16
2 y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

100 PROBLEMAS DE TEORIA DE NUMEROS TIPO OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A:

JUAN GOMEZ AGUILAR

MEXICO, D. F. 1991

FALLA DE ORIGEN

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION

Esta tesis tiene como objetivo principal, servir de material de apoyo para cursos de:

i) Como plantear y resolver problemas.
ii) Teoría de Números (a nivel introductorio)

En particular se puede utilizar para preparar alumnos que deseen participar en los diversos concursos de Matemáticas a nivel bachillerato en donde se planteen problemas tipo Olimpiada Mexicana de Matemáticas, i.e. problemas que más que conocimientos teóricos requieren de agilidad mental.

La motivación del presente escrito fue la necesidad planteada en una de las reuniones de los Clubes de Matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades, acerca de la falta de un material para la preparacion de los estudiantes. Se tomo la desición de elaborar 100 problemas en cada uno de los temas que normalmente se presentan en los diversos concursos, a saber: Algebra, Teoría de Números, Geometría Euclidiana y Analisis Combinatorio.

Así pues, aquí se presenta una recopilación de 100 problemas de Teoría de Números. La mayoría de ellos han sido parte de examenes de concurso (local del CCH, IntraCCH, zonal del D.F., Olimpiada Nacional, Iberoamericana, Internacional y otros).

Mi aportación, aparte de la recopilación de los problemas es:

i) Diseño de 10 de los 100 problemas
ii) 65 de las 100 soluciones
iii) El total de las sugerencias.
iv) Una serie de Notas respecto a algunos de los problemas

Aunque en un principio se habían etiquetado los problemas de acuerdo al grado de dificultad, finalmente se optó por no hacerlo debido a lo subjetiva que esta clasificación resultaba. Pero si a pesar de ello se requiere un parámetro para medir la dificultad, se puede recurrir al tipo de exámen en que se presentó tal problema. Se supone (aunque no siempre, claro) que los niveles son local, nacional e internacional (de menor a mayor).

Los enunciados se han modificado no en lo esencial sino en la parte de la redacción para en la medida de lo posible poner en primera persona dichos enunciados, además de uniformizar notación, etc.

La teoría necesaria para resolver la inmensa mayoría de los problemas es poca, básicamente los conceptos de divisibilidad, congruencia y teorema fundamental de la aritmética. Se proporcionan elementos básicos de esta teoría en el anexo 1, al final de la presente tesis.

La tesis tiene 5 partes principales: Los enunciados de los problemas, sugerencias para resolverlos, respuestas, soluciones y notas a algunos de los problemas.

Mi experiencia como asesor (más que ninguna otra causa), me permite sugerir que se agoten todos los medios antes de ver las sugerencias, respuestas y soluciones a los problemas. Si no queda otro remedio entonces procedase en el orden sugerencias, respuestas y finalmente las soluciones.

Las sugerencias no tienen el proposito de llevar de la "mano" a la persona, el espíritu de éstas sigue siendo de que, el que debe resolver el problema es el estudiante y por lo tanto en ocaciones la sugerencia se plantea en forma de pregunta.

Realizo una distinción personal entre respuesta y solución. Digo que una afirmación es una respuesta si no lleva consigo una argumentación, en caso contrario, se trata de una solución. Desde este punto de vista una respuesta es de un nivel mas bajo que una solución, y se puede usar cuando no se pudo resolver un problema, para trabajar hacia atras y dar la argumentación que llevaría a esa respuesta.

De una buena parte de los problemas se ha dado una solución propia por dos razones principales:

i) No aparecía la solución en la fuente.
ii) Un natural deseo de resolverlos personalmente y así poder proporcionar una sugerencia adecuada.

En cada solución se anexa la fuente (al igual que en los enunciados) de donde se extrajo la misma, los enunciados o soluciones que aparezcan sin la fuente de procedencia son elaborados o resueltos por mí.

En las soluciones se ha evitado aportar el argumento de ensayo y error y solo se usa cuando el número de ensayos es finito y "reducido".

Las soluciones son de dos tipos, las formales y las intuitivas. Les llamo soluciones formales a las que al observarlas presentan un aspecto de "mágicas", es decir esconden todas las "penurias" que se tuvieron que pasar antes de llegar a dicha solución (este tipo de solución es el que normalmente presentan los libros de matemáticas), le llamo soluciones intuitivas, las que presentan algunas ideas que motivaron la solución presentada. Es importantísimo que cuando el asesor le presente alguna solución al estudiante, adapte la solución dada en esta tesis (si es que es del tipo formal) para que el estudiante no sienta que a él jamas se le hubiese ocurrido.

La mayoria de las notas son problemas que genaralizan a los originales.

Esta parte (la de las notas) me parece una de las formas más representativas del quehacer matemático, es decir no quedarse en la solución de un problema, si no de enriquecerlo a traves de ciertas observaciones que pudieran dirigir nuestra atención hacia nuevas fuentes de investigación.

Espero que el material presentado cumpla el objetivo para el cual fue creado y agradezco de antemano todas las sugerencias y críticas que se le hagan al mismo.

Para mayor información dirigirse al Club de Matemáticas de Oriente (CMO) ubicado en el Colegio de Ciencias y Humanidades (C.C.H) del plantel Oriente.

Mex. D.F. 11 enero de 1991

NOTACION

a divide a b :______________________________ $a|b$

Máximo Común Divisor de a y b: _____________ (a,b)

Mínimo Común Múltiplo de a y b : ____________ $[a,b]$

a es congruente a b modulo m : ______________ $a \equiv b \pmod{m}$

Mayor entero menor o igual a x : ____________ $[x]$

n factorial : _________________________________ $n!$

Número de divisores de n : ___________________ $d(n)$

Suma de los divisores de n: __________________ $\sigma d(n)$

Producto de los divisores de n: _____________ $\pi d(n)$

Número escrito en su expansión decimal: ____ $\underline{abcd....}$

Marca para indicar el fin de una demostración:_ ■

ACUERDOS Y DEFINICIONES

ACUERDOS:

A) Mientras no se indique lo contrario la palabra número indicará número natural.

B) En los casos en que no se preste a confusión se omitirá la palabra número.
Por ejemplo, en lugar de escribir: "el máximo común divisor de los números naturales a y b", se escribirá: "el máximo comun divisor de a y b"

DEFINICIONES:

1.- $[x]$	Función que a cada número real x le asigna el mayor entero, menor o igual que x.
2.- $n!$ $0!$	Producto de los primeros n números uno
3.- $x\|y$	Afirmación que indica que existe un entero c tal que $y = cx$.
4.- Máximo Comun Divisor:	El número más grande que divide a todos los elementos de un conjunto finito de enteros.
5.- Primos relativos:	Conjunto de enteros que tienen como máximo comun divisor al uno.
6.- Minimo Comun Multiplo:	El número más pequeño que es dividido por todos los elementos de un conjunto finito de números.
7.- $a \equiv b \pmod{m}$	Afirmación que indica que m divide a b-a.

1. Argumenta porque no puede ser cierto que $1324^{726}+791^{726}$ sea igual a 1961^{726}.
(Guía para el Intra-CCH, 1988).

2. Determina el menor número por el que se debe multiplicar 250 para obtener un cuadrado perfecto.
(Guía para el Intra-CCH, 1988).

3. Obtén tres números distintos, tal que la suma de sus recíprocos tambien sea un natural.
(Concurso de Hungría, 1918)

4. Encuentra todos los números a, b, c, d tales que el producto de cualesquiera dos de ellos sumado con el producto de los dos restantes sea igual a 1990.
(Cuarto Concurso Estatal, D.F., 1990)

5. Prueba que si los términos de una progresión aritmética infinita no son todos iguales, entonces no son todos primos.
(Concurso de Hungria, 1923).

6. Prueba que para toda $n > 2$, existe un triángulo rectángulo que tiene lados de longitud entera, tal que n es una de ellas. (*) [1]

7. Ordena los siguientes números del menor al mayor:
$$2^{200};\quad 3^{75};\quad 5^{50};\quad 8^{30}$$
(Primer Concurso Local del CCH-Oriente, 1988)

8. Obtén todos los números de cinco digitos de la forma <u>34a5b</u> que se dividen por 36.
(Temas Selectos de Matematicas Elementales, pag. 18).

[1] La marca (*) al final de un enunciado, indica que este fue elaborado por mi.

9. Prueba que si $n > 2$ entonces existe al menos un primo p tal que $n < p < n!$.
(Aritmética Elemental, pag. 21)

10. Encuentra todos los números n tales que $n^2 + 1$ sea un múltiplo de $n + 1$.
(Guía para la Segunda Olimpiada en Mexico, 1988)

11. Encuentra todos los números primos que son tanto suma de dos primos como diferencia de dos primos.
(Guía para la Segunda Olimpiada en México, 1988)

12. Encuentra todas las ternas (a, b, c) tales $a + b + c = 29$ y su producto tenga exactamente 8 divisores.
(Segundo Concurso Local del CCH-Oriente, 1989)

13. Si $(n, m) = d$, prueba que en la sucesión $n, 2n, 3n, \ldots, (m - 1)n, mn$ hay exactamente d términos divisibles por m
(Concurso de Hungría, 1901)

14. Encuentra todos los valores de a, b, α, p y q tales que: $a + b = p^{\alpha}$ y $ab = q^{100}$ en donde a y b son números naturales, α es un entero no negativo y p, q son números primos. (*)
(Segundo Concurso Local del CCH-Oriente, 1989)

15. ¿Cuántos ceros aparecerán al final de 50! ?
(Primer Concurso Local del CCH-Oriente, 1987)

16. Prueba que el máximo común divisor de $2^n-(-1)^n$ y $2^{n-1}-(-1)^{n-1}$ es igual a 3 para toda $n \geq 2$.
(Cuarto Concurso Estatal, D.F. 1990)

17. Prueba que si A es un subconjunto de los números naturales que contiene tres elementos entonces existen n, m en A tales que 10 divide a $nm(n + m)(n - m)$.
(Cuarto Concurso Estatal, D.F. 1990)

18. Sean a, b, c, d cuatro números enteros. prueba que el producto de las diferencias b - a, c - a, d - a, d - c, d - b y c - b es divisible por doce.
(Concurso de Hungría, 1925)

19. ¿Cuántos números dividen a 20! ?
(Primera Olimpiada de Matemáticas en México, Xalapa 1987)

20. Calcula el producto de todos los números menores que 100, y que tengan exactamente tres divisores . Comprueba que dicho número es un cuadrado perfecto.
(Primera Olimpiada de Matemáticas en México, Xalapa 1987)

21. Reconstruye la siguiente división:

```
                  8
x x x | x x x x x x x x
      -   x x x
            x x x x
          -   x x x
                x x x x
             -  x x x x
                o o o o
```

Nota: En el cociente los dígitos no estan marcados (excepto el 8)
(The Surprise Attack in Mathematical Problems, pag. 76)

22. Indica como obtener mil números consecutivos, todos ellos compuestos.
(The Surprise Attack in Mathematical Problems, pag 58)

23. Demuestra que la suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos aumentada en uno, es divisible por doce pero no por veinticuatro.
(Algebra Superior, pag. 606)

24. Supón que a_1, a_2, a_3, ..., a_n representa un arreglo arbitrario de los números 1, 2, 3, ..., n. Prueba que, si n es impar, el producto $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_n - n)$ es un número par.
(Concurso de Hungría, 1906)

25. Prueba que $(n!)^2 \geq n^n$ para toda n.
(Concurso de Hungría, 1913).

26. Determina todas las cuartetas de racionales positivos x, y, z, w que satisfacen la ecuación: $x + y + z + w = 36$ y para los cuales existen $m \in \mathbb{Q}$ y $k \in \mathbb{N}$, con la propiedad de que $x + m = y - m = zm = w/m = k$
(Tercer Concurso Local del CCH-Oriente, 1990)

27. De todos los números de cuatro digitos que son multiplos de nueve. ¿Cuántos hay que tienen todos sus dígitos distintos de cero y distintos entre si?
(Guía para la Segunda Olimpiada en México, 1988)

28. Obtén el menor número natural que tiene las siguientes propiedades:
i) Termina en 6.
ii) Si el último digito 6 es borrado y colocado al frente de los restantes, resulta un número que es cuatro veces mayor que el original.
(Cuarta IMO, Checoslovaquia 1962)

29. Si a, b, c, d son enteros y abcd = 101. encuentra cuántos valores diferentes tiene la expresión a + b + c + d. (*)
(Tercer Concurso Local del CCH-Oriente, 1990)

30. Sean p y q primos distintos, ambos mayores que 3. prueba que si p - q es una potencia de 2, entonces p + q es divisible por 3.
(Aritmética Elemental, pag. 34)

31. El dígito de las decenas del cuadrado de un número es siete. ¿cual es el dígito de las unidades del cuadrado del número?
(Concurso de Hungría, 1917)

32. Si n y m son primos relativos, calcula cuántos valores diferentes puede tener el máximo común divisor de $3n - m$ y $2n + m$.
(Aritmética Elemental, pag. 46)

33. Prueba que el siguiente sistema no tiene solución para números enteros:
(1) $abc = 128$
(2) $a + b = 50$
(Guía para la Primera Olimpiada en México, 1987)

34. Obtén todos los números (su forma en caso de ser un número infinito) que no son representables como la diferencia de los cuadrados de dos números.
(Primera Olimpiada de Matemáticas de Moscú, 1935)

35. Encuentra p, q, r, tales que:
i) Sean primos diferentes
ii) Su suma sea 59
iii) La suma de sus cuadrados sea 1179
(Tercer Concurso Local del CCH-Oriente, 1990)

36. Prueba que los números $2n + 3m$ y $9n + 5m$ o son ambos divisibles por 17 o ninguno de ellos es divisible por 17
(Concurso de Hungría, 1894)

37. Prueba que 19 divide a $11n + 2m$ si y sólo si 19 divide a $18n + 5m$.
(Segunda Olimpiada de Matemáticas en México, Hermosillo 1988)

38. Demuestra que para toda n, $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es un múltiplo de 3804.
(Primera Olimpiada de Matemáticas en México, Xalapa 1987)

39. Demuestra que $(n^2 + n - 1)/(n^2 + 2n)$ es irreducible para cualquier valor de n.
(Primera Olimpiada de Matemáticas en México, Xalapa 1987)

40. Determinar el número de parejas ordenadas (n,m), con n y m primos relativos de tal manera que nm = 18!.
(Primer Concurso Pierre Fermat, IPN, 1990)

41. Dados dos enteros impares a y b; prueba que $a^3 - b^3$ es divisible por 2^n si y sólo si a - b también lo es.
(Concurso de Hungría, 1908)

42. Prueba que $(21n + 4)/(14n + 3)$ es irreducible para toda n.
(Primera IMO, Rumania 1959).

43. Obtén todos los números n tal que el producto de sus dígitos es igual a: $n^2 - 10n - 22$
(Décima IMO, U.R.S.S. 1968)

44. Obtén el conjunto de todos los números n con la propiedad de que el conjunto { n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5 } pueda ser partido en dos conjuntos tales que el producto de los números en uno de los conjuntos, sea igual al producto de los del otro.
(Décimosegunda IMO, Hungría 1970)

45. En un triángulo rectángulo esta inscrito un círculo de radio 6. Determina todos los triángulos rectángulos de lados enteros con esa característica.
(Primer concurso IntraCCH-Vallejo, 1988)

46. Demuestra $(n + 1)(n + 2)\ldots(n + m)(m + 1)(m + 2)\ldots(m + n)$ es divisible por nm.
(Guía para el Concurso Pierre Fermat, IPN, 1990)

54. Demuestra que para todo número n distinto de 2, 5 y 13, existen números m, r ∈ {2, 5, 13, n} tal que mr - 1 no es un cuadrado perfecto.
(Vigesimoséptima IMO, Polonia 1986)

55. Halla todas las ternas de números enteros (a,b,c), tales que:
(1) $a + b + c = 24$
(2) $a^2 + b^2 + c^2 = 210$
(3) $abc = 440$
(Primera Olimpiada Iberoamericana, Colombia 1985).

56. A cada número n se le asigna un entero no negativo f(n), de tal manera que se satisfacen las siguientes condiciones:
(1) $f(rs) = f(r) + f(s)$
(2) $f(n) = 0$ siempre que el digito de las unidades de n sea tres.
(3) $f(10) = 0$
Halla f(1985).
(Primera Olimpiada Iberoamericana, Colombia 1985)

57. Cuando 4444^{4444} se escribe en su notación decimal, la suma de sus digitos es A. sea B la suma de los digitos de A. Obtén la suma de los digitos de B.
(Decimosexta IMO, Bulgaria 1975)

58. Se define una sucesión de la siguiente manera:
$p_1 = 2$ y para todo n mayor o igual que 2, p_n es el mayor divisor primo de la expresión: $p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} + 1$ prueba que p_n es diferente de cinco para toda n.
(Segunda Olimpiada Iberoamericana, Uruguay 1986)

59. Obtén cuatro números que no excedan a 70000 y cada uno tenga más de 100 divisores.
(Propuesto para la vigesimoséptima. IMO, Polonia 1986).

60. Prueba que $n^{n-1} - 1$ es divisible por $(n - 1)^2$ para toda n mayor que uno.
(Cuarta Olimpiada de Matemáticas en México, Guanajuato 1990)

61. Sean m y n enteros arbitrarios no negativos. prueba que:
$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ es un entero.
(Decimocuarta IMO, Polonia 1972)

62. Si $a > 0$ y $n \geq 2$ demuestra que $(1 + a + a^2 + \ldots + a^n)^2 - a^n$ nunca es primo.
(Concurso Eliminatorio en Cuba para la IMO ahí mismo 1986)

63. Sean a, b, c, d y u enteros, tales que cada uno de los números ac, bc + ad y bd son múltiplos de u. prueba que bc y ad también son múltiplos de u.
(Concurso de Hungría, 1910)

64. Sea S el conjunto de números que multiplicados por 28 dan como resultado números cuyos dígitos son todos iguales a 4.
a) Encuentra el menor elemento de S.
b) Encuentra el mayor elemento de S menor que 10^{51} (*)

65. Demuestra que si m tiene n dígitos y ninguno de ellos es uno o cero, entonces el producto de dichos dígitos es mayor o igual que su suma.(*)

66. Demuestra que si m es mayor que 9 y tiene todos sus dígitos iguales entre si y diferentes de cero, entonces no puede ser un cuadrado perfecto. (*)

67. Prueba que 9 divide a una infinidad de términos de la sucesión de Fibonacci. (la sucesión de Fibonacci es aquella cuyos dos primeros términos son uno y los siguientes se forman sumando los dos que le anteceden)
(Guía para la Cuarta Olimpiada en México, 1990)

75. Demuestra que si n tiene 2r digitos todos iguales a uno y m tiene r dígitos todos iguales a 2, entonces n - m es un cuadrado perfecto.
(40 Problemas para Olimpiadas de Matemáticas)

76. Proporciona dos formas distintas de expresar el número 3 como suma de fracciones con numerador 1 y con denominador diferente al de las demás. (*)

77. De los números entre el 1 y el 1989, encuentra una progresión aritmética, con 50 términos de los cuales 13 sean producto de cuatro primos diferentes.
(40 Problemas para Olimpiadas de Matemáticas)

78. Dado un número entero n no negativo, definimos P(n) igual al producto de los dígitos de n (cuando n tenga un sólo dígito, P(n) es igual a n).
a) Demuestra que si n es mayor que nueve entonces P(n) es menor que n. (*)[2]
b) ¿Para qué número *i* del conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} existen más números n en el conjunto {0, 1, .., 10^8} tales que P(P(P(P(P(n))))) = *i*?
c) Lo mismo que en b) pero diciendo menos números n.
(40 Problemas para Olimpiadas de Matemáticas)

79. Pedro le comenta a Juan: "he observado que si al cuadrado de mi edad le resto el producto de tu edad con la edad que yo tendré dentro de un año, el resultado es 18" ¿Qué edad tiene Pedro?
(Segundo Concurso IntraCCH, Azcapotzalco, 1989)

[2] (*) Este inciso no es el que aparecía en el original, ya que el mismo era inexacto.

80. Si un número tiene 221 digitos y el producto de estos es 3^{442}, ¿Cuál es la suma de dichos digitos? (*)
(Segundo Concurso IntraCCH, Azcapotzalco, 1989)

81. Obtén el menor número r con la propiedad siguiente: si $n \geq r$, entonces n se puede escribir en la forma $2a + 5b$.
(Guía para la Cuarta Olimpiada en México, 1990)

82. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden construir de tal manera que su área sea menor o igual que 26950, uno de sus catetos mida 5 y la medida del otro sea un divisor de 26950 ?
(Guía para la Cuarta Olimpiada en México, 1990)

83. Sea $a = bq + r$, con $0 \leq r < b$. prueba que el máximo común divisor de $2^a - 1$ y $2^b - 1$ es igual al de $2^b - 1$ y $2^r - 1$
(Guía para la Cuarta Olimpiada en México, 1990)

84. Para $n = 2, 3, \ldots, 32$ definase $\lambda(n)$ como el producto de todos los múltiplos positivos de n menores o iguales que 1000. [por ejemplo $\lambda(3) = 3 \times 6 \times \ldots \times 999$] ¿Cuál es el número más grande que divide a todos los números $\lambda(2)$, $\lambda(3)$, $\lambda(4)$, ... , $\lambda(32)$?
(Exámen Estatal, D.F., 1989)

85. Sea n un número cuyos dos últimos digitos sean 00. Llamemos D a la suma de todos los divisores positivos de n distintos de n. Prueba que $D > n$.
(Exámen Estatal, D.F., 1989)

86. Encuentra dos números a y b tales que:
b^2 sea múltiplo de a
a^3 sea múltiplo de b^2
b^4 sea múltiplo de a^3
a^5 sea múltiplo de b^4
pero b^6 no sea múltiplo de a^5
(Tercera Olimpiada Nacional de Matemáticas, Puebla, 1989)

87. Prueba que no existe un número de 1989 digitos que tenga al menos tres de ellos iguales a 5 y tal que la suma de todos los dígitos sea igual al producto de los mismos.
(Tercera Olimpiada Nacional de Matemáticas, Puebla, 1989)

88. Encuentra el número más pequeño n tal que si su expansión decimal es $a_m a_{m-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ y si r es el número cuya expansión decimal es $a_1 a_0 a_m a_{m-1} \ldots a_3 a_2 0$, entonces r es el doble de n
(Tercera Olimpiada Nacional de Matemáticas, Puebla, 1989)

89. Prueba que si n es primo relativo con 10, entonces n divide a una infinidad de los siguientes números: 1990, 19901990, 199019901990, ...
(Exámen para elegir a la Delegación Olimpica Mexicana, 1990)

90. Demuestra que para cada n existen n números consecutivos que no son potencia de algun número primo.
(Trigésima IMO, Alemania 1989)

91. Prueba que la suma de los recíprocos de cualesquiera r números menores o iguales que 40, diferentes y primos relativos entre si, es menor que 3.
(Guía para la Tercera Olimpiada en México, 1989)

92. Substituye los asteriscos por dígitos de tal manera que la división sea correcta.

```
                        * * 7 * *
* * * * * 7 * | * * 7 * * * * * * * *
                * * * * * *
                -------------
                * * * * * 7 *
                * * * * * * *
                -------------
                  * 7 * * * *
                  * 7 * * * *
                  -------------
                  * * * * * * *
                  * * * * 7 * *
                  -------------
                    * * * * * *
                    * * * * * *
                    -----------
                    0 0 0 0 0 0
```

(100 Great problems of elementary mathematics, pag. 11)

99. Sea f la función definida sobre los naturales por:
$f(1) = 1$; $f(2n + 1) = f(2n) + 1$; $f(2n) = 3f(n)$
Determina el conjunto de valores que toma f.
(Cuarta Olimpiada Iberoamericana, Cuba, 1989)

100. Describe un número que tenga 2037 dígitos y tal que la suma de sus digitos sea igual al producto de los mismos. (*)

1.- ¿Cuál es el dígito de las unidades de cada potencia?

2.- Factoriza 250

3.- Determina la suma máxima de los recíprocos

4.- Plantea las ecuaciones y luego restalas dos a dos.

5.- Analiza el término $a+1$, donde a es el número inicial de la progresión.

6.- Bueno tal vez este problema no lo puedas resolver, ¿Qué te parece este otro? Prueba que todo número impar (en particular los cuadrados de los impares) se pueden expresar como una diferencia de cuadrados.

7.- Transforma las potencias en otras equivalentes que se puedan comparar mas facilmente.

8.- Aplica los criterios de divisibilidad por 4 y 9.

9.- ¿Y que tal si en lugar de buscar un primo, buscas uno aunque no sea primo?

10.- Realiza la división de n^2+1 y $n+1$ y analiza el residuo.

11.- ¿Puede un impar ser suma de dos impares?

12.- Si $n = abc$, piensa en el número máximo de factores primos que tiene n.

13.- Analiza unos ejemplos numéricos

14.- a y b deben ser potencias de un mismo primo.

15.- Se trata de encontrar la máxima potencia de 10 que divide a $50!$.

16.- utiliza la propiedad de que $(a, b) = (a+bk, b)$ para toda k.

17.- Primero nota que la expresión da números múltiplos de dos y luego realiza un análisis de la misma módulo 5.

18.- Analiza módulo 3 y módulo 4.

19.- Obten la factorización prima de $20!$.

20.- ¿Que clase de números tienen exactamente 3 divisores?

21.- Observa que al multiplicar el 8 que aparece en el cociente por el divisor, nos da un número de 3 dígitos.

22.- ¿Y si obtienes 3 números compuestos consecutivos? ¿Y 4? ¿no podrías entonces inducir la respuesta?

23.- Traduce algebraicamente y luego factoriza.

24.- Analiza la paridad de la suma de los factores

25.- Ordena adecuadamente los factores de $(n!)^2$ para que sean mas facilmente comparables con los de n^n.

26.- Obten el valor de las incógnitas en términos de m y k.

27.- Aplica el criterio de divisibilidad por 9.

28.- Expresa las condiciones algebraicamente y luego trata de encontrar condiciones de divisibilidad.

30.- Reduce módulo 3 la potencia de 2.

31.- Resuelve el problema mas general: ¿Cuál es el digito de las unidades si el de las decenas es impar?

32.- Aplica la propiedad $(a, b) = (a+kb, b)$

33.- Factoriza 128.

34.- Analiza la diferencia de los cuadrados de números consecutivos, de dos números pares y de dos impares.

35.- Analiza que digito de las unidades deberían tener los números y sus cuadrados, para que al sumarlos nos dieran el de las unidades que tienen los números dados.

36.- Trata de encontrar a que es congruente n en función de m.

37.- Trata de encontrar a que es congruente n en función de m.

38.- Factoriza 3804 y prueba que los factores dividen a la expresión dada.

39.- Utiliza la propiedad $(a, b) = (a+kb, b)$

40.- Obten los primos que dividen al factorial.

41.- Factoriza a^3-b^3

42.- Utiliza la propiedad $(a, b) = (a+kb, b)$

43.- La expresión tiene que se mayor o igual que cero y además el producto de los dígitos de un número es menor que el número.

44.- Si p es un primo factor de un elemento de uno de los conjuntos, ¿también lo será de algun elemento del otro?.

45.- Recuerda que la longitud de los segmentos obtenidos al trazar las tangentes desde un punto exterior a una circunferencia es la misma.

46.- Reduce $n+1$, $n+2$, ..., $n+m$ módulo m y módulo n los demas.

47.- Aplica teorema de pitágoras, despeja 1988 y aplica propiedades de divisibilidad.

48.- a) Obten para casos sencillos a que es congruente 2^n módulo 7 y trata de inducir la respuesta.
b) Aplica el inciso anterior.

50.- De la segunda ecuación despeja p^2 y aplica propiedades de divisibilidad, aprovechando que p es primo.

51.- Trata de factorizar la expresión como en trinomios cuadráticos.

52.- Trata con números que tengan que ver con factoriales

53.- Utiliza la fórmula para la suma de los divisores (ver anexo)

54.- Trata por contradicción

55.- Factoriza 440 y compara los cuadrados con respecto a 210.

56.- Obten $f(5)$ y $f(9)$ y aplica estos resultados.

57.- Por un lado trata de ir acotando los números obtenidos y por otro lado aplica el criterio de divisibilidad por nueve.

58.- Trata por contradicción.

59.- Obten el menor número que sea producto de números primos y que tenga mas de 100 divisores.

60.- Factoriza $n^{n-1}-1$ y nota que cada sumando del segundo factor es parecido a la expresión original.

61.- Encuentra un función recursiva en términos de m y n.

62.- Utiliza la fórmula para sumar progresiones geométricas y realiza manipulaciones algebraicas.

63.- Trata de aplicar la identidad $(x-y)^2 = (x+y)^2-4xy$.

64.- Divide el hipotético número de puros 4 por 28 de la manera tradicional.

65.- Prueba por inducción sobre n.

66.- Analiza en que terminan los cuadros.

67.- Reduce la sucesión módulo 9.

68.- Supón que si se puede y analiza las terminaciones de los cuadrados.

69.- Expresa n en términos de m módulo 10.

70.- Analiza caso por caso los diferentes valores de m módulo 5, tratando en cada uno de expresar a en términos de b, c y d módulo 5.

71.- Expresa algebraicamente el enunciado y analiza módulo 3.

72.- Factoriza 30 y analiza módulo los factores.

73.- Analiza caso por caso para n módulo 4.

74.- Encuentra algunas propiedades de f que te permitan calcular f para algunos valores particulares.

75.- Trabaja con valores pequeños de r y trata de inducir el cuadrado.

76.- Utiliza la identidad $1/n = 1/(n+1) + 1/n(n+1)$

77.- ¿Cuál es el primer número que es producto de 4 primos distintos?

78.- Para los incisos b y c, calcula cuántos números del 1 al 200 van a dar a algun dígito bajo P. Induce al caso del problema general y justifica.

79.- Intenta obtener una ecuación cuadrática en términos de P.

80.- ¿Cuál número de n dígitos que tiene máximo producto de los mismos?

81.- Es el 11, ahora ¡Pruébalo!

82.- Llamemosle N a 26950. Prueba que la medida del otro cateto debe ser menor que la mitad de N. ¿habrá muchos divisores de N que sean mayores ó iguales que su mitad?.

83.- Utiliza la propiedad $(a, b) = (a+kb, b)$

84.- Entresaca el factor comun en cada número de los productos.

85.- Si termina en 00, quiere decir que al menos 100 divide al número (y algunos otros).

86.-¿Crees que haya pocas parejas de números que cumplan las condiciones dadas?.

87.- Trata por contradicción

88.- Utiliza el algoritmo de la multiplicación

89.- Reduce los números módulo 10.

90.- Resuelve un problema mas sencillo: Obten n números consecutivos compuestos. De la solución de este problema trata de obtener una para el original.

91.- Trata de formar la suma máxima.

92.- Puedes empezar analizando con el 7 que aparece en el cociente.

93.- ¿Puedes resolver un problema análogo con valores mas pequeños?

94.- Calcula f(1, 11), f(2, 11), f(3, 11), f(4,11), ... y luego induce y justifica para f(1988, 11).

95.- ¿Puede f(n) tener dos factores que sean primos relativos?

96.- Aplica la propiedad (a, b) = (a+kb, b)

97.- Factoriza la expresión.

98.- Trata por contradicción el inciso i). Para el inciso ii) reduce la solución módulo q y da todas las soluciones que son menores que q^r.

99.- Utiliza otras bases de numeración.

100.- Prueba con digitos 1 y 2.

1.- *[1]

2.- 10

3.- 2, 3 Y 6

4.- 1 - 1 - 1 - 1989
2 - 2 - 2 - 993
5 - 5 - 5 - 393
10 - 10 - 10 - 189

5.- *

6.- *

7.- $8^{30} - 5^{50} - 3^{75} - 2^{200}$

8.- 34945 - 34056 - 34452

10.- $n = 1$

11.- 5

12.- (3, 7, 19), (5, 7, 17), (5, 11, 13), (3, 9, 17), (1, 13, 15) combinando tenemos en total 30 ternas.

13.- *

14.- $a = b = 2^{50}$, $\alpha = 51$ y $p = q = 2$

15.- 12

16.- *

17.- *

18.- *

19.- 41040

20.- 44100

21.- Cociente 80809 Divisor 124

22.- *

23.- *

24.- *

25.- *

[1] La marca * indica que el problema se trata de una demostración

26.- x = 0, 24/5, 6, 15/2, 8
y = 10, 26/5, 10, 17/2, 10
z = 1, 25, 4, 16, 9
w = 25, 1, 16, 4, 9

27.- 332

28.- 153846

29.- 4

30.- *

31.- 6

32.- dos: 1 y 5

33.- *

34.- Todos los pares que no son múltiplos de 4, el 4 y el 1.

35.- 17, 19, 23

36.- *

37.- *

38.- *

39.- *

40.- 64

41.- *

42.- *

43.- 12

44.- El conjunto vacio

45.- Los triángulos son los que tienen las siguientes medidas:

13 - 85 - 85
14 - 48 - 50
15 - 36 - 39
16 - 30 - 34
18 - 24 - 30
20 - 21 - 29

seis en total

46.- *

47.- Son dos triángulos cuyas otras medidas son:

64 y 496
78 y 498

48.- 8987

50.- p = 17, n = 144 y m = 145

51.- *

52.- a = 1 y b = 11!+1

53.- *

54.- *

55.- (5,8,11). Combinando en total son 6 ternas.

56.- cero

57.- 7

58.- *

59.- 50400 - 55440 - 60480 - 65520

60.- *

61.- *

62.- *

63.- *

64.- a) 15873
b) 15873015873015873015873015873015873015873015873015873

65.- *

66.- *

67.- *

68.- 1089 y 900

69.- *

70.- *

71.- Si

72.- *

73.- *

74.- 8010

98.- *

99.- Aquellos que sean suma de potencias de 3.

100.- $\underbrace{11111....1111}_{2022\text{ unos}}2222222222$

1. $1324^{726} \equiv 4^{726} \equiv (-6)^{726} \equiv 6 \pmod{10}$
   $791^{726} \equiv 1^{726} \equiv 1 \pmod{10}$
   $1961^{726} \equiv 1^{726} \equiv 1 \pmod{10}$
   De lo anterior se concluye que $1324^{726} + 791^{726}$ termina en 7 y 1961^{726} termina en 1, por lo que las cantidades no pueden ser iguales. †[1]

2. $250 = 2.5^3$ por lo tanto para que los exponentes sean pares (para que sea un cuadrado perfecto) hay que multiplicar minimamente por 2 (para obtener 2^2) y por 5 (para obtener 5^4). En resumen hay que multiplicar por 10, con lo que obtenemos 2500, que es el cuadrado de 50.†

3. Llamémosles n, m, r a los tres números. De que son diferentes se tiene que:
   $$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} < 2$$
   Si el valor minimo entre n, m y r fuera 1 entonces tendriamos que:
   $$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2$$
   es decir la suma no sería entera por lo tanto el minimo no puede ser uno.
   Si el valor minimo entre n, m y r fuera 3, entonces tendriamos que:
   $$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < 1$$
   es decir la suma no sería entera ya que sería menor que uno.
   De lo anterior se concluye que para que la suma sea entera, el mínimo de n, m y r tendría que ser 2 y la suma igual a 1.
   Si el mínimo de los dos restantes es 4 entonces:
   $$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < 1$$
   de aquí que el mínimo de los dos restantes debe ser 3, y esto nos lleva a la solución 2, 3 y 6 para los cuales la suma de sus recíprocos es 1. †

[1] La marca † al final de una solucion, indica que existe una nota para este problema en la seccion "NOTAS A LOS PROBLEMAS".

términos son mayores que uno.

Tomemos cualquier término $a_r > 1$, sea $s = a_r$, y consideremos el s-avo término después de a_r, esto es, el término a_{r+s}; este término satisface la relación:

$$a_{r+s} = a_r + a_r d = a_r(1+d)$$

y por lo tanto no es número primo. ■

(Hungarian problem book, Vol. 2, pag. 92)

6. Dividamos el problema en dos casos, n par y n impar y usemos la identidad $(2km)^2+(k^2-m^2)^2 = (k^2+m^2)^2$.

Primer caso: n par, i.e. de la forma 2k, haciendo m = 1 y substituyendo en la identidad tendremos que:

$$n^2 + (k-1)^2 = (k^2+1)^2$$

por lo tanto con las medidas n, k-1 y (k^2+1) se formará un triángulo rectangulo si $k > 1$, es decir si $n > 2$.

Segundo caso: Si n es impar, es decir de la forma 2m+1, entonces como $2m+1 = (m+1-m)(m+1+m) = (m+1)^2-m^2$, si substituimos en la identidad original haciendo $k = m+1$, tendremos que:

$$(2(m+1)m)^2 + n^2 = ((m+1)^2+m^2)^2$$

$\therefore$ con las medidas $2(m+1)m$, n^2 y $((m+1)^2+m^2)$ se formará un triángulo rectángulo si $m > 0$, es decir si $n > 1$. ■

7. $2^{200} = 4^{100} > 3^{75} = 27^{25} > 25^{25} = 5^{50} > 4^{45} = 64^{15} = 8^{30}$.

Por lo tanto el orden de menor a mayor es:

$$8^{30},\ 5^{50},\ 3^{75},\ 2^{200}$$

8. 36 divide a un número entero si y sólo si 4 y 9 también lo dividen.

a) Aplicando el criterio de divisibilidad del cuatro se sigue que b = 2 ó b= 6.

b) Aplicando el criterio de divisibilidad del nueve se sigue que $a+b = 6$ ó que $a+b = 15$.

De a), b) y de que tanto a como b son dígitos, se tienen las siguientes opciones: $a = 0, 9, 4$ y $b = 6, 6, 2$ que generan las soluciones 34956, 34056 y 34452. †

9. Es fácil comprobar que dos números consecutivos son primos relativos, aplicando esto tenemos que $(n!-1, n!) = 1$. Sea p un primo tal que $p|(n!-1)$ (tal primo existe ya que $n > 2$ y $\therefore$ $n!-1$ es mayor que 1) entonces p no divide a $n!$ (ya que $n!-1$ y $n!$ son primo relativos) $\therefore$ p no divide a ninguno de 1, 2, ..., n por lo tanto $p > n$, y como $p|(n!-1)$, $p < n!$.■†

10. $\frac{n+1}{n+1} = n-1 + \frac{2}{n+1}$ para que la parte izquierda de la igualdad sea un entero $n+1$ debe dividir a 2, lo cual implica que $n = 11$. †

11. Dos no es suma de dos primos, y entonces si p es un primo que es suma de dos primos, p es impar. Si ademas p es diferencia de dos primos, uno de ellos q debe ser impar y el otro 2, $p = q-2$, (y entonces $q = p+2$).

Analogamente, como p es impar, p debe ser la suma de un primo impar r y 2, $p = r+2$, (y entonces $r = p-2$).

Pero de tres impares consecutivos $p-2$, p, $p+2$ alguno es múltiplo de 3, y por ser primo, debe ser 3, y entonces la única posibilidad es $p-2 = 3$, $p = 5$, $p+2 = 7$.

(Problemas para la 2a. Olimpiada de Matematicas, pag. 23)

12. Sea $n = abc$ y $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\dots P_m^{\alpha_m}$ la factorización prima de n. Si $m \geq 4$, entonces $d(n) \geq (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)$

$$\geq 2.2.2.2 = 16,$$

pero por hipótesis n sólo tiene 8 divisores, por lo tanto $m \leq 3$.

Dividamos el problema en tres casos $m=1$, $m=2$ y $m=3$.

Primer caso $m = 1$: $\alpha_1+1 = 8 \Rightarrow \alpha_1 = 7 \Rightarrow$ a, b y c son potencias de P, Si ninguna de ellas es 1, entonces como $a+b+c = 29$, $P|29$ es decir $P = 29$, pero entonces $a+b+c > 29$. Entonces alguna potencia debe ser uno. Si un exponente es mayor que cinco entonces uno de los números es mayor ó igual que $2^5 = 32 > 29$ por lo tanto la única posibilidad que queda es que un exponente sea 3 y el otro 4, P no es 2 ya que $2^4+2^3+1 = 25$. Pero si $P \geq 3$ entonces $P^4+P^3+1 \geq 3^4 > 27$. Por lo tanto en este caso no hay solución.

Segundo Caso $m = 2$: $\alpha_1+1 = 2$ y $\alpha_2+1 = 4$ (o al contrario) $\Rightarrow \alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 3$. Sea P el primo base del exponente 1 y Q el del exponente 3. La suma dependiendo de los valores de a, b y c sería una de las siguientes: Q^3+P+1, Q^2+PQ+1, $Q+PQ^2+1$, Q^2+P+Q, $Q+PQ+Q$ y $1+PQ^3+1$ analizando cada una de ellas (la suma tiene que ser 29), obtenemos una solución para el formato Q^2+P+Q, que es 9, 17 y 3.

Tercer caso $m = 3$: En este caso tendremos que n es el producto de tres primos distintos. Entonces la suma tendrá los siguientes formatos: $PQR+1+1$, $PQ+R+1$ y $P+Q+1$. Otra vez por ensayo y error, en el primer caso no hay solución, en el segundo tenemos la solución 15, 3, 1 y en el tercero las soluciones 3, 7, 19; 5, 7, 17 y 5, 11, 13.

En resumen como se nos piden ternas ordenadas, la solución del segundo caso, genera 6 ternas, las del tercer caso 24, en total tendremos 30, que es la respuesta al problema.

13. Supongamos que $m|kn$, para alguna k de 1, 2, ..., m entonces se sigue inmediatamente que $(m/d)|k(n/d)$ y como $(m/d, n/d) = 1$ entonces $(m/d)|k \therefore r(m/d) = k$ con $1 \leq r \leq d$. Por otro lado como $r(m/d)n = rm(n/d)$ entonces $m|r(m/d)n$ para $r=1, 2, ..., d$. ∎

14. $a+b = p^{\alpha}\ldots.(1)$

$ab = q^{100}\ldots(2)$

$(2) \Rightarrow (a=q^{\gamma}$ y $b = q^{\beta}$ $\gamma+\beta = 100..(2')$ con $0 \le \gamma, \beta \le 100)\ldots(3)$

(1) y $(3) \Rightarrow a+b = q^{\gamma}+q^{\beta} = p^{\alpha}..\text{sup. } \gamma \le \beta$

$\Rightarrow q^{\gamma}(1+q^{\beta-\gamma}) = p^{\alpha}$

$\Rightarrow (q^{\gamma} = p^{\phi})$____$(4)$ y $(1+q^{\beta-\gamma} = p^{\omega})\ldots(5)$ con $\phi+\omega = \alpha \ge 0$

$(4) \Rightarrow (\gamma = \phi \ne 0$ y $q = p)$____(6) ó $\gamma = \phi = 0\ldots(7)$

---

(5) y $(6) \Rightarrow 1+q^{\beta-\gamma} = q^{\omega} \Rightarrow 1 = q^{\omega}-q^{\beta-\gamma}$

$\Rightarrow \beta-\gamma = 0$

$\Rightarrow 1 = q^{\omega}-1$

$\Rightarrow q^{\omega} = 2$

$\Rightarrow q = 2,\ w = 1$

$\Rightarrow p = 2$

$\Rightarrow a = 2^{\beta},\ b = 2^{\beta}$

$\Rightarrow$ (con $2'$) $\beta = 50$

$\Rightarrow a = 2^{50},\ b = 2^{50}$

$\Rightarrow \alpha = 51.$

por lo tanto de esta parte se tiene la solución $a = b = 2^{50}$, $\alpha = 51$ y $p = q = 2$

---

(5) y $(7) \Rightarrow \omega = \alpha \Rightarrow 1+q^{\beta-\gamma}$

$= p^{\alpha} \Rightarrow 1+q^{\beta}$

$= p^{\alpha}$

$\Rightarrow \beta = 100$

$\Rightarrow 1+q^{100}$

$= p^{\alpha}$

$\Rightarrow a = 1$ y b

$= q^{100}$

Y Ahora tenemos dos casos más q impar y q par. Si q es impar entonces p^{α} es par y por lo tanto $p = 2$. Si q es par, entonces $q = 2$, los dos casos plantean las ecuaciones:

i) $1+2^{100}=p^{\alpha}$ y ii) $1+q^{100}=2^{\alpha}$

i) $2^{100}+1 = (16^5)^5+1 = (16^5+1)((16^5)^4-(16^5)^3+(16^5)^2-16^5+1)$;
Llamemos A a 16^5+1 y B a $(16^5)^4-(16^5)^3+(16^5)^2-16^5+1$ como $16 \equiv -1 \pmod{17}$ entonces $A \equiv 0 \pmod{17}$ y $B \equiv 5 \pmod{17}$ por lo tanto $17|(2^{100}+1)$ y existe un primo q distinto de 17 tal que $q|(2^{100}+1)$ por lo tanto $2^{100}+1$ no es potencia de primo.

ii) $q^{100}+1 = (q^{20})^5+1 = (q^{20}+1)((q^{20})^4-(q^{20})^3+(q^{20})^2-(q^{20})+1)$; de los dos factores, $q^{20}+1$ es par y $(q^{20})^4-(q^{20})^3+(q^{20})^2-(q^{20})+1$ es impar por lo tanto $q^{100}+1$ no es potencia de 2.

15. Para contar cuantos ceros aparecen al final de un número escrito en base 10, hay que buscar la máxima potencia de 10 que lo divide.
En nuestro caso y como $10 = 2.5$, hay que buscar cuantas parejas de 2, 5 podemos entresacar como factores en 50!.
Es claro que en 50! se pueden entresacar mas factores dos que 5, por lo tanto basta con encontrar cuantos 5's hay como factores.
El cociente de 50/5 nos dice cuantos múltiplos de 5 hay de los números del 1 al 50, o sea 10 que son 5, 10, 15, ..., 50.
De estos múltiplos hay dos que contienen al cinco como factor dos veces que son el $25 = 5.5$ y el $50 = 2.5.5$, por lo tanto hay en total 12.
Todo lo anterior se resume en el siguiente cálculo:

$$\left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{25}\right] = 10+2 = 12$$

(recuerdese que los corchetes indican que hay que tomar la parte entera de la división)

16. Llamemosle $a = 2^n-(-1)^n$ y $b = 2^{n-1}-(-1)^{n-1}$, entonces:
$(a, b) = (a-b, b) = (-(-1)^n+2(-1)^{n-1}, b) = (3, b)$ y como $b \equiv (-1)^{n-1}-(-1)^{n-1} \equiv 0 \pmod 3$, entonces en efecto 3 es el máximo común divisor de los números dados. ∎

posibles residuos, al menos dos de los cuatro enteros dados, dejarán el mismo residuo, la diferencia de estos dos y por lo tanto P será divisible por 3.

De a) y b) se sigue que P es divisible por 12. ∎

(Hungarian problem book, Vol. 2, pag.99)

19. Para saber cuantos divisores tiene 20!, vamos a factorizarlo. Primero saquemos todos los factores 2 que hay en 20!.
Construyamos la siguiente tabla:

Al menos un factor 2 :	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18,	20
Al menos 2 factores 2:		4		8		12		16		20
Al menos 3 factores 2:				8				16		
Cuatro factores 2 :								16		

En total 18 factores 2 en 20!
Se procede de manera análoga para los demás primos menores que 20 y finalmente obtenemos que la factorización de 20! es:
$20! = 2^{18}3^{8}5^{4}7^{2}11.13.17.19$
y de aquí que 20! tiene $19.9.5.3.2^{4} = 41040$ divisores.

20. Se va a demostrar que un número tiene exactamente tres divisores si y sólo si es el cuadrado de un número primo.
Sea n un número con exactamente tres divisores, sean a, b y c dichos divisores; obviamente alguno de ellos es uno y otro el número mismo. Supongamos que $a = 1$ y $b = n$, entonces $1 < c < n$. Si c fuera compuesto es decir $c = rt$ con $1 < r, t < c$, entonces tanto r como t dividirian a n, lo cual no puede ser porque entonces tendría mas de tres divisores.
Por lo tanto c es un número primo. De que $c|n$ se tiene que $(n/c)|n$ y por lo tanto como $1 < n/c < n$, $n/c = c$, i.e. n es el cuadrado de un número primo.
Obviamente el cuadrado de un número primo tiene tres divisores, a saber 1, p y p^2.
En nuetro caso particular los cuadrados de primo menores que 100 son 4, 9, 25, y 49 cuyo producto es 44110, el cual es el cuadrado de 210.

21. Etiquetemos los dígitos de la siguiente manera:

```
                a 0 8 0 b
  x x x | x x x x x x x x  ------------ Primer Renglon
        -  x x x  ------------------- Segundo   "
             x x x x  --------------- Tercer    "
        -      x x x  --------------- Cuarto    "
                 x x x x  ----------- Quinto    "
               - x x x x  ----------- Sexto     "
                 0 0 0 0
```

En el cociente ya se han colocado los dígitos que obviamente son cero, a raíz de que se tuvo que "bajar" otro dígito para que "alcanzara".

Llamémosle d al divisor.

El 8 del cociente por d nos arroja un número de 3 dígitos como nos lo muestra el cuarto renglón. Por lo tanto $8d < 1000$ y de aquí que $d < 125$.

b por d nos dá un número de 4 dígitos como nos lo muestra el sexto renglón, como 8d tiene sólo 3 dígitos, a b no le queda otra que ser 9.

Para números menores que 8, a por d es menor que 7 por 125 que es igual a 875. Obsérvese la resta que se realizó en los renglones 1, 2 y 3, la cual dió un número de 2 dígitos. Nótese que 1000 (que es lo menos que puede valer un número de 4 dígitos) menos 875 es igual a 125 que tiene tres dígitos. Por lo tanto a debe ser igual a 8.

De lo anterior, el cociente es 80809, si multiplicamos este número por 123, obtenemos un número de menos dígitos que el dividendo. Por lo tanto el divisor es 124.

Con esto haganse los calculos y se obtendrán todos los demás dígitos.

Nota: esta solución se obtuvo basicamente siguiendo la que dá el texto de donde se sacó el problema, únicamente se dan más detalles con el fin de aclarar algunos puntos.

22. Multipliquemos todos los números primos del 2 al 1001; llamémosle a este número n. Los mil números consecutivos son n-1001, n-1000, ..., n-4, n-3, n-2. Esto porque n es múltiplo de 1001 y por lo tanto n-1001 también lo es, el mismo

razonamiento se aplica los demas números. Los números también pueden ser $n+2$, $n+3$, ..., $n+1001$.
(The surprise attack in mathematical problems, pag. 58)

23. Sean r, s y t tres números impares consecutivos. Esto quiere decir que existe un número $n > 0$ tal que: $r = 2n-1$, $s = 2n+1$ y $t = 2n+3$. Por lo tanto del enunciado del problema se tiene que:

$$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1 = 12n^2+12n+12 = 12(n^2+n+1)$$

por lo tanto el número es un múltiplo de 12.
Como $n^2+n+1 = n(n+1)+1$ uno de n y n+1 es par, por lo tanto $n(n+1)$ siempre es par y de aquí que $n(n+1)+1$ es impar. De esto se concluye que el número no es divisible por 24. ∎

24. El número de factores es impar y su suma es 0 (o sea par). Esto no sería posible si todos los factores fueran impares, ya que entonces su suma sería impar. Por lo tanto al menos uno de los factores es par y por lo tanto el producto también. ∎
(Hungarian problem book, Vol. 2, pag. 23)

25. La expresión a la izquierda de la desigualdad puede ser escrita en la forma: $1.n.2.(n-1).3.(n-2)...(n-1).2.n.1$
Ahora consideremos los productos:
$1.n,\ 2(n-1),\ 3(n-2),\ \ldots\ ,\ (n-1)2,\ n.1;$
Estos productos son de la forma $(k+1)(n-k)$, donde k toma los valores 0, 1, 2, ... , n-1. El primer producto y el último son menores que los otros productos porque para $n-k > 1$ y $k > 0$, $(k+1)(n-k) = k(n-k)+(n-k) > k.1+(n-k) = n$
El producto de todos estos factores es $(n!)^2$ y por lo tanto mayor que $n.n.n.\ldots.n = n^n$ cuando se tienen más de dos factores. ∎
(Hungarian problem book, Vol. 2, pag. 55)

26. Despejando x, y, z y w se obtiene que $x = k-m$, $y = k+m$, $z = k/m$ y $w = mk$.
Substituyendo en $x+y+z+w = 36$ se tiene que:
$k-m + k+m + (k/m) + km = 36$
despejando tenemos que:

$$m = \frac{(18-k) \pm \sqrt{(k-18)^2-k^2}}{k}$$

Com la k es natural y m racional, el discriminante tiene que ser un cuadrado perfecto, este una vez simplificado queda igual a $18(18-2k)$. $18-2k \geq 0$ para que las raices sean reales, esto implica $k \leq 9$. Los valores de k que hacen que $18(18-k)$ sea un cuadrado perfecto son 5, 8 y 9.
Si $k = 5$ entonces $m = 5, 1/5$.
Si $k = 8$ entonces $m = 2, 1/2$
Si $k = 9$ entonces $m = 1$.
Lo anterior nos lleva a las soluciones:

x =	0,	24/5,	6,	15/2,	8
y =	10,	26/5,	10,	17/2,	10
z =	1,	25 ,	4,	16 ,	9
w =	25,	1 ,	16,	4 ,	9

27. Puesto que un número es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9. Se tiene que si <u>abcd</u> es divisible por 9, entonces cualquier número que se forme con esos dígitos también es divisible por 9 (bcda, cdab, etc.)
Por lo tanto, basta contar los que satisfacen $a > b > c > d$ y luego multiplicamos por $4! = 24$.
Si $a = 9$, tenemos: 9765, 9621, 9531, 9432, 9864 y 9873
Si $a = 8$, tenemos: 8721, 8631, 8541, y 8532
Si $a = 7$, tenemos: 7641, 7632, y 7542
Si $a = 6$, tenemos: 6543.
En total son 14, número que multiplicado por 4! nos arroja un gran total de 332 números.
(Problemas para la 2a. Olimpiada de Matematicas, pag. 17)

dígito de las decenas es en ambos casos par ó en ambos casos impar. Por lo tanto ya que el dígito de las decenas de a^2 es impar, c debe ser 4 ó 6 porque el cuadrado de todos los otros naturales de un dígito tiene dígito par en las decenas. Como el cuadrado de 4 y 6 tienen dígito de las unidades igual a 6, a^2 también lo tendrá.
(Hungarian problem book, Vol. 2, pag. 78)

32. $(3a-b,\ 2a+b) = (5a,\ 2a+b)$ y $1 = (a,\ b) = (a,\ 2a+b)$. Supongamos que un primo p divide a 5a, entonces $p|5$ ó $p|a$ (*).
Sea $k = (5a,\ 2a+b)$ y sea p un número primo tal que $p|k$ entonces $p|5a$ y $p|(2a+b)$ si $p|a$ entonces $p|2a \therefore p|b \therefore p = 1$ lo cual es una contradiccion, por lo tanto p no divide a a. Por (*) $p|5 \therefore p = 5$. Lo cual en efecto en nuestro caso se puede dar si por ejemplo $a = 2$ y $b = 1$ ya que entonces $(3a-2b,\ 2a+b) = (5,\ 5) = 1$. Es fácil checar que 5 al cuadrado no divide a 5a y $\therefore$ ninguna potencia de 5 mayor que 5.
Respuesta: 1, 5.

33. $abc = 128 = 2^7$ lo cual implica que a, b y c son potencias de dos.
Como $a+b = 50$ entonces se tiene para valores de a que son potencias de 2 las siguientes opciones;
$a = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$
$b = 49,\ 48,\ 46,\ 42,\ 34,\ 18$
En ninguno de estos casos b es potencia de 2, por lo tanto el sistema no tiene solución.■

34. i) $2k+1 = (k+1+k)(k+1-k) = (k+1)^2-k^2 \therefore$ todos los impares mayores que uno son representables.
ii) $8k = 2(4k) = (2k+1-2k+1)(2k+1+2k-1) = (2k+1)^2-(2k-1)^2 \therefore$ todos los múltiplos de 8 son representables.
iii) $(2k+1)^2-(2r+1)^2 = 4(k^2-r^2)+4(k-r) = 4(k-r)(k+r+1) = 8t$. $\therefore$ la diferencia de los cuadrados de dos números impares

Y por ensayo y error (deben ser menores que 59) obtenemos la única solución 17, 19 y 23. †

36. Se demostrará que $2n+3m \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow 8n+5m \equiv 0 \pmod{17}$.

$\Rightarrow$) $2n+3m \equiv 0 \Rightarrow -2n \equiv 3m \Rightarrow -16n \equiv 24m \Rightarrow n \equiv 7m \Rightarrow 9n+5m \equiv 9(7m)+5m \equiv 68m \equiv 0$

$\Leftarrow$) $8n+5m \equiv 0 \Rightarrow 9n \equiv -5m \Rightarrow 18n \equiv -10m \Rightarrow n \equiv 7m \Rightarrow 2n+3m \equiv 2(7m)+3m \equiv 17m \equiv 0$

Nota: Todas las congruencias son módulo 17. ■

37. Se demostrará que $18a+5b \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow 11a+2b \equiv 0 \pmod{19}$

$\Rightarrow$) $18a+5b \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 5b \Rightarrow 11a+2b \equiv 11(5b)+2b = 57b \equiv 0$

$\Leftarrow$) $11a+2b \equiv 0 \Rightarrow 2b \equiv 8a \Rightarrow b \equiv 4b \Rightarrow 18+5b \equiv 18a+5(4a) = 38a \equiv 0$

Nota: Todas las congruencias son módulo 19. ■

38. Como $3804=4.3.317$ demostrar que 3804 divide a algún número es equivalente a demostrar que 4, 3 y 317 lo dividen.

i) $5^{8n+4}+3^{4n+2} = (625)^{2n+1}+9^{2n+1} \equiv (-9)^{2n+1}+9^{2n+1} \equiv 0 \pmod{317}$

ii) Por otro lado $n^3-n = n(n^2-1) = (n-1)n(n+1) \therefore$ uno de estos tres números consecutivos es múltiplo de 3 y $\therefore$ el producto.

iii) Tambien de la factorización anterior se observa que n^3-n es par y como $5^{8n+4}+3^{4n+2}$ también es par entonces la expresión original nos proporciona números que son múltiplos de 4.

De i), ii) y iii) se concluye lo pedido. ■

39. Se deja al lector la demostración del siguiente lema:

Lema: si $(a, b) = 1$ y $(c, b) = 1$ entonces $(ac, b) = 1$

Ahora se procede a la demostración de lo pedido:

$(n^2+n-1,\ n^2+2n) = (n^2+n-1,\ n+1) = (n^2+2n,\ n+1) = (n(n+2), n+1)$

pero $(n,\ n+1) = 1$ y $(n+2,\ n+1) = 1$ por ser enteros consecutivos, entonces por el lema se tiene lo que se quería demostrar. ■

Sean s y m el resultado de multiplicar los elementos de A y B respectivamente.

Sea p un primo que este como factor en algùn término del conjunto original, si s=m entonces p|s y p|m de aqui que p debe dividir al menos a un elemento de A y uno de B.

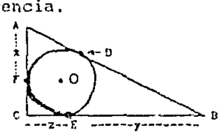
Es fácil probar que en n números consecutivos hay exactamente uno que es múltiplo de n. De esto y lo anterior, si p es un primo que divida a alguno de los 6 números, entoces $p\leq5$.

Ahora bien n no puede ser uno ya que entonces 5 estaría como factor en sólo un elemento del conjunto.

De lo anterior se concluye que los tres impares que hay en el conjunto son múltiplos de 3 ó 5. Pero de tres impares consecutivos solo uno es múltiplo de tres y a lo más uno es múltiplo de 5, por lo tanto hay al menos uno que no es ni múltiplo de 3 ni de 5, si no de un primo mayor.

Por lo tanto no existe tal conjunto. ∎

45. Denotemos por A, B y C los vértices del triángulo con ángulo recto en C, O el centro de la circunferencia y D, E y F los puntos de tangencia de los lados AB, BC y CA respectivamente con la circunferencia.



Aplicando el que la longitud de las tangentes desde un punto exterior a una circunferencia son iguales, se tiene que:

x = AD = AF,

y = BD = BE,

z = CE = CF.

CEOF es un cuadrado, (por que los radios a los puntos de tangencia son perpediculares a las tangentes) $\therefore$ $z = 6$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABC se tiene que $(6+x)^2+(6+y)^2 = (x+y)^2$. Despejando nos queda que:

múltiplo de 5, las únicas posibilidades son 19 y 29.
Con lo anterior llegamos a la solución 11, 19, 43. †

49. Se tiene que $2^n \equiv 2, 4, 1 \pmod 7$ para $n = 1, 2, 3$ respectivamente, de aquí en adelante se repiten los valores 2, 4, 1 para valores de n mayores que 3, en ese mismo orden. Por lo tanto:

a) los múltiplos de tres son los enteros pedidos.

b) -1 es congruente a 6 módulo 7 y como este valor no es de los que se obtienen de 2^n, no existe un número n tal que $7 \mid (2^n+1)$. ■

50. De la segunda ecuación se deduce que $p^2 = (m-n)(m+n)$, como p debe ser un número primo, tenemos dos opciones:

$$\text{i)}\quad m-n = m+n = p, \qquad \text{ii)}\quad m-n = 1 \quad y \quad m+n = p^2,$$

la primera de las opciones no lleva a que $m = p$ y $n = 0$ pero n debe ser natural, por lo tanto se descarta esta opción. La segunda nos lleva a la ecuación cuadrática $p^2+p-306 = 0$ que tiene dos soluciones enteras, una de ellas positiva (17), que es la que nos proporciona la solución $p = 17$, $n = 144$ y $m = 145$. †

51. $n^4+1 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$, el primer factor es mayor que 2 y el segundo factor que es igual a $(n^2-1)+1$ es mayor que 1 ya que $n>1$, por lo tanto n^4+1 es compuesto. ■

52. Hagamos $a = 1$, entonces tenemos que encontrar un número b tal que $1 \mid b$, $2 \mid (b+1)$, ..., $11 \mid (b+10)$. Lo anterior es equivalente a encontrar un número b tal que $b \equiv 1 \bmod(2, 3, \ldots, 11)$ todos los múltiplos de $[2, 3, \ldots, 11]$ al sumarle uno lo cumplen, en particular $11!+1$.

53. $$\sigma d(n) = \frac{(2^n-1)((2^m-1)^2-1)}{2^m - 1 - 1} = (2^n-1)2^m = 2n \Rightarrow \sigma d(n)-n = n \quad ■$$

54. Supongamos lo contrario, es decir que para alguna n, existen x, y, z tal que $2n-1 = x^2$, $5n-1 = y^2$ y $13n-1 = z^2$, resulta que x es impar y $\therefore 2n \equiv x^2+1 \equiv 2 \pmod 8$

$\therefore$ n es impar

$\therefore$ y y z son pares,

sean $y = 2y'$ y $z = 2z'$, ademas $z^2-y^2 = 8n$, de donde $(z'-y')(z'+y') = 2n$, por tanto $z' \equiv y' \pmod 2$, lo cual contradice el hecho de que n es impar.■

(Matematicas Iniciales, pag. 136)

55. De la tercera ecuación, $abc = 440 = 2^3 5.11 \Rightarrow 11|(a,\ b$ ó $c)$ supongamos que $11|a \Rightarrow a = 11k$, si $|k|>1$ entonces $a^2 = 11^2 \geq 484 > 210$ por lo tanto $a = \pm 11$.

Substituyendo el valor anterior en la segunda ecuación y despejando se obtiene que $b^2+c^2 = 89$.

De la misma tercera ecuación y de que $a = \pm 11$ se deduce que $cb = \pm 40 \Rightarrow 5|(b$ ó $c)$ supongamos que $5|b \Rightarrow b = 5r$ si $|r| > 1$ entonces $b^2 = (5r)^2 \geq 100 > 89$ por lo tanto $b = \pm 5$.

Substituyendo el valor de b en $cb = 40$ se obtiene $c = \pm 8$. Como la suma máxima de a, b y c es 24 y este debe ser la suma de acuerdo a la primera ecuación entonces $a = 11$, $b = 5$ y $c = d$ y por lo tanto la cantidad de tripletas solución del sistema original es 6.

56. $0 = f(10) = f(2.5) = f(2)+f(5)$

$\Rightarrow f(2) = 0 = f(5)$ (ya que $f \geq 0$)

$f(9) = f(3.3) = f(3)+f(3) = 0$ ($f(n) = 0$ para toda n que termina en 3).

$f(1985) = f(5.397) = f(5)+f(397) = f(397) = f(9)+f(397) = f(9.397) = f(3573) = 0.$ †

57. Sea $n = 4444^{4444} < (10^5)^{4444} = 10^{22220}$

$\therefore A = \sigma d(n)$

$\leq 9.22220 = 199980$

$\therefore B = \sigma d(A)$

$\leq 9(5) = 45$

iii) $2^4 3^2.5.7.11$	120	65520
iv) $2^6 3^3.5.7$	112	60480

60. (i) $n^{n-1}-1 = (n-1)(n^{n-2}+n^{n-3}+\ldots+1)$

(ii) $n^{n-2}+n^{n-3}+\ldots+1 = (n^{n-2}-1)+(n^{n-3}-1)+\ldots+(1-1)+(n-1)$ cada uno de los sumandos de la segunda parte de esta última igualdad es divisible por $n-1$.

De (i) y (ii) se concluye que $(n-1)^2 | (n^{n-1}-1)$. ∎

61. Para cuando $n = 0$ ó $m = 0$ es obvio, supongamos que: $f(m, n) = \frac{(2n)!(2m!)}{n!m!(n+m)!}$, luego $f(m, n) = 4f(m,n-1) - f(m+1,n-1)$, como $f(m,0)$ es entero, la fórmula anterior dice que si $f(m, n-1)$ y $f(m+1, n-1)$ es entero, $f(m, n)$ lo es, lo cual por inducción es cierto cuando $n = 0$, suponemos para $n = k$ y de ahi para $n = k+1$. ∎

(Matematicas iniciales, pag. 104)

62. $$(1+a+a^2+\ldots+a^n)^2-a^n = \left(\frac{(a^{n+1}-1)}{a-1}\right)^2 - a^n, \qquad a\neq 1$$

$$= \frac{a^{2n+2}-2a^{n+1}+1-a^{n+2}+2a^{n+1}-a^n}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{(a^{2n+2}-a^{n+2})-(a^n-1)}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{a^{n+2}(a^n-1)-(a^n-1)}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{(a^n-1)(a^{n+2}-1)}{(a-1)^2}$$

$$= (a^{n+1}+a^n+\ldots+1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1)$$

Como cada factor de esta ultima expresión es mayor que uno, la expresión original siempre nos dará un número compuesto si a es diferente de 1.

Si $a = 1$ entonces la expresión original es igual a $(n+1)^2-1$ que es igual a $n(n+2)$ como $n \geq 2$ la expresión también sera un número compuesto. Esto completa la demostración. ∎

común divisor de x y y. Observemos que si $(x, y) = 1$, entonces $(x+y, xy)=1$ (pues un divisor común de $x+y$ y xy también lo será de x y y

Hecha la anterior observación vamos a probar que:

$$(a+b, [a, b]) = (a, b)$$

Sea $m = (a, b)$ y escribamos $a = mr$ y $b = ms$; $(r, s) = 1$ y por tanto $[r, s] = rs$. Tenemos entonces $(a+b, [a, b]) = (m(r+s), m[r, s]) = m(r+s, [r, s]) = m(r+s, rs) = m$.

Vamos a aplicar lo anterior para encontrar los números a y b. Como $(a, b)[a, b] = ab$ y $(a+b, [a, b]) = (a, b) = 9$ tenemos que $9(108900) = ab = a(1989-a) = 1989a-a^2$. Entonces $a^2-1989a+9(108900) = 0$, de donde $a = 900$ ó $a = 1089$, y con esto queda probada nuestra afirmación.

(Problemas para la 4ta. Olimpiada de Matematicas, pag. 12)

69. Ya que el número $3n + 4m$ tiene como último digito al 2, entonces:

$$3n + 4m \equiv 2 \pmod{10} \text{ ——— } (1)$$

Esto implica que $3n + 4m$ es un número par, ya que $4m$ lo es entonces $3n$ tiene que ser par también. Por tanto n es múltiplo de 2, entonces:

$$5n \equiv 0 \pmod{10} \text{ ——— } (2)$$

Sumando (1) y (2) obtenemos:

$5n + 3n + 4m \equiv 2 \pmod{10}$, de aquí que $8n + 4m \equiv 2 \pmod{10}$

Por tanto, 2 es el último digito de $8n + 4m$. ∎

(40 Problemas para Olimpiadas de Matematicas, pag. 20)

70. Sea $A(m) = am^3+bm^2+cm+d$ y $B(n) = dn^3+cn^2+bn+a$.

Las congruencias siguientes son módulo 5.

Si $m \equiv 0$ entonces $0 \equiv A(m) \equiv A(0) = d$

$\Rightarrow$ 5 divide a m, lo cual por hipótesis es falso

$\therefore \; m \not\equiv 0$.

Si $m \equiv 1$ entonces $0 \equiv A(m) \equiv A(1) = a+b+c+d$

$\therefore \; B(1) = d+c+b+a \equiv 0$

Si $m \equiv -1$ entonces $0 \equiv A(m) \equiv A(-1) = -a+b-c+d$

$\therefore\ B(-1) \equiv -d+c-b+a = -(-a+b-c+d) \equiv 0$

Si $m \equiv 2$ entonces $0 \equiv A(m) \equiv A(2) = 8a+4b+2c+d$

$\Rightarrow\quad 16a+8b+4c+2d \equiv 0$

$\Rightarrow\quad a-2b-c+2d \equiv 0$

$\Rightarrow\quad a \equiv 2b+c-2d$

$\therefore\ B(n) \equiv dn^3+cn^2+bn+2b+c-2d$

$\qquad = d(n^3-2)+c(n^2+1)+b(n+2)$

$\Rightarrow B(-2) \equiv 0$

Si $m \equiv -2$ entonces $0 \equiv A(m) \equiv A(-2) = -8a+4b-2c+d$

$\Rightarrow\quad -16a+8b-4c+2d \equiv 0$

$\Rightarrow\quad -a-2b+c+2d \equiv 0$

$\Rightarrow\quad a \equiv -2b+c+2d$

$\therefore\ B(n) \equiv dn^3+cn^2+bn-2b+c+2d$

$\qquad = d(n^3+2)+c(n^2+1)+b(n-2)$

$\Rightarrow B(2) \equiv 0$

Se han cubierto todos los casos y por lo tanto siempre existe el número n. ∎

71. En el problema se nos pide ver si el número de alumnos es ó no divisible por tres.

Sea n = #de profesores de gimnasia,

m = #de profesores de ruso

y A = # total de alumnos.

Las siguientes congruencias son módulo 3.

De las condiciones dadas, se tiene que $A = nm(n+m)(n-m)$.

Si n ó $m \equiv 0$, entonces $nm \equiv 0\ \therefore\ A \equiv 0$

Si $n \equiv m$, entonces $n-m \equiv 0\ \therefore\ A \equiv 0$

Supongamos que no se cumplen las dos condiciones anteriores, entonces $n \equiv 1$ y $m \equiv 2$

ó $n \equiv 2$ y $m \equiv 1$

en cualquier caso $n+m \equiv 0\ \therefore\ A \equiv 0$.

La respuesta es que si es posible hacer desfilar a los alumnos en filas de 3.

72. Sean a, b la medida de los catetos del triángulo rectángulo y c la de la hipotenusa.

Un entero cualquiera x debe cumplir que $x \equiv 0 \pmod 3$, $x \equiv 1 \pmod 3$ ó $x \equiv 2 \pmod 3$. De manera que $x^2 \equiv 0 \pmod 3$ ó $x^2 \equiv 1 \pmod 3$. Si a y b no son múltiplos de tres entonces $a^2, b^2 \equiv 1 \pmod 3$. Asi que $c^2 = a^2+b^2 \equiv 2 \pmod 3$. Este absurdo prueba que a ó b es múltiplo de 3.

Nótese que un entero cualquiera x debe cumplir $x^2 \equiv 0 \pmod 5$ ó $x^2 \equiv 1 \pmod 5$ ó $x^2 \equiv 4 \pmod 5$. Si a y b no son múltiplos de 5, entonces $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2, 3$ ó $0 \pmod 5$.

De manera que $c^2 \equiv 0 \pmod 5$ por tanto 5 divide a c.

Ahora supongamos que a y b no son pares, entonces a^2 y b^2 son impares y su suma, que es igual a c^2, tiene que ser par. De aquí que c es par.

Como en los lados a, b y c hay múltiplos de 2, 3 y 5 entonces el producto abc es divisible por 30. ■

(40 Problemas para Olimpiadas de Matematicas, pag. 29)

73. ⇒) Supongamos que $4|n$, entonces $n = 4k$ para alguna k natural

$$\therefore\ 1^n+2^n+3^n+4^n = 1+16^k+81^k+196^k$$
$$\equiv 1+1+1+1 \not\equiv 0 \pmod 5$$

pero $1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 0 \pmod 5$ (hip.) por lo tanto $4\nmid n$

⇐) Si n es la forma $4k+1$, entonces:

$$1^n+2^n+3^n+4^n = 1+2(16^k)+3(81)^k+4(196^k)$$
$$\equiv 1+2+3+4 \equiv 0 \pmod 5.$$

Si n es de la forma $4k+2$, entonces:

$$1^n+2^n+3^n+4^n = 1+4(16^k)+9(81)^k+16(196^k)$$
$$\equiv 1+4+9+16 \equiv 0 \pmod 5.$$

Si n es de la forma $4k+3$, entonces:

$$1^n+2^n+3^n+4^n = 1+8(16^k)+27(81)^k+64(196^k)$$

$\equiv 1+3+2+4 \equiv 0 \pmod 5$ en cualquier caso 5 divide a $1^n+2^n+3^n+4^n$. ■

74. Hagamos $\delta(n)$ = suma de los dígitos de n, $\lambda(n)$ = suma de los dígitos de $f(n)$ y $\omega(n)$ = número de los dígitos de n.
Entonces las condiciones para f pueden escribirse así:

$$f(n + f(n)) = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\delta(n) + \lambda(n) = 9(f(f(\omega(n)))) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Vamos a probar una serie de propiedades de f.

a) $r \leq f(f(r))\ \forall r \in \{1, 2, \ldots, 8\}$
Para probar esto, consideremos el número $n = \underbrace{99\ldots\ldots9}_{r\text{ - dígitos}}$,
aplicando (2) tenemos $9r \leq 9r + \lambda(n) = \delta(n) + \lambda(n) = 9(f(f(r)))$. Por tanto $r \leq f(f(r))\ \forall r \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.

b) Supongamos que $f(n) = 0$ y que n tiene r dígitos.
Mostraremos que $r = f(f(r))$.
Por (2), $9r \geq \delta(n) + \lambda(n) = 9(f(f(r)))$, llegando así a que $r \geq f(f(r))$ y por (a):

$$r = f(f(r)) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

c) Supongamos que $f(n) = 0$. Probaremos que n es de la forma:

$$\underbrace{99\ldots\ldots9}_{r\text{ - dígitos}}$$

Sea $r = \omega(n)$, entonces $\delta(n) + 0 = 9(f(f(r)))$, y por (b), $\delta(n) = 9r = 9\omega(n)$. Es decir la suma de los dígitos de n es igual a 9 veces el número de sus dígitos. Esto sólo puede ocurrir si n es de la forma $\underbrace{99\ldots\ldots9}_{r\text{ - dígitos}}$

d) Calculemos $f(1)$, $f(8)$ y $f(9)$
sea $n = 1 + f(1)$, como $f(1 + f(1)) = 0$, entonces n es de la forma $n = \underbrace{99\ldots\ldots9}_{r\text{ - dígitos}}$ así que $f(1) = \underbrace{99\ldots\ldots9}_{r\text{ - dígitos}}$
Aplicando (2) al número 1 tenemos que:
$1 + (9(r-1) + 8) = 9(f(\underbrace{99\ldots\ldots998}_{r\text{-dígitos}}))$, por tanto $r = f(\underbrace{99\ldots\ldots98}_{r\text{-dígitos}})$.
Ahora aplicamos (2) al número $99\ldots\ldots998$ y obtenemos:
$9(r-1)+8+r = 9(f(f(r)))$ entonces 9 divide a $8+r$ recordemos que $r \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, pues es el número de dígitos de $f(1)$. Por tanto $r = 1$ (es decir n tiene sólo un dígito) así es que $1 + f(1) = 9$ y $f(1) = 8$. Substituyendo en (2):
$1+8 = 9(f(f(1)))$, entonces $f(f(1)) = 1$ y $f(8) = 1$. Como

$f(1 + f(1)) = 0$ y $f(1) = 8$, entonces $f(9) = 0$.

e) Ahora calcularemos $f(2)$. De (2) tenemos que $2 + \lambda(2) = 9(f(f(1))) = 9(1)$ entonces $\lambda(2) = 7$ (es decir, la suma de las dígitos de $f(2)$ es 7). Por c) $(2 + f(2))$ es de la forma $\underbrace{99.......9}_{s\text{ - dígitos}}$

Por tanto $f(2) = \underbrace{99.....97}_{s\text{-dígitos}}$ pero la suma de los digitos de $f(2)$ es 7, entonces $f(2) = 7$.

f) Analogamente se puede probar que $f(7) = 2$, $f(6) = 3$, $f(5) = 4$, $f(4) = 5$.

g) Ahora si podemos calcular $f(1989)$. Por (2) tenemos que $27 + \lambda(1989) = 9(f(f(4)))$. Como $f(4) = 5$ y $f(5) = 4$, entonces $27+\lambda(1989) = 36$. asi que $\lambda(1989) = 9$ (es decir, la suma de los dígitos de $f(1989)$ es 9).

Por c), $1989 + f(1989) = \underbrace{99.....99}_{i\text{-digitos}}$, de modo que $f(1989)$ es de forma $f(1989) = \underbrace{99........99}_{(i-4)\text{-digitos}}8010$, pero como la suma de los digitos de $f(1989)$ es 9, entonces $f(1989) = 8010$.■

(40 Problemas para Olimpiadas de Matematicas, pag. 46)

75. El número $\underbrace{222.....2}_{r\text{-digitos}}$ es igual a $\underbrace{111....1}_{r\text{-digitos}} + \underbrace{111....1}_{r\text{-digitos}}$, entonces entonces $\underbrace{111......1}_{2r\text{-digitos}} - \underbrace{222.....2}_{r\text{-digitos}} = \underbrace{111....1}_{2r\text{-digitos}} - \underbrace{111....1}_{r\text{-digitos}} - \underbrace{111....1}_{r\text{-digitos}}$ en el segundo miembro, restemos al primer sumando el segundo obteniendo: $\underbrace{111......1}_{r\text{-digitos}}\underbrace{000....0}_{r\text{-digitos}} - \underbrace{111....1}_{r\text{-digitos}}$ como $\underbrace{111......1}_{r\text{-digitos}}\underbrace{000.....0}_{r\text{-digitos}} = \underbrace{1111....1}_{r\text{-digitos}}(10^r)$, entonces $\underbrace{111......1}_{r\text{-digitos}}\underbrace{000....0}_{r\text{-digitos}} - \underbrace{111....1}_{r\text{-digitos}}$ es igual a $\underbrace{111.....1}_{r\text{-digitos}}(10^r) - \underbrace{111....1}_{r\text{-digitos}}$, factorizando $\underbrace{111.....1}_{r\text{-digitos}}$ obtenemos lo siguiente: $\underbrace{111......1}_{r\text{-digitos}}(10^r-1) = \underbrace{111.....1}_{r\text{-digitos}}(\underbrace{999....9}_{r\text{-digitos}}) = 9(\underbrace{111......1}_{r\text{-digitos}})^2 = (\underbrace{333....3}_{r\text{-digitos}})^2$, que es un cuadrado perfecto. ■

(40 Problemas para Olimpiadas de Matematicas, pag. 52)

76. $3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{43} + \frac{1}{42\cdot 43} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{13} + \frac{1}{12\cdot 13}$

La anterior "misteriosa" forma de expresar el 3 se obtuvo aplicando la identidad:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Ya teniendo una forma de expresar el 3 (y cualquier otro), se pueden obtener una infinidad de formas aplicando la identidad dada, al término de valor numérico mas "chico" en una de las expresiones obtenidas. †

77. Costruyamos la progresión aritmética cuyo primer término es 7.30, cuya diferencia es 30 y que tiene 50 términos.

Sea $n = 2.3.5 = 30$, entonces la progresión es:

$$7n,\ 8n,\ 9n,\ \ldots,\ 56n.$$

En particular estan:

$$7n,\ 11n,\ 13n,\ 19n,\ 17n,\ 23n,\ 29n,$$
$$31n,\ 37n,\ 41n,\ 43n,\ 47n,\ 53n$$

En total 13 de la forma pedida.

78. a) Demostraremos por inducción:

Para $n = 2$: $\underline{ab} = 10a+b > 9a + b \geq 9a = a.9 \geq ab$

Supongamos que es cierto para cuando el número tiene k dígitos y probaremos que es cierto cuando tiene k+1.

$$\underline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}} = 10(\underline{a_1a_2\ldots a_k})+a_{k+1}$$
$$> 10a_1a_2\ldots a_k$$
$$\geq a_1a_2\ldots a_ka_{k+1} \blacksquare$$

b) Denotemos por $Q(n)$ a $P(P(P(P(P(n)))))$. Aseguramos que el 0 es el número de $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ para el que existen más n's tales que $Q(n) = 0$. Para probar esto, bastará con que chequemos que más de la mitad de los números en $\{0, 1, 2, \ldots, 10^8\}$ cumplen que $Q(n) = 0$. Notemos que si n tiene un 0 en su expansión decimal, entonces, $P(n) = 0$, $P(P(n)) = 0$ y $Q(n) = 0$. Por tanto si vemos que mas de la mitad de los números en $\{0, 1, 2, \ldots, 10^8\}$ tiene algún 0 en su expansión decimal, habremos terminado. Es decir, tenemos que ver que al menos$(10^8+2)/2 = 5(10^7)+1$ números de {0, 1, 2, ..., 10^8} tienen algún 0. O dicho de otra manera, a lo mas $5(10^7)-1$ números de {0, 1, 2, ..., 10^8} no tienen ningún 0.

Contaremos pues cuantos elementos del conjunto {0, 1, 2, ..., 10^8} no tienen ningún 0.

Desde 0 a 9 hay 9 números sin 0.

Desde 10 a 99 hay $81=9^2$ números sin 0 (hay que poner dos dígitos y tenemos 9 opciones para cada una.

Desde 100 a 999 hay $9^3=729$ números sin 0.

Desde 1000 a 9999 hay $9^4 = 6561$ números sin 0.

Desde 10000 a 99999 hay $9^5=59049$ números sin 0.

Desde 100000 a 999999 hay $9^6=531441$ números sin 0.

Desde 1000000 a 9999999 hay $9^7=4782969$ números sin 0.

Desde 10000000 a 99999999 hay $9^8=43046721$ números sin 0.

Sumando estas potencias de 9 obtenemos.

$9+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6+9^7+9^8=48427560$

entonces el número de números que no tiene ningún cero son 48427560, que son menos de la mitad de los números del conjunto {0, 1, 2,..., 10^8}. Por tanto los números del conjunto {0, 1, 2, ..., 10^8} que tienen al menos un cero en sus digitos es mayor que la mitad de todos los elementos del conjunto. Entonces de los elementos del conjunto {0, 1, 2, ..., 9}, el cero es aquel para el que existen mas n's en el conjunto {0, 1, 2,.., 10^8} tales que $Q(n) = 0$.

c) Notemos que si $P(n) = 1$, entonces n es de la forma n = 111.....1 (r veces uno), por que si n tiene un dígito que no sea 1, entonces este dígito debería ser divisor de $P(n)$, pero $P(n) = 1$ no tiene divisores.

Si m es tal que $P(P(m)) =1$, entonces $P(m)$ es de la forma $P(m)$ = 111....1 (r veces 1).

$P(m)$ a lo mas tiene 8 unos (de otra manera sera mayor que 10^8). Once divide a los que tienen un número par de unos y son 1, 2, 4, 17, 34 y 68; para d = 1, 4, 17 y 68, x no resulta entero; para d = 2, J no es positivo. Asi, la única opción posible es d = 34 con lo que se obtiene J = 14 y x = 18. Entonces P = (14±18)/2; pero P debe ser positivo así que P = 16. Por tanto Pedro tiene 16 años.

(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag. 20)

80. Supongamos que $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(221)}$ son los dígitos del número. Entonces $a_{(1)}.a_{(2)}.\ldots.a_{(221)} = 3^{442}$, por lo que cada $a_{(i)}$ es una potencia de 3 y $1 \le a_{(i)} \le 9$. Si por ejemplo, $a_{(1)}<9$, entonces $3^{442} = a_{(1)}.a_{(2)}.\ldots.a_{(221)} < 9.a_{(2)}.\ldots.a_{(221)} \le 9.9.\ldots.9 = 9^{221} = 3^{442}$ lo cual es absurdo; de aqui que cada $a_{(i)}$ tiene que ser igual a 9. Por tanto la suma de los dígitos es igual a 9+9+...+9 = 9(221) = 1989.

(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag. 20)

81. Vamos a ver que r = 11. Primero observemos que 10 no se puede expresar en la forma 2a+5b con a y b enteros positivos. (Para convencernos de esto, notemos que b debe ser 1 ó 2, pero en ninguno de estos dos casos es posible encontrar a.) Ahora tomemos $n \ge 11$.

Caso 1: n impar.- escribamos n = 2m+1 con $m \ge 5$; entonces n-5 = 2m-4 = 2(m-2); por tanto n = n-5+5 = 2(m-2)+5. Así a = m-2 y b = 1.

Caso 2: n par p.- Escribamos n = 2m con $m \ge 6$; entonces n = 2m-10+10 = 2(m-5)+5(2). Asi a = m-5 y b = 2.

(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag. 13)

82. Tenemos $5h/2 \le 26950 = 2.5^2.7^2.11$. Asi, $h \le 2^2.5.7^2.11$. Por otro lado h debe ser un divisor de 26950, asi que $h = 2^{\alpha}5^{\beta}7^{\gamma}11^{\delta}$ con $\beta, \gamma \in (0, 1, 2)$ y $\alpha, \delta \in (0, 1)$. Si fijamos $\beta \in (0, 1)$, automaticamente cualquier elección de α, γ y δ nos dará la desigualdad $h \le 2^2.5.7^2.11$ que queremos; en este caso tenemos 2.2.3.2 = 24 posibilidades. Si ponemos $\beta = 2$, vamos a

ver que posibilidades de α, γ y δ nos dan $2^{\alpha}5^{2}7^{\gamma}11^{\delta} \leq 2^{2}.5.7^{2}.11$. Si $\delta = 0$ entonces α y γ pueden tomar cualquier valor: $\alpha = 0, 1$ y $\gamma = 0, 1, 2$; esto nos dá 6 posibilidades. Si $\delta = 1$ y $\gamma = 2$, queremos $2^{\alpha}5 \leq 2^{2}$ lo cual no es posible. Si $\delta = 1$ y $\gamma = 0$ ó 1, entonces $\alpha = 0$ ó 1; es decir hay 4 posibilidades. En total, las posibilidades son $24+6+4 = 34$.
(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag. 18)

83. Tenemos la igualdad:
$2^{a}-1 = (2^{b}-1)(2^{b(q-1)}+2^{b(q-2)}+\ldots+2^{b}+1)2^{r}+(2^{r}-1)$ así que cualquier divisor común de $2^{a}-1$ y $2^{b}-1$ también dividirá a $2^{r}-1$; es decir sera divisor común de $2^{b}-1$ y $2^{r}-1$. Reciprocamente, los divisores de $2^{b}-1$ y $2^{r}-1$ también son divisores de $2^{a}-1$ y, por tanto, son divisores comúnes de $2^{a}-1$ y $2^{b}-1$. Hemos probado entonces que $(2^{a}-1,\ 2^{b}-1) = (2^{b}-1,\ 2^{r}-1)$ ■
(Problemas para la 4ta. OMM, 1990)

84. $A(2) = 2.4.6.\ldots.1000 = 2^{500}(1.2.3\times\ldots.500) = 2^{500}.500!$
Analogamente:
$A(3) = 3^{333}.333!$, ..., $A(31) = 31^{32}.32!$, $A(32) = 32^{31}.31!$.
Observemos entonces que $31!$ es un divisor común de $A(1)$, $A(2)$, ..., $A(32)$. Pero 32 también aparece como factor en todos (aparte del $31!$), por tanto $32!$ es un divisor de todos. Ahora $A(31)/32! = 31^{32}$ y $A(32)/32! = 32^{30}$, y estos números no tienen factores en común. En consecuencia el mayor de los divisores comunes de $A(31)$ y $A(32)$ es $32!$, por tanto también es el mayor de los divisores comunes de $A(2)$, $A(3)$, ..., $A(32)$. †
(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag. 23)

85. Tenemos $n = 100m$. Son divisores de n, entre otros, los de la forma km con k divisor de 100. Los divisores de 100 ($= 2^{2}5^{2}$) son: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.
Entonces $D+100m = D+n \geq 1m+2m+4m+5m+10m+20m+25m+50m+100m$

$$= (1+2+4+5+10+20+25+50+100)m$$
$$= 217m = 117m + 100m$$

así $D \geq 117m > 100m = n$. ■

(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag. 24)

86. Escribamos $a = p(1)^{\alpha(1)} p(2)^{\alpha(2)} \ldots\ldots p(r)^{\alpha(r)}$,

$b = p(1)^{\alpha(1)} p(2)^{\alpha(2)} \ldots p(r)^{\alpha(r)}$, donde $\alpha(i)$, $\beta(i) \geq 0$, $p(i)$ es primo para cada i y $p(i)$ es diferente de $p(j)$ e i es diferente de j. Las condiciónes del problema son entonces equivalentes a:

(i) para cada i $\alpha(i) \leq 2\beta(i) \leq 3\alpha(i) \leq 4\beta(i) \leq 5\alpha(i)$, y

(ii) Existe i tal que $5\alpha(i) > 6\beta(i)$

Es claro entonces que basta considerar un sólo primo, así que encontraremos $\alpha(1)$ y $\beta(1)$ que satisfagan (i) y (ii). Esto se puede hacer facilmente al tanteo, por ejemplo $\alpha(1) = 4$ y $\beta(1) = 3$ sirven (también sirven, por ejemplo, $\alpha(1) = 13$ y $\beta(1) = 10$). Ahora tomemos $p(1)$ cualquier primo, por ejemplo 2. Así una pareja que satisface las condiciones pedidas es $a = 2^4$ y $b = 2^3$.

(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag. 25)

87. Supongamos que si existe un número con las condiciones del problema. Sea P el producto de sus digitos y S la suma. Sabemos que $P = S$, lo que nos implica que no hay ceros. Llamemos $a(1)$, $a(2), \ldots, a(1989)$ los dígitos del número. Entonces, como cada $a(i)$ es a lo más 9, $S = \Sigma a(i) \leq 9 \times 1989 = 17901$. Así $P \leq 17901$. Por otro lado sabemos que hay por lo menos tres 5's, así que el producto de los demás digitos es menor ó igual que $17901/125 < 144$. Contemos ahora, aparte de los tres 5's cuantos dígitos pueden ser distintos de 1, como $2^8 > 43$, a lo más serán 7; cambiando de notación si fuera necesario, supongamos que los digitos no 1 se encuentran entre $a(1)$, $a(2)$, ..., $a(7)$. Tenemos: $P = 125a(1)a(2)\ldots a(7)$, $S = 15 + a(1) + a(2) + \ldots + a(7) + 1994$.

Entonces a(1)a(2)...a(7) = (a(1)+a(2)+...+a(7))/125+ 1994/125. Como 0 < (a(1)+a(2)+....a(7))/125 < 1, entonces 1994/125 < a(1)a(2)....a(7) < 1994/125 + 1; así a(1)a(2)...a(7) es 16 ó 17. Pero 17 es primo y cada a(i) es un dígito, ∴ a(1)a(2)...a(7) = 16. Las posibilidades entonces para a(1), a(2), ..., a(7) son (en desorden).

(i) 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1; aquí S = 15+8+(1989-7) = 2005
(ii) 2, 2, 4, 1, 1, 1, 1; aquí S = 15+8+(1989-6) = 2006
(iii) 2, 8, 1, 1, 1, 1, 1; aquí S = 15+10+(1989-5) = 2009
(iv) 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1; aquí S = 15+8+(1989-5) = 2007

En ningún caso S es múltiplo de 16 (como debia de serlo pues P lo es); en consecuencia, no es posible encontrar dicho número. ■

(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag. 26)

88. Encontraremos n y r utilizando el algoritmo usual para multiplicar dos números, en este caso, n y 2. Como $a_0 \times 2$ debe terminar en 0, tenemos que a_0 debe ser 0 ó 5. Por otro lado a_1 debe ser 0 ó 1 (puesto que un digito multiplicado por 2 es a lo más 18, y si "llevamos" 1, entonces lo máximo que podemos obtener es 19).

$$\begin{array}{r} a_m a_{m-1} \ldots . a_2 a_1 a_0 \\ \times \quad 2 \\ \hline a_1 a_0 a_m a_{m-1} \ldots a_3 a_2 0 \end{array}$$

Examinaremos todas las combinaciones con a_0 = 0, 5 y a_1 = 0, 1. En cada una iremos construyendo el número hasta que en el resultado aparezcan los números $a_1 a_0$ juntos. (Se podría continuar la operacion, pero el número que encontrariamos sería mayor que el ya obtenido).

i) $a_0 = 0$, $a_1 = 0$: En este caso n = 0, asi que no sirve.

ii) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$:

$$\begin{array}{r} 52631578947368421 0 = n \\ \times\ 2 \\ \hline 1052631578947368420 = 2n = r \end{array}$$

iii) $a_0 = 5$, $a_1 = 0$:

$$\begin{array}{r} 263157894736842105 \\ \times\ 2 \\ \hline 0526315789473684210 \end{array}$$

iv) $a_0 = 5$, $a_1 = 1$:

$$\begin{array}{r} 789473684210526315 \\ \times\ 2 \\ \hline 1578947368421052630 \end{array}$$

Asi, el número pedido es el (iii).
(Problemas para la 4a. Olimpiada de Matematicas, pag 26)

89. Reduzcamos los números módulo n, como tenemos una infinidad de términos y los residuos son finitos existe al menos un residuo al que pertenecen una infinidad de términos de la sucesión. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$una de las subsucesiones infinitas que tienen el mismo residuo ordenada de menor a mayor.

$$n|(a_i - a_1)\ \forall i \neq 1, \text{ y } a_i - a_1 = a_{i-1}10^s$$

donde s es la cantidad de digitos de a_1. Como $(n, 10) = 1$ entonces $(n, 10^s) = 1$ y $\therefore n|a_{i-1}$ $\therefore$ n divide a una infinidad de términos de la sucesión original.∎

90. Sea $m_k = ((n+1)!)^2+k$, para $k = 2, 3, \ldots, n+1$. Es claro que $k^2|((n+1)!)^2$, de hecho k es uno de los factores de $(n+1)!$ $\therefore$ $m_k = k(tk+1)$ cada uno de los factores es mayor que 1 y además son primos relativos $\therefore$ m_k no puede ser potencia de primo.∎

91. Primero se verá cual es la suma $1/N(1) + 1/N(2) + \ldots + 1/N(r)$ más grande que se puede obtener con estas condiciones. Para empezar, se puede suponer que 1 es uno de los N(i)'s, si no es así se añade y entonces la suma es mayor. Supongase que $N(1) = 1$. Para cada $i = 2, 3, \ldots, r$, N(i) es un número mayor que uno así que se puede elegir a un primo P(i) que lo divida. Entonces P(2), P(3), ..., P(r) son diferentes entre

si (porque $N(2), N(3), \ldots, N(r)$ son primos relativos dos a dos) y $P(2) \le N(2) \le 40, \ldots, P(r) \le N(r) \le 40$. De modo que: $1/N(1) + 1/N(2) + \ldots + 1/N(r) \le 1 + 1/P(2) + \ldots + 1/P(r) \le 1 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/17 + 1/19 + 1/23 + 1/29 + 1/31 + 1/37 < 3$. ■

(Problemas para la 3a. Olimpiada de Matematicas, pag. 20)

92. Le asignaremos letras diferentes a cada uno de los digitos desconocidos. El problema toma entonces la siguiente apariencia:

```
               κλ7μυ
αβγδ7ε  ⌈ AB7CDELQWZ
          abΔcde
          FGHIK7L  ------------ tercera linea
          fghikΞℓ  ------------ cuarta  linea
            M7NOPQ ------------ quinta  linea
            m7nopq ------------    7Φ
            RSTUΣVW ----------- septima linea
            rstu7vw
              XYZxyz ---------- novena  linea
              XYZxyz
              000000
```

I. El primer dígito (α) del divisor Φ debe ser 1, ya que 7Φ, tiene 6 dígitos, como lo muestra la línea 6 del diagrama, si α fuera igual a 2, 7Φ tendría 7 dígitos.

Ya que el producto parcial de la cuarta linea (es decir $\lambda\Phi$) tiene 7 digitos, y como $\lambda\Phi \le 9\Phi < 7\Phi + 7\Phi < 999999 + 999999 = 1999998$, es decir $\lambda\Phi$ tiene siete digitos y es menor que 1999998 que tambien es de siete digitos, de aqui que el primer digito de $\lambda\Phi$ (o sea f) tiene que ser 1. De esto se deduce que tambien F vale 1.

Con un razonamiento analogo se sigue que r y R valen 1. Como Φ no puede exceder a 199979, el máximo valor de μ es 9, $\therefore$ el producto en la octava línea no puede exceder a 1799811, y $s < 8$. Y como S sólo puede ser 9 ó 0, y ya que no hay residuo en la novena línea bajo s, solamente el segundo caso es posible. Consecuentemente, $S = 0$ y $(R = 1)$ s es también 0. También se sigue de que $R = 1$ y $S = 0$ que $M = m+1$, $\therefore m \le 8$, y el producto 7Φ de la sexta línea no puede ser mayor que 87nopq.

II. Consecuentemente, los únicos valores posibles para el segundo dígito del divisor (β) son 0, 1 y 2.(7 por 130000 es ya mayor que 900000) $\beta = 0$ se elimina porque cuando se multiplica por nueve 109979 no da un número de 7 dígitos, el cual, por ejemplo es el caso del requerido para la octava línea.

Vamos a considerar el caso de $\beta = 1$. Esto implique que γ sólo pueda ser 0 ó 1. (Si $\gamma \geq 2$, entonces en la determinación del segundo dígito de la sexta línea uno debe de agregar a $7\beta = 7.1 = 7$ la cantidad ≥ 1 que viene de 7 por γ, lo cual no puede ser ya que el segundo dígito es 7).

$\gamma = 0$ sin embargo es imposible como consecuencia del número de 7 dígitos de la línea 8, ya que ni 9por110979 da un número de siete dígitos.

De que $\gamma = 1$, se debe observar lo siguiente, δ, ε, y μ deben ser elegidos de tal manera que μ por $111\delta7\varepsilon$ nos dé un número de siete dígitos en el cual el tercero de izquierda a derecha debe ser 7, como lo muestra la octava línea. La única esperanza de que esto se produzca es con $\mu = 9$ (ya que 8 por 111979 tiene solamente seis dígitos). Ahora ese tercer dígito de izquierda a derecha de 9 por $111\delta7\varepsilon$, como puede probarse por ensayo y error, puede ser siete sólo si $\delta = 0$ ó $\delta = 9$. En el primer caso el número de la línea ocho no tendrá siete dígitos ni cuando 111079 sea multiplicado por 9, y en el segundo caso el número de la sexta línea es 7 por 11197* = 783***, lo cual es imposible. Por lo tanto, el caso $\gamma = 1$ también se elimina. La posibilidad de que β sea igual a 1 debe, $\therefore$ ser descartada.

El único valor apropiado para el segundo dígito del divisor es $\therefore \beta = 2$. De esto se sigue que $m = 8$ y $M = 9$.

III. El tercer dígito (γ) del divisor sólo puede ser 4 ó 5, ya que 7.126000 es mayor y 7.124000 es menor que el número de la sexta línea. Más aún, ya que 9.124000 es mayor y 7.126000 es menor que el número de la octava línea (10tu7vw), μ debe ser igual a 8.

Como 8.124979 = 999832 < 1000000 la suposición de que γ = 4 no satisface los requerimientos del número de la octava línea, y γ debe, $\therefore$ ser igual a 5.

IV. Como el tercer dígito de izquierda a derecha del número que resulta de 8 por 125δ7ε debe ser 7, obtenemos por ensayo y error que δ es igual a 4 ó 9. δ = 9 se elimina porque ya 7 por 125970 = 881790 nos dá un número mayor que el de la sexta línea, $\therefore$ el único valor posible para δ es 4. De esto ε sólo puede ser 0 ó 4. Sin embargo cualesquiera que sea el valor de ε, obtenemos para el tercer dígito del número de la sexta línea el valor de 8 (n) ya que 7 por 12547ε = 878***. Similarmente, para la octava línea obtenemos 8 por 12547ε = 10037**, en consecuencia t = 0 y u = 3.

Como $\lambda.\Phi$ = λ por 12547ε debe generar un número de siete dígitos, de acuerdo al número de la cuarta línea, y sólo 8.Φ y 9.Φ tienen siete dígitos, λ es 8 ó 9.

V. De que t = 0 y X $\geq$ 1 (junto con R = r = 1, S = s = 0) se sigue que T $\geq$ 1, y de n = 8, N $\leq$ 9, se sigue que T $\leq$ 1, $\therefore$ T = 1. N es $\therefore$ igual a 9 y X = 1. Como X = 1 y 2 por Φ > 200000 (línea 9), se sigue que v = 1 y también que Y = 2, Z = 5, x = 4, y = 7, y z = ε. Con los resultados obtenidos hasta este punto el problema tiene la siguiente apariencia:

```
                κλ781
12547ε  ⌈ AB7CDELQWε
          abΔcde
          ------
          1GHIK7L  ----------- tercera linea
          1ghikΞℓ  ----------- cuarta  linea
          -------
             979ØPQ ----------- quinta  linea
             878opq -----------    7Φ
             ------
             101UΣVW ---------- septima linea
             10037vw
             -------
                12547ε --------- novena  linea
                12547ε
                ------
                000000
```

VI. En este caso ε es uno de los números 0, 1, 2, 3, 4. Estos cinco casos, corresponden a la series:

$$vw = 60,\ 68,\ 76,\ 84,\ 92$$

$$opq = 290,\ 297,\ 304,\ 311,\ 318$$

Y dependiendo de si λ=8 ó 9, tendremos que:

$$\Xi\ell = 60,\ 68,\ 76,\ 84,\ 92$$

o

$$\Xi\ell = 30,\ 39,\ 48,\ 57,\ 66$$

Esto nos genera 10 diferentes posibilidades. Si probamos cada una de estas opciónes mediante tres sumas sucesivas hacia *arriba* empezando con las lineas 8 y 9 que nos dan la 7, luego con la 7 y la 6 que nos dan la 5, y finalmente la 5 y la 4 que nos dan la 3, obtenemos que solamente cuando $\varepsilon = 3$ y $\lambda = 8$ se cumple el requisito del 7 para el segundo dígito de izquierda a derecha del número de la tercera línea. En este caso vw = 84, UΣVW = 6331, opq = 311, OPQ = 944, ghik$\Xi\ell$ = 003784, y GHIK7L = 101778. Esto le dá al problema la siguiente apariencia:

```
                 κ8781
125473 ⌈ AB7CDE8413
         abΔcde
         1101778  ----------- tercera linea
         1003784  ----------- cuarta  linea
           979944 ----------- quinta  linea
           878311 -----------     7Φ
           1016331 ---------- septima linea
           1003784
             125473 --------- novena  linea
             125473
             000000
```

VII. Finalmente, como de todos los múltiplos de Φ sólo 5.Φ=627365 sumado al residuo de la tercera línea (110177) nos da un número que contenga un 7 en la tercera posición, obtenemos que $\kappa = 5$ y al mismo tiempo abΔcde = 627365 y AB7CDE = 737542, con lo cual completamos por fin todas los dígitos perdidos del problema.

(100 Great problems of elementary mathematics, pag. 11)

93. 210 = 2.3.5.7 $\therefore$ el número pedido es de la forma:

$$m = 2^{\alpha(1)}3^{\alpha(2)}5^{\alpha(3)}7^{\alpha(4)}P_1^{\beta(1)}P_2^{\beta(2)}\dots P_n^{\beta(n)} \quad \text{con} \quad \alpha(1) \geq 1$$

parta toda i y $\beta(i) \geq 0$.

$d(m) = (\alpha(1)+1)(\alpha(2)+1)(\alpha(3)+1)(\alpha(4)+1)(\beta(1)+1)\ldots\ldots(\beta(n)+1)$ $= 1988$ y como $1988 = 2.2.3.199$ entonces $\beta(i) = 0$ parta toda i Las α's son salvo el orden 1, 1, 2, 198. Las diferentes combinaciones de estos números como exponentes con las bases 2, 3, 5 y 7 nos dan 12 soluciones que son:

$s(1) = 2.3.5^2.7^{198}$	$s(7) = 2^2.3.5.7^{198}$
$s(2) = 2.3^2.5.7^{198}$	$s(8) = 2^2.3.5^{198}.7.$
$s(3) = 2.3^{198}.5.7^2$	$s(9) = 2^2.3^{198}.5.7$
$s(4) = 2.3.5^{198}.7^2$	$s(10) = 2^{198}.3.5.7^2$
$s(5) = 2.3^2.5^{198}.7$	$s(11) = 2^{198}.3.5^2.7$
$s(6) = 2.3^{198}.5^2.7$	$s(12) = 2^{198}.3^2.5.7$

94. $f(2, 11) = f(1, f(1, 11)) = f(1, 4) = 16$

$f(3, 11) = f(1, f(2, 11)) = f(1, 16) = 49$

$f(4, 11) = f(1, f(3, 11)) = f(1, 49) = 169$

$f(5, 11) = f(1, f(4, 11)) = f(1, 169) = 256$

$f(6, 11) = f(1, f(5, 11)) = f(1, 256) = 169$

De aquí se prueba fácilmente por inducción que $f(2k, 11)=169$ y por lo tanto $f(1988, 11) = 169$. †

95. Decimos que para $n \geq 3$, no existen dos números mayores que uno, primos relativos y tal que dividan a $f(n)$.

Supongamos lo contrario, es decir que $f(n) = pq$ (con p y q mayores que uno y $(p, q) = 1$), por definición de f, tanto p como q son factores de n y como son primos relativos, pq también sera factor de n, contradicción. Por lo tanto $f(n)$ es un número de la forma p^k con p primo.

Por lo tanto $f(n) = 2$, 2^k $(k > 1)$, p^k (p impar y $k > 0$).

En el primer caso la longitud es uno, en el segundo 3 y en el tercero 2.

$$L_n = \begin{cases} 1 & \text{Si } n \text{ es impar} \\ 3 & \text{Si existe un número } k\geq 2 \text{ tal que } p^j | n \text{ si } p^j < 2^k \text{ y} \\ & 2^k | n \text{ (donde } p \text{ es primo impar)} \\ 2 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

(Mathematical Olympiad in China, pag. 280)

96. $(a^2+b^2-nab,\ a+b) = (a^2+b^2-nab-a^2-2ab-b^2,\ a+b)$
$= (nab+2ab,\ a+b)$
$= (ab(n+2),\ a+b) = k$

Sea $q = (a, k)$ entonces $q|a$ y $q|k \Rightarrow q|(a+b)$
$\Rightarrow q|b$
$\Rightarrow q = 1$

ya que $(a, b) = 1$.
Analogamente $(b, k) = 1 \therefore (k, ab) = 1$
Por lo tanto de que $k|ab(n+2)$ se sigue que $k|(n+2)$. ■

97. Como $(n+m)^7-n^7-m^7 = 7nm(n+m)(n^2+nm+m^2)^2$, queremos que $7^3|(n^2+nm+m^2)$ ó $7^3|(n^3-m^3)$ y en este caso que $7\nmid(n-m)$
-Parece más sencilla la segunda opción, ya que equivale en principio a encontrar valores n y m tal que $n^3 \equiv m^3 \pmod{7^3}$ si hacemos $m = 1$ entonces habría que encontrar n tal que $n^3 \equiv 1 \pmod{7^3}$ -
Se tiene que $7^3|(2^{\phi(7^3)}-1$ por el teorema de Euler. Ahora supongamos que $n = 2^{98}$. Entonces $n^3 = 2^{294} = 2^{\phi(7^3)}$, y $\therefore$ $7^3|(n^3-1)$. Como $2^{96} \equiv 1(\text{mod}7)$, también tenemos que $2^{98} \equiv 4(\text{mod}7)$. Por lo tanto 7 no divide a $n-1$ y hemos terminado.
-Estrictamente hablando todavia hay que hacer ver que 7 no divide a $(n+m)nm$, se deja al lector-
(Mathematical Magazine, pag. 344, 1985)
Nota: lo que aparece entre - -, es agregado personal.

98. i) Supongamos que $p^2|f(n) \Rightarrow p|(n+b)^2$ (ya que $p|c$)
$\Rightarrow p|(n+b)$
$\Rightarrow p^2|(n+b)^2$
$\Rightarrow p^2\nmid f(n)$ (ya que $p^2\nmid c$)

esto es una contradicción por lo tanto p^2 no divide a $f(n)$.

ii) Sea $y = x+b \therefore f(x) = f(y-b)$
$= y^2+c=g(y)$
$\therefore q|f(n) \Leftrightarrow q|g(n+b)$

Hagamos $n_0 = n+b$ por lo tanto $g(n+b) = g(n_0)$, sea n_1 el residuo de n_0/q de aquí que $0 < n_1 < q$, n_1 no es cero ya que si lo fuera, entonces $q|n_0$ y como $q|g(n_0)$ entonces $q|c$ lo cual por hipótesis no es cierto, por lo tanto $n_1 \neq 0$.

Se tiene que $q|g(n_0) \Rightarrow g(n_0) \equiv 0 \pmod q$

$$\text{y } n_0 \equiv n_1 \pmod q$$
$$\therefore g(n_1) \equiv 0 \pmod q$$
$$\therefore q|g(n_1)$$

Consideremos la sucesión:

$$n_1,\ n_1+q,\ n_1+2q,\ \ldots,\ n_1+(q^{r-1}-1)q$$

etiquetamos a cada elemento de esta sucesión como

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_{q^r}$$

tenemos que $g(x_i) \equiv 0 \pmod q$ para toda i, Además módulo q^r ($r > 1$) todas las $g(x_i)$ son diferentes. En efecto, supongamos $g(x_i) \equiv g(x_j) \pmod{q^r}$ con $i \neq j$

$\Rightarrow x_i^2+c \equiv x_j^2+c \pmod{q^r}$

$\Rightarrow x_i^2 \equiv x_j^2 \pmod{q^r}$

$\Rightarrow (x_i-x_j)(x_i+x_j) \equiv 0 \pmod{q^r}$ ...(*)

Como $i \neq j$ entonces $x_i-x_j \not\equiv 0 \pmod{q^r}$ y porque $r \geq 2$. Por lo tanto de (*) y de esto se tienen dos opciones:

$$1)\ q|(x_i-x_j) \quad \text{y} \quad q|(x_i+x_j)$$
$$2)\ q^r|(x_i+x_j)$$

1) $\Rightarrow q|(2x_i) \Rightarrow q|x_i$ $(q > 2)$ $\Rightarrow q|c$, lo cual no es cierto.

2) $\Rightarrow q|(2n_1+q(k_1+k_2))$ donde las k's son enteros.

$\Rightarrow q|2n_1 \Rightarrow q|n_1 \Rightarrow q|c$, lo cual no es cierto.

Por lo tanto todas las $g(x_i)$ son diferentes para $i = 1, 2, .., q^r$ módulo q^r. Pero entonces tenemos q^r residuos diferentes módulo q^r por lo tanto se cubren todos los posibles y de aquí que exista una t tal que $q^r|g(x_t) \Rightarrow q^r|f(x_t-b)$ ∎

99. Se afirma que $f(n) = f(n_{(2)}) = n_{(3)}$ donde el numerito entre paréntesis indica la base en que esta escrito el número y además en este caso los dígitos que se ocuparon en base dos son exactamente los mismos que en base 3 para denotar a n.

Probaremos por inducción sobre la longitud de n en su escritura en base 2.

Si long(n) = 1 entonces n = 1 es obvio el resultado.

Supongamos que si long(n) = k entonces $f(k) = f(k_{(2)}) = k_{(3)}$

Si long(n) = k+1 entonces $n = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1})_{(2)}$ dividiremos la demostración en dos casos i) $a_{k+1} = 0$ y ii) $a_{k+1} = 1$.

i) $a_{k+1} = 0 \Rightarrow$ n es par

$$\begin{aligned}
\therefore\ f(n) &= 3f(n/2)\\
&= (10)_{(3)} f((a_1 a_2 a_3 \ldots a_k)_{(2)})\\
&= 10)_{(3)} (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k)_{(3)} \quad \text{(hip. de ind.)}\\
&= (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k 0)_{(3)}\\
&= (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1})_{(3)}
\end{aligned}$$

ii) $a_{k+1} = 1 \Rightarrow$ n es impar

$$\begin{aligned}
\therefore\ f(n) &= f(n-1)+1\\
&= f((a_1 a_2 a_3 \ldots a_k 0)_{(2)})+1\\
&= (10)_{(3)} f((a_1 a_2 a_3 \ldots a_k)_{(2)})+1\\
&= (10)_{(3)} (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k)_{(3)}+1\\
&= (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k 0)_{(3)}+1\\
&= (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k 1)_{(3)}\\
&= (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1})_{(3)}
\end{aligned}$$

Si n contiene un símbolo 2 en su representación en base 3 entonces no existe un m tal que f(m) = n. Ya que n en su representación binaria sólo contiene unos y ceros y como ya se demostró f(n) tiene los mismos dígitos en base tres que los que tiene n en base dos.

Respuesta: son los números de la forma:

$$\sum_{i=0}^{m} s(i)3^i \text{ con } m \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ s(i) \in \{0, 1\} \text{ y } s(m) \neq 0.$$

100. Es claro que el número no puede ser de puros unos, el siguiente caso más simple es que sea una combinación de 1's y 2's.

Sea n el número de 1's y m el 2's.

n+m = 2037 por lo tanto n = 2037-m y para que la suma sea igual al producto debe cumplirse que:

$$
\begin{aligned}
n+m &= (2037-m)+2m \\
&= 2037+m = 2^m \\
\therefore\ 2037 &= 2^m-m
\end{aligned}
$$

y en efecto como $2^{11} = 2048$, $2037 = 2^{11}-11$.
Por lo tanto un número que cumple las condiciónes pedidas es el que tiene 2026 1's y 11 2's en cualquier orden. En cualquiera de estos números la suma y el producto valdrá 2048.

NOTAS A LOS PROBLEMAS

1.- Este problema es un caso particular del famoso Teorema de Fermat (abierto, hasta donde estoy enterado) que dice:

No existen números a,b y c tales que $a^n+b^n=c^n$ para n mayor que 2.

El caso n=2 es el de las llamadas ternas pitagóricas, de las cuales la mas conocida es la 3, 4, 5.

2.- Problema:

Sea f(n) = m, donde m es el menor número natural por el que hay que multiplicar n, para obtener un cuadrado perfecto.

Sea A igual al conjunto de números m para los cuales existe una n tal que f(n) = m

Demuestra que:

a) Todo elemento de A es primo ó es un producto de primos distintos.

b) Si m esta en A entonces el número de divisores de m es una potencia de 2.

3.- Problema:

Demuestra que para toda n, existen n números naturales tal que la suma de los recíprocos es un número natural.

4.- Problema alternativo:

a) Prueba que como quiera que se elija k>1, en lugar de 1990, el problema tendrá al menos una solución.

b) Prueba que no se puede elegir k de tal manera que tenga exactamente dos soluciones.

8.- Observación:

Un criterio de divisibilidad válido en alguna base (por ejemplo la base diez), no forzosamente es válido en otras bases. Por ejemplo en base diez, el conocido criterio de que un número es divisible por tres si y sólo si la suma de sus digitos tambien lo es, no es válido en base nueve ya que el 10 (que es el nueve de la base diez), es divisible por tres, pero 1, que es la suma de sus digitos, evidentemente no lo es.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

66.- Problema:

Determina si hay ó no un máximo de dígitos iguales (distintos de cero) que sean parte "final" de un cuadrado perfecto.

74.- Problema:

Demuestra que $f(n) = 10^r-(n+1)$, donde r es el número de dígitos de n.

76.- Problema:

Prueba si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Para todo número racional r, existe un subconjunto finito enteros, tal que la suma de los recíprocos de los elementos del conjunto es igual a r.

b) Para todo número real x, existe un subconjunto de enteros, tal que la suma de los recíprocos de los elementos del conjunto, converge a x.[1]

78.- Problema:

Encuentra un número n tal que $P(P(P(P(P(n)))))$ no sea un número de un sólo dígito.

89.- Problema:

Demuestra que la conclución del problema se sigue aún si el número que genera la sucesión no es el 1990 si no cualquier otro.

94.- Problema:

Prueba que $f(2n, 1988)$ es constante para toda n.

Prueba que $f(2n+1, 1988)$ es constante para toda n.

[1] Este problema por mi parte queda abierto, si algun lector logra demostrar que es cierto (falso) este resultado, ¡Por favor hagamelo saber! (dirigirse al CMO, CCH Oriente).

BIBLIOGRAFIA

1.- THE SURPRISE ATTACK IN MATHEMATICAL PROBLEMS
L. A. GRAHAM
DOVER PUBLICATIONS
ESTADOS UNIDOS, 1968

2.- TEMAS SELECTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES
DOROFEIEV, ET AL.
EDITORIAL MIR
U.R.S.S.

3.- PROBLEMAS PARA LA ___ OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS
FOLLETOS 1, 2, 3 Y 4.
ALFARO, ET AL.
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA.
MEXICO, 1987, 1988, 1989 Y 1990.

4.- ALGEBRA SUPERIOR
HALL-KNIGHT
EDITORIAL UTHEA
MEXICO, 1980

5.- HUNGARIAN PROBLEM BOOK, VOL. I Y II.
TRAD. ELVIRA RAPAPORT
THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
ESTADOS UNIDOS, 1963.

6.- 40 PROBLEMAS PARA OLIMPIADAS DE MATEMATICAS
GUEVARA BRAVO, JULIO CESAR
TESIS (UNAM)
MEXICO, 1989.

8.- LOS JUEGOS MATEMATICOS DE EUREKA
BERRONDO, M.
EDITORIAL REVERTE,
ESPAÑA, 1987.

9.- ARITMETICA ELEMENTAL
GENTILE, ENZO R.
SECRETARIA GENERAL DE LA OEA.
ESTADOS UNIDOS, 1985.

10.- MATEMATICAS INICIALES
CRUZ-LUPERCIO
EDITORIAL EASO.
MEXICO

11.- 100 GREAT PROBLEMS OF ELEMENTARY MATHEMATICS
DÖRRIE, HEINRICH (TRAD. POR DAVID ANTIN)
DOVER PUBLICATION
ESTADOS UNIDOS, 1965.

ANEXO 1

TEORIA DE NUMEROS
(TEORIA BASICA)

1 DIVISIBILIDAD.

Definiciones.

Definición: Se dice que un entero a divide a otro b, si existe un número c tal que $b = ca$.
Notación: $a|b$ (a divide a b)

Definición: El máximo común divisor de dos enteros es el entero mas grande que divide a ambos.
Notación: (a,b) (máximo común divisor de a y b)
Def: $(0, 0) = 0$.

Definición: Dos números son primos relativos si su máximo común divisor es el número uno.

Definición: El mínimo común múltiplo de dos números a y b es el número positivo mas chico al que dividen a y b
Notación: $[a,b]$ (mínimo común múltiplo de a y b)

Num. Primo: Número natural que tiene exactamente dos divisores positivos.

Teoremas:

TEOREMA 1.1 $a|b$ y $b|c \Rightarrow a|c$

TEOREMA 1.2 $a|b$ y $b|a \Rightarrow a = b$ o $a = -b$

TEOREMA 1.3 $a|b$ y $a|c \Rightarrow a|(b+c)$

TEOREMA 1.4 $(a,b) = (a+kb, b)$ para toda k entera.

TEOREMA 1.5 p primo y $p|ab \Rightarrow p|a$ o $p|b$

TEOREMA 1.6 $a|bc$ y $(a,b)=1 \Rightarrow a|c$

TEOREMA 1.7 $(a,b)[a,b] = ab$

TEOREMA 1.8 (Teorema fundamental de la aritmética).-
Para todo número entero n distinto de 0, 1 y -1, existe una sucesión finita de primos P_1, P_2, P_3, ..., P_k tal que $P_1 \le P_2 \le P_3 \le \ldots \le P_k$ para los

Dem. Teo. 1.9

Lema: Si $(a, b) = 1$ y $x = ab$, entonces $d(x) = d(ab) = d(a)d(b)$.

Dem: Sea r un divisor de a, para cada divisor c de b hay un divisor de rb, a saber rc, por lo tanto tendremos para esta r d(b) divores de x y esto para cada divisor r de a. Como tenemos d(a) divisores de a, en total tendremos d(a)d(b) divisores de x (*). Es decir $d(ab) = d(a)d(b)$.

(*) Si r y k son ambos son divisores de a, t y m son divisores de b y $rt = km$ entonces $r|km \Rightarrow r|k$ (ya que $(a,b)=1$ y por lo tanto tambien (r,m)). Analogamente se deduce que $k|r$ y de aquí que $k = r$. Esto garantiza que todos los divisores que se contaron en el parágrafo anterior son diferentes.

Dem del Teo.: Por inducción sobre n.

Si $n = 1$, entonces m es una potencia de primo, es decir $m = P^{\alpha}$, cuyos divisores son $1, P, P^2, \ldots\ldots, P^{\alpha}$, que son exactamente $\alpha+1$.

Supongamos cierto para $n=k$ y demostraremos para $n=k+1$.

$d(m) = d(\prod_{i=1}^{k+1} P_i^{\alpha(i)}) = d(P_{k+1}^{\alpha(k+1)} \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha(i)})$, Aplicando la hipótesis de inducción y el lema, obtenemos lo que queriamos demostrar.

Dem del Teo. 1.10: Por inducción sobre n.

Si $n = 1$, entonces m es una potencia de primo, es decir $m = P^{\alpha}$, cuyos divisores son $1, P, P^2, \ldots\ldots, P^{\alpha}$, que es una progresión geométrica de razón P, y por lo tanto su suma es $(P^{\alpha+1}-1)/(P-1)$.

Supongamos cierto para $n = k$ y demostremos para $n = k+1$.

$m = \prod_{i=1}^{k+1} P_i^{\alpha(i)} = P_{k+1}^{\alpha(k+1)} \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha(i)}$, Sea $V = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha(i)}$.

Sea r un divisor de m, entonces r es de la forma $P_{k+1}^{t}v$ con $t = 0, 1, 2, \ldots, \alpha(k+1)$ y v un divisor de V.

Si $t=0$ tenemos un divisor de V.

Si $t=1$ tenemos un divisor de la forma vP_{k+1} y v divisor de V

Si $t=2$ " vP_{k+1}^2 "

.

.

.

Si $t=\alpha(k+1)$ " $\vee P_{k+1}^{\alpha(k+1)}$ "

Por lo tanto la suma de los divisores de m es:

$\sigma(V) + P_{k+1}\sigma(V) + P_{k+1}^{2}\sigma(V) + \ldots\ldots + P_{k+1}^{\alpha(k+1)}\sigma(V)$,

Factorizando $\sigma(V)$, sumando la progresión geométrica y aplicando la hipótesis de inducción, llegamos al resultado pedido.

PIERRE FERMAT SECUNDARIA

PROBLEMA 1.

¿Cuál de entre las dos cantidades siguientes

$$x = 1990\,(1+2+\ldots+1990 + 1991),$$
$$y = 1991\,(1+2+\ldots+1989 + 1990)$$

es más grande? ______________________________

PROBLEMA 2.

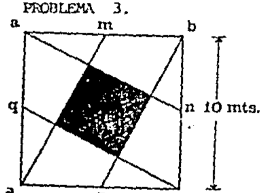
Sean a, b, c tres enteros positivos de modo que:

$$ab<c$$

Demuestre que entonces:

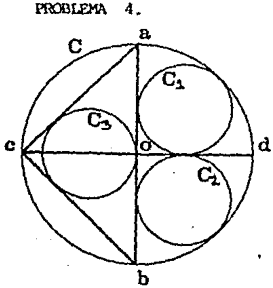
$$a+b\leq c$$

PROBLEMA 3.



Si m, n, p, q son los puntos medios de los lados del cuadrado □ abcd ¿Cuál es el área de la parte sombreada?

PROBLEMA 4.



Si ab y cd son diámetros perpendiculares del círculo C, con punto de intersección 0, C_1 es un círculo tangente a 0a y od y al círculo C, C_2 es un círculo tangente a od, ob y al círculo C y C_3 es tangente a ca, cb y ab. Demuestra que C_1, C_2 y C_3 tienen la misma área.

Primer examen Pierre Fermat.

Problema 1.

Suponga que el $\triangle ABC$ es equilátero y sea P un punto interior de este triángulo. Sea $\overline{PD}$ el segmento perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por P, y donde D cae en $\overline{AB}$; $\overline{PE}$ perpendicular a $\overline{BC}$ con E en $\overline{BC}$ y $\overline{PF}$ perpendicular a $\overline{CA}$ con F en $\overline{CA}$. Demuestre que entonces

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Problema 2.

¿Cuántos triángulos no congruentes existen de modo que las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es 90? Justifique.

Problema 3.

¿Cuántas maneras existen de factorizar el número $m = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 18$ en dos factores $m = a \cdot b$ donde a y b son primos relativos? Justifique su respuesta.

Nota: Dos factorizaciones se consideran la misma si y sólo si difieren por el orden de los factores.

Problema 4.

Considere el $\triangle ABC$ y sean

$$x = AB, \qquad y = BC, \qquad z = CA$$

Demuestre que si

$$(2x^3 - x^2y - x^2z) + (2y^3 - y^2x - y^2z) + (2z^3 - z^2x - z^2y) = 0$$

entonces $\angle ABC$ mide 60^0.

Fase Eliminatoria
Pierre Fermat

ANEXO 2

PIERRE FERMAT

PROBLEMA 1.

Hallar todos los enteros x, y tales que:

$$x^2 + x - y^2 + y = 1042$$

PROBLEMA 2.

Considere el rectángulo □POQC. Sea A un punto sobre PO, y B un punto sobre CQ. Sea K el punto de intersección de la perpendicular a CQ que pasa por B con PC y sea M el punto de intersección de la perpendicular a PO que pasa por A con CQ. Sea L la intersección de KB y AM. Encuentre el siguiente número.

$$\frac{\text{Area } (\square PKBO) + \text{Area } (\square LBCM)}{\text{Area } (\triangle ABC)}$$

□ Significa rectángulo
△ Significa triángulo

PROBLEMA 3.

Sea un semicírculo de radio 1. Considere 4 cuerdas AB, BC, CD y DE de longitudes a, b, c y d respectivamente de modo que los arcos de círculo correspondientes no tengan otros puntos en común que sus extremos. Demuestre que:

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2 + abc + bcd < 4.$$

PROBLEMA 4.

Sea △ABC equilátero y P un punto interior de modo que

$$PA = 3, \; PB = 4, \; PC = 5.$$

Encuentre el área del triángulo.

Final.

BIENVENIDOS A LAS OLIMPIADAS DE MATEMATICAS

EXAMEN REGIONAL DEL D.F.

PRIMER DIA

INSTRUCCIONES

1. *Anota en tu hoja de exámen un número telefónico al que podamos avisarte en caso de que resultes ganador.*
2. *Pon tu nombre en cada hoja y el número de problema.*
3. *Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas separadas.*
4. *Las preguntas solo pueden referirse a los enunciados de los problemas y deberán entregarse por escrito al cuidador.*

PROBLEMAS

1. Prueba que el máximo común divisor de $2^n-(-1)^n$ y $2^{n+1}-(-1)^{n+1}$ es igual a 3 para todo n entero mayor o igual que 2.

2. Sea ABCD un cuadrilátero convexo y sean n y a dos números reales positivos tales que $n > 2a$. Los lados AD y BC miden $n-a$, el lado AB mide n y las diagonales AC y BD miden $n+a$. Prueba que el lado DC mide 4a.

3. Prueba que si $A \subset N$ y A tiene tres elementos entonces existen i,j en A tales que 10 divide a $ij(i+j)(i-j)$.

Tiempo cuatro horas y media.

ANEXO 2

BIENVENIDOS A LAS OLIMPIADAS DE MATEMATICAS

EXAMEN REGIONAL DEL D.F.

SEGUNDO DIA

INSTRUCCIONES

1. *Anota en tu hoja un número telefónico al que podamos avisarte en caso de que resultes ganador.*
2. *Pon tu nombre en cada hoja y el número de problema*
3. *Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas separadas.*
4. *Las preguntas sólo pueden referirse a los enunciados de los problemas y deberán entregarse por escrito al cuidador.*

PROBLEMAS

4.Sea ABC un triángulo.Denotemos por I al incentro,es decir, a la intersección de las bisectrices.Sean L,M, y N las intersecciones de las líneas AI,BI y CI con BC,AC y AB respectivamente.Supongamos que los cuadriláteros AMIN,BNIL y CMIL tienen áreas iguales.Prueba que el triángulo ABC es equilátero.

5.Encontrar todos los números naturales a , b , c , d tales que el producto de cualesquiera dos de ellos sumado con el producto de los otros dos restantes es igual a 1990.

6.Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 círculos ajenos dos a dos y tales que sus centros formen un cuadrilátero convexo.Prueba que existe una linea recta r con la siguiente propiedad:

Uno de los semiplanos determinados por r contiene al menos dos de los cuatro círculos y el otro semiplano contiene al menos a uno de los círculos.

Tiempo:cuatro horas y media.

ANEXO 2

BIENVENIDOS A LA IV OLIMPIADA DE MATEMATICAS
CONCURSO NACIONAL. GUANAJUATO, GTO.
SEGUNDO DIA

INSTRUCCIONES:

1. *Pon tu número en cada hoja y el número del problema.*
2. *Escribe las soluciones de problemas distintos en hojas separadas.*
3. *Las preguntas que hagas sólo pueden referirse a los enunciados de los problemas y debes entregarlas por escrito al cuidador.*

PROBLEMAS

IV. Considera las 27 fichas de dominó que quedan quitando la blanca, blanca. Tomando en cuenta los puntos que hay en una ficha, a cada ficha le corresponde un número racional menor o igual que uno. ¿Cuál es la suma de todos estos números?

V. Si $P_1, P_2, \ldots, P_{19}$ son 19 puntos del plano con coordenadas enteras, tales que cada tres de ellos no son colineales, demuestra que hay tres de ellos con la propiedad de que su baricentro (punto de intersección de las medianas de un triángulo), también tiene coordenadas enteras.

VI. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Sea ℓ cualquier recta que pase por B y que corte al lado AC en un punto E. Sean F el punto medio de EC, G el punto medio de CB y H el pie de la altura de C a AB en el triángulo ABC.
Si I denota al circuncentro del triángulo AEH (punto de intersección de las mediatrices de los lados), prueba que los triángulos IGF y ABC son semejantes.

ANEXO 2

第31届国际数学奥林匹克
中国北京
31st INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
BEIJING CHINA

MEX

Spanish version
Versión en español

PRIMER DIA
BEIJING, 12 DE JULIO DE 1990

1. Se consideran en una circunferencia dos cuerdas AB y CD que se cortan en el punto E interior a la circunferencia. Sea M un punto del segmento EB situado estrictamente entre B y E. La tangente a la circunferencia que pasa por D, E y M en el punto E corta a las rectas BC, AC en los puntos F, G respectivamente. Si $\frac{AM}{AB} = t$, determínese $\frac{EG}{EF}$ en función de t.

2. Se da un conjunto E de $2n-1$ ($n \geq 3$) puntos distintos sobre una circunferencia. Se supone que exactamente k de los puntos dados se colorean de negro. Tal coloración de k puntos es "buena" si existe al menos un par de puntos negros tal que el interior de uno de los arcos formados por esos dos puntos contiene exactamente n puntos de E.
Hállese el mínimo valor de k para el que toda coloración de exactamente k puntos de E es "buena".

3. Hállense todos los números enteros $n > 1$ tales que $\frac{2^n + 1}{n^2}$ es un entero.

Tiempo: 4.5 horas
Cada problema vale 7 puntos

AUEXO2

第 31 届国际数学奥林匹克
中国北京
31st INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
BEIJING CHINA

MEX

Spanish version
Versión en español

SEGUNDO DIA
BEIJING, 13 DE JULIO DE 1990

4. Sea Q^+ el conjunto de los números racionales estrictamente positivos. Constrúyase una función $f: Q^+ \longrightarrow Q^+$ tal que

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y} \quad \text{para todos } x,y \in Q^+.$$

5. Dos personas A y B participan en un juego eligiendo alternativamente los números $n_1, n_2, \ldots$ de acuerdo con las siguientes reglas:
Al principio se da un número natural $n_0 > 1$.
Una vez conocido n_{2k}, el jugador A puede escoger cualquier $n_{2k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$.
Después, el jugador B escoge un número $n_{2k+2} \in \mathbb{N}$ tal que

$\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ es una potencia de un número primo con exponente entero estrictamente positivo.

El jugador A gana el juego si logra elegir el número 1990, y el jugador B gana el juego si logra elegir el número 1.

(a) ¿Para qué valores iniciales n_0 el jugador A puede asegurar su victoria?
(b) ¿Para qué valores iniciales n_0 el jugador B puede asegurar su victoria?
(c) ¿Para qué valores iniciales n_0 puede cada jugador asegurar que el otro no ganará?

6. Demuéstrese que existe un polígono convexo de 1990 lados con las dos propiedades siguientes:
(i) Todos los ángulos son iguales.
(ii) Las longitudes de los 1990 lados son una permutación de los números $1^2, 2^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$.

Tiempo: 4.5 horas
Cada problema vale 7 puntos.

ANEXO 2

II OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICA

Jueves 29 de Enero de 1987 (Segunda Jornada).

1°. Se define la sucesión p_n de la siguiente manera:

$p_1 = 2$, y para todo n mayor o igual que 2, p_n es el mayor divisor primo de la expresión

$$p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} + 1 .$$

Pruebe que p_n es diferente de 5.

2°. Si r,s,t son las raíces de la ecuación

$$x(x-2)(3x-7) = 2 .$$

a) Demuestre que r,s,t son positivas.

b) Calcule $\operatorname{arctg} r + \operatorname{arctg} s + \operatorname{arctg} t$.

(<u>Nota</u>: Se denota con arctg x , el arco comprendido entre 0 y π cuya tangente es x.)

3°. Sea ABCD un cuadrilátero plano convexo, P y Q son puntos de AD y BC respectivamente tales que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{BQ}{QC} .$$

Demuestre que los ángulos que forma la recta PQ con las rectas AB y DC son iguales.

<u>Tiempo</u>: 4 horas y media.