dentro de la causada por la sobrecarga previa el parámetro de retardo es menor que 1, lo que ocasiona que en la regla de Miner (4.4) se encuentre un crecimiento menor que el debido a amplitud constante (C_p = 1). El punto débil de éste modelo para su aplicación es que requiere del parámetro m, para correlacionar con los valores de experimentos. Conceptualmente es robusto, pues C_p hace al retardo depender de la aplicación actual de carga, a través de r_{pi}, así como de la historia de las cargas anteriores, a través de la localización del frente plástico a_p y de la punta de la grieta a_i. El esquema computacional para incorporar el retardo requiere que mientras exista éste se evalúe el crecimiento ciclo por ciclo. Con esto se logra además linearizar paso a paso un fenómeno altamente no lineal. El algoritmo debe llevar contabilidad no solo de cargas y esfuerzos sino también de la zona plástica y de la localización de la interface elasto-plástica, debe poder determinar si se sobrepasó la zona en una capa, cuantos ciclos de la capa restan después de que ha cesado el retardo para evaluar el crecimiento sin retardo ó cuantos bloques son necesarios para estabilizar el crecimiento. La fig. 5.13 muestra dos curvas donde en la 5.13a el espectro consta de 1 bloque y 3 capas, y la 5.13b son las mismas tres capas pero ahora se aplica tres veces (bloques).

5.3.4 Implantación del modelo de Willenborg

A continuación se presentan los pasos necesarios para evaluar el modelo de Willenborg, descrito previamente en la sección 4.3.1, donde se estableció que emplea el mismo modelo geométrico de Wheeler, utilizándose entonces la misma nomenclatura. El enfoque difiere en que Willenborg no relaciona un parámetro de retardo sino que modifica directamente la magnitud del esfuerzo sin requerirse de datos adicionales del material, como ocurre con el exponente de forma. Se puede establecer entonces la metodología como:

1) Evaluar la zona plástica para la primera capa del primer bloque empleando el esfuerzo máximo. Para el caso de esfuerzo plano tendríamos entonces

$$r\_po = \frac{K_I^2}{2.0\,\pi\,\sigma_{yp}^2} + a_1 \qquad (5.17)$$

2) Leer la siguiente capa. Si $\sigma_{max} < \sigma_{max_{i-1}}$ entonces la zona plástica ocasionada por la capa previa es mas grande que la que ocasionaría únicamente σ_{max_i}

3) Aquí entra el concepto clave de Willenborg, que es el cálculo del esfuerzo que se requiere aplicar para alcanzar la zona plástica efecto del esfuerzo máximo anterior. Esto se determina como sigue

$$Ry = \frac{K_{ap}^2}{2.0\,\pi\,\sigma_{yp}^2} = \frac{\left(\sigma_{ap}\sqrt{\pi\,a_c}\;F\right)^2}{2.0\,\pi\,\sigma_{yp}^2} = r\_po - a_c \qquad (5.18)$$

despejando σ_{ap}

$$\sigma_{ap} = \frac{\sigma_{yp}}{F}\sqrt{\frac{2\left(r\_po - a_c\right)}{a_c}} \qquad (5.19)$$

Se puede notar que para el primer ciclo $a_c = a_i$ de la capa anterior y, por tanto, el esfuerzo aplicado es igual al esfuerzo máximo previo. De igual forma al fin del retardo el efuerzo aplicado es el mismo que el actual máximo.

4) Ahora obtenemos la reducción en el esfuerzo aplicado σ_{red} debido al progreso por la zona plástica de la capa actual

$$\sigma_{red} = \sigma_{ap} - \sigma_{max} \qquad (5.20)$$

5) Esta reducción en esfuerzo debe ser aplicado a los esfuerzos corrientes, para obtener los siguientes esfuerzos efectivos

$$\sigma_{maxoff} = \sigma_{max} - \sigma_{red} \qquad (5.21a)$$

$$\sigma_{minoff} = \sigma_{min} - \sigma_{red} \qquad (5.21b)$$

si cualquiera de los dos es menor que cero, se igualan a cero, reduciéndose efectivamente el rango de éstos.

6) Evaluar ΔK_{eff} empleando las ecuaciones 5.21a y 5.21b y emplearlas en la ley de crecimiento seleccionada. Es experiencia fruto de esta investigación que, al modificar los esfuerzos se altera también la relación *R*, por lo que se recomienda el empleo de la ley de Forman. Al fin del primer ciclo de la segunda capa se obtiene $a_{2,1}$

7) Comparar el valor actual de $a_{2,i}$ con r_{po}. Dado que $a_{2,i}$ es menor que r_{po} el crecimiento se encuentra retardado. Se Procede entonces a calcular σ_{ap}, volviendo al paso (3)

5.4 Preguntas del sistema

Dentro de FRANC se implementaron los cuatro modelos descritos líneas arriba, los cuales son invocados al elegir la página *FATIGUE*, bajo las opciones *WHEELER*, *WILLENBORG*, *EQUIV.ELBER* ó *EQUIV.RMS*. Una vez seleccionado el modelo (mediante el ratón), el control se transfiere a la ventana del sistema DECTERM, siendo la introducción de datos via el teclado. Aparecerá en pantalla:

YOU NEED A FILE WITH THE SIF HISTORY
DO YOU ALREADY HAVE IT [Y/N] ?

que dice que se requiere un archivo con la historia del factor de intensidad de esfuerzo, y pregunta si se tiene o no. Se incluyó prueba de entrada, por lo que sólo es válido responder con *Y*, y, *N* ó *n*, de otra forma la pregunta se repite. Si el usuario contesta que aún no dispone del archivo entonces el control regresa a las opciones de *FATIGUE*. En caso afirmativo aparece entonces

INPUT THE SIF HISTORY FILE NAME

que pide el nombre del archivo. Si el programa no existe, o si fue teclado erróneamente se despliega el siguiente mensaje de advertencia

File does not exist

ó "el archivo no existe", después de tres intentos fallidos se regresa el control a *FATIGUE*, de otra manera se muestra una tabla que presenta el tamaño de grieta a con sus respectivos valores de K_I y K_{II}. Posteriormente se indica

INPUT SPECTRUM LOADING FILE NAME

ó "introduzca el nombre del archivo de carga espectral". Se realiza una verificación similar al archivo anterior. El nombre del archivo tiene el formato *nombre*.XXX donde XXX es cualquier extensión de tres letras. Información detallada del proceso de crecimiento se manda a una archivo *nombre*.RES. En pantalla aparece información concerniente al número de bloques del espectro, el valor del exponente de forma para el caso de Wheeler ó el valor del esfuerzo de apertura para el equivalente de Elber.

Ahora se verá el proceso seguido en los modelos de retardo. Como se ha establecido el retardo se calcula ciclo por ciclo. Una vez que la zona plástica creada por alguna sobrecarga se rebasa, cesa el atraso y se emplea normalmente la ley seleccionada. Por lo anterior se debe llevar la cuenta de los ciclos transcurridos, si el retraso cesa entonces se debe calcular el crecimiento normal con los ciclos restantes de la capa. Sin embargo, si la capa consistía de unos pocos ciclos, o si la zona plástica era considerable, entonces se van tomando ciclos de las capas subsecuentes hasta terminar el retardo aunque pudiese ocurrir así mismo que el atraso no termine en un sólo bloque. Todas estas contingencias se encuentran consideradas en el algoritmo, y se van monitoreando en el archivo .RES. En pantalla únicamente aparece el estado inicial y final por capa en la forma de mensajes tales como

RETARDATION STAGE ó

RETARDATION CEASES ó

THE LAYER x DO NOT OVERCOME THE PREVIOUS PLASTIC ZONE SIZE x

ó "etapa de retardo", "finaliza el retardo", "La capa x no rebasó el tamaño de la zona plástica anterior x". Internamente se va calculando el crecimiento sin tomar en cuenta el retardo para realizar al final una comparación, desplegándose finalmente

FINAL CRACK SIZE

Without retardation ________

With retardation ________

Difference ________%

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Sumario

Se ha realizado una contribución important entendimiento del proceso de fractura al implantar m para predicción de vida residual bajo carga aleator amplitud variable o amplitud constante dentro de un interactivo que puede utilizarse como "cámara de p en mecánica de fractura. Sin embargo, la selec aplicación de un modelo de fatiga para condiciones c complejas, de amplitud variable y aleatorias, tal las de espectros de aviación o cargas sobre requieren de un apreciable entendimiento de la c del modelo y de los efectos de la interacción cargas. Parece que en varios espectros aleato efectos de retardo y aceleración tienden a cancela lo que podría pensarse que los cambios totales despreciarse. Por otra parte, el tomar en cuenta efectos es difícil y aún modelos muy avanzados n predicciones confiables. Los que se presentan com "nuevos" son muy específicos, encontrando ca mejores correlaciones de su aplicación partic experimentos que él mismo conduce. Esto signifi mayoría de los modelos requieren de "afinación" antes de poder realizar predicciones confiable refleja la complejidad del proceso de fatiga y de variables involucrado *[29]*.

De acuerdo a la revisión de modelos presentada en el capítulo 4 se observa que desde Wheeler, Willenborg y Elber, que realizaron las contribuciones originales al problema, los modelos nuevos no son sino adaptaciones o modificaciones pequeñas dejando conceptualmente sin cambio al original. No deja de llamar la atención que los tres no publicaron nada posterior a su contribución primera, quizá debido al hecho de que sus trabajos los realizan para la fuerza aérea.

La falta de coherencia o de resultados comunes para diferentes modelos parece deberse a que, como establece Ditlevsen *[30]*, todos los intentos por establecer modelos determinísticos fallan debido al hecho de que el fenómeno de fatiga muestra fuertes características estocásticas. Además indica que todas las descripciones teóricas reportadas se basan en técnicas de ajuste de datos, lo cual tiende a oscurecer el comportamiento del fenómeno.

Se puede concluir que las principales particularidades del fenómeno son:

1.- Sobrecargas positivas introducen retardos significativos pero en general se generan grandes retrasos por:

a) Aumentar la magnitud de la sobrecarga

b) Repetir la sobrecarga durante el crecimiento de grieta

c) Aplicar bloques de sobrecargas.

2.- El retardo no ocurre inmediatamente después de la aplicación de la sobrecarga

3.- Comparaciones del crecimiento entre cargas programadas y aleatorias han revelado efectos de la secuencia; estos efectos se manifiestan en la superficie de fractura.

4.- Sobrecargas de compresión tienen relativamente poco efecto en el crecimiento de grieta, sin embargo, si una sobrecarga de tensión es seguida inmediatamente por una de compresión el retardo se disminuye grandemente.

5.- Los efectos de retardo dominan sobre los de aceleración. Esta última en crecimiento de grieta por fatiga es generalmente significativa a altos niveles de esfuerzo. Dado que éstos valores se espera que ocurran con muy poca frecuencia, y son generalmente de corta duración, dicha influencia puede despreciarse.

6.2 Recomendaciones

De los cuatro modelos que se han implantado de acuerdo a *[26]* el mas apto para espectros aleatorios corresponde al de Barsom, debido a su sencillez y economía computacional. Sin embargo, el modelo de cierre de grieta de Elber tiene mas fundamentos teóricos. Si no es posible realizar la comprobación con respecto a un experimento definitivamente que una opción valida es comparar las respuestas de ambos modelos.

Por lo que se refiere a espectros en bloques se observó que los valores de retraso de Wheeler o Willenborg difieren notablemente. Al parecer si se tiene rangos de esfuerzo efectivo importantes, tales que se modifique la razón de esfuerzo R es conveniente emplear como ley a Forman. La desventaja de emplear Wheeler consiste en el parámetro adicional del exponente de forma. Si se dispone de datos previos experimentales entonces es posible calibrar dicho valor para un mejor ajuste. En el caso de materiales no tan caracterizados es mas conveniente el empleo del modelo de Willenborg.

6.3 Trabajo Futuro

Definitivamente el campo de Fatiga es un área multidisciplinaria, interviniendo fuertemente las especialidades de análisis de esfuerzo, metalografía, pruebas y ensaye de materiales, computación y probabilidad y estadística. En el presente trabajo se hizo énfasis en el aspecto computacional al presentar y ampliar una poderosa herramienta para el diseño, como es el caso de FRANC.

Actualmente en el modelo de Elber se obtiene el esfuerzo de apertura en base a una razón promediada de datos obtenidos por experimentación, lo cual no es representativo de un caso general de carga y geometrIa. Un tema a explotar consiste en la evaluación analítica o determinación de métodos auxiliares para el cálculo de dicho esfuerzo. Así mismo, en los modelos de Wheeler y Willenborg la determinación del tamaño de la zona plástica es muy simplificado, aunque es posible utilizar el criterio de Minggao (4.3.5) donde se emplea una relación que toma en cuenta el paso de esfuerzo plano a deformación plana.

Sin embargo, dado que al final se llega a una curva de relación del crecimiento contra el cambio del factor de intensidad de esfuerzo (curva *da/dN* vs ΔK), obtenida experimentalmente y ajustada numéricamente, la exactitud del modelo puede demeritarse al momento de encontrar el número de ciclos. El excelente resultado de Hudson [28] empleando Barsom fue también debido a que empleó tres relaciones diferentes de los parámetros C y n en la ley de Forman y Paris, dependiendo del rango de ΔK. Finalmente, al término de la estancia en la Universidad de Cornell no fue posible dar salida gráfica a las curvas de retardo, lo que se realizó dentro del Instituto de Investigaciones Eléctricas, faltando su implantación en FRANC, actividad que se desarrollará en cuanto se adquiera una estación de trabajo en el departamento de Equipos Mecánicos.

CAPITULO 7

REFERENCIAS

[1] Kaninen and Popelar. *Advanced Fracture Mechanics*, 1a edición, Oxford Engineering Sciences, 1985

[2] Kreyszig Erwin, *Matematicas Avanzadas para Ingenieria*, Vol. 2, pp. 642-652, 3a. edición, Ed. Limusa, 1978.

[3] Yehia, Nabil, "Automatic Tracking of Crack Growth via Finite Elements." *Tesis Doctoral*, Instituto Politécnico de Rensselaer, 1984

[4] Barsoum, Roshdy. "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics" *International Journal of Numerical Methods in Engineering* Vol. 10 pp. 25-37, 1976

[5] Henshell R.D. and Shaw K.G., "Crack Tip Finite Elements are Unncessary", *Int. J. of Num. Meth. Eng.* Vol. 9 pp. 495-507, 1975

[6] Tada H, Paris P.C., Irwin G. *The Stress Analysis of Cracks Handbook.* Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973

[7] Broek D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics* 3a. Ed. Martinius Nijhoff Publishers, Netherlands, 1984

[8] Sih,G.C. "Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems." *International Journal of Fracture* Vol. 10, No. 3 pp. 305-321, 1974

[9] Erdogan, F. and Sih,G.C. "On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear" *Journal*

of Basic Engineering, *ASME* pp. 519-527, Diciembre 1963.

[10] Hussain, M. A., Pu S.L. and Underwood J.H., "Strain Energy Release Rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II", *Fracture Analysis*, *ASTM STP 560*, pp. 2-28, 1974

[11] Blake Alexander, *Handbook of Mechanics, Materials and Structures*, 1a. edición. Cap. 4. Ed. Wiley Interscience, 1985

[12] Hoepner D.W. and Krupp W.E., "Prediction of Component Life by Application of Fatigue Crack Growth Knowledge", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.6 pp. 47-70, 1974

[13] Rolfe S.T., Barsom J.M., *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 1a edición, Prentice-Hall, Cap. 8, 1977

[14] NASCRAC, NASa CRack Analysis Code Version 2.0 *Theory Manual*. Febrero 23, 1989

[15] Willenborg J.D., Engle R.M., Wood H.A. "A Crack Growth Retardation Model Using an Effective Stress Concept". *Technical Memo*. Air Force Flight Dynamics Laboratory 71-1-FBR Wright-Patterson Air Force Base Ohio, 1971.

[16] Wheeler O.E. "Spectrum Loading and Crack Growth". *Journal of Basic Engineering* ASME pp. 181-186. Marzo 1972

[17] Gallagher, J.P. "A Generalized Development of Yield Zone Models" *Air Force Flight Dynamics Laboratory*, *AFFDL-TM-74-27*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1974

[18] Vroman, G.A., "Analytical Prediction of Crack Growth

Retardation Using a Residual Stress Concept", *Briefing Charts*, Rockwell International, B-1 Division, Los Angeles Calif., 1971.

[19] Chang J.B.,Engle R.M., and Stolpestad J., "Fatigue Crack Growth Behaviour and Life Predictions for 2219-T851 Aluminum subjected to Variable Amplitude Loadings", *Fracture Mechanics: Thirteenth Conference ASTM STP 743*, pp. 3-27, 1981

[20] Minggao Yan, Mingda Gu, "Investigation on the Crack Growth Retardation Behavior and Fatigue Life Prediction in Structural Materials". *Proc. of the ICF International Symposium on Fracture Mechanics*, Beijing, pp. 852-861, 1983

[21] Ibidem [11] Cap. 9, pp. 268-291

[22] Elber Wolf, "Equivalent Constant Amplitude Concept for Crack Growth Under Spectrum Loading", *Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads, ASTM STP 595*, American Society for Testing and Materials, 1976, pp. 236-250.

[23] Maarse J. "Crack Closure Related to Fatigue Crack Propagation" *Fracture 1977* Vol. 2 ICF4, Waterloo, Canada, Junio 19-24, 1977

[24] Gemma A.E. and Snow D.W., "Prediction of Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads", *Fracture Mechanics ASTM STP 677*, American Society of Testing and Materials, 1979, pp. 320-338

[25] Kujawski D. and Ellyin F., "On the Size of Plastic

Zone Ahead of Crack Tip" *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 25, No. 2, pp. 229-236, 1986

[26] Matsuoka S. and Tanaka K., "Delayed Retardation Phenomenon of Fatigue Crack Growth Resulting from a Single Application of Overload", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 10, pp. 515-525, 1978

[27] Wawrzynek P.A., "Interactive Finite Element Analysis of Fracture Processes: An Integrated Approach", *Reporte Interno, Departamento de Ingenieria Estructural*. Universidad de Cornell, Febrero 1987

[28] Chang and Hudson editors, *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading* ASTM STP 748, 1981

[29] Newman J.C.Jr, "A Crack Closure Model for Predicting Crack Growth Under Aircraft Spectrum Loading", *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading*. ASTM STP 748 pp. 53-81, 1981

[30] Ibidem *[1]* pp. 505-510

[31] Clayton J.Q., "Modelling Delay and Thickness Effects in Fatigue", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 32, No. 2, pp. 289-308, 1989

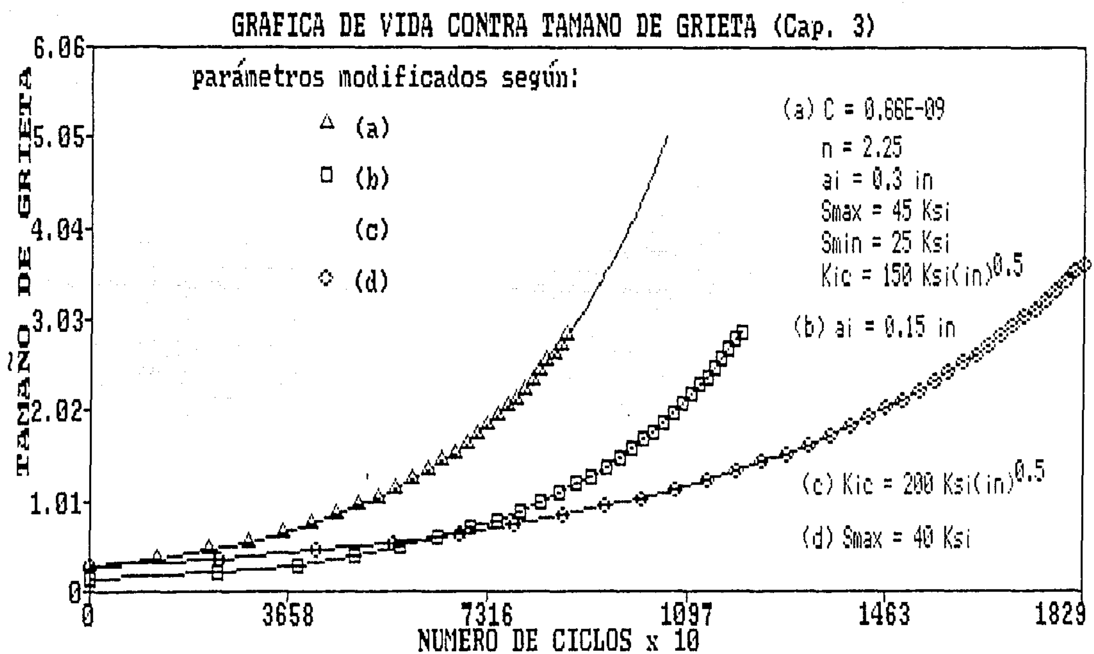
[32] Ditlevsen O., Sobczyk K., "Random Fatigue Crack Growth With Retardation", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 24, No. 6, pp. 861-878, 1986

A P E N D I C E

```
      Este programa calcula crecimiento de grieta contra numero de ciclos para
    placas de anchura infinita con fisura en el borde o en el centro. sometidas
   a tension remota uniforme
      Emplea la ley de Paris o la de Forman a eleccion del usuario

      PROGRAM a_vs_n

      CHARACTER*15 in_file, out_file
      INTEGER*4 law_type. t_ley. resp. opcion
      CHARACTER*6 ley
      CHARACTER*19 prob
      REAL incr_a. kmax

    1 PRINT*. 'Nombre del archivo de datos'
      READ (*.'(a)') in_file
      j = INDEX (in_file.' ') - 1
      OPEN (UNIT=10, FILE=in_file, STATUS='OLD', IOSTAT= i)
      IF (i .NE. 0) THEN
        PRINT*. 'Archivo inexistente o error de tecleado. Verifique !'
        GOTO 1
      END IF
      PRINT*. 'Archivo de resultados ?'
      READ (*.'(a)') out_file
      j = INDEX (out_file,' ') - 1
      out_file = out_file(1:j) // '.res'
      OPEN (UNIT=11. FILE=out_file. STATUS='UNKNOWN')
      READ (10,*) pc. pe. Kic. T_ley. t_prob
      READ (10,*) smax. smin. a_0. incr_a
  100 ley = 'Paris '
      prob = 'fisura en el centro'
      IF (t_ley .EQ. 2) ley = 'Forman'
      IF (t_prob .EQ. 2) prob = 'fisura en el borde '
      PRINT 5. prob. pc. pe. Kic. smax. smin. a_0. incr_a. ley
      WRITE (11.5) prob. pc. pe. Kic. smax. smin. a_0. incr_a. ley
    5 FORMAT (60('=').//' tipo de problema: '.a19.//
     +        ' Coeficiente C '.E10.3/
     +        ' Exponente   n '.F10.2/
     +        ' Tenacidad Kic '.I10/
     +        ' Esfuerzo max. '.F10.1/
     +        ' Esfuerzo min. '.F10.1/
     +        ' grieta inicial'.F10.3/
     +        ' incremento    '.F10.3//
     +        ' ley de propagacion de '.a6//.60('=')//)

      IF (t_ley .EQ. 2) THEN
        R = smin / smax
        WRITE (11, 6) R
        PRINT 6, R
      END IF
    6 FORMAT (' Relacion de esfuerzo R', F7.3)

      delta_s = smax - smin
      sum_n = 0.0
      Kmax = 0.0
      a_i = a_0
      WRITE (11.7)
      PRINT 7
    7 FORMAT (t7.' a        delta_k       Kmax'
     +        '        delta_N        N'/)
```

```
   DO WHILE (Kmax .LE. Kic)
     a_f = a_i + incr_a
     a_avg = (a_f + a_i) / 2.0
     Kmax = 1.772453851*Smax*SQRT(a_avg)
     delta_k = 1.772453851*delta_s*SQRT(a_avg)
     IF (t_prob .EQ. 2) THEN
      delta_k = 1.12*delta_k
      Kmax = 1.12*Kmax
     END IF
     delta_n = incr_a / (pc*delta_k**pe)
     IF (t_ley .EQ. 2) THEN
      delta_n = ( (1-R)*Kic - delta_k )*incr_a
      delta_n = delta_n / (pc*delta_k**pe)
     END IF
     sum_n = sum_n + delta_n
     WRITE (11,8) a_avg, delta_k, kmax, delta_n, sum_n
     PRINT 8, a_avg, delta_k, kmax, delta_n, sum_n
     a_i = a_f
   END DO
 8 FORMAT (3(F10.3,' '),2(F10.0,' '))
   PRINT 9, a_avg, sum_n
   WRITE (11,9) a_avg, sum_n
 9 FORMAT (//' Tamano de grieta critico',F10.3/
  +        ' Vida total en ciclos', F10.0//)

   PRINT*, ' Quiere (1) modificar datos o (2) terminar'
10 READ *, resp
    IF (resp .LT. 1 .OR. resp .GT. 2) GOTO 10
   PRINT*
   IF (resp .EQ. 1) THEN
     PRINT*, ' (1) Tipo de problema'
     PRINT*, ' (2) Coeficiente C'
     PRINT*, ' (3) Exponente   n'
     PRINT*, ' (4) Tenacidad Kic'
     PRINT*, ' (5) Esfuerzo max.'
     PRINT*, ' (6) Esfuerzo min.'
     PRINT*, ' (7) grieta inicial'
     PRINT*, ' (8) incremento'
     PRINT*, ' (9) ley de propagacion'
     PRINT*
     PRINT*, '       Seleccione la opcion'
11   READ*, opcion
      IF (opcion .LT. 1 .OR. opcion .GT.10) GOTO 11
      IF (opcion .EQ. 1) THEN
        IF (t_prob.EQ. 1) THEN
          t_prob = 2
          PRINT*, 'Fisura en el BORDE'
        ELSE
          t_prob = 1
          PRINT*, 'Fisura en el CENTRO'
        END IF
      ELSE IF (opcion .EQ. 2) THEN
        PRINT 12,pc
12      FORMAT (' El valor anterior de C es',E10.3/
  +             ' Introduzca el nuevo valor')
        READ*, pc
        GOTO 100
      ELSE IF (opcion .EQ. 3) THEN
        PRINT 13,pe
13      FORMAT (' El valor anterior de n es',F7.2/
```

```
     +              Introduzca el nuevo valor')
          READ*, pe
          GOTO 100
        ELSE IF (opcion .EQ. 4) THEN
          PRINT 14,Kic
 14       FORMAT (' El valor anterior de Kic es',I8/
     +            ' Introduzca el nuevo valor')
          READ*, Kic
          GOTO 100
        ELSE IF (opcion .EQ. 5) THEN
          PRINT 15, Smax
 15       FORMAT (' El valor anterior de Smax es',F10.1/
     +            ' Introduzca el nuevo valor')
          READ*, smax
          GOTO 100
        ELSE IF (opcion .EQ. 6) THEN
          PRINT 16,Smin
 16       FORMAT (' El valor anterior de Smin es',F10.1/
     +            ' Introduzca el nuevo valor')
          READ*, smin
          GOTO 100
        ELSE IF (opcion .EQ. 7) THEN
          PRINT 17, a_0
 17       FORMAT (' El valor anterior de a_0 es',F10.3/
     +            ' Introduzca el nuevo valor')
          READ*, a_0
          GOTO 100
        ELSE IF (opcion .EQ. 8) THEN
          PRINT 18, incr_a
 18       FORMAT (' El valor anterior de delta_a es',F10.3/
     +            ' Introduzca el nuevo valor')
          READ*, incr_a
          GOTO 100
        ELSE IF (opcion .EQ. 9) THEN
          IF (t_ley.EQ. 1) THEN
            t_ley = 2
            PRINT*, 'Propagacion de acuerdo a FORMAN'
          ELSE
            t_ley = 1
            PRINT*, 'Propagacion de acuerdo a PARIS'
          END IF
          GOTO 100
      END IF
    END IF ! if resp .eq. 1

    END
```



GRAFICA DE VIDA CONTRA TAMANO DE GRIETA (Cap. 3)
parámetros modificados según:
(a)
(b)
(c)
(d)
(a) C = 0.66E-09
n = 2.25
ai = 0.3 in
Smax = 45 Ksi
Smin = 25 Ksi
Kic = 150 Ksi(in)^0.5
(b) ai = 0.15 in
(c) Kic = 200 Ksi(in)^0.5
(d) Smax = 40 Ksi
TAMAÑO DE GRIETA
6.06
5.05
4.04
3.03
2.02
1.01
0
3658
7316
1097
1463
1829
NUMERO DE CICLOS x 10

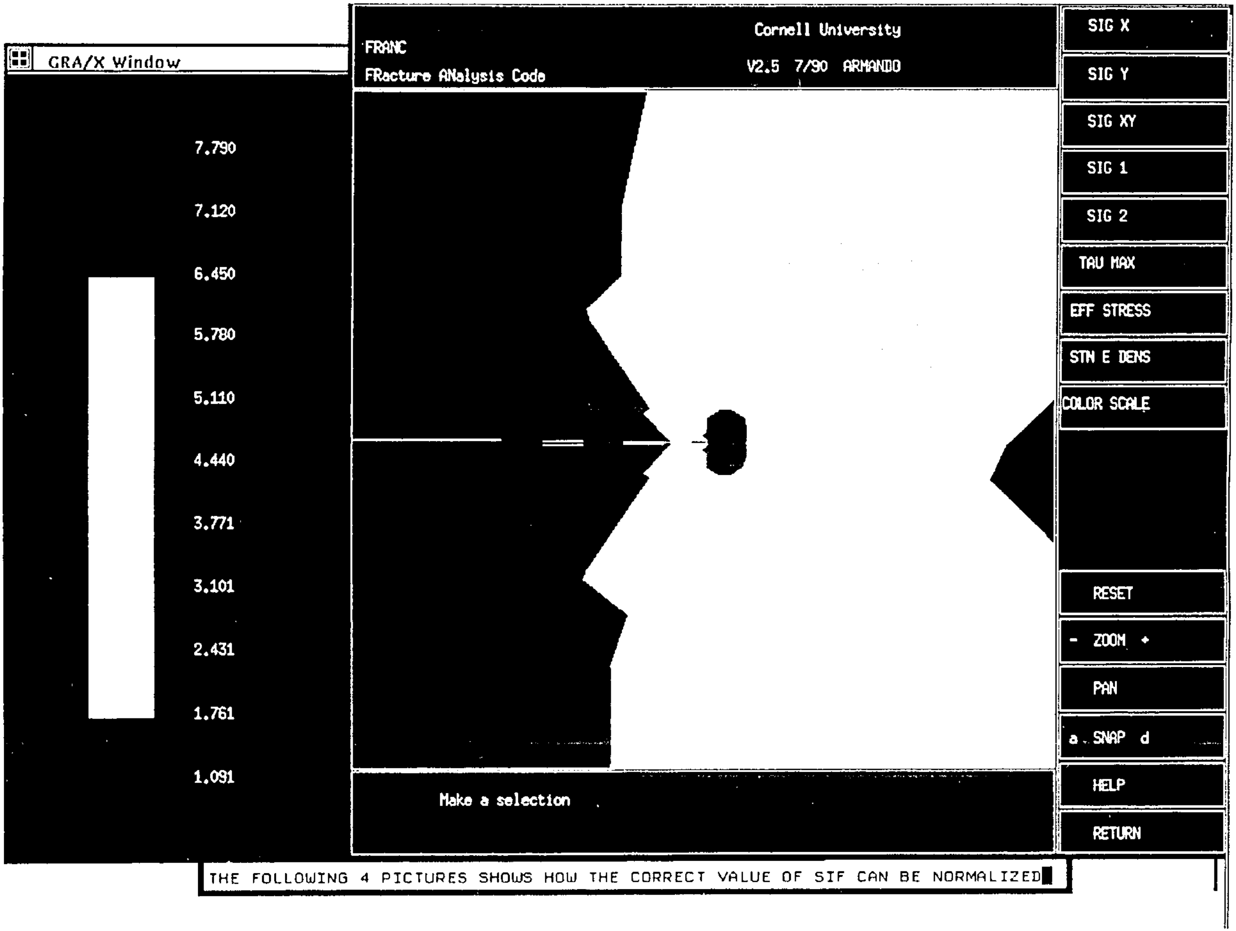


FIG. 5.7 ESFUERZOS PARA UNA CARGA UNITARIA

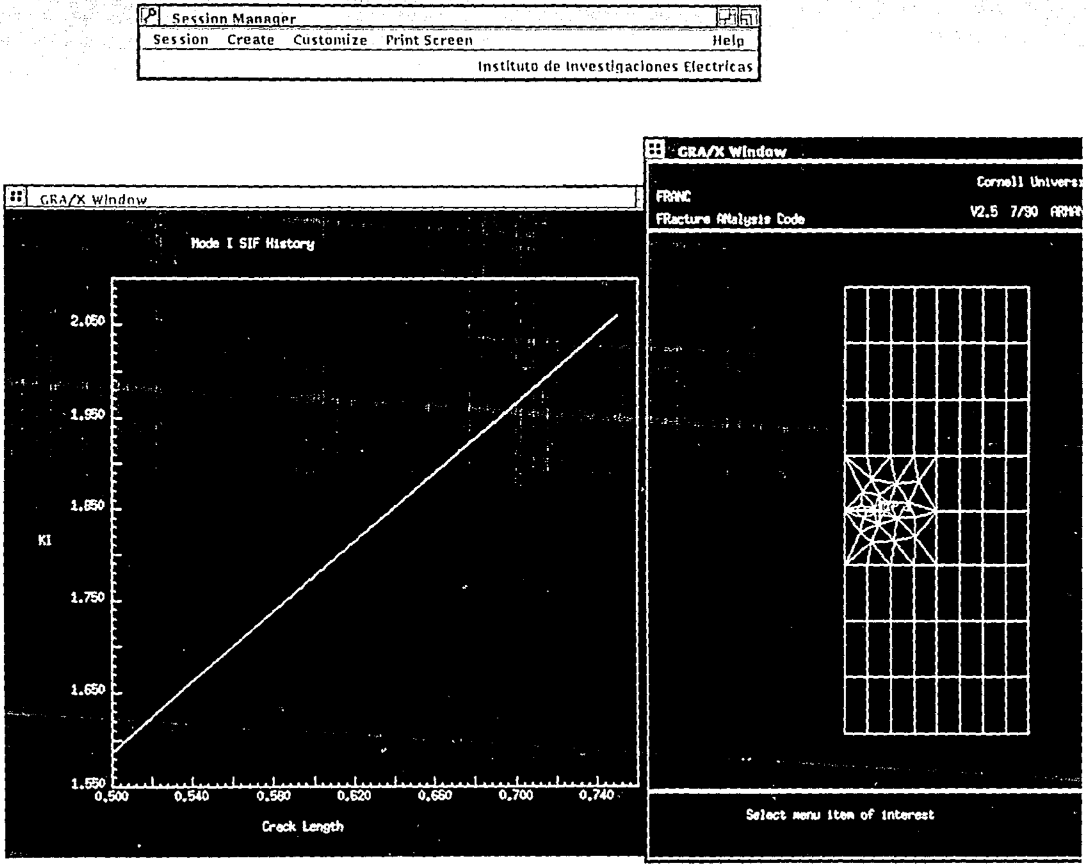


FIG.5.8 GRAFICA DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO (K) CONTRA TAMAÑO DE GRIETA (a) DE LA FIG. ANTERIOR

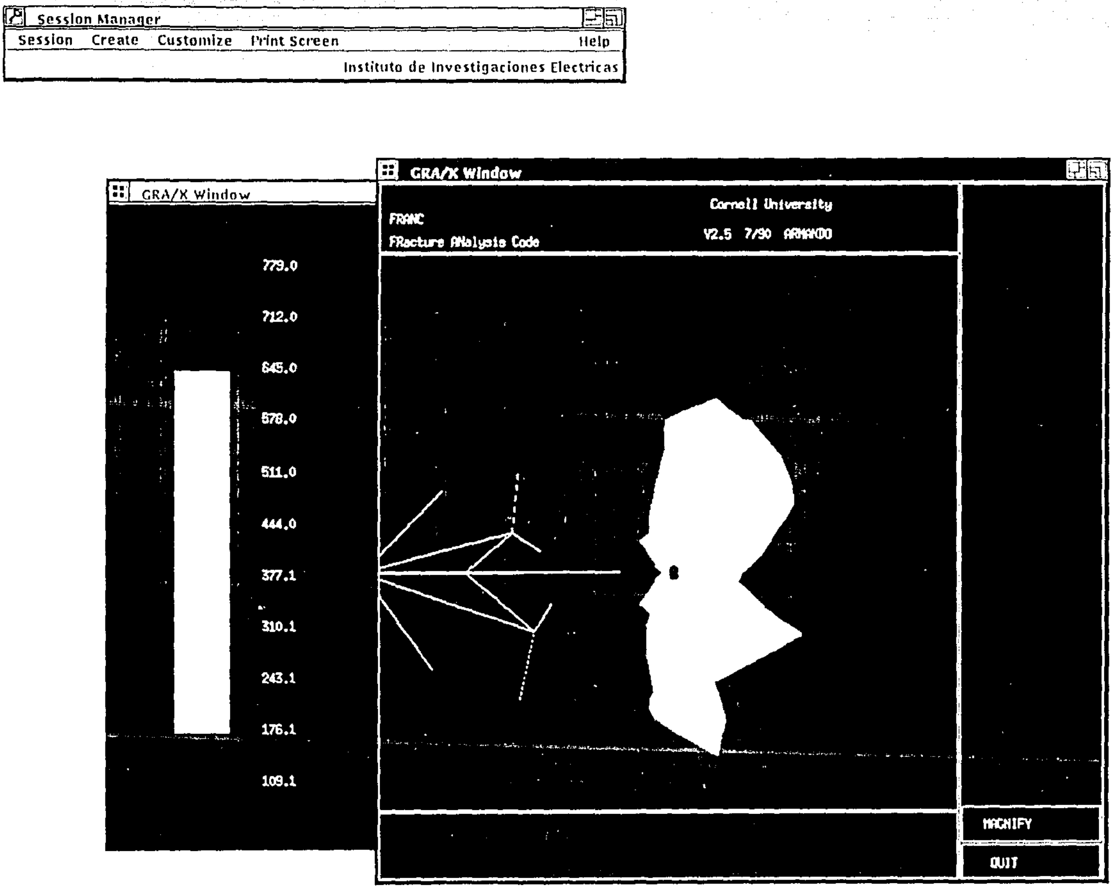


FIG. 5.9 ESFUERZOS DE LA FIG. ANTERIOR x 100.

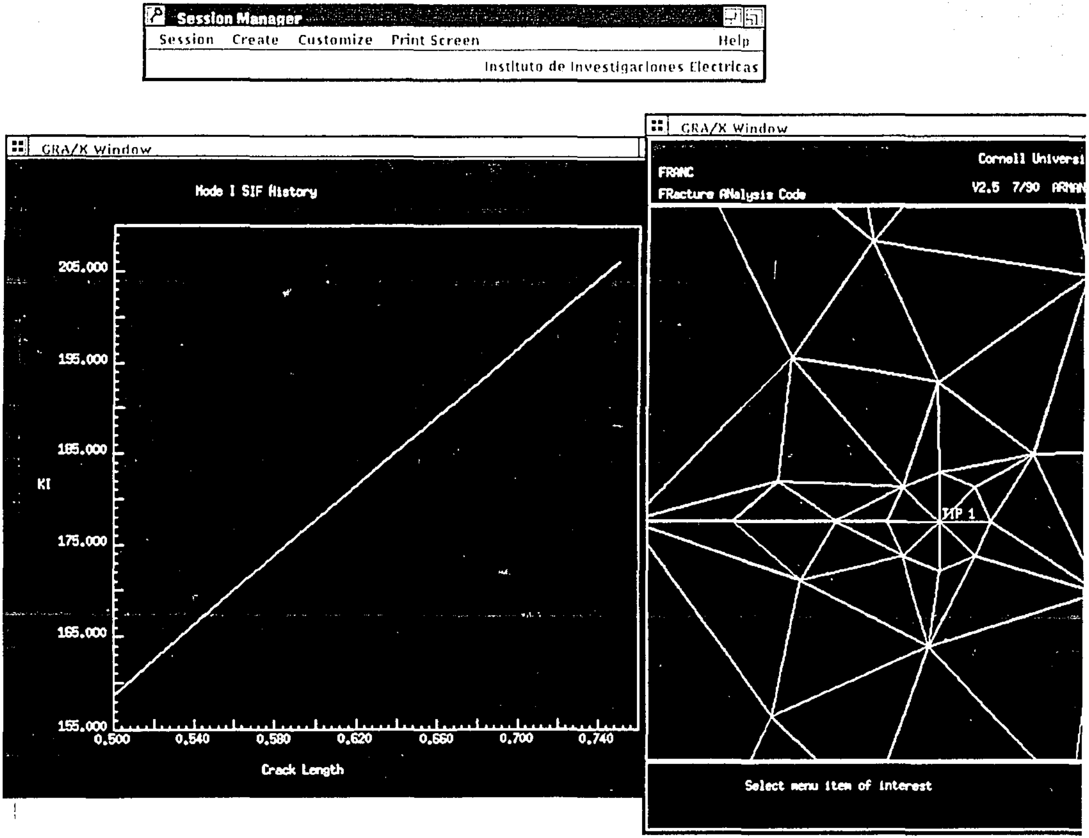


FIG. 5.10 FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO VS a

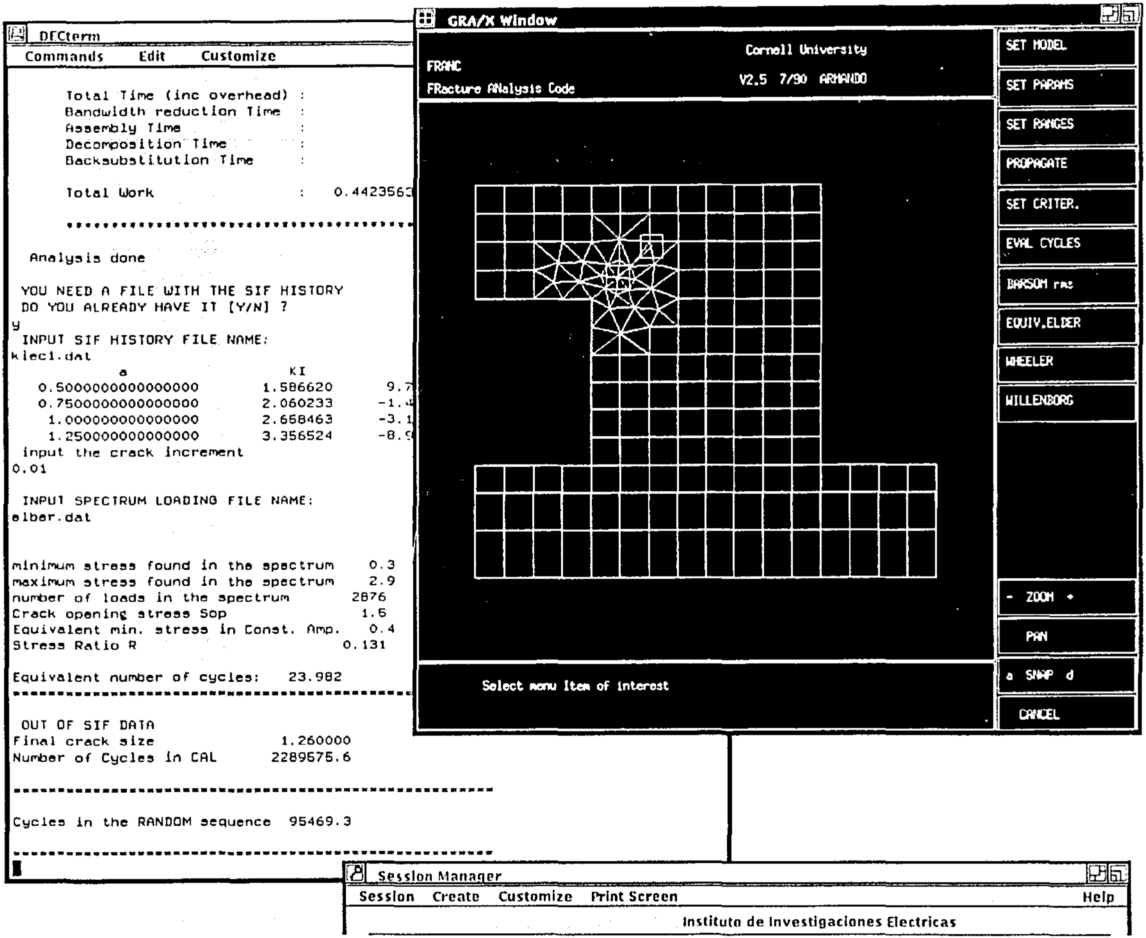


FIG. 5.11 MUESTRA DEL MODELO DE ELBER.

fig. 5.13 Retardo para espectro de un solo bloque

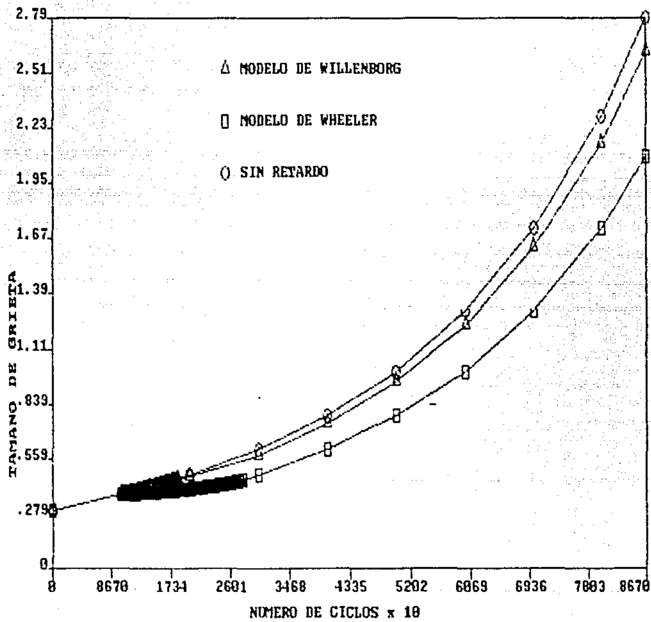
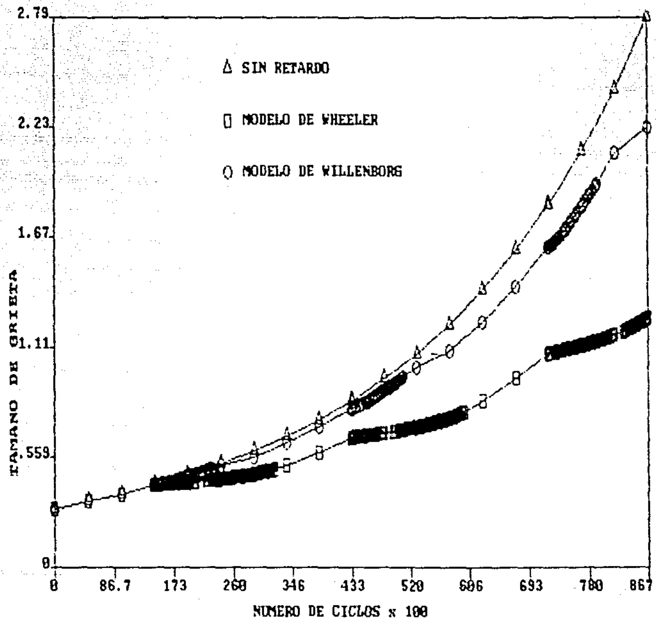


Fig. 5.14 Espectro anterior con tres bloques



DECterm

Commands Edit Customize Help

```
     Decomposition Time           :            2
     Backsubstitution Time        :            0

     Total Work                   :     0.1416828E-02

     *****************************************************************************

  Analysis done

 YOU NEED A FILE WITH THE SIF HISTORY
 DO YOU ALREADY HAVE IT [Y/N] ?
y
 INPUT SIF HISTORY FILE NAME:
kie1.dat

 File does not exist !
 INPUT SIF HISTORY FILE NAME:
kiec1.dat
              a                      KI              KII
   0.500000000000000C00          1.586620       9.7711069E-05
   0.750000000000000000          2.060233      -1.4232144E-03
    1.000000000000000            2.658463      -3.1038097E-03
    1.250000000000000            3.356524      -8.9552002E-03

 INPUT SPECTRUM LOADING FILE NAME:
swheele.dat
 shaping exponent     1.300000
 number of blocks            1
-----------------------------------------------------------------------

                    BLOCK Number  1

 LAYER   SMAX      SMIN   CYC.p/LAYER       a       sum_N

   1      45.0      25.0       10000    0.657734   10000
   2      75.0      25.0           1    0.657917   10001
 RETARDATION STAGE
 The layer  3 did not overcome the previous PZ( 0.976283)
                    RETARDATION CEASES
   3      45.0      25.0       10000    0.749176   20001

-------------------------------------------------------------------------

                    FINAL CRACK SIZE

 Without retardation  0.890575
    with retardation  0.749176
         Difference   0.141400   ( 18.87% )
```

GRA/X Window

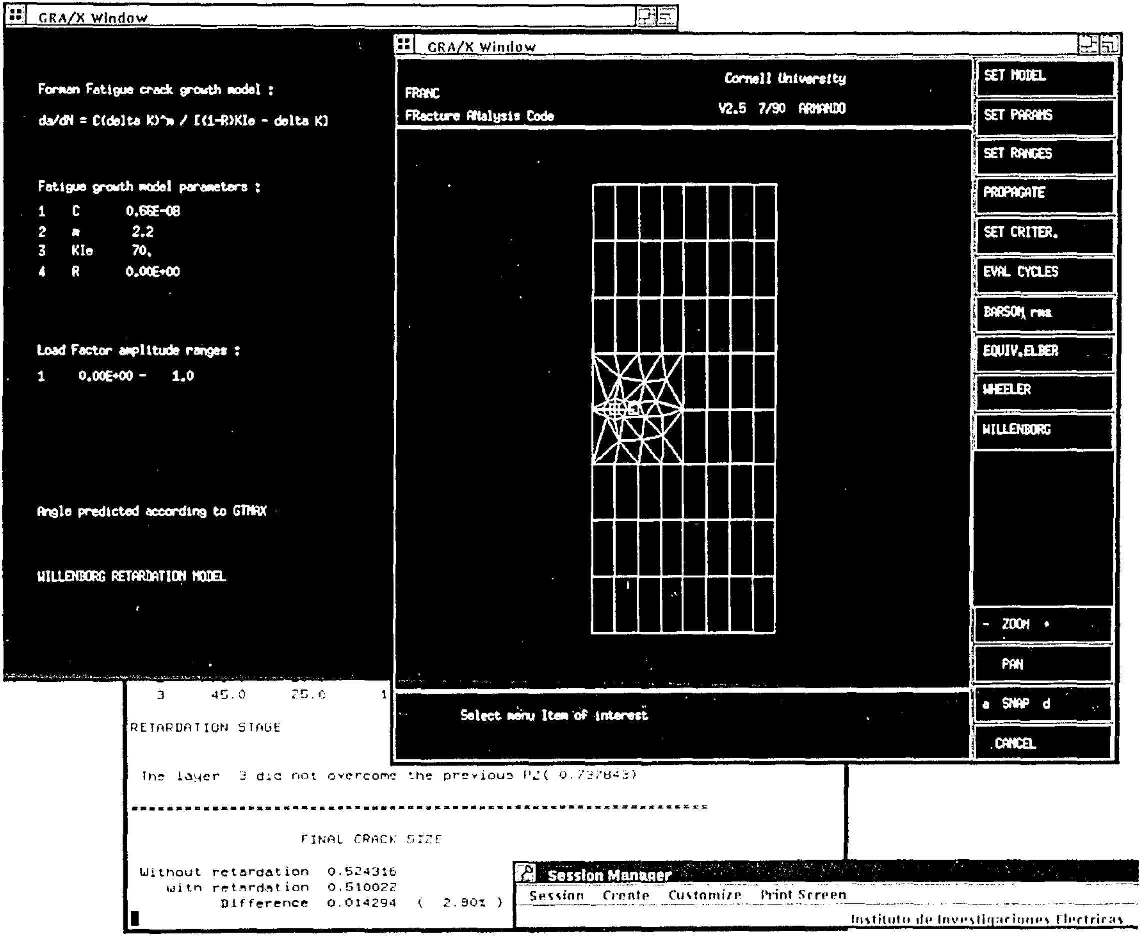
```
Paris Fatigue crack growth model :

da/dN = C(delta K)^m

Fatigue growth model parameters :
1   C      0.66E-08
2   m       2.2

Load Factor amplitude ranges :
1    0.00E+00 -    1.0

Angle predicted according to GTMAX

 WHEELER RETARDATION MODEL
```

SALIDA DEL MODELO DE WHEELER

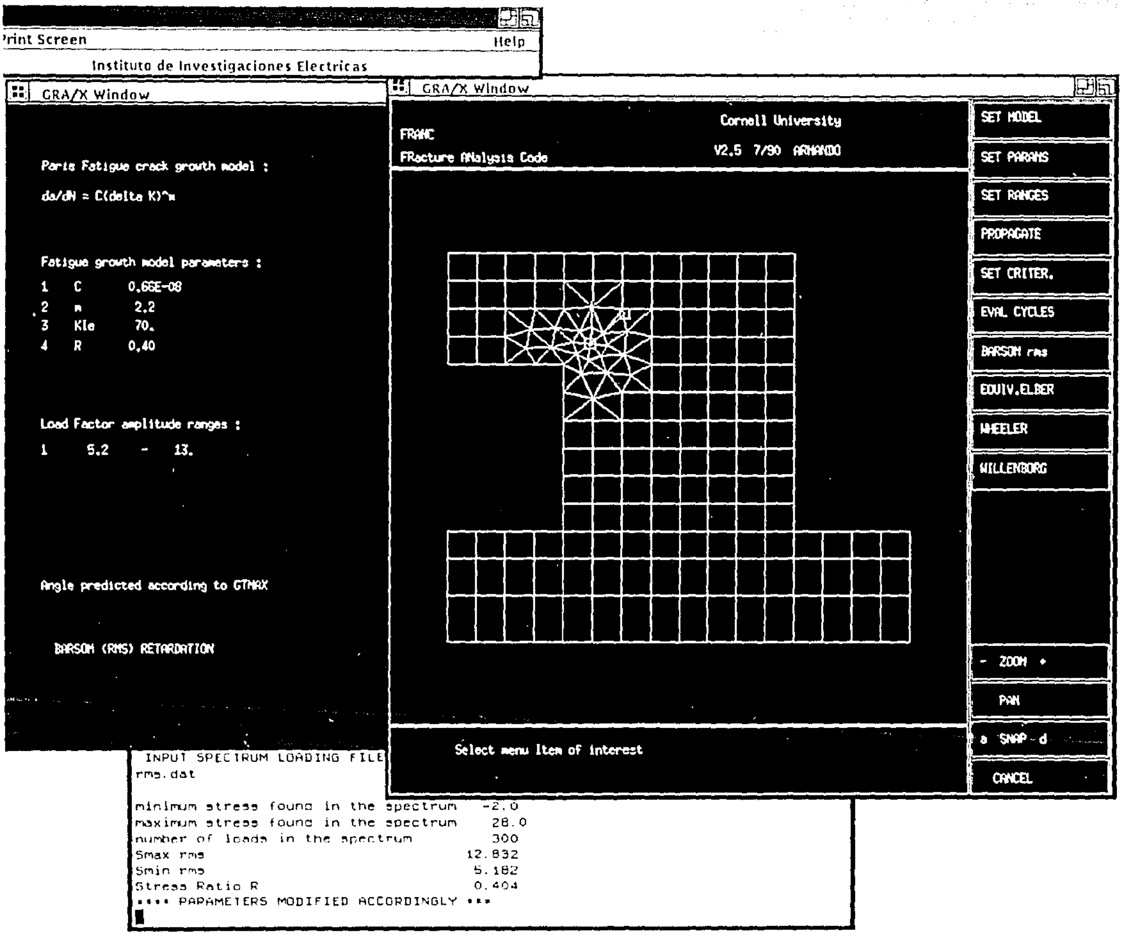
Session Manager

Session Create Customize Print Screen Help

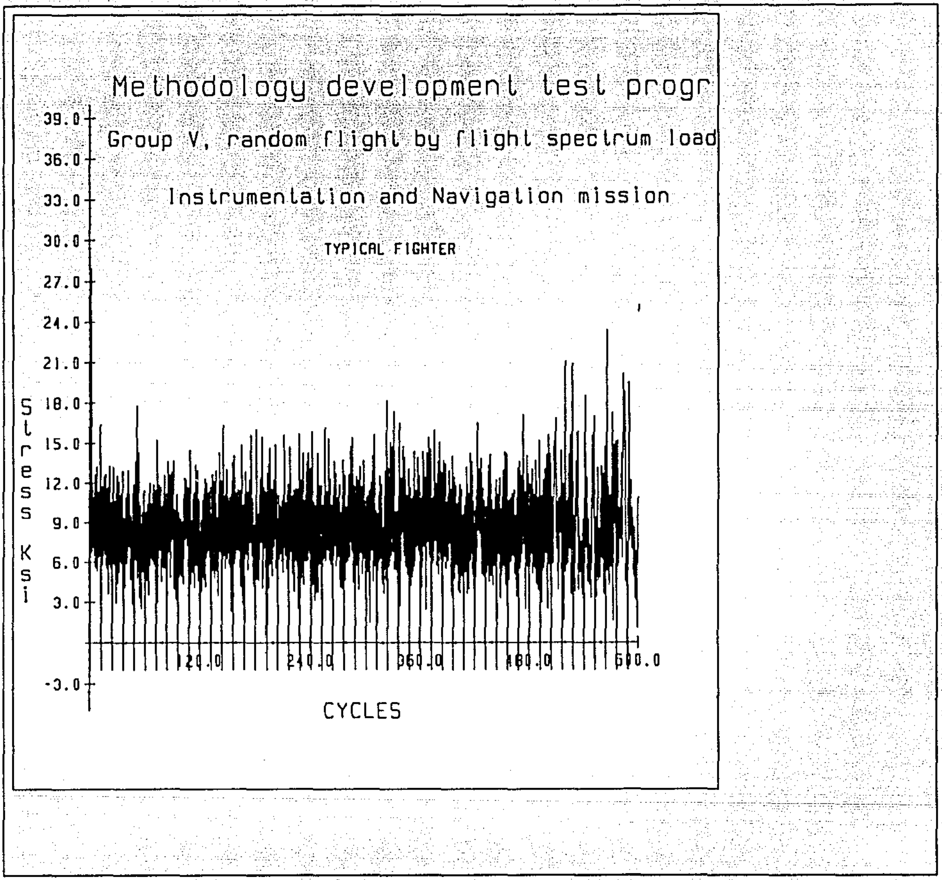
Instituto de Investigaciones Electricas



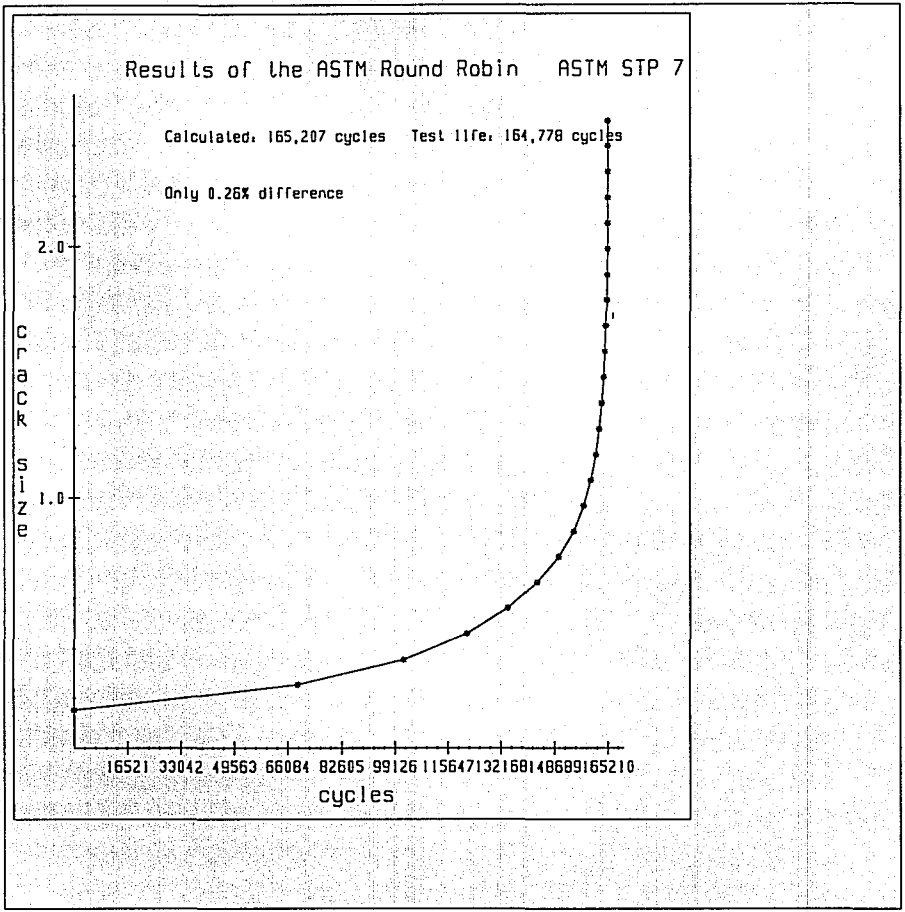
MUESTRA DE LA SALIDA PARA EL MODELO DE WILLENBORG



MUESTRA DEL MODELO DE BARSOM EN LA PANTALLA DE FRANC



B.1 ESPECTRO DE CARGA DEL EXPERIMENTO LLEVADO A CABO POR EL GRUPO DE A.S.T.M



B.2 RESULTADOS DEL MODELO DE BARSOM DONDE SE MUESTRA LA EXCELENTE CORRELACION CONTRA LA VIDA UTIL DEL EXPERIMENTO ANTERIOR.