00384
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias
División de Estudios de Posgrado

UNA TEORIA GENERAL DE TIPOS PARA MODULOS INYECTIVOS NO SINGULARES

T E S I S

Que para recibir el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS (Matemáticas)

p r e s e n t a

GUSTAVO TAPIA SANCHEZ

MEXICO, D.F. 1990

INDICE

INTRODUCCION

Los anillos regulares fueron definidos por J. von Neumann con el propósito de "coordinar" ciertas retículas, en el sentido de que una retícula L es "coordinada" por un anillo regular R si L es isomorfa a la retícula de todos los ideales principales derechos de R. Son muchas las clases en que se ha subdividido a los anillos regulares como son: anillos regulares abelianos, directamente finitos, contínuos, $\aleph_0$-contínuos, autoinyectivos y algunas otras. Una de estas clases que ha sido estudiada por diversos autores es la de los anillos regulares autoinyectivos. Diversos hechos nos muestran la importancia de tales anillos entre los que destacan los siguientes:

a) El anillo máximo de cocientes de un anillo no singular, es regular autoinyectivo.

b) El anillo de endomorfismos de un módulo inyectivo no singular, es regular autoinyectivo.

c) Cada categoría espectral es equivalente a una categoría de R-módulos inyectivos no singulares para algún anillo R, regular autoinyectivo.

En [10], Kaplansky desarrolla una teoría de tipos para anillos de Baer (en particular, para anillos regulares autoinyectivos) donde define tres tipos básicos: tipo I, II y III, haciendo porteriormente una subdivisión de los primeros dos tipos: tipo I_f, I_∞, II_f y II_∞. De esta forma, con anillos de cinco tipos básicos es posible estructurar cada anillo regular autoinyectivo. Esta teoría fué basada en un trabajo de Murray y von Neumann [12], los cuales hicieron dicha clasificación para ciertas álgebras (conocidas como W^*-álgebras); su clasificación dependía de los valores de ciertas funciones que ellos llamaron "funciones de dimensión".

El trabajo de Kaplansky ha sido tomado por varios autores para desarrollar teorías de tipos en otros contextos. En [18], Roos clasifica a las categorías espectrales en los tipos de Kaplansky y la teoría de tipos para anillos regulares autoinyectivos se puede deducir de aquí. En [9], Goodearl y Boyle desarrollan una teoría de tipos para R-módulos inyectivos no singulares. La idea básica radica en el hecho de que para cada R-módulo inyectivo no singular, su anillo de endomorfismos es regular autoinyectivo y como tal, puede clasificarse en los tipos de Kaplansky; investigan entonces las condiciones internas que debe satisfacer el módulo para que su anillo de endomorfismos sea de un tipo determinado.

En el presente trabajo, hacemos una generalización de la teoría de Goodearl y Boyle, por medio de cadenas de clases de anillos regulares autoinyectivos, que llamaremos *Teorías de Tipos*, las cuales satisfacen ciertas propiedades de cerradura; probamos que inducen una descomposción de cada R-módulo inyectivo no singular en n tipos (dependiendo del tamaño de la cadena) y en particular de cada anillo regular autoinyectivo. Como consecuencia se obtiene una descomposición para las categorías espectrales, como un producto directo de categorías espectrales sobre anillos de cada uno de los tipos. Esta *Teoría General de Tipos* es llevada a otro contexto: la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie. En [15] y [17], Raggi y Ríos prueban que cada retícula $gen(\tau_g(R))$ es isomorfa a la retícula de idempotentes centrales de un anillo regular autoinyectivo Q; claramente esto sugiere que podemos reflejar la teoría de tipos de Q sobre $gen(\tau_g(R))$ y recíprocamente.

El trabajo está dividido en cinco capítulos. El capítulo I está dedicado a exponer conceptos y resultados preliminares sobre R-módulos inyectivos no singulares y sobre las teorías de torsión. El capítulo II es de carácter introductorio a la teoría de tipos de Kaplansky, aunque seguimos la exposición de [9]. En el capítulo III, se expone la Teoría General de Tipos y entre los resultados que se prueban están teoremas de descomposición para R-módulos inyectivos no singulares, anillos regulares autoinyectivos y categorías espectrales, que generalizan a la descomposición de Kaplansky en los tipos I, II y III; al final del capítulo se obtiene también, una generalización del refinamiento en la descomposición de los anillos I y II. En el capítulo IV, se definen las teorías de torsión de cada uno de los tipos y se prueba que éstas descomponen a la retícula $gen\tau_g$. Se prueba que las teorías de torsión de cada tipo, definen subintervalos de $gen\tau_g$ y se obtienen nuevas condiciones, en términos de la retícula $gen(\tau_g(R))$, para determinar el tipo de un anillo regular autoinyectivo. En el capítulo V, se dan ejemplos de teorías de tipos para obtener teoremas de estructura de los anillos regulares autoinyectivos. Es importante señalar que con esta Teoría General de Tipos, por cada teoría de tipos que se tenga en mano, se pueden obtener nuevos teoremas de estructura para anillos regulares autoinyectivos.

Finalmente quiero expresar mi agradecimiento al Dr. José Ríos Montes y al Dr. Francisco Raggi Cárdenas por el apoyo que me han brindado, no solamente durante el desarrollo de este trabajo, sino desde años atrás. Asimismo, deseo hacer mención explícita del hecho que durante la elaboración de este trabajo, he sido becario en el Instituto de Matemáticas de la Univ. Nac. Aut. de México, con el apoyo económico otorgado mediante el programa P.S.P.A.

CAPITULO I

CONCEPTOS PRELIMINARES

En este capítulo, veremos los conceptos básicos que necesitaremos conocer y a los cuales haremos referencia en capítulos posteriores. La mayor parte de éstos, pueden encontrarse en [6], [9] y [19]. Durante todo el trabajo, R denotará un anillo asociativo con 1 y $Mod-R$ la categoría de los R-módulos derechos. Abusando de la notación, $M \in Mod-R$ significa que M es un objeto de dicha categoría y si $M, N \in Mod-R$ entonces $f: M \rightarrow N$ significa que $f \in Hom_R(M, N)$. Usaremos la notación $N \subset_e M$ para denotar un submódulo esencial de M y $E(N)$ para la cápsula inyectiva de N.

§1. *MODULOS INYECTIVOS NO SINGULARES.*

En esta sección haremos un breve estudio de la categoría de los R-módulos inyectivos no singulares. Se suponen conocidos resultados básicos sobre submódulos esenciales y R-módulos no singulares, los cuales pueden encontrarse en [7], cap. I.

Definición 1.1.- Sean $N \subset M \in Mod-R$. Diremos que N es un submódulo *cerrado* de M si no tiene extensiones esenciales propias en M, es decir,

$$N \subset_e K \subset M \Rightarrow N = K$$

Definición 1.2.- Sean $N \subset M \in Mod-R$. Diremos que N es un submódulo $\mathcal{G}$*-cerrado* en M si M/N es no singular.

En la notación de [6], N es $\mathcal{G}$-cerrado en M si y solo si N es τ_g-puro en M, donde τ_g denota la teoría de torsión de Goldie. Usaremos $L^*(M)$ para denotar el conjunto de todos los submódulos $\mathcal{G}$-cerrados de M; $L^*(M)$ no es vacío ya que contiene a M.

Observaciones:

i) En vista de que producto directo de módulos no singulares es no singular, se sigue que $L^*(M)$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias.

ii) Por (i), dado cualquier submódulo $N \subset M$ vemos que hay un menor submódulo $\mathcal{G}$-cerrado en M que contiene a N. Lo llamamos la *$\mathcal{G}$-cerradura* de N en M. En la notación de [6], la $\mathcal{G}$-cerradura de N en M es la τ_g-purificación de N en M.

Cuando M satisface ciertas condiciones, es fácil dar caracterizaciones de la $\mathcal{G}$-cerradura de un submódulo N en M.

Proposición 1.3.- Sea M_R no singular y $N \subset M$. Para $K \subset M$, las siguientes condiciones son equivalentes.

i) K es la $\mathcal{G}$-cerradura de N en M.

ii) $N \subset_e K$ y $K \in L^*(M)$.

Demostración.- Ver prop. 1.1 [9].

Proposición 1.4.- Sean M_R inyectivo no singular y $N \subset M$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) N es inyectivo.

ii) $N \in L^*(M)$.

iii) N es un submódulo cerrado de M.

iv) N es un sumando directo de M.

Demostración.- Ver prop 1.3 [9].

Así, para M_R inyectivo no singular los submódulos cerrados y los $\mathcal{G}$-cerrados coinciden, siendo además los sumandos directos. Esta proposición junto con la prop. 1.6 serán utilizadas durante todo el presente trabajo sin hacer mención específica de ello.

Notación:

Para un anillo R, $Mod - (R, \tau_g)$ denotará la subcategoría plena de $Mod - R$ cuyos objetos son los R-módulos derechos inyectivos no singulares. Como es costumbre, $M \in Mod - (R, \tau_g)$ significa que M es un objeto de dicha categoría.

Proposición 1.5.- Sean $M \in Mod-(R,\tau_g)$ y $N \subset M$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) K es la $\mathcal{G}$-cerradura de N en M.

ii) $K \subset M$ y $K = E(N)$.

Demostración.- Se sigue de 1.3 y 1.4.

Proposición 1.6.- Si $M, N \in Mod-(R,\tau_g)$ y $f: M \to N$ entonces $kerf \in L^*(M)$ y $f(M) \in L^*(N)$.

Demostración.- Ya que $M/kerf \simeq f(M)$ es no singular entonces $kerf \in L^*(M)$. Por otro lado, $M \simeq kerf \oplus f(M)$ y por lo tanto $f(M) \in Mod-(R,\tau_g)$, de donde es claro que $f(M) \in L^*(M)$.

Esta última proposición nos muestra que cualquier morfismo $f: M \to N$ en $Mod-(R,\tau_g)$ tiene núcleo e imagen en la categoría $Mod-(R,\tau_g)$ y de hecho, éstos coinciden con el núcleo e imagen de f en $Mod-R$. Por lo tanto, f es monomorfismo (epimorfismo) en $Mod-(R,\tau_g)$ si y solo si f es monomorfismo (epimorfismo) en $Mod-R$ y de aquí que no hay peligro de confusión al hablar de monomorfismos (epimorfismos) en $Mod-R$ para objetos de $Mod-(R,\tau_g)$.

Corolario 1.7.- Si $M, N \in Mod-(R,\tau_g)$ entonces $Hom_R(M,N) = 0$ si y solo si $Hom_R(N,M) = 0$.

Proposición 1.8.- Si $M \in Mod-(R,\tau_g)$ entonces $L^*(M)$ es una retícula modular, completa y complementada, con ínfimos dados por intersecciones, supremos finitos dados por sumas y supremos arbitrarios dados por la $\mathcal{G}$-cerradura de la suma.

Demostración.- Ver prop. 1.6 [9].

El siguiente teorema es un hecho bien conocido y omitimos su prueba. Teoremas más generales pueden encontrarse en [2] y [13].

Teorema 1.9.- Para cualquier $M \in Mod-(R,\tau_g)$, $End_R(M)$ es un anillo regular autoinyectivo derecho.

Proposición 1.10.- Si $M \in Mod-(R,\tau_g)$ y $N \subset M$ es submódulo totalmente invariante entonces existe $e \in End_R(M)$ idempotente central tal que $e(M)$ es la $\mathcal{G}$-cerradura de N en M.

Demostración.- Ver prop. 1.9 [9].

Corolario 1.11.- Si Q es anillo regular autoinyectivo derecho y $J \subset Q$ es ideal bilateral entonces la $\mathcal{G}$-cerradura de J_Q en Q_Q es un ideal bilateral generado por un idempotente central.

Corolario 1.12.- Si $M \in Mod-(R,\tau_g)$, $N \subset M$ y $T = End_R(M)$ entonces N es un submódulo cerrado en M y totalmente invariante si y solo si existe $e = e^2 \in T$ central tal que $N = e(M)$.

Proposición 1.13.- Si Q es anillo autoinyectivo derecho entonces cada $M \in Mod-Q$ no singular y finitamente generado es proyectivo e inyectivo.

Demostración.- Consideremos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Q^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $n > 0$. Como M es no singular entonces $K \in L^*(Q^n)$ y ya que Q^n es Q-módulo derecho inyectivo se sigue entonces que K es sumando directo de Q^n, obteniendo el resultado.

A continuación, hacemos un breve estudio de la categoría $Mod-(R,\tau_g)$. Para un estudio más detallado ver [4], [9] y [19].

Proposición 1.14.- La categoría $Mod-(R,\tau_g)$ es abeliana con productos y coproductos, donde si $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R,\tau_g)$ entonces el producto es el producto directo $\prod M_\alpha$ y el coproducto es $E(\bigoplus M_\alpha)$.

Demostración.- Ver prop. 1.11 y 1.12 de [9].

Definición 1.15.- Una categoría abeliana cocompleta $\mathcal{C}$ es una categoría espectral si tiene un generador, los límites directos son exactos y cada sucesión exacta corta se escinde.

Proposición 1.16.- $Mod-(R,\tau_g)$ es una categoría espectral.

Demostración.- Ver prop. 1.13 de [9].

Gabriel y Oberst prueban (ver [4]), que toda categoría espectral tiene la forma de $Mod-(R,\tau_g)$. Más precisamente, tenemos:

Teorema 1.17.- Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría espectral si y solo si existe un anillo regular autoinyectivo derecho Q tal que:

$$\mathcal{C} \sim Mod-(Q,\tau_g(Q))$$

En particular, dado cualquier anillo R existe un anillo regular autoinyectivo derecho Q tal que $Mod-(R,\tau_g(R)) \sim Mod-(Q,\tau_g(Q))$. De hecho, Goodearl y Boyle (ver [9]) prueban que existe un tal anillo Q tal que $Mod-(R,\tau_g(R)) = Mod-(Q,\tau_g(Q))$. En la terminología de [19] y de acuerdo a la prueba de Goodearl y Boyle, se ve que $Q = Q_{max}(R/t_{\tau_g}(R))$.

Teorema 1.18.- Sean Q_1 y Q_2 anillos regulares autoinyectivos derechos. Entonces $Mod-(Q_1,\tau_g(Q_1)) \sim Mod-(Q_2,\tau_g(Q_2))$ si y solo si existe $M \in Mod-(Q_2,\tau_g(Q_2))$ fiel, tal que $End_{Q_2}(M) \simeq Q_1$.

Demostración.- Ver prop. 1.18 [9].

§2. *TEORIAS DE TORSION*

En esta sección, veremos los conceptos y resultados básicos acerca de las teorías de torsión en $Mod-R$. El concepto de teoría de torsión aparece en diversas formas en la década de los 60's, con los trabajos de Dickson ([1]), Gabriel ([3]) y Maranda ([11]). En esta sección, no daremos las demostraciones de las proposiciones ni las referencias de éstas, ya que el lector interesado puede consultar cualquiera de los libros sobre el tema (ver [5], [6] ó [19]).

Una forma de introducir el concepto de torsión, es mediante un funtor $t: Mod - R \longrightarrow Mod - R$, el cual asocia a cada módulo M_R un submódulo de torsión $t(M)$.

Definición 1.19.- Un *prerradical* r de $Mod - R$ es un subfuntor del funtor identidad sobre $Mod - R$, es decir, para cada módulo M_R se tiene que $r(M) \subset M$ y si $f: M \longrightarrow N$ entonces f induce por restricción $r(f): r(M) \longrightarrow r(N)$.

La clase de todos los prerradicales de $Mod - R$ es una retícula completa, donde se definen:

i) $r_1 \leq r_2 \Leftrightarrow r_1(M) \subset r_2(M), \forall M \in Mod - R$.

ii) Si $\{r_\alpha\}$ es una familia de prerradicales entonces el supremo $\sum r_\alpha$ se define por la regla $(\sum r_\alpha)(M) = \sum r_\alpha(M)$ y el ínfimo $\bigcap r_\alpha$ como $(\bigcap r_\alpha)(M) = \bigcap r_\alpha(M)$.

Definición 1.20.- Un prerradical r se llama idempotente si $r = r^2$, es decir, si $r(r(M)) = r(M), \forall M \in Mod - R$ y se llama radical si $r(M/r(M)) = 0, \forall M \in Mod - R$.

Dado un prerradical r, podemos asociarle dos clases de R-módulos derechos, como sigue:

$$\mathcal{T}_r = \{M \in Mod - R \mid r(M) = M\}$$

$$\mathcal{F}_r = \{M \in Mod - R \mid r(M) = 0\}$$

Proposición 1.21.- $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo cocientes y sumas directas y $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo submódulos y productos directos. En particular, si $M \in \mathcal{T}_r$ y $N \in \mathcal{F}_r$ entonces $Hom_R(M, N) = 0$.

Una clase $\mathcal{C}$ de R-módulos derechos que es cerrada bajo cocientes y sumas directas se llama una *clase de pretorsión* y en caso de que sea cerrada bajo submódulos y productos directos, se le llama *clase libre de pretorsión*.

Dada $\mathcal{C}$ una clase de pretorsión, a cada $M \in Mod - R$ podemos asociarle un submódulo $t(M)$ como sigue:

$$t(M) = \sum\{N \subset M \mid N \in \mathcal{C}\}$$

Claramente $t(M) \in \mathcal{C}$ y $t(M)$ es el mayor submódulo de M perteneciente a $\mathcal{C}$. Así, $\mathcal{C}$ define un prerradical t de Mod-R y es obvio que t es idempotente. Tenemos entonces que:

Proposición 1.22.- Hay una correspondencia biyectiva entre los prerradicales idempotentes de $Mod - R$ y las clases de pretorsión sobre $Mod - R$.

Obviamente cuando el funtor r satisface más condiciones, ésto repercute directamente sobre $\mathcal{T}_r$ y viceversa.

Proposición 1.23.- Para un prerradical r las siguientes condiciones son equivalentes:

i) r es un funtor exacto izquierdo.

ii) Si $N \subset M \in Mod - R$ entonces $r(N) = r(M) \cap N$.

iii) r es idempotente y $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo submódulos.

Cuando una clase de pretorsión es cerrada bajo submódulos, se llama *clase de pretorsión hereditaria*. La prop. 1.22 y 1.23 nos dicen entonces que:

Corolario 1.24.- Hay una correspondencia biyectiva entre los prerradicales exactos izquierdos de $Mod - R$ y las clases de pretorsión hereditarias sobre $Mod - R$.

Definición 1.25.- Una *teoría de torsión* τ para $Mod - R$ es una pareja $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ de clases no vacías de R-módulos derechos tales que:

i) $M \in \mathcal{T}_\tau$ y $N \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow Hom_R(M, N) = 0$.

ii) $Hom_R(M, N) = 0, \forall N \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow M \in \mathcal{T}_\tau$.

iii) $Hom_R(M, N) = 0, \forall M \in \mathcal{T}_\tau \Rightarrow N \in \mathcal{F}_\tau$.

A la clase $\mathcal{T}_\tau$ se le llama clase de τ-torsión, consistente de R-módulos de τ-torsión, mientras que a $\mathcal{F}_\tau$ se le llama clase τ-libre de torsión, consistente de R-módulos τ-libres de torsión.

Proposición 1.26.- Para una clase no vacía $\mathcal{T} \subset Mod - R$, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\mathcal{T}$ es una clase de torsión para alguna teoría de torsión.

ii) $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.

Análogamente tenemos:

Proposición 1.27.- Para una clase no vacía $\mathcal{F} \subset Mod - R$, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión para alguna teoría de torsión.

ii) $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.

De este modo, dada una teoría de torsión τ, $\mathcal{T}_\tau$ es una clase de pretorsión y en particular, dado $M \in Mod - R$ existe un mayor submódulo $t_\tau(M) \subset M$ perteneciente a $\mathcal{T}_\tau$, el cual es llamado submódulo de τ-torsión de M. Un módulo N_R es τ-libre de torsión si y solo si $t_\tau(N) = 0$. Es fácil checar además, que el prerradical t_τ es un radical. Tenemos entonces que:

Proposición 1.28.- Hay una correspondencia biyectiva entre los radicales idempotentes de $Mod - R$ y las teorías de torsión sobre $Mod - R$.

Cuando $\mathcal{T}_\tau$ es hereditaria decimos que la teoría de torsión $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ es hereditaria. Por la prop. 1.23, sabemos que ésto sucede si y solo si el radical asociado t_τ es exacto izquierdo. Tenemos entonces que:

Proposición 1.29.- Hay una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión hereditarias en $Mod - R$ y los radicales exactos izquierdos de $Mod - R$.

Se ha definido una teoría de torsión hereditaria cuando la clase de torsión $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo submódulos, pero usando la prop 1.23 no es difícil ver que ésto es equivalente a que la clase libre de torsión sea cerrada bajo cápsulas inyectivas. De este modo, las proposiciones 1.26 y 1.27 siguen siendo válidas si cambiamos teoría de torsión por teoría de torsión hereditaria y a los incisos (ii) añadimos las peticiones de que $\mathcal{T}_\tau$ sea cerrada bajo submódulos y $\mathcal{F}_\tau$ bajo cápsulas inyectivas, respectivamente. Se sigue entonces que:

Proposición 1.30.- Si τ es una teoría de torsión hereditaria entonces:

i) $M \in \mathcal{T}_\tau \Leftrightarrow Hom_R(M, E(N)) = 0, \forall N \in \mathcal{F}_\tau$.

ii) $N \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow Hom_R(M, E(N)) = 0, \forall M \in \mathcal{T}_\tau$.

De aquí en adelante, todas las teorías de torsión que consideraremos serán teorías de torsión hereditarias. Si τ es una teoría de torsión y $M \in Mod - R$, una familia distinguida de submódulos de M es la que contiene a todos los submódulos $N \subset M$ tales que $M/N \in \mathcal{T}_\tau$. Si $M/N \in \mathcal{T}_\tau$ entonces se dice que N es τ-denso en M. En particular, considerando el R-módulo derecho R_R, un ideal derecho $I \subset R$ es τ-denso en R si $(R/I)_R \in \mathcal{T}_\tau$. Usaremos la notación:

$$\mathcal{L}_\tau = \{I_R \subset R \mid I \text{ es } \tau\text{-denso en R}\}$$

Las propiedades básicas de $\mathcal{L}_\tau$ se resumen en la siguiente:

Proposición 1.31.- Si τ es una teoría de torsión en $Mod - R$ entonces:

i) Si $I \in \mathcal{L}_\tau$ y $x \in R$ entonces $(I : x) = \{r \in R \mid xr \in I\} \in \mathcal{L}_\tau$.

ii) Si $I \subset R$ y $J \in \mathcal{L}_\tau$ son tales que $(I : x) \in \mathcal{L}_\tau$ para todo $x \in J$ entonces $I \in \mathcal{L}_\tau$.

iii) Si $I, J \in \mathcal{L}_\tau$ entonces $I \cap J \in \mathcal{L}_\tau$.

iv) Si $I, J \in \mathcal{L}_\tau$ entonces $IJ \in \mathcal{L}_\tau$.

v) Si $I \in \mathcal{L}_\tau$ e $I \subset J \subset R$ entonces $J \in \mathcal{L}_\tau$.

Cuando un conjunto no vacío $\mathcal{L}$ de ideales derechos de R satisface (i) y (ii) de la proposición anterior, se le llama filtro de Gabriel de R (algunos autores les llaman filtro idempotente).

Proposición 1.32.- Hay una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión sobre $Mod - R$ y los filtros de Gabriel de R.

Como corolario de esta proposición, tenemos que las teorías de torsión sobre $Mod-R$ forman en realidad un conjunto.

Otro conjunto de submódulos distinguidos de M es el que contiene a todos los submódulos $N \subset M$ tales que $M/N \in \mathcal{F}_\tau$. Cuando $M/N \in \mathcal{F}_\tau$, diremos que N es τ-puro en M. En vista de que $\mathcal{F}_\tau$ es cerrada bajo productos directos, es claro entonces que el conjunto de submódulos τ-puros de M, es cerrado bajo intersecciones arbitrarias. Así, dado $N \subset M$, existe un menor submódulo τ-puro en M que contiene a N, al cual se le conoce como la τ-purificación de N en M. Es fácil ver que si H es la τ-purificación de N en M entonces $H/N = t_\tau(M/N)$. En particular, $t_\tau(M)$ es la τ-purificacion de 0 en M.

Otro aspecto importante es la estructura de retícula completa del conjunto de teorías de torsión sobre $Mod - R$.

Definición 1.33.- Sean τ, σ teorías de torsión. Diremos que $\tau \leq \sigma$ si $t_\tau \leq t_\sigma$, es decir, si $t_\tau(M) \leq t_\sigma(M), \forall M \in Mod - R$.

Proposición 1.34.- Sean τ, σ teorías de torsión en $Mod - R$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\tau \leq \sigma$.
ii) $\mathcal{T}_\tau \subset \mathcal{T}_\sigma$.
iii) $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
iv) $\mathcal{L}_\tau \subset \mathcal{L}_\sigma$.

Además, si $\{\tau_\alpha\}$ es una familia de teorías de torsión se definen $\wedge\tau_\alpha$ y $\vee\tau_\alpha$ como sigue:

$$i)\mathcal{T}_{\wedge\tau_\alpha} = \bigcap \mathcal{T}_{\tau_\alpha}$$
$$ii)\mathcal{F}_{\vee\tau_\alpha} = \bigcap \mathcal{F}_{\tau_\alpha}$$

Teorema 1.35.- El conjunto de teorías de torsión es un *marco*, es decir, una retícula completa donde:

$$\tau \wedge (\vee\tau_\alpha) = \vee(\tau \wedge \tau_\alpha)$$

para cualesquier τ, τ_α teorías de torsión.

En particular, el conjunto de teorías de torsión forma una retícula distributiva.

Si $\mathcal{C} \subset Mod - R$, entonces hay una menor teoría de torsión, denotada por $\xi(\mathcal{C})$ tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}_{\xi(\mathcal{C})}$. Obviamente, $\xi(\mathcal{C}) = \wedge\{\tau \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{T}_\tau\}$. De la misma forma, hay una mayor teoría de torsión, denotada por $\chi(\mathcal{C})$, tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C})}$. En este caso, tenemos que $\chi(\mathcal{C}) = \vee\{\tau \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{F}_\tau\}$. A $\xi(\mathcal{C})$ se le llama la teoría de torsión generada por $\mathcal{C}$ y a

$\chi(\mathcal{C})$ la teoría de torsión cogenerada por $\mathcal{C}$. Claramente, otra forma de obtener $\xi(\mathcal{C})$ es la siguiente: definimos la clase libre de torsión,

$$\mathcal{F}_{\xi(\mathcal{C})} = \{N \in Mod-R \mid Hom_R(M, E(N)) = 0, \forall M \in \mathcal{C}\}$$

y la clase de torsión como corresponde. Algo similar podemos hacer para $\chi(\mathcal{C})$. Es claro que $\xi(0)$ es el elemento menor del conjunto de todas las teorías de torsión y se denota simplemente por ξ, mientras que $\chi(0)$ es el elemento mayor y se denota por χ.

Cuando la clase de torsión $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo productos directos, se dice que τ es una teoría de torsión TTF. En este caso, el filtro de Gabriel de R tiene una base que consiste de un ideal bilateral idempotente, a saber,

$$I = \bigcap\{J_R \subset R \mid J \text{ es } \tau\text{-denso}\}$$

Recíprocamente, si $I \subset R$ es un ideal bilateral idempotente entonces el conjunto

$$\mathcal{L} = \{J_R \subset R \mid I \subset J\}$$

es un filtro de Gabriel y la teoría de torsión asociada es TTF.

Claramente, el conjunto de teorías de torsión TTF es cerrado bajo ínfimos arbitrarios y en vista de que éste conjunto es no vacío (pues contiene a χ) entonces dada cualquier teoría de torsión τ, existe una teoría de torsión TTF mínima, denotada por $\overline{\tau}$, tal que $\tau \leq \overline{\tau}$; a $\overline{\tau}$ se le conoce como la cápsula TTF de τ.

Cuando la clase de torsión $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, se dice que τ es una teoría de torsión estable. En [5], se puede encontrar la siguiente caracterización de las teorías de torsión estables:

Proposición 1.36.- Sea τ una teoría de torsión en $Mod-R$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) τ es estable.

ii) $t_\tau(M)$ es un sumando directo de M, para cada M_R inyectivo.

Diversas caracterizaciones y un estudio más amplio de las teorías de torsión estables se puede encontrar en [6] y [19].

Una de las teorías de torsión más importantes es la teoría de torsión de Goldie. Es bien sabido, que si consideramos la familia de todos los R-módulos derechos no singulares, esta familia es cerrada bajo submódulos, productos directos, cápsulas inyectivas y extensiones y por lo tanto, es una clase libre de torsión para alguna teoría de torsión, que es conocida como la teoría de torsión de Goldie y se le denota por τ_g. Los siguientes hechos son básicos acerca de la teoría de torsión de Goldie:

i) $\tau_g = \xi(\{R/I \mid I_R \subset_e R\})$.

ii) $\chi(R) \leq \tau_g$. A la teoría de torsión $\chi(R)$ se le conoce como la teoría de torsión de Lambek.

iii) El radical exacto izquierdo asociado a τ_g es $\overline{Z}(\ )$, el cual queda definido por la regla: $\overline{Z}(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$. En particular, si M es singular entonces $M \in \mathcal{T}_{\tau_g}$.

iv) Si R es no singular derecho entonces $\tau_g = \chi(R), \overline{Z}(M) = Z(M)$, para todo $M \in Mod-R$ y $\mathcal{L}_{\tau_g} = \{I \subset R \mid I_R \subset_e R\}$.

Además de estos hechos básicos, podemos encontrar en la literatura, los siguientes resultados:

v) Cada $\tau \geq \tau_g$ es una teoría de torsión estable (ver [6]).

vi) La cápsula TTF de τ_g es:

$$\overline{\tau}_g = \chi(\{S \in Simp - R \mid S \text{ es proyectivo}\})$$

donde Simp-R denota un conjunto fijo de representantes de las clases de isomorfismo de R-módulos derechos simples (ver [14] para una demostración de este hecho).

Otra teoría de torsión importante es la teoría de torsión de Goldman, que se define como:

$$\tau_{sp} = \xi(\{S \in Simp - R \mid S \text{ es proyectivo}\})$$

El radical asociado con τ_{sp} es la componente proyectiva del zoclo, es decir, $t_{\tau_{sp}}(M) = soc_p(M) = \sum\{S \subset M \mid S \text{ es simple proyectivo}\}$. En [14] puede encontrarse un estudio más detallado de la teoría de torsión τ_{sp} y su relación con τ_g.

Dada L una retícula completa, decimos que $0 \neq a \in L$ es un átomo en L, si para todo $b \in L$, $0 < b \leq a$ implica que $a = b$. En forma dual se definen los coátomos. La retícula L se dice que es atómica, si para cada $0 \neq b \in L$ existe $a \leq b$ con a átomo de L; se dice además que L es localmente atómica, si cada elemento de L es unión de átomos.

Es fácil ver que en el conjunto de teorías de torsión los átomos son las teorías de torsión simples, es decir, las de la forma $\xi(S)$ donde $S \in Simp - R$; así también es fácil ver que esta retícula es atómica.

En general, si $\sigma > \tau$ es un átomo del intervalo (τ, χ) (donde $(\tau, \chi) = gen(\tau) = \{\sigma \mid \tau \leq \sigma \leq \chi\}$) se dice entonces que σ es un τ-átomo.

Si $M \in Mod - R$ es tal que $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $\tau \vee \xi(M)$ es τ-átomo se dice entonces que M es τ-$\mathcal{A}$-módulo. La demostración de las siguientes proposiciones pueden encontrarse en [16].

Definición 1.37.- Sean $M \in Mod - R$ y τ una teoría de torsión. Decimos que M es τ-cocrítico si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y para todo $0 \neq N \subset M$ se cumple que $M/N \in \mathcal{T}_\tau$.

Proposición 1.38.- Si M es τ-cocrítico entonces M es τ-$\mathcal{A}$-módulo.

Proposición 1.39.- Si $M, N \in Mod - R$ son τ-$\mathcal{A}$-módulos entonces $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(N)$ si y solo si $\chi(M) = \chi(N)$. En particular, si M es τ-$\mathcal{A}$-módulo y $N \subset M$ entonces:

i) $N \neq 0 \Rightarrow N$ es τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\chi(N) = \chi(M)$.

ii) N τ-puro en M $\Rightarrow M/N$ es τ-$\mathcal{A}$-módulo y además $\chi(M/N) = \chi(M)$.

CAPITULO II

TEORIA DE LOS TIPOS DE KAPLANSKY

En este capítulo, veremos los resultados básicos acerca de la teoría de los tipos de Kaplansky para anillos regulares autoinyectivos derechos aunque seguiremos el lineamiento marcado por Goodearl y Boyle en [9], donde se trata una teoría de descomposición en varios tipos para R-módulos inyectivos no singulares, obteniendo como caso particular la descomposición para anillos regulares autoinyectivos. El capítulo está dividido en 5 secciones, las cuales forman parte de varios capítulos de [9]. Cada una de las demostraciones pueden encontrarse ahí. La notación $N \hookrightarrow M$ se usará para abreviar el hecho de que existe un monomorfismo $f: N \to M$.

§1. *MODULOS ABELIANOS Y DIRECTAMENTE FINITOS.*

En esta sección, damos las definiciones de R-módulo abeliano y directamente finito así como sus propiedades básicas.

Definición 2.1.- Un anillo regular R se llama *abeliano*, si todos sus idempotentes son centrales. Un idempotente $e \in R$ se llama abeliano si el anillo eRe es abeliano. Si R es un anillo y $M \in Mod-(R, \tau_g)$, M se llama abeliano si $T = End_R(M)$ es anillo abeliano.

Por ejemplo, cualquier anillo con división es abeliano, así como cualquier anillo de Boole.

Teorema 2.2.- Sea $M \in Mod-(R, \tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M es abeliano.

ii) $L^*(M)$ es una retícula distributiva.

iii) Submódulos de M cerrados e isomorfos, son iguales.

iv) Si $M_1, M_2 \in L^*(M)$ y $M_1 \cap M_2 = 0$ entonces $Hom_R(M_1, M_2) = 0$.

Corolario 2.3.- Sea R un anillo. Entonces:

i) Sean $N, M \in Mod-(R, \tau_g)$ con $N \hookrightarrow M$. Si M es abeliano entonces N es abeliano.

ii) Sea $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R, \tau_g)$. Entonces $E(\bigoplus M_\alpha)$ es abeliano si y solo si cada M_α es abeliano y $Hom_R(M_\alpha, M_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

Definición 2.4.- Un anillo R se llama *directamente finito* si:

$$\forall x, y \in R(xy = 1 \Rightarrow yx = 1)$$

Un idempotente $e \in R$ se llama directamente finito si el anillo eRe es directamente finito. Un módulo $M \in Mod-(R, \tau_g)$ es directamente finito si el anillo $End_R(M)$ es directamente finito.

Por ejemplo, cualquier anillo semisimple es directamente finito y en [20] se prueba que cualquier anillo autoinyectivo izquierdo y derecho, es directamente finito.

Teorema 2.5.- Sea $M \in Mod-(R, \tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M es directamente finito.

ii) Si $N \in L^*(M)$ con $N \simeq M$ entonces $N = M$.

iii) Si $N \in L^*(M)$ con $N \simeq N \oplus N$ entonces $N = 0$.

Nótese que la condición (ii) del teorema 2.5 es una buena justificación del nombre *directamente finito*.

Corolario 2.6.- Sea R un anillo. Entonces:

i) Si $M \in Mod-(R, \tau_g)$ es abeliano entonces M es directamente finito.

ii) Sean $N, M \in Mod-(R, \tau_g)$ con $N \hookrightarrow M$. Si M es directamente finito entonces N es directamente finito.

iii) Sea $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R, \tau_g)$ con $Hom_R(M_\alpha, M_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$. Entonces $E(\bigoplus M_\alpha)$ es directamente finito si y solo si cada M_α es directamente finito.

§2. *CUBIERTAS CENTRALES E IDEMPOTENTES FIELES.*

Como es costumbre, usaremos $B(R)$ para denotar al conjunto de idempotentes centrales de R. Es bien sabido que $B(R)$ es un álgebra de Boole, bajo las operaciones: $e \wedge f = ef$, $e \vee f = e + f - ef$ y $e' = 1 - e$. El orden parcial en $B(R)$ está dado entonces por: $e \leq f \Leftrightarrow ef = e \Leftrightarrow eR \subset fR$. Cuando R es regular autoinyectivo, se puede probar que $B(R)$ es además, una retícula completa.

Proposición 2.7.- Sea Q un anillo regular autoinyectivo derecho y $\emptyset \neq \{e_i\} \subset B(Q)$. Entonces:

i) Existe $e = \wedge e_i \in B(Q)$ y $eQ = \bigcap e_iQ$. Mas aún, $\forall M \in Mod-(R, \tau_g)$ se cumple que $Me = \wedge Me_i$ (en $L^*(M)$).

ii) Existe $f = \vee e_i \in B(Q)$ y fQ es la $\mathcal{G}$-cerradura de $\sum e_iQ$ en Q. Mas aún, $\forall M \in Mod-(R, \tau_g)$ se cumple que $Mf = \vee Me_i$ (en $L^*(M)$).

Observación:

i) Sean Q un anillo regular autoinyectivo derecho y $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. Ya que M es no singular, el anulador de M, $(M : 0) = \{q \in Q \mid Mq = 0\}$ es un ideal bilateral de Q el cual pertenece a $L^*(Q_Q)$. De acuerdo al corolario 1.11, $(M : 0) = (1 - e)Q$ para algún $e \in B(Q)$ y notamos además que $e = \wedge\{f \in B(Q) \mid M(1 - f) = 0\}$ es decir, e es el menor idempotente central en Q el cual actúa como la identidad en M.

Definición 2.8.- Sea $e \in Q$ como arriba. Al idempotente e se le llama la cubierta central de M y es denotado por $cc(M)$.

Nótese que la cubierta central se define únicamente cuando el anillo en cuestión, es regular autoinyectivo derecho. Las propiedades básicas de las cubiertas centrales se enuncian en la siguiente:

Proposición 2.9.- Sea Q un anillo regular autoinyectivo derecho y sean $M, N \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. Entonces:

i) Si $N \hookrightarrow M$ entonces $cc(N) \leq cc(M)$.

ii) $Hom_R(M, N) = 0 \Leftrightarrow cc(M) \perp cc(N)$.

iii) Si $\{M_\alpha\} \subset L^*(M)$ entonces $cc(\vee M_\alpha) = \vee cc(M_\alpha)$.

Definición 2.10.- Sea R un anillo regular y sea $e = e^2 \in R$. Decimos que e es un *idempotente fiel* si:

$$\forall f \in B(R)(fe = 0 \Rightarrow f = 0)$$

Por ejemplo, si Q es un anillo regular autoinyectivo derecho y primo entonces por 9.6 [8], sabemos que $B(Q) = \{0, 1\}$ y de aquí que todos los idempotentes distintos de 0 son fieles.

Necesitamos una caracterización alternativa de los idempotentes fieles. El siguiente lema nos resulta útil no solo para probar la siguiente proposición, sino algunos teoremas del siguiente capítulo.

Lema 2.11.- Sean $M \in Mod-(R, \tau_g)$ y $\emptyset \neq X \subset L^*(M)$ cerrado bajo monomorfismos (en $L^*(M)$). Entonces $\sum X \subset_e M$ si y solo si para todo $0 \neq N \in L^*(M)$ existe $K \in X \setminus \{0\}$ tal que $K \subset N$.

Proposición 2.12.- Sean $M \in Mod-(R, \tau_g)$, $T = End_R(M)$ y $e = e^2 \in T$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) e es idempotente fiel.

ii) Te es T-módulo izquierdo fiel.

iii) eT es T-módulo derecho fiel.

iv) $TeM \subset_e M$.

v) Para todo $0 \neq N \in L^*(M)$ existe $0 \neq K \in L^*(M)$ tal que $K \subset N$ y $K \hookrightarrow eM$.

§3. *MODULOS DE LOS TIPOS I, II Y III.*

En esta sección, veremos los conceptos de anillos de los tipos I, II y III, algunos ejemplos de ellos, así como sus propiedades básicas. Seguiremos con el lineamiento marcado por Goodearl y Boyle en [9].

Definición 2.13.- Un anillo regular R es del *tipo I* si R contiene un idempotente abeliano y fiel. Si R es un anillo y $M \in Mod-(R,\tau_g)$, decimos que M es del tipo I si $End_R(M)$ es anillo del tipo I.

Por ejemplo, cada anillo regular abeliano es del tipo I. El recíproco no es cierto; en efecto, si R es un anillo lineal completo derecho, es decir, si $R = End_D(V)$ donde V es un D-espacio vectorial derecho y los homomorfismos se escriben por la izquierda, entonces es bien sabido que R es un anillo regular autoinyectivo derecho y primo, de donde, todos los idempotentes distintos de 0 son fieles. Pero si $e \in R$ es la proyección sobre un subespacio $W \subset V$ tal que $dim_D(W) = 1$, entonces $eRe \simeq D$ y así, e es idempotente abeliano. Por lo tanto, R es del tipo I. Sin embargo, R es abeliano solo cuando $dim_D(V) \leq 1$.

Teorema 2.14.- Sea $M \in Mod-(R,\tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M es del tipo I.

ii) Para todo $0 \neq N \in L^*(M)$ existe $0 \neq K \in L^*(M)$ abeliano tal que $K \subset N$.

iii) $\sum\{N \in L^*(M) \mid N \text{ es abeliano}\} \subset_e M$.

Corolario 2.15.- i) Sean $M, N \in Mod-(R,\tau_g)$ con $N \hookrightarrow M$. Si M es del tipo I entonces N es del tipo I.

ii) Sea $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R,\tau_g)$. Entonces $E(\bigoplus M_\alpha)$ es del tipo I si y solo si cada M_α es del tipo I.

Teorema 2.16.- Sea Q anillo regular autoinyectivo derecho. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Q es del tipo I.

ii) Existe S anillo regular autoinyectivo derecho y abeliano tal que:

$$Mod-(Q,\tau_g(Q)) \sim Mod-(S,\tau_g(S))$$

iii) Existe S anillo regular autoinyectivo derecho y abeliano y $M \in Mod-(S,\tau_g(S))$ tal que $Q \simeq End_S(M)$.

Definición 2.17.- Un anillo regular R es del *tipo II* si R no contiene idempotentes abelianos distintos de 0, pero contiene un idempotente directamente finito y fiel.

Por ejemplo, sea $Q = R/H$ donde $R = \prod M_n(D_n)$ con D_n un anillo con división para toda n y H es cualquier ideal bilateral máximo de R el cual contiene a $\bigoplus M_n(D_n)$, entonces Q es anillo regular autoinyectivo derecho, simple y del tipo II (ver corolario 11.10 [9]).

Los siguientes resultados son los análogos a 2.14–2.16, pero para anillos regulares del tipo II.

Teorema 2.18.- Sea $M \in Mod-(R,\tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M es del tipo II.

ii) M no contiene submódulos cerrados abelianos distintos de 0 y para todo $0 \neq N \in L^*(M)$ existe $0 \neq K \in L^*(M)$ directamente finito tal que $K \subset N$.

iii) M no contiene submódulos cerrados abelianos distintos de 0 y

$$\sum\{N \in L^*(M) \mid N \text{ es directamente finito}\} \subset_e M$$

Corolario 2.19.- i) Sean $M, N \in Mod-(R,\tau_g)$ con $N \hookrightarrow M$. Si M es del tipo II entonces N es del tipo II.

ii) Sea $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R,\tau_g)$. Entonces $E(\bigoplus M_\alpha)$ es del tipo II si y solo si cada M_α es del tipo II.

Teorema 2.20.- Sea Q anillo regular autoinyectivo derecho. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Q es del tipo II.

ii) Existe S anillo regular autoinyectivo derecho, directamente finito y del tipo II, tal que

$$Mod-(Q,\tau_g(Q)) \sim Mod-(S,\tau_g(S))$$

iii) Existe S anillo regular autoinyectivo derecho, directamente finito del tipo II y $M \in Mod-(S,\tau_g(S))$ tal que $Q \simeq End_S(M)$.

Definición 2.21.- Un anillo regular R es del *tipo III* si no tiene idempotentes directamente finitos distintos de 0. Si R es un anillo y $M \in Mod-(R,\tau_g)$, entonces M es del tipo III si $End_R(M)$ es anillo del tipo III.

Por ejemplo, sea V un D-espacio vectorial con $dim_D(V) = \infty$ y sea $R = End_D(V)$; si M es el único ideal bilateral máximo de R, entonces $Q = Q_{max}(R/M)$ es un anillo regular autoinyectivo derecho, simple y del tipo III.

Teorema 2.22.- Sea $M \in Mod-(R, \tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M es del tipo III.

ii) M no tiene submódulos cerrados directamente finitos distintos de 0.

iii) Si $N \in L^*(M)$ entonces $N \simeq N \oplus N$.

Corolario 2.23.- i) Sean $M, N \in Mod-(R, \tau_g)$ con $N \hookrightarrow M$. Si M es del tipo III entonces N es del tipo III.

ii) Sea $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R, \tau_g)$. Entonces $E(\bigoplus M_\alpha)$ es del tipo III si y solo si cada M_α es del tipo III.

Teorema 2.24.- Sea Q anillo regular autoinyectivo derecho. Si Q es del tipo I, II ó III, entonces cada $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$ es del tipo I, II ó III respectivamente.

§4. *MODULOS DEL LOS TIPOS I_f, I_∞, II_f Y II_∞.*

En esta sección, definimos los anillos regulares puramente infinitos y vemos que éstos subdividen a los anillos regulares autoinyectivos derechos de los tipos I y II.

Definición 2.25.- Un anillo regular R es *puramente infinito* si no tiene idempotentes centrales directamente finitos distintos de 0. Si R es un anillo y $M \in Mod-(R, \tau_g)$, entonces decimos que M es puramente infinito si $End_R(M)$ es puramente infinito.

Por ejemplo, cada anillo del tipo III, es puramente infinito. El recíproco no es cierto; en efecto, si K es un campo y V un K-espacio vectorial tal que $dim_K(V) = \infty$ entonces $R = End_K(V)$ es un anillo del tipo I y puramente infinito.

Teorema 2.26.- Sea $M \in Mod-(R, \tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M es puramente infinito.

ii) $M \simeq M \oplus M$.

iii) $M \simeq M^n$, para toda $n > 0$.

iv) $M \simeq E(M^{(\aleph_0)})$.

Definición 2.27.- Un anillo regular es del tipo I_f si es del tipo I y directamente finito y es del tipo I_∞ si es del tipo I y puramente infinito. Análogamente se definen los anillos regulares de los tipos II_f y II_∞.

Por ejemplo, si R es un anillo lineal completo derecho, digamos $R = End_D(V)$, entonces R es un anillo del tipo I_f si $dim_D(V) < \infty$ y es del tipo I_∞ si $dim_D(V) = \infty$. El ejemplo de anillo Q del tipo II que vimos anteriormente, resulta ser del tipo II_f (ver corolario 11.10 [9]) y si hacemos $R = E(Q_Q^{(\aleph_0)})$ entonces R es un anillo del tipo II_∞, por el corolario 2.19 y el teorema anterior.

§5. *DESCOMPOSICION EN LOS TIPOS.*

Esta sección trata acerca de la descomposición de los módulos inyectivos no singulares en suma directa de submódulos de varios tipos. Como consecuencia directa, se tiene una descomposición para anillos regulares autoinyectivos derechos en producto directo de anillos de los tipos respectivos.

Lema 2.28.- Si M_1, M_2 y $M_3 \in Mod-(R, \tau_g)$ son módulos de los tipos I, II y III entonces $Hom_R(M_i, M_j) = 0$, para $i \neq j$.

Teorema 2.29.- Si $M \in Mod-(R, \tau_g)$ entonces M se escribe en forma única como suma directa de submódulos de los tipos I, II y III.

Corolario 2.30.- Cualquier anillo regular autoinyectivo derecho Q se escribe en forma única como producto directo de anillos de los tipos I, II y III.

Se puede hacer un refinamiento en la descomposición y la pauta es marcada por el siguiente teorema:

Teorema 2.31.- Si $M \in Mod-(R, \tau_g)$ entonces M se escribe en forma única como

$M = M_1 \oplus M_2$ donde M_1 es submódulo totalmente invariante directamente finito y M_2 es submódulo totalmente invariante puramente infinito.

Teorema 2.32.- Si $M \in Mod-(R, \tau_g)$ entonces M se escribe en forma única como suma directa de submódulos totalmente invariantes de los tipos I_f, I_∞, II_f, II_∞ y III.

Corolario 2.33.- Cualquier anillo regular autoinyectivo derecho Q se escribe en forma única como producto directo de anillos de los tipos I_f, I_∞, II_f, II_∞ y III.

Corolario 2.34.- Sea Q anillo regular autoinyectivo derecho y sea $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. Entonces existen únicos $e_1, e_2, \ldots, e_5$ idempotentes centrales y ortogonales tales que $e_1 + \ldots + e_5 = cc(M)$ y $Me_1, \ldots, Me_5$ es del tipo $I_f, \ldots, III$, respectivamente.

CAPITULO III

UNA TEORIA GENERAL DE TIPOS PARA MODULOS INYECTIVOS NO SINGULARES

La teoría de tipos de Kaplansky, nos muestra que cada anillo regular autoinyectivo derecho se puede descomponer como producto directo de anillos de tres tipos básicos, llamados I, II y III. Posteriormente se hace un refinamiento de esta descomposición, factorizando a los anillos de los tipos I y II como producto directo de dos anillos con ciertas características y denotados por I_f, I_∞, II_f y II_∞, obteniendo así que con anillos de cinco tipos básicos, podemos estructurar todo anillo regular autoinyectivo. En [9], Goodearl y Boyle toman esta teoría y la desarrollan para R-módulos inyectivos no singulares, de la siguiente forma: M_R es del tipo X si y solo si $End_R(M)$ es del tipo X, investigando que condiciones internas debe satisfacer M_R, para ser del tipo X. En este capítulo, haremos una generalización de la teoría de tipos de Goodearl y Boyle para R-módulos inyectivos no singulares, obteniendo como caso particular ésta; como primer punto, haremos una generalización de la teoría de los tipos I, II y III y para lograr dicha generalización, requerimos de ciertas clases de anillos regulares autoinyectivos derechos. Posteriormente, veremos como obtener refinamientos más generales que el de Kaplansky, obteniendo como caso particular éste.

Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}n$ una clase no vacía de anillos regulares autoinyectivos derechos tales que:

i) $\mathcal{C}$ es cerrada bajo isomorfismos (de anillos con 1),

ii) $\mathcal{C}$ es cerrada bajo productos directos,

iii) Para cada anillo R y $N, M \in Mod-(R, \tau_g)$ con $N \hookrightarrow M$ se cumple la siguiente condición:

$$End_R(M) \in \mathcal{C} \Rightarrow End_R(N) \in \mathcal{C}.$$

Una clase $\mathcal{C}$ con estas condiciones es llamada una **clase** TT.

Observaciones:

Si $\mathcal{C}$ es una clase TT entonces:

a) $0 \in \mathcal{C}$. Esto es claro al considerar que $\mathcal{C}$ no es vacía junto con la propiedad (iii) de $\mathcal{C}$.

b) $\mathcal{C} = \{0\}$ es la menor clase TT y $\mathcal{C} = \mathcal{RA}$ la clase de todos los anillos regulares autoinyectivos derechos, es la mayor clase TT.

c) $\mathcal{C}$ es cerrada bajo anillos factores directos. En efecto, si $Q \in \mathcal{C}$ y $Q = I \oplus J$ con $I, J \subset Q$ ideales bilaterales entonces por la propiedad (iii) de $\mathcal{C}$, $End_R(I) \in \mathcal{C}$. Pero es fácil ver que $End_R(I) \simeq I$ (como anillos) de lo cual se obtiene el resultado.

Definición 3.1.- Dado un anillo R y $M \in Mod-(R, \tau_g)$, decimos que M es $\mathcal{C}$-módulo (como R-módulo) si $End_R(M) \in \mathcal{C}$.

Definición 3.2.- Dado un anillo regular autoinyectivo derecho Q y $e = e^2 \in Q$, decimos que e es $\mathcal{C}$-idempotente si eQ es $\mathcal{C}$-módulo, es decir, si el anillo $eQe \in \mathcal{C}$.

Proposición 3.3.- Sea R un anillo. Entonces:

i) Si $N, M \in Mod-(R, \tau_g)$ con $N \hookrightarrow M$ y M es $\mathcal{C}$-módulo entonces N es $\mathcal{C}$-módulo,

ii) Si $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R, \tau_g)$ con $Hom_R(M_\alpha, M_\beta) = 0$ para $\alpha \neq \beta$ entonces $E(\bigoplus M_\alpha)$ es $\mathcal{C}$-módulo si y solo si cada M_α es $\mathcal{C}$-módulo.

Demostración.- i) Obvio.

ii) Si cada M_α es $\mathcal{C}$-módulo entonces $End_R(M_\alpha) \in \mathcal{C}$ para toda α. Como sabemos, $E(\bigoplus M_\alpha)$ es el coproducto de la familia $\{M_\alpha\}$ en la categoría $Mod-(R, \tau_g)$. Usamos este hecho y la independencia homológica de la familia $\{M_\alpha\}$ para obtener que:

$$End_R(E(\bigoplus M_\alpha)) \simeq \prod End_R(M_\alpha) \in \mathcal{C}$$

por las propiedades (i) y (ii) de $\mathcal{C}$.

Recordemos que si $M \in Mod-(R, \tau_g)$, $T = End_R(M)$ y $e, f \in T$ son idempotentes entonces hay un isomorfismo de grupos abelianos:

$$eTf \simeq Hom_R(fM, eM)$$

definido en forma natural. Cuando $e = f$ entonces este isomorfismo de grupos es además de anillos. Tenemos entonces la siguiente:

Proposición 3.4.- Sean R un anillo, $M \in Mod-(R, \tau_g)$, $T = End_R(M)$ y $e = e^2 \in T$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) e es $\mathcal{C}$-idempotente.

ii) eM es $\mathcal{C}$-módulo.

Definición 3.5.- Una teoría de tipos $\overline{\mathcal{T}}$ para anillos regulares autoinyectivos derechos es una familia:

$$\overline{\mathcal{T}} = \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n\}, \quad n > 0$$

que cumple las siguientes condiciones:

i) $\mathcal{C}_i$ es una clase TT, para toda i,

ii) $\{0\} = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{C}_n = \mathcal{RA}$,

iii) Para cada $1 \leq i \leq n$, existe Q anillo regular autoinyectivo derecho tal que:

$$\chi(\mathcal{A}_{i-1}) > \chi(\mathcal{A}_i)$$

donde $\mathcal{A}_i$ denota la clase de todos los $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$ tales que M es $\mathcal{C}_i$-módulo.

Definición 3.6.- Dada una teoría de tipos $\overline{\mathcal{T}}$, decimos que un anillo regular autoinyectivo derecho Q es del tipo $\overline{\mathcal{T}}_i$ (para $1 \leq i \leq n$) si Q no tiene $\mathcal{C}_{i-1}$-idempotentes distintos de cero, pero tiene un $\mathcal{C}_i$-idempotente fiel.

Observaciones:

i) Por definición, Q es del tipo $\mathcal{C}_1$ si y sólo si, tiene un $\mathcal{C}_1$-idempotente fiel.

ii) Como veremos a lo largo de este capítulo, la condición (iii) de 3.5, no influye para desarrollar la teoría de descomposición en los tipos $\overline{\mathcal{T}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{T}}_n$, solo que dicha condición es impuesta únicamente para garantizar que existan anillos (distintos de 0) de los tipos $\overline{\mathcal{T}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{T}}_n$.

Definición 3.7.- Sea $M \in Mod-(R, \tau_g)$, decimos que M es del tipo $\overline{\mathcal{T}}_i$ (con $1 \leq i \leq n$) si $End_R(M)$ es un anillo del tipo $\overline{\mathcal{T}}_i$.

En todo lo que sigue, supondremos que tenemos una teoría de tipos $\overline{\mathcal{T}}$.

Teorema 3.8.- Para $M \in Mod-(R,\tau_g)$ son equivalentes:

i) M es del tipo $\overline{T}_i$,

ii) M no tiene $\mathcal{C}_{i-1}$-submódulos cerrados distintos de 0 y para todo $0 \neq N \in L^*(M)$ existe un $\mathcal{C}_i$-módulo $0 \neq K \in L^*(M)$ tal que $K \subset N$,

iii) M no tiene $\mathcal{C}_{i-1}$-submódulos cerrados distintos de 0 y

$$\sum\{N \in L^*(M) \mid N \text{ es } \mathcal{C}_i\text{-módulo }\} \subset_e M.$$

Demostración.- Sea $T = End_R(M)$.

$i) \Rightarrow ii)$ Por (i) existe $e = e^2 \in T$ tal que e es $\mathcal{C}_i$-idempotente fiel. Si $0 \neq N \in L^*(M)$, como e es fiel, sabemos por la prop.2.12(v) que existe $0 \neq K \in L^*(M)$ tal que $K \subset N$ y $K \hookrightarrow eM$. Ahora bien, por la prop. 3.4 vemos que eM es $\mathcal{C}_i$-módulo y por lo tanto, por la prop. 3.3(i) obtenemos que K es $\mathcal{C}_i$-módulo. El hecho de que M no tiene $\mathcal{C}_{i-1}$-submódulos cerrados distintos de 0, se sigue por la prop. 3.4.

$ii) \Rightarrow i)$ Ya que M no tiene $\mathcal{C}_{i-1}$-submódulos cerrados distintos de 0, por la prop. 3.4 tenemos que T no tiene $\mathcal{C}_{i-1}$-idempotentes distintos de 0.

Ahora, sea $\mathcal{F} = \{TeM \mid e \text{ es } \mathcal{C}_i\text{-idempotente }\}$; vemos que $\mathcal{F}$ no es vacía ya que $0 \in \mathcal{F}$ y podemos elegir $\{Te_iM\} \subset \mathcal{F}$ subfamilia máxima independiente. Ya que $\bigoplus Te_iM$ es submódulo totalmente invariante de M, tenemos por la prop. 1.10 que la $\mathcal{G}$-cerradura de $\bigoplus Te_iM$ es de la forma fM para algún $f \in B(T)$. Ahora, si $f \neq 1$ entonces $0 \neq (1-f)M \in L^*(M)$ y por (ii) existe un $\mathcal{C}_i$-módulo $0 \neq K \in L^*(M)$ tal que $K \subset (1-f)M$. Pero entonces, si $e = e^2 \in T$ es tal que $K = eM$ entonces e es $\mathcal{C}_i$-idempotente y además $(\bigoplus Te_iM) \cap TeM \subset fM \cap (1-f)M = 0$, lo cual contradice la maximalidad de $\{Te_iM\}$. Por lo tanto, $\bigoplus Te_iM \subset_e M$.

Consideremos ahora la $\mathcal{G}$-cerradura de $\bigoplus e_iM$ en M, sabemos que es de la forma gM para algún $g = g^2 \in T$. Como $\bigoplus Te_iM \subset TgM$ entonces $TgM \subset_e M$ y por lo tanto, por la prop.2.12(iv), vemos que $g \in T$ es idempotente fiel. Veamos ahora, que g es $\mathcal{C}_i$-idempotente; ya que $gM = E(\bigoplus e_iM)$ y cada e_iM es $\mathcal{C}_i$-módulo, bastará probar (por la prop. 3.3) que $Hom_R(e_iM, e_jM) = 0$ para $i \neq j$. En efecto, si $\alpha\colon e_iM \to e_jM$ entonces $\alpha(e_iM) \subset e_jM$ y de aquí que $e_j\alpha = \alpha$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\alpha(e_iM) = e_j\alpha e_iM \in e_jTe_iM \subset (Te_iM) \cap (Te_jM) = 0$$

y de aquí que $\alpha = 0$, por lo cual, g es C_i-idempotente fiel en T y por tanto, M es del tipo $\overline{T}_i$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Sea X= $\{K \in L^*(M) \mid K$ es C_i-módulo$\}$. Como X es cerrado bajo monomorfismos en $L^*(M)$ entonces por el lema 2.11, obtenemos el resultado.

Corolario 3.9.- Sea R un anillo. Entonces:

i) Si $N, M \in Mod-(R, \tau_g)$ con $N \hookrightarrow M$ y M es del tipo $\overline{T}_i$ (para $1 \leq i \leq n$) entonces N es del tipo $\overline{T}_i$.

ii) Si $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R, \tau_g)$ entonces $E(\bigoplus M_\alpha)$ es del tipo $\overline{T}_i$ si y solo si cada M_α es del tipo $\overline{T}_i$.

Demostración.- i) Ya que M no tiene C_{i-1}-submódulos cerrados distintos de 0 entonces es claro que N tampoco los tiene.

Supongamos que $f: N \longrightarrow M$ es el monomorfismo y sea $0 \neq K \in L^*(N)$. Entonces $0 \neq f(K) \in L^*(M)$ y por lo tanto, existe un C_i-módulo $0 \neq H \in L^*(M)$ tal que $H \subset f(K)$. Ahora bien, es claro que $0 \neq f^{-1}(H) \in L^*(N)$, $f^{-1}(H) \subset K$ y $f^{-1}(H)$ es C_i-módulo (ya que de hecho, $f^{-1}(H) \simeq H$). Por lo tanto, N es del tipo $\overline{T}_i$.

ii) Si $E(\bigoplus M_\alpha)$ es del tipo $\overline{T}_i$ entonces por el inciso anterior cada M_α es del tipo $\overline{T}_i$.

Supongamos ahora, que cada M_α es del tipo $\overline{T}_i$ y sean

$$X = \{K \in L^*(E(\bigoplus M_\alpha)) \mid K \text{ es } C_i\text{-módulo }\}$$

y para cada α

$$X_\alpha = \{K \in L^*(M_\alpha) \mid K \text{ es } C_i\text{-módulo }\}$$

Por el teorema anterior, $\sum X_\alpha \subset_e M_\alpha$ para toda α y por lo tanto, $\bigoplus(\sum X_\alpha) \subset_e E(\bigoplus M_\alpha)$; pero ya que $\bigoplus(\sum X_\alpha) \subset \sum X$ tenemos entonces que $\sum X \subset_e E(\bigoplus M_\alpha)$.

Ahora, suponemos que existe un C_{i-1}-módulo $0 \neq K \in L^*(E(\bigoplus M_\alpha))$, de donde, $0 \neq K \cap (\bigoplus M_\alpha)$. Consideramos que $\bigoplus M_\alpha \subset \prod M_\alpha$, entonces existe una proyección $\pi_j: \prod M_\alpha \longrightarrow M_j$ tal que $\pi_j \mid_{K \cap (\oplus M_\alpha)} \neq 0$. Ya que M_j es inyectivo, podemos extender π_j a un morfismo distinto de cero $\overline{\pi}_j: K \rightarrow M_j$. Si $H \subset K$ es tal que $H \oplus ker\overline{\pi}_j = K$ entonces $0 \neq H \simeq Im\overline{\pi}_j \subset M_j$. Como K es C_{i-1}-módulo entonces H lo es, de lo cual obtenemos que M_j tiene un C_{i-1}-submódulo cerrado distinto de cero, lo cual contradice el hecho de que M_j es del tipo C_i. Por el teorema 3.8, concluimos que $E(\bigoplus M_\alpha)$ es del tipo $\overline{T}_i$.

Corolario 3.10.- Las siguientes condiciones son equivalentes, para un anillo regular autoinyectivo derecho Q:

i) Q es del tipo $\overline{T}_i$,

ii) M_Q es del tipo $\overline{T}_i$, para todo $M \in Mod-(Q,\tau_g(Q))$.

Demostración.- Sea $M \in Mod-(Q,\tau_g(Q))$ y sea $Q^{(X)} \longrightarrow M$ un epimorfismo; ya que M es inyectivo, se induce un morfismo $E(Q^{(X)}) \longrightarrow M$, el cual claramente sigue siendo epimorfismo. Por la prop. 1.6 obtenemos que M es isomorfo a un sumando directo de $E(Q^{(X)})$. Así, si Q es del tipo $\overline{T}_i$ entonces por el corolario 3.9 tendremos que $E(Q^{(X)})$ es del tipo $\overline{T}_i$ y por lo tanto, M es del tipo $\overline{T}_i$.

Observación:

i) Nótese que en el caso del tipo $\overline{T}_1$, la propiedad: M no tiene C_0-submódulos cerrados distintos de 0, se cumple trivialmente, mientras que en el caso del tipo $\overline{T}_n$, la propiedad: $\sum\{N \in L^*(M) \mid N \text{ es } C_n\text{-módulo}\} \subset_e M$ también es trivial. Así, no es necesario verificar éstas, para probar que M es del tipo $\overline{T}_1$ ó del tipo $\overline{T}_n$.

Teorema 3.11.- Las siguientes condiciones son equivalentes, para un anillo regular autoinyectivo derecho Q:

i) Q es del tipo $\overline{T}_i$.

ii) Existe $S \in C_i$ del tipo $\overline{T}_i$, tal que:

$$Mod-(Q,\tau_g(Q)) \sim Mod-(S,\tau_g(S))$$

iii) Existen $S \in C_i$ del tipo $\overline{T}_i$ y $M \in Mod-(S,\tau_g(S))$ tales que $Q \simeq End_S(M)$.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Si Q es del tipo $\overline{T}_i$ entonces existe un C_i-idempotente fiel $e \in Q$. Sea $S = eQe \simeq End_Q(eQ)$; entonces $S \in C_i$ ya que e es C_i-idempotente y como Q es del tipo $\overline{T}_i$, entonces por el corolario 3.10, eQ es del tipo $\overline{T}_i$ obteniendo entonces que S es anillo regular autoinyectivo derecho del tipo $\overline{T}_i$. Finalmente, ya que eQ es fiel (por prop.

2.12(ii)) entonces por el teorema 1.18 obtenemos el resultado deseado.

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Obvio por el teorema 1.18.

iii) $\Rightarrow$ *i*) Ya que S es del tipo $\overline{T}_i$ entonces por el corolario 3.10 tenemos que M_S es del tipo $\overline{T}_i$. Por lo tanto, $Q \simeq End_S(M)$ es del tipo $\overline{T}_i$.

El siguiente paso es probar los teoremas de descomposición, primero para R-módulos inyectivos no singulares y como consecuencia de ésto, para anillos regulares autoinyectivos derechos. Antes necesitamos un lema, que no solamente nos servirá para probar dichos teoremas, sino que será de gran utilidad en el capítulo siguiente.

Lema 3.12.- Sean $M_1, \ldots, M_n \in Mod-(R, \tau_g)$ módulos de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$ respectivamente. Entonces $Hom_R(M_i, M_j) = 0$ si $i \neq j$.

Demostración.- Por el corolario 1.7, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $i < j$. Supongamos que existe $0 \neq \alpha: M_i \rightarrow M_j$. Por la prop. 1.6 sabemos que $M_i = ker\alpha \oplus N$ y $0 \neq N \simeq Im\alpha \subset M_j$; por tanto, N es del tipo $\overline{T}_j$. Por otro lado, $0 \neq N \in L^*(M_i)$ lo que implica, por el teorema 3.8, que existe un C_i-módulo $0 \neq K \in L^*(M_i)$ tal que $K \subset N$. En particular, ya que $C_i \subset C_j$ tenemos que K es C_{j-1}-submódulo cerrado de N distinto de 0, contradiciendo que N es del tipo $\overline{T}_j$. Por lo tanto, $Hom_R(M_i, M_j) = 0$ como queríamos probar.

Teorema 3.13.- Si $M \in Mod-(R, \tau_g)$, entonces existen $M_1, \ldots, M_n \in Mod-(R, \tau_g)$ únicos, de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$ respectivamente, tales que $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$

Demostración.- Sea $\{N_i\}$ la familia de todos los C_1-submódulos cerrados de M y sea $M_1 = E(\sum N_i)$ tal que $M = M_1 \oplus K_1$. Si hacemos

$$\mathcal{F}_1 = \{K \in L^*(M_1) \mid K \text{ es } C_1\text{-módulo}\}$$

entonces $\mathcal{F}_1 = \{N_i\}$ y así, $\sum \mathcal{F}_1 = \sum N_i \subset_e M_1$. Por lo tanto, por el teorema 1.8 vemos que M_1 es del tipo $\overline{T}_1$. Nótese además, que K_1 no tiene C_1-submódulos cerrados distintos de 0.

Supongamos que mediante este proceso, hemos construído los submódulos $M_1, \ldots, M_r$ de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_r$ respectivamente con $1 \leq r < n$ tales que

$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_r \oplus K_r$ y sea $\{H_j\}$ la familia de todos los $\mathcal{C}_{r+1}$-submódulos cerrados de K_r y $M_{r+1} = E(\sum H_j)$ tal que $K_r = M_{r+1} \oplus K_{r+1}$. Si hacemos ahora,

$$\mathcal{F}_{r+1} = \{K \in L^*(M_{r+1}) \mid K \text{ es } \mathcal{C}_{r+1}\text{-módulo}\}$$

entonces $\mathcal{F}_{r+1} = \{H_j\}$ y por lo tanto, $\sum \mathcal{F}_{r+1} = \sum H_j \subset_e M_{r+1}$. Además, como $M_r \cap M_{r+1} = 0$ entonces M_{r+1} no tiene $\mathcal{C}_r$-submódulos cerrados distintos de 0 (por la construcción de M_r) y así, por el teorema 3.8 tendremos que M_{r+1} es del tipo $\overline{T}_{r+1}$. Con este proceso, probamos la existencia de los módulos $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Ahora, supongamos que $M = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ es otra descomposición en los tipos $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, ... , $\overline{T}_n$ y sea

$$\pi_i : M \longrightarrow \bigoplus_{j \neq i} E_j$$

la proyección canónica. Por el lema 3.12 vemos que

$$Hom_R(M_i, \bigoplus_{j \neq i} E_j) = 0$$

y por lo tanto, $M_i \subset ker \pi_i = E_i$; por simetría, tenemos la otra contención y por lo tanto $M_i = E_i$ para toda $1 \leq i \leq n$, probando así la unicidad de la descomposición.

Corolario 3.14.- Un anillo anillo regular autoinyectivo derecho Q se descompone, en forma única, como producto directo de anillos regulares autoinyectivos derechos $Q_1, \ldots, Q_n$ de los tipos $\overline{T}_1$, ... , $\overline{T}_n$ respectivamente.

Demostración.- Por el teorema anterior, sabemos que $Q = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ donde I_j es del tipo $\overline{T}_j$, para cada j; de acuerdo al lema 3.12 tenemos que cada I_j es ideal bilateral de Q y por lo tanto la descomposición que tenemos es de anillos. Además, $End_Q(I_j) \simeq I_j$ y así, I_j es anillo del tipo $\overline{T}_j$, para cada j. La unicidad es obvia.

Observación:

Dada una teoría de tipos $\overline{T} = \{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}$ sabemos que da lugar a una descomposición $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$ en los tipos $\overline{T}_1$, ... , $\overline{T}_n$, para cualquier anillo regular autoinyectivo derecho Q. Supongamos que tenemos una clase $\mathcal{C}_{j-1} \subset \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}_j$ de tal forma que al considerar la nueva familia

$$\overline{T}' = \{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{j-1}, \mathcal{C}', \mathcal{C}_j, \ldots, \mathcal{C}_n\}$$

obtenemos una teoría de tipos (que podemos pensar que es un refinamiento de la teoría original) entonces, considerando nuestro anillo regular autoinyectivo derecho Q éste se descompondrá como

$$Q = Q_1 \times \ldots \times Q_{j-1} \times Q_{j_1} \times Q_{j_2} \times Q_{j+1} \times \ldots \times Q_n$$

donde $Q_{j_1} \times Q_{j_2} = Q_j$ (es decir, obtenemos un refinamiento de la descomposición original). Esto es fácil de verificar, usando la definición de los tipos $\overline{T}_i$ y la unicidad en la descomposición, dada por el teorema 3.13.

El siguiente paso, es ver que el teorema de descomposición para anillos regulares autoinyectivos derechos, implica uno para las categorías espectrales $Mod-(R, \tau_g)$.

Teorema 3.15.- Para cada anillo R, hay un isomorfismo de categorías:

$$Mod-(R, \tau_g(R)) \simeq \prod_{i=1}^{n} Mod-(Q_i, \tau_g(Q_i))$$

donde Q_i es anillo regular autoinyectivo derecho del tipo $\overline{T}_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Demostración.- Como mencionamos en la sección 1 de los prelimінares, $Mod-(R, \tau_g(R)) = Mod-(Q, \tau_g(Q))$ donde $Q = Q_{max}(R/t_{\tau_g}(R))$. En vista de que Q es un anillo regular autoinyectivo derecho podemos aplicar el corolario 3.14 y obtener $e_i \in B(Q)$ tales que $Q = \bigoplus e_iQ$ es la descomposición de Q. Si hacemos $Q_i = e_iQ$ entonces es claro que para cada $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q)$, $Me_i \in Mod-(Q_i, \tau_g(Q_i))$ y $M = Me_1 \oplus \ldots \oplus Me_n$. Podemos entonces definir el funtor:

$$F: Mod-(Q, \tau_g(Q)) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} Mod-(Q_i, \tau_g(Q_i))$$

tal que $F(M) = (Me_1, \ldots, Me_n)$ y si $f: M \to N$ entonces $F(f)_i = f\mid_{Me_i}$ (es claro que $f\mid_{Me_i}: Me_i \to Ne_i$). Ahora bien, si $M \in Mod-(Q_i, \tau_g(Q_i))$ entonces podemos considerar a M como Q-módulo derecho. Veamos que M_Q es inyectivo no singular.

Sea $E = E(M_Q)$; en primer lugar, debemos probar que E es Q_i-módulo derecho y para ello, bastará ver que $Ee_j = 0, \forall j \neq i$. Supongamos que existe $x \in E$ tal que

$xe_j \neq 0$. Como $M_Q \subset_e E$ entonces existe $0 \neq q \in Q$ tal que $0 \neq (xe_j)q \in M$. Ahora bien, como Q es regular, podemos hallar $y \in Q$ tal que $e_j q = (e_j q)y(e_j q)$. Así, tenemos que $(xe_j)q = x(e_j q)y(e_j q) = (x(e_j qy))e_j q$ pero $x(e_j qy) \in M$ y $Me_j = 0$, de donde $xe_j q = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, E es Q_i-módulo derecho y como además es fácil ver que $M_{Q_i} \subset_e E_{Q_i}$ entonces concluímos que $M = E$, lo cual prueba que M_Q es inyectivo. Ahora, usando la prop. 1.28 [7], vemos que M_Q es no singular. De esta forma, si $(M_1, \ldots, M_n) \in \prod Mod-(Q_i, \tau_g(Q_i))$ entonces $M_i \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y por lo tanto, $\bigoplus M_i \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. De esta forma, si definimos el funtor:

$$G\colon \prod_{i=1}^{n} Mod-(Q_i, \tau_g(Q_i)) \to Mod-(Q, \tau_g(Q))$$

tal que $G((M_1, \ldots, M_n)) = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ entonces es claro que G es el funtor inverso de F.

Si $Q = e_1 Q \oplus \ldots \oplus e_n Q$ es la descomposición de Q como antes, y $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$, sabemos por el corolario 3.10 que Me_i es e_iQ-módulo derecho del tipo $\overline{T}_i$. Pero de hecho podemos probar que es Q-módulo derecho del tipo $\overline{T}_i$, lo que nos indica que la descomposición del anillo Q, determina la descomposición de cada Q-módulo derecho inyectivo no singular.

Teorema 3.16.- Sean Q un anillo regular autoinyectivo derecho y $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. Si $Q = e_1 Q \oplus \ldots \oplus e_n Q$ es la descomposición de Q en los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$ entonces $M = Me_1 \oplus \ldots \oplus Me_n$ es la descomposición de M_Q en los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$.

Demostración.- Ya que Me_i es e_iQ-módulo entonces existe una sucesión exacta de e_iQ-módulos:

$$(e_iQ)^{(X)} \xrightarrow{f} Me_i \longrightarrow 0$$

para algún conjunto X. Claramente, f es epimorfismo de Q-módulos y como Me_i es Q-módulo inyectivo entonces f se extiende a un morfismo $\overline{f}\colon E((e_iQ)^{(X)}) \to Me_i$, el cual sigue siendo epimorfismo. Ya que $E((e_iQ)^{(X)}), Me_i \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$, se sigue por la prop. 1.6 que $\overline{f}$ se escinde. Aplicando ahora el corolario 3.9, vemos que Me_i es Q-módulo del tipo $\overline{T}_i$. Como $M = \bigoplus Me_i$ se sigue por la unicidad del teorema 3.13. que ésta es la descomposición de M_Q.

Todavía podemos hacer un refinamiento más en nuestra descomposición de los R-módulos inyectivos no singulares. Para ello, supongamos que tenemos una clase TT.

Definición 3.17.- Un anillo regular autoinyectivo derecho se llama centralmente C-nulo si no tiene C-idempotentes centrales distintos de 0.

Definición 3.18.- Sea R un anillo y $M \in Mod-(R,\tau_g)$. Decimos que M es un R-módulo centralmente C-nulo si $End_R(M)$ es anillo centralmente C-nulo.

Proposición 3.19.- Sea $M \in Mod-(R,\tau_g)$. Entonces M es centralmente C-nulo si y sólo si, M no tiene C-submódulos cerrados totalmente invariantes distintos de 0.

Demostración.- Por el corolario 1.12, sabemos que $N \in L^*(M)$ es totalmente invariante si y sólo si, $N = eM$ para algún $e \in End_R(M)$ idempotente central. Aplicando la prop. 3.4, obtenemos el resultado.

Teorema 3.20.- Para cada $M \in Mod-(R,\tau_g)$ existen $M_1, M_2 \in L^*(M)$ totalmente invariantes en M, únicos tales que $M = M_1 \oplus M_2$, donde M_1 es C-módulo y M_2 es centralmente C-nulo.

Demostración.- Sea $T = End_R(M)$ y hagamos

$$\mathcal{F} = \{N \in L^*(M) \mid N \text{ es } C\text{-módulo totalmente invariante}\}$$

Vemos que $\mathcal{F}$ no es vacía, ya que $0 \in \mathcal{F}$ y así, podemos elegir $\{N_i\} \subset \mathcal{F}$ subfamilia máxima independiente. En vista de que cada N_i es totalmente invariante entonces $\bigoplus N_i$ es totalmente invariante y así, por la prop. 1.10, existe $e \in B(T)$ tal que $eM = E(\bigoplus N_i)$. Usando nuevamente el hecho de que cada N_i es totalmente invariante, junto con la independencia de la familia $\{N_i\}$, vemos que $Hom_R(N_i, N_j) = 0$ para $i \neq j$ y así, por la prop. 3.3 tenemos que eM es C-submódulo de M.

Sean $M_1 = eM$ y $M_2 = (1-e)M$. Entonces M_2 es submódulo totalmente invariante centralmente $\mathcal{C}$-nulo, ya que si existiera un $\mathcal{C}$-módulo $0 \neq N \in L^*(M_2)$ totalmente invariante, la familia $\{N_i\} \cup N \subset \mathcal{F}$ sería independiente, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, $M = M_1 \oplus M_2$.

Supongamos ahora que $M = E_1 \oplus E_2$ es otra descomposición y sea $f \in B(T)$ tal que $E_1 = fM$ y $E_2 = (1-f)M$. Si hacemos $K = (f - ef)M$ entonces K es submódulo totalmente invariante de $(1-e)M$, pero además, debido a que $K \hookrightarrow fM$ entonces K es $\mathcal{C}$-módulo y por lo tanto, ya que $(1-e)M$ es centralmente $\mathcal{C}$-nulo, concluimos que $K = 0$ y de aquí que $f = ef$: por simetría se tiene que $e = fe$ y ya que $e, f \in B(T)$ entonces $e = f$, obteniendo que $M_1 = E_1$ y $M_2 = E_2$.

Corolario 3.21.- Cualquier anillo regular autoinyectivo derecho Q se escribe en forma única como producto directo de un anillo $Q_1 \in \mathcal{C}$ y un anillo Q_2 centralmente $\mathcal{C}$-nulo.

Demostración.- Considerando el Q-módulo inyectivo no singular Q_Q, sabemos que $Q = I_1 \oplus I_2$ con I_1 $\mathcal{C}$-módulo e I_2 centralmente $\mathcal{C}$-nulo y ambos, totalmente invariantes en Q. Por lo tanto, I_j es ideal bilateral de Q y la descomposición es de anillos. Obsérvese que $End_R(I_j) \simeq I_j$ y por lo tanto tenemos que el anillo $I_1 \in \mathcal{C}$ mientras que el anillo I_2 es centralmente $\mathcal{C}$-nulo. La unicidad es obvia.

Así, al considerar una teoría de tipos $\overline{T}$ y una clase TT, dado $M \in Mod-(R, \tau_g)$, descomponemos a $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ en R-módulos de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$. A su vez, cada M_i se decompone como $M_i = M_{i,1} \oplus M_{i,2}$ donde $M_{i,1}$ es $\mathcal{C}$-módulo y $M_{i,2}$ es centralmente $\mathcal{C}$-nulo, obteniendo una nueva descomposición de M:

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} (M_{i,1} \oplus M_{i,2})$$

siendo claro que esta descomposición es única (por los teoremas 3.13 y 3.20). En particular, dado cualquier anillo regular autoinyectivo derecho Q, éste se descompone en forma única como producto directo

$$Q = \prod_{i=1}^{n} (Q_{i,1} \times Q_{i,2})$$

donde $Q_{i,1} \in \mathcal{C}$ es anillo del tipo $\overline{T}_i$, mientras que $Q_{i,2}$ es anillo del tipo $\overline{T}_i$ y centralmente $\mathcal{C}$-nulo, para toda $i = 1, \ldots, n$.

Nótese que como posible clase $\mathcal{C}$, podemos elegir cualquier clase $\mathcal{C}_j$ de la teoría de tipos $\overline{T}$. En este caso, solamente los factores $Q_1, \ldots, Q_j$ se descomponen como $Q_{i,1} \times Q_{i,2}$ ya que para $i > j$, Q_i (por definición del tipo $\overline{T}_i$) no tiene $\mathcal{C}_{i-1}$-idempotentes distintos de 0, y en particular, no tiene $\mathcal{C}_j$-idempotentes distintos de 0; así, Q_i es anillo centralmente $\mathcal{C}_j$-nulo para toda $i > j$ y por lo tanto, ya no se factoriza como los anillos $Q_1, \ldots, Q_j$.

Es importante hacer notar, que dada una clase TT, también se induce una descomposición en las categorías espectrales y la prueba es la misma que la del teorema 3.15.

Teorema 3.22.- Para cada anillo R, hay un isomorfismo de categorías:

$$Mod-(R, \tau_g(R)) \simeq Mod-(Q_1, \tau_g(Q_1)) \times Mod-(Q_2, \tau_g(Q_2))$$

donde $Q_1 \in \mathcal{C}$ y Q_2 es anillo regular autoinyectivo derecho centralmente $\mathcal{C}$-nulo.

Pero más importante es señalar, que un análogo al teorema 3.16 ya no es válido en este contexto, es decir, existe una clase $\mathcal{C}$ y un anillo regular autoinyectivo derecho Q tal que si $Q = e_1Q \oplus e_2Q$ es su descomposición, entonces no es cierto que para cada $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$, $M = Me_1 \oplus Me_2$ sea la descomposición de M, lo que nos indica que en este caso, la descomposición del anillo no determina la descomposición de los módulos, como sucedía con los tipos, y ésta es la diferencia principal entre ambas descomposiciones. Sin embargo, podemos probar que localmente, si podemos encontrar idempotentes centrales en el anillo, que producen la descomposición del módulo.

Proposición 3.23.- Sean Q anillo regular autoinyectivo derecho y $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. Entonces existe $\{e_{ij} \mid i = 1, \ldots, n; j = 1, 2\} \subset B(Q)$ único, con los e_{ij} ortogonales y tales que:

i) $\sum e_{ij} = cc(M)$.

ii) Me_{i1} es del tipo $\overline{T}_i$ y $\mathcal{C}$-módulo, para toda i, mientras que Me_{i2} del tipo $\overline{T}_i$ y centralmente $\mathcal{C}$-nulo, para toda i.

En particular, se tiene que:

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n}(Me_{i1} \oplus Me_{i2})$$

es la descomposición de M.

Demostración.- Sea $M = \bigoplus(M_{i,1} \oplus M_{i,2})$ la descomposición de M y sean $e_{ij} = cc(M_{i,j})$. Por la prop.2.9(iii), tenemos que $\vee e_{ij} = cc(M)$ y ya que los submódulos $M_{i,j}$ son totalmente invariantes, entonces $Hom_R(M_\alpha, M_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$; usando la prop.2.9(ii), tenemos que los idempotentes e_{ij} son ortogonales. De aquí que, $\sum e_{ij} = \vee e_{ij} = cc(M)$.

Ahora bien, por la elección de e_{ij} tenemos que $M_{i,j} = M_{i,j}e_{ij}$ y ya que los e_{ij} son ortogonales, se sigue que $Me_{ij} = M_{i,j}$ que es del tipo respectivo.

Suponiendo que existen $\{f_{ij}\} \subset B(Q)$ con las mismas propiedades, entonces $M = Mcc(M) = \bigoplus Mf_{ij}$ y aplicando la unicidad en la descomposición de M, tenemos que $Me_{ij} = Mf_{ij}$, para todas i, j y así, por definición de cubierta central, $e_{ij} - f_{ij} \leq 1 - cc(M)$; pero en vista de que $e_{ij} \leq cc(M)$ y $f_{ij} \leq cc(M)$ vemos que $e_{ij} - f_{ij} = (e_{ij} - f_{ij})(1 - cc(M)) = e_{ij} - f_{ij} - e_{ij}cc(M) + f_{ij}cc(M) = 0$, probando que $e_{ij} = f_{ij}$ para toda i, j.

CAPITULO IV

RELACIONES ENTRE LAS TEORIAS DE TIPOS Y LAS TEORIAS DE TORSION

En este capítulo, seguimos suponiendo que tenemos dada una teoría de tipos $\overline{T}$ como antes. Se definirán las teorías de torsión de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$, para una teoría de torsión $\tau \geq \tau_g$ y se probará que estas clases de teorías de torsión producen una descomposición de la retícula $gen(\tau_g)$ en el sentido de que cada $\tau \geq \tau_g$ se escribe en forma única como intersección de teorías de torsión de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$. La idea de que debe haber un vínculo entre la teoría de tipos y la retícula $gen(\tau_g)$, se sugiere a raíz de algunos resultados que aparecen en [15] y [17]. Uno de los resultados de estos trabajos es el siguiente:

Teorema 4.1.- Si Q es un anillo regular autoinyectivo derecho entonces hay un isomorfismo de retículas:

$$B(Q) \overset{\phi}{\simeq} gen(\tau_g(Q))$$

dado por $\phi(e) = \chi((1-e)Q)$

Ver teorema 4.8 de [17] ó teorema 2 de [15].

Como consecuencia de este teorema y del teorema 1.15 de [9], se obtiene que para cualquier anillo R, la retícula $gen(\tau_g(R))$ es isomorfa a $B(Q)$ para algún anillo regular autoinyectivo derecho Q y por lo tanto, $gen(\tau_g(R))$ es una retícula de Boole.

Como vimos en el capítulo anterior, cada anillo regular autoinyectivo derecho se descompone en forma única como producto directo de anillos regulares autoinyectivos derechos de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$, los cuales están dados por idempotentes centrales del anillo en cuestión. A su vez, debido al teorema anterior, cada idempotente central del anillo, determina en forma única una teoría de torsión $\tau \geq \tau_g$. Esto nos sugiere, que la teoría de tipos para los módulos desarrollada en el capítulo anterior, debe tener un reflejo en la retícula $gen(\tau_g)$. Lo que es más, ya que en el desarrollo de la teoría de tipos para R-módulos inyectivos no singulares no se supuso (en la mayor parte de la teoría) que R sea regular autoinyectivo derecho entonces podemos aplicar dicha teoría a la retícula $gen(\tau_g)$ para cualquier anillo R. Hacemos entonces la siguiente:

Definición 4.2.- Dado un anillo R y $\tau \geq \tau_g$, decimos que τ es una teoría de torsión del tipo $\overline{T}_i$ (para $1 \leq i \leq n$) si existe $M \in Mod-(R, \tau_g)$ del tipo $\overline{T}_i$ tal que $\tau = \chi(M)$.

Considerando el lema 3.12, vemos que la definición es correcta en el sentido de que no es posible que exista $\tau \in gen(\tau_g)$, $\tau \neq \chi$ que sea de más de un tipo a la vez. En efecto, si τ es una teoría de torsión del tipo $\overline{T}_i$ y del tipo $\overline{T}_j$ con $i \neq j$ entonces, por definición, existen $M_i \in Mod-(R, \tau_g)$ y $M_j \in Mod-(R, \tau_g)$ de los tipos $\overline{T}_i$ y $\overline{T}_j$ respectivamente, tales que $\tau = \chi(M_i) = \chi(M_j)$. De acuerdo al lema 3.12, sabemos que $Hom_R(M_i, M_j) = 0$ y por lo tanto, $M_i \in \mathcal{T}_{\chi(M_j)} = \mathcal{T}_{\chi(M_i)}$. De aquí obtenemos que $M_i = 0$ y por lo tanto, $\tau = \chi$. Obsérvese además, que la teoría de torsión χ es del tipo $\overline{T}_i$, para toda $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 4.3.- Para cada $\tau \in gen(\tau_g)$ existen teorías de torsión $\tau_1, \ldots, \tau_n$ únicas de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$ respectivamente, tales que

$$\tau = \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$$

Demostración.- Sea $M \in Mod-(R, \tau_g)$ tal que $\tau = \chi(M)$. Usando el teorema 3.13, tenemos que $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ con M_i del tipo $\overline{T}_i$ para cada i y de aquí que $\tau = \chi(M_1) \wedge \ldots \wedge \chi(M_n)$. Definiendo $\tau_i = \chi(M_i)$, probamos la existencia de la descomposición.

Ahora, supongamos que existe otra descomposición $\tau = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ con $\sigma_i = \chi(N_i)$ donde $N_i \in Mod-(R, \tau_g)$ es del tipo $\overline{T}_i$, para cada i. Ya que $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n \leq \sigma_i$ entonces $N_i \in \mathcal{F}_{\wedge\tau_\alpha}$; por otro lado, sabemos por el lema 3.12 que $Hom_R(N_i, M_j) = 0$ para $i \neq j$ y de aquí que $N_i \in \mathcal{T}_{\tau_j}$ para toda $j \neq i$. Ahora bien, si hacemos $K_i = t_{\tau_i}(N_i)$ entonces $K_i \in \mathcal{T}_{\tau_j}$ para $j = 1, \ldots, n$ y por lo tanto, $K_i \in \mathcal{T}_{\wedge\tau_\alpha}$. Como $K_i \subset N_i$ entonces $K_i \in \mathcal{F}_{\wedge\tau_\alpha}$

y de aquí que $K_i = 0$, probando así que $N_i \in \mathcal{F}_{\tau_i}$ y por lo tanto, $\tau_i \leq \sigma_i$. Invirtiendo los papeles, obtenemos la otra desigualdad, probando así, la unicidad de la descomposición.

Corolario 4.4.- si $\tau \in gen(\tau_g)$ es una teoría de torsión del tipo $\overline{T}_i$, entonces cualquier cogenerador inyectivo de τ es del tipo $\overline{T}_i$.

Demostración.- Sea M_R un cogenerador inyectivo de τ. Según el teorema 3.13, sabemos que $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ con $M_i \in Mod-(R,\tau_g)$ del tipo $\overline{T}_i$ y de aquí que $\tau = \wedge\chi(M_i)$. Por la unicidad en la descomposición del teorema anterior, concluimos que $\chi(M_j) = \chi$ para toda $j \neq i$, de donde $M_j = 0$ para toda $j \neq i$ obteniendo que $M = M_i$ el cual es del tipo $\overline{T}_i$, como queríamos demostrar.

El siguiente punto es probar que las teorías de torsión de un mismo tipo, definen subintervalos de la retícula $gen(\tau_g)$. Más precisamente tenemos:

Proposición 4.5.- Sea R un anillo. Entonces:

i) Si $\tau, \sigma \in gen(\tau_g)$ con $\tau \leq \sigma$ y τ es del del tipo $\overline{T}_i$ entonces σ es del tipo $\overline{T}_i$. En particular, el supremo de cualquier familia de teorías de torsión de un mismo tipo, es del mismo tipo.

ii) Sea $\{\tau_\alpha\} \subset gen(\tau_g)$ con cada τ_α del tipo $\overline{T}_i$. Entonces $\wedge\tau_\alpha$ es del tipo $\overline{T}_i$.

Demostración.- i) Sea $M \in Mod-(R,\tau_g)$ del tipo $\overline{T}_i$ tal que $\tau = \chi(M)$. Por el teorema 4.3, sabemos que $\sigma = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ con $\sigma_j = \chi(K_j)$ del tipo $\overline{T}_j$. Ya que $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \leq \sigma_j, \forall j$ y de aquí que $K_j \in \mathcal{F}_\tau, \forall j$. Pero si $j \neq i$ entonces M y K_j son de tipos distintos, y por lo tanto, por el lema 3.12, tenemos que $K_j \in \mathcal{T}_\tau$: Por lo tanto, $K_j = 0, \forall j \neq i$, obteniendo que $\sigma = \sigma_i$ que es del tipo $\overline{T}_i$.

ii) Hagamos $\tau = \wedge\tau_\alpha$ y sea $\tau = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ la descomposición de τ, con $\sigma_i = \chi(M_i)$, como antes. Nuevamente, $\tau \leq \sigma_j$ implica que $M_j \in \mathcal{F}_\tau, \forall j$; pero si $j \neq i$ entonces $M_j \in \mathcal{T}_{\tau_\alpha}, \forall\alpha$ (nuevamente por el lema 3.12) de donde $M_j \in \mathcal{T}_\tau$ obteniendo que $M_j = 0$, para $j \neq i$ y por lo tanto, $\tau = \sigma_i$ que es del tipo $\overline{T}_i$, como queríamos probar.

Debido a ésta última proposición, podemos definir la menor teoría de torsión del tipo

$\overline{T}_i$, para $i = 1, \ldots, n$, las cuales denotaremos de aquí en adelante por $\tau_{\overline{T}_1}, \tau_{\overline{T}_2}, \ldots, \tau_{\overline{T}_n}$. Nótese además, que la mayor teoría de torsión en cada uno de los tipos, es χ.

Proposición 4.6.- Sea $M \in Mod-(R, \tau_g)$. Entonces M es del tipo $\overline{T}_i$ si y sólo si $M \in \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_i}}$.

Demostración.- Si M es del tipo $\overline{T}_i$ entonces la teoría de torsión $\tau = \chi(M)$ es del tipo $\overline{T}_i$ y así, $\tau \geq \tau_{\overline{T}_i}$ obteniendo que $M \in \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_i}}$.

Recíprocamente, si M es $\tau_{\overline{T}_i}$-libre de torsión entonces, $\chi(M) \geq \tau_{\overline{T}_i}$ y por la proposición anterior, tenemos que $\chi(M)$ es del tipo $\overline{T}_i$. Usando ahora el corolario 4.4, obtenemos que M es del tipo $\overline{T}_i$.

Corolario 4.7.- Si $\{M_\alpha\} \subset Mod-(R, \tau_g)$ es una familia de R-módulos del tipo $\overline{T}_i$ entonces $\prod M_\alpha$ es R-módulo del tipo $\overline{T}_i$.

Demostración.- Como cada M_α es del tipo $\overline{T}_i$ se tiene que M_α es $\tau_{\overline{T}_i}$-libre de torsión y de aquí que $\prod M_\alpha$ es $\tau_{\overline{T}_i}$-libre de torsión. El resultado se sigue entonces, usando la proposición anterior.

Como mencionamos en la sección 2 de los preliminares, cuando R es no singular derecho entonces $\tau_g = \chi(R)$; ésto claramente sugiere, que el tipo de la teoría de torsión de Goldie determinará el tipo del anillo R. En efecto, tenemos:

Teorema 4.8.- Para un anillo regular autoinyectivo derecho Q, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Q es del tipo $\overline{T}_i$,

ii) τ_g es del tipo $\overline{T}_i$,

iii) τ es del tipo $\overline{T}_i$, $\forall \tau \geq \tau_g$.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Es obvio, ya que $\tau_g = \chi(Q)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Ya que $Q \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$ sabemos que existe una descomposición $Q = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ en los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$. De aquí obtenemos que $\tau_g = \chi(I_1) \wedge \ldots \wedge \chi(I_n)$ y por la unicidad dada por el teorema 4.3, tenemos que $\chi(I_j) = \chi, \forall j \neq i$. Se sigue entonces que $Q = I_i$ que es del tipo $\overline{T}_i$.

ii) $\Leftrightarrow$ *iii)* Es obvio, por la prop. 4.5.

En el siguiente teorema, damos una descripción de la descomposición en los tipos para un anillo regular autoinyectivo derecho Q, en términos de teorías de torsión.

Teorema 4.9.- Para un anillo regular autoinyectivo derecho Q, se cumple que:

$$Q \simeq Q/t_{\tau_{\overline{T}_1}}(Q) \times \ldots \times Q/t_{\tau_{\overline{T}_n}}(Q)$$

es su descomposición en anillos regulares autoinyectivos derechos de los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$.

Demostración.- Sea $Q = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ la descomposición de Q, con I_j ideal bilateral del tipo $\overline{T}_j$. En vista de que $Q/\bigoplus_{j\neq i} I_j \simeq I_i \in \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_i}}$, tenemos entonces que $\bigoplus_{j\neq i} I_j$ es $\tau_{\overline{T}_i}$-puro. De esta forma, tenemos:

$$t_{\tau_{\overline{T}_i}}(Q) \subset \bigoplus_{j\neq i} I_j$$

Ahora bien, por el lema 3.12 sabemos que I_j es de $\tau_{\overline{T}_i}$-torsión para cada j y por lo tanto,

$$\bigoplus_{j\neq i} I_j \in \mathcal{T}_{\tau_{\overline{T}_i}}$$

De esta forma, obtenemos la otra contención y por lo tanto, $I_i \simeq Q/t_{\tau_{\overline{T}_i}}(Q)$ para toda $i = 1, \ldots, n$; es claro que este isomorfismo es de anillos.

A continuación, examinamos la relación que guardan entre sí las teorías de torsión ínfimas $\tau_{\overline{T}_1}, \ldots, \tau_{\overline{T}_n}$.

Proposición 4.10.- Las teorías de torsión $\tau_{\overline{T}_i}$ y $\wedge_{j\neq i}\tau_{\overline{T}_j}$ son complementarias en la retícula $gen(\tau_g)$.

Demostración.- Sea $\tau_g = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ la descomposición de la teoría de torsión de Goldie en los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$. Tenemos entonces que:

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \tau_{\overline{T}_j} \geq \tau_g = \bigwedge_{j=1}^{n} \sigma_j \geq \bigwedge_{j=1}^{n} \tau_{\overline{T}_j}$$

y de aquí que:

$$\tau_{\overline{T}_i} \wedge (\bigwedge_{j\neq i} \tau_{\overline{T}_j}) = \tau_g$$

Ahora, sea

$$\sigma = \tau_{\overline{T}_i} \vee (\bigwedge_{j\neq i} \tau_{\overline{T}_j}) = \bigwedge_{j\neq i} (\tau_{\overline{T}_i} \vee \tau_{\overline{T}_j})$$

Ya que $\tau_{\overline{T}_i} \vee \tau_{\overline{T}_j} \geq \tau_{\overline{T}_i}$ entonces $\tau_{\overline{T}_i} \vee \tau_{\overline{T}_j}$ es del tipo $\overline{T}_i$ y de la misma forma, se ve que es del tipo $\overline{T}_j$. Como hicimos notar al principio de éste capítulo, esto implica que $\tau_{\overline{T}_i} \vee \tau_{\overline{T}_j} = \chi$ y de aquí obtenemos que $\sigma = \chi$.

De esta forma, $\tau_{\overline{T}_1}$ y $\tau_{\overline{T}_2} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_n}$ son complementarias en $\langle \tau_g, \chi \rangle$; asimismo, $\tau_{\overline{T}_2}$ y $\tau_{\overline{T}_3} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_n}$ son complementarias en el intervalo $\langle \tau_{\overline{T}_2} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_n}, \chi \rangle$ (la demostración es la misma que la de la proposición anterior), etc. Se sugiere entonces que si consideramos teorías de torsión complementarias en subintervalos $\langle \tau, \chi \rangle$ de $gen(\tau_g)$, éstas darán origen a un teorema de descomposición para los R-módulos derechos inyectivos no singulares que sean τ-libres de torsión. En efecto, tenemos:

Proposición 4.11.- Sean $\tau \geq \tau_g$ y $\sigma_1, \sigma_2 \geq \tau$ teorías de torsión complementarias en el intervalo $\langle \tau, \chi \rangle$. Si $M \in Mod-(R, \tau_g)$ con $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces existen $M_1, M_2 \in Mod-(R, \tau_g)$ únicos tales que $M = M_1 \oplus M_2$ donde $M_1 \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$ y $M_2 \in \mathcal{F}_{\sigma_2}$.

Demostración.- Ya que σ_2 es estable, sabemos por la prop. 1.36 que $M = t_{\sigma_2}(M) \oplus N$ para algún $N \in Mod-(R)$. Así, $N \simeq M/t_{\sigma_2}(M) \in \mathcal{F}_{\sigma_2}$. Ahora bien, si $K = t_{\sigma_1}(t_{\sigma_2}(M))$ entonces $K \in \mathcal{T}_{\sigma_1} \cap \mathcal{T}_{\sigma_2} = \mathcal{T}_{\sigma_1 \wedge \sigma_2} = \mathcal{T}_\tau$; por otro lado, en vista de que $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $K \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{T}_\tau = \{0\}$ y así, $t_{\sigma_2}(M) \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$. Definiendo entonces $M_1 = t_{\sigma_2}(M)$ y $M_2 = N$, probamos la existencia de la descomposición.

Ahora, supongamos que $M = E_1 \oplus E_2$ con $E_1 \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$ y $E_2 \in \mathcal{F}_{\sigma_2}$, y sea $\pi: M \rightarrow E_2$ la proyección canónica. Ya que $M_1 \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$ entonces $M_1 \in \mathcal{T}_{\sigma_2}$; en efecto, sabemos que $M_1/t_{\sigma_2}(M_1) \in \mathcal{F}_{\sigma_2}$ y usando nuevamente la prop. 1.36, tenemos que $t_{\sigma_2}(M_1)$ es sumando directo de M_1 y de aquí que $M_1/t_{\sigma_2}(M_1) \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$. De esta forma, $M_1/t_{\sigma_2}(M_1) \in \mathcal{F}_{\sigma_1} \cap \mathcal{F}_{\sigma_2} = \mathcal{F}_{\sigma_1 \vee \sigma_2} = \{0\}$. Por lo tanto, tenemos que $Hom_R(M_1, E_2) = 0$ y en particular,

$M_1 \subset ker\pi = E_1$. Invirtiendo los papeles, vemos que se da la otra contención; de forma análoga se prueba que $M_2 = E_2$.

Regresando con el estudio de las teorías de torsión ínfimas, tenemos la siguiente descripción de ellas. Antes definimos las siguientes clases de R-módulos:

a) $\mathcal{A}_1$ denota la clase de todos los $M \in Mod-(R,\tau_g)$ tales que M es $\mathcal{C}_1$-módulo.

b) Para $1 < i \leq n$, $\mathcal{A}_i$ denota la clase de todos los $M \in Mod-(R,\tau_g)$ tales que M es $\mathcal{C}_i$-módulo y $M \in \mathcal{T}_{\tau_{\overline{T}_1} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_{i-1}}}$.

Proposición 4.12.- Para cada anillo R, $\tau_{\overline{T}_i} = \chi(\mathcal{A}_i)$.

Demostración.- i) $i = 1$.

Ya que cada $\mathcal{C}_1$-módulo es del tipo $\overline{T}_1$ entonces, por la prop. 4.6 tenemos que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_1}}$ y por lo tanto, $\tau_{\overline{T}_1} \leq \chi(\mathcal{A}_1)$. Supongamos que la desigualdad es estricta y sea $0 \neq E \in \mathcal{T}_{\chi(\mathcal{A}_1)} \cap \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_1}}$; ya que $\chi(\mathcal{A}_1)$ es estable, podemos suponer que E es inyectivo. Como $E \in \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_1}}$ entonces E es del tipo $\overline{T}_1$ y así, por el teorema 3.8, vemos que existe un $\mathcal{C}_1$-módulo $0 \neq K \in L^*(E)$. Pero entonces, $0 \neq K \in \mathcal{T}_{\chi(\mathcal{A}_1)}$ lo cual es una contradicción, probando así la igualdad.

ii) $i > 1$.

Sea $M \in \mathcal{A}_i$ y supongamos que $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ es la descomposición de M en los tipos $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$. Para $j < i$, tenemos que $M_j \in \mathcal{T}_{\tau_{\overline{T}_j}}$ (pues $M_j \subset M \in \mathcal{A}_i$) y $M_j \in \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_j}}$ (por la prop. 4.6) de donde, $M_j = 0$. Para $j > i$, tenemos que M_j es del tipo $\overline{T}_j$ y $\mathcal{C}_i$-módulo; en particular, M_j es $\mathcal{C}_{j-1}$-módulo y usando el teorema 3.8, concluímos que $M_j = 0$. En conclusión, $M = M_i$ que es del tipo $\overline{T}_i$. Por la prop. 4.6, tenemos que $\tau_{\overline{T}_i} \leq \chi(\mathcal{A}_i)$. Suponiendo nuevamente que la desigualdad es estricta, tenemos que existe $0 \neq E \in \mathcal{T}_{\chi(\mathcal{A}_i)} \cap \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_i}}$ y por la estabilidad de $\chi(\mathcal{A}_i)$, podemos suponer que E es inyectivo. Como $E \in \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_i}}$ entonces E es del tipo $\overline{T}_i$ y usando nuevamente el teorema 3.8, tendremos que existe un $\mathcal{C}_i$-módulo $0 \neq K \in L^*(E)$. Ahora bien, $K \subset E \in \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_i}}$ implica que $K \in \mathcal{T}_{\tau_{\overline{T}_1} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_{i-1}}}$ y así, $K \in \mathcal{A}_i$, lo cual es una contradiccón, ya que $K \subset E \in \mathcal{T}_{\chi(\mathcal{A}_i)}$. Por lo tanto, $\tau_{\overline{T}_i} = \chi(\mathcal{A}_i)$ como queríamos probar.

Corolario 4.13.- Un anillo regular autoinyectivo derecho Q es del tipo $\overline{T}_1$ si y sólo si se sumerge en un producto directo de $\mathcal{C}_1$-módulos.

Demostración.- La suficiencia es clara, ya que en tal caso $\tau_g(Q) = \chi(\mathcal{A}_1) = \tau_{\overline{T}_1}$. Para probar la necesidad de la condición, supongamos Q es del tipo $\overline{T}_1$, de donde, $\tau_g(Q) = \tau_{\overline{T}_1} = \chi(\mathcal{A}_1)$, y de aquí que Q se sumerge en un producto directo de Q-submódulos derechos cíclicos de $\mathcal{C}_1$-módulos. Como Q es autoinyectivo derecho, cada Q-módulo derecho cíclico y no singular, es inyectivo y el resultado se obtiene usando la prop. 3.3.

Otra forma de obtener las teorías de torsión ínfimas, es dada en la siguiente proposición. Antes, definimos las siguientes teorías de torsión:

a) Para $i = 0, \ldots, n$ sea $\mathcal{D}_i$ la clase de todos los $M \in Mod-(R, \tau_g)$ tales que M es $\mathcal{C}_i$-módulo y sea $\sigma_i = \chi(\mathcal{D}_i)$.

b) Para $i = 0, \ldots, n-1$ definimos δ_i por recursión como sigue: $\delta_0 = \tau_g$ y para $0 < i \leq n-1$, δ_i es el complemento de $\tau_{\overline{T}_i}$ en el intervalo $\langle \delta_{i-1}, \chi \rangle$.

Proposición 4.14.- Si σ_i y δ_j se definen como arriba entonces:

i) $\tau_{\overline{T}_i} = \delta_{i-1} \vee \sigma_i$, para $1 \leq i \leq n-1$.

ii) $\tau_{\overline{T}_n} = \delta_{n-1}$.

Demostración.- De acuerdo a la definición de δ_i, se cumple que $\delta_i = \tau_{\overline{T}_{i+1}} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_n}$; en efecto, $\delta_0 = \tau_g = \tau_{\overline{T}_1} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_n}$; por definición, δ_1 es el complemento de $\tau_{\overline{T}_1}$ en $\langle \tau_g, \chi \rangle$, que como sabemos, es $\tau_{\overline{T}_2} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_n}$, etc. De ésto, resulta clara la validez del inciso (ii).

Para probar el inciso (i), vemos que de acuerdo a la prop. 4.12(i), $\tau_{\overline{T}_1} = \sigma_1$ y por otro lado, $\delta_0 \vee \sigma_1 = \sigma_1$, obteniendo el resultado para $i = 1$. Supongamos entonces que $1 < i \leq n-1$; por la observación inicial, tenemos que $\delta_{i-1} \leq \tau_{\overline{T}_i}$ y por la prop. 4.12(ii) se sigue que $\sigma_i \leq \tau_{\overline{T}_i}$. De esta forma, $\delta_{i-1} \vee \sigma_i \leq \tau_{\overline{T}_i}$. Suponiendo que la desigualdad es estricta, tenemos que existe $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\tau_{\overline{T}_i}} \cap \mathcal{F}_{\delta_{i-1} \vee \sigma_i}$ y claramente podemos suponer que $M \in Mod-(R, \tau_g)$. Usando el hecho de que $M \in \mathcal{F}_{\sigma_i}$, tenemos que existe $0 \neq N \in L^*(M)$ tal que N es $\mathcal{C}_i$-módulo, y en vista de que $N \in \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}$ entonces $N \in \mathcal{T}_{\tau_{\overline{T}_1} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_{i-1}}}$ (esto se sigue del hecho de que $\delta_{i-1} = \tau_{\overline{T}_i} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_n}$ que es el complemento de $\tau_{\overline{T}_1} \wedge \ldots \wedge \tau_{\overline{T}_{i-1}}$ en

$gen(\tau_g)$). Por lo tanto, de acuerdo a la prop. 4.12(ii), concluímos que $N \in \mathcal{F}_{\tau_{\overline{T}_i}}$ lo cual es una contradicción.

Con ayuda de ésta última proposición, podemos dar una justificación de la condición (iii) de la definición de teoría de tipos, la cual establece que $\forall i = 1, \ldots n$ existe Q anillo regular autoinyectivo derecho tal que $\sigma_{i-1} > \sigma_i$. Para $i = 1$, tenemos que $\chi > \tau_{\overline{T}_1}$ de donde, $Q/t_{\tau_{\overline{T}_1}}(Q) \neq 0$, lo que nos indica que el factor del tipo $\overline{T}_1$ en Q es distinto de 0. Para $i > 1$, tenemos que $\tau_{\overline{T}_i} = \delta_{i-1} \vee \sigma_i < \delta_{i-1} \vee \sigma_{i-1} = \chi$ y nuevamente vemos que el factor del tipo $\overline{T}_i$ en Q es distinto de 0. En resumen, la condición 3.5(iii) nos garantiza la existencia de anillos distintos de 0 de cada uno de los tipos.

Recíprocamente, suponiendo que Q es anillo del tipo $\overline{T}_i$ distinto de 0 entonces $\tau_g(Q) = \tau_{\overline{T}_i} = \delta_{i-1} \vee \sigma_i$ de donde $\delta_{i-1} = \tau_g = \sigma_i$; suponiendo que $\sigma_{i-1} = \sigma_i$ entonces $\tau_{\overline{T}_{i-1}} = \delta_{i-2} \vee \sigma_{i-1} \leq \delta_{i-1} \vee \tau_g = \tau_g$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la existencia de anillos distintos de 0 de cada uno de los tipos es equivalente a 3.5(iii).

CAPITULO V

APLICACIONES A LA ESTRUCTURA DE LOS ANILLOS REGULARES AUTOINYECTIVOS

En este capítulo, daremos algunas aplicaciones de la teoría desarrollada en los capítulos III y IV, a la estructura de los anillos regulares autoinyectivos. Como es lógico, la primera aplicación que veremos es la teoría de estructura de Kaplansky, ya que ésta es la base de nuestra teoría general de tipos.

Sean $\mathcal{Ab}$ la clase de todos los anillos regulares autoinyectivos derechos abelianos y $\mathcal{D}f$ la clase de todos los anillos regulares autoinyectivos derechos directamente finitos. Es claro que estas clases son cerradas bajo isomorfismos y bajo productos directos. Esto, junto con las proposiciones 2.3 y 2.6 nos garantizan que ambas constituyen una clase $\mathcal{TT}$. En este caso, $M \in Mod-(R, \tau_g)$ es $\mathcal{Ab}$-módulo si y solo si M es abeliano y es $\mathcal{D}f$ -módulo si y solo si es directamente finito; además, por la prop. 2.6(i) tenemos que $\mathcal{Ab} \subset \mathcal{D}f$. Como mencionamos en el capítulo anterior, la condición (iii) de la definición 3.5 es impuesta únicamente para garantizar que existan anillos de los tipos $\overline{T}_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Así, la existencia de anillos de los tipos I, II y III, junto con lo expuesto arriba, nos dice que la familia:

$$\mathcal{K} = \{0, \mathcal{Ab}, \mathcal{D}f, \mathcal{RA}\}$$

es una teoría de tipos, la cual llamaremos Teoría de Tipos de Kaplansky. Es claro que en este caso, los anillos de los tipos $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ y $\mathcal{K}_3$, son exactamente los anillos de los tipos I, II y III, respectivamente.

Al considerar $\mathcal{C} = \mathcal{D}f$, vemos que un anillo regular autoinyectivo derecho es centralmente $\mathcal{C}$-nulo si y sólo si es puramente infinito. Así, la teoría de tipos $\mathcal{K}$ y la clase $\mathcal{D}f$ inducen la conocida descomposición de Kaplansky, en los tipos I_f, I_∞, II_f, II_∞ y III. Pero, como fue anotado en el capítulo anterior, podemos considerar cualquier clase

TT, por ejemplo $\mathcal{C} = \mathcal{Ab}$ para obtener descomposiciones diferentes (al tomar $\mathcal{C} = \mathcal{Ab}$, obtenemos que cada anillo regular autoinyectivo derecho se escribe en forma única como $Q = Q_1 \times Q_2$ donde Q_1 es abeliano y Q_2 no tiene idempotentes centrales abelianos distintos de 0 (ver prop 13.14 de [8])).

Para la Teoría de Tipos de Kaplansky, las teorías de torsión ínfimas serán denotadas por τ_I, τ_{II} y τ_{III}, respectivamente.

Por la prop. 2.7 [14], sabemos que $\overline{\tau}_g = \chi(\{S \in Simp - R \mid S \text{ es proyectivo}\}) = \wedge\{\chi(S) \mid S \in Simp - R,\ S \text{ proyectivo}\}$; en vista de que cada $S \in Simp - R$ proyectivo es claramente abeliano, concluimos por la prop 4.5, que $\overline{\tau}_g$ es una teoría de torsión del tipo I y así, $\tau_I \leq \overline{\tau}_g$. En general, no siempre es válida la igualdad, como el siguiente ejemplo demuestra.

Ejemplo 1:

Sea $R = \mathbf{Z}_2^{\mathbf{N}}/\mathbf{Z}_2^{(\mathbf{N})}$, donde $\mathbf{Z}_2$ denota el anillo de los enteros módulo 2. Hacemos las siguientes observaciones:

i) R es un anillo de Boole. En particular, R es un anillo regular conmutativo.

ii) Si $\overline{x} = \overline{(x_n)} \in R$ entonces $\overline{x} = \overline{0}$ ó $x_n = 1$ para un número infinito de $n \in \mathbf{N}$.

iii) R es anillo autoinyectivo.

Debido al corolario 3.5, cap. XII de [19], es suficiente ver que $B(R) = R$ es una retícula completa, y para ello, basta ver que existen los ínfimos arbitrarios.

Sea $\{\overline{x}_\alpha\} \subset R$; definimos $\overline{e} = \overline{(e_n)} \in R$ como sigue:

$$e_n = \begin{cases} 0 & \text{si existe } \alpha \text{ tal que } (\overline{x}_\alpha)(n) = 0; \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos entonces que:

$$e_n = 1 \Rightarrow \overline{x}_\alpha(n) = 1, \forall\alpha \Rightarrow e_n \cdot \overline{x}_\alpha(n) = 1 = e_n, \forall\alpha,$$

$$e_n = 0 \Rightarrow e_n \cdot \overline{x}_\alpha(n) = 0 = e_n, \forall\alpha.$$

Por lo tanto, $\overline{e} \cdot \overline{x}_\alpha = \overline{e}, \forall\alpha$, de donde $\overline{e} \leq \overline{x}_\alpha, \forall\alpha$.

Si $\overline{f} = \overline{(f_n)} \in R$ es tal que $\overline{f} \leq \overline{x}_\alpha, \forall\alpha$ entonces $\overline{f} = \overline{f} \cdot \overline{x}_\alpha, \forall\alpha$. Así, si $n > 0$ tenemos que:

$$f_n = 0 \Rightarrow f_n \cdot e_n = 0 = f_n,$$

$$f_n = 1 \Rightarrow 1 = f_n \cdot \overline{x}_\alpha(n), \forall\alpha \Rightarrow \overline{x}_\alpha(n) = 1, \forall\alpha,$$

$$\Rightarrow e_n = 1 \Rightarrow f_n \cdot e_n = 1 = f_n.$$

Por lo tanto, $\overline{e} \cdot \overline{f} = \overline{f}$, de donde, $\overline{f} \leq \overline{e}$.

De esta forma, hemos probado que $\overline{e} = \wedge\{\overline{x}_\alpha\}$.

iv) R no es producto directo de anillos primos.

Por el corolario 9.11 de [8], es suficiente ver que R no es una retícula atómica. De hecho, veremos que R no tiene átomos. En efecto, sea $\overline{0} \neq \overline{x} = \overline{(x_n)} \in R$; por la observación (ii), sabemos que hay una infinidad de $n > 0$ tal que $x_n = 1$, los cuales podemos ordenar como $\{x_{n_k}\}$. Si definimos $\overline{y} = \overline{(y_n)} \in R$ como:

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n = 0 \text{ ó } n = n_k \text{ con } k \text{ par;} \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces es claro que $\overline{y} \neq \overline{0}$ y $\overline{y} \cdot \overline{x} = \overline{y}$, de donde, $\overline{y} < \overline{x}$. Por lo tanto, $\overline{x}$ no es un átomo de R.

v) $\tau_I < \overline{\tau}_g$.

En efecto, ya que R es anillo de Boole entonces R es abeliano y de aquí que R es del tipo I. Por el teorema 4.8, tenemos que $\tau_g = \tau_I$. Si $\tau_I = \overline{\tau}_g$ entonces, usando el teorema 5.8 de [17], tenemos que R es producto directo de anillos lineales completos derechos, lo cual contradice la observación (iv). Por lo tanto, $\tau_I < \overline{\tau}_g$; pero de hecho podemos probar que $\overline{\tau}_g = \chi$, ya que si $\overline{\tau}_g < \chi$ entonces, como el intervalo $\langle \overline{\tau}_g, \chi \rangle$ es atómico, se sigue (usando el teorema 4.1) que R contiene átomos, lo cual contradice lo demostrado en el punto (iv).

Habiendo ubicado a la teoría de torsión τ_I, pasamos a ubicar a las otras dos teorías de torsión ínfimas τ_{II} y τ_{III}.

Proposición 5.1.- $\tau_g \vee \tau_{sp} \leq \tau_{II} \wedge \tau_{III}$. En particular, tenemos que $\tau_{II}, \tau_{III} \in \langle \tau_g \vee \tau_{sp}, \chi \rangle$.

Demostración.- Si $S \in Simp - R$ es proyectivo entonces S es abeliano. Por el lema 3.12, sabemos entonces que $S \in \mathcal{T}_{\tau_{II}} \cap \mathcal{T}_{\tau_{III}} = \mathcal{T}_{\tau_{II} \wedge \tau_{III}}$. De esta forma, $\tau_{sp} = \xi(\{S \in Simp - R \mid S \text{ es proyectivo}\}) \leq \tau_{II} \wedge \tau_{III}$, obteniendo el resultado.

Observación:

Considerando el anillo del ejemplo anterior, sabemos que $\tau_I < \overline{\tau}_g$; en vista de que τ_I y $\tau_{II} \wedge \tau_{III}$ son teorías de torsión complementarias en $gen(\tau_g)$ (por la prop.4.10) y teniendo en cuenta que $\tau_g \vee \tau_{sp}$ es el complemento de τ_g, concluímos entonces que, en este caso, $\tau_g \vee \tau_{sp} < \tau_{II} \wedge \tau_{III}$.

Proposición 5.2.- Sea $U = \{\sigma \geq \tau_g \vee \tau_{sp} \mid \sigma \text{ es del tipo I}\}$. Entonces:

i) $\wedge U$ y $\tau_{II} \wedge \tau_{III}$ son teorías de torsión complementarias en el intervalo $\langle \tau_g \vee \tau_{sp}, \chi \rangle$.

ii) $\tau_I = (\wedge U) \wedge \overline{\tau}_g$.

Demostración.- i) Sea $\tau_g \vee \tau_{sp} = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$ la descomposición de $\tau_g \vee \tau_{sp}$ en los tipos I, II y III respectivamente. Tenemos entonces que:

$$(\wedge U) \wedge \tau_{II} \wedge \tau_{III} \geq \tau_g \vee \tau_{sp} = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \geq (\wedge U) \wedge \tau_{II} \wedge \tau_{III}$$

y por lo tanto, $\tau_g \vee \tau_{sp} = (\wedge U) \wedge (\tau_{II} \wedge \tau_{III})$.

Ahora, $(\wedge U) \vee \tau_{II} \geq \wedge U$ y $\wedge U$ es teoría de torsión del tipo I. Por la prop. 4.5, concluímos que $(\wedge U) \vee \tau_{II}$ es del tipo I. Por la misma razón, $(\wedge U) \vee \tau_{II}$ es del tipo II y así, vemos que $(\wedge U) \vee \tau_{II} = \chi$. Análogamente se tiene que $(\wedge U) \vee \tau_{III} = \chi$. Por lo tanto, tenemos que:

$$(\wedge U) \vee (\tau_{II} \wedge \tau_{III}) = ((\wedge U) \vee \tau_{II}) \wedge ((\wedge U) \vee \tau_{III}) = \chi$$

ii) Por la prop. 4.10, sabemos que $\tau_g = \tau_I \wedge \tau_{II} \wedge \tau_{III}$. Por otro lado, sabemos que $\tau_g = \overline{\tau}_g \wedge (\tau_g \vee \tau_{sp}) = \overline{\tau}_g \wedge (\wedge U) \wedge \tau_{II} \wedge \tau_{III}$. Como $\tau_g \wedge (\wedge U)$ es del tipo I, podemos usar la unicidad dada por el teorema 4.3, para concluir que $\tau_I = \overline{\tau}_g \wedge (\wedge U)$.

Ya que $\overline{\tau}_g$ y $\tau_g \vee \tau_{sp}$ son teorías de torsión complementarias en $gen(\tau_g)$, sabemos que $\langle \tau_g \vee \tau_{sp}, \chi \rangle \overset{\varphi}{\simeq} \langle \tau_g, \overline{\tau}_g \rangle$, donde $\varphi(\tau) = \overline{\tau}_g \wedge \tau$; el inciso (ii) de la proposición anterior nos dice entonces que τ_I es la imagen de $\wedge U$ bajo φ y de aquí que tenemos el siguiente:

Corolario 5.3.- Si $U = \{\sigma \geq \tau_g \vee \tau_{sp} \mid \sigma \text{ es del tipo I}\}$ entonces hay un isomorfismo de retículas:

$$\langle \wedge U, \chi \rangle \overset{\varphi}{\simeq} \langle \tau_I, \overline{\tau}_g \rangle$$

dado por $\varphi(\sigma) = \overline{\tau}_g \wedge \sigma$.

Un punto importante a considerar, es el de los átomos de la retícula $gen(\tau_g)$. Sabemos, por la prop. 1.37, que si M_R es τ_g-cocrítico entonces $\sigma = \tau_g \vee \xi(M)$ es un átomo de $gen(\tau_g)$. Nos interesa dar caracterizaciones de los módulos τ_g-cocríticos. Antes probamos el siguiente:

Lema 5.4.- Sea M_R no singular. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M_R es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo.

ii) $\chi(M)$ es un coátomo de la retícula de teorías de torsión.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ La hipótesis y la estabilidad de $\tau_g \vee \xi(M)$ implican que $\tau_g \vee \xi(M) = \tau_g \vee \xi(E(M))$. Por otro lado, es fácil ver que el complemento de $\tau_g \vee \xi(E(M))$ es $(\tau_g \vee \xi(E(M)))' = \chi(E(M))$ y así, en caso de que $\chi > \sigma \geq \chi(M)$ entonces $\tau_g < \sigma' \leq \chi(M)' = \tau_g \vee \xi(M)$, de donde, $\sigma' = \chi(M)'$, equivalentemente, $\sigma = \chi(M)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Supongamos que $\tau_g < \sigma \leq \tau_g \vee \xi(E(M))$, entonces $\chi > \sigma' \geq \chi(E(M)) = \chi(M)$. Usando la hipótesis, tenemos que $\sigma' = \chi(E(M))$, equivalentemente, $\sigma = \tau_g \vee \xi(E(M))$. En conclusión, se ha probado que $E(M)$ es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo, de donde, M es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo.

En el siguiente teorema, obtenemos diversas caracterizaciones de los módulos τ_g-cocríticos, aunque en esta ocasión requerimos que el anillo sea regular autoinyectivo derecho.

Teorema 5.5.- Sea Q anillo regular autoinyectivo derecho y sea $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M_Q es simple proyectivo.

ii) M_Q es τ_g-cocrítico.

iii) M_Q es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo inyectivo y abeliano.

iv) M_Q es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo y $\chi(M)$ es del tipo I.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Obvio.

$ii) \Rightarrow i)$ Sea $0 \neq x \in M$. Como xQ es Q-módulo derecho finitamente generado y no singular, y Q es autoinyectivo derecho, entonces xQ es inyectivo (por la prop.1.13). De este modo, $M = xQ \oplus N$ para algún $N \in Mod - Q$, de donde, M/xQ es no singular. Por otro lado, tomando en cuenta que M es τ_g-cocrítico y $0 \neq xQ \subset M$ tenemos que $M/xQ \in \mathcal{T}_{\tau_g}$. En conclusión, vemos que $M = xQ$ para cada $0 \neq x \in M$, de donde, M_Q es simple. Finalmente, ya que M es no singular entonces es claro que M_Q debe ser proyectivo.

i) $\Rightarrow$ *iii*) Obvio.

iii) $\Rightarrow$ *ii*) Por definición, si M_Q es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo entonces M_Q es no singular. Ahora, sea $0 \neq N \subset M$ y sea K la τ_g-purificación de N en M. Ya que $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$ y K es $\mathcal{G}$-cerrado en M, se sigue por la prop. 1.4 que $K \oplus H = M$ para algún $H \in Mod - Q$. Como $K \cap H = 0$, $K, H \in L^*(M)$ y por hipótesis M es inyectivo no singular abeliano, se sigue por el teorema 2.2, que $Hom_R(H, K) = 0$, de donde, $H \in \mathcal{T}_{\chi(K)}$. Por otro lado, en vista de que $0 \neq K \subset M$ y M es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo, tenemos por la prop. 1.39, que $\chi(K) = \chi(M)$. De esta forma, tenemos que $H \in \mathcal{T}_{\chi(M)}$, obteniendo que $H = 0$.

Hemos probado entonces que para todo submódulo $0 \neq N \subset M$, M es la τ_g-purificación de N en M. Claramente esto implica que M es τ_g-cocrítico.

i) $\Rightarrow$ *iv*) Obvio.

iv) $\Rightarrow$ *i*) Como hicimos notar con anterioridad, la condición de que M sea τ_g-$\mathcal{A}$-módulo, es equivalente a la de que $\chi(M)$ sea un coátomo. Sabemos además que si M es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo entonces $E(M)$ es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo. Como por hipótesis, $\chi(M)$ es del tipo I, tenemos entonces, por el corolario 4.4, que $E(M)$ es Q-módulo inyectivo no singular del tipo I. Usando el teorema 3.8, vemos que existe $0 \neq S \in L^*(E(M))$ con S abeliano, y entonces (por la prop. 1.39) S es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo inyectivo y abeliano. Por lo probado anteriormente, tenemos que S es simple proyectivo. Ahora bien, suponiendo que $E(M)$ no es simple entonces, en vista de que es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo, tenemos que $\tau_g \vee \xi(E(M)) \in \langle \tau_g, \overline{\tau}_g \rangle$ (ver teorema 4.14 de [17]) y de aquí que $\chi(E(M)) \geq \tau_g \vee \tau_{sp}$. Por otro lado, $\chi(S) = \chi(E(M))$ y así, $\chi(S) \geq \tau_g \vee \tau_{sp}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $E(M)$ es simple proyectivo y lo mismo es cierto para M.

Corolario 5.6.- Para un anillo regular autoinyectivo derecho Q el intervalo $\langle \wedge U, \chi \rangle$ donde U se define como en la prop. 5.2, no contiene coátomos (y por lo tanto, tampoco contiene átomos).

Demostración.- Supongamos que $\sigma \in (\wedge U, \chi)$ es un coátomo, y sea M tal que $\sigma = \chi(M)$. Ya que $\chi(M)$ es coátomo, M es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo y como $\chi(M) \geq \wedge U$ entonces $\chi(M)$ es del tipo I. Por el teorema anterior, concluímos que M es simple proyectivo, lo cual es una contradicción, ya que $\chi(M) = \sigma \geq \tau_g \vee \tau_{sp}$.

Corolario 5.7.- Si Q es un anillo regular autoinyectivo derecho el cual es un producto directo de anillos primos entonces $\tau_I = \overline{\tau}_g$.

Demostración.- Ya que Q es un producto directo de anillos primos, sabemos por el corolario 9.11 de [S] que $B(Q)$ es una retícula atómica y así, por el teorema 4.1, tenemos que la retícula $gen(\tau_g(Q))$ es atómica.

El corolario anterior implica que $\wedge U = \chi$; usando ahora el corolario 5.3, concluímos que $\tau_I = \overline{\tau}_g$, como queríamos demostrar.

Para las posteriores aplicaciones, el siguiente lema nos será de gran utilidad.

Lema 5.8.- Sea $M \in Mod-(R, \tau_g)$ y sea $\{R_\alpha\}$ una familia de anillos tal que $\prod R_\alpha \overset{\varphi}{\simeq} End_R(M)$. Si $i_\alpha : R_\alpha \rightarrow \prod R_\alpha$ denota la inclusión, $f_\alpha = \varphi(e_\alpha)$ donde $e_\alpha = i_\alpha(1)$ y $M_\alpha = f_\alpha(M)$ entonces:

i) $R_\alpha \simeq End_R(M_\alpha)$, para toda α.

ii) $\{M_\alpha\} \subset L^*(M)$ es una familia independiente y cada M_α es totalmente invariante en M. En particular, la familia $\{M_\alpha\}$ es homológicamente independiente.

iii) $M = E(\bigoplus M_\alpha)$.

Demostración.- Obsérvese primero que $\{f_\alpha\}$ es una familia de idempotentes centrales y ortogonales de $T = End_R(M)$.

i) Sea $\varphi_\alpha : R_\alpha \rightarrow End_R(M_\alpha)$ tal que $\varphi_\alpha(r)(x) = \varphi(i_\alpha(r))(x)$; φ_α está bien definida, ya que si $x \in M_\alpha$ entonces $x = f_\alpha(m)$ para algún $m \in M$, de aquí que $\varphi_\alpha(r)(x) = \varphi(i_\alpha(r)) \cdot f_\alpha(m) = f_\alpha \cdot \varphi(i_\alpha(r))(m) \in M_\alpha$. Es fácil ver que $\varphi_\alpha(r)$ es R-homomorfismo; asimismo es fácil probar que φ_α es homomorfismo de anillos.

Ahora bien, $\varphi_\alpha(r) = 0$ implica que $\varphi(i_\alpha(r))(x) = 0, \forall x \in M_\alpha$; por otro lado, tenemos que:

$$\varphi(i_\alpha(r)) \cdot (1 - f_\alpha) = \varphi(i_\alpha(r)) \cdot [\varphi(1, \ldots) - \varphi(0, \ldots, 1_\alpha, \ldots)]$$
$$= \varphi(0, \ldots, r_\alpha, \ldots) \cdot \varphi(1, 1, \ldots, 0_\alpha, \ldots) = 0$$

De esta forma, $\varphi(i_\alpha(r))(x) = \varphi(i_\alpha(r))(f_\alpha(x) + (1 - f_\alpha)(x)) = 0$, para toda $x \in M$ y así, $\varphi(i_\alpha(r)) = 0$. Como φ es inyectivo entonces $r = 0$.

Por otro lado, si $f \in End_R(M_\alpha)$ entonces existe $\overline{f} \in End_R(M)$ tal que $\overline{f}\mid_{M_\alpha} = f$; a su vez, existe $(r_\alpha) \in \prod R_\alpha$ tal que $\varphi(r_\alpha) = \overline{f}$ y se afirma que $\varphi_\alpha(r_\alpha) = f$. En efecto, si $x \in M_\alpha$ entonces:

$$f(x) = \overline{f}(x) = \varphi((r_\alpha))(x) = \varphi((r_\alpha)) \cdot (f_\alpha(x)) = \varphi(i_\alpha(r_\alpha))(x) = \varphi_\alpha(r_\alpha)(x)$$

Por lo tanto, hemos probado que φ_α es isomorfismo de anillos, para cada α.

ii) Supongamos que $0 = x_1 + \ldots + x_k$ con $x_i \in M_{\alpha_i}$; para cada i tenemos que $0 = f_{\alpha_i}(x_1 + \ldots + x_k) = f_{\alpha_i}(x_i) = x_i$, obteniendo el resultado. Como $f_\alpha \in B(T)$ entonces es claro que cada M_α es un submódulo cerrado y totalmente invariante en M.

iii) En vista de que cada $M_\alpha \subset M$ es totalmente invariante entonces $\bigoplus M_\alpha \subset M$ es totalmente invariante. Sea $K \subset M$ tal que $E(\bigoplus M_\alpha) \oplus K = M$, y sea $e \in B(T)$ tal que $K = eM$. Ya que φ es suprayectiva, $e = \varphi((r_\alpha))$ para algún $(r_\alpha) \in \prod R_\alpha$ y del hecho de que φ es isomorfismo, se sigue que (r_α) es idempotente central.

Para β fija, definimos $(r'_\alpha) \in \prod R_\alpha$ como sigue:

$$r'_\alpha = \begin{cases} r_\alpha & \text{para } \alpha \neq \beta; \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Si $f = \varphi((r'_\alpha))$ entonces $f \in B(T)$; tenemos entonces que:

$$e \cdot f = e \cdot (e - \varphi(0, \ldots, r_\beta, \ldots)) = e - e \cdot \varphi(0, \ldots, r_\beta, \ldots) = e$$

ya que $e \cdot \varphi(0, \ldots, r_\beta, \ldots)(M) = \varphi(0, \ldots, r_\beta, \ldots) \cdot eM = f_\alpha \cdot \varphi(0, \ldots, r_\beta, \ldots) \cdot eM \subset E(\bigoplus M_\alpha)$ y por otro lado, $e \cdot \varphi(0, \ldots, r_\beta, \ldots)(M) \subset eM = K$. Pero también tenemos que:

$$e \cdot f = \varphi((r_\alpha)) \cdot \varphi((r'_\alpha)) = \varphi((r_\alpha) \cdot (r'_\alpha)) = \varphi((r'_\alpha)) = f$$

De esta forma hemos probado que $e = f$, de donde, $(r_\alpha) = (r'_\alpha)$ lo que implica que $r_\beta = 0$. Ya que β se eligió fija pero arbitraria, concluímos que $e = 0$ y así, $M = E(\bigoplus M_\alpha)$ como queríamos probar.

El siguiente teorema nos proporciona ejemplos de clases TT. Usaremos la siguiente notación:

Dada una clase $\mathcal{X}$ de anillos regulares autoinyectivos derechos, $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ denota la clase de todos los anillos que son isomorfos a un producto directo de miembros de $\mathcal{X}$.

Teorema 5.9.- Sea $\mathcal{X}$ una clase de anillos regulares autoinyectivos derechos tal que para cada anillo R y $M \in Mod-(R, \tau_g)$ se cumple la condición:

$(*)$ $$End_R(M) \in \mathcal{X} \Rightarrow End_R(N) \in \mathcal{X}, \forall N \in L^*(M)$$

Entonces $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ es una clase TT.

Demostración.- Por construcción de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$, es claro que es cerrada bajo isomorfismos y productos directos. Sea R un anillo y $M \in Mod-(R, \tau_g)$ tal que $End_R(M) \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, es decir, tal que $End_R(M) \simeq \prod R_\alpha$ con $R_\alpha \in \mathcal{X}$. Por el lema anterior, sabemos que hay una familia $\{M_\alpha\} \subset L^*(M)$ de submódulos totalmente invariantes, independiente, tal que $End_R(M_\alpha) \simeq R_\alpha$ y además $E(\bigoplus M_\alpha) = M$.

Si $N \in L^*(M)$ denotemos por $\pi: M \to N$ a la proyección canónica, y para cada α sea $N_\alpha = \pi(M_\alpha)$. Se afirma entonces que :

i) $N = E(\bigoplus N_\alpha)$.

ii) $Hom_R(N_\alpha, N_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

iii) $End_R(N_\alpha) \in \mathcal{X}$ para toda α.

En efecto, ya que M_α es totalmente invariante, se tiene que $N_\alpha \subset M_\alpha$ y de aquí que $\{N_\alpha\}$ es familia independiente. Si $0 \neq x \in N$ entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq x \cdot r = x_1 + \ldots + x_k \in \bigoplus M_\alpha$ y aplicando la proyección π, tenemos que $x \cdot r = \pi(x \cdot r) = \pi(x_1) + \ldots \pi(x_k) \in \bigoplus N_\alpha$. Hemos probado entonces el inciso (i).

Sea $f: N_\alpha \to N_\beta$ un morfismo y $\overline{f}: M_\alpha \to M_\beta$ una extensión de f, puesto que $\{M_\alpha\}$ es una familia homológicamente independiente, obtenemos (ii).

Ya que $M, N \in Mod-(R, \tau_g)$, tenemos por la prop. 1.6, que $N_\alpha = \pi(M_\alpha) \in L^*(N)$ y así, por la propiedad $(*)$ de $\mathcal{X}$, tenemos que $End_R(N_\alpha) \in \mathcal{X}$, obteniendo (iii).

Finalmente, usando el inciso (i), tenemos que N es el coproducto de la familia $\{N_\alpha\}$ en la categoría $Mod-(R, \tau_g)$, lo cual junto con los incisos (ii) y (iii) implica que:

$$End_R(N) \simeq \prod End_R(N_\alpha) \in \mathcal{C}(X)$$

Consideremos la clase X de todos los anillos con división. En el siguiente teorema caracterizamos a los módulos $M \in Mod-(R, \tau_g)$ tales que $End_R(M) \in X$.

Teorema 5.10.- Sea $0 \neq M \in Mod-(R, \tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $End_R(M)$ es un anillo con división,

ii) M_R es τ_g-cocrítico.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Ya que $Mod-(R, \tau_g(R)) = Mod-(Q, \tau_g(Q))$ donde Q es el anillo máximo de cocientes derecho de $R/t_{\tau_g}(R)$ entonces $End_R(M) = End_Q(M)$. Probaremos que M_Q es simple. Si $0 \neq x \in M$ entonces xQ es Q-módulo no singular y finitamente generado, y por lo tanto, ya que Q es autoinyectivo derecho, se sigue que xQ es inyectivo. Sea K_Q tal que $xQ \oplus K = M$, ya que M_Q es abeliano entonces $Hom_Q(xQ, K) = 0$, de donde, $End_Q(M) \simeq End_Q(xQ) \times End_Q(K)$. De esto se sigue que $K = 0$, es decir $xQ = M$. Ya que M_Q es simple y no singular, es claro entonces que M_R es τ_g-cocrítico.

$ii) \Rightarrow i)$ Es claro, ya que M_R τ_g-cocrítico implica que M_Q es simple.

Como un corolario inmediato, tenemos que la clase X cumple con la propiedad $(*)$ y por lo tanto, $\mathcal{C}(X)$ es una clase TT, la que denotaremos de aquí en adelante por $\mathcal{D}$.

Teorema 5.11.- Un anillo regular autoinyectivo derecho Q es centralmente $\mathcal{D}$-nulo si y solo si no tiene ideales bilaterales mínimos como ideales derechos.

Demostración.- Supongamos que $I \subset Q$ es un ideal bilateral tal que I_Q es ideal mínimo. Ya que I_Q es finitamente generado y no singular entonces es inyectivo y por lo tanto, I es un ideal cerrado distinto de 0 de Q, totalmente invariante y tal que I_Q es $\mathcal{D}$-módulo, probando así que Q no es centralmente $\mathcal{D}$-nulo.

Ahora supongamos que existe $0 \neq I \in L^*(Q_Q)$ totalmente invariante y $\mathcal{D}$-módulo. Por el lema 5.8, $I = E(\bigoplus I_\alpha)$ donde $I_\alpha \in L^*(I_Q)$ es totalmente invariante y $End_Q(I_\alpha)$ es anillo con división. De esta forma, tenemos que $I_\alpha \subset Q$ es un ideal bilateral distinto de 0 tal que $(I_\alpha)_Q$ es ideal mínimo.

Corolario 5.12.- Cada anillo regular autoinyectivo derecho Q se escribe en forma única como $Q = Q_1 \times Q_2$ donde Q_1 es isomorfo a un producto directo de anillos con división y Q_2 no tiene ideales bilaterales. mínimos como ideales derechos.

Demostración.- Se sigue de 3.21 y 5.11.

El siguiente paso es determinar la teoría de torsión $\tau_{\overline{\mathcal{D}}_1}$. Recordemos que para un anillo R, $\widetilde{\tau}_g$ denota a la teoría de torsión cogenerada por los R-módulos τ_g-cocríticos (ver cap.III en [17]).

Proposición 5.13.- $\widetilde{\tau}_g = \tau_{\overline{\mathcal{D}}_1}$.

Demostración.- Recordemos que de acuerdo a la prop. 4.12(i), $\tau_{\overline{\mathcal{D}}_1}$ está cogenerada por la clase de todos los $\mathcal{D}$-módulos.

Si M es τ_g-cocrítico entonces $E(M)$ es τ_g-cocrítico. Por el teorema 5.10, tenemos que $E(M)$ es $\mathcal{D}$-módulo y así, $\widetilde{\tau}_g \geq \tau_{\overline{\mathcal{D}}_1}$. Ahora si $M \in Mod-(R, \tau_g)$ es $\mathcal{D}$-módulo entonces $M = E(\bigoplus M_\alpha)$ con M_α τ_g-cocrítico y por lo tanto $M \in \mathcal{F}_{\widetilde{\tau}_g}$ con lo cual, obtenemos la igualdad.

De acuerdo al teorema 5.5 cuando Q es anillo regular autoinyectivo derecho se tiene que $\widetilde{\tau}_g = \overline{\tau}_g$. Por otro lado, por el teorema 5.8 de [17], tenemos que $\tau_g = \overline{\tau}_g$ si y solo si Q es isomorfo a un producto directo de anillos lineales completos derechos. Así, usando el teorema 4.8, tenemos que Q es del tipo $\overline{\mathcal{D}}_1$ si y solo si Q es isomorfo a un producto directo de anillos lineales completos derechos. Además, por definición un anillo regular autoinyectivo derecho Q es del tipo $\overline{\mathcal{D}}_2$ si y solo si no tiene $\mathcal{D}$-submódulos cerrados distintos de 0, lo cual claramente es equivalente a que $soc(Q_Q) = 0$. De esta forma, de acuerdo al corolario 3.14 tenemos que:

Teorema 5.14.- Cada anillo regular autoinyectivo derecho Q se escribe en forma única como $Q = Q_1 \times Q_2$ donde Q_1 es isomorfo a un producto directo de anillos lineales completos derechos y $soc(Q_2) = 0$.

En este punto, podemos dar un ejemplo de una clase TT tal que $\overline{\mathcal{C}} = \{0, \mathcal{C}, \mathcal{RA}\}$ no es una teoría de tipos.

Ejemplo 2:

De acuerdo al corolario 3.9(i), la clase de los anillos regulares autoinyectivos derechos del tipo $\overline{\mathcal{D}}_2$ cumple la propiedad $(*)$ y ya que claramente es cerrada bajo isomorfismos y productos directos, forma una clase TT, que según vimos, consta de todos los anillos regulares autoinyectivos derechos Q tales que $soc(Q) = 0$. Denotémosla por Y. Si X denota nuevamente a la clase de todos los anillos con división entonces, es claro que $X \cup Y$ satisface la propiedad $(*)$ y de esta forma, $\mathcal{C}(X \cup Y)$ es una clase TT. Vemos que para esta clase, $\overline{\mathcal{C}}$ no satisface la propiedad (iii) de una teoría de tipos. Probemos primero que $M \in Mod-(R, \tau_g)$ es $\mathcal{C}$-módulo si y solo si $M = M_1 \oplus M_2$ con M_1, M_2 totalmente invariantes y tales que M_1 es $\mathcal{D}$-módulo y M_2 es Y-módulo.

En efecto, si M es $\mathcal{C}$-módulo entonces $End_R(M) \simeq (\prod D_\alpha) \times S$ donde D_α es anillo con división y $soc(S) = 0$. Por el lema 5.8, $M = E((\bigoplus M_\alpha) \oplus K)$ donde M_α y K son totalmente invariantes, $End_R(M_\alpha) \simeq D_\alpha$ y $End_R(K) \simeq S$. Si hacemos $M_1 = E(\bigoplus M_\alpha)$ y $M_2 = K$ entonces se cumple con las condiciones expuestas. Recíprocamente, si $M = M_1 \oplus M_2$ con M_1 y M_2 totalmente invariantes entonces $Hom_R(M_1, M_2) = Hom_R(M_2, M_1) = 0$ de donde, $End_R(M) \simeq End_R(M_1) \times End_R(M_2) \in \mathcal{C}$

De todo ésto, se sigue que:

$$\tau_{\overline{\mathcal{C}}_1} \leq \tau_{\overline{\mathcal{D}}_1} \wedge \tau_{\overline{\mathcal{D}}_2} = \tau_g$$

y por lo tanto, todo anillo regular autoinyectivo derecho es del tipo $\overline{\mathcal{C}}_1$, es decir, en la descomposición de cada anillo regular autoinyectivo derecho en los tipos $\overline{\mathcal{C}}_1$ y $\overline{\mathcal{C}}_2$, el factor del tipo $\overline{\mathcal{C}}_2$ siempre es 0.

Sea $\mathcal{F}$ la clase de todos los anillos que son isomorfos a un producto directo de anillos lineales completos derechos. Recordando el corolario 3.9(i), vemos que $\mathcal{F}$ es una clase TT. Deseamos dar una caracterización de los $\mathcal{F}$-módulos.

Teorema 5.15.- Sea Q un anillo regular autoinyectivo derecho y sea $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $End_Q(M)$ es isomorfo a un producto directo de anillos lineales completos derechos.

ii) $soc(M_Q) \subset_e M$.

iii) Cada submódulo distinto de 0 de M contiene un submódulo simple.

Demostración.- $i) \Rightarrow iii)$ Por (i), M_Q es del tipo $\mathcal{D}_1$ y así, dado $0 \neq x \in M$ existe $0 \neq N \in L^*(M)$ $\mathcal{D}$-módulo, tal que $N \subset xQ$. Ya que N es $\mathcal{D}$-módulo, sabemos que $N = E(\bigoplus N_\alpha)$ donde $End_Q(N_\alpha)$ es anillo con división. Usando 5.5 y 5.10, tenemos que N_α es simple.

$iii) \Rightarrow ii)$ Obvio.

$ii) \Rightarrow i)$ Sea $soc(M_Q) = \bigoplus S_\omega$ la descomposición del zoclo de M en sus componentes homogeneas y para cada ω sea $E_\omega = E(S_\omega) \subset M$. Entonces la familia $\{E_\omega\}$ es independiente y ya que cada S_ω es totalmente invariante entonces E_ω tambien lo es; en particular, se tiene que $Hom_Q(E_\omega, E_\rho) = 0$, si $\omega \neq \rho$. En vista de que $\bigoplus E_\omega \subset_e M$ entonces $End_Q(M) \simeq \prod End_Q(E_\omega)$ y bastará probar que $T_\omega = End_Q(E_\omega)$ es isomorfo a un anillo lineal completo derecho. Ya que $S_\omega \simeq S^{(X)}$ con $S \in Simp - Q$ y $S \in L^*(E_\omega)$ entonces existe $e = e^2 \in T_\omega$ tal que $S = eE_\omega$; por la prop. 1.8 de [9], vemos que $eT_\omega \subset T_\omega$ es ideal derecho mínimo. Es fácil ver además, que $B(T_\omega) = \{0, 1\}$ y así, aplicando el teorema 9.12 de [8], obtenemos el resultado.

Corolario 5.16.- Sea $M \in Mod - (R, \tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $End_R(M)$ es isomorfo a un producto directo de anillos lineales completos derechos.

ii) $\sum\{N_R \subset M \mid N \text{ es } \tau_g\text{-cocrítico}\} \subset_e M$.

iii) Cada submódulo distinto de 0 de M contiene un submódulo τ_g-cocrítico.

Demostración.- $i) \Rightarrow iii)$ La hipótesis implica que $soc(M_Q) \subset_e M$ donde Q es el anillo máximo de cocientes derecho de $R/t_{\tau_g}(R)$. Sea $0 \neq x \in M$ y sea $N \in L^*(M)$ la $\mathcal{G}$-cerradura de xR en M. Como $N_Q \neq 0$, existe un Q-módulo simple $S \subset N$ y es claro que S_R es τ_g-cocrítico. Así, $0 \neq S \cap xR \subset xR$ es τ_g-cocrítico.

$iii) \Rightarrow i)$ Por el teorema anterior, bastará probar que $soc(M_Q) \subset_e M$. Si $0 \neq x \in M$ entonces considerando a xQ como R-módulo, existe $K_R \subset xQ$ τ_g-cocrítico y ya que $xQ \in Mod - (R, \tau_g)$ entonces contiene a la $\mathcal{G}$-cerradura K' de K_R. Como K' es τ_g-

cocrítico entonces K'_Q es simple, probando así que $soc(M_Q) \cap xQ \neq 0$.

$iii) \Rightarrow ii)$ Obvio.

$ii) \Rightarrow iii)$ Es claro que podemos suponer que $M \neq 0$. Sea $X = \{N \in L^*(M) \mid N$ es τ_g-cocrítico$\}$. Tenemos entonces que:

a) $X \neq \emptyset$. Esto es obvio, ya que por (ii) existe $N \subset M$ τ_g-cocrítico y entonces $E(N) \in L^*(M)$ es τ_g-cocrítico.

b) $\sum X = \sum\{N \subset M \mid N$ es τ_g-cocrítico$\}$. En efecto, denotando por H a la última suma, tenemos que $\sum X \subset H$ y si $N \subset M$ es τ_g-cocrítico entonces $N \subset E(N) \in L^*(M)$ y $E(N)$ es τ_g-cocrítico, de donde $N \subset \sum X$.

c) X es cerrado bajo monomorfismos (distintos de 0) en $L^*(M)$.

De esta forma, usando el lema 2.11 tenemos que si $0 \neq x \in M$ y N es la $\mathcal{G}$-cerradura de xR en M, existe un módulo τ_g-cocrítico $0 \neq K \in L^*(N)$. Como $xR \subset_e N$ entonces $0 \neq xR \cap K \subset xR$ es submódulo τ_g-cocrítico, probando (iii).

Aquí podemos dar un ejemplo de una cadena $\mathcal{C}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{RA}$ de clases TT, que no forma una teoría de tipos.

Ejemplo 3:

Consideremos la familia $\overline{T} = \{0, \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{RA}\}$; ya sabemos que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F}$ son clases TT y $0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{RA}$. Sin embargo, para cualquier anillo regular autoinyectivo derecho Q, sabemos que la clase de los $\mathcal{D}$-módulos cogenera la cápsula TTF de τ_g y lo mismo es cierto para la teoría de torsión cogenerada por los $\mathcal{F}$-módulos. De esta forma, la condición 3.5(iii) no se cumple para $i = 2$ y así, de acuerdo a lo expuesto al final del capítulo anterior, no existen anillos (distintos de 0) del tipo $\overline{T}_2$.

Como mencionamos en el capítulo III, dada una teoría de tipos, la descomposición en los tipos de cada anillo regular autoinyectivo derecho Q induce la descomposición en los tipos de cada $M \in Mod-(Q, \tau_g(Q))$. Sin embargo, cuando $\mathcal{C}$ es una clase TT, la descomposición de Q como un anillo en $\mathcal{C}$ y un anillo centralmente $\mathcal{C}$-nulo no induce la de cada M_Q. Para ver ésto, tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4:

Consideremos nuevamente la clase $\mathcal{D}$ y sea $Q = End_D(V)$ donde D es un anillo con división y $dim_D(V) = \infty$. Ya que los únicos idempotentes centrales de Q son 0 y 1 entonces Q es un anillo centralmente $\mathcal{D}$-nulo. Si la descomposición de Q induce la de cada $M \in Mod - (Q, \tau_g(Q))$ entonces cada M_Q es centralmente $\mathcal{D}$-nulo, lo cual es falso, ya que si tomamos $I \subset Q$ cualquier ideal derecho mínimo entonces $I \in L^*(Q)$ e I es $\mathcal{D}$-módulo, lo cual implica que no es centralmente $\mathcal{D}$-nulo.

Observación:

i) Como una clase intermedia entre $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F}$, podemos considerar a la clase $\mathcal{M}$ que contiene a todos los anillos isomorfos a un producto directo de anillos artinianos simples (la prueba de que $\mathcal{M}$ es una clase TT, es similar a la de $\mathcal{D}$ ó $\mathcal{F}$). La descomposición que induce $\mathcal{M}$ es la misma que la inducida por $\mathcal{D}$ y como en el ejemplo 3, se puede ver que la cadena:

$$0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{RA}$$

no es una teoría de tipos.

Para la siguiente aplicación, consideremos la clase $\mathcal{X}$ de todos los anillos regulares autoinyectivos derechos primos. Como antes, necesitamos caracterizar a los módulos $M \in Mod - (R, \tau_g)$ tales que $End_R(M)$ es primo.

Teorema 5.17.- Sea $0 \neq M \in Mod - (R, \tau_g)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M_R es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo,

ii) $End_R(M)$ es anillo primo,

iii) M_R no tiene submódulos cerrados totalmente invariantes propios.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Sea $T = End_R(M)$ y sea $e \in B(T) \setminus \{0\}$. Ya que $\chi > \chi(eM) \geq \chi(M)$ y $\chi(M)$ es un coátomo entonces $\chi(eM) = \chi(M)$. Ahora bien, en vista de que $(1-e) \in B(T)$ entonces $(1-e)M \in \mathcal{T}_{\chi(eM)} = \mathcal{T}_{\chi(M)}$, de donde $(1-e)M = 0$, probando así que $B(T) = \{0, 1\}$. Por 9.6 de [8], T es anillo primo.

$ii) \Rightarrow iii)$ Obvio, por el corolario 1.12.

$iii) \Rightarrow i)$ Bastará probar que $\chi(M)$ es un coátomo. Sea $\chi > \sigma \geq \chi(M)$ y sea E_R un cogenerador inyectivo de σ. Definimos $N \subset M$ como:

$$N = \sum\{Im\alpha \mid \alpha: E \to M\}$$

Es claro que $N \subset M$ es totalmente invariante; además, ya que $E \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ entonces $Hom_R(E, M) \neq 0$. Por la hipótesis, obtenemos que $M = E(N)$; ahora bien, $Im\alpha \in \mathcal{T}_{\xi(E)}$ para cada $\alpha: E \to M$ y así, $N \in \mathcal{T}_{\xi(E)} \subset \mathcal{T}_{\tau_g \vee \xi(E)}$, de donde, $\tau_g \vee \xi(M) \leq \tau_g \vee \xi(E)$. Tomando complementos en $gen(\tau_g)$, tenemos que $\chi(M) \geq \chi(E) = \sigma$, como queríamos probar.

En vista de que submódulo distinto de 0 de un τ_g-$\mathcal{A}$-módulo es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo, tenemos que X cumple con la propiedad $(*)$ y por lo tanto, $\mathcal{C}(X)$ es una clase TT, que denotaremos por $\mathcal{P}$.

Como primer punto, investigaremos quién es $\tau_{\overline{\mathcal{P}}_1}$. Sabemos que está cogenerada por la clase de todos los $\mathcal{P}$-módulos. Sea $\sigma = \wedge\{\chi(M) \mid M$ es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo$\}$. Es claro entonces que $\tau_{\overline{\mathcal{P}}_1} \leq \sigma$ y si M es $\mathcal{P}$-módulo entonces $M = E(\bigoplus M_\alpha)$ donde cada M_α es un τ_g-$\mathcal{A}$-módulo, de donde $M \in \mathcal{F}_\sigma$, lo cual prueba la igualdad. De esta forma, un anillo regular autoinyectivo derecho Q es del tipo $\overline{\mathcal{P}}_1$ si y solo si $\tau_g(Q) = \tau_{\overline{\mathcal{P}}_1}$ si y solo si $gen(\tau_g(Q))$ es una retícula atómica. Como consecuencia del teorema 4.1 y de 9.11 de [8], tenemos el siguiente:

Teorema 5.18.- Un anillo regular autoinyectivo derecho Q es del tipo $\overline{\mathcal{P}}_1$ si y solo si es isomorfo a un producto directo de anillos primos.

Nótese entonces, que la clase $\mathcal{P}$ (lo mismo que la clase $\mathcal{F}$), coincide con los anillos regulares autoinyectivos derechos del tipo $\overline{\mathcal{P}}_1$, es decir, al hacer el proceso de los tipos, no crece (como la clase $\mathcal{D}$) y nos referimos a este hecho, como que la clase $\mathcal{P}$ (lo mismo que la clase $\mathcal{F}$) forma ya un tipo. Así, usando la unicidad del corolario 3.21, tenemos que un anillo regular autoinyectivo derecho es del tipo $\overline{\mathcal{P}}_2$ si y solo si es centralmente $\mathcal{P}$-nulo.

Teorema 5.19.- Un anillo regular autoinyectivo derecho Q es centralmente $\mathcal{P}$-nulo si y solo si cada ideal primo es esencial.

Demostración.- Supongamos que $I \subset Q$ es ideal primo no esencial. Entonces I es cerrado en Q, lo cual prueba que Q no es centralmente $\mathcal{P}$-nulo.

Recíprocamente, si Q no es centralmente $\mathcal{P}$-nulo entonces existe $0 \neq I \subset Q$ ideal bilateral tal que $I \in L^*(Q_Q)$ e I_Q es $\mathcal{P}$-módulo. Como sabemos, $I = E(\bigoplus I_\alpha)$ con $I_\alpha \in L^*(I_Q)$ totalmente invariante y $End_Q(I_\alpha)$ anillo primo. Por lo tanto, I_α es ideal bilateral de Q, $I_\alpha \in L^*(Q_Q)$ e $I_\alpha \simeq End_Q(I_\alpha)$ es anillo primo. Así, si $I_\alpha \oplus J_\alpha = Q$ entonces J_α es ideal bilateral de Q, primo y que no es esencial.

Como consecuencia de 3.21, tenemos el siguiente:

Teorema 5.20.- Cada anillo regular autoinyectivo derecho Q se descompone en forma única como $Q = Q_1 \times Q_2$ donde Q_1 es isomorfo a un producto directo de anillos primos y Q_2 es extensión esencial de cada uno de sus ideales primos.

Terminamos este capítulo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6:

Al tomar la clase $\mathcal{F}$ sabemos, de acuerdo al teorema 3.15, que la teoría de tipos $\overline{\mathcal{F}}$ induce una descomposición para las categorías espectrales, como un producto directo de una categoría espectral sobre un anillo isomorfo a un producto directo de anillos lineales completos derechos y una categoría espectral sobre un anillo regular autoinyectivo con zoclo igual a 0. Así, vemos que cada categoría espectral se descompone como una categoría espectral discreta y una contínua (ver prop. 1.4, cap. XII de [19]).

REFERENCIAS

[1] Dickson, S., "A torsion theory for abelian categories", *Trans. Amer. Math. Soc.* **121** (1966), 223–235.

[2] Faith, C. and Utumi, Y., "Quasi-injective modules and their endomorphism rings", *Arch. der Math.* **15** (1964), 166–174.

[3] Gabriel, P., "Des catégories abéliennes", *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 323–448.

[4] Gabriel, P. and Oberst, U., "Spektralkategorien und regülare Ringe im Von-Neumannschen Sinn.", *Math. Zeitschrift* **92** (1966), 389–395.

[5] Golan, J., "Localization of noncommutative Rings", Marcel Dekker, New York, 1975.

[6] Golan, J., "Torsion Theories", Longman Scientific & Technical, Harlow, 1975.

[7] Goodearl, K., R., "Ring theory: nonsingular rings and modules", Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 33, New York, Dekker, 1976.

[8] Goodearl, K., R., "von Neumann Regular Rings", Monographs and Studies in Mathematics, Pitman, 1979.

[9] Goodearl, K., R. and Boyle, A., K., "Dimension theory for nonsingular injective modules", *Memoirs American Math. Soc.* **177**, (1976).

[10] Kaplansky, I., "Rings of Operators", New York, Benjamin, 1968.

[11] Maranda, J.-M, "Injective structures", *Trans. Math. Soc.* **110** (1964), 98–135.

[12] Murray, F. and von Neumann. J., "On Rings of Operators", *Ann. of. Math.* **37** (1936), 116–229.

[13] Osofsky, B., "Endomorphism rings of quasi-injective modules", *Canadian J. Math.* **20** (1968), 895–903.

[14] Raggi, F., y Ríos, J., "Algunas relaciones entre anillos semiartinianos y la teoría de tosión de Goldie, *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México* **23** (1983), 41–54.

[15] Raggi, F., y Ríos, J., "On structure lattice of torsion theories", *Comm. in Algebra*, por aparecer.

[16] Raggi, F., y Ríos, J., "Sobre la dimensión atómica en categorías de módulos", versión preliminar.

[17] Ríos J., "Algunos aspectos de la teoría de torsion de Goldie", Tesis Doctoral, Fac. de Ciencias, Univ. Nac. Autónoma de México, 1989.

[18] Roos, J.-E., "Locally distributive spectral categories and strongly regular rings", in Reports of the Midwest Category Seminar, Springer Lecture Notes **47**, Berlín, Springer-Verlag, (1967), 156–181.

[19] Stenström, Bo, "Rings of Quotients", Springer-Verlag, New York-Berlín, 1975.

[20] Utumi, Y., "On continuous rings and self-injective rings", *Trans. American Math. Soc.* **118** (1965), 158–173.