



20
2es
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ARAGON"

COORDINACION DE INGENIERIA

VALIDACION DE TECNICAS NUMERICAS PARA EL
ANALISIS DE ESFUERZOS POR MEDIO DE
METODOS EXPERIMENTALES

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO MECANICO ELECTRICO

P R E S E N T A

RAFAEL TRUJILLO URIBE

SAN JUAN DE ARAGON; EDO. DE MEX.

FEBRERO 1991



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

NOMENCLATURA

INTRODUCCION	1
CAPITULO 1 CONSIDERACIONES DEL ANALISIS.	4
1.1 PRINCIPIO DE SUPERPOSICION, 7	
1.2 TEOREMA DE MAXWELL-BETTI, 8	
1.3 PRINCIPIO DE TRABAJO VIRTUAL, 9	
CAPITULO 2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA ESFUERZOS.	11
2.1 FUERZAS DE CUERPO Y FUERZAS DE SUPERFICIE, 11	
2.2 DEFINICION DE ESFUERZO, 12	
2.3 TENSOR ESFUERZO, 14	
2.4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO, 15	
CAPITULO 3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS.	18
3.1 DESPLAZAMIENTO Y DEFORMACION, 18	
3.2 TENSOR DEFORMACION, 26	
3.3 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACION, 27	
CAPITULO 4 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.	30
CAPITULO 5 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA DESPLAZAMIENTOS.	32
CAPITULO 6 CRITERIOS DE FLUENCIA.	34
6.1 TRANSFORMACION DE ESFUERZOS PLANOS, 34	
6.2 ESFUERZOS Y DIRECCIONES PRINCIPALES, 36	
6.3 ESFUERZO CORTANTE MAXIMO, 39	
6.4 CONDICION DE FLUENCIA DE TRESCA, 40	
6.5 CONDICION DE FLUENCIA DE VON MISES, 41	

CAPITULO 7	MEDIDORES DE DEFORMACION STRAIN-GAGES.	44
7.1	STRAIN GAGE DE RESISTENCIA ELECTRICA, 45	
7.2	PARAMETROS QUE INFLUYEN EN EL COMPORTAMIENTO Y SELECCION DE STRAIN GAGES, 46	
7.3	MONTAJE DE STRAIN GAGES, 48	
7.3.1	PREPARACION DE SUPERFICIES, 48	
7.3.2	TRAZO DE EJES DE REFERENCIA, 49	
7.3.3	TECNICA DE INSTALACION DE STRAIN GAGES, 49	
7.3.4	INSTALACION DE LOS CABLES, 55	
7.3.5	VERIFICACION DE MONTAJE, 56	
7.4	INTERPRETACION DE LA LECTURA OHMICA, 56	
7.5	EFFECTOS DE LA TEMPERATURA, 57	
7.6	NIVEL OPTIMO DE EXCITACION A UN STRAIN GAGE, 58	
7.6.1	CALCULO DEL NIVEL MAXIMO DE EXCITACION, 59	
7.7	ROSETAS DE DEFORMACION, 60	
CAPITULO 8	DESCRIPCION DEL MODELO EXPERIMENTAL.	62
CAPITULO 9	DESCRIPCION DEL METODO NUMERICO.	70
9.1	METODO DEL ELEMENTO FINITO, 70	
9.2	PROGRAMAS PARA EL ANALISIS DE ESFUERZOS, 71	
CAPITULO 10	ANALISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSION.	76
10.1	ANALISIS DE RESULTADOS, 76	
10.2	CONCLUSION, 84	
10.3	RECOMENDACIONES, 84	
REFERENCIAS		86

APENDICES

A	TEORIA DEL PUENTE DE WHEATSTONE.	88
B	POTENCIAS DE DISIPACION TERMICA.	92
C	ARCHIVOS DE DATOS.	93
C.1	PROGRAMA GAMEB-3, 93	
C.2	PROGRAMA TRISTAT-3, 98	
D	ARCHIVOS DE RESULTADOS TRISOUT. VIG .	106

NOMENCLATURA

F, P, Q,	Fuerzas puntuales.
f	Fuerza de superficie.
X, Y, Z,	Fuerzas de cuerpo por unidad de volumen.
f	Fuerza interna.
σ	Esfuerzo normal.
$\sigma_{1,2,3}$	Esfuerzos principales.
τ	Esfuerzo cortante.
E	Módulo de elasticidad.
G	Módulo de elasticidad al corte.
k	Módulo de elasticidad volumétrico.
u, v, w,	Componentes de desplazamiento.
U, δ	Vector o matriz desplazamiento.
∇^2	Operador laplaciano.
F	Vector fuerza de cuerpo.
ν	Relación de Poisson.
ϵ	Deformación lineal.
γ	Deformación angular.
θ	Angulo.
Ud	Energía de deformación.
Rg	Resistencia de strain gage.
ΔRg	Incrementos de resistencia.
Sg	Factor gage.
K	Matriz de rigidez.
A _g	Area activa gage.
λ	Constante Lamé's.
σ_{yp}	Esfuerzo de fluencia.
θ_1	Angulo del plano principal de esfuerzos normales.
θ_2	Angulo del plano principal del cortante.
σ_L	Esfuerzo límite rango elástico lineal.
W	Trabajo.
R	Resistencia eléctrica.
V	Voltaje.

INTRODUCCION

En el diseño mecánico de elementos de máquinas o componentes estructurales, es de suma importancia tener el mayor conocimiento posible del estado de esfuerzos a los que será sometido un elemento y así dar las dimensiones y material adecuado para garantizar un diseño económico y seguro.

Cuando se trata de un elemento de forma regular o amparado por un código, el cálculo es simplificado por modelos matemáticos que hasta cierto grado gobiernan la respuesta del componente a diseñar. Pero, cuando se desea estudiar o diseñar un elemento cuya configuración no permite la aplicación de los métodos analíticos conocidos; entonces, es necesario un estudio más profundo que implica de acuerdo con la teoría de elasticidad, encontrar la solución de 15 ecuaciones: tres que definen el equilibrio del cuerpo, seis que relacionan las deformaciones con los desplazamientos y seis que relacionan los esfuerzos con las deformaciones. El resolver estas 15 ecuaciones significa encontrar la solución o modelo matemático que describe al modelo físico en estudio. Anteriormente existían 3 formas de aproximarse a la solución:

- 1 -Resolviendo el sistema de ecuaciones, para casos de análisis de esfuerzos en una dirección (uniaxial).
- 2 -Proponiendo una solución y verificar si cumple con dichas ecuaciones; lo cual resulta solo en problemas sencillos y con una amplia intuición y experiencia por parte del analista.
- 3 -Por análisis experimental de esfuerzos; para lo cual es necesario la manufactura de modelos y un método experimental.

Actualmente, gracias al avance de los sistemas de cómputo, se cuenta con una alternativa más que es el método de análisis por elemento finito (M.E.F.), el cual conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elástico-lineales complejos en los cuales una solución analítica no era posible. Con esto, no se quiere decir que el método del elemento finito sea un método para el análisis de esfuerzos sino que es un medio de interpolación por medio del cual ecuaciones diferenciales muy complicadas pueden ser convertidas en un sistema de ecuaciones algebraicas que actualmente resultan mucho más sencillas de resolver. Así el método del elemento finito tiene aplicaciones muy variadas una de las cuales es el análisis de esfuerzos.

Ahora la cuestión es que tan exacto resulta este método del elemento finito como medio para el análisis de esfuerzos en estructuras. En este trabajo, se presenta un estudio de validación de un programa de cómputo diseñado para el análisis de esfuerzos en estructuras, y que está basado en el método de elemento finito. Para esto, los resultados arrojados por el programa son comparados con valores obtenidos de un modelo experimental, cuyo estado de esfuerzos en un punto es conocido por medio de un análisis experimental basado en la aplicación de extensímetros (strain gages) eléctricos.

El estudio se inicia con la recopilación de los principios básicos de la teoría de elasticidad asociados al análisis de esfuerzos por elemento finito, esto en los primeros seis capítulos.

En el capítulo 7 es desarrollado el concepto de strain gage o extensímetro eléctrico, así como los criterios para su selección y aplicación como método experimental para el análisis de esfuerzos.

En el capítulo 8 son descritas las características del modelo a emplear para el análisis experimental. El modelo sobre

el que se trabaja es el de una viga empotrada sometida a flexión por la aplicación, en su extremo libre, de una fuerza aproximadamente puntual.

En el capítulo 9 son descritos los programas GAMEB-3 y TRISTAT-3 elaborados para el análisis de esfuerzos en estructuras tridimensional. Es mostrado el desarrollo del archivo de datos que describe al modelo físico creado en la etapa experimental y el archivo de los resultados arrojados.

Por último en el capítulo 10 es presentado un análisis comparativo de los resultados obtenidos por los dos métodos y en base a esto una evaluación del método numérico (método del elemento finito).

CAPITULO 1

1. CONSIDERACIONES DEL ANALISIS

El ingeniero en su afán de estudiar los esfuerzos que se manifiestan en el interior de sólidos, así como las deformaciones o flujos de material y las relaciones mutuas entre éstos, sugiere que dichos materiales pueden idealizarse como medios continuos, carentes de huecos o separaciones entre sus partículas, aceptando además, que dichos medios son también *isotrópicos* esto es, carente de direcciones *preferenciales* en sus propiedades mecánicas, cuyas deformaciones deben poder preverse sin necesidad de considerar el movimiento de cada una de las partículas que lo componen.

Además, se tiene conocimiento de que un metal a temperatura constante, al cual se le aplican cargas en incrementos paulativos, presenta un comportamiento *esfuerzo-deformación* en general, como el mostrado en la *figura 1.1*. El tramo rectilíneo OA define el *rango elástico lineal* en donde se puede decir que la relación entre esfuerzo y deformación es proporcional. Es decir, si aumenta en forma paulatina las cargas de 0 a A dentro del rango elástico lineal, Y después se reducen hasta desaparecer siempre seguirá el mismo camino OA durante el ascenso y descenso.

El punto A es definido como el *límite elástico lineal* o *límite de proporcionalidad* del material, y la mayoría de las fórmulas usadas en mecánica de sólidos se limitan al comportamiento del material en este intervalo de esfuerzos 0- σ_L .

En el tramo AB se presenta un *comportamiento elástico no lineal*. En este rango se sigue presentando recuperación de la forma original del material, pero ya la relación esfuerzo

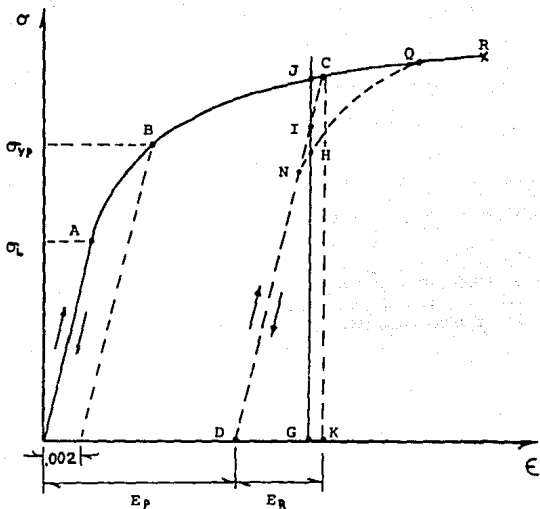


figura 1.1 Diagrama esfuerzo-deformación

deformación deja de ser proporcional y por lo tanto las leyes y principios que aplican para el rango DA dejan de ser validos en AB. El esfuerzo σ_{vp} que corresponde al punto B es conocido como *esfuerzo de fluencia* y marca el limite inferior del *comportamiento plástico*, mostrado en la figura 1.1 por el tramo curvilíneo BR, en donde incrementos muy pequeños ocasionan grandes deformaciones de tipo permanente. Este comportamiento termina en una *fractura* marcada por el punto R. En la práctica, el punto B se fija, por convenio, marcando una paralela al tramo elástico DA, en una abscisa de 0.002.

Características del rango plástico pueden ser observadas en la figura 1.1 (tramo BR). Si en la aplicación paulatina de carga se llega al punto C, y en seguida se retira rápidamente, seguirá una línea de descarga CD aproximadamente paralela a OA. Así el punto D muestra una *deformación permanente* $E_p = OD$, y el tramo DK una *deformación recuperada* E_r . Si es aplicado de nuevo el sistema de cargas se conseguirá un comportamiento elástico lineal hasta N, pero después tomará la trayectoria NQ, alcanzando en Q la curva original. Así, a una misma deformación OG pueden corresponder tres esfuerzos diferentes GJ, GI, GH, según la historia previa de las cargas y descargas en el material. Esto demuestra que una deformación plástica ocasiona cambios en las propiedades del material.

Estas idealizaciones son en la actualidad justificadas debido a que ofrecen un camino más viable para el enfoque matemático de los problemas de deformación de sólidos y fluidos; sin embargo, no dejan de constituir un modelo que sólo es aceptable desde un punto de vista macroscópico, pero que permite en la mayoría de los casos predecir el comportamiento del sólido con exactitud suficiente para la práctica.

Bajo las consideraciones anteriores se proponen una serie de teoremas y principios que han sido útiles para la deducción de modelos matemáticos, que describen el comportamiento de los cuerpos en el rango elástico lineal, por lo que sólo se aplican a sistemas lineales, que para nuestro caso representa que los desplazamientos sean funciones lineales de las cargas. Algunos de éstos se estudiarán en este capítulo como son los principios de superposición y trabajo virtual así como el teorema de Maxwell-Betti que son un apoyo importante en este estudio.

11 PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Este principio expresa, que los esfuerzos y desplazamientos internos en un cuerpo elástico son independientes del orden de aplicación del sistema de fuerzas exteriores. Es decir, si un cuerpo se encuentra sometido a un sistema de cargas se pueden determinar los esfuerzos, desplazamientos y deformaciones de cada fuerza por separado y sumar algebraicamente, los resultados correspondientes a cada fuerza, obteniendo así, el resultado de la acción de todas ellas (por ejemplo ver figura 1.2).

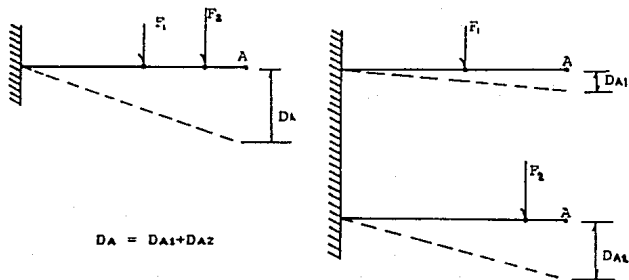


figura 1.2 Principio de superposición.

Gracias a este principio se pueden obtener *coeficientes de influencia*, para construir una matriz de flexibilidades o matriz de rigideces que gobierne el comportamiento elástico de un objeto.

12 TEOREMA DE MAXWELL-BETTI

Este teorema fue descrito por James Clerk Maxwell en 1864. El caso más general fue demostrado por E. Betti en 1872. Y este dice que:

Si a un cuerpo se le aplica un sistema de fuerzas P_n en los puntos "n", éstos producirán en esos puntos unos desplazamientos δ_{Pn} . Y si manteniendo estas fuerzas P_n se aplica otro sistema de fuerzas Q_m en otros puntos "m", éstos se desplazarán δ_{Qm} , pero además, la fuerza Q_m producirá desplazamientos δ_{Qn} , en los puntos donde están aplicadas las fuerzas P_n .

Lo anterior se puede aclarar observando el siguiente esquema figura 1.3, de donde haciendo uso del principio de superposición y calculando el trabajo realizado por dichas fuerzas se determina la simetría de la matriz de flexibilidades, Esto es el trabajo

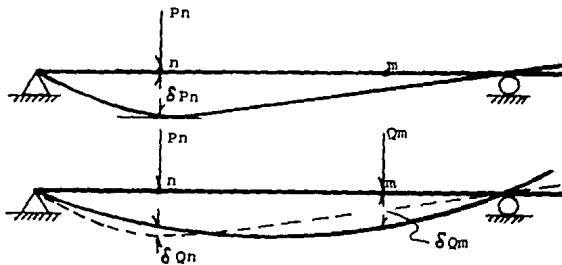


figura 1.3 Teorema de Maxwell-Betti.

realizado por las fuerzas P_n y Q_m será:

$$W_{PQ} = \sum P_n \delta P_n + \sum Q_m \delta Q_m + \sum P_n \delta Q_n \quad (1.1)$$

por otro lado, si se aplica primero el sistema de fuerzas Q_m y después el sistema P_n , el resultado será:

$$W_{QP} = \sum Q_m \delta Q_m + \sum P_n \delta P_n + \sum Q_m \delta P_m \quad (1.2)$$

igualando ambos trabajos, se obtiene que:

$$\sum P_n \delta Q_n = \sum Q_m \delta P_m \quad (1.3)$$

Luego, considerando las cargas unitarias la expresión queda

$$\delta Q_n = \delta P_m \quad (1.4)$$

lo cual se acostumbra escribir como:

$$f_{ij} = f_{ji} \quad (1.5)$$

que representan las deformaciones producidas por cargas unitarias (coeficientes de influencia), quedando con esto demostrado la simetría de la matriz de flexibilidades

13 PRINCIPIO DE TRABAJO VIRTUAL

En la solución de problemas de elasticidad es ventajoso algunas veces el uso del principio de trabajo virtual. En el caso de una partícula, este principio dice:

Si una partícula está en equilibrio, el trabajo total de todas las fuerzas actuantes en ella, se transforma en un desplazamiento virtual.

Durante este proceso las fuerzas reales que actúan en el sistema se mueven recorriendo desplazamientos imaginarios o virtuales. De manera alternativa, fuerzas también imaginarias o virtuales en equilibrio con el sistema dado pueden sufrir desplazamientos reales cinemáticamente admisibles.

Para aplicar este principio recordemos la *primera ley de la Termodinámica* o de la conservación de la energía que nos dice que todo el trabajo realizado sobre un sistema se transforma en un cambio de energía del mismo. Esta ley aplicada a un cuerpo en donde no hay pérdidas ni generación de calor y donde las fuerzas son casi *cuasiestáticas*, es decir, que son aplicadas tan lentamente que no provocan variación de la energía cinética, nos indica que el trabajo realizado por la fuerza externa es igual al realizado por las fuerzas internas, esto es:

$$W_e = W_i \quad (1.6)$$

Donde W_i será entonces el cambio de energía sufrido por el cuerpo y estará dado por*:

$$W_i = 1/2 \int_V (\sigma_{ij}^T \epsilon_{ij} - U^T F) dv \quad (1.7)$$

mientras que W_e representa al trabajo representado por las fuerzas de superficie,

$$W_e = 1/2 \int_s U^T f ds \quad (1.8)$$

Donde:

- σ - representa la matriz esfuerzo.
- ϵ - matriz deformación unitaria.
- U - vector de desplazamiento.
- F - vector fuerzas de cuerpo.
- f - vector fuerzas de superficie.

* apuntes del curso impartido en el Salvador, referencia 5

CAPITULO 2

2. ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA ESFUERZOS

2.1 FUERZAS DE CUERPO Y FUERZAS DE SUPERFICIE

Las fuerzas que actúan en un medio continuo se clasifican en fuerzas de cuerpo (o de masa) y fuerzas de superficie. Las primeras están distribuidas de manera continua en todo el medio, las segundas solamente sobre ciertas superficies.

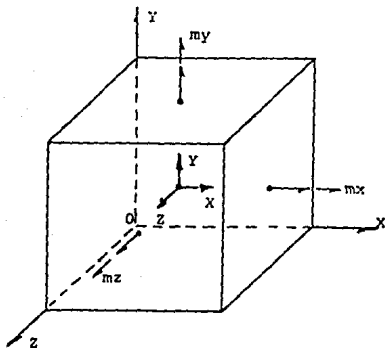


figura 2.1 Fuerzas de cuerpo y de superficie actuando en el elemento diferencial.

La fuerza de cuerpo más importante es el peso del material, y es una propiedad extensiva porque depende de la masa del cuerpo. En el estudio de medios continuos conviene expresar esta propiedad como intensiva, es decir, referida a la unidad de volumen del material, y es representada por el vector de primer orden $(F)^T = \{x \ y \ z\}$, y el vector de momentos de cuerpo por unidad de volumen $(M)^T = \{m_x \ m_y \ m_z\}$ actuando en el centroide de un elemento diferencial como se indica en la figura 2.1

2.2 DEFINICION DE ESFUERZO

Consideremos un sólido de forma cualquiera en el que actúan una serie de fuerzas externas F . Por el método de secciones dividamos el cuerpo en dos y tomemos una parte, como se muestra en la figura 2.2(a). En la superficie de corte S se encontrará fuerzas internas f de magnitudes y direcciones variables, de naturaleza vectorial y que mantienen el equilibrio del cuerpo. Imaginemos que la resultante de todas las fuerzas exteriores pasa por el centroide de la sección considerada, y que por lo tanto se obtiene una distribución uniforme de las fuerzas internas f , figura 2.2(b), de modo que a una pequeña área parcial Δs corresponda una pequeña Δf ; se entiende por esfuerzo τ en un punto P de la superficie al límite

$$\tau = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{df}{ds} \quad (2.1)$$

calculado de modo que Δs vaya reduciendo su tamaño, conservando siempre al punto P en su interior.

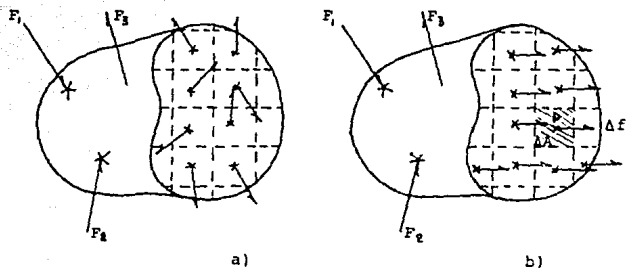


figura 2.2 Fuerzas internas de equilibrio
 a) de magnitudes y direcciones variables
 b) cuando la resultante pasa por el centroide de la sección.

En general, el sistema de fuerzas internas f equivale a una fuerza y un par resultantes que, por conveniencia, se descomponen según la normal y la tangente a la superficie de corte, como se muestra en la figura 2.3.

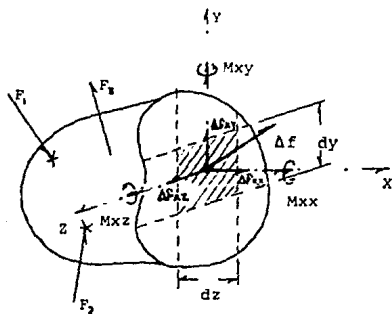


figura 2.3 Descomposición de fuerzas internas

El primer subíndice indica el plano sobre el cual actúan las componentes, y el segundo la dirección de cada una de ellas. Entonces, de acuerdo a la ecuación (2.1), los esfuerzos actuando en el plano perpendicular a X serán:

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta s_x \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{xx}}{\Delta s_x} ; \tau_{xy} = \lim_{\Delta s_y \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{xy}}{\Delta s_y} ; \tau_{xz} = \lim_{\Delta s_z \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{xz}}{\Delta s_z} \quad (2.2)$$

En donde:

τ_{xx} - Representa el esfuerzo normal en el punto P y puede ser de tensión (+) y compresión (-). Se acostumbra designar en general con la letra σ en vez de usar un doble subíndice en τ_{xx} .

τ_{xy}, τ_{xz} - Representan los esfuerzos cortantes o tangenciales y se designan por τ con sus respectivos subíndices.

2.3 TENSOR ESFUERZO

Si, además del plano de corte que se hizo en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.3, se pasa a través del cuerpo otro plano a una distancia infinitesimal y paralelo al primero, y otros dos pares de planos adicionales se pasan normalmente al primer par, un cubo de dimensiones infinitesimales será aislado del cuerpo. Tal cubo se muestra en la figura 2.4.

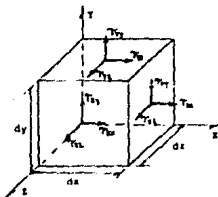


figura 2.4 Esfuerzos actuando sobre las caras del elemento diferencial.

Un examen semejante al que se hizo para obtener las relaciones (2.2), nos proporciona los esfuerzos actuando en el plano perpendicular a Y

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta s_y \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{yx}}{\Delta s_y} ; \tau_{yy} = \lim_{\Delta s_y \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{yy}}{\Delta s_y} ; \tau_{yz} = \lim_{\Delta s_y \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{yz}}{\Delta s_y} \quad (2.3)$$

y los esfuerzos actuando sobre un plano perpendicular Z son:

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta s_z \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{zx}}{\Delta s_z} ; \tau_{zy} = \lim_{\Delta s_z \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{zy}}{\Delta s_z} ; \tau_{zz} = \lim_{\Delta s_z \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{zz}}{\Delta s_z} \quad (2.4)$$

Las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) nos muestran que existen tres esfuerzos normales: $\tau_{xx} \equiv \sigma_x$, $\tau_{yy} \equiv \sigma_y$, $\tau_{zz} \equiv \sigma_z$, y seis esfuerzos cortantes: τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz} . El arreglo matricial será:

$$[\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Esta es la representación del *tensor esfuerzo*. Es un tensor de segundo orden referido al espacio Euclidiano tridimensional. Es simétrico, y por lo tanto los subíndices para los esfuerzos cortantes son conmutativos, esto es

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.6)$$

2.4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO

Debido a que el cuerpo considerado se encuentra en equilibrio, el elemento infinitesimal debe también estar en equilibrio.

Las seis ecuaciones de equilibrio del elemento mostrado en la *figura 2.5* son:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = \Sigma M_x = \Sigma M_y = \Sigma M_z = 0 \quad (2.7)$$

Obsérvese que en la figura 2.5, se toma en cuenta la posibilidad de un incremento en los esfuerzos de una cara del elemento a otra, con la expresión por ejemplo $(\partial \sigma_x / \partial x) dx$, para la dirección X.

Las fuerzas de inercia o de cuerpo, como las debidas al peso, se designarán por X, Y y Z, y están referidas a la unidad de volumen del material.

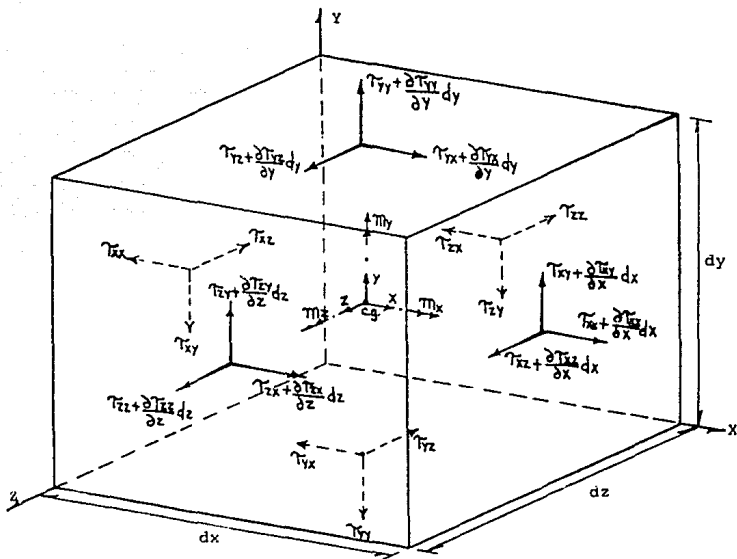


figura 2.5 Equilibrio del elemento diferencial.

de $\Sigma F_x = 0 \rightarrow +$, se tiene

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{xx} dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

efectuando operaciones algebraicas y con un análisis similar para $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$, se obtiene

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2.9b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + Z = 0 \quad (2.9c)$$

De $\Sigma M_x = 0$, considerando el eje de momentos paralelo al eje X y a través del centroide del elemento infinitesimal y despreciando los diferenciales de segundo orden, se obtiene bajo la convención de signos de la figura 2.5 lo siguiente

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dx dy \frac{dz}{2} \\ & - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} + m_x dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

efectuando operaciones algebraicas. Y en forma similar para $\Sigma M_y = 0$ y $\Sigma M_z = 0$, se obtiene.

$$\begin{aligned} \tau_{yz} - \tau_{zy} + m_x &= 0 \\ \tau_{zx} - \tau_{xz} + m_y &= 0 \\ \tau_{xy} - \tau_{yx} + m_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Lo anterior nos indica que cuando el eje para momentos pasa por el centroide $m_x = m_y = m_z = 0$ lo que implica que $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ y $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Las ecuaciones (2.9) y (2.11) son las seis ecuaciones de equilibrio para esfuerzos en coordenadas rectangulares.

CAPITULO 3

3. ECUACIONES CONSTITUTIVAS

La mecánica de los sólidos rígidos enfoca su atención principalmente a los cambios de posición que sufre un cuerpo por la aplicación de una fuerza en éste. En comparación la mecánica del medio continuo o mecánica de los sólidos deformables tiene un fin más profundo, ya que pone especial interés en las *deformaciones* que sufre el cuerpo debido a las fuerzas aplicadas, observandolo no solo como un cambio de forma externa sino desde un punto de vista de cambio de posición de las partículas internas y así establecer las relaciones entre las cargas aplicadas y sus efectos en el interior, considerando que las deformaciones por pequeñas que sean, tienen gran interés.

3.1 DESPLAZAMIENTO Y DEFORMACION

Toda masa no rígida afectada por la aplicación de un sistema de fuerzas sufre en su interior el movimiento relativo de sus partículas a la vez que tiene un cambio de forma. Es posible referir el desplazamiento de un punto en particular con el cambio de forma o deformación sufrida, para esto se considera que el vector desplazamiento de la partícula sea resuelto sobre los ejes coordenados X , Y y Z , en componentes de desplazamiento, u , v y w , respectivamente, y además para facilitar el estudio y medición de la deformación es necesario descomponerla idealmente, en la misma forma que se hizo con los esfuerzos, esto

es, en deformaciones normales o longitudinales ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z y deformaciones de corte o angulares γ_{xy} , γ_{yz} y γ_{zx} .

Una deformación longitudinal o lineal es aquella que se presenta, como el cambio en longitud de un segmento de línea, ocasionando con ésto cambios en volumen del objeto. Su definición está dada por el cosiente del cambio de longitud de un segmento de línea entre su longitud inicial y se considera positivo si la longitud crece y negativa si se acorta.

$$\epsilon = \frac{l_f - l_i}{l_i} \quad (3.1)$$

Una deformación angular, como lo indica su nombre es aquella que provoca cambios de ángulo y por lo tanto variaciones en la forma geométrica de la masa y se define como $\text{sen } \gamma$. Sin embargo, se hace la consideración de que estas deformaciones son infinitesimales (configuración original prácticamente igual a configuración deformada) lo cual, permite aplicar el principio de superposición y considerar que el seno de la deformación es igual a dicha deformación. Dicho de otra forma, una deformación angular es el cambio angular entre dos segmentos de línea que originalmente se encontraban perpendiculares. Se considera positiva si el ángulo se cierra y negativa si sucede lo contrario.

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (3.2)$$

donde: θ es el ángulo final entre los dos segmentos que forman el vertice.

Para explicar la relación de los desplazamientos con las deformaciones consideremos el pequeño cubo diferencial visto en el capítulo anterior el cual forma parte de una masa antes y después de ser deformada como se muestra en la figura 3.1; el punto A es movido a través de una distancia u en la dirección X, v en la dirección Y, y w en la dirección Z. La otra esquina, punto B, es también desplazado y en general, por cantidades que serán distintas a las del punto A.

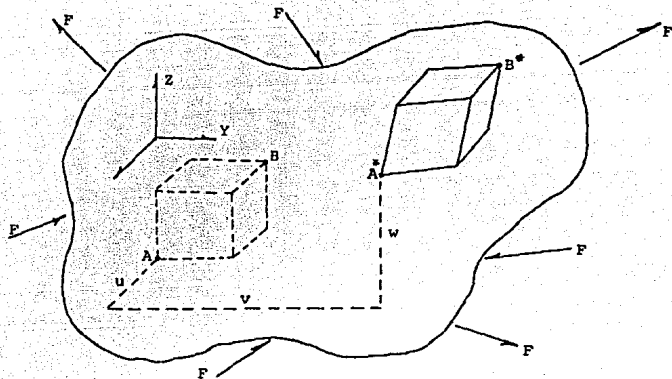


figura 3.1 Elemento diferencial como parte integral de una masa deformada por las acción de fuerzas externas.

Por lo anterior, es razonable considerar a las componentes de desplazamiento u , v y w como funciones continuas de las coordenadas X , Y y Z , con derivadas definidas hasta el $(n+1)$ ésimo orden.

De acuerdo con las *series de Taylor* este tipo de funciones puede ser definida para cierto rango en el cual converge (esto es, tiende a tomar el valor de cero) como una serie de potencias de incrementos $(x-a)$, ésto es

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \dots$$

Aplicando esta definición a las funciones u , v y w considerandolas como $f(a)$ y Δx , Δy , y Δz respectivamente como los incrementos o decrementos $(x-a)$, tenemos que u^* , v^* y w^*

asociados con el punto B^* , son

$$u^* = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \dots \quad (3.3)$$

$$v^* = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z + \dots$$

$$w^* = w + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z + \dots$$

Como se puede observar los términos de orden superior tal como $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$, $(\Delta z)^2$, son despreciados ya que se considera que los valores de los incrementos son pequeños y que elevados a una potencia son aun más pequeños, por lo que se pueden despreciar de la serie.

Ahora, si consideramos el segmento de línea formado por \overline{AB} inicialmente paralela al eje X como se muestra en la figura 3.2, entonces Y y Z permanecen constantes a lo largo de la deformación A^*B^* por lo que los desplazamientos que sufre el punto B^* quedan definidos, como:

$$u^* = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \quad v^* = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \quad w^* = w + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x \quad (3.4)$$

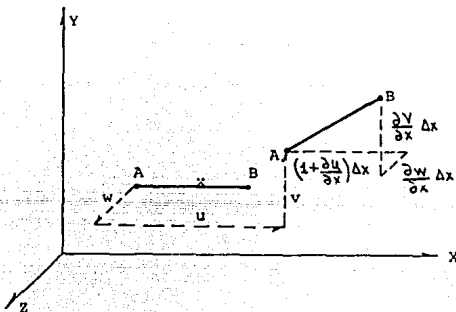


figura 3.2 Definición de deformación longitudinal.

De acuerdo a la figura entonces la deformación de tipo lineal queda definida por la magnitud de $\Delta x'$ o A^*B^* como sigue:

$$(\Delta x')^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \right]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Delta x \right)^2 \quad (3.5)$$

Considerando de la definición de deformación longitudinal, que

$$\epsilon = \frac{\ell' - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} \quad \longrightarrow \quad \Delta x' = (1 + \epsilon_{xx}) \Delta x \quad (3.6)$$

Si elevamos al cuadrado la expresión (3.6) y la sustituimos en la ecuación (3.5), obtenemos

$$(1 + \epsilon_{xx})^2 (\Delta x)^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \right]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Delta x \right)^2$$

desarrollando los binomios, obtenemos

$$(\epsilon_{xx}^2 + 2\epsilon_{xx} + 1) (\Delta x)^2 = \left[1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] (\Delta x)^2$$

o

$$\epsilon_{xx}^2 + 2\epsilon_{xx} + 1 = 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

simplificando

$$1/2 \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + 1/2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.7a)$$

De manera similar considerando segmentos de línea originalmente orientados paralelo a los ejes Y y Z conduce a

$$1/2 \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + 1/2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.7b)$$

$$1/2 \epsilon_{zz}^2 + \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + 1/2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.7c)$$

Las componentes de deformación angular podemos también relacionarlas con los desplazamientos considerando cambios sufridos en el ángulo recto de los bordes del pequeño cubo

durante la deformación. Por ejemplo, consideremos los segmentos de línea \overline{AB} y \overline{AC} , de la figura 3.3.

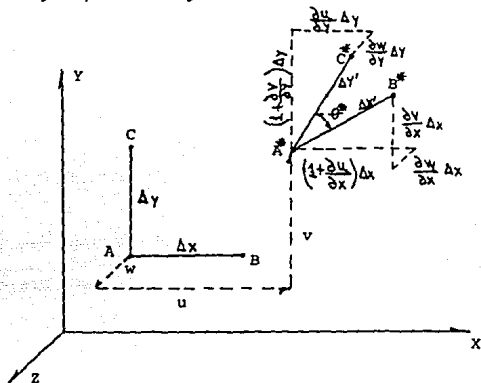


figura 3.3 Definición de deformación angular.

De acuerdo con la teoría de la geometría analítica un ángulo entre dos segmentos de línea como se muestra en la figura 3.4 queda definido por:

$$\cos \theta = \cos A_1 \cos A_2 + \cos B_1 \cos B_2 + \cos C_1 \cos C_2$$

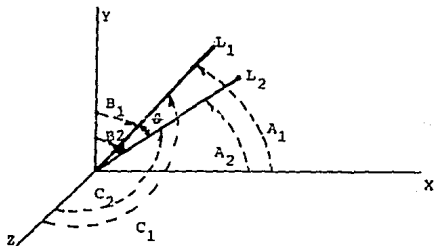


figura 3.4 Definición de $\cos \theta$ según la geometría analítica.

Por lo tanto, el ángulo θ° entre $A^{\circ}B^{\circ}$ y $A^{\circ}C^{\circ}$ en el estado deformado puede ser expresado como sigue

$$\cos \theta^{\circ} = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta x'} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta y'} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta x'} \right) \left[\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\Delta y}{\Delta y'} \right] + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta x'} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta y'} \right) \right] \quad (3.8)$$

De la definición de deformación angular ecuación (3.2) se puede afirmar que

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta^{\circ} \longrightarrow \text{Sen } \gamma_{xy} = \text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta^{\circ} \right) = \text{Cos } \theta^{\circ} \quad (3.9)$$

Sustituyendo la ecuación (3.9) en la ecuación (3.8) y simplificando obtenemos

$$\text{Sen } \gamma_{xy} = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \left[\frac{\Delta x}{\Delta x'} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta y'} \right] \quad (3.10)$$

regresando a la ecuación (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta x' &= (1 + \epsilon_{xx}) \Delta x \longrightarrow \frac{1}{(1 + \epsilon_{xx})} = \frac{\Delta x}{\Delta x'} \\ \Delta y' &= (1 + \epsilon_{yy}) \Delta y \longrightarrow \frac{1}{(1 + \epsilon_{yy})} = \frac{\Delta y}{\Delta y'} \end{aligned} \quad (3.11)$$

por lo tanto la ecuación (3.10) se puede expresar como

$$\gamma_{xy} = \arcsen \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \epsilon_{xx})(1 + \epsilon_{yy})} \quad (3.12a)$$

De manera similar considerando dos segmentos de línea originalmente orientados paralelo a los ejes Y y Z y los ejes Z y

X. Tenemos

$$\gamma_{yz} = \arcsen \frac{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}}{(1 + \epsilon_{yy})(1 + \epsilon_{zz})} \quad (3.12b)$$

$$\gamma_{zx} = \arcsen \frac{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x}}{(1 + \epsilon_{zz})(1 + \epsilon_{xx})} \quad (3.12c)$$

En el desarrollo de las ecuaciones (3.7) y (3.12) no se impusieron limitaciones en cuanto al tamaño de la deformación, por lo tanto son aplicables a deformaciones grandes. Como un caso particular de (3.7) y (3.12), para deformaciones muy pequeñas donde se cumple la proporcionalidad *esfuerzo-deformación*, los términos de segundo orden son despreciados, ya que se puede asumir que los productos y cuadrados de los gradientes de desplazamiento serán pequeños con respecto a el desplazamiento total. Además podemos suponer para las expresiones (3.12) que el *arcsen* de relaciones pequeñas es igual a las propias relaciones. Con estas consideraciones las ecuaciones (3.7) y (3.12) se reducen a las ecuaciones desplazamiento-deformación tan conocidas en la teoría de elasticidad

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.13a)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.13b)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.13c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.13d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.13e)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.13f)$$

3.2 TENSOR DEFORMACION

Las deformaciones normales y angulares representan en conjunto el *tensor deformación*, el cual guarda cierta analogía con el tensor esfuerzo, ya estudiado. Sin embargo, antes de formar el tensor deformación es necesario hacer la observación de que la deformación angular encontrada esta repartida como se muestra en la *figura 3.5*.

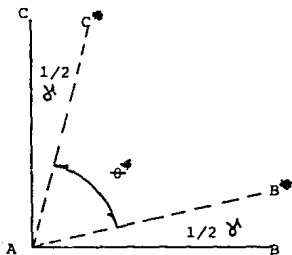


figura 3.5 Consideración de la deformación angular

Por lo tanto, con el fin de obtener un tensor entidad que obedezca a ciertas leyes de transformación se considera que

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{yx}}{2} \\
 \epsilon_{yz} &= \epsilon_{zy} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\gamma_{zy}}{2} \\
 \epsilon_{zx} &= \epsilon_{xz} = \frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{\gamma_{xz}}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

quedando el tensor deformación en forma de matriz como sigue:

$$\begin{pmatrix}
 \epsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\
 \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\
 \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_{zz}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\
 \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\
 \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz}
 \end{pmatrix}
 \tag{3.15}$$

3.3 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACION

Hasta este momento, se han encontrado por separado que existen seis componentes de esfuerzo y también seis componentes de deformación. Numerosas observaciones del comportamiento de los sólidos demuestran que, en la inmensa mayoría de los casos, *los desplazamientos, dentro de ciertos límites, son proporcionales a las cargas que actúan.*

Esta ley fue expresada por primera vez en el año 1676 por Robert Hooke al afirmar: "*según es la fuerza así será la deformación*". Para aplicar esta ley, a las componentes de esfuerzo y deformación utilicemos el principio de superposición, relacionando cada una de las seis deformaciones con las componentes de esfuerzo, esto es en forma de matriz

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{xy} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Estas son las llamadas *Ecuaciones Constitutivas*, Eqs (3.16), y tienen como se observa 36 constantes $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{66}$. sin embargo, por consideraciones energéticas* estas se reducen a 21 independientes que se obtienen por métodos experimentales. El sistema de ecuaciones (3.16), es la expresión más general de la ley de Hooke aplicable a materiales *anisotrópicos* (materiales con distintas propiedades mecánicas en diferentes direcciones). Sin embargo, en ingeniería gran parte de los problemas son atacados considerando a los materiales como *isotrópicos homogéneos* (materiales que tienen las mismas propiedades en cualquier dirección). Para materiales de este tipo el número de constantes que le caracterizan son 5 conocidas como λ, G, E, ν y k de las

*I. S. Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity" (Nueva York: Mc Gray-Hill Book Company, 1956), pag. 61.

cuales dos son independientes, como E y ν usualmente. Bajo esta consideración el número de constantes es reducido prácticamente a dos ya que

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Donde:

E se llama módulo de Young en honor de Thomas Young, o *módulo de elasticidad*. Este relaciona el esfuerzo normal con su deformación lineal. E tiene las unidades de esfuerzo (fuerza/área). Para la mayoría de los aceros E suele ser de 28.4×10^6 a 29.8×10^6 PSI (196.1×10^9 a 205.9×10^9 KN/m²).

ν recibe el nombre de *relación de Poisson* en honor de S. D. Poisson, científico francés que la formuló en 1828. Este valor esta definido, por ejemplo para la deformación de tensión en la dirección X, como

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}}$$

El signo negativo indica la contracción del material en las direcciones Y y Z a medida que se alarga en la dirección X.

G se llama *módulo de elasticidad al corte* y tiene las mismas dimensiones que E.

λ se conoce por constante *Lame's* y es usada para simplificar, hablando matemáticamente, las relaciones esfuerzo-deformación (no tiene significado físico).

k es el módulo de elasticidad volumétrico y es usado principalmente para el cálculo de cambios de volumen en cuerpos sujetos a presión hidrostática.

así considerando

$$C_{11} = 1/E, \quad C_{12} = -\nu/E, \quad C_{44} = 1/(2G)$$

y además que $C_{11}=C_{22}=C_{33}$, $C_{12}=C_{13}=C_{23}$, $C_{44}=C_{55}=C_{66}$, y como ya se dijo $C_{12}=C_{21}$, $C_{13}=C_{31}$, $C_{23}=C_{32}$. Todas las otras constantes desaparecen. Estas simplificaciones que generalizan la relación sugerida por las ecuaciones (3.16) dan la llamada *ley de Hooke generalizada* (ecs. 3.17).

Luego:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (3.17a)$$

$$\epsilon_y = \nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (3.17b)$$

$$\epsilon_z = \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad (3.17c)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \quad (3.17d)$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G \quad (3.17e)$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx}/G \quad (3.17f)$$

CAPITULO 4

4. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Las ecuaciones de compatibilidad son el medio por el cual se asegura que las soluciones (funciones) encontradas que describen los estados de esfuerzos, deformación y desplazamientos en cualquier punto para un elemento en particular, son únicas y garantizan que el medio se mantendrá simplemente conexo (sin generación de huecos) durante la aplicación y retiro de cargas.

Las ecuaciones de compatibilidad en función de las deformaciones son:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} \quad (4.1b)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} \quad (4.1c)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \quad (4.1d)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \quad (4.1e)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \quad (4.1f)$$

El orden para derivarlas, se inicia recordando la ecuación (3.13c).

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Derivando γ_{xy} una vez con respecto a X y además con respecto a Y

tenemos

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad (4.2)$$

además tenemos que

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad (4.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.3) en la ecuación (4.2) tenemos

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

que es la establecida en la ecuación (4.1a) y por el mismo método las ecuaciones (4.1b) y (4.1c). La prueba de la ecuación (4.1d) es obtenida considerando las siguientes cuatro identidades

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} \quad (c)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} \quad (d)$$

Ahora formando $2(a) = (b) + (c) - (d)$ obtenemos

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (4.1d)$$

Las otras dos relaciones de compatibilidad pueden ser establecidas de igual manera.

Las ecuaciones de compatibilidad también se pueden encontrar desarrolladas en función de los esfuerzos o desplazamientos.

CAPITULO 5

5 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA DESPLAZAMIENTOS

Se han discutido cuatro conjuntos de ecuaciones, esto es, las ecuaciones de equilibrio para esfuerzos, las relaciones desplazamiento-deformación, las expresiones esfuerzo-deformación, y las ecuaciones de compatibilidad.

Pueden ser combinadas dos o más de estas ecuaciones, para formar nuevas relaciones que resulten más convenientes o aplicables a un problema específico. Por ejemplo tomando las seis ecuaciones desplazamiento-deformación [ecs.(3.13)] y sustituidas en las seis relaciones esfuerzo-deformación [ecs.(3.17)], se obtienen las seis ecuaciones esfuerzo-desplazamiento [ecs.(5.1)].

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \quad (5.1b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (5.1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (5.1d)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (5.1e)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (5.1f)$$

Ahora, si se toman las ecuaciones esfuerzo-desplazamiento [ecs.(5.1)] y se combinan con las ecuaciones de equilibrio para esfuerzos [ecs.(2.9)], son obtenidas las ecuaciones de equilibrio

para desplazamientos que pueden ser descritas como sigue:

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{G} X = 0 \quad (5.2a)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{G} Y = 0 \quad (5.2b)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{G} Z = 0 \quad (5.2c)$$

Donde ∇^2 es el operador de laplaciano.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.3)$$

y X, Y y Z representan las fuerzas de cuerpo que actúan en las direcciones X, Y y Z respectivamente. Lógicamente la solución de las ecuaciones (5.2) representa el campo de desplazamiento.

CAPITULO 6

6. CRITERIOS DE FLUENCIA

Las propiedades de los materiales se determinan, en general a partir de ensayos en los que las probetas son sujetas a *esfuerzo simple* bajo cargas estáticas o fluctuantes. Para aplicar estos datos a *campos biaxiales* o *triaxiales* es necesario tener conocimiento de la magnitud del esfuerzo máximo actuando sobre estos campos con el fin de predecir el comportamiento del material en condiciones de trabajo.

6.1 TRANSFORMACION DE ESFUERZOS PLANOS

Consideremos el pequeño cubo diferencial sometido a un estado de esfuerzo plano definido por σ_x , σ_y y τ_{xy} como se muestra en la *figura 6.1a*. La idea es determinar expresiones algebraicas en función de σ_x , σ_y , τ_{xy} y θ , que determinen el equivalente y nuevo estado de esfuerzos definido por $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ cuando el cubo es girado un ángulo θ con respecto al eje Z (*figura 6.1b*).

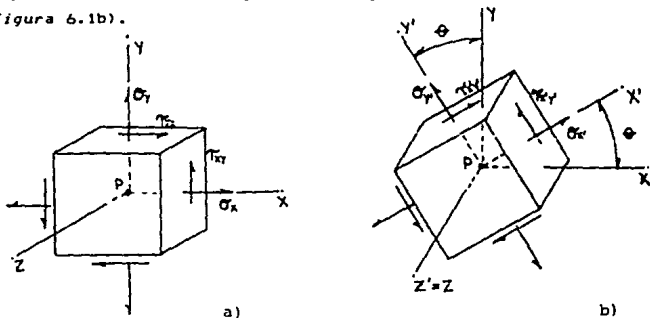


figura 6.1 Elemento diferencial girado un ángulo θ

Para facilitar el análisis consideremos del cubo diferencial un elemento prismático con caras perpendiculares a los ejes X,Y y X' como se observa en la figura 6.2a. Observemos que los esfuerzos son tensores de segundo rango y por lo tanto no aplican las leyes de la suma vectorial en éstos, por lo que es necesario multiplicarlos por sus respectivas áreas en que actúan para obtener fuerzas, las que se pueden sumar o restar vectorialmente.

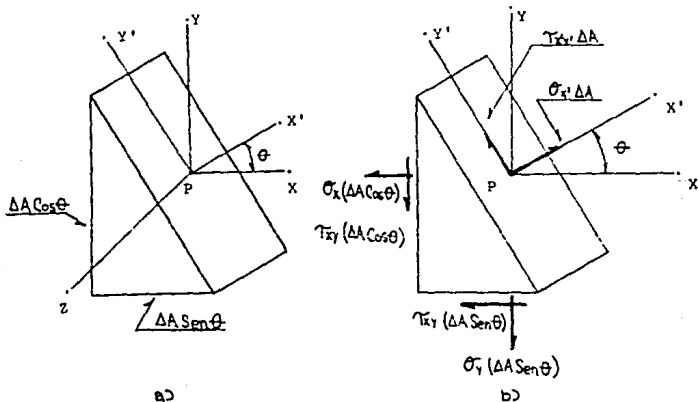


figura 6.2 Elementos para deducir las fórmulas de los esfuerzos en un plano inclinado.

Si se designa por ΔA el área de la cara oblicua, las áreas de las caras vertical y horizontal son respectivamente iguales a $\Delta A \cos \theta$ y $\Delta A \sin \theta$ quedando las fuerzas ejercidas en las tres caras como se muestra en la figura 6.2b.

Entonces de $\sum F_{x'} = 0$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (6.1)$$

y de $\sum F_y' = 0$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \quad (6.2)$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \quad (6.3)$$

y

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (6.4)$$

Entonces pueden escribirse las ecuaciones (6.1) y (6.2) como sigue:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (6.5)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6.6)$$

La expresión para el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ puede obtenerse reemplazando θ en la ecuación (6.5) por el ángulo $(\theta + 90^\circ)$, que forma el eje Y' con el eje X . Considerando que $\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta + 180^\circ) = -\operatorname{sen} 2\theta$, se tiene que

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (6.7)$$

6.2 ESFUERZOS Y DIRECCIONES PRINCIPALES

Para localizar el plano de un esfuerzo principal máximo o mínimo, la ecuación (6.5) se deriva con respecto a θ y la derivada se iguala a cero; esto es

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2\operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{2\tau_{xy} \cos 2\theta}{2 \sin 2\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

por lo tanto

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (6.8)$$

Donde θ_1 designa el ángulo que define el plano del esfuerzo normal máximo o mínimo. Dicha ecuación tiene dos raíces ya que la tangente de un ángulo en cuadrantes diametralmente opuestos es el mismo. Para distinguir las dos raíces se utilizará la notación con prima y bprima, como se puede ver en la figura 6.3.

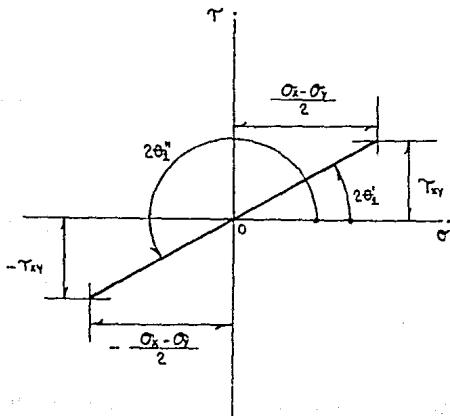


figura 6.3 Planos principales de esfuerzos.

Si el ángulo θ_1 encontrado con la ecuación (6.8) es sustituido en la ecuación (6.5) y consideramos de la figura 6.3 que:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{sen}2\theta_1' = -\text{sen}2\theta_1'' = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[1/2(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (6.9)$$

$$\text{cos}2\theta_1' = -\text{cos}2\theta_1'' = \frac{1/2(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[1/2(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

tenemos que

$$\sigma_x' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{cos}2\theta_1' + \tau_{xy} \text{sen}2\theta_1'$$

$$\sigma_x' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \left[\frac{1/2(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[1/2(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}} \right] + \tau_{xy} \left[\frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[1/2(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}} \right]$$

$$\sigma_x' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{([1/2(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2)^{1/2}}{([1/2(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2)^{1/2}}$$

$$\sigma_{x' \text{ max}} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.10)$$

donde se debe utilizar el signo positivo antes del radical para obtener σ_1 (esfuerzo normal máximo) y el negativo para obtener σ_2 (esfuerzo normal mínimo).

En los planos en que ocurren los esfuerzos normales máximo o mínimo no hay esfuerzos cortantes. Tales planos se llaman *planos principales* de esfuerzo, y los esfuerzos que actúan en ellos, se denominan *esfuerzos principales*.

6.3 ESFUERZO CORTANTE MAXIMO

En un estudio similar al realizado antes para los esfuerzos normales, se deriva la ecuación (6.6) con respecto a θ y la derivada se iguala a cero, para localizar los planos en los que actúan los esfuerzos cortantes máximo o mínimo. Esto es

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

Por tanto

$$\tan 2\theta_z = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \quad (6.11)$$

Donde θ_z designa el ángulo que define el plano en que es máximo o mínimo el esfuerzo cortante. De igual manera a la ecuación (6.8), la ecuación (6.11) tiene dos raíces.

Sustituyendo este ángulo θ_z en la ecuación (6.6) y en forma análoga a la sección anterior, tales esfuerzos máximo y mínimo son:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.12)$$

Donde el esfuerzo cortante máximo difiere únicamente en signo del esfuerzo cortante mínimo. Desde el punto de vista físico tales signos no tienen significado y por esta razón al mayor esfuerzo cortante independientemente de su signo se llamará *esfuerzo cortante máximo*.

6.4 CONDICION DE FLUENCIA DE TRESCA

Esta teoría parece haber sido propuesta originalmente por C. A. Coulomb en 1773. En 1868 H. Tresca presentó ante la Academia Francesa los resultados de su trabajo acerca del flujo de los metales a grandes presiones.

Este criterio está basado en la observación de que la fluencia en materiales dúctiles es causada por el deslizamiento del material a lo largo de superficies oblicuas y se debe primordialmente a esfuerzos cortantes. De acuerdo con este criterio, un componente estructural dado es seguro siempre y cuando el valor máximo τ_{max} del esfuerzo cortante en dicho componente permanezca menor que el correspondiente valor del esfuerzo cortante crítico τ_{cr} de fluencia en una prueba uniaxial a tensión, de una probeta del mismo material cuando la probeta empieza a fluir. Considerando que

$$\tau_{max} = \tau_{cr} = \left| \pm \frac{\sigma_1}{2} \right| = \frac{\sigma_{yp}}{2} \quad (6.13)$$

Donde σ_{yp} es el esfuerzo de resistencia a la fluencia de la probeta en la prueba a tensión y σ_1 el esfuerzo normal máximo.

Se tienen dos criterios

1. Cuando los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 tienen el mismo signo, entonces se debe cumplir

$$|\sigma_1| \leq \sigma_{yp} \quad \text{y} \quad |\sigma_2| \leq \sigma_{yp} \quad (6.14)$$

2. Cuando los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 tienen signos opuestos, deben cumplir con

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_{yp} \quad (6.15)$$

Para un estado triaxial de esfuerzos este criterio queda

$$|\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_{yp} \quad (6.16)$$

Las relaciones (6.14) y (6.15) quedan representadas gráficamente en la figura 6.4a. Cualquier estado de esfuerzo estará representado en dicha figura por un punto de coordenadas σ_1 y σ_2 . Si este punto cae dentro del área mostrada el componente estructural es seguro. Si el punto cae fuera de esta área, el componente fallará como resultado de la fluencia del material.

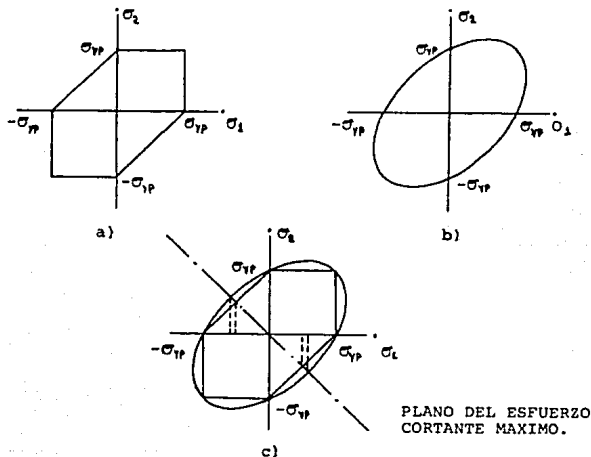


figura 6.4 Representación gráfica de los criterios de fluencia a) Tresca b) Von Mises c) comparación entre los dos criterios.

6.5 CONDICION DE FLUENCIA DE VON MISES

El primer intento de utilizar la energía total como criterio de fluencia fue realizado por E. Beltrami, de Italia, en 1885. En su forma presente la teoría fue propuesta por M. T. Humber, de Polonia, en 1904 y desarrollada y explicada más a fondo por R. von Mises de Alemania, en 1913 y H. Hencky de Estados Unidos, en 1925.

Este criterio está basado en la determinación de la energía asociada con los cambios de forma (energía de distorsión) de un material y expresa que un componente estructural dado es seguro siempre y cuando el valor máximo de la energía de distorsión por unidad de volumen en dicho material sea menor que la energía de distorsión por unidad de volumen requerido para causar fluencia en una probeta de prueba a tensión del mismo material.

La energía de distorsión* por unidad de volumen en un material isotrópico sometido a esfuerzo plano es

$$U_d = 1/6G (\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) \quad (6.17)$$

En el caso particular de una probeta de prueba a tensión que está comenzando a fluir, tenemos que:

$$\sigma_1 = \sigma_{yp}, \quad \sigma_2 = 0 \quad \text{y} \quad (U_d)_{yp} = \sigma_{yp}^2/6G \quad (6.18)$$

Por lo tanto, el criterio de la energía de distorsión máxima indica que el componente estructural es seguro siempre y cuando

$$U_d \leq (U_d)_{yp} \quad (6.19)$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_{yp}^2$$

Es decir, siempre y cuando los puntos de coordenadas σ_1 y σ_2 caigan dentro del área mostrada en la figura 6.4b. Esta área está formada por la elipse cuya ecuación es $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_{yp}^2$.

Para un estado triaxial de esfuerzos este criterio queda

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_{yp}^2 \quad (6.20)$$

*Para su desarrollo véase Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston Mecánica de Materiales, (Mentice) McGraw-Hill (1987) edic. 40.8

El criterio de esfuerzo cortante máximo y el criterio de la energía de distorsión máxima se comparan en la *figura 6.4c*. En esta figura se puede observar que para cualquier estado de esfuerzo, excepto en los puntos donde coinciden, el criterio de cortante máximo es más conservador que el criterio de la energía de distorsión máxima, ya que el hexágono está localizado dentro de la elipse. Sin embargo, para un caso de torsión es más exacto el criterio de von Mises, como se observa en la *figura 6.4c*.

CAPITULO 7

7. MEDIDORES DE DEFORMACION STRAIN-GAGES.

El análisis de esfuerzos en estructuras muy complicadas puede llegar a rebazar el límite de aplicación de los métodos analíticos, en base a esto, se han desarrollado métodos experimentales de análisis que pueden llegar más allá de estos límites. Algunos de ellos son:

La fotoelasticidad reflectiva

Recubrimientos quebradizos (lacas frágiles).

Recubrimientos birrefringentes.

Homolografía.

Medición con medidores de deformación (Strain Gage).

En este último método basado en principios mecánicos, ópticos, eléctricos, acústicos y neumáticos, se han desarrollado una amplia variedad de medidores de deformación para cubrir los requerimientos en la solución de un gran número de problemas de ingeniería correspondientes a la medición de la deformación.

Los principios empleados en los medidores strain gage, pueden ser usados como base para clasificarlos en strain gage mecánicos, ópticos, acústicos y eléctricos. De esta clasificación el medidor de deformación con mayor aceptación es el de tipo eléctrico, y en especial, el medidor de resistencia eléctrica por su fácil aplicación.

7.1 STRAIN GAGE DE RESISTENCIA ELECTRICA.

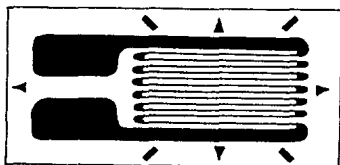
El descubridor del principio sobre el que se basa el medidor de deformación (strain gage) de resistencia eléctrica fué hecho en 1856 por Lord Kelvin, quién, cargando a tensión alambres de cobre y hierro observó con ayuda de un puente de Wheatstone, que sus resistencias se incrementaban con la deformación sufrida. Además, notó que cuando fueron sujetos a la misma carga, el alambre de hierro mostraba un mayor incremento en resistencia eléctrica que el de cobre, lo que indica que materiales distintos tienen sensibilidades diferentes.

Con ayuda de los factores encontrados durante este experimento, en la actualidad se ha logrado el diseño de medidores de deformación unitaria hasta de un millonésimo de pulgada por pulgada (1μ in/in), llamados medidores de deformación de resistencia-eléctrica (strain gage) o banda extensométrica.

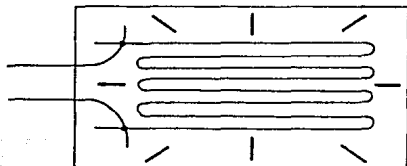
En su forma más simple un medidor de deformación (strain gage) está constituido por un fino hilo metálico de aleación o hoja delgada en forma de "parrilla" montado sobre un soporte, de tal manera, que la mayor parte de su longitud sea paralela a una dirección fija como se muestra en la figura 7.1.

Si se desea conocer las deformaciones sufridas por una estructura en cierta dirección, deberá pegarse el medidor con sus hilos paralelos a dicha dirección para que al presentarse la deformación se produzcan variaciones en la geometría del hilo que originarán un incremento de su resistencia, que medida por un puente de Wheatstone se puede convertir a medidas de deformación.

Existen en el mercado puentes de Wheatstone diseñados para utilizarse con resistencias strain gage, que dan directamente la deformación unitaria en la pantalla.



STRAIN GAGE DE REJILLA DE HOJA



STRAIN GAGE DE REJILLA DE ALAMBRE

figura 7.1 Strain gage en su forma mas simple.

7.2 PARAMETROS QUE INFLUYEN EN EL COMPORTAMIENTO Y SELECCION DE STRAIN-GAGES.

Las características de instalación y operación de un medidor de deformación (strain gage) son afectadas por los siguientes parámetros, los cuales son posible determinar, en mayor o menor grado, en todos los casos de aplicación.

Sensibilidad a la deformación de la aleación del filamento.

Material de la base.

Longitud de medición (parte activa de la rejilla).

Configuración del filamento.

Grado de autocompensación a las variaciones de temperatura.

Resistencia eléctrica original.

Opciones en la presentación.

7.3 MONTAJE DE STRAIN GAGE

7.3.1 PREPARACION DE SUPERFICIES.

La preparación de la superficie tiene como propósito fundamental la perfecta unión entre el medidor y el cuerpo de ensayo. Para esto, toda superficie que ha de recibir un medidor deberá someterse a tratamientos mecánicos y químicos para conseguir el mayor rendimiento de adhesivo, sin que dicha preparación modifique las características del cuerpo a ensayar. El proceso previo será:

1. En una superficie doble a la base del medidor strain gage quitar óxidos, pinturas, etc.
2. Desengrasado absoluto y secado. Conviene indicar que siempre que haya que limpiar o secar una superficie debe hacerse con gasa limpia (no necesariamente esterilizada) o con papel absorbente tipo Kleenex pero nunca con algodones que dejarían hebras depositadas.
3. Abrasión progresiva combinada con ácido y secado. El proceso de abrasión dependerá del estado inicial de la superficie comenzando con papel lija de carburo de silicio de grados 150, 200, 400, etc. sucesivamente y que previamente se han humedecido en ácido.
4. Neutralización y secado. La superficie se humedece con un producto neutralizador (solución alcalina detergente) con el fin de que su pH (potencial de hidrogeno) sea adecuado para recibir el adhesivo.

Lógicamente el proceso anterior es indicado para ciertos metales, siempre habrá que seguir las indicaciones concretas del fabricante.

7.3.2 TRAZO DE EJES DE REFERENCIA.

En cuanto al trazo de los ejes de referencia, se debe tomar en cuenta que no podemos alterar el estado de preparación de la superficie, rayando o produciendo pequeñas incisiones, ya que provocarían concentración de esfuerzos en el material. Por lo tanto es recomendable grabar los citados ejes. Para esto, un método sencillo es con un lápiz de grafito duro (5 o 6) trazar los ejes de referencia sobre la superficie preparada, y posteriormente un palillo cuyo extremo tenga una bolita de algodón (como los usados en Pediatría), se humedece con ácido y se pasa sobre los trazos hechos, secando enseguida y repitiendo la operación pero humedeciendo un nuevo algodón con neutralizador; así los ejes quedarán grabados sin alterar mecánicamente la superficie. Otra forma sencilla es marcar los ejes con lápiz, pero sin que estos lleguen a cortarse dejando siempre libre la superficie del soporte del medidor, pero este método no queda exento de problemas de contaminación de la superficie.

7.3.3 TECNICA DE INSTALACION DE STRAIN GAGES

Una vez que se tiene preparada la superficie y que se han grabado los ejes de acuerdo a las indicaciones dadas se procede a la aplicación del strain gage con el adhesivo adecuado. Junto con el strain gage es muy práctico pegar unos soportes (conectores) impresos que ayudarán a la soldadura e instalación del cableado.

En general un buen adhesivo tendrá las siguientes características:

- a. Permitir su aplicación en películas delgadas para no introducir errores por distanciamiento de la rejilla a la superficie.
- b. Ser neutro a la superficie y al soporte del strain gage.
- c. Transmitir los esfuerzos al medidor sin fenómenos de fluencia.
- d. Fácil técnica de aplicación.

Cada fabricante especifica y produce el pegamento adecuado, pero en ocasiones donde no se tiene la posibilidad de conseguir éstos, pueden ser utilizados adhesivos de cianoacrilato (como el "permabond" o "kola loka").

Conviene mencionar que un strain gage una vez instalado es irrecuperable pero bien protegido y usado dentro de sus límites de trabajo mantiene sus cualidades con el tiempo, pudiéndose efectuar un número ilimitado de mediciones.

El procedimiento a seguir para el pegado del strain gage es el siguiente:

1. Se retira el strain gage de su envoltura de protección, utilizando unas pinzas; presionando en una esquina de la base sin tocar el filamento o terminales, se deposita cara arriba sobre un vidrio o placa limpia. Después, se coloca por el lado de las terminales del strain gage con una separación de uno o dos milímetros, los conectores soldables del tipo adecuado para la instalación planeada.
2. Formar un ensamble utilizando una tira de aproximadamente 10 cm de colofón adhesivo con el strain gage y el conector, procurando que estos queden alineados con el eje central de la cinta adhesiva. Presionar con un dedo para garantizar adherencia. La cinta mágica de la 3M o equivalente es la recomendada para esta operación, ya que su adhesivo contamina poco la superficie preparada.
3. Levantar la cinta, empezando de un extremo y manteniendo un ángulo abierto, procurando que la operación de despegue se produzca lentamente (ver figura 7.2).

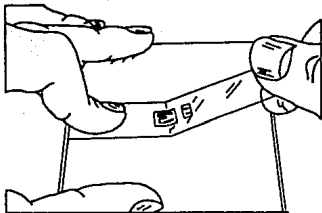


figura 7.2 Ensamble del conector y el strain gage por medio de un celofán adhesivo.

4. Tomando el tramo de cinta de sus extremos y manteniéndola recta, sin estirar, se hace coincidir los trazos previamente hechos sobre la superficie, con los ejes del strain gage. Cuando se tenga en posición la cinta hacer contacto con la superficie procurando que el strain gage y conector queden en la posición correcta, según los trazos. Si por algún motivo se observa desalineamiento, levantar la cinta y repetir el procedimiento (ver *figura 7.3*).

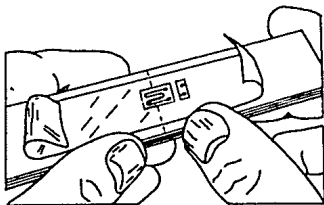


figura 7.3 Alineamiento con los trazos previamente hechos sobre la superficie preparada.

5. Una vez logrado el alineamiento correcto, según los trazos, levantar la cinta principiando del extremo donde están los conectores, hasta dejar descubierto el respaldo de éste y el strain gage. El ángulo que debe formar la cinta con la superficie debe ser de aproximadamente 30° (ver *figura 7.4*).

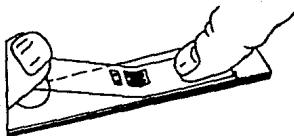


figura 7.4 Despegar por el extremo del conector con un ángulo de 30° aproximadamente.

6. Cuando se tenga la gasa formada por la cinta adhesiva como se muestra en la figura 7.5, se procede a aplicar el catalizador del adhesivo. La cantidad de catalizador requerida es muy pequeña y esto se logra aplicando una capa delgada y uniforme en el respaldo del strain gage y conector.



figura 7.5 Formación de una gasa con la cinta adhesiva.

7. El catalizador debe dejarse secar durante un minuto bajo condiciones regulares de temperatura y humedad (25°C y 30-65%HR).
8. Depositar una o dos gotas de adhesivo precisamente en la parte donde hace contacto la cinta adhesiva y la superficie la cual debe estar a unos diez milímetros del extremo del strain gage (ver figura 7.6).

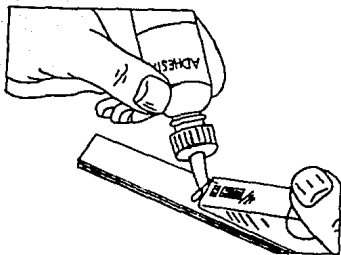


figura 7.6 Aplicación del adhesivo en la parte donde hace contacto la cinta adhesiva.

9. Inmediatamente desdoblar la gasa formada por la cinta adhesiva manteniendo un ángulo de 30° aprox. suspendiendo con una mano el extremo de la cinta y con la otra recorriendo y presionando la cinta con una gasa para uso médico, tratando de expulsar hacia los bordes de la cinta el exceso de adhesivo, el cual se limpia con la misma gasa. Debe tenerse cuidado que al desdoblar la gasa no se pierda el alineamiento y no estirar exageradamente la cinta para no deformar el strain gage (ver figura 7.7).

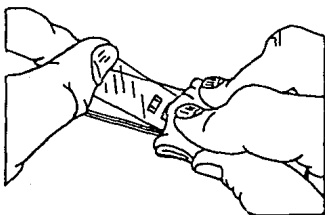


figura 7.7 Con una gasa limpia expulsar hacia los bordes el exceso de adhesivo.

10. Bajo condiciones ambientales de 21°C y superiores a 30% de humedad relativa es suficiente con presionar la instalación, utilizando el dedo pulgar durante un minuto, a temperaturas menores y más baja humedad relativa el tiempo necesario en que debe mantenerse la presión puede extenderse a varios minutos (ver figura 7.8).

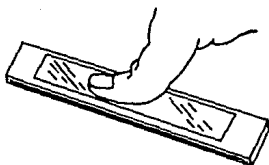


figura 7.8 Presionar la instalación usando el dedo pulgar durante un minuto.

11. Después de las operaciones descritas el strain gage y su correspondiente conector deben quedar sólidamente adheridas a la superficie; para terminar con la instalación habrá que remover la cinta adhesiva lo cual debe realizarse cuidadosamente siguiendo un ángulo muy cerrado de la cinta con la superficie y partiendo del extremo donde se encuentra el conector (ver figura 7.9).

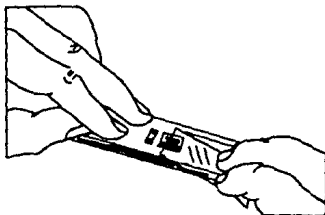


figura 7.9 Remover cuidadosamente la cinta adhesiva siguiendo un ángulo muy cerrado.

7.3.4 INSTALACION DE LOS CABLES

Para soldar los hilos de unión entre strain gage, conectores e instrumento de medición, requieren especial atención los siguientes puntos:

1. Preparar el cable (que será de varios hilos) trenzando los hilos y estañando para luego cortar las puntas sobrantes.
2. Depositar una gota de soldadura lo más pequeña posible en el conector y terminales del strain gage (en caso de no incluir sus cables ya soldados), sin aportar excesivo calor que podría desprender el strain gage del soporte. No debe durar esta operación más de 2 segundos, si no se consigue en el primer intento, dejar enfriar y repetir.
3. Presentar el cable ya preparado y sin aporte de soldadura, solamente manteniendo caliente y muy limpio la punta del soldador, fijar los cables a los conectores y el strain gage, tal y como se indica en la figura 7.10.

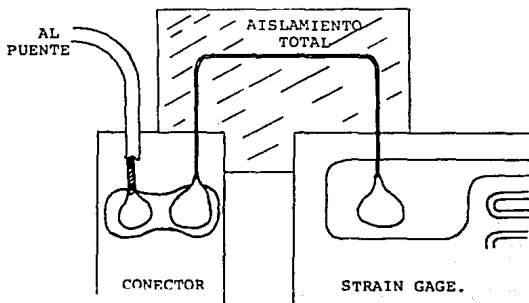


figura 7.10 Fijación de los cables strain gage-conector y conector-puente.

Estas normas son generales ya que el fabricante indicara en cada caso las instrucciones concretas.

7.3.5 VERIFICACION DE MONTAJE

Una vez instalado un medidor strain gage deberán efectuarse diversas pruebas siendo perceptivas:

1. Inspección ocular. Debe hacerse con una lupa de 20 aumentos o más para confirmar que se ha situado correctamente, a la vez que se observará que no han quedado bolsas de aire ni "lagunas" (zonas sin adhesivos) bajo el soporte de el medidor. Para ésto se recomienda conectar el strain gage al instrumento de medición (puente), hacer el balanceo inicial y observar que en la pantalla indique nulo en el momento de presionar la rejilla del strain gage con una goma (borrador) suave o con la punta de un dedo, sin hacer contacto con la uña. Si se observa un desbalance brusco en el momento de hacer presión será indicativo de una incorrecta instalación, lo que conduce a remover el strain gage e instalar otro corrigiendo la técnica empleada.
2. Comprobación del aislamiento. Se deberá utilizar un megohmetro cuya tensión no exceda los 50 volts. Jamás se hará uso de los medidores de aislamiento de tipo magneto que quemarian la banda. El aislamiento deberá ser mejor que 100 megohms, ya que un aislamiento menor, equivale a introducir un error, por colocar en paralelo con el medidor strain gage otra resistencia.
3. Medición del valor óhmico del medidor. Esta comprobación tiene dos objetivos; primero saber que no está rota ni cortocircuitada la rejilla y segundo conocer la resistencia nominal del circuito.

7.4 INTERPRETACION DE LA LECTURA OHMICA

Para poder captar los pequeños incrementos o decrementos de resistencia en strain gages, se usa generalmente un puente de Wheatstone* cuya señal será en unidades de ohms. Para transformar este valor de resistencia a valor de deformación deberá aplicarse

* Para detalles sobre su funcionamiento ver el apéndice A

la fórmula empírica^{*}:

$$c = (\Delta R_g / R_g) (1/S_g) \quad (7.1)$$

Donde:

R_g es la resistencia del strain gage (en ohms).

ΔR_g es la variación de la resistencia del strain gage (en ohms).

S_g es el factor del medidor (gage factor).

Los valores de R_g y S_g son especificados por el fabricante del medidor de deformación strain gage.

7.5 EFECTOS DE LA TEMPERATURA.

Un strain gage mide toda deformación que experimenta un punto del elemento sobre el que se monta, pero se sabe que las deformaciones producidas por dilataciones térmicas homogéneas no crean tensiones. Una forma sencilla de corregir el error por efecto de la temperatura, es conectar en el ramal de bifurcación adyacente al que contiene el medidor "activo" un medidor "simulado" (como se muestra en la figura 7.11), pegado a una pieza sin esfuerzo, del mismo metal y sujeto a las mismas condiciones climáticas. Así se anula el efecto de temperatura y el medidor "activo" informa sólo de lo que está ocurriendo en la placa sujeta a esfuerzo.

Algunas veces es útil hacer activos ambos medidores strain gage para compensar los efectos de temperatura y obtener una señal doble en el puente^{**}, por ejemplo en una viga sometida a flexión la forma de lograrlo es montar los medidores en caras opuestas de la viga de tal forma que uno de los medidores estará sujeto a tensión y el otro a compresión.

* Experimental Stress Analysis, capítulo 4 pag. 170.

** Para detalles ver apéndice A.

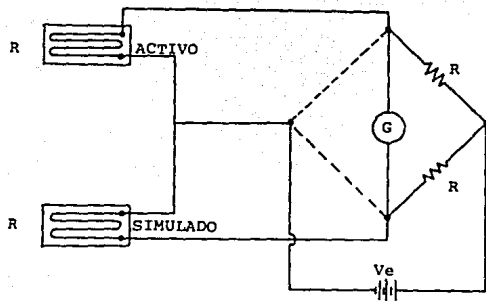


figura 7.11 circuito para anular los efectos de la temperatura con un strain gage simulado.

También se puede encontrar (para ciertos rangos de temperatura), medidores autocompensados a el efecto de temperatura. Normalmente se compensan strain gage para uso en elementos de acero y aluminio.

7.6 NIVEL OPTIMO DE EXITACION A UN STRAIN GAGE.

Es muy conveniente que la excitación (voltaje aplicado) al puente de Wheatstone o circuito de resistencias, sea la máxima posible, ya que la señal eléctrica que se obtendrá del circuito será proporcional a la tensión de excitación del mismo. Sin embargo, hay razones para limitar dicho nivel de excitación ya que la corriente eléctrica que circula por el filamento de un medidor, origina por efecto Joule, una elevación de temperatura al disiparse el calor producido, ésto puede alterar las siguientes características del strain gage:

- Alterar su autocompensación al efecto de temperatura, cuya estabilidad es mejor con niveles bajos de excitación.

- b. Modificación del estado de tensión de la estructura bajo ensayo, al absorber ésta el calor disipado por la banda, sobre todo en materiales plásticos.
- c. Derivas del cero, sobre todo en circuitos con varios strain gages.

Los factores de primordial importancia en la determinación del nivel óptimo de excitación a un strain gage, son:

- 1. Superficie de la rejilla; cuya área contribuye al poder de disipación de calor.
- 2. Resistencia óhmica del strain gage. Altas resistencias permiten altos voltajes para un nivel dado de potencia.
- 3. Capacidad de disipación térmica del material donde se efectúa la instalación del medidor strain gage.
- 4. Tamaño de la probeta o estructura donde se monta el medidor, ya que determina el poder de absorción de calor.
- 5. Condiciones ambientales.
- 6. Calidad del montaje del medidor, cuidando que no hayan burbujas de aire entre el soporte y la probeta.

7.61 CALCULO DEL NIVEL MAXIMO DE EXCITACION.

El nivel óptimo de excitación (V_e) para el circuito de resistencias o puente de Wheatstone es calculado por medio de las siguientes parámetros.

Pg Potencia disipada por la rejilla del strain gage (W)

$$P_g = \frac{V_e^2}{4 R_g} \quad (7.2)$$

Pd Potencia de disipación térmica (W/pulg². o KW/m²)

$$P_d = \frac{P_g}{A_g} \quad (7.3)$$

por lo tanto el nivel óptimo de excitación esta dada por

$$V_e = 2 \sqrt{R_g \times P_d \times A_g} \quad (7.4)$$

Donde:

Ve es la excitación del circuito puente en volts.

Rg es la resistencia del strain gage en ohms.
Normalmente ésta suele ser de 120 o 350 ohms.

Pd es la potencia de disipación térmica en (W/pulg² o KW/m²), y se encuentra tabulado de acuerdo al tipo de operación y material en la tabla del apéndice B.

Ag es el área que cubre la porción activa del filamento (longitud activa por ancho activo) en pulg² o m².

7.7 ROSETAS DE DEFORMACION.

En el análisis de un estado plano de esfuerzos normalmente no se conocen los esfuerzos y planos principales, por lo que es

necesario instalar tres medidores de deformación como mínimo, para obtener la información suficiente que determinará el estado completo de deformación plana en un punto. Existen tres combinaciones estandares de medidores en el mercado, llamadas *rosetas de deformación* que resultan muy apropiadas para este propósito.

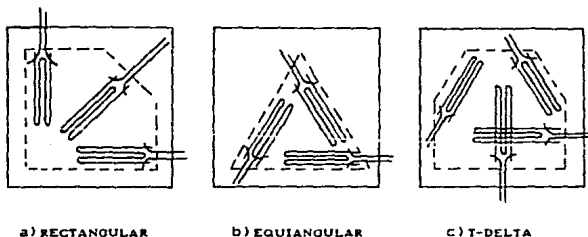


figura 7.12 Tipos de rosetas mas usuales

1. La roseta rectangular (figura 7.12a), que cubre un mínimo de área, y es la mejor cuando el gradiente de deformación es elevado.
2. La roseta equiangular (figura 7.12b), usada cuando es bajo el gradiente de deformación.
3. La roseta T-delta (figura 7.12c), que no ocupa más área que la roseta equiangular y provee un medidor para una verificación extra o "de seguro".

Estas generalmente se instalan procurando que el eje de un medidor coincida con el eje de simetría de la pieza o una referencia pre-establecida.

CAPITULO 8

8. DESCRIPCION DEL MODELO EXPERIMENTAL.

El modelo que se propone para su análisis de esfuerzos, es una viga empotrada sometida a flexión por la acción de una fuerza puntual (figura B.1), ya que éste modelo representa uno de tantos

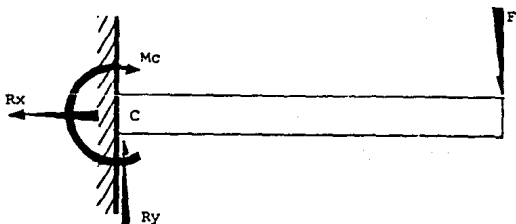


figura B.1 Viga empotrada sometida a flexión por la acción de una fuerza puntual.

estados de esfuerzos a los que comúnmente se someten las partes que componen una estructura o elemento de máquina. Sin embargo, para lograr la representación física del modelo ideal mostrado en la figura B.1, se presentan principalmente los siguientes problemas:

1. Lograr un empotramiento de rigidez infinita (empotramiento perfecto que no sufra deformaciones).
2. Lograr la aplicación de una fuerza en un punto.
3. Encontrar que la barra de prueba sea de una material sin peso.

Lógicamente satisfacer lo anterior no es posible, pero puede crearse un modelo experimental cuyas características se aproximen a las del modelo ideal. Para esto, el mecanismo de empotramiento a utilizar en el modelo experimental será por medio de una plataforma cuyas características físicas y de montaje son mostradas en la figura B.2. Dicho mecanismo fué elaborado con la idea de crear un empotramiento lo más rígido posible y asegurar que la barra en el momento de aplicar la carga, sea la parte más sensible y absorba la mayor parte de la deformación ocasionada por las cargas aplicadas.

En cuanto a la característica del peso de la barra de prueba, se estima que se puede despreciar, ya que como se verá más adelante, su efecto en la lectura final queda anulado a la hora de hacer el balance inicial del puente (display en ceros).

Las características que definen la barra a estudiar son dadas en la tabla B.1.

DIMENSIONES: (Barra de sección rectangular.)

Longitud total: 25.00 cm (9.842 in).

Longitud al empotramiento: 20.00 cm (7.874 in).

Ancho: 2.00 cm (0.785 in)

Peralte: 1.18 cm (0.465 in)

MATERIAL: Acero al carbón, especificación A-36 (ASTM)

Esfuerzo Máximo Permisible^{*}: 12 700 psi.

Esfuerzo Mínimo de Fluencia Especificado^{**}: 36 000 psi.

Esfuerzo Mínimo a la Tensión Especificado^{**}: 58 000 psi.

Modulo de Elasticidad a 21°C (E)^{**}: 29.3x10⁶ psi.

Relación de Poisson (ν)^{***}: 0.30

tabla B.1 Características de la barra de prueba.

* Código ASME, Sección VIII-División 1, Tabla UOC-28

** Código ASME, Sección VIII-División 1, PART. UF

*** Mecánica de sólidos, Egor P. Popov, cap. 4-pag. 187

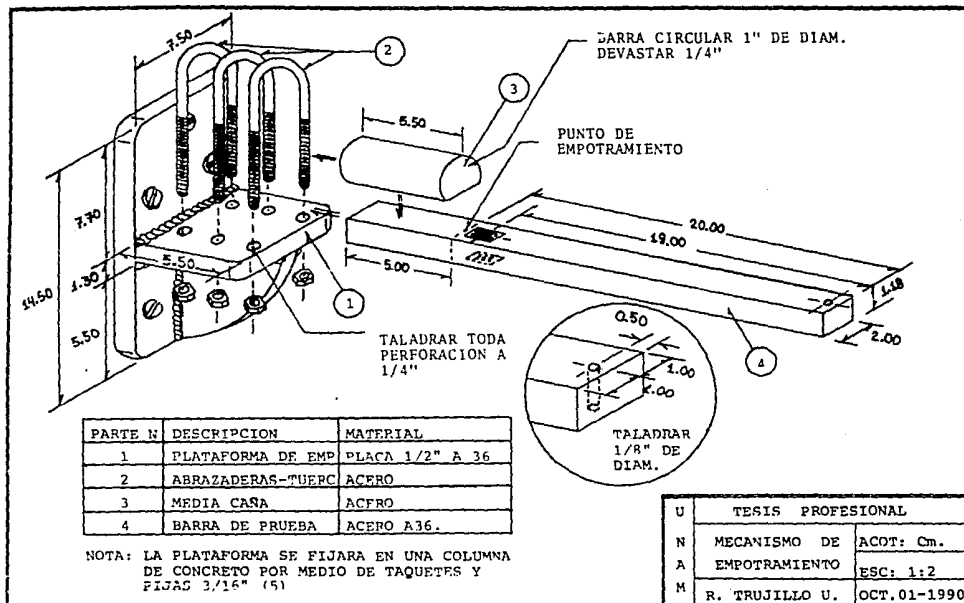


figura B.2 Mecanismo para el empotramiento de la barra

Para la aplicación puntual de la carga se realizó una pequeña perforación (diam. de 1/8 in), sobre el eje longitudinal de la barra y lo más cerca posible de la orilla del extremo libre, como se muestra en la figura 8.2. Luego, sobre esta perforación se pasó un cable de acero (de aprox. 1/8 in de diam.) que en uno de sus extremos tenía un nudo que no pasó a través de la perforación, así quedó el cable fijo a la barra y con la aplicación de cargas suspendidas (en cantilever) se produjo la acción de una carga aproximadamente puntual.

Las cargas a aplicar fueron dadas por cuatro discos de bronce calibrados a un peso de 2.783 kg (6.136 lbs.) por cada disco, más 0.150 kg (0.068lbs.) debido al peso del cable y gancho para sujetar los discos, quedando las cargas a aplicar en cuatro pruebas como se muestra en la tabla 8.2.

PRUEBA No.	CARGA APLICADA Kg (lbs.)	
1	2.933	(6.466)
2	5.716	(12.603)
3	8.500	(18.738)
4	11.282	(24.874)

tabla 8.2 Cargas aplicadas en la prueba experimental.

El método experimental a emplear para medir las deformaciones sufridas por la barra cargada consistió en el uso de strain gage del tipo resistencia eléctrica, montados sobre el eje longitudinal de la viga y lo más cerca posible del empotramiento (punto donde se presentará el esfuerzo máximo), colocados en lados opuestos de la viga de tal forma que uno esté sujeto a tensión y el otro a compresión.

Por razones físicas del sistema de empotramiento, el strain gage no puede ser colocado en éste punto (punto de empotramiento que esta a 20 cm del punto de aplicación de la carga), por lo tanto se montarán a 1 cm del empotramiento (19 cm del punto de aplicación de la carga) como se muestra en la figura 8.3.

Los strain gage fueron montados siguiendo las indicaciones dadas en el capítulo 7.



figura B.3 Strain gage montado en la viga a 1 cm del empotramiento

Algunos de los datos proporcionados por el fabricante de los strain gages a emplear en el análisis experimental de este trabajo, son dados en la tabla B.3.

Marca: MEASUREMENTS GROUP, INC.
División: MICRO-MEASUREMENTS.
Código (designación gage): WK-06-250 BG-350.
Longitud gage (length gage): 6.35 mm (0.250in).
Ancho de la rejilla (grid width): 3.18 mm (0.125in).
Base: (13.2 L x 5.6 A)mm o (0.52 L x 0.22 A)in.
Resistencia en ohms: 350.0 \pm 0.3%
Factor gage a 75°F (23.9°C): 2.05 \pm 1.0%
Temperatura de trabajo: -452°F (~269°C) a 550°F (290°C).
Observaciones: encapsulado en resina epoxy phenolic con base reforzada en fibra de vidrio.

tabla B.3 Datos del strain gage empleado en la etapa experimental.

Para la lectura de los cambios de resistencia en los strain gages, ocasionada por la presencia de la deformación, se utilizará un puente de Wheatstone digital diseñado para usarse especialmente con strain gage, de tal forma que los valores registrados son dados directamente como deformaciones unitarias sufridas por el elemento (en el punto donde se colocó el strain gage), por lo tanto ya no es necesaria una conversión de valores de resistencia a deformación, ni el cálculo de la excitación máxima (como se indicó en las secciones 7.4 y 7.6 respectivamente), ya que el puente realiza estas operaciones en forma automática al proporcionarle lo siguiente:

1. La correcta conexión de los strain gages, tal como lo indica su manual de usuario (ver figura 8.4) e indicar que se utiliza medio puente (esto se manipula al liberar un botón específico).
2. El factor del strain gage (gage factor); esto por medio de una perilla (potenciómetro) indicadora.
3. El balance inicial antes de aplicar las cargas de tal forma que la pantalla indique ceros.

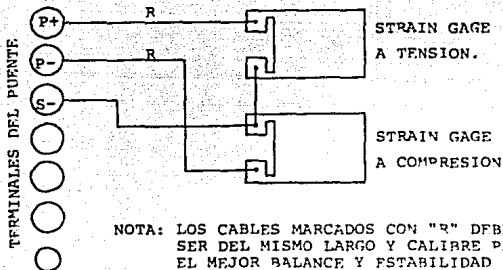


Figura 8.4 Circuito de medio puente usado para la conexión de los strain gages al puente de Wheatstone P-3500.

Las especificaciones del puente de Wheatstone dadas por el fabricante son mostradas en la siguiente tabla 8.4:

Marca:	MEASUREMENTS GROUP, INC.
División:	INSTRUMENTS.
Modelo:	P-3500 STRAIN INDICATOR DIGITAL.
Rango display:	$\pm 19\ 999\mu\epsilon$ en MULT.X1 y $\pm 199\ 990\mu\epsilon$ en MULT.X10.
Resolución:	$1\mu\epsilon$ para MULT.X1 y $10\mu\epsilon$ para MULT.X10.
Exactitud:	$\pm 0.05\%$ de la lectura.
Rango factor gage:	0.500 a 9.900 con resolución de 0.001.
Exactitud factor gage:	$\pm 0.02\% \text{máx. por factor gage} > 1.000.$
Excitación puente:	2 Vdc $\pm 0.1\%$
Fuente poder:	6 baterías alcalinas "D" para 250-300 hrs. o fuente externa 115/230v 50-60 Hz.
Dimensiones:	9 x 6 x 6 in (230 x 150 x 150mm).
Peso:	6.3 lbs. (2.9 kg) incluyendo baterías.

tabla 8.4 Especificaciones del puente usado en la etapa experimental.

Parte del proceso experimental llevado a cabo es mostrado en las siguientes figuras 8.5 y 8.6.



figura B.5 Aplicación de la carga para la tercer prueba con tres discos que dan un peso total de 8.5 kg. (18.736 lbs.)

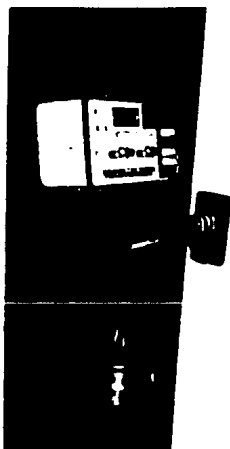


figura B.6 Toma de lectura en el puente de Wheatstone para la tercera prueba.

CAPITULO 9

9. DESCRIPCION DEL METODO NUMERICO.

9.1 METODO DEL ELEMENTO FINITO.

En términos generales, el método del elemento finito es un medio para obtener una *aproximación* a la *solución* de un problema que requiere la *integración* de un *sistema de ecuaciones diferenciales*, provistas de ciertas *condiciones*, que definen completamente el problema y, de ahí su solución. Es decir, el método del elemento finito permite llevar la solución de un problema que, en un principio requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales, a la forma de un problema algebraico, éste es, de un problema que requiere la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

El método del elemento finito es un procedimiento analítico, y cuando se aplica a un medio continuo, éste se modela analíticamente subdividiéndolo en sub-regiones (elementos finitos) en los que el comportamiento de cada uno es definido por grupos separados de funciones que (en mecánica de materiales) supuestamente definen esfuerzos y desplazamientos en esa región; las funciones se seleccionan en forma tal que se satisfaga las condiciones de equilibrio y continuidad a través de todo el medio; y las fuerzas internas se definen aplicando el principio de trabajo virtual al minimizar la energía potencial. De ésta forma el método del elemento finito con ayuda de la computadora, conduce rápidamente a una *aproximación* a la *solución* (solución numérica) de problemas elásticos lineales complejos en lo cuales una solución analítica no era posible.

9.2 PROGRAMAS PARA EL ANALISIS DE ESFUERZOS.

Se han desarrollado muchos programas para la solución de problemas estructurales por el método del elemento finito (M.E.F.). Entre estos programas están el GAMEB-3 y TRISTAT-3, programas italianos designados al análisis de esfuerzos en estructuras sólidas. (análisis tridimensional de esfuerzos).

GAMEB-3 es un programa para la generación automática de una geometría formada por una red de elementos finitos bien definidos, interconectados por nodos en sus límites fronterizos.

TRISTAT-3 es un programa que ejecuta en conjunto con GAMEB-3 el análisis elástico lineal de estructuras sólidas (tridimensional) usando el método del elemento finito.

Los programas mencionados usan un formato libre y están escritos en lenguaje FORTRAN 77.

La forma de elaborar los archivos de datos para la ejecución de cada uno de ellos es explicado en el apéndice C

Aunque la teoría del elemento finito es compleja, no es conveniente que al aplicar los programas por computadora se desconozca la forma en que trabaja, por tal motivo en seguida se contempla un breve esquema teórico del procedimiento que lleva a cabo el programa TRISTAT-3.

1. Primero, el bloque en estudio es discretizado en pequeños elementos bien definidos, interconectados por nodos en sus límites fronterizos; el tipo de elemento es especificado en el momento de crear el archivo de datos en GAMEB-3. Existen diferentes tipos de elemento cada uno adecuado para problemas específicos.

2. Luego, el análisis se inicia con la definición del problema al considerar que la solución debe cumplir con las ecuaciones de equilibrio para desplazamientos (ecs. 5.2 vistas en el capítulo 5).

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{X}{E} = 0 \quad (5.2a)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Y}{E} = 0 \quad (5.2b)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Z}{E} = 0 \quad (5.2c)$$

Estas ecuaciones (5.2) como se vio en el capítulo 5 resultan de la combinación de las ecuaciones desplazamiento-deformación (3.13), esfuerzo-deformación (3.17) y ecuaciones de equilibrio para esfuerzos (ecs.2.9), por lo tanto encontrar la solución de las ecuaciones (5.2) implica el cumplimiento de las anteriores y encontrar el vector $U^T [u, v, w]$.

La utilidad de expresar las ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos, estriba en que a partir de ellas se pueden resolver problemas de desplazamientos impuestos, cargas aplicadas impuestas y una combinación de ambas, mientras que expresadas en función de los esfuerzos solo se pueden resolver aquellos con cargas aplicadas

3. Además, la solución, debe ser tal que cumpla las condiciones de frontera, asumiendo los valores prescritos por las fuerzas exteriores f aplicadas en la superficie, esto es que cumpla con lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= f_x \\ \sigma_{yy}n_y + \tau_{yx}n_x + \tau_{yz}n_z &= f_y \\ \sigma_{zz}n_z + \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y &= f_z \end{aligned} \quad (9.1)$$

Donde $[f_x, f_y, f_z]$; es el vector de fuerzas de superficie.
 n_x, n_y, n_z son versores que definen la dirección.

4. Además el programa considera que las relaciones desplazamiento-deformación (3.13) y esfuerzo-deformación (ecs.3.17) tienen representación matricial como relaciones entre tensores cuyas representaciones son:

$$\epsilon = A U \quad (9.2)$$

$$\sigma = D \epsilon \quad (9.3)$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} \delta/\delta x & 0 & 0 \\ 0 & \delta/\delta y & 0 \\ 0 & 0 & \delta/\delta z \\ \delta/\delta y & \delta/\delta x & 0 \\ 0 & \delta/\delta z & \delta/\delta y \\ \delta/\delta z & 0 & \delta/\delta x \end{bmatrix}; \quad U^T = [u, v, w]$$

$$\epsilon^T = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$$

$$\sigma^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ \text{Similar.} & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

5. Para encontrar la solución, el programa genera para cada uno de los elementos en que fué discretizado el bloque una ecuación de elemento del tipo:

$$K_i \delta_i = b_i \quad (9.4)$$

Donde: K_i es la matriz de rigidez del elemento, δ_i es el vector de desplazamiento de los nodos en el elemento y b_i es el vector fuerza.

6. Para la generación de las ecuaciones de elemento es empleado un medio llamado *formulación variacional* en el que se establece que la función U (solución) debe ser tal que minimice el funcional Π ($\delta \Pi = 0$).

$$\Pi = \int_V (\sigma^T \epsilon - U^T F) dv - \int_S U^T f ds \quad (9.5)$$

en donde:

$\int_V \sigma^T \epsilon dv$ - representa el trabajo realizado por las fuerzas internas (esfuerzos por deformaciones).

$\int_V U^T F dv$ - el trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo.

$\int_S U^T f ds$ - es el trabajo realizado por las fuerzas de superficie

$F^T = [X, Y, Z]$ es el vector fuerza de cuerpo.

$f^T = [f_x, f_y, f_z]$ es el vector fuerza de superficie.

Este funcional resulta de aplicar el principio de trabajo virtual, y describe la variación de energía del cuerpo antes y después de ser aplicadas las cargas.

Como se observa en la ecuación 9.5 la incógnita realmente es encontrar el vector U que minimice el funcional Π . Para esto, el programa propone para cada tipo de elemento una función de aproximación (función de tipo polinomial), que definen una aproximación de la distribución de los desplazamientos U en las caras del elemento bajo un sistema de referencia local propio del elemento. Así, de esta forma el programa solo se encarga de encontrar los coeficientes correspondientes al polinomio que minimiza el funcional Π y que por lo tanto resulta una aproximación a la solución.

7. Para minimizar el funcional η (ec.9.5) este es derivado con respecto de U e igualado a cero obteniendo con esto, un sistema lineal algebraico de la forma:

$$K_i \delta_i = b_i$$

Luego mediante un ensamble de matrices K_i se obtiene la matriz de rigideces K del cuerpo o estructura.

$$K \delta = b \quad (9.6)$$

Asi pues, es obtenido un sistema global de ecuaciones algebraicas que describen la distribución de los desplazamientos a través de todo el material en función de la carga aplicada. Para tener una idea aproximada del tamaño de la matriz K tomemos por ejemplo nuestro caso (ver apéndice C) donde se tienen 128 nodos x 3 grados de libertad, entonces se tiene una matriz de 384×384 .

El interés por llevar un problema continuo a una forma algebraica estriba en que los sistemas algebraicos, especialmente los lineales, están plenamente estudiados desde el siglo pasado. El método empleado por el programa para resolver el sistema de ecuaciones (9.6) es por medio de una descomposición de Cholesky, tema que cae fuera del objetivo de este trabajo.

Así, partiendo de las ecuaciones constitutivas y de equilibrio y mediante un análisis numérico, se resuelve el sistema para variables primarias (esfuerzos y deformaciones), luego partiendo de los esfuerzos y de la geometría, se calculan las fuerzas y momentos.

CAPITULO 10

10. ANALISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSION.

10.1 ANALISIS DE RESULTADOS.

Para el análisis y evaluación de los resultados arrojados por el método numérico (Método del Elemento Finito) contra los datos obtenidos experimentalmente (datos reales), se realiza un estudio comparativo de los valores de esfuerzo puntual y criterio Tresca obtenidos por los dos métodos.

En la etapa experimental de este trabajo, se llevó a cabo la toma de tres lecturas en distintos intervalos, para cada una de las cuatro cargas propuestas en el capítulo 8. Los datos que se obtuvieron directamente del puente son mostrados en la tabla 10.1.

CARGA APLICADA [Lbs.]	LECTURA No [$\mu\epsilon$]			DATO PROMEDIO [$\mu\epsilon$]	VALOR REAL PROMEDIO [$\mu\epsilon$]
	1	2	3		
6.466	108	106	106	106.66	53.33
12.603	216	216	216	216.00	108.00
18.738	325	325	326	325.66	162.83
24.874	435	436	436	435.66	217.83

tabla 10.1 Deformaciones unitarias obtenidas en la etapa experimental.

De esta tabla 10.1, los datos mostrados en la última columna representan el valor real promedio de la deformación unitaria, medida en el punto donde están montados los strain gages.

Recordemos, como se indicó en el capítulo 7, que la señal del puente se duplica cuando son conectados dos strain gage, por lo tanto el "valor real promedio" es considerado como la mitad del "dato promedio" obtenido de las tres lecturas (tabla 10.1).

Para obtener los esfuerzos partiendo de las deformaciones encontradas se aplican las ecuaciones que relacionan esfuerzos con deformaciones (ecs. constitutivas 3.17), que para nuestro caso en que se trabaja bajo esfuerzo simple, éstas (ecs. 3.17) se reducen a:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} \quad (10.1)$$

Así, de la ecuación 10.1 se deduce que las deformaciones encontradas multiplicadas por el módulo de elasticidad E (E = 29.3x10⁶ PSI), proporciona los esfuerzos en el punto de estudio del modelo experimental. En la tabla 10.2 son mostrados estos esfuerzos experimentales, junto con los valores obtenidos por el método numérico (programa TRISTAT-3).

CARGA APLICADA [lbs.]	ESFUERZO [PSI]		DIFERENCIA QUE PRESENTA EL M.E.F. [PSI]	% ERROR DEL M.E.F.
	METODO EXPERIMENTAL	METODO NUMERICO (M.E.F.)		
6.466	1562.57	1707.07	+ 144.50	9.25
12.603	3164.40	3327.55	+ 163.15	5.15
18.738	4770.92	4946.97	+ 176.05	3.69
24.874	6382.42	6566.93	+ 184.51	2.89

tabla 10.2 Esfuerzos encontrados por los métodos experimental y numérico

Los esfuerzos arrojados por el método numérico (M.E.F.) mostrados en la tabla 10.2, pueden ser verificados en el apéndice D con los archivos de resultado TRISOUT.VIG, observando los valores para los nodos de interés en este estudio**.

* Demostrado en el apéndice A.

** Nodos 9, 10, 11, y 12. En el apéndice C se explica la razón.

Para obtener el valor Tresca es aplicada la ecuación (6.12) que define al esfuerzo cortante máximo. Para éste caso en que se trabaja bajo esfuerzo simple (uniaxial), el valor tresca queda definido por:

$$T_{max} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (10.2)$$

Por lo tanto el valor tresca por el método experimental será igual a la mitad del esfuerzo obtenido experimentalmente. En la tabla 10.3 son presentados los valores Tresca obtenidos por cada método. Los datos para el método numérico pueden ser verificados en el apéndice D.

CARGA APLICADA [Lbs.]	TRESCA [PSI]		DIFERENCIA QUE PRESENTA EL M.E.F. [PSI]	% ERROR DEL M.E.F.
	METODO EXPERIMENTAL	METODO NUMERICO (M.E.F.)		
6.466	781.28	864.02	+ 82.74	10.59
12.603	1582.20	1684.21	+ 102.01	6.45
18.738	2385.46	2503.87	+ 118.41	4.96
24.874	3191.21	3323.79	+ 132.58	4.15

tabla 10.3 Valores Tresca encontrados por los métodos experimental y numérico

Así, puede ser observado en ambas tablas (columna 4), que la diferencia que presenta el método numérico aumenta conforme se incrementa la carga; pero estos incrementos son tan pequeños, que prácticamente podemos considerar que la diferencia se mantiene constante para cualquier carga aplicada; esto se puede visualizar al graficar los valores obtenidos, por los dos métodos, tanto de esfuerzo puntual y valor tresca, como lo muestran los diagramas carga-esfuerzo y carga-valor Tresca de las figuras 10.1 y 10.2 respectivamente. Además en dichas figuras se puede observar el comportamiento lineal elástico del material, cuya pendiente es $E = 29.3 \times 10^6$.

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA

DIAGRAMA CARGA-ESFUERZOS

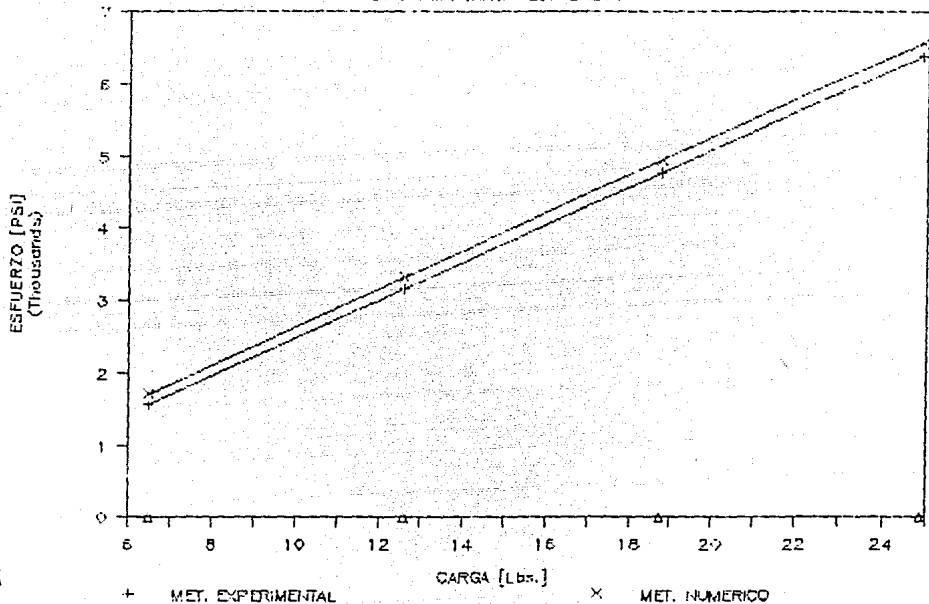


Figura 10.1 Gráfica carga-esfuerzo puntual

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA

COMPORTAMIENTO DEL ERROR

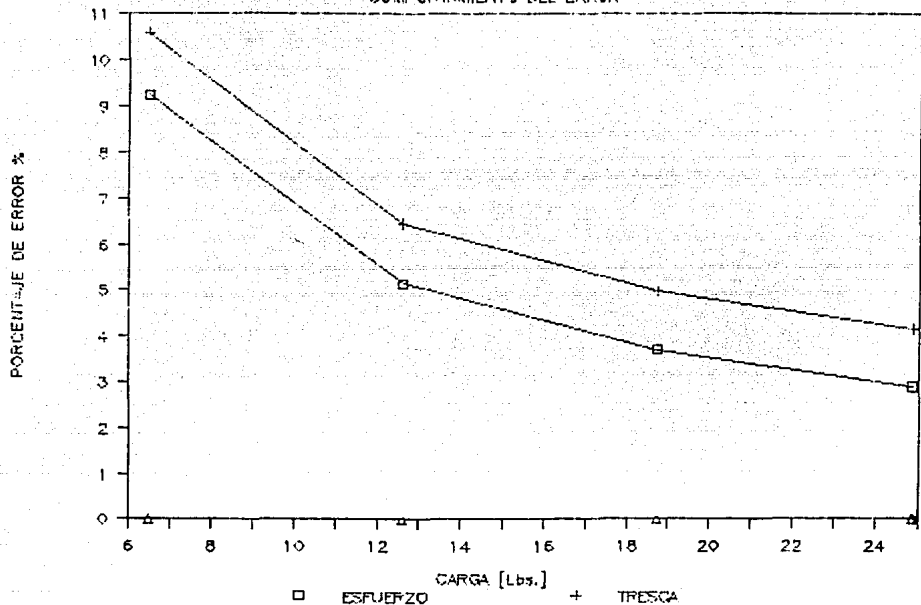


figura 10.2 Gráfica carga-esfuerzo valor tresca

Si es calculado un promedio de la diferencia que presenta el método numérico (M.E.F.) con respecto al dato experimental, encontraremos que para el esfuerzo puntual se tiene un promedio:

$$\frac{144.50 + 163.15 + 176.05 + 184.51}{4} = 167.05 \text{ PSI} \quad (10.3)$$

y para el valor Tresca se tiene un promedio de

$$\frac{82.74 + 102.01 + 118.41 + 132.58}{4} = 108.93 \text{ PSI} \quad (10.4)$$

entonces, generalizando podemos suponer que el método numérico incurre en una diferencia con respecto al valor experimental de aproximadamente 167 PSI para el esfuerzo puntual y de 109 para el valor Tresca.

Los porcentajes dados en la última columna de ambas tablas 10.2 y 10.3 fueron calculados considerando la siguiente ecuación:

$$\% e = \frac{\text{DATO NUM.} - \text{DATO EXP.}}{\text{DATO EXP.}} \times 100 \quad (10.5)$$

Estos porcentajes indican el error en que incurre el método numérico para cada carga aplicada, como es lógico este error va siendo menor conforme se aumenta la carga, ya que la diferencia que presenta el método numérico (que se mantiene aproximadamente constante para toda carga) influye cada vez menos en el resultado final. Esto lo podemos observar en la figura 10.3 donde se muestra como el porcentaje de error en los resultados del método numérico, tanto para esfuerzo puntual como para valor Tresca, tiende a tomar el valor de cero conforme se incrementa la carga, por lo tanto el hablar de un porcentaje de error promedio en el que incurre el método numérico no resulta de mucha ayuda para validar sus resultados.

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA

DIAGRAMA CARGA-TRESCA

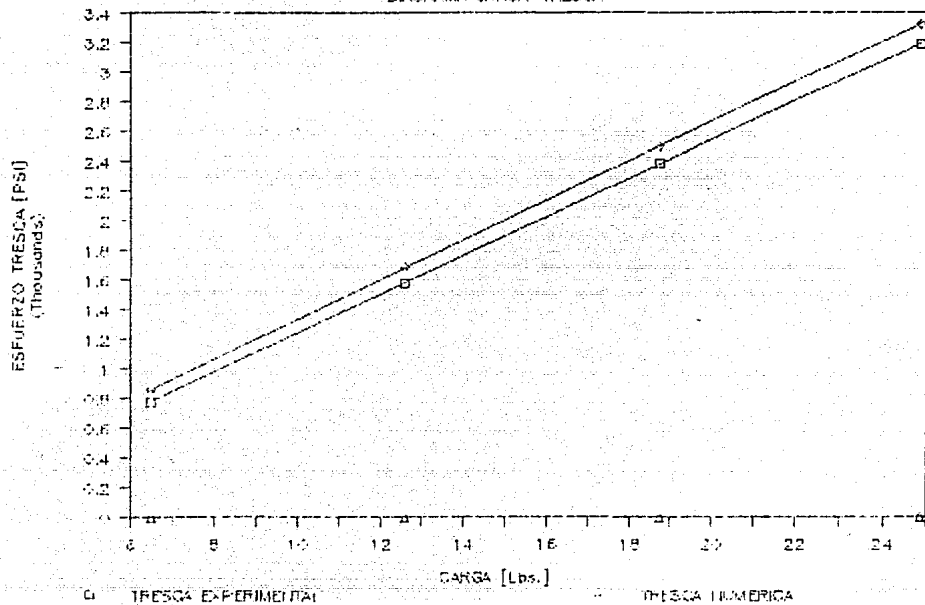


figura 10.3 Gráfica carga-porcentaje de error

También puede ser observado, en la figura 10.3 que el método numérico presenta un error mayor en el valor tresca comparado con el error presentado para el esfuerzo puntual.

Todo lo anterior se puede asegurar siempre y cuando la carga aplicada no revace el esfuerzo permisible del material (esfuerzo límite del rango elástico lineal). Sin embargo, no todo el error encontrado se le puede adjudicar al método numérico (método del elemento finito), ya que considero que parte del error se debe principalmente a las siguientes causas:

1. Que el material (plástico) de los taquetes usados para fijar la plataforma de empotramiento, haya cedido en cierto intervalo de acomodamiento, hasta llegar a ser más rígido que la propia barra de prueba.
2. La deformación medida por el strain gage, no es exactamente la presentada en un punto, sino un promedio de la deformación presentada por los puntos a lo largo de la longitud del filamento del strain gage. (long.gage 6.35 mm).
3. Por un mal alineamiento del strain gage con el eje longitudinal de la barra de prueba.
4. Que la forma en que se describió la aplicación de la carga en el archivo de datos del método numérico, no sea representativa de la forma en que fue aplicada la carga en el modelo físico.
5. Que la forma en que se describió el empotramiento en el método numérico, no represente al empotramiento físico de la barra en el modelo.
6. Que la carga especificada en el método numérico no sea exactamente la que se aplicó al modelo físico.

10.2 CONCLUSION.

Por lo visto en el análisis de resultados, se puede considerar que el método numérico (método del elemento finito) usado para el análisis de esfuerzos en estructuras, puede ser tan preciso como se requiera, ya que depende de una buena definición y apreciación física del problema sobre todo al aplicar o introducir las condiciones de frontera, las cuales son dadas en el momento de restringir los desplazamientos de algunos nodos, ya sea en forma parcial o total.

Por lo tanto, el análisis del elemento finito es una herramienta muy eficiente cuando se tiene el adiestramiento y experiencia en problemas de modelaje y análisis de esfuerzos en materiales.

Aún considerando que las diferencias de + 167 PSI y + 109 PSI encontrados en los resultados de esfuerzo puntual y valor Tresca sean los errores en que generalmente incurre el método numérico, éste resulta seguro para el diseño ya que el error se mantiene por encima del valor real, quedando como un factor de seguridad en el diseño de elementos o estructuras.

10.3 RECOMENDACIONES.

Si la seguridad depende de los resultados del análisis ejecutado por el método de elemento finito, es recomendable que exista la supervisión o verificado de un ingeniero con experiencia y categoría adecuada, ya que un análisis incompetente proporciona resultados los cuáles son, en el mejor de los casos absurdos y, en las peores circunstancias soluciones engañosas.

En lo que respecta al uso de strain gage, considero pertinente mencionar que durante la toma de lecturas de la etapa experimental de este trabajo, se presentaron problemas de inestabilidad en la señal del puente, debido principalmente a que en el lugar donde se llevaron a cabo las pruebas, es una zona con una alta concentración de señales de tipo electromagnético (por emisoras de radio, movimiento vehicular, etc), esto provocó que los cables usados para la conexión strain gage-puente presentara el "efecto de antena" que provocó interferencia en la inestabilidad en la señal del puente. Este problema se resolvió en forma provisional al juntar los cables por medio de una cinta adhesiva.

Se recomienda en trabajos posteriores, que al realizar mediciones con strain gage en zonas con altas concentraciones de señales electromagnéticas, trenzar o tejer todos los cables de conexión de los strain gage al puente, para contrarrestar la interferencia por el "efecto de antena" y lograr la estabilidad de la señal.

REFERENCIAS

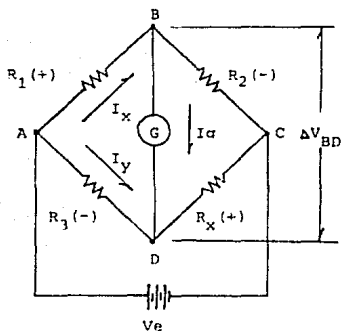
1. EGOR P. POPOV; TR. FRANCISCO PANIAGUA B.; INTRODUCCION A LA MECANICA DE SOLIDOS; EDIT. LIMUSA, MEXICO 1976 1a EDICION.
2. ENZO LEVI; MECANICA DEL MEDIO CONTINUO; EDIT. LIMUSA, MEXICO 1971 1a EDICION.
3. FERDINAND L SINGER, ANDREW PYTEL; TR RAIMUNDO GASPAR TORRENT, ANGEL GUTIERREZ VAZQUEZ; RESISTENCIA DE MATERIALES; EDIT. HARLAHARPER & ROW LATINOAMERICANA. 3a EDICION 1982.
4. S. P. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, THEORY OF ELASTICITY; EDIT. Mc GRAW-HILL INTERNATIONAL BOOK COMPANY; THIRT EDITION.
5. MORENO VILLANUEVA FRANCISCO; DISEÑO MECANICO DE TUBERIAS PARA LA COMISION EJECUTIVA HIDROELECTRICA DEL RIO LEMPA; CURSO IMPARTIDO EN AHUACHAPAN EL SALVADOR, INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS, MEXICO 1987.
6. MARK'S; MANUAL DEL INGENIERO MECANICO; EDIT. Mc GRAW-HILL, MEXICO 1989 2a EDICION.
7. A. J. DURELLI, E. A. PHILLIPS, C. H. TSAO; INTRODUCTION TO THE THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF STRESS AND STRAIN; EDIT. Mc GRAW-HILL BOOK COMPANY, INC; TORONTO 1958.
8. FERDINAND P. BEER, E. RUSSELL JOHNSTON Jr.; MECANICA DE MATERIALES; EDIT. Mc GAW-HILL. MEXICO 1987.
9. A. OLIVAREZ; INSTRUCTIVO PARA LA SELECCION Y APLICACION DE EXTENSOMETROS ELECTRICOS (STRAIN GAGE); PROYECTO 2752, INSTITUTO DE INGENIERIA U. N. A. M.; MEXICO 1985.
10. MEASUREMENTS GROUP, INC.; TEMPERATURE INDUCED APPARENT STRAIN AND GAGE FACTOR VARIATION IN STRAIN GAGES; TECH NOTE TN-504; 1976 NORTH CAROLINA.

11. MEASUREMENTS GROUP, INC.; OPTIMIZING STRAIN GAGE EXTIATION LEVELS; TECH NOTE TN-502; 1979 NORTH CAROLINA.
12. MEASUREMENTS GROUP, INC.; STRAIN GAGE SELECTION CRITERIA, PROCEDURE'S RECOMMENDATIONS; TECH NOTE TN-505; 1976 NORTH CAROLINA.
13. MEASUREMENTS GROUP, INC.; STRAIN GAGE INSTALLATIONS WITH M-BOND 200 ADHESIVE; BOLETIN INSTRUCCION B-127-9; 1979 NORTH CAROLINA.
14. MICRO-MEASUREMENTS DIVISION, MEASUREMENTS GROUP, INC.; SHORT FORM CATALOG 95 A; 1982 NORTH CAROLINA.
15. INSTRUMENTS DIVISION, MEASUREMENTS GROUP, INC.; MODEL P-3500 STRAIN INDICATOR; INSTRUCTION MANUAL; 1983 NORTH CAROLINA.
16. ASME BOILER AND PRESSURE VESSEL CODE; SECCION VIII-DIVISION 1 1983 EDITION.
17. APPLIED MATHEMATICS SECTION AND MECHANICAL ENGINEERING SECTION; COMPUTER CODES FOR TWO AND THREE DIMENSIONAL STATIC STRESS ANALYSIS: B1STAT-3 AND TR1STAT-3; TOPICAL REPORT No CISE 3090, 1986 MILAN ITALY.
18. APPLIED MATHEMATICS SECTION; FINITE ELEMENT PROGRAMS FOR STRUCIURAL PROBLEMS; MANUAL CISE No SMA-MI-86-001.; 1986 MILAN ITALY.
19. MORENO VILLANUEVA FRANCISCO; PRINCIPIOS ASOCIADOS AL DISEÑO MECANICO POR ELEMENTO FINITO; INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS, MEXICO.

A P E N D I C E A

A T E O R I A D E L P U E N T E D E W H E A T S T O N E .

El puente de Wheatstone, es un instrumento de medición que se utiliza para efectuar medidas de resistencia rápidas y precisas. En la figura A.1 se muestra el esquema del circuito de un puente de Wheatstone. Su funcionamiento esta basado en el equilibrio de los voltajes entre las ramas adyacentes al galvanómetro (G) de tal forma que al estar en equilibrio no exista un voltaje entre los puntos B y D. Esto es, cuando la corriente (I_g) en el galvanómetro es cero, se tiene que



$$V_{AB} = V_{AD} \Rightarrow I_x R_1 = I_y R_3$$

y también

$$V_{BC} = V_{DC} \Rightarrow I_x R_2 = I_y R_x$$

dividiendo ambas ecuaciones

$$R_1 R_x = R_2 R_3$$

por lo tanto

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (A.1)$$

figura A.1

Circuito del puente de Wheatstone.

Donde R_x representa la resistencia desconocida y R_1 , R_2 , R_3 son resistencias variables que se pueden graduar para obtener el

valor de R_x al equilibrar el sistema (hacer que $I_g = 0$).

Los signos marcados en el diagrama se apoyan en la denominada "ley de signos" la cual dice que a la salida de dos ramas adyacentes que experimentan un ΔR del mismo signo, tienen sentidos opuestos y queda demostrada de la forma siguiente:

del diagrama (figura A.1) puede observarse que

$$V_{AD} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V ; \quad V_{AD} = \frac{R_3}{R_3 + R_x} V ; \quad V_{BD} = V_{AB} - V_{AD}$$

entonces

$$V_{BD} = V \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_x} \right] \quad (A.2)$$

Para pequeñas variaciones de R_1 , R_2 , R_3 y R_4 podemos derivar la ecuación (A.2) quedando

$$\begin{aligned} \Delta V_{BD} &= V \left[\frac{\Delta R_1 (R_1 + R_2) - R_1 (\Delta R_1 + \Delta R_2)}{(R_1 + R_2)^2} - \frac{\Delta R_3 (R_3 + R_x) - R_3 (\Delta R_3 + \Delta R_x)}{(R_3 + R_x)^2} \right] \\ &= V \left[\frac{\Delta R_1 R_1 + \Delta R_1 R_2 - R_1 \Delta R_1 - R_1 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} - \frac{\Delta R_3 R_3 + \Delta R_3 R_x - R_3 \Delta R_3 - R_3 \Delta R_x}{(R_3 + R_x)^2} \right] \\ &= V \left[\frac{\Delta R_1 R_2 - R_1 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} - \frac{\Delta R_3 R_x - R_3 \Delta R_x}{(R_3 + R_x)^2} \right] \\ &= V \left[\frac{\Delta R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{R_1}{R_1} - \frac{R_1 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_3 R_x}{(R_3 + R_x)^2} \frac{R_3}{R_3} + \frac{R_3 \Delta R_x}{(R_3 + R_x)^2} \frac{R_x}{R_x} \right] \\ &= V \left[\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) - \frac{R_3 R_x}{(R_3 + R_x)^2} \left(\frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_x}{R_x} \right) \right] \end{aligned}$$

si el circuito está equilibrado $\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} &= V \left[\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) - \frac{R_x / R_3}{(1 + R_x / R_3)^2} \left(\frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_x}{R_x} \right) \right] \\ &= V \left[\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_x}{R_x} \right) \right] \end{aligned}$$

si $R_1 = R_2$; $R_3 = R_x$

$$\Delta V_{BD} = \frac{V}{4} \left[\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_x}{R_x} \right] \quad (A.3)$$

Por lo tanto de la ecuación (A.3) se puede observar que las resistencias R_1 y R_x con sus incrementos respectivos son consideradas positivas. Y las resistencias R_2 y R_3 con sus respectivos incrementos son consideradas negativas, en el equilibrio del sistema.

Como un ejemplo de la aplicación de la ley de signos consideremos dos resistencias strain gage activos colocados en lados opuestos de una viga, de tal forma que uno esté sujeto a tracción y el otro a compresión como se muestra en la figura A.2

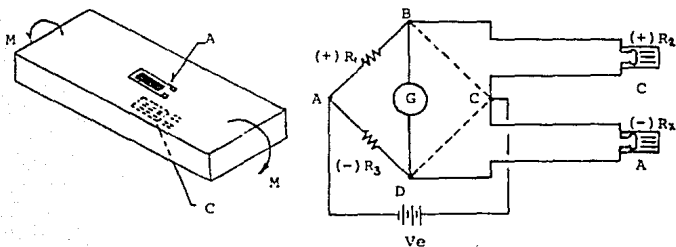


figura A.2 Circuito para la compensación del efecto de la temperatura en una barra sometida a flexión.

Como se observa R_2 y R_x ahora representan resistencias de tipo strain gage activos los cuales registrarán dos tipos de incrementos de resistencia, las debidas a deformación por efecto

de carga ($-\Delta R_z$, ΔR_x) y las debidas por deformación de tipo térmico las (ΔR_t).

ΔR_z es considerada negativa ya que se trata de un decremento de la resistencia del strain gage que al estar a compresión sufre un incremento del área transversal de los filamentos de la rejilla disminuyendo así su resistencia. De lo anterior y considerando que $\Delta R_z = \Delta R_x = 0$, la ecuación (A.3) queda expresada como sigue

$$\Delta V_{BD} = \frac{V}{4} \left[- \frac{(-\Delta R_z + \Delta T)}{R_z} + \frac{(\Delta R_x + \Delta T)}{R_x} \right]$$

como la resistencia de los strain gages son iguales ($R_z = R_x$), entonces

$$\Delta V_{BD} = \frac{V}{4} \left[\frac{\Delta R_z + \Delta R_x}{\text{Resistencia del Strain Gage}} \right] \quad (A.4)$$

De este modo se compensan los efectos por temperatura, y se duplica la señal del puente aumentando así su sensibilidad.

A P E N D I C E B

B P O T E N C I A S D E D I S I P A C I O N T E R M I C A (P ₀) E N W / P U L G ² (K W / M ²)

Precisión Requerida	OPERACION ESTÁTICA			OPERACION DINÁMICA		
	Alta	Media	Baja	Alta	Media	Baja
EXCELENTE piezas de Aluminio o Cobre.	2-5 (3.1-7.8)	5-10 (7.8-16)	10-20 (16-31)	5-10 (7.8-16)	10-20 (16-31)	20-50 (31-78)
BUENA piezas robustas de Acero.	1-2 (1.6-3.1)	2-5 (3.1-7.8)	5-10 (7.8-16)	5-10 (7.8-16)	10-20 (16-31)	20-50 (31-78)
REGULAR Acero Inoxidable.	0.5-1 (.78-1.6)	1-2 (1.6-3.1)	2-5 (3.1-7.8)	2-5 (3.1-7.8)	5-10 (7.8-16)	10-20 (16-31)
MALA Plásticos Reforzados.	0.1-0.2 (.16-.31)	0.2-0.5 (.31-.78)	0.5-1 (.78-1.6)	0.5-1 (.78-1.6)	1-2 (1.6-3.1)	2-5 (3.1-7.8)
MUY MALA Plásticos sin Refuerzo.	.01-.02 .016-.031	.02-.05 .031-.078	.05-0.1 .078-.16	.01-.05 .016-.078	.05-.2 .078-.31	0.2-0.5 0.31-0.78

A P E N D I C E C

C ARCHIVOS DE DATOS C.1 PROGRAMA GAMEB-3

Para iniciar la ejecución de GAMEB-3 es necesario formar un archivo de datos llamado GAMINP.XXX (donde .XXX representa una extensión arbitraria para identificación, en este caso será .VIG), en este archivo de datos se proporciona en tres fases: la información general sobre la geometría del objeto en estudio, el tipo de malla que se desea generar, y la orden de crear un archivo de resultados. Para este trabajo en particular los datos de entrada son dados en GAMINP.VIG como se muestra en seguida en la tabla C.1.

GAMINP.VIG

ADIRECTIVOS DE LA PRIMERA FASE: INFORMACION GENERAL

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA

IRID

POIN 0.000 0.0 0.785 0.000 0.0 0.0 0.000 0.465 0.0 0.000 0.465 0.785
7.874 0.0 0.785 7.874 0.0 0.0 7.874 0.465 0.0 7.874 0.465 0.785 END

ADIRECTIVOS DE LA SEGUNDA FASE: GENERACION DE LA MALLA

MESH ESA1 SOL2 1 2 3 4 5 6 7 8 SPAW 10

ADIRECTIVOS DE LA TERCERA FASE: GENERACION DE ARCHIVO

FINE

NOTA: EL CARACTER A INDICA UN COMENTARIO
(ESTOS PUEDEN O NO SER INCLUIDOS)

tabla C.1 Archivo de datos GAMINP.VIG

De este archivo, mostrado en la tabla C.1, la primer línea está ocupada por el directivo TITULO (información alfanumérica de hasta 80 caracteres).

- TRID establece la generación de una geometría tridimensional.
- PDIN<c1,c2,c3>END impone la lista de puntos definidos y fin de la primera fase. c1, c2 y c3 representan las coordenadas en direcciones X, Y y Z respectivamente de cada uno de los puntos definidos del bloque a desarrollar. (ver figura C.1b).

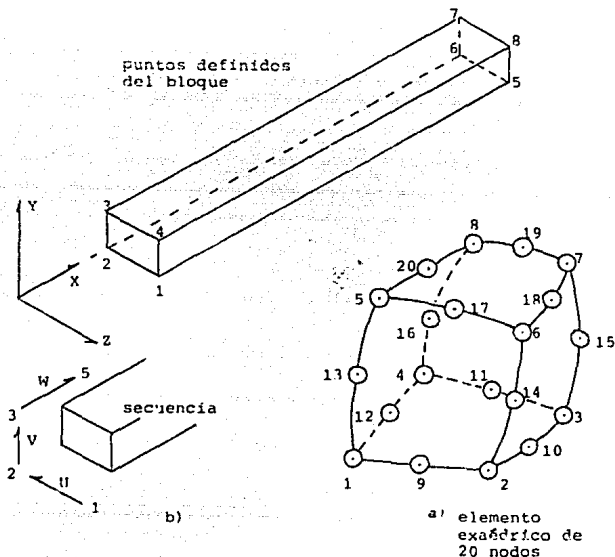


figura C.1 a) Elemento hexaédrico de 20 nodos
b) Orden de nodos definidos en el bloque.

MESH genera un bloque de elementos, que en este caso lleva consigo la siguiente información referente:

ESAI define que se desea generar un bloque de tipo *hexaédrico lineal* (figura C.1b).

SOL2 indica que se desea que el bloque generado este formado por elementos *hexaédricos de 20 nodos* del tipo mostrado en la figura C.1a. La selección de la clase de elemento depende del problema específico.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 8 son los puntos definidos del bloque cuyas coordenadas fueron dadas en POIN-END. Los números son dados de acuerdo al orden establecido en POIN que en este caso es el orden mostrado por la figura C.1b.

SPAW 10 define que se desean generar 10 elementos a lo largo del eje longitudinal W del bloque (figura C.1b).

FINE finaliza la ejecución de GAMEB-3 creando un archivo llamado GAMOUT.VIG que describe el número global de nodos y elementos generados, así como las coordenadas e identificación de cada nodo. Algunos de los resultados arrojados por GAMOUT.VIG (datos seleccionados) son mostrados en la tabla C.2

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VISA EMPOTRADA

LISTA DEGLI ELEMENTI

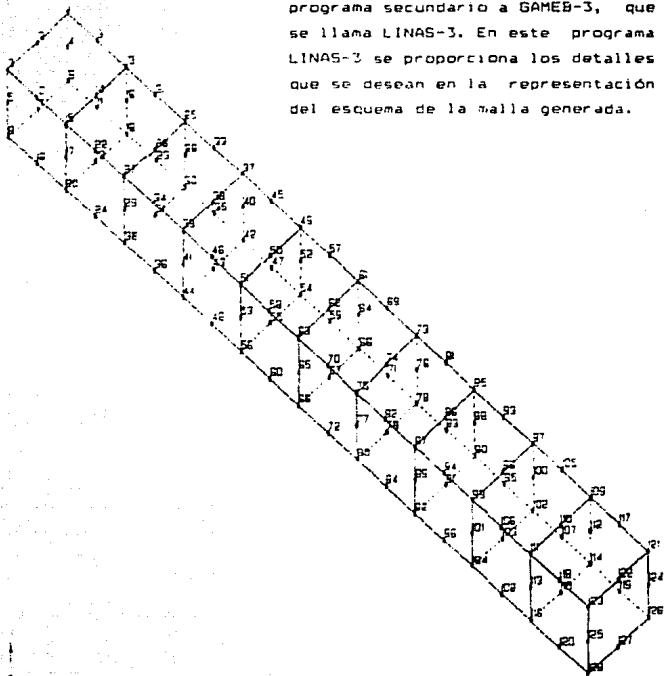
BLOCCO ELEM.	TIPO	MODI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	GENEALTI	128 MODI FINO A 128)																				
1	SOL2		1	3	8	6	13	15	20	18	2	5	7	4	9	10	12	11	14	17	19	16
2	SOL2		13	15	20	18	25	27	32	30	14	17	19	16	21	22	24	23	26	29	31	28
3	SOL2		25	27	32	30	37	39	44	42	26	29	31	28	35	34	36	35	38	41	43	40
4	SOL2		37	39	44	42	49	51	56	54	38	41	43	40	45	46	48	47	50	53	55	52
5	SOL2		49	51	56	54	61	63	68	66	50	53	55	52	57	58	60	59	62	65	67	64
6	SOL2		61	63	68	66	73	75	80	78	62	65	67	64	69	70	72	71	74	77	79	76
7	SOL2		73	75	80	78	85	87	92	90	74	77	79	76	81	82	84	83	86	89	91	88
8	SOL2		85	87	92	90	97	99	104	102	86	89	91	88	93	94	96	95	98	101	103	100
9	SOL2		97	99	104	102	109	111	116	114	98	101	103	100	105	106	108	107	110	113	115	112
10	SOL2		109	111	116	114	121	123	128	126	110	113	115	112	117	118	120	119	122	125	127	124

COORDINATE DEI MODI

MODI	COORD.X	COORD.Y	COORD.Z	MODI	COORD.X	COORD.Y	COORD.Z
1	0.00000E+00	0.00000E+00	7.85000E-01	2	0.00000E+00	0.00000E+00	3.92500E-01
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4	0.00000E+00	2.32500E-01	7.85000E-01
5	0.00000E+00	2.32500E-01	0.00000E+00	6	0.00000E+00	4.65000E-01	7.85000E-01
7	0.00000E+00	4.65000E-01	3.92500E-01	8	0.00000E+00	4.65000E-01	0.00000E+00
9	3.93700E-01	0.00000E+00	7.85000E-01	10	3.93700E-01	0.00000E+00	0.00000E+00
11	3.93700E-01	4.65000E-01	7.85000E-01	12	3.93700E-01	4.65000E-01	0.00000E+00
13	7.87400E-01	0.00000E+00	7.85000E-01	14	7.87400E-01	0.00000E+00	3.92500E-01
15	7.87400E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	16	7.87400E-01	2.32500E-01	7.85000E-01
17	7.87400E-01	2.32500E-01	0.00000E+00	18	7.87400E-01	4.65000E-01	7.85000E-01
19	7.87400E-01	4.65000E-01	3.92500E-01	20	7.87400E-01	4.65000E-01	0.00000E+00
109	7.08660E+00	0.00000E+00	7.85000E-01	110	7.08660E+00	0.00000E+00	3.92500E-01
111	7.08660E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	112	7.08660E+00	2.32500E-01	7.85000E-01
113	7.08660E+00	2.32500E-01	0.00000E+00	114	7.08660E+00	4.65000E-01	7.85000E-01
115	7.08660E+00	4.65000E-01	3.92500E-01	116	7.08660E+00	4.65000E-01	0.00000E+00
117	7.48030E+00	0.00000E+00	7.85000E-01	118	7.48030E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
119	7.48030E+00	4.65000E-01	7.85000E-01	120	7.48030E+00	4.65000E-01	0.00000E+00
121	7.87400E+00	0.00000E+00	7.85000E-01	122	7.87400E+00	0.00000E+00	3.92500E-01
123	7.87400E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	124	7.87400E+00	2.32500E-01	7.85000E-01
125	7.87400E+00	2.32500E-01	0.00000E+00	126	7.87400E+00	4.65000E-01	7.85000E-01
127	7.87400E+00	4.65000E-01	3.92500E-01	128	7.87400E+00	4.65000E-01	0.00000E+00

tabla C.2 Parte del archivo de resultados GAMOUT.VIG

Esta figura es desarrollada por un programa secundario a GAMEB-3, que se llama LINAS-3. En este programa LINAS-3 se proporciona los detalles que se desean en la representación del esquema de la malla generada.



ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA
DESARROLLO DE LA GEOMETRÍA NODAL EN LA VIGA

LINAS
1-88-80
CNE-SCA

figura C.2 Red nodal generada de la barra de prueba

En la tabla C.2 se puede observar que se generaron un total de 128 nodos repartidos en los 10 elementos que forman el bloque, de estos nodos es mostrada la nueva identificación y la localización de acuerdo con el orden mostrado por la figura C.2 .

De esta tabla C.2 es importante observar que los nodos 9, 10, 11 y 12 están localizados a 1cm (0.3937 in) del origen en dirección X, punto en el cual está montado el strain gage en el modelo experimental, por lo tanto estos nodos son de especial interés para la comparación y validación de resultados del método numérico con las del método experimental.

C.2 PROGRAMA TRISTAT-3

Para la ejecución del programa TRISTAT-3 es necesario crear un archivo de datos que se llama TRISINF.XXX (donde .XXX representa una extensión arbitraria para identificación, en nuestro caso será .VIG), este archivo TRISINF.XXX consta de cuatro niveles lógicos que son dados en la siguiente tabla C.3.

NIVEL	DESCRIPCION
1	Generación de la malla estructural (GAMEB-3)
2	Definición de constantes físicas, propiedades del material y condiciones de frontera.
3	Cálculo de matriz de rigidez en elementos.
4	Solución de ecuaciones y cálculo de esfuerzo nodal.

tabla C.3 Niveles lógicos del programa TRISTAT

El desarrollo de este archivo, para nuestro caso en particular TRISINF.VIG y para la primera prueba a realizar con 2.933 kg (6.466 lb) es mostrado en la tabla C.4

TRISINP.VIG

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA

A NIVEL 1 GENERACION DE LA MALLA ESTRUCTURAL (ESTA YA SE DESARROLLO EN GAMER 3)

A NIVEL 2 PROPIEDADES DEL MATERIAL Y CONDICIONES DE FRONTERA

A GRUPO 1 INFORMACION GENERAL

2.0 4.0

1.0 3.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 0.0

A GRUPO 2 PROPIEDADES DEL MATERIAL

29.3E+06 1.3 0.0 0.0 0.0 0.0

A GRUPO 3 CONDICIONES DE FRONTERA: MODOS SIN DESPLAZAMIENTO

2.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0

4.0 5.0

4.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

1.0 3.0 6.0 8.0

2.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0

2.0 7.0

A GRUPO 4 CONDICIONES DE FRONTERA: RESTRICCIONES ELASTICAS (NO EXISTEN)

A GRUPO 5 CONDICIONES DE FRONTERA: MODOS CON CARGAS CONCENTRADAS

122. 0.0 5.233 0.0

127. 0.0 3.233 0.0

A GRUPO 6 CONDICIONES DE FRONTERA: DESPLAZAMIENTO FIJO EN DIRECCION PREESCRITA (NO EXISTE)

A GRUPO 7 ACELERACION (NO EXISTE)

A GRUPO 8 CONDICIONES DE FRONTERA: PARAMETROS QUE DEFINEN LA VARIACION LINEAL DE PRESION MODAL (NO EXISTE)

A GRUPO 9 CONDICIONES DE FRONTERA: PRESION DEL ELEMENTO (NO EXISTE)

A GRUPO 10 CONDICIONES DE FRONTERA: TEMPERATURA MODAL (DESPRECIADA)

A NIVEL 3 CALCULO DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO (SIN TARJETAS)

A NIVEL 4 SOLUCION DE ECUACIONES DESCRITAS

1.0 1.0 1.0

NOTA: LOS BLOQUES MARCADOS CON A SON COMENTARIOS AGREGADOS
PARA UNA MEJOR COMPRESION DEL ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA
(ESTOS. NO DEBEN SER INCLUIDOS PARA LA EJECUCION)

tabla C.4 Archivo de datos TRISINP.VIG

Como un medio para facilitar la comprensión de este archivo (tabla C.4), se han agregado comentarios (renglones marcados) que normalmente para la ejecución de TRISTAT-3 no deben ser incluidos. Como se observa el primer dato del archivo es un TITULO (información alfanumérica de hasta 80 caracteres).

En el nivel 1 se tiene el desarrollo de la red nodal del bloque, el cual ya fué elaborado en el programa GAMEB-3.

El nivel 2 se ha dividido en 10 grupos (tabla C.4) de los cuales solo a los grupos 1, 2, 3, y 5 se les carga la información siguiente:

En el primer renglón del grupo 1; el dato 0.2 indica que se desea iniciar la ejecución a partir del nivel 2, y 0.4 indica que finalice en el nivel 4.

En el segundo renglón del grupo 1 la información proporcionada en el orden en que aparecen es:

- 1.0 número total de materiales a manejar.
- 3.0 establece que se darán 3 diferentes tipos de restricciones (en direcciones x , y , z) al movimiento de nodos seleccionados.
- 0.0 indica que no existen nodos con restricciones elásticas.
- 2.0 establece que la carga será concentrada en 2 nodos.
- 0.0 indica la no existencia de nodos con restricciones de desplazamiento en una dirección preescrita (dirección distinta al de los ejes x , y , z).
- 0.0 establece que no existen nodos sometidos a una variación lineal de presión.
- 0.0 indica que se desprecia fuerzas de cuerpo.
- 0.0 indica que se desprecia la temperatura nodal.

El grupo 2 en este caso esta formado por 1 renglón con la siguiente información (en el orden en que se presentan):

29.3E+06 es el modulo de elasticidad del material usado.

0.3 es la razón de Poisson's del material.

0.0 indica que se desconoce la densidad másica del material

0.0 indica que se desconoce el coeficiente de dilatación térmica en dirección X.

0.0 indica que se desconoce el coeficiente de dilatación térmica en dirección Y.

0.0 indica que se desconoce el coeficiente de dilatación térmica en dirección Z.

De este grupo 2 se dará tantos renglones como materiales se manejen (de la misma forma como fué desarrollado el renglón anterior).

En el grupo 3, se da la información (por medio de pares de renglones) de los nodos con restricciones en su desplazamiento en dirección x, y, z. Es en este punto donde se trata de dar una descripción lo más aproximada del empotramiento (condiciones de frontera) que se esta dando en el modelo experimental. para esto considero que los nodos en el empotramiento tendrán los desplazamientos mostrados en la figura C.3

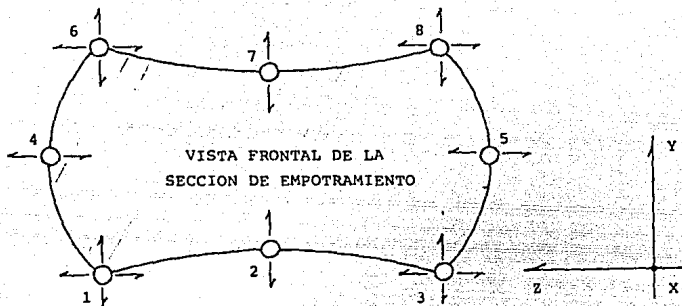


figura C.3 Condiciones de frontera en el empotramiento

En el primer renglón del grupo 3, para este caso (tabla C.4), se tiene en orden de aparición la siguiente información:

- 2.0 indica que 2 nodos tendrán restricción en su desplazamiento en las siguientes direcciones.
- 1.0 indica desplazamiento fijo (0) en dirección X.
- 1.0 indica desplazamiento fijo (0) en dirección Y.
- 0.0 indica desplazamiento libre en dirección Z.
- 0.0 indica nulo desplazamiento preestablecido en X.
- 0.0 indica nulo desplazamiento preestablecido en Y.
- 0.0 indica nulo desplazamiento preestablecido en Z.

En el segundo renglón del grupo 3 se proporciona el número del nodo(s) bajo la restricción establecida que en este caso como se observa en la tabla C.4 es el nodo 4 y nodo 5. Bajo el mismo criterio fueron desarrollados los dos siguientes pares de renglones.

En el grupo 5 se da la información sobre los nodos con cargas concentradas. Es en este punto donde se trata de dar una definición lo más aproximada, de como es aplicada la carga en el modelo experimental, para esto considero que esta repartida en partes iguales en los nodos 122 y 127.

En el primer renglón del grupo 5 en orden de aparición (tabla C.4) se tiene:

122. indica que parte de la carga será aplicada en el nodo de nombre 122.

0.0 indica que en la dirección X no existe carga aplicada.

3.233 es la carga aplicada al nodo 122 en la dirección Y que en este caso es la mitad de la carga total aplicada (6.466 lbs).

0.0 indica que en la dirección Z no existe carga aplicada.

De igual manera para el segundo renglón se indica que el nodo de nombre 127 esta bajo las mismas condiciones. Es claro que por cada nodo cargado se dará un renglón de información.

Los grupos 4, 6, 7, 8, 9 y 10 en este caso no fueron aplicados pero son mencionados en la tabla C.4 para que se tenga idea de lo completo que puede ser un análisis de esfuerzos por este programa TRISTAT-3

En el nivel 3 se genera el cálculo de la matriz de rigidez que describe al bloque en estudio. En este nivel 3 no es necesario introducir datos ya que trabaja con los datos proporcionados en el nivel 2.

Por último en el nivel 4 se indica en un sólo renglón por medio de "0.1 = si y 0.0 = no" si se desea el cálculo de:

- Cálculo de las reacciones en nodos.
- Cálculo del esfuerzo principal de acuerdo a los criterios TRESCA y VON MISES.
- Cálculo del máximo y mínimo valor de desplazamiento, esfuerzo, reacciones nodal y esfuerzos principales.

En la tabla C.5 son presentados los archivos TRISINP.VIG tal y como fueron dados para cada una de las pruebas, notese que solo cambian en la carga aplicada. Finalmente algunos de los resultados obtenidos son presentados en el apéndice D.

A PRIMER PRUEBA: CARGA 6.466 LBS.

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA
2.0 4.0
1.0 3.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 0.0
29.3E+06 0.3 0.0 0.0 0.0 0.0
2.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
4.0 5.0
4.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1.0 3.0 6.0 8.0
2.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
2.0 7.0
122. 0.0 3.233 0.0
127. 0.0 3.233 0.0
1.0 1.0 1.0

A SEGUNDA PRUEBA: CARGA 12.604 LBS.

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA
2.0 4.0
1.0 3.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 0.0
29.3E+06 0.3 0.0 0.0 0.0 0.0
2.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
4.0 5.0
4.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1.0 3.0 6.0 8.0
2.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
2.0 7.0
122. 0.0 6.302 0.0
127. 0.0 6.302 0.0
1.0 1.0 1.0

A TERCER PRUEBA: CARGA 18.738 LBS.

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA
2.0 4.0
1.0 3.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 0.0
29.3E+06 0.3 0.0 0.0 0.0 0.0
2.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
4.0 5.0
4.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1.0 3.0 6.0 8.0
2.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
2.0 7.0
122. 0.0 9.369 0.0
127. 0.0 9.369 0.0
1.0 1.0 1.0

A CUARTA PRUEBA: CARGA 24.874 LBS.

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA
2.0 4.0
1.0 3.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 0.0
29.3E+06 0.3 0.0 0.0 0.0 0.0
2.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
4.0 5.0
4.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1.0 3.0 6.0 8.0
2.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
2.0 7.0
122. 0.0 12.437 0.0
127. 0.0 12.437 0.0
1.0 1.0 1.0

tabla C.5 Archivos TRISINP.VIG para las 4 pruebas

A P E N D I C E D

DICE - DCA

RELEASE 3 - MAGGIO 1986

```

AAAAAAAAAAAA  AA      AA      AA
AAAAAAAAAAAA  AA      AAAA     AAAA
  AA          AA      AAAA     AAAA
AA  AA  AAAA  AA      AAA  AA  AAAA  AA
AA  AA  AAAA  AA      AAAA  AA  AAAA  AA
AA  AAA  AA  AA      AA  AA  AA  AA  AA
AA  AAA  AA      AA  AA  AA  AA  AAAA  AA
AA  AA      AA      AA  AA  AA  AAAA  AA
AA  AA      AA      AA  AA  AA  AA  AA  AA
AA  AA      AAA  AAAA  AAA  AAAA  AAAA
AA  AA      AA  AAAA  AA  AAAA  AA
  
```

```

      CC
      0000
CCCCCC  100001  SSSSSSSSEEEEEEE
CC  CC  1111  SS  EE  E
CC      11  SSSS  EE  E
CC      11  SSSS  EEEE
CC      11  SSSS  EE  E
CC      11  SS  EE  E
CCCCCC1111111111SSSSSS  EEEEEEE
  
```

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA

DATA DI ESECUZIONE : 22-AUG-90

INIZ. 2 (LIVELLO INIZIO CALCOLO)
 IFIN. 4 (LIVELLO FINE CALCOLO)

RESULTADOS PARA LA PRIMERA PRUEBA: CARGA 6.466 LBS.

---MODI CON FORZE CONCENTRATE ---

NODO	COMPONENTE X	COMPONENTE Y	COMPONENTE Z	NODO	COMPONENTE X	COMPONENTE Y	COMPONENTE Z
122	0.00000E+00	0.32330E+01	0.00000E+00	127	0.00000E+00	0.32330E+01	0.00000E+00

SFORZI MODALI

NODO	SIGMA-X	SIGMA-Y	SIGMA-Z	TAU-XY	TAU-YZ	TAU-ZX
1	1.7822858E+03	-1.0068933E+01	-3.0172500E+01	4.7421888E+01	-2.7761419E+01	1.1115925E+01
2	1.7847037E+03	-9.0326760E+00	-2.9136243E+01	2.6514731E+01	3.3158753E-11	2.6995944E-10
3	1.7822858E+03	-1.0068933E+01	-3.0172500E+01	4.7421888E+01	2.7761419E+01	-1.1115925E+01
4	2.8217806E-10	-6.1193524E-12	-9.0298961E-12	5.0255941E+01	-2.7761419E+01	-1.1858113E-11
5	-2.7414113E-10	2.2765252E-12	7.2313991E-12	5.0255941E+01	2.7761419E+01	-1.2153124E-11
6	-1.7822858E+03	1.0068933E+01	3.0172500E+01	4.7421888E+01	-2.7761419E+01	-1.1115925E+01
7	-1.7847037E+03	9.0326760E+00	2.9136243E+01	2.6514731E+01	5.4552824E-11	-3.0458227E-10
8	-1.7822858E+03	1.0068933E+01	3.0172500E+01	4.7421888E+01	2.7761419E+01	1.1115925E+01
9	1.7070737E+03	-3.5127638E+00	-1.6289085E+01	2.1712824E+01	-8.2071546E+00	1.3940563E+01
10	1.7070737E+03	-3.5127638E+00	-1.6289085E+01	2.1712824E+01	8.2071546E+00	-1.3940563E+01
11	-1.7070737E+03	3.5127638E+00	1.6289085E+01	2.1712824E+01	-8.2071546E+00	-1.3940563E+01
12	-1.7070737E+03	3.5127638E+00	1.6289085E+01	2.1712824E+01	8.2071546E+00	1.3940563E+01

SFORZI MODALI PRINCIPALI

NODO 1	SIG. EQ. (VON MISES)	1.8051043E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	9.1698608E+02
NODO 2	SIG. EQ. (VON MISES)	1.8044567E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	9.0711591E+02
NODO 3	SIG. EQ. (VON MISES)	1.8051043E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	9.1698608E+02
NODO 4	SIG. EQ. (VON MISES)	9.9443793E+01	SIG. EQ. (TRESCA)	5.7413901E+01
NODO 5	SIG. EQ. (VON MISES)	9.9443793E+01	SIG. EQ. (TRESCA)	5.7413901E+01
NODO 6	SIG. EQ. (VON MISES)	1.8051043E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	9.1698608E+02
NODO 7	SIG. EQ. (VON MISES)	1.8044567E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	9.0711591E+02
NODO 8	SIG. EQ. (VON MISES)	1.8051043E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	9.1698608E+02
NODO 9	SIG. EQ. (VON MISES)	1.7176506E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	8.6402228E+02
NODO 10	SIG. EQ. (VON MISES)	1.7176506E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	8.6402228E+02
NODO 11	SIG. EQ. (VON MISES)	1.7176506E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	8.6402228E+02
NODO 12	SIG. EQ. (VON MISES)	1.7176506E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	8.6402228E+02

STAMPA MINIMI E MASSIMI

SIGMA EQ. DI VON-MISES	MINIMA	6.44723E+01	AL	MOD0	122, 127
SIGMA EQ. DI VON-MISES	MASSIMA	1.89510E+03	AL	MOD0	1,3,6,8
SIGMA EQ. DI TRESCA	MINIMA	3.42519E+01	AL	MOD0	122, 127
SIGMA EQ. DI TRESCA	MASSIMA	9.16986E+02	AL	MOD0	1,3,6,8
SFORZO PRINC. MINIMO	P1	-1.78510E+03	AL	MOD0	7
SFORZO PRINC. MASSIMO	P1	1.78510E+03	AL	MOD0	2
SFORZO PRINC. MINIMO	P2	-5.74139E+01	AL	MOD0	4
SFORZO PRINC. MASSIMO	P2	5.74139E+01	AL	MOD0	5
SFORZO PRINC. MINIMO	P3	-5.03732E+01	AL	MOD0	3
SFORZO PRINC. MASSIMO	P3	5.03732E+01	AL	MOD0	8
REAZ. VINC. X	MINIMO	-7.29401E+01	AL	MOD0	2
REAZ. VINC. X	MASSIMO	7.29401E+01	AL	MOD0	7
REAZ. VINC. Y	MINIMO	-3.23360E+00	AL	MOD0	4
REAZ. VINC. Y	MASSIMO	0.03900E+00	AL	MOD0	1
REAZ. VINC. Z	MINIMO	-1.79268E-11	AL	MOD0	2
REAZ. VINC. Z	MASSIMO	2.17819E-11	AL	MOD0	7
SIGMA X	MINIMA	-1.78470E+03	AL	MOD0	7
SIGMA X	MASSIMA	1.78470E+03	AL	MOD0	2
SIGMA Y	MINIMA	-1.78086E+01	AL	MOD0	122
SIGMA Y	MASSIMA	1.78086E+01	AL	MOD0	127
SIGMA Z	MINIMA	-3.01725E+01	AL	MOD0	3
SIGMA Z	MASSIMA	3.01725E+01	AL	MOD0	8

RESULTADOS PARA LA SEGUNDA PRUEBA: CARGA 12.604 LBS.

MODI CON FORZE CONCENTRATE ---

NODO	COMPONENTE X	COMPONENTE Y	COMPONENTE Z	NODO	COMPONENTE X	COMPONENTE Y	COMPONENTE Z
122	0.00000E+00	0.63020E+01	0.00000E+00	127	0.00000E+00	0.63020E+01	0.00000E+00

SFORZI MODALI

NODO	SIGMA-X	SIGMA-Y	SIGMA-Z	TAU-XY	TAU-YZ	TAU-XZ
1	3.4741618E+03	-1.9627100E+01	-5.8814443E+01	9.2438211E+01	-5.4114588E+01	2.1667975E+01
2	3.4788750E+03	-1.7627152E+01	-5.6794495E+01	5.1684453E+01	6.5060861E-11	5.2700973E-10
3	3.4741618E+03	-1.9627100E+01	-5.8814443E+01	9.2438211E+01	5.4114588E+01	-2.1667975E+01
4	5.4642542E-10	-1.2348043E-11	-1.7742099E-11	7.7962555E+01	-5.4114588E+01	-2.2807320E-11
5	-5.3213645E-10	3.5339113E-12	1.3760918E-11	9.7962555E+01	5.4114588E+01	-2.3126711E-11
6	-3.4741618E+03	1.9627100E+01	5.8814443E+01	9.2438211E+01	-5.4114588E+01	-2.1667975E+01
7	-3.4788750E+03	1.7627152E+01	5.6794495E+01	5.1684453E+01	1.0584135E-10	-5.9328959E-10
8	-3.4741618E+03	1.9627100E+01	5.8814443E+01	9.2438211E+01	5.4114588E+01	2.1667975E+01
9	3.3275528E+03	-6.8473361E+00	-3.1751876E+01	4.2324224E+01	-1.5997986E+01	2.7173965E+01
10	3.3275528E+03	-6.8473361E+00	-3.1751876E+01	4.2324224E+01	1.5997986E+01	-2.7173965E+01
11	-3.3275528E+03	6.8473361E+00	3.1751876E+01	4.2324224E+01	-1.5997986E+01	-2.7173965E+01
12	-3.3275528E+03	6.8473361E+00	3.1751876E+01	4.2324224E+01	1.5997986E+01	2.7173965E+01

SFORZI MODALI PRINCIPALI

NODO	1	SIG. ED. (VDM MISE)	3.5186413E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.7874563E+03
NODO	2	SIG. ED. (VDM MISE)	3.5173790E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.7682167E+03
NODO	3	SIG. ED. (VDM MISE)	3.5186413E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.7874563E+03
NODO	4	SIG. ED. (VDM MISE)	1.9384311E+02	SIG. ED. (TRESCA)	1.1191537E+02
NODO	5	SIG. ED. (VDM MISE)	1.9384311E+02	SIG. ED. (TRESCA)	1.1191537E+02
NODO	6	SIG. ED. (VDM MISE)	3.5186413E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.7874563E+03
NODO	7	SIG. ED. (VDM MISE)	3.5173790E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.7682167E+03
NODO	8	SIG. ED. (VDM MISE)	3.5186413E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.7874563E+03
NODO	9	SIG. ED. (VDM MISE)	3.3481702E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.6842154E+03
NODO	10	SIG. ED. (VDM MISE)	3.3481702E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.6842154E+03
NODO	11	SIG. ED. (VDM MISE)	3.3481702E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.6842154E+03
NODO	12	SIG. ED. (VDM MISE)	3.3481702E+03	SIG. ED. (TRESCA)	1.6842154E+03

STANZA MINIMI E MASSIMI

SIGMA EQ. DI VON-MISES MINIMA	1.25674E+02	AL NODO	122, 127
SIGMA EQ. DI VON-MISES MASSIMA	3.51864E+03	AL NODO	1,3,6,8
SIGMA EQ. DI TRESCA MINIMA	6.67663E+01	AL NODO	122, 127
SIGMA EQ. DI TRESCA MASSIMA	1.78746E+03	AL NODO	1,3,6,8
SFORZO PRINC. MINIMO P1	-3.47964E+03	AL NODO	7
SFORZO PRINC. MASSIMO P1	3.47964E+03	AL NODO	2
SFORZO PRINC. MINIMO P2	-1.11915E+02	AL NODO	4
SFORZO PRINC. MASSIMO P2	1.11915E+02	AL NODO	5
SFORZO PRINC. MINIMO P3	-5.81911E+01	AL NODO	3
SFORZO PRINC. MASSIMO P3	5.81911E+01	AL NODO	8
REAZ. VINC. X	MINIMO -1.42188E+02	AL NODO	2
REAZ. VINC. X	MASSIMO 1.42188E+02	AL NODO	7
REAZ. VINC. Y	MINIMO -6.30200E+00	AL NODO	4
REAZ. VINC. Y	MASSIMO 0.00000E+00	AL NODO	1
REAZ. VINC. Z	MINIMO -3.50474E-11	AL NODO	2
REAZ. VINC. Z	MASSIMO 4.24163E-11	AL NODO	7
SIGMA X	MINIMA -3.47627E+02	AL NODO	7
SIGMA X	MASSIMA 3.47627E+02	AL NODO	2
SIGMA Y	MINIMA -3.31544E+01	AL NODO	122
SIGMA Y	MASSIMA 3.31544E+01	AL NODO	127
SIGMA Z	MINIMA -5.88144E+01	AL NODO	3
SIGMA Z	MASSIMA 5.88144E+01	AL NODO	8

RESULTADOS PARA LA TERCER PRUEBA: CARGA 18.738 LBS.

MODI CON FORZI CONCENTRATE ---

MODI	COMPONENTE X	COMPONENTE Y	COMPONENTE Z	MODI	COMPONENTE X	COMPONENTE Y	COMPONENTE Z
122	0.00000E+00	0.93690E+01	0.00000E+00	127	0.00000E+00	0.93690E+01	0.00000E+00

SFORZI MODALI

MODI	SIGMA-X	SIGMA-Y	SIGMA-Z	TAU-XY	TAU-YZ	TAU-ZX
1	5.1649352E+03	-2.9179039E+01	-8.7437720E+01	1.3742520E+02	-8.0450533E-01	3.2213147E+01
2	5.1719422E+03	-2.6176041E+01	-8.4434723E+01	7.6837772E+01	9.699924E-11	7.8362585E-10
3	5.1649352E+03	-2.9179039E+01	-8.7437720E+01	1.3742520E+02	8.0450583E+01	-3.2213147E+01
4	6.1453164E-10	-1.6712992E-11	-2.5733460E-11	1.4563808E+02	-8.0450583E+01	-3.4054196E-11
5	-7.9070922E-10	1.3151236E-12	1.0990449E-11	1.4563808E+02	8.0450583E+01	-3.4467660E-11
6	-5.1649352E+03	2.9179039E+01	8.7437720E+01	1.3742520E+02	-8.0450583E+01	-3.2213147E+01
7	-5.1719422E+03	2.6176041E+01	8.4434723E+01	7.6837772E+01	1.5739411E-10	-8.8232661E-10
8	-5.1649352E+03	2.9179039E+01	8.7437720E+01	1.3742520E+02	8.0450533E+01	3.2213147E+01
9	4.9469759E+03	-1.0179735E+01	-4.7204591E+01	6.2922192E+01	-2.3783740E+01	4.0398742E+01
10	4.9469759E+03	-1.0179735E+01	-4.7204591E+01	6.2922192E+01	2.3783740E+01	-4.0398742E+01
11	-4.9469759E+03	1.0179735E+01	4.7204591E+01	6.2922192E+01	-2.3783740E+01	-4.0398742E+01
12	-4.9469759E+03	1.0179735E+01	4.7204591E+01	6.2922192E+01	2.3783740E+01	4.0398742E+01

SFORZI MODALI PRINCIPALI

MODI	1	SIG. ED. (VON MISES)	5.2310617E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.6573593E+03
MODI	2	SIG. ED. (VON MISES)	5.2291849E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.6287562E+03
MODI	3	SIG. ED. (VON MISES)	5.2310617E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.6573593E+03
MODI	4	SIG. ED. (VON MISES)	2.8818091E+02	SIG. ED. (TRESCA)	1.6638133E+02
MODI	5	SIG. ED. (VON MISES)	2.8818091E+02	SIG. ED. (TRESCA)	1.6638133E+02
MODI	6	SIG. ED. (VON MISES)	5.2310617E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.6573593E+03
MODI	7	SIG. ED. (VON MISES)	5.2291849E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.6287562E+03
MODI	8	SIG. ED. (VON MISES)	5.2310617E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.6573593E+03
MODI	9	SIG. ED. (VON MISES)	4.9776271E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.5038740E+03
MODI	10	SIG. ED. (VON MISES)	4.9776271E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.5038740E+03
MODI	11	SIG. ED. (VON MISES)	4.9776271E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.5038740E+03
MODI	12	SIG. ED. (VON MISES)	4.9776271E+03	SIG. ED. (TRESCA)	2.5038740E+03

STAMPA MINIMI E MASSIMI

SIGMA EQ. DI VON-MISES	MINIMA	1.86836E+02	AL NODO	122.	127
SIGMA EQ. DI VON-MISES	MASSIMA	5.22105E+02	AL NODO	133.6.8	
SIGMA EQ. DI TRESCA	MINIMA	9.92596E+01	AL NODO	122.	127
SIGMA EQ. DI TRESCA	MASSIMA	2.65736E+03	AL NODO	133.6.8	
SFORZO PRINC.	MINIMO	F1	-5.17368E+03	AL NODO	7
SFORZO PRINC.	MASSIMO	F1	5.17368E+03	AL NODO	2
SFORZO PRINC.	MINIMO	F2	-1.66381E+02	AL NODO	4
SFORZO PRINC.	MASSIMO	F2	1.66381E+02	AL NODO	5
SFORZO PRINC.	MINIMO	F3	-1.45378E+02	AL NODO	3
SFORZO PRINC.	MASSIMO	F3	1.45378E+02	AL NODO	8
REAZ. VINC. X	MINIMO	-2.11375E+02	AL NODO	2	
REAZ. VINC. X	MASSIMO	2.11375E+02	AL NODO	7	
REAZ. VINC. Y	MINIMO	-3.36966E+09	AL NODO	4	
REAZ. VINC. Y	MASSIMO	3.00000E+09	AL NODO	1	
REAZ. VINC. Z	MINIMO	-5.29619E-11	AL NODO	2	
REAZ. VINC. Z	MASSIMO	6.37033E-11	AL NODO	7	
SIGMA X	MINIMA	-5.17194E+03	AL NODO	7	
SIGMA X	MASSIMA	5.17194E+03	AL NODO	2	
SIGMA Y	MINIMA	-4.92896E+01	AL NODO	122	
SIGMA Y	MASSIMA	4.92896E+01	AL NODO	127	
SIGMA Z	MINIMA	-6.74377E+01	AL NODO	3	
SIGMA Z	MASSIMA	6.74377E+01	AL NODO	8	

RESULTADOS PARA LA CUARTA PRUEBA: CARGA 24.874 LBS.

---MODI CON FUERZ CONCENTRADA ---

MODO	COMPONENTE X	COMPONENTE Y	COMPONENTE Z	MODO	COMPONENTE X	COMPONENTE Y	COMPONENTE Z
122	0.00000E+00	0.12437E+02	0.00000E+00	127	0.00000E+00	0.12437E+02	0.00000E+00

ANALISIS DE ESFUERZOS EN VIGA EMPOTRADA

SFORZI MODALI

MODO	SIGMA-X	SIGMA-Y	SIGMA-Z	TAU-XY	TAU-YZ	TAU-ZX
1	6.8562599E+03	-3.8734091E+01	-1.1607033E+02	1.8242685E+02	-1.0679516E+02	4.2761758E+01
2	6.8655615E+03	-3.4747724E+01	-1.1208396E+02	1.0199929E+02	1.2863667E-10	1.0396916E-09
3	6.8562599E+03	-3.8734091E+01	-1.1607033E+02	1.8242685E+02	1.0679516E+02	-4.2761758E+01
4	1.0779705E-09	-2.4823829E-11	-3.5093275E-11	1.9332915E+02	-1.0679516E+02	-4.4723905E-11
5	-1.0497455E-09	6.0656123E-12	2.6403259E-11	1.9332915E+02	1.0679516E+02	-4.5943148E-11
6	-6.8562599E+03	3.8734091E+01	1.1607033E+02	1.8242685E+02	-1.0679516E+02	4.2761758E+01
7	-6.8655615E+03	3.4747724E+01	1.1208396E+02	1.0199929E+02	2.0841175E-10	-1.1701476E-09
8	-6.8562599E+03	3.8734091E+01	1.1607033E+02	1.8242685E+02	1.0679516E+02	4.2761758E+01
9	6.5669271E+03	-1.3513221E+01	-6.2662343E+01	8.3526876E+01	-3.1572033E+01	5.3627832E+01
10	6.5669271E+03	-1.3513221E+01	-6.2662343E+01	8.3526876E+01	3.1572033E+01	-5.3627832E+01
11	-6.5669271E+03	1.3513221E+01	6.2662343E+01	8.3526876E+01	-3.1572033E+01	-5.3627832E+01
12	-6.5669271E+03	1.3513221E+01	6.2662343E+01	8.3526876E+01	3.1572033E+01	5.3627832E+01

SFORZI MODALI PRINCIPALI

MODO	1	SIG. EQ. (VON MISES)	6.9440404E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.5275459E+03
MODO	2	SIG. EQ. (VON MISES)	6.9415491E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.4895764E+03
MODO	3	SIG. EQ. (VON MISES)	6.9440404E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.5275459E+03
MODO	4	SIG. EQ. (VON MISES)	3.8254947E+02	SIG. EQ. (TRESCA)	2.2086504E+02
MODO	5	SIG. EQ. (VON MISES)	3.8254947E+02	SIG. EQ. (TRESCA)	2.2086504E+02
MODO	6	SIG. EQ. (VON MISES)	6.9440404E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.5275459E+03
MODO	7	SIG. EQ. (VON MISES)	6.9415491E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.4895764E+03
MODO	8	SIG. EQ. (VON MISES)	6.9440404E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.5275459E+03
MODO	9	SIG. EQ. (VON MISES)	6.6076154E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.3237999E+03
MODO	10	SIG. EQ. (VON MISES)	6.6076154E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.3237999E+03
MODO	11	SIG. EQ. (VON MISES)	6.6076154E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.3237999E+03
MODO	12	SIG. EQ. (VON MISES)	6.6076154E+03	SIG. EQ. (TRESCA)	3.3237999E+03

STAMPA MINIMI E MASSIMI

SIGMA EQ. DI VON-MISES MINIMA	2.48018E+02	AL NODO	122, 127
SIGMA EQ. DI VON-MISES MASSIMA	6.94404E+03	AL NODO	1,3,6,9
SIGMA EQ. DI TPESCA MINIMA	1.31763E+02	AL NODO	122, 127
SIGMA EQ. DI TPESCA MASSIMA	3.52755E+03	AL NODO	1,3,6,9
SFOKZO PRINC. MINIMO P1	-6.86707E+03	AL NODO	7
SFOKZO PRINC. MASSIMO P1	6.86707E+03	AL NODO	2
SFOKZO PRINC. MINIMO P2	-2.20865E+02	AL NODO	4
SFOKZO PRINC. MASSIMO P2	2.20865E+02	AL NODO	5
SFOKZO PRINC. MINIMO P3	-1.93780E+02	AL NODO	3
SFOKZO PRINC. MASSIMO P3	1.93780E+02	AL NODO	6
REAZ. VINC. X	MINIMO	-2.80593E+02	AL NODO 2
REAZ. VINC. X	MASSIMO	2.80593E+02	AL NODO 7
REAZ. VINC. Y	MINIMO	-1.24379E+01	AL NODO 4
REAZ. VINC. Y	MASSIMO	0.00000E+00	AL NODO 1
REAZ. VINC. Z	MINIMO	-0.00000E+00	AL NODO 1
REAZ. VINC. Z	MASSIMO	8.26129E-11	AL NODO 7
SIGMA X	MINIMA	-6.86556E+03	AL NODO 7
SIGMA X	MASSIMA	6.86556E+03	AL NODO 2
SIGMA Y	MINIMA	-6.54301E+01	AL NODO 122
SIGMA Y	MASSIMA	6.54301E+01	AL NODO 127
SIGMA Z	MINIMA	-1.16070E+02	AL NODO 3
SIGMA Z	MASSIMA	1.16070E+02	AL NODO 6