23

2 gj

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA INTEGRAL DE BOCHNER Y LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

JORGE MEDINA SALAZAR

CD. UNIVERSITARIA ENERO DE 1991

CONTENIDO

INTRODUCCION

El punto de partida del presente trabajo (capítulo I) es definir la "integral de Bochner" de una función con rango contenido en un espacio de Banach - $(V, \| \ \|)$ (real ó complejo).

El camino a seguir es muy similar al recorrido en el caso de la - integral de Lebesgue. A saber, trabajaremos inicialmente con funciones elementales* que toman valores en V, definiendo para éstas su integral de Bochner** (que es un valor en V). Posteriormente haremos lo propio para funciones más generales. De hecho procederemos constructivamente; es decir, partiremos de una sucesión de funciones elementales que satisfacen una condición apropiada y, de ahí, establecer la existencia de una función V-valuada a la cual se le podrá asignar un valor en V (aquí se destacará la importancia de que - V sea de Banach) que representará razonablemente su integral de Bochner. Sin ninguna precisión definimos por el momento el conjunto de las funciones que son Bochner integrables por $B_1(\Sigma, V, \mu)$; donde $\Sigma \neq \phi$ es su dominio.

* Las funciones elementales serán el "equivalente" de las funciones simples.

** Implícitamente estamos considerando un espacio de medida $(\Sigma, \mathcal{S}, \mu)$.

En este capítulo se probarán algunas propiedades de la integral de Bochner similares a las que posee la integral de Lebesgue.

En el capítulo 2 se introducirá el concepto de función μ-medible, probando a este respecto un importante teorema (Pettis) que caracteriza este tipo de funciones. Además se establece la relación entre las funciones μ-medibles y las funciones Bochner integrables.

Ya que hemos definido en capítulos anteriores el espacio $B_1(\Sigma, V, \mu)$, en el capítulo 3 procederemos a definir los espacios $B_p(\Sigma, V, \mu)$ con $1 \leq p < \infty$. Notaremos que este proceso de definición es paralelo al que se lleva a cabo en los espacios L_p (Ver [10] p.39). También por supuesto haremos algo parecido con $B_\infty(\Sigma, V, \mu)$. Más aun, se probará la existencia de una ligazón entre los espacios $B_p(\Sigma, V, \mu)$ y L_p, con $1 \leq p \leq \infty$.

En este mismo capítulo se estudiará la dualidad de $B_p(\Sigma, V, \mu)$. Esto de paso servirá como preámbulo para demostrar algunos resultados en el capítulo 5.

La parte medular en los capítulos 4 y 5 está formada por dos teoremas clásicos de la teoría de la medida: El Teorema de Radon-Nikodym y El Teorema de Representación de Riesz. Un hecho que hará más interesantes estos capítulos es que se prueba la existencia de medidas $G: \Sigma \to V$ y operadores lineales $T: L_1(\mu) \to V$, que satisfacen las -

condiciones de los teoremas antes mencionados, pero que sin embargo, no satisfacen la conclusión deseada. En otras palabras, los Teoremas de Radon-Nikodym y de Representación de Riesz, al extenderlos a medidas y operadores lineales V-valuados, nos encontramos con el inconveniente de que éstos pueden no cumplirse. Por ésta razón en el capítulo 4 nos avocaremos a determinar algunas condiciones bajo las cuales estos teoremas son válidos. Destacamos que las fallas no llegan tan lejos, prueba de ello es que la equivalencia de ambos no se altera.

En el capítulo 5 el trabajo se concentra en probar dos versiones del Teorema de Radon-Nikodym, vía dos resultados importantes: La representabilidad de operadores lineales continuos compactos y débilmente compactos.

Finalmente en el capítulo 6 se tratan los conceptos probabilísticos de <u>Esperanza Condicional</u> y <u>Martingalas</u> a partir de las funciones Bochner integrables. Se probarán como es de esperarse los teoremas de convergencia clásicos. De paso se establecerá una caracterización más del Teorema de Radon-Nikodym en términos de martingalas.

Se incluyen al final dos diagramas que resumen los resultados más significativos con respecto al Teorema de Radon-Nikodym.

CAPITULO 1

FUNCIONES BOCHNER INTEGRABLES

La idea fundamental en el presente concepto de integración, es la de extender la teoría desarrollada por Lebesgue. En el caso de la integral de Lebesgue, las funciones integrables en este sentido eran reales o complejo valuadas. Ahora, nuestro objetivo es considerar funciones cuyos rangos estén contenidos en espacios de Banach (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) más generales y, asignarles en estos mismos un valor que pueda ser definido como una integral para dichas funciones.

Es de esperarse que en el caso de que el espacio de Banach sea $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, ambos conceptos de integrabilidad coincidan. En efecto, así sucederá.

Iniciaremos con algunas definiciones.

DEFINICION 1.1

Sea X un conjunto no vacío y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Si $f: X \to V$ es una función con valores en V, entonces la llamaremos función vectorvaluada

DEFINICION 1.2

Sea $(X, \mathcal{V}, \mu)$ un espacio de medida y $s: X \to V$ una función vector-valuada tal que:

i) $\mathbb{A}$ toma un número finito de valores sobre conjuntos de $\mathcal{S}$.
ii) Cada valor diferente del vector cero, tomado sobre $E \in \mathcal{S}$, implica que $\mu(E)<\infty$

Entonces se dice que $\mathbb{A}$ es una <u>función</u> <u>elemental</u>.

La definición anterior, al igual que en el caso real, tiene como consecuencia el hecho de que si $\mathbb{A}:\mathbb{X}\to V$ es una función de la forma $\mathbb{A}=\sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$ con $v_i\in V$, $E_i\in\mathcal{S}$ $\forall i=1,\dots,n$ tal que $\mu(E_i)<\infty$ si $v_i\neq\bar{0}$, entonces $\mathbb{A}$ es una función elemental.

En adelante denotaremos por $\mathbb{A}(\mathbb{X},V,\mu)$ al conjunto de funciones elementales $\mathbb{A}:\mathbb{X}\to V$ de la forma $\mathbb{A}=\sum_{i=1}^{n} v_i\chi_{E_i}$ donde $v_i\in V$ y $E_i\in\mathcal{S}$ $\forall i=1,\dots,n$.

Antes de continuar supondremos (hasta que no se diga otra cosa) que el espacio de medida $(\mathbb{X},\mathcal{S},\mu)$ es σ-finito.

<u>DEFINICION 1.3</u>

Sea $\mathbb{A}\in\mathbb{A}(\mathbb{X},V,\mu)$ en la forma $\mathbb{A}=\sum_{i=1}^{n} v_i\chi_{E_i}$ tal que:

i) $E_i\neq\phi$ y $v_i\neq\bar{0}$ $\forall i=1,\dots,n$

ii) $E_i\cap E_j=\phi$ y $v_i\neq v_j$ si $i\neq j$.

Bajo estas condiciones diremos que la representación de $\mathbb{A}$, está en la <u>forma estándar</u>.

Como advertimos en un principio, a cada función vector-valuada le asignaremos un valor en V que desempeñará el papel de <u>integral</u>. El primer-

Procederemos ahora a comprobar la linealidad de $\int s\,d\mu$ sobre el conjunto de las funciones elementales.

TEOREMA 1.6

Sean $s, t \in \mathcal{S}(X, \mathcal{Y}, \mu)$ en su forma estándar. Entonces:

1) $\int (s+t)\,d\mu = \int s\,d\mu + \int t\,d\mu$

2) $\int \alpha s\,d\mu = \alpha \int s\,d\mu \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

DEM:

1) Supongamos que $s = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$ y $t = \sum_{j=1}^{m} w_j \chi_{F_j}$, ambas representaciones en la forma estándar y que $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$. En el caso de que $\{E_i\}_i$ y $\{F_j\}_j$ no formen particiones de X, entonces agregamos a las representaciones de s y t los sumandos $\bar{0} \cdot \chi_{X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i}$ y $\bar{0}\,\chi_{X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} F_j}$. (La definición (1.4) lo permite). Como la función $s+t$ es una representación de la forma:

$$s+t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (v_i + w_j)\,\chi_{E_i \cap F_j}$$

que no necesariamente es estándar, entonces procedamos de la siguiente manera: elijamos vectores $z_1, \dots, z_p$ distintos (alguno puede ser el vector $\bar{0}$) del conjunto $\{v_i + w_j : i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m\}$. $\forall\, k=1,\dots,p$ definimos los conjuntos:

$$G_k = \bigcup \{E_i \cap F_j : v_i + w_j = z_k\}$$

Así pues, se tiene que:

$$\mu(G_k) = \sum_{k} \mu(E_i \cap F_j) \qquad \forall \quad k=1,\dots,p$$

en donde la notación $\sum_{k}$ significa que la suma se considera sobre las parejas (i,j) tales que $v_i + w_j = z_k$. Por lo tanto,

$$s + t = \sum_{k=1}^{p} z_k \chi_{G_k}$$

cumpliendo así con la definición 1.3, salvo que algún z_k pueda ser $\bar{0}$.

Finalmente:

$$\int (s+t)\,d\mu = \sum_{k=1}^{p} z_k \mu(G_k) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{k} z_k \mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{k} (v_i + w_j)\mu(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (v_i + w_j)\mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^{m} w_j \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^{m} w_j \mu(F_j) = \int s\,d\mu + \int t\,d\mu$$

2) Si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\int \alpha s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha v_i \mu(E_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} v_i \mu(E_i) = \alpha \int s\,d\mu \qquad //$$

En (1.4) se definió $\int s\,d\mu$ para funciones elementales con representación estándar, salvo que algún valor de dicha función fuera el vector $\bar{0}$. Para nuestra fortuna, la definición (1.4) permanece invariable, independientemente si su representación es estándar o no.

PROPOSICION 1.7

Sea $s = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$ una función elemental (que no necesariamente satisface 1.4). Entonces:

$$\int s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} v_i \mu(E_i)$$

DEM:

Sean $s_i = v_i \chi_{E_i} + \bar{0} \chi_{\Sigma \setminus E_i}$ $\forall\ i = 1, \dots, n$. Claramente $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Por el Teorema (1.6) se tiene que:

$$\int s\,d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} s_i\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int s_i\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} v_i \mu(E_i) . \qquad //$$

El objetivo inmediato consiste definir un concepto de integrabilidad para funciones más generales. Esto se puede lograr a partir de los siguientes resultados.

LEMA 1.8

Sean $(V, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado y $s \in \mathcal{S}(\Sigma, V, \mu)$. Entonces:

$$\left\| \int s\,d\mu \right\| \leq \int \|s\|\,d\mu$$

DEM:

Sea $\Delta = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$ donde $E_i \cap E_j = \phi$ si $i \neq j$. Tenemos entonces que:

$$\|\Delta\| = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\| \chi_{E_i}$$

Por lo tanto,

$$\left\| \int \Delta d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i} \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|v_i\| \mu(E_i) = \int \|\Delta\| d\mu . \quad //$$

OBSERVACION 1.9

Notemos que $\|\Delta\|$ en la prueba anterior, es una función μ- simple, por lo que la integral $\int \|\Delta\| d\mu$ se considera en el sentido de Lebesgue.

TEOREMA 1.10

Sean $(V, \|\ \|)$ un espacio de Banach (sobre $\mathbb{C}$) y una sucesión (Δ_n) en $\Delta(\mathfrak{X}, V, \mu)$. tal que:

$$\lim_{m,n \to \infty} \int \|\Delta_n - \Delta_m\| d\mu = 0$$

Entonces existe una función $f : \mathfrak{X} \to V$ que satisface:

1) $\|f\|, \|\Delta_n - f\| : \mathfrak{X} \to V$ son funciones μ- medibles y,

2) $\lim_{n \to \infty} \int \|\Delta_n - f\| d\mu = 0$

DEM:

Por hipótesis $\lim_{m,n \to \infty} \int \|\Delta_n - \Delta_m\| d\mu = 0$. Así que podemos garantizar la existencia de una subsucesión (Δ_{n_k}) de (Δ_n) tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \| h_{n_{k+1}} - h_{n_k} \| d\mu < \infty \qquad \text{-----------} (1.10.1)$$

En efecto, sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, m,n \geq n_1$ se tiene que $\int \| h_n - h_m \| d\mu < 1/2$. Sea $n_2 > n_1$ de tal manera que $\forall\, m,n \geq n_2$, $\int \| h_n - h_m \| d\mu < 1/2^2$. Procediendo inductivamente, hallamos $n_k > n_{k-1}$ tal que $\forall\, m,n \geq n_k$ se satisfaga la desigualdad:

$$\int \| h_n - h_m \| d\mu < 1/2^k$$

Así pues,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \| h_{n_{k+1}} - h_{n_k} \| d\mu < \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k < \infty$$

Definimos ahora $g : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ como:

$$g(x) = \| h_1(x) \| + \sum_{k=1}^{\infty} \| h_{n_{k+1}}(x) - h_{n_k}(x) \| \quad \forall\, x \in \mathfrak{X} \qquad \text{-------} (1.10.2)$$

Por el Lema de Fatou y (1.10.2) se tiene que:

$$\int g \, d\mu \leq \int \| h_1 \| d\mu + \underline{\lim_{m}} \int \sum_{k=1}^{m} \| h_{n_{k+1}} - h_{n_k} \| d\mu$$

$$= \int \| h_1 \| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int \| h_{n_{k+1}} - h_{n_k} \| d\mu < \infty$$

Lo anterior garantiza que $g \in L_1(\mu)$. En consecuencia si $E = \{x \in \mathfrak{X} : g(x) = \infty\}$ entonces $\mu(E) = 0$ y $\lim_{k \to \infty} h_{n_k}(x) = h_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{n_{k+1}}(x) - h_{n_k}(x))$ existe $\forall\, x \in \mathfrak{X} \setminus E$.

Sea $f : \mathfrak{X} \to V$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \to \infty} h_{n_k}(x) & \text{si } x \in \mathfrak{X} \setminus E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

Claramente se sigue que:

$$\|f\| = \lim_{k\to\infty} \|s_{n_k}\| \quad \text{c.d} \quad y,$$

$$\|s_n - f\| = \lim_{k\to\infty} \|s_n - s_{n_k}\| \quad \text{c.d}.$$

Por lo tanto, $\|f\|$ y $\|s_n - f\|$ son funciones μ-medibles.

2) En vista de que $f - s_{n_p} = \sum_{k=p}^{\infty} (s_{n_{k+1}} - s_{n_k})$ y por el Lema de Fatou,

$$\int \|f - s_{n_p}\| d\mu \leq \varliminf_{m} \int \sum_{k=p}^{m} \|s_{n_{k+1}} - s_{n_k}\| d\mu$$

$$= \varliminf_{m} \sum_{k=p}^{m} \int \|s_{n_{k+1}} - s_{n_k}\| d\mu$$

$$= \sum_{k=p}^{\infty} \int \|s_{n_{k+1}} - s_{n_k}\| d\mu \longrightarrow 0 \quad (p \to \infty).$$

Finalmente, si $n_p < n < n_{p+1}$ entonces cuando $n \to \infty$ tambien $p+1 \to \infty$; es decir $p \to \infty$ siempre que $n \to \infty$. Luego entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int \|s_n - f\| d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int \|s_n - s_{n_p}\| d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \|s_{n_p} - f\| d\mu = 0. \quad //$$

<u>OBSERVACION 1.11</u>

La función f del teorema anterior está unicamente determinada.

<u>DEM:</u>

Sea $\tilde{f} : I \to V$ tal que $\lim_{n} \int \|s_n - \tilde{f}\| d\mu = 0$. En particular $\lim_{k} \int \|s_{n_k} - \tilde{f}\| d\mu = 0$

donde (Λ_{n_k}) es la sucesión de la prueba del teorema 1.10. Por el Teorema de Riesz (Ver [10] p. 61 Teo. 9.6), existe una subsucesión (Λ'_m) de (Λ_{n_k}) tal que $\lim_m \|\Lambda'_m - \tilde{f}\| = 0$ c.d. Pero $\lim_m \|\Lambda'_m - f\| = 0$ c.d, de donde $f = \tilde{f}$ c.d //.

OBSERVACION 1.12

Bajo las mismas hipótesis del teorema (1.10), se puede deducir que la sucesión $(\int \Lambda_n d\mu)$ converge en la norma definida sobre el espacio vectorial V. En efecto,

$$\left\| \int \Lambda_n d\mu - \int \Lambda_m d\mu \right\| = \left\| \int (\Lambda_n - \Lambda_m) d\mu \right\| \leq \int \|\Lambda_n - \Lambda_m\| d\mu \to 0 \quad (n,m \to \infty)$$

Esto es, $(\int \Lambda_n d\mu)$ es $\|\cdot\|$-Cauchy y como V es de Banach, entonces $\lim_n \int \Lambda_n d\mu$ existe en V.

DEFINICION 1.13

Si $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \Lambda_n d\mu$, entonces a $\int f d\mu$ la llamaremos la integral de Bochner de f respecto a μ. Para $E \in \mathcal{J}$ es natural definir $\int_E f d\mu$ como:

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E \Lambda_n d\mu .$$

PROPOSICION 1.14

$\int f d\mu$ está únicamente determinada.

DEM.:

Sean (A_n) y (A'_n) sucesiones en $A(\Xi, V, \mu)$ tales que:

$$\lim_n \int \|A_n - f\| d\mu = \lim_n \int \|A'_n - f\| d\mu = 0$$

Por el Lema (1.8) y la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$\left\| \int A_n d\mu - \int A'_n d\mu \right\| \leq \int \|A_n - A'_n\| d\mu \leq \int \|A_n - f\| d\mu + \int \|A'_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Por lo tanto $\lim_n \int A_n d\mu = \lim_n \int A'_n d\mu$. //

El conjunto de funciones vector-valuadas que definiremos a continuación es la base del presente trabajo. A saber,

DEFINICION 1.15

Sean $(\Xi, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $(V, \| \ \|)$ un espacio de Banach. Definimos a $B_1(\Xi, V, \mu)$ como el conjunto de funciones $f: \Xi \to V$ para las cuales existe una sucesión (A_n) en $A(\Xi, V, \mu)$ que satisface:

$$\lim_{n \to \infty} \int \|A_n - f\| d\mu = 0 \qquad \text{-------------} (1.15.1)$$

A $B_1(\Xi, V, \mu)$ lo llamaremos el conjunto de las funciones Bochner integrables

OBSERVACION 1.16

$B_1(\Xi, V, \mu)$ es un espacio vectorial (real ó complejo) y $\int (\cdot) d\mu$ es lineal sobre éste.

DEM:

Inmediata de la definición de $B_1(\Sigma, V, \mu)$ y $\int (\cdot)\, d\mu$. //

Para funciones A en $\mathcal{A}(\Sigma, V, \mu)$ se probó en el Lema (1.8) que:

$$\left\| \int A\, d\mu \right\| \leq \int \|A\|\, d\mu$$

Esta propiedad puede generalizarse si $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$.

TEOREMA 1.17

Si $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ entonces $\left\| \int f\, d\mu \right\| \leq \int \|f\|\, d\mu$. Más aún, $\|f\| \in L_1(\mu)$.

DEM:

Como $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$, entonces $\|f\|$ es una función real μ-medible. En consecuencia tiene sentido considerar la integral $\int \|f\|\, d\mu$. Además existe una sucesión (A_n) en $\mathcal{A}(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\lim_n \int \|f - A_n\|\, d\mu = 0$. Así, $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\int \|f - A_n\|\, d\mu < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$. Luego entonces,

$$\left| \int \|f\|\, d\mu - \int \|A_n\|\, d\mu \right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \qquad \text{-------}(1.17.1)$$

Por lo tanto, $\lim_n \int \|A_n\|\, d\mu = \int \|f\|\, d\mu$. Del Lema (1.8) se sigue que:

$$\left\| \int f\, d\mu \right\| = \left\| \lim_n \int A_n\, d\mu \right\| = \lim_n \left\| \int A_n\, d\mu \right\| \leq \lim_n \int \|A_n\|\, d\mu = \int \|f\|\, d\mu .$$

Finalmente, por (1.17.1) tenemos que $\int \|f\|\, d\mu \leq \int \|A_N\|\, d\mu + \varepsilon < \infty$. //

Por lo antes desarrollado, se tiene que si $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$, entonces

$$\int f d\mu = \lim_n \int \Lambda_n d\mu$$

donde (Λ_n) es una sucesión en $\Lambda(\Sigma, V, \mu)$ que cumple (1.15.1). Comprobemos este hecho utilizando el teorema anterior.

COROLARIO 1.18

Sean $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ y (Λ_n) una sucesión en $\Lambda(\Sigma, V, \mu)$ tales que $\lim_n \int \|f - \Lambda_n\| d\mu = 0$. Entonces,

$$\int f d\mu = \lim_n \int \Lambda_n d\mu$$

DEM:

Por el Teorema (1.17) se tiene la estimación :

$$\left\| \int f d\mu - \int \Lambda_n d\mu \right\| \leq \int \|f - \Lambda_n\| d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \qquad //$$

Para finalizar el presente capítulo, definiremos una norma para el espacio vectorial $B_1(\Sigma, V, \mu)$ y demostraremos que junto con esta norma, $B_1(\Sigma, V, \mu)$ es un espacio de Banach. Enunciaremos y probaremos un resultado que es de gran utilidad en Teoría de la medida y por supuesto también lo será en el presente trabajo. A saber, el Teorema de la Convergencia Dominada.

DEFINICION 1.19

Sea $\| \cdot \|_1 : B_1(\Sigma, V, \mu) \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$|||f|||_1 = \int \|f\| d\mu \quad \forall f \in B_1(\Xi, V, \mu) \qquad \text{- - - - - - - - - - (1.19.1)}$$

De la definición de $|||\cdot|||_1$ se deduce fácilmente que se trata de una norma sobre el espacio vectorial $B_1(\Xi, V, \mu)$. En relación a esto veamos el siguiente resultado,

TEOREMA 1.20

$(B_1(\Xi, V, \mu), |||\cdot|||_1)$ es un espacio de Banach.

DEM:

Sea (f_n) una sucesión de funciones en $B_1(\Xi, V, \mu)$ tales que:

$$\lim_{m,n} \int \|f_n - f_m\| d\mu = 0 \qquad \text{- - - - - - - - - - - - - (1.20.1)}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Como $f_n \in B_1(\Xi, V, \mu)$, entonces existe una sucesión (Δ_k^n) en $\Delta(\Xi, V, \mu)$ que satisface:

$$\lim_k \int \|f_n - \Delta_k^n\| d\mu = 0$$

En consecuencia, es posible hallar $k_n = k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\int \|f_n - \Delta_{k_n}^n\| d\mu < 1/n$.

Mediante este procedimiento encontramos una sucesión (Δ_n) en $\Delta(\Xi, V, \mu)$ que cumpla:

$$\int \|f_n - \Delta_n\| d\mu < 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{- - - - - - - - - - - (1.20.2)}$$

En efecto, basta poner $\Delta_n = \Delta_{k_n}^n$. Por otro lado tenemos:

$$\int \|\Delta_n - \Delta_m\| d\mu \leq \int \|\Delta_n - f_n\| d\mu + \int \|f_n - f_m\| d\mu + \int \|f_m - \Delta_m\| d\mu$$

De (1.20.1) y (1.20.2) se sigue que $\lim_{m,n} \int \|h_m - h_n\| d\mu = 0$. Por el Teorema (1.10) existe $f : \Sigma \to V$ tal que $\lim_n \int \|f - h_n\| d\mu = 0$. Claramente $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$. Finalmente, como:

$$\int \|f_n - f\| d\mu \leq \int \|f_n - h_n\| d\mu + \int \|f - h_n\| d\mu$$

entonces se tiene que $\lim_n \int \|f_n - f\| d\mu = 0$, concluyendo así la prueba. //

OBSERVACION 1.21

La función $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ hallada en el teorema anterior está únicamente determinada. En efecto, si $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ es tal que $\lim_n \int \|f_n - g\| d\mu = 0$, entonces:

$$\int \|f - g\| d\mu \leq \int \|f - f_n\| d\mu + \int \|f_n - g\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Por lo tanto, $\int \|f - g\| d\mu = 0$; es decir, $\|f - g\|_1 = 0$ de donde $f = g$ c.d.

TEOREMA 1.22 (TEOREMA GENERALIZADO DE LA CONVERGENCIA DOMINADA)

Sean (f_n) y (g_n) sucesiones en $B_1(\Sigma, V, \mu)$ y $L_1^+(\mu)$ respectivamente, tales que:

a) $f_n \to f$ c.d,

b) $\|f_n\| \leq g_n$ c.d,

c) $g_n \to g$ c.d con $g \in L_1^+(\mu)$ y,

d) $g_n \to g$ en $L_1^+(\mu)$

Entonces:

1) $\lim_n \int \|f_n - f\| d\mu = 0$

2) $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$ (en consecuencia $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ por el Teorema (1.20))

DEM:

Para que la integral $\int \|f_n - f\| d\mu$ tenga sentido, la función real-valuada $\|f_n - f\|$ debe ser μ-medible. Pero $\|f_n - f\| = \lim_m \|f_n - f_m\|$ c.d. y como las funciones $\|f_n - f_m\|$ son μ-medibles, se sigue que $\|f_n - f\|$ también lo es.

Por hipótesis se sabe que $\|f_n - f\| \leq 2g_n$ c.d. y $\|f_n - f\| \to 0$ c.d.

Por el Teorema Generalizado de la Convergencia Dominada (caso real) (Ver [10] p. 97 Ej. 45) se tiene que:

$$\lim_n \int \|f_n - f\| d\mu = 0$$

probando así la parte (1). Para demostrar (2), notemos que $f_n - f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$.

Del Teorema (1.17) se sigue que:

$$\left\| \int (f_n - f) d\mu \right\| \leq \int \|f_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Por lo tanto, $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$ //

CAPITULO 2

FUNCIONES μ-MEDIBLES

En el capítulo anterior definimos para las funciones vector-valuadas el concepto de Bochner integrabilidad, pero en ningún momento hicimos referencia a la medibilidad (en algún sentido) de tales funciones. El presente capítulo está destinado a este respecto.

Aunque en la teoría de Lebesgue la $\mathcal{S}$-medibilidad de una función real-valuada es condición primordial para hablar de integrabilidad, veremos que a fin de cuentas los resultados son similares en ambos conceptos de integración.

En materia de medibilidad, se probará en secciones posteriores el Teorema de Medibilidad de Pettis, que tiene la virtud de caracterizar el concepto de μ-medibilidad para funciones vector-valuadas.

DEFINICION 2.1

Sea (Ω, V, μ) un espacio de medida σ-finito, μ-completo y $f : \Omega \longrightarrow V$ con V un espacio de Banach. Decimos que f es <u>μ-medible</u> si $\forall E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \infty$, existe (A_n) en $\mathcal{A}(\Omega, V, \mu)$ tal que $A_n \longrightarrow f\chi_E$ c.d (μ).

En adelante $\mathcal{M}(\Omega, V, \mu)$ denotará al conjunto de funciones $f : \Omega \to V$ μ-medibles.

La proposición siguiente muestra que la μ-medibilidad es una propiedad implícita de las funciones en $B_1(\Omega, V, \mu)$.

PROPOSICION 2.2

Si $f \in B_1(\Omega, V, \mu)$ entonces f es μ-medible.

DEM:

Sea (A_n) en $\mathcal{A}(\Omega, V, \mu)$ tal que $\lim\limits_n \int \|A_n - f\| \, d\mu = 0$. Por Teorema de Riesz existe una subsucesión (A_{n_k}) que satisface $\lim\limits_k \|A_{n_k} - f\| = 0$ c.d. Así pues, $\forall E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \infty$ se tiene $\lim\limits_k \|A_{n_k}\chi_E - f\chi_E\| = 0$ c.d. Por lo tanto $\lim\limits_k A_{n_k}\chi_E = f\chi_E$ c.d. De (2.1) f es μ-medible.//

Como f es μ-medible, entonces $\forall\, n\in\mathbb{N}$ es posible hallar una sucesión (Δ_{nk}) en $\Delta(\mathfrak{X},V,\mu)$ tal que $\lim_k \Delta_{nk} = f\chi_{E_n}$ c.d., sea $F_n \in \mathcal{J}$ con $\mu(F_n)=0$ y $F_n \subseteq E_n$ tal que $\lim_k \Delta_{n_k}(x) = f\chi_{E_n}(x)$ $\forall\, x\in E_n\setminus F_n$. Sin perder generalidad se puede suponer que $\Delta_{nk}(x)\equiv 0$ $\forall\, x\notin E_n$. Consideremos ahora la sucesión (Δ_n) en $\Delta(\mathfrak{X},V,\mu)$ definida por:

$$\Delta_n = \Delta_{1n} + \Delta_{2n} + \cdots + \Delta_{nn} \qquad \text{- - - - - - - - - - - - (2.4.1)}$$

Así pues, para $x\in E_m$ se tienen las igualdades:

$$\Delta_m(x) = \Delta_{mm}(x)$$

$$\Delta_{m+1}(x) = \Delta_{m(m+1)}(x)$$

$$\Delta_{m+2}(x) = \Delta_{m(m+2)}(x)$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{m+j}(x) = \Delta_{m(m+j)}(x)$$

Por construcción de la sucesión (Δ_{nk}), $\Delta_n(x)\equiv 0$ si $n<m$. Por lo que eliminamos aquellas $\Delta_n(x)$ para las que $n<m$. Luego entonces

$$\|\Delta_k(x) - f(x)\| = \|\Delta_{mk}(x) - f(x)\| \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty)$$

$\forall\, x\notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. (Nótese que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{J}$ pues μ es completa) también sucede. Ver [7] pág. 97 ejercicio 35). Por Teorema (2.4) existe una sucesión (Λ'_n) en $\Lambda(\mathfrak{X}, V, \rho)$ tal que $\lim_n \Lambda'_n = f$ c.d sobre E. Supongamos que $\Lambda'_n(x) = 0$ $\forall$ $x \in \mathfrak{X} \setminus E$ y $n \in \mathbb{N}$. El objetivo ahora es hallar una sucesión (Λ_n) en $\Lambda(\mathfrak{X}, V, \rho)$ tal que

1) $\lim_n \Lambda_n = f$ c.d sobre $\mathfrak{X}$

2) $\| \Lambda_n(x) \| \leq 2h(x)$ $\forall$ $x \in \mathfrak{X}$

Así por el Teorema de Convergencia Dominada usual se deduce que $\lim_n \int \| \Lambda_n - f \| d\rho = 0$; es decir $f \in B_1(\mathfrak{X}, V, \rho)$. Para ello, definimos $D_n = \{ x \in \mathfrak{X} / \| \Lambda'_n(x) \| \leq 2h(x) \}$ y la sucesión (Λ_n) como:

$$\Lambda_n(x) = \begin{cases} \Lambda'_n(x) & \text{si } x \in D_n \\ 0 & \text{si } x \notin D_n \end{cases} \quad \text{--------- } (2.5.1)$$

Claramente $\| \Lambda_n(x) \| \leq 2h(x)$ $\forall$ $x \in \mathfrak{X}$. Como $\lim_n \Lambda'_n(x) = f(x)$ $\forall$ $x \in E \setminus F$ donde $\rho(F) = 0$, entonces existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $\| \Lambda'_n(x) - f(x) \| < h(x)$ $\forall$ $n \geq n_x$; es decir $\| \Lambda'_n(x) \| < 2h(x)$ $\forall n \geq n_x$

En consecuencia $x \in \bigcap_{n \geq n_x} D_n$. Así pues, de (2.5.1) se sigue que $A_n(x) = A'_n(x)$ $\forall n \geq n_x$. Por lo tanto $\lim_n A_n(x) = f(x)$ $\forall x \in E \setminus F$.

Finalmente, como $A_n(x) = 0 = f(x)$ si $x \in \bar{X} \setminus E$, se concluye que $\lim_n A_n(x) = f(x)$ $\forall x \in \bar{X} \setminus F$. //

COROLARIO 2.6

Si $f \in \mathcal{M}(\bar{X}, V, \mu)$ y $\|f\| \in L_1(\mu)$, entonces $f \in B_1(\bar{X}, V, \mu)$. Inversamente, si $f \in B_1(\bar{X}, V, \mu)$, entonces $f \in \mathcal{M}(\bar{X}, V, \mu)$ y $\|f\| \in L_1(\mu)$.

DEM:

La primera parte es consecuencia inmediata de (2.5). La segunda del teorema (1.17) y la proposición (2.2) //

COROLARIO 2.7

Sea $f \in \mathcal{M}(\bar{X}, V, \mu)$ tal que $\|f(x)\| \leq M$ $\forall x \in E$, con $\mu(E) < \infty$. Entonces f es Bochner integrable sobre E.

DEM:

Como $\|f \chi_E\| \leq M \chi_E$ el resultado es inmediato //

Para funciones real-valuadas, el producto de medibles (en el sentido de Lebesgue) es por supuesto una función medible. En el caso de las funciones vector-valuadas, no siempre es posible preguntarse por la μ-medibilidad de un producto de funciones μ-medibles, pues el producto de vectores puede no estar definido, a menos que el espacio vectorial en cuestión tenga estructura de álgebra, como por ejemplo $V = \mathbb{C}$. También, si $(V, \| \ \|)$ es un espacio de Hilbert, veremos más adelante que es posible considerar la μ-medibilidad del producto interior de funciones vectoriales.

El resultado siguiente rescata el concepto de μ-medibilidad para el caso del producto de una función real μ-medible y una vectorial μ-medible.

TEOREMA 2.8

Sean $f \in \mathcal{M}(X, V, \mu)$ y $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función μ-medible. Entonces $hf \in \mathcal{M}(X, V, \mu)$.

DEM:

Sea $E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) < \infty$. Como $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, V, \mu)$ entonces existe una sucesión (Δ_n) en $\mathcal{S}(\mathcal{S}, V, \mu)$ tales que $\lim_n \Delta_n = f\chi_E$ c.d. Análogamente como h es $\mathcal{S}$-medible, existe una sucesión (r_n) de funciones $\mathcal{S}$-simples tal que $\lim_n r_n = h$. En consecuencia $\lim_n r_n \chi_E = h\chi_E$.
Sea $r_n' = r_n \chi_E$. Así pues $\lim_n r_n' = h\chi_E$ y si $g_n' = r_n \Delta_n$ entonces se tiene que $\lim_n g_n' = \lim_n (r_n \Delta_n) = hf$ c.d sobre E. Por lo tanto $hf \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, V, \mu)$ //

Antes de probar el Teorema de Pettis, hagamos lo propio con el teorema siguiente, que garantiza la μ-medibilidad de una función que es el límite puntual de una sucesión de funciones μ-medibles.

TEOREMA 2.9

Sea (f_n) una sucesión en $\mathcal{M}(\mathcal{S}, V, \mu)$ tal que $\lim_n f_n = f$ c.d.
Entonces $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, V, \mu)$.

DEM:

Como $\|f_n\|$ es $\mathcal{J}$-medible por (2.4) y $\|f\| = \lim_n \|f_n\|$ c.d, se sigue que $\|f\|$ es $\mathcal{J}$-medible. Por el Teorema (2.7), $g_n = f_n/(1+\|f_n\|)$ es μ-medible $\forall n$ y además $\|g_n\| \leq 1$ $\forall n$. Por otro lado $\lim_n g_n = f/(1+\|f\|)$ c.d, de donde $\lim_n g_n \chi_E = (f/(1+\|f\|))\chi_E$ c.d con $E \in \mathcal{J}$ y $\mu(E) < \infty$. Por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que $(f/(1+\|f\|))\chi_E \in B_1(\mathfrak{X}, V, \mu)$ y por la proposición (2.2) $f/(1+\|f\|) \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}, V, \mu)$. En consecuencia $f = (1+\|f\|)\left(\frac{f}{1+\|f\|}\right)$ es μ-medible por (2.7) //

Veamos algunas definiciones previas al Teorema de Pettis.

DEFINICION 2.10

Una función $f: \mathfrak{X} \to V$ es débilmente μ-medible si $v^* f$ es μ-medible $\forall v^* \in V^*$. Es decir f es débilmente μ-medible $\iff v^* f \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}, \mathbb{C}, \mu)$ $\forall v^* \in V^*$

DEFINICION 2.11

Sean $(V, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado y $f : \Sigma \to V$ una función. Decimos que f es μ- esencialmente separablemente valuada, si existe $E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) = 0$ tal que $f(\Sigma \setminus E)$ es $\| \ \|$- separable.

TEOREMA 2.12 (B. J Pettis 1938)

Una función $f : \Sigma \to V$ es μ- medible si y solo si

a) f es μ- esencialmente separablemente valuada, y

b) $v^* f \in \mathcal{M}(\Sigma, \mathbb{C}, \mu)$ $\forall\ v^* \in V^*$.

DEM:

$\Rightarrow$]

Como $f \in \mathcal{M}(\Sigma, V, \mu)$ entonces existe una sucesión (A_n) en $\mathcal{A}(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\lim_n A_n = f$ c.d. Se sigue que $\lim_n v^* A_n = v^* f$ c.d $\forall\ v^* \in V^*$. Por el teorema (2.9) $v^* f \in \mathcal{M}(\Sigma, \mathbb{C}, \mu)$ $\forall v^* \in V^*$, Por otro lado, si $R_n = A_n(\mathfrak{X})$, entonces $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ es un subconjunto numerable de V. Así pues $\overline{R}$ es $\| \|$-separable. Además, si N es el conjunto de medida cero para el cual $\lim_n A_n \neq f$, entonces $f(\mathfrak{X} \setminus N) \subseteq \overline{R}$. En efecto, si $x \in \mathfrak{X} \setminus N$ entonces $\lim_n A_n(x) = f(x)$ y como $A_n(x) \in \overline{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se sigue que $f(x) \in \overline{R}$. Luego, a) es válido.

$\Leftarrow$

Como f es μ-esencialmente separablemente valuada, existe $E \in \mathfrak{J}$ tal que $f(\mathfrak{X} \setminus E)$ es $\| \|$-separable. Hallemos $\{v_n : n \geq 1\}$ un subconjunto de $f(\mathfrak{X} \setminus E)$, denso numerable y $\{v_n^* : n \geq 1\} \subseteq S_1^{V^*}(0) = \{v^* \in V^* : \|v^*\|_{V^*} = 1\}$ tal que $v_n^*(v_n) = \|v_n\|$ (esto es posible por el teorema de Hahn-Banach). Para $x \in \mathfrak{X} \setminus E$ se tiene que $\|f(x)\| = \sup_n |v_n^*(f(x))|$. En consecuencia $\|f\|$ es μ-medible. De la misma manera $\|f - v_n\|$ es μ-medible $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $E_n = \{x \in \mathfrak{X} : \|f(x) - v_n\| < \varepsilon\}$ $\forall n$. Como μ es completa $E_n \in \mathfrak{J}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (de no ser así, para cada $n \in \mathbb{N}$

hallamos $B_n \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(E_n \Delta B_n) = 0$). Definimos ahora $g: \Sigma \to V$ por:

$$g(x) = \begin{cases} v_n & \text{si } x \in E_n \setminus \bigcup_{m<n} E_m \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \end{cases} \quad \text{--------- (2.12.1)}$$

Claramente $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon \;\; \forall \; x \in \Sigma \setminus E$.

Se ha probado que $\forall \; \varepsilon > 0$, f puede ser aproximada casi-uniformemente (rel μ) por una función vectorial contablemente valuada. Para $\varepsilon = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, se produce una sucesión (g_n) de funciones contablemente valuadas tales que $\|g_n - f\| < 1/n \;\; \forall \, n \in \mathbb{N}$. Además, por (2.12.1) se tiene que g_n es μ-medible $\forall \, n \in \mathbb{N}$. Así por el Teorema (2.8) se sigue que f es μ-medible. //

<u>COROLARIO 2.13</u>

Sea $f: \Sigma \to V$ una función vector-valuada. Son equivalentes:

i) f es μ-medible

ii) Existe una sucesión (f_n) de funciones contablemente valuadas μ-medibles tales que $f_n \to f$ casi-uniformemente (rel μ).

<u>DEM:</u>

i) ⇒ ii) Se sigue de la prueba del teorema anterior.

ii) ⇒ i) Es inmediato del teorema (2.8) y del hecho de que convergencia casi-uniforme (rel μ) implica convergencia c.t.p. (rel μ). //

CAPITULO 3

LOS ESPACIOS $B_p(\Sigma, V, \mu)$

En el capitulo 1 definimos a $B_1(\Sigma, V, \mu)$ como el conjunto de funciones $f: \Sigma \to V$ que satisfacen $\lim_n \int \|A_n - f\| d\mu = 0$ para alguna - sucesión (A_n) en $\mathcal{A}(\Sigma, V, \mu)$. Procediendo de manera natural, definimos - ahora los espacios $B_p(\Sigma, V, \mu)$, inicialmente para $1 \leq p < \infty$.

DEFINICION 3.1

Bajo las mismas condiciones que en (1.15), definimos a $B_p(\Sigma, V, \mu)$ para $1 \leq p < \infty$, como el conjunto de funciones $f: \Sigma \to V$ para los cuales existe una sucesión (A_n) en $\mathcal{A}(\Sigma, V, \mu)$ que satisface:

$$\lim_n \int \|A_n - f\|^p d\mu = 0 \qquad \text{--------- } (3.1.1)$$

OBSERVACION 3.2

$(B_p(\Sigma, V, \mu), |||\cdot|||_p)$ $(1 \leq p < \infty)$ es un espacio vectorial normado, donde:

$$|||f|||_p = \left(\int \|f\|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \forall f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$$

El siguiente resultado generaliza el teorema (1.10) para $1 \le p < \infty$.

TEOREMA 3.3

Sea $1 \le p < \infty$. Si (A_n) es una sucesión en $\mathcal{A}(Z, V, \mu)$ tal que $\lim_{m,n} |||A_n - A_m|||^p = 0$, entonces existe $f \in \mathcal{M}(Z, V, \mu)$ única que satisface:

1) $\lim_n |||A_n - f|||^p = 0$

2) $\|f\| \in L_p(\mu)$

3) $|||f|||_p = \lim_n |||A_n|||_p$

DEM:

Hallemos como en el caso $p=1$, una subsucesión (A_{n_k}) de (A_n) tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |||A_{n_{k+1}} - A_{n_k}|||_p < \infty \quad \text{-------------} \quad (3.3.1)$$

Definimos ahora $g : Z \longrightarrow R$ como:

$$g = \|A_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|A_{n_{k+1}} - A_{n_k}\|$$

Por el Lema de Fatou y la desigualdad de Minkowski se tiene que $g \in L_p(\mu)$. En efecto:

$$\left(\int g^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\int \Big(\|A_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|A_{n_{k+1}} - A_{n_k}\| \Big)^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int \lim_m \Big(\|A_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{m} \|A_{n_{k+1}} - A_{n_k}\| \Big)^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$\leq \varliminf_m \left(\int \Big(\|A_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{m} \|A_{n_{k+1}} - A_{n_k}\| \Big)^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$\leq |||A_{n_1}|||_p + \varliminf_m \sum_{k=1}^{m} |||A_{n_{k+1}} - A_{n_k}|||_p$$

$$= |||A_{n_1}|||_p + \sum_{k=1}^{\infty} |||A_{n_{k+1}} - A_{n_k}|||_p$$

Así pues, de (3.3.1) se sigue que $g \in L_p(\mu)$. En consecuencia, si $E = \{ x \in X : g(x) = \infty \}$, entonces $\mu(E) = 0$. En tales circunstancias definimos a $f : X \longrightarrow V$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \lim_k A_{n_k}(x) & \text{si } x \in X \setminus E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

Como $f(x) = \lim_{k} A_{n_k}(x)$ c.d entonces $f \in \mathcal{M}(X, V, \mu)$. Además como $f - A_{n_j} = \sum_{k=j}^{\infty} (A_{n_{k+1}} - A_{n_k})$ tenemos que:

$$|||f - A_{n_j}|||_p = \left(\int \left\| \sum_{k=j}^{\infty} (A_{n_{k+1}} - A_{n_k}) \right\|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int \lim_m \left(\sum_{k=j}^{m} \|A_{n_{k+1}} - A_{n_k}\|^p d\mu\right)\right)^{1/p}$$

$$\leq \lim_m \left(\int \sum_{k=j}^{m} \|A_{n_{k+1}} - A_{n_k}\|^p d\mu\right)^{1/p} = \lim_m \sum_{k=j}^{m} |||A_{n_{k+1}} - A_{n_k}|||_p$$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} |||A_{n_{k+1}} - A_{n_k}|||_p$$

Nuevamente por (3.3.1) se tiene que $\lim_j |||f - A_{n_j}|||_p = 0$, por lo que si $n_j < n < n_{j+1}$ entonces:

$$\lim_n |||f - A_n|||_p \leq \lim_n |||f - A_{n_j}|||_p + \lim_n |||A_{n_j} - A_n|||_p = 0$$

Así pues, la parte 1) queda probada. Para 2) y 3) observe que $\left| |||A_n|||_p - |||A_m|||_p \right| \leq |||A_n - A_m|||_p$; de aquí que la sucesión $(|||A_n|||_p)$ converge a un límite finito y puesto que $\left| |||A_n|||_p - |||f|||_p \right| \leq |||A_n - f|||_p$ se concluye la igualdad $|||f|||_p = \lim_n |||A_n|||_p$.

La <u>unicidad</u> se prueba igual que para $p=1$ //

Veamos ahora el teorema análogo a (2.6) en el caso $1<p<\infty$.

TEOREMA 3.4

Sea $f: \mathfrak{X} \to V$ una función vector valuada. Son equivalentes:

i) $f \in B_p(\mathfrak{X}, V, \mu)$

2) $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}, V, \mu)$ y $\|f\| \in L_p(\mu)$.

DEM:

$\Leftarrow$]

Hallamos al igual que en el caso $p=1$ una sucesión (A_n) en $\mathcal{A}(\mathfrak{X}, V, \mu)$ tal que $\lim_n A_n = f$ c.d y $\|A_n\| \leq 2\|f\|$ (Ver prueba de 2.6). Se deduce entonces que: $\lim_n \|A_n - f\|^p = 0$ c.d y $\|A_n - f\|^p \leq 3^p \|f\|^p$. Por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

$$\lim_n \int \|A_n - f\|^p d\mu = 0 \qquad \text{------------- } (3.4.1)$$

Es decir, $f \in B_p(\mathfrak{X}, V, \mu)$.

$\Rightarrow$]

De (2.2) se sigue que $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}, V, \mu)$ y como (3.4.1) se cumple para alguna sucesión (A_n) en $\mathcal{A}(\mathfrak{X}, V, \mu)$, entonces;

$$\int \|f\|^p d\mu \leq 2^p \left(\int \|f - f_n\|^p d\mu + \int \|f_n\|^p d\mu \right) < \infty$$

Por lo tanto $\|f\| \in L_p(\mu)$ //

DEFINICION 3.5

$B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ denotará el conjunto de funciones $f : \Sigma \to V$ tales que:

1) $f \in \mathcal{M}(\Sigma, V, \mu)$

2) $\|f\| \in L_\infty(\mu)$.

OBSERVACION 3.6

$(B_\infty(\Sigma, V, \mu), |||\cdot|||_\infty)$ es un espacio vectorial normado, donde

$$|||f|||_\infty = \inf \{ a > 0 : \mu(\{ x \in \Sigma : \|f(x)\| > a \}) = 0 \} \quad \text{.........} (3.6.1)$$

Veamos ahora que al igual que el espacio $L_\infty(\mu)$, también $B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ es completo.

TEOREMA 3.7

$(B_\infty(\Sigma, V, \mu), |||\cdot|||_\infty)$ es completo.

DEM:

Sea (f_n) una sucesión en $B_\infty(X, \Sigma, \mu)$ tal que $\lim_{n,m} |||f_n - f_m|||_\infty = 0$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos.

$$E_{n,m} = \{ x \in X : \|f_n(x) - f_m(x)\| > |||f_n - f_m|||_\infty \}$$

$$E_n = \{ x \in X . \|f_n(x)\| > |||f_n|||_\infty . \}$$

Se sigue que $\mu(E_{n,m}) = 0 = \mu(E_n)$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Ahora, si $E = (\bigcup E_n) \cup (\bigcup E_{n,m})$ entonces $\mu(E) = 0$ y además $\forall x \in X \setminus E$ y $\forall n, m \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq |||f_n - f_m|||_\infty \quad \text{-----------} \quad (3.7.1)$$

$$\|f_n(x)\| \leq |||f_n|||_\infty \quad \text{-----------} \quad (3.7.2)$$

De (3.7.1) se sigue que (f_n) es $\| \|$- Cauchy uniforme sobre $X \setminus E$.
En consecuencia $\lim_n f_n(x)$ existe $\forall x \in X \setminus E$. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{si } x \in X \setminus E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

Como $f_n \in \mathcal{M}(X, V, \mu)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in \mathcal{M}(X, V, \mu)$. (por el teorema (2.9)).

Para $\varepsilon > 0$, hallamos $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|||f_n - f_m|||_\infty < \varepsilon$ si $m \geq n \geq N$, y por (3.7.2) se tiene:

$$\|f(x)\| = \lim_m \|f_m(x)\| \leq \underline{\lim}_m \|f_n(x) - f_m(x)\| + \|f_n(x)\| \leq \varepsilon + |||f_n|||_\infty$$

$\forall\, x \in X \setminus E$ y $n \geq N$. En consecuencia $\|f\| \in L_\infty(\mu)$, y de la definición (3.5) se sigue que $f \in B_\infty(X, V, \mu)$. Resta probar que $\lim_n |||f - f_n|||_\infty = 0$. Para ello, notemos que si $n \geq N$ y $x \in X \setminus E$, entonces por (3.7.1):

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \lim_m \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \underline{\lim}_n |||f_m - f_n|||_\infty \leq \varepsilon$$

Por lo tanto $|||f - f_n|||_\infty \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$. //

Consideremos a V y W, espacios de Banach (sobre $\mathbb{C}$), y $T: V \longrightarrow W$ un operador lineal acotado. Supongamos por un momento que $Tf \in B_1(X, W, \mu)$ si $f \in B_1(X, V, \mu)$. Bajo estas condiciones tenemos por un lado la integral $\int f\, d\mu$ cuyo valor pertenece a V, y por otro, $T(\int f\, d\mu)$ la imagen de dicha integral bajo T. Lo interesante es que este último elemento de W coincide precisamente con la integral $\int Tf\, d\mu$. Es decir,

$$\int Tf\, d\mu = T\left(\int f\, d\mu\right)$$

Este hecho es consecuencia del siguiente resultado.

TEOREMA 3.8

Sean $f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $T : V \longrightarrow W$ un operador lineal acotado.
Entonces:

1) $Tf \in B_p(\Sigma, W, \mu)$

2) $|||Tf|||_p \leq \|T\| \, |||f|||_p$

3) $\|T\| = \sup \{ \|T(f)\| : |||f|||_p = 1 \}$

DEM:

1) Como $f \in \mathcal{M}(\Sigma, V, \mu)$ entonces es fácil verificar que $Tf \in \mathcal{M}(\Sigma, W, \mu)$.
Además si $1 \leq p < \infty$:

$$\int \|Tf\|^p d\mu \leq \|T\|^p \, |||f|||_p^p < \infty \qquad \text{------------- } (3.8.1)$$

Así pues, $\|Tf\| \in L_p(\mu)$. Por el teorema (3.4) $Tf \in B_p(\Sigma, W, \mu)$. Para $p = \infty$, aprovechamos que $\|f(w)\| \leq |||f|||_\infty$ c.d para obtener:

$$\|Tf(w)\| \leq \|T\| \, \|f(w)\| \leq \|T\| \, |||f|||_\infty < \infty \quad \text{c.d} \qquad \text{------ } (3.8.2)$$

Es decir, $\|Tf\| \in L_\infty(\mu)$. Por la definición (3.5) se tiene que $Tf \in B_\infty(\Sigma, W, \mu)$.

2) La desigualdad es inmediata de (3.8.1) y (3.8.2) .

3) Sean $\varepsilon > 0$ y $1 \leq p < \infty$. Hallamos $v = v_\varepsilon \in V$ tal que $\|v\| = 1$ y $\|Tv\| > \|T\| - \varepsilon$. Definimos ahora $\Lambda \in \Delta(X, V, \mu)$ por $\Lambda(x) = v \cdot \chi_E(x)$, donde $E \in \mathcal{J}$ y $0 < \mu(E) < \infty$. Claramente $|||\Lambda|||_p = \mu(E)^{1/p}$ y $|||T\Lambda|||_p = \|Tv\| \mu(E)^{1/p}$. Por lo tanto $\|T\| - \varepsilon < \dfrac{|||T\Lambda|||_p}{|||\Lambda|||_p} < \|T\|$.

Para $p = \infty$ definimos $\Lambda \in \Delta(X, V, \mu)$ por $\Lambda(x) = v \chi_E(x)$. Se sigue que $|||\Lambda|||_\infty = 1$ y $|||T\Lambda|||_\infty = \|Tv\| > \|T\| - \varepsilon$ //

COROLARIO 3.9

Sea $f \in B_1(X, V, \mu)$ y $T : V \to W$ un operador lineal acotado. Entonces $Tf \in B_1(X, W, \mu)$ y,

$$\int Tf \, d\mu = T\left(\int f \, d\mu\right)$$

En particular, si F es una funcional lineal acotada se tiene que $Ff \in L_1(\mu)$ y,

$$\int Ff \, d\mu = F\left(\int f \, d\mu\right)$$

donde la integral de la izquierda es la integral de Lebesgue de la función Ff.

DEM:

Por el teorema 3.8 $Tf \in B_1(X, W, \mu)$ y $|||T(f - \Lambda_n)|||_1 \leq \|T\| \, |||f - \Lambda_n|||_1$, donde (Λ_n) es una sucesión en $\Delta(X, V, \mu)$ que satisface $|||f - \Lambda_n|||_1 \to 0$ $(n \to \infty)$

Así pues, $\int Tf \, d\mu = \lim_n \int T\Lambda_n \, d\mu = \lim_n T\left(\int \Lambda_n \, d\mu\right) = T\left(\int f \, d\mu\right)$ //

COROLARIO 3.10

Sean $f \in B_1(X,V,\mu)$ y $T: V \longrightarrow W$ un operador lineal cerrado. Entonces $Tf \in B_1(X,W,\mu)$ y $\int Tf \, d\mu = T\left(\int f \, d\mu\right)$

DEM.

Por el Teorema de la Gráfica Cerrada (ver [16] p. 50) T es acotado y del corolario (3.9), el resultado es inmediato. //

OBSERVACION 3.11

En los corolarios (3.9) y (3.10) el espacio W ha sido considerado de Banach (sobre $\mathbb{C}$), aunque es posible que sólo sea espacio vectorial normado (sobre $\mathbb{C}$) para que $\int Tf \, d\mu = T\left(\int f \, d\mu\right)$, con la diferencia de que ahora tendrá que suponerse que $Tf \in B_1(X,W,\mu)$. Este resultado se debe a E. Hille (1957). Y como los corolarios antes mencionados serán suficientes para los propósitos de este trabajo, la prueba del Teorema de Hille puede checarse en [7] p. 47.

LOS ESPACIOS $B_p(\Sigma,V,\mu)^*$ Y $B_q(\Sigma,V^*,\mu)$.

En lo que resta del presente capítulo avocaremos nuestros esfuerzos a estudiar los espacios $B_p(\Sigma,V,\mu)^*$ (el espacio dual de $B_p(\Sigma,V,\mu)$) y $B_q(\Sigma,V^*,\mu)$ con $1\leq p<\infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Los resultados que se probarán tendrán como fin el considerar a el espacio $B_q(\Sigma,V^*,\mu)$ como un subespacio de $B_p(\Sigma,V,\mu)^*$, en el sentido de que se puede dar un isomorfismo isométrico entre $B_q(\Sigma,V^*,\mu)$ en un subespacio de $B_p(\Sigma,V,\mu)^*$.

Imitando (c.d) el trabajo que se realizará para los espacios antes mencionados, se puede probar también que $B_p(\Sigma,V,\mu)\subseteq B_q(\Sigma,V^*,\mu)^*$. Veremos que si V es reflexivo esta contención es inmediata. Más aun, en los capítulos posteriores se destacará la importancia de que V sea reflexivo.

Antes de demostrar lo que hemos comentado daremos algunos resultados preliminares que son de vital importancia.

DEFINICIÓN 3.12

Sean $f : \Sigma \to V$ y $F : \Sigma \to V^*$. $\langle F(\cdot), f(\cdot) \rangle : \Sigma \to \mathbb{C}$ es la función definida por:

$$\langle F(x), f(x) \rangle = F(x)(f(x)) \quad \forall\ x \in \Sigma$$

Es decir, $\langle F(x), f(x) \rangle$ denota el valor de la funcional $F(x)$ aplicada a $f(x)$

PROPOSICIÓN 3.13

La función $\langle F, f \rangle$ es μ-medible.

DEM:

Sea $h(x) = \langle F(x), f(x) \rangle$. Por el teorema (2.6) existen sucesiones (A_n) y (A'_n) en $A(\Sigma, V, \mu)$ y $A(\Sigma, V^*, \mu)$ respectivamente tales que $A_n \to f$ c.d y $A'_n \to F$ c.d. En consecuencia $\langle A'_n, A_n \rangle \longrightarrow \langle F, f \rangle$ c.d y como $\langle A'_n, A_n \rangle$ es μ-medible $\forall\ n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\langle F, f \rangle$ es μ-medible. //

En vista de la proposición anterior, tiene sentido considerar la integral $\int \langle F, f \rangle d\mu$. Esto nos permitirá obtener una versión de la desigualdad de Hölder para funciones en los espacios en cuestión.

TEOREMA 3.14 (DESIGUALDAD DE HÖLDER)

Sean $f \in B_p(\mathfrak{X}, V, \mu)$ y $F \in B_q(\mathfrak{X}, V^*, \mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Entonces

$$\left| \int \langle F, f \rangle d\mu \right| \leq \int \|F\| \, \|f\| d\mu \leq \|F\|_q \, \|f\|_p$$

DEM.

Como $|\langle F(x), f(x) \rangle| \leq \|F(x)\| \, \|f(x)\|$ $\forall x \in \mathfrak{X}$ la primera desigualdad es inmediata. Por el teorema (3.4) $\|F\| \in L_q(\mu)$ y $\|f\| \in L_p(\mu)$; en consecuencia por Hölder (caso real) la segunda desigualdad es válida //

OBSERVACION 3.15

La prueba de la proposición 3.13 garantiza que la función $\langle F, f \rangle$ es también μ-medible. Además, si $F \in B_q(\mathfrak{X}, V^*, \mu)$ y $f \in B_p(\mathfrak{X}, V, \mu)$, el teorema (3.14) produce la desigualdad $\int |\langle F, f \rangle| d\mu \leq \|F\|_q \, \|f\|_p < \infty$

Así pues, por el teorema (2.6), $\langle F, f \rangle \in B_1(\mathfrak{X}, \mathbb{C}, \mu)$. Segun esto, podemos enunciar el siguiente corolario.

COROLARIO 3.16

Sean $f \in B_p(\Sigma, V, \rho)$ y $F \in B_q(\Sigma, V^*, \rho)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $\langle F, f \rangle \in B_1(\Sigma, V, \rho)$.

DEM:

Se sigue de la observación 3.15 //

Otro corolario interesante del teorema 3.14 es el siguiente.

COROLARIO 3.17

Sean $f \in B_p(\Sigma, V, \rho)$ y $F \in B_q(\Sigma, V^*, \rho)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $F^*: B_p(\Sigma, V, \rho) \longrightarrow \mathbb{C}$ es definida por:

$$F^*(f) = \int \langle F, f \rangle d\rho \qquad \forall \ f \in B_p(\Sigma, V, \rho),$$

entonces F^* es una funcional lineal acotada. Más aun $\|F^*\| \leq |||F|||_q$.

DEM:

Por el teorema 3.14, $|F^*(f)| \leq |||F|||_q |||f|||_p \quad \forall \ f \in B_p(\Sigma, V, \rho)$. Por lo tanto $\|F^*\| \leq |||F|||_q$. La linealidad de F^* se sigue del hecho de que $\langle F, f + \alpha g \rangle = \langle F, f \rangle + \alpha \langle F, g \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ //

Ha llegado el momento de probar la existencia de un isomorfismo isométrico del espacio $B_q(\mathfrak{X}, V^*, \mu)$ sobre algún subespacio de $B_p(\mathfrak{X}, V, \mu)^*$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De antemano hacemos notar que este objetivo se alcanzará primero para el caso $1 < p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y después para $p = 1$, $q = \infty$.

A continuación enunciaremos dos resultados cuya utilidad en la prueba de los teoremas que los preceden es de suma importancia. Para evitarle excesos al lector sus demostraciones se omiten

TEOREMA 3.18

Sea $1 < p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $g \in L_q(\mu)$, entonces existe $f \in L_p(\mu)$ tal que $\|f\|_p = 1$ y $\int fg\,d\mu = \|g\|_q$.

El siguiente resultado es evidente:

LEMA 3.19

Sean $v^* \in V^*$, $c > 0$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $v \in V$ tal que $\|v\| = c$ y además:

$$c\|v^*\| - \varepsilon \leq \langle v^*, v \rangle \leq c\|v^*\|$$

TEOREMA 3.20

Si $1<q<\infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces existe un isomorfismo isométrico de $B_q(\Sigma,V^*,\mu)$ sobre algún subespacio de $B_p(\Sigma,V,\mu)^*$.

DEM:

Definimos $T: B_q(\Sigma,V^*,\mu) \longrightarrow B_p(\Sigma,V,\mu)^*$ por:

$$T(F) = F^* \qquad \forall\ F \in B_q(\Sigma,V^*,\mu)$$

donde F^* es como en el corolario (3.17). Por el mismo corolario, se tiene que $F^* \in B_p(\Sigma,V,\mu)^*$. Además, de la definición de T se sigue que es un isomorfismo de $B_q(\Sigma,V^*,\mu)$ sobre su rango. Resta probar que $\|T(F)\| = |||F|||_q$.

Sea $t = \sum_{i=1}^{n} v_i^* \chi_{E_i}$ una función en $S(\Sigma,V^*,\mu)$, con $E_i \cap E_j = \phi$ si $i \neq j$. Se sigue que $\|t\| = \sum_{i=1}^{n} \|v_i^*\| \chi_{E_i}$ y $\|t\| \in L_q(\mu)$. Por el argumento del teorema 3.18 aplicado a $g = \|t\|$ (ver prueba en el apéndice), existe $c = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ función Σ-simple, no negativa tal que $\|c\|_p = 1$ y $\int c\|t\|\,d\mu = |||t|||_q$.

Por otro lado, si $\varepsilon > 0$ y $\eta = \varepsilon \Big/ \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$, por el lema (3.19) se tiene que $\forall\, i=1,\dots,n$, existe $v_i \in V$ t.q. que:

$$c_i \|v_i^*\| - \eta \leq \langle v_i^*, v_i \rangle \leq c_i \|v_i^*\| \quad \text{.................} \quad (3.20.1)$$

Definimos ahora $h : T \to V$ por $h = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$. Claramente $h \in \Delta(T, V, \mu)$. También satisface:

$$|||h|||_p^p = \int \|h\|^p d\mu = \int c^p d\mu = 1 .$$

De (3.16.1) se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\int \sum_{i=1}^{n} (c_i \|v_i^*\| - \eta) \chi_{E_i} d\mu \leq \int \sum_{i=1}^{n} \langle v_i^*, v_i \rangle \chi_{E_i} d\mu \leq \int \sum_{i=1}^{n} c_i \|v_i^*\| \chi_{E_i} d\mu$$

En consecuencia:

$$\int c\|f\| d\mu - \varepsilon \leq \int \langle f, h \rangle d\mu \leq \int c\|f\| d\mu .$$

Es decir:

$$|||f|||_q - \varepsilon \leq \int \langle f, h \rangle d\mu \leq |||f|||_q \quad \text{.........} \quad (3.20.2)$$

Por otra parte, como $F \in B_q(T, V^*, \mu)$, entonces existe una sucesión (f_n) en $\Delta(T, V^*, \mu)$ tal que $|||F - f_n|||_q \to 0$. Así que

$$|||F|||_q = \lim_n |||f_n|||_q \quad \text{.................} \quad (3.20.3)$$

Aplicando el procedimiento antes descrito, es posible hallar una sucesión (h_n) en $B_1(I,V,\mu)$ tal que $|||h_n|||_p = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y por (3.20.2):

$$|||t_n|||_q - 1/n \leq \int \langle t_n, h_n \rangle d\mu \leq |||t_n|||_q \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así por (3.20.3) $|||f|||_q = \lim_n \int \langle t_n, h_n \rangle d\mu$.

Finalmente:

$$\left| \int \langle f, h_n \rangle d\mu - \int \langle t_n, h_n \rangle d\mu \right| \leq \int | \langle f - t_n, h_n \rangle | d\mu$$

$$\leq |||f - t_n|||_q \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

Se sigue que $\lim_n \int \langle f, h_n \rangle d\mu = |||f|||_q$. Por lo tanto $|||f|||_q \leq \|T(f)\|$. Además por el corolario (3.17) $\|T(f)\| \leq |||f|||_q$. Así pues, T es una isometría. //

Veamos ahora el caso $p=1$, $q=\infty$.

TEOREMA 3.21

Existe un isomorfismo isométrico entre $B_\infty(I,V^*,\mu)$ y algún subespacio de $B_1(I,V,\mu)^*$.

DEM:

Sea $T : B_\infty(\Sigma, V^*, \mu) \to B_1(\Sigma, V, \mu)^*$ definido como en el teorema (3.20), Basta entonces probar que $\|T(F)\| = |||F|||_\infty$ con $F \in B_\infty(\Sigma, V^*, \mu)$ fijo. Para esto, sea $\varepsilon > 0$ y definimos el conjunto:

$$E_\varepsilon = \{x \in \Sigma \,/\, \|F(x)\| > |||F|||_\infty - \varepsilon\}$$

Por la definición de la norma $|||\cdot|||_\infty$, se sigue que $\mu(E_\varepsilon) > 0$.

Supongamos ahora que $\mu(E_\varepsilon) < \infty$. Como $F \in M(\Sigma, V^*, \mu)$, entonces existe una sucesión (f_n) en $\mathcal{S}(\Sigma, V^*, \mu)$ tal que $f_n \to F$ c.d sobre E_ε. Podemos suponer que $f_n(x) = 0$ si $x \notin E_\varepsilon$. En consecuencia $f_n \to F\chi_{E_\varepsilon}$ c.d. Por el teorema de Egoroff (ver [12] pag 88) existe $E' \subset E_\varepsilon$ con $\mu(E') > 0$ tal que $f_n \to F\chi_{E_\varepsilon - E'}$ uniformemente. A partir de esto es posible suponer que que $|||F\chi_{E_\varepsilon - E'} - f_n|||_\infty < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Además si $n \in \mathbb{N}$,

$$\|F\chi(x) - f_n(x)\| \leq |||F\chi_{E_\varepsilon - E'} - f_n|||_\infty \quad \text{c.d}$$

entonces para $x \in E_\varepsilon - E'$ se tienen las desigualdades:

$$\|f_n(x)\| \geq \|F\chi^{(x)}_{E_\varepsilon - E'}\| - \|F\chi_{E_\varepsilon - E'} - f_n\|_\infty > (\|F\|_\infty - \varepsilon) - \varepsilon = \|F\|_\infty - 2\varepsilon .$$

Es decir, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\|F\|_\infty - 2\varepsilon < \|f_n(x)\| \quad \forall\, x \in E_\varepsilon - E' \quad \text{.........} \quad (3.21.1)$$

Definimos ahora la función $c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por $c(x) = \mu(E_\varepsilon - E')^{-1}\chi_{E_\varepsilon - E'}$.
Claramente $\|c\|_1 = 1$ y de $(3.21.1)$, $\|F\|_\infty - 2\varepsilon < \int c\|f_n\|\,d\mu \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Imitando el procedimiento empleado en la prueba del teorema (3.20), hallamos una sucesión (h_n) en $A(\Omega, V, \mu)$ tal que $\|h_n\|_1 = \|c\|_1 = 1$, y

$$\int \langle f_n, h_n \rangle\, d\mu \geq \int c\|f_n\|\,d\mu - \varepsilon \quad \text{...........} \quad (3.21.2)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. De $(3.21.2)$ se sigue que:

$$\int \langle f_n, h_n \rangle\, d\mu \geq \|F\|_\infty - 3\varepsilon \quad \text{..........} \quad (3.21.3)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora por la desigualdad de Hölder:

$$\left| \int \langle F, h_n \rangle\, d\mu - \int \langle f_n, h_n \rangle\, d\mu \right| \leq \int |\langle F - f_n, h_n \rangle|\, d\mu \leq \|F\chi_{E_\varepsilon - E'} - f_n\|_\infty \|h_n\|_1$$

$$= \|F\chi_{E_\varepsilon - E'} - f_n\|_\infty < \varepsilon .$$

En consecuencia $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se tiene por $(3.21.3)$ y la desigualdad anterior que $\left|\int \langle F, \Lambda_n\rangle d\mu\right| > |||F|||_\infty - 4\varepsilon$. Por lo tanto $\|T(F)\| \geq |||F|||_\infty$.

También $\|T(F)\| \leq |||F|||_\infty$ (por el corolario 3.17). Así pues $\|T(F)\| = |||F|||_\infty$.

Finalmente como el espacio de medida $(\mathfrak{X}, \mathcal{S}, \mu)$ es σ-finito, sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\mu(E_\varepsilon) < \infty$, por lo cual el teorema queda demostrado. //

COROLARIO 3.22

Si V es reflexivo entonces $B_q(\mathfrak{X}, V, \mu) \subseteq B_p(\mathfrak{X}, V^*, \mu)^*$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

DEM:

Por los teoremas (3.20) y (3.21) se tiene:

$$B_q(\mathfrak{X}, V, \mu) = B_q(\mathfrak{X}, (V^*)^*, \mu) \subseteq B_p(\mathfrak{X}, V^*, \mu)^* \qquad //$$

Mediante los teoremas (3.20) y (3.21) hemos podido garantizar que $B_q(\mathfrak{X}, V^*, \mu) \subseteq B_p(\mathfrak{X}, V, \mu)^*$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sin embargo, resulta de mayor interés estudiar las condiciones bajo las cuales se tenga la otra contención y en consecuencia la igualdad entre estos espacios. Notemos que si el isomorfismo T definido en los teoremas antes citados, tuviera rango igual a el espacio $B_p(\mathfrak{X}, V, \mu)^*$, entonces $\forall\ F^* \in B_p(\mathfrak{X}, V, \mu)^*$

existiría $F \in B_q(\Sigma, V^*, \mu)$ tal que $F^*(f) = \int \langle F, f \rangle \, d\mu \quad \forall \, f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$.
Esto obligadamente nos hace pensar en algún equivalente del Teorema de Representación de Riesz para funcionales en $B_p(\Sigma, V, \mu)^*$, o bien, en alguno para el Teorema de Radon-Nikodym.

En capítulos posteriores veremos que efectivamente el hecho de que $B_q(\Sigma, V^*, \mu) = B_p(\Sigma, V, \mu)^*$, está íntimamente ligado con los teoremas de Radon-Nikodym o de Representación de Riesz, aunque debemos hacer un ajuste previo en cuanto a los valores de p. A saber, $p \in [1, \infty)$. Esto porque sabemos de antemano que si $p = \infty$ $(q=1)$ y $V = \mathbb{R}$ entonces $L_1(\mu) \neq L_\infty^*(\mu)$. Así que este caso queda descartado en adelante.

CAPITULO 4

LA INTEGRAL DE BOCHNER Y LA PROPIEDAD DE RADON - NIKODYM

El propósito del presente capítulo es estudiar el Teorema de Radon-Nikodym a nivel de medidas vectoriales. Paralelamente, se considerará el Teorema de Representación de Riesz para operadores lineales acotados $T: L_1(\mu) \to V$ y como es de esperarse, establecer su relación con el Teorema de Radon-Nikodym.

Extender estos importantes teoremas para medidas vectoriales y operadores lineales acotados cuyos rangos pertenecen a espacios de Banach arbitrarios, tiene el inconveniente de que al ganar generalidad se pierde en validez. Algunos ejemplos así lo demostrarán.

El hecho de que en algunos casos los teoremas antes mencionados no se cumplan, hasta cierto punto, hacen que exista una gran expectación e interés por averiguar bajo que condiciones los teoremas se satisfacen. Esto haremos en el presente capítulo.

Para comprender mejor el material expuesto en este capítulo se recomienda al lector remitirse antes al apéndice, particularmente a la sección que corresponde a medidas vectoriales.

Inicialmente enunciaremos los teoremas a los cuales hemos hecho referencia en el contexto que se ha propuesto. En adelante el espacio de medida (Σ, V, μ) se considerará finito.

TEOREMA 4.1 (RADON-NIKODYM)

Si $G \in MB(\Sigma, V, \mu)$, entonces existe $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$G(E) = \int_E g \, d\mu \qquad \forall \; E \in \Sigma$$

en donde $MB(\Sigma, V, \mu)$ representa el conjunto de medidas vectoriales $G: \Sigma \to V$ que son μ-continuas y de variación acotada.

TEOREMA 4.2 (REPRESENTACION DE RIESZ)

Si $T \in LB(L_1(\mu), V)$, entonces existe $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$T(f) = \int f g \, d\mu \qquad \forall \; f \in L_1(\mu)$$

en donde $LB(L_1(\mu), V)$ representa el conjunto de operadores lineales $T: L_1(\mu) \to V$ que son acotados.

Los teoremas (4.1) y (4.2) dan origen a las definiciones siguientes:

DEFINICION 4.3

a) Un espacio de Banach $(V, \| \|)$ (sobre $\mathbb{C}$) tiene la PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM RESPECTO A (Σ, S, μ) si $\forall$ $G \in MB(S, V, \mu)$ existe $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$G(E) = \int_E g\, d\mu \quad \forall\ E \in S$$

b) Un espacio de Banach $(V, \| \|)$ (sobre $\mathbb{C}$) tiene la PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM si tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a cada espacio de medida finita.

DEFINICION 4.4

$T \in LB(L_1(\mu), V)$ es RIESZ REPRESENTABLE (o simplemente representable), si existe $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$T(f) = \int f g\, d\mu \quad \forall\ f \in L_1(\mu)$$

Claramente $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ tienen la propiedad de Radon-Nikodym. Asimismo cualquier operador $T: L_1(\mu) \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) es Riesz representable pues $L_1^*(\mu) = L_\infty(\mu)$.

El primer teorema que se probará, relaciona los teoremas de Radon-Nikodym y de Representación de Riesz de manera similar que en el caso de medidas y operadores lineales con rango en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Veamos antes el siguiente lema.

<u>LEMA 4.5</u>

Sea $T \in LB(L_1(\mu), V)$ y $G: \mathcal{S} \to V$ la función sobre $\mathcal{S}$ definida por:

$$G(E) = T(\chi_E) \quad \forall E \in \mathcal{S}. \text{ -------- } (4.5.1)$$

Entonces son equivalentes:

i) T es representable

ii) existe $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $G(E) = \int_E g \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{S}$.

<u>DEM:</u>

<u>i) $\Rightarrow$ ii)</u>

Sea $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que $T(f) = \int f g \, d\mu \quad \forall f \in L_1(\mu)$.

En consecuencia $G(E) = T(\chi_E) = \int_E g\,d\mu \quad \forall E \in \Sigma$.

<u>ii) $\Rightarrow$ i)</u>

Supongamos que existe $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $G(E) = \int_E g\,d\mu \quad \forall E \in \Sigma$.
De (4.5.1) se tiene que $\|G(E)\| = \|T(\chi_E)\| \leq \|T\| \|\chi_E\|_1 = \|T\| \mu(E) \quad \forall E \in \Sigma$.
Se sigue inmediatamente que $|G|(E) \leq \|T\| \mu(E) \quad \forall E \in \Sigma$. Como
$|G|(E) = \int_E \|g\|\,d\mu \quad \forall E \in \Sigma$ entonces $\int_E \|g\|\,d\mu \leq \|T\| \mu(E)$. Por el <u>lema del promedio</u> (Ver [10] ejercicio 43) $\|g\| \leq \|T\|$ c.d. Así pues
$g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$.

Por otro lado, si $f \in L_1(\mu)$ entonces existe una sucesión (t_n) de funciones Σ- simples tales que $\|f - t_n\|_1 \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Por Hölder:

$$\left\|\int f g\,d\mu - \int t_n g\,d\mu\right\| \leq \int |f - t_n| \|g\|\,d\mu \leq \|f - t_n\|_1 \|g\|_\infty \longrightarrow 0$$

Además de (4.5.1) se deduce que $T(t_n) = \int t_n g\,d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto:

$$T(f) = \lim_n T(t_n) = \lim_n \int t_n g\,d\mu = \int f g\,d\mu. \qquad //$$

OBSERVACION 4.6

En la prueba de ii) $\Rightarrow$ i) del lema anterior se estableció la desigualdad $\|g\| \leq \|T\|$ c.d. Así que $\||g\||_\infty \leq \|T\|$. También se demostró que si $f \in L_1(\mu)$ entonces $T(f) = \int fg\,d\mu$. En consecuencia por Hölder:

$$\|T(f)\| \leq \int |f| \, \|g\| d\mu \leq \|f\|_1 \||g\||_\infty \qquad \forall f \in L_1(\mu)$$

Por lo tanto $\|T\| \leq \||g\||_\infty$. Así pues $\|T\| = \||g\||_\infty$.

TEOREMA 4.7

Son equivalentes:

i) $(V, \| \ \|)$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto a (Σ, S, μ)

ii) Cada elemento de $LB(L_1(\mu), V)$ es representable.

DEM:

i) $\Rightarrow$ ii)

Sea $T \in LB(L_1(\mu), V)$ y $G : S \to V$ definida por $G(E) = T(\chi_E)$ $\forall E \in S$. Como $\|G(E)\| \leq \|T\| \mu(E)$ se tiene que G es contablemente aditiva y además $G \in MB(S, V, \mu)$ (o). Por hipótesis existe $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $G(E) = \int_E g\,d\mu$ $\forall E \in S$. Por el lema (4.5) T es representable.

(o) Ver apéndice.

<u>ii) ⇒ i)</u>

Sea $G \in MB(S, V, \mu)$. Como G es contablemente aditiva, por (A.), $|G|$ también lo es. Además, si $\mu(E)=0$ entonces $|G|(E)=0$. Así por (A.) $|G| \ll \mu$. Por el Teorema de Descomposición de Hahn (Ver [12] p. 121 y obs. 6 p. 123) existe una sucesión (E_n) de elementos disjuntos de S tales que $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y si $E \subset E_n$, entonces:

$$(n-1)\mu(E) \leq |G|(E) \leq n\mu(E) \qquad \text{-----------} (4.7.1)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Para $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f=\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{A_i}$ con $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$, definimos:

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G(E_n \cap A_i) = \int_{E_n} f \, dG \qquad \text{------} (4.7.2)$$

En consecuencia por (4.7.1) tenemos:

$$\|T_n(f)\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G(E_n \cap A_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| \, |G|(E_n \cap A_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| n \mu(E_n \cap A_i) = n \|f\|_1$$

Se sigue que T_n puede extenderse a un operador lineal continuo <u>único</u> sobre $L_1(\mu)$ como sigue: Si $f \in L_1(\mu)$, entonces existe una sucesión de funciones $\mathcal{S}$-simples (f_m) tales que $\|f - f_m\|_1 \to 0$ si $m \to \infty$. Como $\|T_n(f_m) - T_n(f_l)\| \leq n\|f_m - f_l\|_1 \to 0$ si $m, l \to \infty$, entonces la sucesión $(T_n(f_m))$ es $\|\ \|$-Cauchy. Pero V es Banach (sobre $\mathbb{C}$), así que $\lim_m T_n(f_m)$ existe y es único. Definimos $T_n : L_1(\mu) \to V$ por:

$$T_n(f) = \lim_m T_n(f_m)$$

Puede verificarse que $T_n(f)$ no depende de la sucesión (f_m). De esta forma T_n queda bien definido.

Por otra parte, como $T_n \in LB(L_1(\mu), V)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces existe $g_n \in B_\infty(\mathfrak{X}, V, \mu)$ tal que:

$$T_n(f) = \int f g_n d\mu \quad \forall f \in L_1(\mu) \text{ -------- } (4.7.3)$$

De (4.7.2) y (4.7.3) se tiene:

$$G(E \cap E_n) = T_n(\chi_E) = \int_E g_n d\mu \text{ -------- } (4.7.4)$$

$\forall E \in \mathcal{S}$. Definimos ahora $g : \mathfrak{X} \to V$ por $g(x) = g_n(x)$ si $x \in E_n$.

Aprovechando que G es contablemente aditiva y la relación (4.7.4):

$$G(E) = \lim_m G(E \cap (\bigcup_{n=1}^{m} E_n)) = \lim_m \int_{E \cap (\bigcup_{n=1}^{m} E_n)} g \, d\mu$$

Además G es de variación acotada, de donde $\|g\| \in L_1(\mu)$. En efecto:

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n} \|g\| d\mu = \sum_{n=1}^{m} \int \|g_n\| d\mu = \sum_{n=1}^{m} |G|(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |G|(E_n) = |G|(\Omega) < \infty$$

Así por Teorema de Convergencia Monótona se concluye que $\|g\| \in L_1(\mu)$. Por (2.6), $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$. Finalmente por el Teorema de Convergencia Dominada (1.22):

$$G(E) = \lim_m \int_{E \cap (\bigcup_{n=1}^{m} E_n)} g\, d\mu = \int_E g\, d\mu .$$

Por lo tanto V tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto a (Ω, Σ, μ). //

Las definiciones y resultados que a continuación se enuncian tienen como fin establecer una condición necesaria para que un espacio de Banach tenga la propiedad de Radon-Nikodym.

DEFINICION 4.8

Sea $(V, \|\ \|)$ un espacio de Banach (sobre K). Una sucesión (v_n) en V constituye una base de Schauder para V si $\forall v \in V$ existe una sucesión de escalares (α_n) tal que $v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$ (convergencia en norma), siendo esta representación única. Equivalentemente, si $\forall v \in V$ existe $(\alpha_n) \subset K$ con $\alpha_n = \alpha_n(v)$ único $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_n \| v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \| = 0$.

DEFINICION 4.9

Sean $(V, \| \ \|)$ un espacio de Banach (sobre K) y (v_n) una base de Schauder para V. (v_n) es llamada acotadamente completa si $\forall (\alpha_n) \subset K$ tal que $\sup_n \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \| < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ es $\| \ \|$- convergente.

EJEMPLO 4.10

Sea $\mathcal{H}(D) = \{ f : D \to \mathbb{C} \mid f$ es holomorfa y acotada en $D \}$ donde $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$. Definimos $\| \ \| : \mathcal{H}(D) \to \mathbb{R}$ poniendo:

$$\|f\| = \sup_{|z|<1} |f(z)|$$

Por el Teorema de Weierstrass $(\mathcal{H}(D), \| \ \|)$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$. Además por el Teorema de Taylor $\{1, z, z^2, \dots\}$ constituye una base de Schauder para $\mathcal{H}(D)$. Más aun $\forall f \in \mathcal{H}(D)$

$$\alpha_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Consideremos la sucesión $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ tal que $\sup_n \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^k \| < \infty$. Para probar que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ existe, hallemos el radio de convergencia. Sea $M > 0$ tal que $\sup \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^k \| \leq M$. Entonces:

$$|\alpha_n z^n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^k - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k z^k \right| \leq 2M$$

de donde $|\alpha_n| \leq \frac{2M}{|z|^n}$. Pero si $|z| \to 1$, entonces $|\alpha_n| \leq 2M$. Así pues,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |\alpha_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} (2M)^{1/n} = 1$$

En consecuencia $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ existe $\forall\, (\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ y $z \in D$. Por lo tanto $\{1, z, z^2, \ldots\}$ es una base de Schauder para $H(D)$, acotadamente completa.

DEFINICION 4.11

Sea (V_n) una base de Schauder para V. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ $V_k^*: V \longrightarrow \mathbb{C}$ como sigue: Si $v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n V_n$, entonces ponemos,

$$V_k^*(v) = \alpha_k \qquad \text{------------} (4.11.1)$$

PROPOSICION 4.12

V_k^* es una funcional lineal acotada sobre V, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

DEM:

Sea S el espacio vectorial formado por todas las sucesiones (α_n) -

para los cuales $\lim_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ existe en V. Definimos $|||\cdot|||: S \to \mathbb{R}$ por:

$$|||(\alpha_n)||| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\| \qquad \forall \ (\alpha_n) \in S$$

Es claro que $(S, |||\cdot|||)$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$. Supongamos por un momento que $(S, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$. Sea $B: (S, |||\cdot|||) \to (V, \|\ \|)$ el mapeo definido como:

$$B(\alpha_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \qquad \forall \ (\alpha_n) \in S .$$

Puede verificarse que B es un operador lineal continuo, uno a uno y sobre. Por el Teorema del Mapeo Abierto (ver [17] p. 104 Teo. 5.10) B^{-1} es un operador lineal continuo. Luego entonces si $v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v_k$, entonces

$$\begin{aligned}
|v_k^*(v)|\,\|v_k\| = |\alpha_k|\,\|v_k\| &= \left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i \right\| \\
&\leq 2 \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\| = 2\,|||(\alpha_n)||| \\
&= 2\,|||B^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i\right)||| \leq 2\,\|B^{-1}\|\,\|v\| < \infty
\end{aligned}$$

Así pues, v_k^* es una funcional continua sobre V para cada $k \in \mathbb{N}$.

Para probar que $(S, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, consideremos una sucesión $(\beta_p) = ((\alpha_{pi}))$ en S $|||\cdot|||$-Cauchy. Tenemos algunas estimaciones de gran utilidad:

$$|\alpha_{pi}-\alpha_{qi}|\,\|v_i\| = \Big\|\sum_{k=1}^{i}(\alpha_{pk}-\alpha_{qk})v_k - \sum_{k=1}^{i-1}(\alpha_{pk}-\alpha_{qk})v_k\Big\|$$

$$\leq 2\sup_n \Big\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{pk}-\alpha_{qk})v_k\Big\| = 2|||\beta_p-\beta_q||| \to 0 \quad (p,q\to\infty)$$

En consecuencia $(\alpha_{pi})_p$ converge $\forall\, i\in\mathbb{N}$. Si $\alpha_i = \lim_p \alpha_{pi}$ $\forall\, i\in\mathbb{N}$, entonces $|||\beta_p-\alpha|||\to 0$ $(p\to\infty)$ donde $\alpha=(\alpha_i)$. Para finalizar veamos que $\alpha\in S$. Sea $\varepsilon>0$ y $r=r(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que:

$$|||\beta_p-\beta_r||| \leq \varepsilon \qquad \forall\, p\geq r \quad ------(4.12.1)$$

Además como $\beta_r=(\alpha_{ri})\in S$, entonces existe $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que:

$$\Big\|\sum_{i=n}^{m}\alpha_{ri}v_i\Big\| \leq \varepsilon \qquad \forall\, m\geq n\geq n_\varepsilon \quad -----(4.12.2)$$

Por (4.12.1) $\Big\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{pi}-\alpha_{ri})v_i\Big\|\leq\varepsilon$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Así de (4.12.2) se sigue:

$$\Big\|\sum_{i=n}^{m}\alpha_{pi}v_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=n}^{m}\alpha_{pi}v_i - \sum_{i=n}^{m}\alpha_{ri}v_i + \sum_{i=n}^{m}\alpha_{ri}v_i\Big\|$$

$$\leq \Big\|\sum_{i=1}^{m}(\alpha_{pi}-\alpha_{ri})v_i\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{pi}-\alpha_{ri})v_i\Big\| + \Big\|\sum_{i=n}^{m}\alpha_{ri}v_i\Big\|$$

$$\leq 3\varepsilon$$

$\forall\, m\geq n\geq n_\varepsilon$. Por lo tanto $\lim_n \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ existe en V (i.e $\alpha\in S$) //

COROLARIO 4.13

Sea (v_n) una base de Schauder para V y $|||\cdot|||: V\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $|||v||| = \sup_n \Big\|\sum_{k=1}^{n}v_k^*(v)v_k\Big\|$ si $v=\sum_{k=1}^{\infty}v_k^*(v)v_k$.

Entonces $(V, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$.

DEM:

Se sigue de la prueba de 4.12 //

OBSERVACION 4.14

Las normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ definidas sobre V son equivalentes.

DEM:

Se probará la existencia de una constante $M > 0$ tal que:

$$\frac{1}{M}\|v\| \leq |||v||| \leq M\|v\| \qquad \forall\, v \in V$$

Sea $T : (V, |||\cdot|||) \to (V, \|\ \|)$ el operador identidad sobre V. En vista de que $\|v\| \leq |||v||| \quad \forall\, v \in V$, se tiene que T es continuo. Por el corolario 14.13) $(V, |||\cdot|||)$ es de Banach sobre $\mathbb{C}$, así que por el Teorema del Mapeo Abierto (Ver [17] p. 106 Teo. 5.10) existe $\delta > 0$ tal que $\|Tv\| \geq \delta |||v|||$ $\forall\, v \in V$. Si $M = \max\left(1, \frac{1}{\delta}\right)$, entonces:

$$\frac{1}{M}\|v\| \leq \|v\| \leq |||v||| \leq M\|v\| \qquad \forall\, v \in V \qquad //$$

TEOREMA 4.15 (DUNFORD 1936)

Si V tiene base de Schauder (v_n) acotadamente completa, entonces V tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

DEM:

Sea $|||\cdot||| : V \to \mathbb{R}$ la norma sobre V definida como en el corolario 14.13)

Consideremos un espacio de medida finita $(\Sigma, \mathcal{J}, \mu)$ y $G \in MB(\mathcal{J}, V, \mu)$. Se probará que G tiene derivada de Radon-Nikodym en $B_1(\Sigma, V, \mu)$ con relación a la norma $|||\cdot|||$ sobre V. Si $T: (V, |||\cdot|||) \to (V, \|\cdot\|)$ es el operador identidad, por la observación (4.14) se tiene que T es un isomorfismo. Más aún, por el corolario (3.9) la propiedad de Radon-Nikodym es <u>invariante bajo homeomorfismos</u> lineales. Por lo tanto V tendría la propiedad de Radon-Nikodym con relación a la norma $\|\cdot\|$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\lambda_n: \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ por:

$$\lambda_n(E) = V_n^*(G(E)) \quad \forall\, E \in \mathcal{J} \qquad \text{-------} (4.15.1)$$

Como $V_n^* \in V^*$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (proposición 4.12), se sigue que λ_n es una medida escalar, μ-continua. Además por (4.15.1)

$$|\lambda_n(\Sigma)| = |V_n^*(G(\Sigma))| \le \|V_n^*\| \, \|G(\Sigma)\| \le \|V_n^*\| \, |G|(\Sigma) < \infty$$

En consecuencia $|\lambda_n|(\Sigma) < \infty$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Radon-Nikodym (escalar) existe $g_n \in L_1(\mu)$ tal que:

$$\lambda_n(E) = \int_E g_n \, d\mu \quad \forall\, E \in \mathcal{J} \qquad \text{-------} (4.15.2)$$

Notamos por otra parte que la norma $|||\cdot|||$ es <u>monótona</u>, es decir

$$\Big|\Big|\Big| \sum_{k=1}^{n} a_k V_k \Big|\Big|\Big| \le \Big|\Big|\Big| \sum_{k=1}^{n+m} a_k V_k \Big|\Big|\Big| \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \quad \text{----} (4.15.3)$$

Por (4.15.1) tenemos que $G(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^*(G(E))\nu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(E)\nu_k \quad \forall\, E \in S$. Así pues de (4.15.3) se siguen las siguientes desigualdades:

$$|||\sum_{k=1}^{n} \int_E g_k d\mu\, \nu_k ||| \leq ||| \sum_{k=1}^{n+m} \int_E g_k d\mu\, \nu_k ||| = ||| \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_k(E)\nu_k |||$$

$$\leq ||| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(E)\nu_k ||| = ||| G(E) ||| \qquad \forall\, E \in S.$$

Como $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\cdot)\nu_k = \int_{(\cdot)} \sum_{k=1}^{n} g_k \nu_k d\mu$ entonces:

$$\int_E ||| \sum_{k=1}^{n} g_k \nu_k ||| d\mu = | \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nu_k |(E) = \sup_{\pi} \{ \sum_{A \in \pi} ||| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\nu_k ||| \}$$

$$\leq \sup_{\pi} \{ \sum_{A \in \pi} ||| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)\nu_k ||| \} = |G|(E) \quad \forall\, E \in S$$

Por Teorema de Convergencia Monótona se tiene

$$\int \lim_n ||| \sum_{k=1}^{n} g_k \nu_k ||| d\mu = \lim_n \int ||| \sum_{k=1}^{n} g_k \nu_k ||| d\mu \leq |G|(\Sigma) < \infty$$

Luego entonces $\lim_n ||| \sum_{k=1}^{n} g_k \nu_k |||$ existe c.d (Ver [10] Ej. 35). Ahora como (ν_n) es acotadamente completa $\lim_n \sum_{k=1}^{n} g_k \nu_k = g$ existe c.d. Por g es μ-medible. Además por el Lema de Fatou:

$$\int |||g||| d\mu = \int \lim_n ||| \sum_{k=1}^{n} g_k \nu_k ||| d\mu \leq \underline{\lim}_n \int ||| \sum_{k=1}^{n} g_k \nu_k ||| d\mu \leq |G|(\Sigma) < \infty$$

Por lo tanto $|||g||| \in L_1(\mu)$. De (2.6) se sigue que $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$

Finalmente, como $\| \sum_{k=1}^{n} g_k v_k \| \leq \| g \|$ c.t.d, se sigue del Teorema de la Convergencia Dominada (1.22) que:

$$G(E) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E) v_k = \lim_n \int \sum_{k=1}^{n} g_k v_k \, d\mu = \int_E g \, d\mu \quad \forall E \in \Sigma . \;//$$

COROLARIO 4.16

Todo espacio de Hilbert separable tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

DEM:

Sea $(H, \langle \, , \, \rangle)$ un espacio de Hilbert separable. La separabilidad de H nos garantiza la existencia de una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ para este espacio. (Ver [ ] p. Teo y [ ] p.97 ej.4). Veamos ahora que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base de Schauder acotadamente completa. Como $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base ortonormal, entonces se sigue es base de Schauder. (Ver [ ] p.90 Teo 4.18.b)

Por otro lado, sea (α_n) una sucesión de escalares tales que:

$$\sup_n \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \| < \infty$$

donde $\| \cdot \| : H \to \mathbb{R}$ es definida por: $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$. En consecuencia,

$$\sup_n \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \| = \sup_n \left(\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \rangle \right)^{1/2} = \sup_n \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$$

Así pues, $(\alpha_k) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Por el Teorema de Riesz-Fischer (Ver [ ] p.89)

Supongamos que existe $g \in B_1([0,1], c_0, \lambda)$ tal que:

$$G(E) = \int_E g \, d\lambda \quad \forall\, E \in \mathcal{S} \quad \text{------- (4.17.2)}$$

Sean $g = (g_n)$ y $\pi_n : c_0 \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la n-ésima componente.
Entonces por el corolario (3.4) se tiene que $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\pi_n G(E) = \int_E \pi_n g \, d\lambda = \int_E g_n \, d\lambda \qquad \forall\, E \in \mathcal{S}$$

Por (4.17.1) se sigue que $g_n(t) = \operatorname{sen}(2^n \pi t)$ c.d sobre $[0,1]$ y de donde $g(t) = (\operatorname{sen}(2^n \pi t))$ c.d sobre $[0,1]$. Definimos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \{t \in [0,1] : |\operatorname{sen}(2^n \pi t)| \geq 1/\sqrt{2}\} \quad \text{----- (4.17.3)}$$

Los conjuntos $\mathcal{S}$-medibles definidos en (4.17.3) satisfacen $\lambda(E_n) = 1/2 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
En efecto, notemos que $|\operatorname{sen}(2^n \pi t)| \geq 1/\sqrt{2} \iff 2^n \pi t \in \bigcup_{i=0}^{2^n-1} [\frac{\pi}{4} + i\pi, \frac{3\pi}{4} + i\pi]$
$\iff t \in \bigcup_{i=0}^{2^n-1} [\frac{2i+1}{2^{n+2}}, \frac{2i+3}{2^{n+2}}]$. En consecuencia:

$$\lambda(E_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda[\tfrac{2i+1}{2^{n+2}}, \tfrac{2i+3}{2^{n+2}}] = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1/2$$

Así pues $\lambda(\overline{\lim}_n E_n) \geq \overline{\lim}_n \lambda(E_n) \geq 1/2$. Luego entonces:

$$\lambda(\{t \in [0,1] : g(t) \in c_0\}) \leq 1/2$$

Por lo tanto g no es c_0 valuada c.d. En otras palabras, la relación (4.17.2) no puede ser posible y así c_0 no tiene la propiedad de Radon Nikodym. //

COROLARIO 4.18

$L_1(\lambda)$ no tiene base de Schauder acotadamente completa.

DEM:

Sea $([0,1], \mathcal{S}, \lambda)$ el espacio de medida del corolario anterior. Definimos $G: \mathcal{S} \to L_1(\lambda)$ por:

$$G(E) = \chi_E \quad \forall\, E \in \mathcal{S}$$

Como $|G|(E) = \lambda(E)$ entonces G es una medida vectorial contablemente aditiva, μ-continua y de variación acotada. Supongamos que existe $g \in B_1([0,1], L_1(\lambda), \lambda)$ tal que:

$$G(E) = \int_E g\, d\lambda \quad \forall\, E \in \mathcal{S} \quad \text{--------- } (4.18.1)$$

Definimos ahora un operador lineal $T: L_\infty(\lambda) \to L_1(\lambda)$ por:

$$T(f) = \int f g\, d\lambda \quad \forall\, f \in L_\infty(\lambda) \quad \text{--------- } (4.18.2)$$

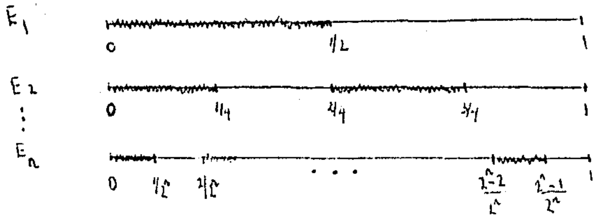
AFIRMACION 4.18.3

T es un operador lineal compacto.

Para no complicar la prueba del corolario demostraremos al final la afirmación.

Por (4.1 .3) se tiene que el subconjunto $\{T(\chi_E) : E \in \mathcal{S}\}$ de $L_1(\lambda)$ es relativamente compacto.

Consideremos ahora la sucesión (E_n) en $\mathcal{S}$ construida de la siguiente manera:



Si cada E_n es la unión de los intervalos sombreados, entonces

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2(i-1)}{2^n}, \frac{2i-1}{2^n}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{------ (4.18.3)}$$

De (4.18.3) se deduce que $\lambda(E_n) = 1/2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lambda(E_n \Delta E_m) = 1/2$ $\forall n,m$ en $\mathbb{N}$ y $n \neq m$. En consecuencia por (4.18.1) y (4.18.2) se tiene:

$$\|T(\chi_{E_n}) - T(\chi_{E_m})\|_1 = \|G(E_n) - G(E_m)\|_1$$

$$= \|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}\|_1 = \lambda(E_n \Delta E_m) = 1/2 \qquad (n \neq m)$$

Por lo tanto $\{T(\chi_E) : E \in \Sigma\}$ contiene una sucesión $(T(\chi_{E_n}))$ a la cual no puede extraérsele alguna subsucesión convergente. Esto equivale a que el operador lineal T no sea compacto. //

PRUEBA DE LA AFIRMACION 4.18.3

Sea (h_n) una sucesión en $A([0,1], L_1(\lambda), \lambda)$ tal que:

$$\lim_n \int \|h_n - g\| d\lambda = 0$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el operador $T_n : L_\infty(\lambda) \to L_1(\lambda)$ por:

$$T_n(f) = \int f h_n \, d\lambda \qquad \forall f \in L_\infty(\lambda)$$

Claramente $\forall n \in \mathbb{N}$ T_n es un operador lineal acotado y como cada h_n tiene rango finito, se sigue que el rango de T_n es finito-dimensional. En consecuencia T_n es compacto $\forall n \in \mathbb{N}$ (Ver 1.103 p. 13). Más aun

$$\|(T_n - T)(f)\| \leq \int |f| \, \|h_n - g\| \, d\lambda \leq \|f\|_\infty \|h_n - g\|_1 \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

Esto prueba que T es el límite de los operadores compactos T_n. Por lo tanto T es compacto //

COROLARIO 4.19

Existe $T \in LB(L_1(\lambda), c_0)$ que no es representable.

DEM:

Por el corolario (4.17), c_0 no tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a $([0,1], \Sigma, \lambda)$. Ahora por el teorema (4.7) el resultado es inmediato. Más aun el lema (4.5) sugiere que tal operador lineal acotado (no representable) tenga la forma:

$$T(f) = \int f(t) \operatorname{sen}(2^n \pi t) \, d\lambda(t) \quad \forall f \in L_1(\lambda) \quad //$$

COROLARIO 4.20

Existe $T \in LB(L_1(\lambda), L_1(\lambda))$ que no es representable.

DEM:

Como $L_1(\lambda)$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodym (corolario 4.18), entonces por (4.7) existe $T \in LB(L_1(\lambda), L_1(\lambda))$ que no es representable. Más aun por lema (4.5):

$$T(f) = f \qquad \forall f \in L_1(\lambda) \quad //$$

Los corolarios del teorema (4.13) que hemos considerado anteriormente prueban a través de la propiedad de Radon-Nikodym que los espacios c_0 y $L_1(\lambda)$ no tienen base de Schauder acotadamente completa. Utilizando ahora el mismo resultado se prueba que los espacios $H(D)$ y ℓ_p $1 \le p < \infty$ tienen la propiedad de Radon-Nikodym. Para el caso del espacio de funciones holomorfas acotadas sobre D, el ejemplo (4.10) resuelve la situación. Por otra parte observemos que si $1 \le p < \infty$, entonces (e_n) es base de Schauder para ℓ_p, donde $(e_n)_i = \delta_{ni}$ $\forall n, i \in \mathbb{N}$. Además si (α_n) es una sucesión de escalares que satisface $\sup_n \|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|_p < \infty$ entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k e_k\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} = \sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|_p < \infty$$

Como en cualquier espacio de Banach absoluta sumabilidad implica sumabilidad (ver [15] p. 30 ej 17) se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ existe en ℓ_p. Por lo tanto (e_n) es una base de Schauder acotadamente completa.

El teorema que probaremos a continuación relaciona la propiedad de Radon-Nikodym con el espacio ℓ_1. De aquí el interés de establecer en el párrafo anterior el hecho de que ℓ_1 posea semejante propiedad. Por cierto se puede demostrar directamente (sin utilizar 4.15) que ℓ_1 tiene la propiedad de Radon-Nikodym, aplicando el teorema de Radon-Nikodym (escalar) a cada medida-coordenada que constituyen a una medida vectorial $h: \Sigma \to \ell_1$ μ-continua y de variación acotada, previamente seleccionada.

TEOREMA 4.21 (LEWIS-STEGALL 1973)

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita. Son equivalentes:

i) V tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a (Ω,Σ,μ)

ii) $\forall\, T \in LB(L_1(\mu), V)$ existen $L : \ell_1 \to V$ y $S : L_1(\mu) \to \ell_1$ operadores lineales continuos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L_1(\mu) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "S"'] & & V \\ & \ell_1 \arrow[ur, "L"'] & \end{tikzcd}$$

DEM:

ii) $\Rightarrow$ i). Sean $T \in LB(L_1(\mu), V)$, $L : \ell_1 \to V$ y $S : L_1(\mu) \to \ell_1$ tales que $T = L \circ S$. Como ℓ_1 tiene la propiedad de Radon-Nikodym entonces existe $g \in B_\infty(\Omega, \ell_1, \mu)$ tal que $S(f) = \int f g \, d\mu$ $\forall\, f \in L_1(\mu)$. Por corolario (3.9) tenemos:

$$T(f) = (L \circ S)(f) = \int f (L \circ g)\, d\mu \quad \forall\, f \in L_1(\mu)$$

Por lo tanto T es representable y por teorema (4.7) V tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $T \in LB(L_1(\mu), V)$. Por teorema (4.7) existe $g \in B_\infty(\Omega, V, \mu)$ tal que $T(f) = \int f g \, d\mu$ $\forall\, f \in L_1(\mu)$. Como g es μ-medible, el corolario (2.13) garantiza la existencia de una sucesión (h_n) de funciones μ-medibles contablemente valuadas que satisfacen:

$$\|g - h_n\| < \varepsilon\, 2^{-n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{----- (4.21.1)}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos $g_i : \Sigma \to V$ como $g_1 = h_1$ y $g_n = h_n - h_{n-1}$ $\forall\, n \geq 2$.

De (4.20.1) se sigue que:

$$|||g - \sum_{m=1}^{n} g_m|||_\infty < \varepsilon 2^{-n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{-------- (4.21.2)}$$

Si $g_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k} \chi_{E_{n,k}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, donde $(E_{n,k})_k$ es una sucesión de elementos disjuntos de Σ, entonces obtenemos que $\|v_{n,k}\| < \varepsilon 2^{-n}$ $\forall\, n \geq 2$. En efecto, sin perder generalidad podemos suponer que $\|g_n(x)\| \leq |||g_n|||_\infty$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $x \in \Sigma$. En consecuencia si $n \geq 2$, entonces $\|v_{n,k}\| < |||g_n|||_\infty$. Por (4.2.1)

$$\|v_{n,k}\| \leq |||g_n||| \leq |||g - h_n|||_\infty + |||g - h_{n-1}|||_\infty < \varepsilon 2^{-n-1} + \varepsilon 2^{-n-2} < \varepsilon 2^{-n} \quad \text{---(4.21.3)}$$

$\forall\, n \geq 2$. Además como $|||g - g_1|||_\infty < \varepsilon/2$ y $|||g|||_\infty = \|T\|$ se tiene que:

$$\|v_{1,k}\| \leq |||g_1|||_\infty < \varepsilon/2 + |||g|||_\infty = \varepsilon/2 + \|T\| \quad \text{----- (4.21.4)}$$

Lo que prosigue ahora es tratar de hallar una expresión para $T(f)$ que nos conduzca de manera natural al encuentro de los operadores lineales continuos L y S que necesitamos. Para esto consideremos los hechos siguientes:

1) $\|f(\sum_{m=1}^{n} g_m)\| \leq \varepsilon |f|$ $\forall\, n \geq 2$ y $f \in L_1(\mu)$ (por 4.21.3)

2) $\lim_n f(\sum_{m=1}^{n} g_m) = f g$ (por 4.21.2)

3) $\| f(\sum_{k=1}^{m} v_{n,k} \chi_{E_{n,k}}) \| \leq |f|\, |||g_n|||_\infty$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ fijo

4) $\lim_m f(\sum_{k=1}^{m} v_{n,k} \chi_{E_{n,k}}) = f g_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ fijo

Aplicando en dos ocasiones el Teorema de Convergencia Dominada tenemos:

$$T(f) = \int f g \, d\mu = \int \lim_n f\Big(\sum_{m=1}^{n} g_m\Big) d\mu = \lim_n \int f \sum_{m=1}^{n} g_m \, d\mu$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int f g_m \, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int \lim_p f\Big(\sum_{k=1}^{p} v_{m,k} \chi_{E_{m,k}}\Big) d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\lim_p \int f\Big(\sum_{k=1}^{p} v_{m,k} \chi_{E_{m,k}}\Big) d\mu\Big)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_{m,k}} f \, d\mu \, v_{m,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\|v_{m,k}\| \int_{E_{m,k}} f \, d\mu\Big) \frac{v_{m,k}}{\|v_{m,k}\|} \qquad \forall f \in L_1(\mu)$$

Es natural definir $L : \ell_1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to V$ y $S : L_1(\mu) \to \ell_1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ por:

$$L((\alpha_{m,k})) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{m,k} \frac{v_{m,k}}{\|v_{m,k}\|} \qquad \forall (\alpha_{m,k}) \in \ell_1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$
$$S(f)(m,k) = \|v_{m,k}\| \int_{E_{m,k}} f \, d\mu \qquad \forall f \in L_1(\mu)$$

Es inmediato verificar que L y S son operadores lineales que satisfacen:

$$T(f) = (L \circ S)(f) \qquad \forall f \in L_1(\mu)$$

Resta probar que ambos son continuos. Claramente $\|L\| \leq 1$. Ahora bien, por (4.21.5) y (4.21.4) se tienen las desigualdades:

$$\|S(f)\| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|v_{m,k}\| \Big| \int_{E_{m,k}} f \, d\mu \Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|v_{1,k}\| \int_{E_{1,k}} |f| \, d\mu + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|v_{m,k}\| \int_{E_{m,k}} |f| \, d\mu$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon/2 + \|T\|) \int_{E_{1,k}} |f| \, d\mu + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon 2^{-m}) \int_{E_{m,k}} |f| \, d\mu$$
$$\leq (\varepsilon/2 + \|T\|) \|f\|_1 + \Big(\sum_{m=2}^{\infty} \varepsilon 2^{-m}\Big) \|f\|_1 \leq (\varepsilon + \|T\|) \|f\|_1$$

$\forall f \in L_1(\mu)$. Por lo tanto $\|S\| \leq \varepsilon + \|T\|$. //

OBSERVACION 4.22

En la prueba del teorema (4.21) se observa que si V tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a (Ω, Σ, μ), entonces todo operador lineal $T \in LB(L_1(\mu), V)$ puede factorizarse como $T = L \circ S$. Más aún, $\forall\, \varepsilon > 0$ el operador lineal continuo S, puede ser elegido de tal manera que satisfaga la condición $\|S\| \leq \|T\| + \varepsilon$. También $\|L\| \leq 1$.

Un teorema clásico de Vitali caracteriza funciones reales sobre $[0,1]$ absolutamente continuas, como aquellas funciones que pueden expresarse como integrales indefinidas de sus derivadas. Sin embargo, esto no suele suceder siempre, cuando las funciones absolutamente continuas tienen rango en espacios de Banach más generales.

Discutamos este asunto en los siguientes párrafos.

DEFINICION 4.23

Una función $f : [0,1] \to V$ es llamada absolutamente continua si $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subintervalos disjuntos de $[0,1]$ con $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \delta$, entonces se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f(b_n) - f(a_n)\| < \varepsilon$$

DEFINICION 4.24

Un espacio de Banach V es llamado <u>espacio de Gel'fand</u> si cada función $f:[0,1]\to V$ absolutamente continua, es diferenciable c.d (λ).

El siguiente teorema establece la relación entre la propiedad de Radon-Nikodym y los espacios de Gel'fand.

TEOREMA 4.25

Sea $([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]},\lambda)$ el espacio de medida (finito), donde λ es la medida de Lebesgue sobre los borelianos en $[0,1]$. Son equivalentes:

i) V es un espacio de Gel'fand

ii) V tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a $([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]},\lambda)$.

DEM:

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $G:\mathcal{B}_{[0,1]}\to V$ una medida vectorial λ-continua y de variación acotada. Definimos $f:[0,1]\to V$ por:

$$f(t)=G([0,t]) \quad \forall\ t\in[0,1]$$

Para verificar que f es absolutamente continua consideremos a $\varepsilon>0$. Como $G\ll\lambda$, por el corolario (A.11) se sabe que $|G|\ll\lambda$. En consecuencia existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que si $\lambda(E)<\delta$, entonces $|G|(E)<\varepsilon$. (Ver

[10] p. 73 Teo. 10.15). En particular, si $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$ (unión disjunta de subintervalos de $[0,1]$) con $\lambda(E) < \delta$, entonces $|G|(E) < \varepsilon$. Pero,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a_n, b_n]) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]\right) = \lambda(E) < \delta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f(b_n) - f(a_n) \| = \sum_{n=1}^{\infty} \| G([0, b_n]) - G([0, a_n]) \|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \| G((a_n, b_n]) \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |G|((a_n, b_n]) = |G|(E) < \varepsilon$$

Así pues, f es absolutamente continua. Por hipótesis, existe una función ϕ, que satisface ser la derivada de f. Además $\forall\ v^* \in V^*$ y $0 \leq a \leq b \leq 1$ se tiene que:

$$v^* G((a,b]) = v^* f(b) - v^* f(a) = \int_a^b v^* \phi \, d\lambda$$

Es decir, $\forall\ v^* \in V^*$ se satisface la igualdad $v^* G(E) = \int_E v^* \phi \, d\lambda$, donde E es un intervalo contenido en $[0,1]$. Más aún por el Lema de las Clases Monótonas (Ver [10] p. 5) es posible concluir que $\forall\ v^* \in V^*$,

$$v^* G(E) = \int_E v^* \phi \, d\lambda \quad \forall\ E \in \mathcal{B}_{[0,1]} \qquad ------(4.25.1)$$

Notemos por otra parte que si $\phi \in B_1([0,1], V, \lambda)$, entonces por (4.25.1) y el corolario (3.9) se tiene que:

$$v^*G(E) = \int_E v^*\phi \, d\lambda = v^*\left(\int_E \phi \, d\lambda\right) \quad \forall\ E \in \mathcal{B}_{[0,1]} \ \text{y} \ v^* \in V^*.$$

Por lo tanto $G(E) = \int_E \phi \, d\lambda \quad \forall\ E \in \mathcal{B}_{[0,1]}$. Para comprobar que ϕ es Bochner integrable, basta comprobar que es λ-medible y que $\|\phi\| \in L_1(\lambda)$. Claramente ϕ es λ-medible. Además por la proposición (A.6) y (4.25.1):

$$|v^*G|(E) = \int_E |v^*\phi| \, d\lambda \quad \forall\ E \in \mathcal{B}_{[0,1]} \ \text{y} \ v^* \in V^*$$

En consecuencia

$$\int_{[0,1]} |v^*\phi| \, d\lambda = |v^*G|([0,1]) \leq \|v^*\| \, |G|([0,1]) \quad \forall\ v^* \in V^*.$$

Ahora bien, si $\|v^*\| \leq 1$, entonces $\int_{[0,1]} |v^*\phi| \, d\lambda \leq |G|([0,1])$. Por el Lema del Promedio (Ver [10] p. 98 Ej 43), $|v^*\phi| \leq |G|([0,1])$ c.d. El Teorema de Hahn-Banach garantiza que:

$$\|\phi(x)\| = \sup\{|v^*\phi(x)| : \|v^*\| \leq 1\} \leq |G|([0,1]) \quad \text{c.d}$$

Pero G es de variación acotada. Por lo tanto, $\|\phi\| \in L_1(\lambda)$ (Ver. Teo 2.5).

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $f : [0,1] \to V$ una función absolutamente continua. Para cada subintervalo E de $[0,1]$ de la forma $E = (a,b]$, escribimos

$$\overline{G}(E) = f(b) - f(a)$$

Mediante un procedimiento estándar, es posible garantizar la existencia de una extensión débil-contablemente aditiva de $\overline{G}$, denotada también por $\overline{G}$, sobre el álgebra generada por los subintervalos de $[0,1]$. La extensión $\overline{G}$ es de variación acotada y λ-continua. Por el Teorema (A.17), existe una extensión G de $\overline{G}$ sobre $\mathcal{B}_{[0,1]}$ de variación acotada y λ-continua. Como V tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, entonces existe $\phi \in B_1([0,1], V, \lambda)$ tal que $G(E) = \int_E \phi \, d\lambda \quad \forall \; E \in \mathcal{B}_{[0,1]}$. En consecuencia,

$F([0,1]) = \int_{[0,1]} \phi \, d\lambda$ o lo que es lo mismo:

$$f(t) = \int_{[0,1]} \phi \, d\lambda + f(0) \qquad \forall \quad t \in [0,1]$$

Finalmente, se tiene que $f' = \phi$ c.d. En efecto, se sigue del teorema que a continuación se enuncia. //

<u>TEOREMA 4.26</u>

Si $f \in B_1([0,1], V, \lambda)$, entonces para casi-todo $s \in [0,1]$ se tiene que:

1) $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[s,s+h]} \| f(t) - f(s) \| \, d\lambda(t) = 0$

2) $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[s,s+h]} f(t) \, d\lambda(t) = f(s)$

<u>DEM:</u>

Ver [7] p. 49. //

CAPITULO 5

EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM

EN SUS VERSIONES: PRIMARIA Y UTILITARIA

El Teorema de Radon-Nikodym vuelve a ser en este capitulo el objetivo fundamental. Las novedades que presenta, son los conductos a través de los cuales se abordará dicho Teorema. Por un lado se probará que todo operador lineal compacto es representable, lo que posteriormente nos conducirá a la demostración de la versión primaria del Teorema de Radon-Nikodym, y por el otro, la representabilidad de los operadores lineales débilmente compactos.

Es interesante mencionar que en ambas versiones del Teorema de Radon-Nikodym se advertirá un carácter local en la derivada de Radon-Nikodym de una medida vectorial. El Lema de Exhausión tiene su importancia en este asunto.

En la parte final del capítulo se estudia la relación entre el espacio dual V^* y la propiedad de Radon-Nikodym.

Inicialmente estableceremos la representabilidad de los operadores lineales compactos sobre $L_1(\mu)$. Para esto, necesitamos del siguiente resultado:

LEMA 5.1

Sea π una partición (finita) disjunta de $\underline{X}$ con elementos de S. Definimos -

el operador lineal $E_\pi : B_1(\Sigma,V,\rho) \longrightarrow B_1(\Sigma,V,\rho)$ por:

$$E_\pi(f) = \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f d\rho}{\rho(A)} \chi_A \quad \forall f \in B_1(\Sigma,V,\rho)$$

(en el caso 0/0 escribiremos $0/0 = 0$). Se tienen entonces los siguientes resultados:

i) $|||E_\pi(f)|||_1 \leq |||f|||_1 \quad \forall f \in B_1(\Sigma,V,\rho)$

ii) Si $E_\pi /_{B_\infty(\Sigma,V,\rho)}$ entonces $|||E_\pi(f)|||_\infty \leq |||f|||_\infty \quad \forall f \in B_\infty(\Sigma,V,\rho)$

iii) $\lim_\pi |||E_\pi(f) - f|||_1 = 0 \quad \forall f \in B_1(\Sigma,V,\rho)$

iv) $\lim_\pi |||E_\pi(f) - f|||_\infty = 0 \quad \forall f \in B_\infty(\Sigma,V,\rho)$ con rango relativamente norma compacto.

En (iii) y (iv) las particiones son dirigidas por refinamientos y $\pi \to \{\{x\} : x \in \Sigma\}$

DEM:

(i) Si $f \in B_1(\Sigma,V,\rho)$, entonces

$$|||E_\pi(f)|||_1 = \sum_{A\in\pi} \left\|\int_A f d\rho\right\| \leq \int \|f\| d\rho = |||f|||_1$$

(ii) Si $f \in B_\infty(\Sigma,V,\rho)$, entonces

$$|||E_\pi(f)|||_\infty = \max\left\{ \frac{\|\int_A f d\rho\|}{\rho(A)} ; A \in \pi \right\}$$

Por la desigualdad de Hölder se tiene que $\|\int_A f d\rho\| \leq |||f|||_\infty \rho(A)$. Por lo tanto $|||E_\pi(f)|||_\infty \leq |||f|||_\infty$.

(iii) Sea $h = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$ con $E_i \cap E_j = \phi$ $i \neq j$ y $v_i \in V$. Si π_i

es una partición (disjunta) de E_i $\forall i=1,\dots,n$, entonces $\pi'=\{A\in\,;\ A\in \bigcup_{i=0}^{n}\pi_i\}$ donde π_0' es una partición (disjunta) de $\Sigma\setminus\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, es una partición (disjunta) de Σ. Así que

$$E_{\pi'}(A)=\sum_{A\in\pi_1}\frac{\int_A A\,d\rho}{\rho(A)}\chi_A+\dots+\sum_{A\in\pi_n}\frac{\int_A A\,d\rho}{\rho(A)}\chi_A+\sum_{A\in\pi_0}\frac{\int_A A\,d\rho}{\rho(A)}\chi_A$$

$$=\sum_{A\in\pi_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i\,\rho(A\cap E_i)}{\rho(A)}\chi_A+\dots+\sum_{A\in\pi_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i\,\rho(A\cap E_i)}{\rho(A)}\chi_A$$

$$=\sum_{A\in\pi_1}v_1\chi_A+\dots+\sum_{A\in\pi_n}v_n\chi_A=\sum_{i=1}^{n}v_i\chi_{E_i}$$

En consecuencia si π es un refinamiento de π', entonces $E_\pi(A)=A$. Es decir, la red $(E_\pi(A))$ es $|||\cdot|||_1$ - convergente. De hecho:

$$\lim_{\pi}|||E_\pi(A)-A|||_1=0 \qquad \text{------------} (5.1.1)$$

Para $f\in B_1(\Sigma,V,\rho)$ seleccionamos una sucesión (A_n) en $A(\Sigma,V,\rho)$ tal que $\lim_n|||f-A_n|||_1=0$.

Por (i) se tiene que:

$$|||E_\pi(f)-E_\pi(A_n)|||_1\le|||f-A_n|||_1 \quad \forall\,\pi \qquad \text{--------} (5.1.2)$$

Sea $\varepsilon>0$ y $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $|||f-A_n|||_1<\varepsilon/2$ $\forall\, n\geq N$. De (5.1.2) se sigue que para $n\geq N$:

$$|||E_\pi(f)-f|||_1\le|||E_\pi(f)-E_\pi(A_n)|||_1+|||E_\pi(A_n)-A_n|||_1+|||f-A_n|||_1$$

$$<\varepsilon/2+|||E_\pi(A_n)-A_n|||_1+\varepsilon/2$$

Finalmente por (5.1.1) obtenemos que:

$$\overline{\lim_{\pi}}\,|||E_\pi(f)-f|||_1\leq\varepsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitraria se concluye que $\lim_{\pi} \|E_{\pi}(f) - f\|_1 = 0$.

(iv) Se sigue del hecho de que el subespacio de $B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ generado por las funciones elementales es denso en el subespacio vectorial cerrado de $B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ que consiste de las funciones con rango <u>esencialmente</u> <u>relativamente</u> <u>norma</u> <u>compacto</u> (i.e $f \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tiene rango esencialmente relativamente norma compacto, si existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ tal que $\overline{f(\Sigma \setminus E)}$ es norma compacto) y de la parte (ii). //

<u>DEFINICION 5.2</u>

$K_\infty(\Sigma, V, \mu) = \{ f \in B_\infty(\Sigma, V, \mu) : f$ tiene rango esencialmente relativamente norma compacto$\}$

<u>PROPOSICION 5.3</u>

Si $T \in LB(L^1(\mu), V)$ tiene rango finito dimensional, entonces T es representable.

<u>DEM:</u>

Supongamos que $\dim_{\mathbb{C}}(T(L^1(\mu))) = n$ (dimensión de $T(L^1(\mu))$ sobre $\mathbb{C}$). Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $T(L^1(\mu))$, entonces definimos $T_i : L^1(\mu) \to \mathbb{C}$

$$T_i(f) = \alpha_i \qquad \text{si} \quad T(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad ------ (5.3.1)$$

para cada $f \in L^1(\mu)$. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente, se tiene que T_i está bien definido $\forall i$. Además, si $T(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $T(g) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, entonces

$$T(f+g) = T(f) + T(g) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i$$

En consecuencia $T_i(f+g) = \alpha_i + \beta_i = T_i(f) + T_i(g)$ $\forall i$. Más aún, por (5.3.1) T_i es acotado $\forall i$. Se sigue del Teorema de Representación de Riesz (escalar) que existe $h_i \in L_\infty(\mu)$ tal que $T_i(f) = \int f h_i d\mu$ $\forall f \in L_1(\mu)$ $\forall i$. Claramente $g = \sum_{i=1}^{n} v_i h_i$ es un elemento de $B_\infty(\Sigma, V, \mu)$. Finalmente:

$$T(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} T_i(f) v_i = \sum_{i=1}^{n} \int f h_i d\mu\, v_i = \int f \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i h_i \Big) d\mu = \int f g d\mu \;//$$

El siguiente resultado generaliza a la proposición (5.3), para el caso en que $T \in L(L_1(\mu), V)$ es compacto (recuerde que todo operador lineal acotado con rango finito dimensional es compacto (Ver [16] p.98)). Hacemos también lo propio con el hecho de que $L_1^*(\mu) = L_\infty(\mu)$.

TEOREMA 5.4 (REPRESENTACION DE OPERADORES COMPACTOS SOBRE $L_1(\mu)$)

Si $LC(L_1(\mu), V)$ representa el espacio vectorial de operadores lineales compactos, entonces

i) Todo elemento de $LC(L_1(\mu), V)$ es representable. Más aún, si $T \in LC(L_1(\mu), V)$ entonces existe $g \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$T(f) = \int f g d\mu \quad \forall f \in L_1(\mu)$$

ii) Los espacios $LC(L_1(\mu), V)$ y $K_\infty(\Sigma, V, \mu)$ son isométricamente isomorfos.

DEM:

i) Sean $T \in LC(L_1(\mu), V)$ y $E_\pi : L_1(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)$ el operador lineal definido en el lema (5.1). La prueba se sostenta en la veracidad de los hechos siguientes:

a) $\lim_{\pi} \| T E_{\pi} - T \| = 0$

b) $\forall\, \pi$ (partición disyunta de S) existe $g_{\pi} \in K_{\infty}(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$T E_{\pi}(f) = \int f g_{\pi} d\mu \quad \forall\; f \in L_1(\mu)$$

c) La red $(g_{\pi}) \subset K_{\infty}(\Sigma, V, \mu)$ obtenida de (b) satisface $\lim_{\pi} \| g_{\pi} - g \|_{\infty} = 0$ para alguna $g \in B_{\infty}(S, V, \mu)$. Más aún $g \in K_{\infty}(\Sigma, V, \mu)$.

d) $\lim_{\pi} \int f g_{\pi} d\mu = \int f g\, d\mu \quad \forall\; f \in L_1(\mu)$.

Probemos la validez de los incisos anteriores.

(a) Si $f \in L_1(\mu)$ y $h \in L_{\infty}(\mu)$, entonces:

$$\int E_{\pi}(f)\, h\, d\mu = \sum_{A \in \pi} \frac{\int_A f d\mu \cdot \int_A h\, d\mu}{\mu(A)} = \int E_{\pi}(h)\, f\, d\mu$$

En consecuencia E_{π} es "auto-adjunto" (Ver [15] p. 429). Así pues, $E_{\pi} = E_{\pi}^{*}$ y

$$(T E_{\pi})^{*} = E_{\pi}^{*} T^{*} = E_{\pi} T^{*} \qquad \text{------------ (5.3.1)}$$

Como T es compacto, por un teorema de Schauder (Ver [8] p. 14 Ej. 4) $T^{*}: Y^{*} \to L_{\infty}(\mu)$ (el adjunto de T) es también compacto. Por el lema (5.1), $\| E_{\pi} \| \leq 1$ y

$$\lim_{\pi} \| E_{\pi}(f) - f \|_{\infty} = 0 \quad \forall\; f \in L_{\infty}(\mu)$$

En consecuencia $E_\pi(f) \to f$ unif. sobre subconjuntos norma-compactos de $L_\infty(\mu)$. De aquí:

$$\lim_\pi (E_\pi T^*)(v^*) = \lim_\pi E_\pi(T^*(v^*)) = T^*(v^*)$$

$\forall\, v^* \in V^*$ tal que $\|v^*\| \leq 1$. Tenemos entonces que $\lim_\pi \|E_\pi T^* - T^*\| = 0$. Por (5.3.1) $E_\pi T^* = (TE_\pi)^*$. Por lo tanto:

$$\lim_\pi \|E_\pi T^* - T^*\| = \lim_\pi \|(TE_\pi)^* - T^*\| = \lim_\pi \|(TE_\pi - T)^*\|$$

$$= \lim_\pi \|TE_\pi - T\|$$

Es decir, $\lim_\pi \|TE_\pi - T\| = 0$.

(b) para cada partición π (disjunta) de Σ, definimos $g_\pi : \Sigma \to V$ por:

$$g_\pi = \sum_{A\in\pi} \frac{T(\chi_A)}{\mu(A)} \chi_A$$

Notemos que si $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$, entonces:

$$TE_\pi(f) = T\left(\sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)} \chi_A\right) = \sum_{A\in\pi} \int_A f\,d\mu \cdot \frac{T(\chi_A)}{\mu(A)}$$

$$= \sum_{A\in\pi} \int_A f \cdot \frac{T(\chi_A)}{\mu(A)}\,d\mu = \sum_{A\in\pi} \int f\,\frac{T(\chi_A)}{\mu(A)} \chi_A\,d\mu$$

$$= \int f \left(\sum_{A\in\pi} \frac{T(\chi_A)}{\mu(A)} \chi_A\right) d\mu = \int f g_\pi\,d\mu$$

(c) Por (b) si π_1 y π_2 son particiones, entonces:

$$(TE_{\pi_1} - TE_{\pi_2})(f) = \int f(g_{\pi_1} - g_{\pi_2})\,d\mu \qquad \forall\, f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$$

Por la observación (4.6) $\|TE_{\pi_1} - TE_{\pi_2}\| = |||g_{\pi_1} - g_{\pi_2}|||_\infty$. Además por la parte (a) la red (TE_π) es $\|\ \|$-Cauchy. Luego entonces:

$$\lim_{\pi_1,\pi_2} |||g_{\pi_1} - g_{\pi_2}|||_\infty = \lim_{\pi_1,\pi_2} \|TE_{\pi_1} - TE_{\pi_2}\| = 0$$

En consecuencia existe $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\lim_\pi |||g_\pi - g|||_\infty = 0$. Ahora bien, como $g_\pi \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$, entonces $g \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$.

(d) Por la parte (i) $\lim_\pi f g_\pi = f g$ c.d en la $B_\infty(\Sigma, V, \mu)$-norma $\forall f \in L_1(\mu)$. Además:

$$\|f g_\pi\| = |f| \sum_{A\in\pi} \|T(\tfrac{\chi_A}{\mu(A)})\| \chi_A \leq |f| \sum_{A\in\pi} \|T\| \chi_A = |f|\,\|T\|$$

Se sigue del Teorema de Convergencia Dominada:

$$T(f) = \lim_\pi TE_\pi(f) = \lim_\pi \int f g_\pi \, d\mu = \int f g \, d\mu \quad \forall\ f \in L_1(\mu)$$

(ii) Definimos $H: LC(L_1(\mu), V) \to K_\infty(\Sigma, V, \mu)$ por $H(T) = g$, donde g es tal que $T(f) = \int f g \, d\mu \ \ \forall\ f \in L_1(\mu)$. Claramente H es lineal, inyectivo, continuo. Veamos que además es sobre. Sea $g \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$. Definimos $T: L_1(\mu) \to V$ por:

$$T(f) = \int f g \, d\mu \quad \forall\ f \in L_1(\mu)$$

Por la observación (4.6) $\|T\| = |||g|||_\infty$. Como g tiene rango esencialmente totalmente acotado, para cada $\varepsilon > 0$ es posible hallar $g_\varepsilon \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$ elemental, tal que

$$|||g - g_\varepsilon|||_\infty < \varepsilon$$

Sea $T_\varepsilon: L_1(\mu) \to V$ definido por $T_\varepsilon(f) = \int f g_\varepsilon \, d\mu \ \ \forall\ f \in L_1(\mu)$. Como T_ε tiene rango finito dimensional, se tiene que T_ε es compacto. Finalmente como

$$\|T-T_\varepsilon\| = \|g - g_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$$

entonces T es el límite de operadores compactos. Por lo tanto T es compacto.//

OBSERVACION 5.4

En la prueba del teorema anterior definimos $g_\pi : \Sigma \to V$ como $g_\pi = \sum_{A\in\pi} \frac{T(\chi_A)}{\mu(A)} \chi_A$
Estas funciones a la postre dan origen a una función $g : \Sigma \to V$ que satisface:

$$\lim_\pi \|g_\pi - g\|_\infty = 0$$

En consecuencia g toma valores en la $\|\cdot\|_\infty$- cerradura del conjunto:

$$\{T(\chi_A)/\mu(A) : \mu(A) > 0\} \qquad \text{c.d}$$

Así pues, existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ tal que $g(\Sigma \setminus E) \subseteq \overline{\{T(f) : \|f\|_1 = 1\}}$.

El objetivo ahora es determinar la representabilidad de los operadores lineales débilmente compactos sobre $L_1(\mu)$. (i.e $T : L_1(\mu) \to V$ es débilmente compacto si $\overline{T(B_1(0))}$ es débilmente compacto en V, donde $B_1(0) = \{f \in L_1(\mu) : \|f\|_1 \leq 1\}$.
Para esto tenemos que trabajar sobre algunos resultados preliminares.

LEMA 5.5 (DUNFORD-PETTIS 1940)

Sea $T : L_1(\mu) \to V$ un operador lineal débilmente compacto. Si el rango de T es separable, entonces T es representable. Más aun, existe $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ con rango esencialmente relativamente débilmente compacto (i.e si existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ tal que $\overline{g(\Sigma \setminus E)}$ es débilmente compacto en V) que satisface:

$$T(f) = \int f g \, d\mu \quad \forall f \in L_1(\mu)$$

DEM:

Sea π una partición (disjunta) de Σ y $g_\pi : \Sigma \to V$ la función definida por:

$$g_\pi = \sum_{A \in \pi} \frac{T(\chi_A)}{\mu(A)} \chi_A \qquad (0/0 = 0)$$

Como T es débilmente compacto y su rango es separable, se tiene que existe $K \subseteq V$ débilmente compacto en V y norma separable tal que $g_\pi(\Sigma) \subseteq K$ $\forall \pi$. Sin pérdida de generalidad supongamos que V es separable. Sea $(v_n) \subseteq V$ un conjunto denso numerable. Por teorema de Hahn-Banach existe $v_n^* \in V^*$ tal que $v_n^*(v_n) = \|v_n\|$ y $\|v_n^*\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. El lector puede verificar que $\{v_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ satisface: $\|v\| = \sup_n |v_n^*(v)|$ $\forall v \in V$ (el conjunto $\{v_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ recibe el nombre de conjunto normador. Ver [8] p. 54 ej. 10). Por el Teorema de Representación de Riesz usual existe $g_n \in L_\infty(\mu)$ tal que:

$$v_n^* T(f) = \int f g_n \, d\mu \qquad \forall f \in L_1(\mu) \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

Por otra parte:

$$\int f v_n^*(g_\pi) d\mu = \int f \Big(\sum_{A \in \pi} \frac{v_n^* T(\chi_A)}{\mu(A)} \chi_A \Big) d\mu = \int f \Big(\sum_{A \in \pi} \frac{\int_A g_n d\mu}{\mu(A)} \chi_A \Big) d\mu = \int f E_\pi(g_n) d\mu$$

$\forall f \in L_1(\mu)$ y $\forall \pi$. Así pues $v_n^*(g_\pi) = E_\pi(g_n)$ c.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall \pi$. Por el lema (5.1) se tiene:

$$\lim_\pi \|v_n^* g_\pi - g_n\|_\infty = \lim_\pi \|E_\pi(g_n) - g_n\|_\infty = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En consecuencia existen una sucesión (π_m) de particiones de Σ y $N \in \Sigma$ con $\mu(N)=0$ tal que:

$$\lim_m V_n^* g_{\pi_m}(x) = g_n(x) \qquad \text{uniformemente en } x \in \Sigma \setminus N.$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos ahora $g: \Sigma \to V$ como $g(x) = v_x$, donde v_x es un punto de acumulación débil (arbitrario) de la sucesión $(g_{\pi_m}(x))$. Esto es posible ya que $g_\pi(\Sigma) \subseteq K$ $\forall \pi$ y K es débilmente compacto. Además como K es separable se sigue que $g(\Sigma)$ es débilmente compacto y separable. Por otro lado, si $x \in \Sigma \setminus N$, entonces $v^* g(x) = \lim_k v^* g_{\pi_{m_k}}(x)$, donde $(g_{\pi_{m_k}}(x))$ es una subsucesión de $(g_{\pi_m}(x))$ y $v^* \in V^*$. Para cada $V_n^* \in V^*$ y $m_k < m < m_{k+1}$ se tiene:

$$|V_n^* g_{\pi_m}(x) - V_n^* g(x)| \leq |V_n^* g_{\pi_m}(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - V_n^* g_{\pi_{m_k}}(x)| + |V_n^* g_{\pi_{m_k}}(x) - g(x)|$$

Como $\lim_m V_n^* g_{\pi_m} = g_n$ uniformemente sobre $\Sigma \setminus N$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_m V_n^* g_{\pi_m}(x) = V_n^* g(x)$ $\forall x \in \Sigma \setminus N$ y $n \in \mathbb{N}$. Así pues, $V_n^* g$ es μ-medible $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\{V_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto normador y g es separablemente valuada, por el teorema (2.12) se sigue que g es μ-medible. Finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$V_n^* T(f) = \int f g_n d\mu = \int f V_n^* g d\mu = V_n^* \int f g d\mu \qquad \forall f \in L_1(\mu)$$

Por lo tanto $T(f) = \int f g d\mu$ $\forall f \in L_1(\mu)$ y como g es acotada sigue que $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$. //

DEFINICION 5.6

Un subconjunto K de $L_1(\mu)$ es llamado uniformemente integrable si:

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |f|\, d\mu = 0 \quad \text{uniformemente en } f \in K$$

EJEMPLO 5.7

$K = \{\chi_A : A \in \Sigma\}$ es uniformemente integrable. En efecto:

$$\int_E \chi_A\, d\mu = \mu(E \cap A) \leq \mu(E) \quad \forall\, A \in \Sigma$$

LEMA 5.8 (DUNFORD-PETTIS 1940)

Si $T: L_1(\mu) \to V$ es un operador representable y $K \subseteq L_1(\mu)$ un conjunto acotado, uniformemente integrable, entonces $T(K)$ es relativamente norma compacto.

DEM:

Sea $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que $T(f) = \int f g\, d\mu$ $\forall\, f \in L_1(\mu)$ y (A_n) una sucesión en $A(\Sigma, V, \mu)$ tal que $A_n \to g$ c.d. Como K es uniformemente integrable, para cada $\varepsilon > 0$ es posible hallar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces:

$$\int_E |f|\, d\mu < \varepsilon / 2(\|T\|+1) \quad \forall\, f \in L_1(\mu)$$

Para $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \delta$, hallamos $F \in \Sigma$ con $F \subseteq \Omega \setminus E$ y $\mu((\Omega \setminus E) \setminus F) < \delta$ tal que $A_n \to g$ uniformemente sobre F. Como $A_n \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se sigue que $g\chi_F$ tiene rango relativamente norma compacto y,

$$\int_{\Omega \setminus F} |f|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu + \int_{(\Omega \setminus E)\setminus F} |f|\, d\mu < \varepsilon / (\|T\|+1) \quad \forall\, f \in K$$

Más aun, como $g\chi_F \in K_\infty(\Sigma,V,\mu)$ el operador $T_F: L_1(\mu) \to V$ definido por $T_F(f) = \int_F fg\,d\mu$ $\forall f \in L_1(\mu)$ es compacto. En consecuencia, como K es acotado, se sigue que el conjunto

$$\left\{ \int_F fg\,d\mu : f \in K \right\}$$

es relativamente norma compacto. Además:

$$\left\| \int_{\Sigma \setminus F} fg\,d\mu \right\| \leq \int_{\Sigma \setminus F} \|f\| \|g\|\,d\mu \leq \frac{\|T\|\,\varepsilon}{\|T\|+1} < \varepsilon \quad \forall f \in K$$

Por lo tanto, el conjunto:

$$\{T(f) : f \in K\} = \left\{ \int_F fg\,d\mu + \int_{\Sigma \setminus F} fg\,d\mu : f \in K \right\}$$

es totalmente acotado, pues $\varepsilon > 0$ es arbitrario. Es decir, $T(K)$ es relativamente norma compacto. //

Estamos en condiciones de probar dos teoremas que garantizan la representabilidad de los operadores lineales débilmente compactos.

<u>TEOREMA 5.9</u> (DUNFORD - PETTIS - PHILLIPS 1940)

Si $T \in LB(L_1(\mu), V)$ es débilmente compacto, entonces $T(L_1(\mu))$ es norma - separable.

<u>DEM:</u>

Para probar que $T(L_1(\mu))$ es norma separable, basta demostrar que el conjunto $\{T(\chi_E) : E \in \Sigma\}$ es norma separable. Esto a su vez se comprueba verificando que $\{T(\chi_E) : E \in \Sigma\}$ es relativamente norma compacto. Consideremos una - sucesión $(T(\chi_{E_n}))$ y Σ_1 la σ-álgebra generada por (E_n). Como Σ_1

es contablemente generada, el subespacio $L_1(\mathcal{S}_1, \mu)$ de $L_1(\mu)$ que consiste de aquellos elementos de $L_1(\mu)$ que son $\mathcal{S}_1$-medibles, es un subespacio vectorial cerrado, separable de $L_1(\mu)$. En consecuencia, si $T_1 : L_1(\mathcal{S}_1, \mu) \to V$ es el operador definido por $T_1(f) = T(f)$ $\forall f \in L_1(\mathcal{S}_1, \mu)$, entonces T_1 es débilmente compacto y con rango separable. Por el lema (5.5) T_1 es representable. Combinando el ejemplo (5.7) con el lema (5.8) se tiene que el conjunto $\{T_1(\chi_{E_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente norma compacto. Pero $T(\chi_{E_n}) = T_1(\chi_{E_n})$, de donde se sigue que la sucesión $(T(\chi_{E_n}))$ posee una subsucesión convergente. Por lo tanto el conjunto $\{T(\chi_{E_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente norma compacto. //

COROLARIO 5.10

Si $T \in LB(L_1(\mu), V)$ es débilmente compacto, entonces T es representable.

DEM:

Es inmediata de (5.5) y (5.9). //

Un teorema de vital importancia con respecto a la derivada de Radon-Nikodym de una medida vectorial es el que a continuación enunciamos.

TEOREMA 5.11 (DUNFORD-PETTIS-PHILLIPS 1940)

Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $T : L_1(\mu) \to V$ es un operador lineal débilmente compacto

ii) Existe $g \in B_\infty(\mathcal{E}, V, \mu)$ con rango esencial, relativa y débilmente compacto tal que:

$$T(f) = \int f g \, d\mu \qquad \forall f \in L_1(\mu)$$

DEM:

(i ⇒ ii) Sea $T : L_1(\mu) \to V$ un operador lineal débilmente compacto. Si g es el núcleo de T construido en la prueba del lema (5.5), entonces el rango de g está contenido en la cerradura débil del conjunto $\{T(\chi_A)/\mu(A) : \mu(A) > 0\}$, que por hipótesis es débilmente compacto.

(ii ⇒ i) Sea $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ con rango esencial, relativa y débilmente compacto tal que:

$$T(f) = \int f g \, d\mu \qquad \forall f \in L_1(\mu)$$

Por (A.13) $\forall A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ se tiene que $T(\chi_A)/\mu(A) \in \overline{co}(g(\Sigma))$.

Del teorema de Krein-Smulian (Ver [7] p. 51) se sigue que $\overline{co}(g(\Sigma))$ es débilmente compacto. Si $M = \{T(\chi_A)/\mu(A) : \mu(A) > 0\}$ entonces definimos el conjunto:

$$\Gamma(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{T(\chi_A)}{\mu(A)} : \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq 1 \right\} \qquad \text{------ (5.11.1)}$$

($\Gamma(M)$ = la cerradura absoluta del casco convexo de M. Ver [14] p. 160).

Como $\Gamma(M) \subseteq \overline{co}(g(\Sigma))$ se tiene que $\Gamma(M)$ es un conjunto débilmente compacto.

Finalmente probaremos que $\Gamma(M) = \overline{\{T(f) : \|f\|_1 \leq 1\}}$, lo cual demostraría que T es un operador débilmente compacto. Claramente $\Gamma(M) \subseteq \overline{\{T(f) : \|f\|_1 \leq 1\}}$.

Además como $\Gamma(M)$ es cerrado, basta probar que $\{T(f) : \|f\|_1 \leq 1\} \subseteq \Gamma(M)$.

Sea $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ con $A_i \in \Sigma$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Si $\|f\|_1 \leq 1$ entonces $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \mu(A_i) \leq 1$. Más aun:

$$T(f)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(\chi_{A_i})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i)\,\frac{T(\chi_{A_i})}{\mu(A_i)} \qquad (0/0=0)$$

Así pues, $T(f)\in\Gamma(M)$. En general, si $f\in L^1(\mu)$ con $\|f\|_1\leq 1$, entonces seleccionamos una sucesión (f_n) de funciones μ-simples tales que $\|f-f_n\|_1\to 0$ $(n\to\infty)$

Por lo tanto $T(f)=\lim_n T(f_n)$ y como $\Gamma(M)$ es cerrado $T(f)\in\Gamma(M)$ //

COROLARIO 5.12

Si V es reflexivo, entonces V tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

DEM:

Sea V un espacio de Banach (sobre $\mathbb{C}$) reflexivo. Luego entonces B_1^V, la bola cerrada unitaria en V, es un conjunto débilmente compacto. Si $T:L^1(\mu)\to V$ es un operador lineal continuo, entonces:

$$T(B_1^{L^1})\subseteq\|T\|\,B_1^V$$

donde $B_1^{L^1}$ es la bola cerrada unitaria en $L^1(\mu)$. Como la compacidad débil se preserva bajo homotecias, se sigue que T es un operador débilmente compacto. Por el teorema (5.11) T es representable y de (4.7) se sigue que V tiene la propiedad de Radon-Nikodym. //

Hasta el momento se ha probado que si $T:L^1(\mu)\to V$ es un operador lineal compacto (débilmente compacto), entonces se tiene que T es representable. Más aun, si T es compacto (débilmente compacto), entonces su núcleo es una función en $B_\infty(E,V,\mu)$ con rango esencial y relativamente compacto (esencial, relativa, débilmente compacto). Estos resultados son de vital importancia para probar el teorema de Radon-Nikodým en sus <u>versiones primaria</u> y <u>utilitaria</u>. Tendremos además el apoyo del <u>Lema de Exhausión</u>, el cual probaremos a continuación, que constituye la parte medular en la demostración de dichos teoremas. El concepto <u>local</u> en materia de derivadas de Radon-Nikodym de una medida vectorial que insinuamos en la introducción del capítulo quedará justificado vía el material expuesto en los párrafos siguientes.

<u>LEMA 5.13</u> (LEMA DE EXHAUSION)

Sea $G: \mathcal{S} \to Y$ una medida vectorial. y $\underline{P}$ una propiedad relativa a G que cumple:

i) G tiene la propiedad $\underline{P}$ en cada conjunto en $\mathcal{S}$ de μ-medida cero.

ii) Si G tiene la propiedad $\underline{P}$ en $E \in \mathcal{S}$ y $A \subseteq E$ $(A \in \mathcal{S})$, entonces G tiene la propiedad $\underline{P}$ en A.

iii) Si G tiene la propiedad $\underline{P}$ en $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$ con $E_1 \cap E_2 = \phi$, entonces G tiene la propiedad $\underline{P}$ en $E_1 \cup E_2$.

iv) $\forall\, A \in \mathcal{S}$ con $\mu(A) > 0$, existe $B \in \mathcal{S}$ con $\mu(B) > 0$ tal que G tiene la propiedad $\underline{P}$ en B.

Entonces existe una sucesión (A_n) de elementos disjuntos de $\mathcal{S}$ tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, G tiene la propiedad $\underline{P}$ en A_n.

DEM:

Sea $c = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ donde $\mathcal{A}$ es el subconjunto de $\mathcal{S}$ definido por:

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{S} : G \text{ tiene la propiedad } \underline{P} \text{ en } A\}$$

Seleccionamos ahora una sucesión (B_n) en $\mathcal{A}$ que satisfaga $\lim_n \mu(B_n) = c$. Si $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, entonces $E_n \in \mathcal{A}$ (por (iii)) y $E_n \subseteq E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Además por monotonía $\lim_n \mu(E_n) = c$. Por otro lado, si $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) > 0$, entonces por (iv) existe $A \subseteq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ tal que G tiene la propiedad $\underline{P}$ en A. Pero la sucesión $(A \cup E_n)$ en $\mathcal{A}$ satisface:

$$\lim_n \mu(A \cup E_n) = \lim_n (\mu(A) + \mu(E_n)) = \mu(A) + c > c$$

Esto por supuesto no es posible por la definición de c. Así pues $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ y por (ii) $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Definimos finalmente la sucesión $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ por:

$A_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $A_1 = E_1$, $A_2 = E_2 \setminus E_1$, ..., $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$. De (i) se sigue que $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y claramente $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X$. //

Una consecuencia interesante del lema de Exhausión está motivada por la siguiente definición y una propiedad posterior.

DEFINICION 5.14

Sea $G : \mathcal{S} \to V$ una medida vectorial, μ-continua. Decimos que G tiene derivada de Radon-Nikodym localmente en A, con $A \in \mathcal{S}$, si existe $h \in B_1(\Xi, V, \mu)$ tal que:

$$G(E) = \int_E h \, d\mu \qquad \forall \; E \subseteq A \quad (E \in \mathcal{S})$$

Es natural definir ahora la siguiente propiedad $\mathcal{P}$ para una medida vectorial $G : \mathcal{S} \to V$ μ-continua.

PROPIEDAD 5.15

Sea $G : \mathcal{S} \to V$ una medida vectorial, μ-continua. Decimos que G tiene la propiedad $\mathcal{P}$ en $A \in \mathcal{S}$, si G tiene derivada de Radon-Nikodym localmente en A.

COROLARIO 5.16

Sea $G : \mathcal{S} \to V$ una medida vectorial, μ-continua y de variación acotada. Si $\forall \; E_1 \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_1) > 0$ existe $E_2 \in \mathcal{S}$ con $E_2 \subseteq E_1$ y $\mu(E_2) > 0$, y $h = h_{E_1} \in B_1(\Xi, V, \mu)$ tal que:

$$G(E) = \int_E h \, d\mu \qquad \forall \; E \subseteq E_2$$

entonces existe $g \in B_1(\Xi, V, \mu)$ tal que:

$$G(E) = \int_E g \, d\mu \qquad \forall \; E \in \mathcal{S}$$

DEM:

Es inmediato verificar que la propiedad $\mathcal{P}$ definida en (5.7) satisface las condiciones (i), (ii), (iii) del Lema de Exhausión. Además, por hipótesis $\mathcal{P}$ cumple (iv). En consecuencia existe una sucesión (A_n) de elementos disjuntos de $\mathcal{S}$ tal que $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y una sucesión (h_n) en $B_1(\Xi, V, \mu)$ de tal manera que:

$$G(E\cap A_n)=\int_{E\cap A_n} h_n\, d\mu \quad \forall\ E\in\mathcal{S} \ \text{ y } n\in\mathbb{N}$$

Definimos $g:\Sigma\to V$ por $g(x)=h_n(x)$ si $x\in A_n$. Claramente g es μ-medible y para cada $E\in\mathcal{S}$ se tiene:

$$G\left(E\cap\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right)\right)=\int_E g\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{m}A_n}\, d\mu \qquad \forall\ m\in\mathbb{N} \quad ----(5.8.1)$$

Además como G es de variación acotada tenemos:

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{m}A_n}\|g\|\, d\mu=|G|\left(\Sigma\cap\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right)\right)\leq|G|(\Sigma)<\infty$$

Por el Teorema de Convergencia Monótona $\|g\|\in L_1(\mu)$. De (5.8.1) se sigue que:

$$G(E)=\lim_m\int_E g\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{m}A_n}\, d\mu \qquad \forall\ E\in\mathcal{S}$$

y como $\|g\chi_{\bigcup_{n=1}^{m}A_n}\|\leq\|g\|$ entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$G(E)=\lim_m\int_E g\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{m}A_n}\, d\mu=\int_E g\, d\mu \quad \forall\ E\in\mathcal{S} \qquad //$$

<u>TEOREMA 5.17</u> (VERSION PRIMARIA DEL TEOREMA DE RADON-NIKODYM 1968)

Sea $G\in MB(\mathcal{S},V,\mu)$. Son equivalentes:

i) Existe $g\in B_1(\Sigma,V,\mu)$ tal que $G(E)=\int_E g\,d\mu \quad \forall\ E\in\mathcal{S}$

ii) $\forall\ E_1\in\mathcal{S}$ con $\mu(E_1)>0$ existe $E_2\in\mathcal{S}$ con $E_2\subseteq E_1$ y $\mu(E_2)>0$ tal que:

$$\left\{ G(E)/\mu(E) : E\in\mathcal{S},\ E\subseteq E_2 \ \text{ y } \mu(E)>0\right\}$$

es un subconjunto de V relativamente norma compacto.

(Si μ y ν son medidas sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ σ-finitas y no atómicas, entonces $\nu\ll\mu \iff$ iii) vale).

DEM:

(ii ⇒ i) Por el corolario (5.16) basta probar que $\forall E_1 \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_1) > 0$ es posible hallar $E_2 \in \mathcal{S}$ con $E_2 \subseteq E_1$ y $\mu(E_2) > 0$ tal que G tiene derivada de Radon-Nikodym localmente en E_2. Por hipótesis el conjunto:

$$M = \{G(E)/\mu(E) : E \in \mathcal{S},\ E \subseteq E_2 \text{ y } \mu(E) > 0\}$$

es relativamente norma compacto. En consecuencia por el Teorema de Mazur (Ver [7] p.51) la cerradura absoluta del casco convexo de M,

$$\Gamma(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{G(E)}{\mu(E)} : \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq 1 \right\}$$

es norma compacto. Definimos ahora $\tilde{T} : \mathcal{A}(\Sigma, V, \mu) \to V$ por:

$$\tilde{T}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, G(A_i \cap E_2) \qquad \text{--------- (5.17.1)}$$

donde $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{S}$ y $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$. De (5.17.1) se sigue:

$$\tilde{T}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_2)\, \frac{G(A_i \cap E_2)}{\mu(A_i \cap E_2)}$$

poniendo $0/0 = 0$. Si $\|f\|_1 \leq 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \mu(A_i \cap E_2)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \mu(A_i) = \|f\|_1 \leq 1$$

Así pues, $\tilde{T}(f) \in \Gamma(M)$. Por lo tanto $\tilde{T}$ tiene una extensión T. lineal <u>compacta</u> sobre $L_1(\mu)$. Por el teorema (5.4) existe $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$T(f) = \int f g \, d\mu \qquad \forall\ f \in L_1(\mu)$$

En particular, si $E \subseteq E_2$, entonces $G(E) = T(\chi_E) = \int_E g\,d\mu$.

(i ⇒ ii) Se probará que $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $A_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\mu(\Sigma \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que

$$N = \left\{ G(E)/\mu(E) : E \in \mathcal{S},\ E \subseteq A_\varepsilon \text{ y } \mu(E) > 0 \right\}$$

es relativamente norma compacto. Como g es μ-medible, entonces existe una sucesión (Λ_n) en $\mathcal{S}(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\Lambda_n \to g$ c.d. Por Teorema de Egoroff existe $A_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\mu(\Sigma \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $\Lambda_n \to g$ uniformemente sobre A_ε. Pero $\Lambda_n \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, así que $g\chi_{A_\varepsilon} \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$. Si definimos el operador $T: L_1(\mu) \to V$ por $T(f) = \int_{A_\varepsilon} fg\,d\mu$ $\forall\ f \in L_1(\mu)$, entonces por (5.4.ii) T es compacto. Además,

$$\left\{ \frac{G(E)}{\mu(E)} : E \in \mathcal{S},\ E \subseteq A_\varepsilon \text{ y } \mu(E) > 0 \right\} = \left\{ \frac{T(\chi_E)}{\mu(E)} : E \in \mathcal{S},\ E \subseteq A_\varepsilon \text{ y } \mu(E) > 0 \right\}$$

$$\subseteq T(B_1^{L_1})$$

donde $B_1^{L_1}$ es la bola unitaria en $L_1(\mu)$. Por lo tanto N es relativamente norma compacto.

Finalmente, sea $E_1 \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_1) > 0$. Hallamos ahora $A \in \mathcal{S}$ con $\mu(\Sigma \setminus A) < \mu(E_1)$ tal que: $\left\{ \frac{G(E)}{\mu(E)} : E \in \mathcal{S},\ E \subseteq A \text{ y } \mu(E) > 0 \right\}$ es relativamente norma compacto. Más aun, $\mu(A \cap E_1) > 0$. En efecto, si $\mu(A \cap E_1) = 0$, entonces

$$\mu(E_1) = \mu((\Sigma \setminus A) \cap E_1) + \mu(A \cap E_1) \leq \mu(\Sigma \setminus A) < \mu(E_1) \quad ¡!$$

Por lo tanto, si $E_2 = A \cap E_1$, entonces el resultado queda probado. //

La validez del teorema anterior se expone al fracaso si se debilita alguna de las hipótesis. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

<u>EJEMPLO 5.18</u> (LEWIS 1972)

UNA MEDIDA $C[0,1]$-VALUADA SIN DERIVADA DE RADON-NIKODYM.

Sea $\Sigma = [0,1]$ y λ la medida de Lebesgue sobre $\mathcal{S}$, la σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue medibles. Definimos $G: \mathcal{S} \to C[0,1]$ por:

$$G(E)(t) = \lambda(E \cap [0,t]) \quad \forall E \in \mathcal{S} \text{ y } t \in [0,1]$$

Como $\|G(E)\| = \lambda(E)$, es inmediato que G es λ-continua y de variación acotada. Sea $E_1 \in \mathcal{S}$ con $E_1 \subseteq [0,1]$ y $m \in \mathbb{N}$ fijo. En vista de que $G(E_1) \in C[0,1]$, podemos seleccionar una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ de $[0,1]$ tal que $G(E_1)(t_1) = \frac{\lambda(E_1)}{m}$, $G(E_1)(t_2) = \frac{2\lambda(E_1)}{m}$, $\dots$, $G(E_1)(t_{m-1}) = \frac{(m-1)\lambda(E_1)}{m}$. En consecuencia $\lambda((t_{n-1}, t_n] \cap E_1) = \lambda(E_1)/m \quad \forall\ n = 1, \dots, m$. Supongamos que $1 \leq i < j \leq m$. Sea $t \in [0,1]$ y consideremos:

$$\left\| \frac{G((t_{i-1}, t_i] \cap E_1)(t)}{\lambda((t_{i-1}, t_i] \cap E_1)} - \frac{G((t_{j-1}, t_j] \cap E_1)(t)}{\lambda((t_{j-1}, t_j] \cap E_1)} \right\|$$

Si $t = t_i$, la norma anterior es igual a 1. Luego entonces <u>$\forall\, m \in$</u> $\mathbb{N}$ el conjunto $\left\{\frac{G(E)}{\lambda(E)} : E \in \mathcal{S},\ E \subseteq E_1 \text{ y } \lambda(E) > 0\right\}$ contiene m elementos cuya distancia entre ellos es igual a 1, por lo que el conjunto de cocientes no es totalmente acotado. Por el teorema (5.17) G no tiene derivada de Radon-Nikodym. //

PROPOSICION 5.19

Sea $T: L_1(\mu) \to V$ un operador lineal acotado. Para cada $E \in \Sigma$ definimos el operador:

$$T_E(f) = T(f\chi_E) \qquad \forall\ f \in L_1(\mu).$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) T es representable

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $E_\varepsilon \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que T_{E_ε} es compacto.

(iii) $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $E_\varepsilon \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que T_{E_ε} es débilmente compacto.

(iv) $\forall\ E_1 \in \Sigma$ con $\mu(E_1) > 0$ existe $E_2 \in \Sigma$ con $E_2 \subseteq E_1$ y $\mu(E_2) > 0$ tal que T_{E_2} es compacto.

(v) $\forall\ E_1 \in \Sigma$ con $\mu(E_1) > 0$ existe $E_2 \in \Sigma$ con $E_2 \subseteq E_1$ y $\mu(E_2) > 0$ tal que T_{E_2} es débilmente compacto.

DEM:

La prueba se hará a través de las implicaciones (i) ⟹ (ii) ⟹ (iii) ⟹ (iv) ⟹ (v) ⟹ (i)

Observemos que (ii) ⟹ (iii) y (iv) ⟹ (v) son inmediatas a consecuencia del hecho de que conjuntos secuencialmente compactos son débil-secuencialmente-compactos y por el Teorema de Eberlein – Smulian (Ver [8] p. 18).

(i) ⟹ (ii) Sea $g \in Bo(\Omega, V, \mu)$ tal que:

$$T(f) = \int f g\, d\mu \quad \forall\ f \in L_1(\mu)$$

En vista de que g es μ-medible, es posible hallar una sucesión (A_n) en $\Delta(\Omega, V, \mu)$

tal que $h_n \to g$ c.d. Por el Teorema de Egoroff para cada $\varepsilon > 0$ existe $E_\varepsilon \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $h_n \to g$ uniformemente sobre E_ε. Como $h_n \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $g\chi_{E_\varepsilon} \in K_\infty(\Sigma, V, \mu)$. Si definimos $\tilde{T} : L_1(\mu) \to V$ por:

$$\tilde{T}(f) = \int_{E_\varepsilon} f g \, d\mu \quad \forall\, f \in L_1(\mu)$$

entonces por el Teorema (5.4, ii) $\tilde{T}$ es compacto. Además:

$$\tilde{T}(f) = \int_{E_\varepsilon} f g \, d\mu = \int (f\chi_{E_\varepsilon}) g \, d\mu = T(f\chi_{E_\varepsilon}) = T_{E_\varepsilon}(f) .$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sea $E_1 \in \Sigma$ con $\mu(E_1) > 0$ y $0 < \varepsilon \leq \mu(E_1)$. Por hipótesis existe $E_\varepsilon \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que T_{E_ε} es débilmente compacto. Más aun $\mu(E_1 \cap E_\varepsilon) > 0$. En efecto, si $\mu(E_1 \cap E_\varepsilon) = 0$, entonces

$$\mu(E_1) = \mu((\Omega \setminus E_\varepsilon) \cap E_1) + \mu(E_1 \cap E_\varepsilon) \leq \mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon \leq \mu(E_1) \; ¡!$$

Por el corolario (5.10) existe $g_\varepsilon \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$T_{E_\varepsilon}(f) = \int f g_\varepsilon \, d\mu \quad \forall\, f \in L_1(\mu)$$

Imitando la prueba anterior, hallamos $E_2 \subseteq E_\varepsilon \cap E_1$ con $\mu(E_2) > 0$ tal que $\tilde{T}(f) = \int_{E_2} f g_\varepsilon \, d\mu$ $\forall\, f \in L_1(\mu)$ es compacto. Pero si $f \in L_1(\mu)$, entonces

$$\tilde{T}(f) = \int_{E_2} f g_\varepsilon \, d\mu = \int (f\chi_{E_2}) g_\varepsilon \, d\mu = T_{E_\varepsilon}(f\chi_{E_2}) = T(f \cdot \chi_{E_\varepsilon \cap E_2}) =$$

$$= T(f\chi_{E_2}) = T_{E_2}(f) .$$

Por lo tanto T_{E_2} es compacto.

(v) $\Rightarrow$ (i). Sea $G: \mathcal{S} \to V$ la medida vectorial definida por $G(E) = T(\chi_E)$ $\forall\, E \in \mathcal{S}$. Como $\|G(E)\| \leq \|T\| \mu(E)$ entonces G es μ-continua y de variación acotada. Se probará que existe $g \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que $G(E) = \int_E g\, d\mu$ $\forall E \in \mathcal{S}$ y así por el lema (4.5) T es representable. Para este propósito el corolario (5.16) es de gran utilidad. Sea $E_1 \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_1) > 0$. Por hipótesis existe $E_2 \in \mathcal{S}$ con $E_2 \subseteq E_1$ y $\mu(E_2) > 0$ tal que T_{E_2} es débilmente compacto. Luego, existe $h \in B_\infty(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$T_{E_2}(f) = \int f h\, d\mu \qquad \forall\ f \in L_1(\mu)$$

Si $E \in \mathcal{S}$ es tal que $E \subseteq E_2$, entonces $T_{E_2}(\chi_E) = \int_E h\, d\mu$. Además

$$T_{E_2}(\chi_E) = T(\chi_{E_2 \cap E}) = T(\chi_E) = G(E)$$

por lo tanto $\forall\, E \subseteq E_2$: $G(E) = \int_E h\, d\mu$. //

Estamos en condiciones de probar la versión utilitaria del Teorema de Radon-Nikodym.

<u>TEOREMA 5.20</u> (VERSION UTILITARIA DEL TEOREMA DE RADON-NIKODYM 1971)

Sea $G \in MB(\mathcal{S}, V, \mu)$. Son equivalentes:

i) Existe $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $G(E) = \int_E g\, d\mu$ $\forall\ E \in \mathcal{S}$

ii) $\forall\ E_1 \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_1) > 0$ existe $E_2 \in \mathcal{S}$ con $E_2 \subseteq E_1$ y $\mu(E_2) > 0$ tal que:

$$\{G(E)/\mu(E) : E \in \mathcal{S},\ E \subseteq E_2 \text{ y } \mu(E) > 0\}$$

es un subconjunto de V relativo, débilmente compacto.

DEM:

(ii $\Rightarrow$ i) Es análoga a la prueba de la suficiencia del teorema (5.17), utilizando en este caso los teoremas de Krein-Smulian (Ver [7] p.51) y (5.11).

(i $\Rightarrow$ ii) Supongamos que existe $g \in B_\infty(S,V,\mu)$ tal que:

$$G(E) = \int_E g\,d\mu \qquad \forall\ E \in S$$

Definimos el operador $T: L_1(\mu) \to V$ por:

$$T(f) = \int fg\,d\mu \qquad \forall\ f \in L_1(\mu)$$

Sea $E_1 \in S$ con $\mu(E_1) > 0$. Por la proposición (5.19) existe $E_2 \in S$ con $E_2 \subseteq E_1$ y $\mu(E_2) > 0$ tal que T_{E_2} es débilmente compacto. Además,

$$\begin{aligned}
\left\{ G(E)/\mu(E) : E \in S,\ E \subseteq E_2 \text{ y } \mu(E) > 0 \right\} &= \left\{ \frac{T(\chi_E)}{\mu(E)} : E \in S,\ E \subseteq E_2 \text{ y } \mu(E) > 0 \right\} \\
&= \left\{ \frac{T(\chi_{E \cap E_2})}{\mu(E)} ; E \in S,\ E \subseteq E_2 \text{ y } \mu(E) > 0 \right\} \\
&= \left\{ \frac{T_{E_2}(\chi_E)}{\mu(E)} : E \in S,\ E \subseteq E_2 \text{ y } \mu(E) > 0 \right\} \\
&\subseteq T_{E_2}(B_1^{L_1})
\end{aligned}$$

donde $B_1^{L_1}$ es la bola unitaria en $L_1(\mu)$. Como $T_{E_2}(B_1^{L_1})$ es relativa y débilmente compacto la condición necesaria queda demostrada. //

EL ESPACIO DUAL V^* Y LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM

En el capítulo 3 se estudió la relación entre los espacios $B_q(\Sigma,V^*,\mu)$ y $B_p(\Sigma,V,\mu)^*$, llegando a la conclusión de que $B_q(\Sigma,V^*,\mu) \subseteq B_p(\Sigma,V,\mu)^*$. El hecho de que ambos espacios <u>coincidan</u> (isométrica e isomorfamente hablando), tiene un estrecho vínculo con el espacio dual V^* y la propiedad de Radon-Nikodym.

En lo que resta del capítulo trataremos la propiedad de Radon-Nikodym en los espacios duales y algunas consecuencias interesantes. Iniciamos con el estudio de la dualidad de $B_p(\Sigma,V,\mu)$

<u>TEOREMA 5.21</u>

Sea $(V,\|\ \|)$ un espacio de Banach (sobre $\mathbb{C}$) y $1\leq p<\infty$. Son equivalentes:

i) V^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a $(\Sigma,\int,\mu)$

ii) $B_p(\Sigma,V,\mu)^* = B_q(\Sigma,V^*,\mu)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

<u>DEM:</u>

(i $\Rightarrow$ ii) Por el teorema (3.20) basta probar que $B_p(\Sigma,V,\mu)^* \subseteq B_q(\Sigma,V^*,\mu)$.

Sea $F^* \in B_p(\Sigma,V,\mu)^*$ y $G:\int\longrightarrow V^*$ definida por:

$$G(E)(v) = F^*(v\cdot\chi_E) \qquad \forall\ E\in\int$$

Como $|G(E)(v)| \leq \|F^*\|\|v\|\|\chi_E\|_p$, se deduce que G es contablemente aditiva. Más aún, si π es una partición (disjunta) de Σ, entonces

$$\sum_{A\in\pi}\|G(A)\| \le \sum_{A\in\pi}\|F^*\|\,\|\chi_A\|_p = \|F^*\|\sum_{A\in\pi}\mu(A)^{1/p}$$

$$\le \|F^*\|\sum_{A\in\pi}\mu(A) = \|F^*\|\mu(X) < \infty$$

En consecuencia $|G|(X) < \infty$. Así pues G es μ-continua y de variación acotada. Por hipótesis existe $g \in B_1(X, V^*, \mu)$ tal que:

$$G(E) = \int_E g\,d\mu \qquad \forall\, E \in \mathcal{S}$$

Si definimos la función $\langle g(\cdot), f(\cdot)\rangle : X \longrightarrow \mathbb{C}$ por $g(x)(f(x))$ $\forall\, x \in X$, donde $f \in B_p(X, V, \mu)$, entonces por (3.13), $\langle g(\cdot), f(\cdot)\rangle$ es $\mathcal{S}$-medible. Más aun, si $f = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$, entonces se tiene,

$$F^*(f) = \sum_{i=1}^{n} F^*(v_i\chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{n} G(E_i)(v_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{E_i} g\,d\mu\right)(v_i) \text{ -----(5.21.1)}$$

Para $v \in V$ fijo, definimos ahora $T_v : V^* \longrightarrow \mathbb{C}$ como $T_v(v^*) = v^*(v)$ $\forall\, v^* \in V^*$. Como $|T_v(v^*)| \le \|v^*\|\,\|v\|$ se sigue que T_v es un operador lineal continuo. Por (5.21.1) se sigue que

$$F^*(f) = \sum_{i=1}^{n} T_{v_i}\left(\int_{E_i} g\,d\mu\right)$$

Más aun, por el corolario (3.9)

$$F^*(f) = \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} T_{v_i} g\,d\mu = \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i}\langle g, v_i\rangle\,d\mu = \int\langle g, f\rangle\,d\mu$$

Hallamos ahora una sucesión (E_n) en $\mathcal{S}$ tal que $\mathfrak{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \subseteq E_{n+1}$ y g es acotada c.d. sobre E_n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo se tiene que $g\chi_{E_{n_0}}$ es una función μ-medible y $\|g\chi_{E_{n_0}}\| \in L_q(\mu)$. Por el teorema (3.4) $g\chi_{E_{n_0}} \in B_q(\mathfrak{X},V^*,\mu)$.

Sea $F^*_{E_{n_0}} : B_p(\mathfrak{X},V,\mu) \to \mathbb{C}$ definido por:

$$F^*_{E_{n_0}}(f) = \int \langle g\chi_{E_{n_0}}, f \rangle d\mu \qquad \forall\, f \in B_p(\mathfrak{X},V,\mu) \quad \text{----} (5.21.2)$$

Por la desigualdad de Hölder $|F^*_{E_{n_0}}(f)| \leq |||g\chi_{E_{n_0}}|||_q\, |||f|||_p < \infty$. En consecuencia $F^*_{E_{n_0}}$ es un operador lineal acotado. Más aun, si $f \in \Delta(\mathfrak{X},V,\mu)$, entonces $F^*(f\chi_{E_{n_0}}) = F^*_{E_{n_0}}(f)$. En general, si $f \in B_p(\mathfrak{X},V,\mu)$, entonces existe $(\Lambda_n) \in \Delta(\mathfrak{X},V,\mu)$ tal que $\lim_n \int \|f-\Lambda_n\|^p d\mu = 0$. Así por Hölder:

$$\left| \int \langle g\chi_{E_{n_0}}, f \rangle d\mu - \int \langle g\chi_{E_{n_0}}, \Lambda_n \rangle d\mu \right| \leq \int \|g\chi_{E_{n_0}}\| \, \|f-\Lambda_n\| \, d\mu \leq |||g\chi_{E_{n_0}}|||_q \, |||f-\Lambda_n|||_p$$

Por lo tanto:

$$F^*_{E_{n_0}}(f) = \lim_n F^*_{E_{n_0}}(\Lambda_n) = \lim_n F^*(\Lambda_n \chi_{E_{n_0}}) = F^*(f\chi_{E_{n_0}}) \quad \text{-----} (5.21.3)$$

De (5.21.3) se sigue que $\|F^*_{E_{n_0}}\| \leq \|F^*\|$. Pero por (5.21.2) se tiene que $\|F^*_{E_{n_0}}\| = |||g\chi_{E_{n_0}}|||_q$. Así pues $|||g\chi_{E_{n_0}}|||_q \leq \|F^*\|$, y por el Teorema de Convergencia Monótona, $g \in B_q(\mathfrak{X},V^*,\mu)$. Finalmente por la desigualdad de Hölder:

$$\left|\int \langle g, f\rangle d\mu - \int \langle g, f\chi_{E_n}\rangle d\mu\right| \le \int \|g\|\,\|f - f\chi_{E_n}\| d\mu \le \|\|g\|\|_q \,\|\|f - f\chi_{E_n}\|\|_p \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Por lo tanto $F^*(f) = \lim_n F^*(f\chi_{E_n}) = \lim_n F^*_{E_n}(f) = \int \langle g, f\rangle d\mu \quad \forall f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$.

(ii⟹i) Sea $G: \mathcal{S} \to V^*$ una medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Si $E_1 \in \mathcal{S}$ es tal que $\mu(E_1) > 0$, por el corolario (5.16) bastará probar que existe $E_2 \in \mathcal{S}$ con $E_2 \subseteq E_1$ y $\mu(E_2) > 0$ tal que G tiene derivada de Radon-Nikodym localmente en E_2. Sea $K \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, por el Teorema de Descomposición de Hahn garantiza la existencia de $E_2 \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_2) > 0$ y $E_2 \subseteq E_1$ tal que $|G|(E) \le K\mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{S}$ con $E \subseteq E_2$. Definimos ahora

$F^*: \Delta(\Sigma, V, \mu) \to \mathbb{C}$ por:

$$F^*(f) = \sum_{i=1}^{n} G(E_i \cap E_2)(v_i)$$

donde $f = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$ con $v_i \in V$, $E_i \in \mathcal{S}$ y $E_i \cap E_j = \phi$ para $i \neq j$.

Tenemos de esta manera que

$$|F^*(f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} G(E_i \cap E_2)(v_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{G(E_i \cap E_2)}{\mu(E_i \cap E_2)} (\mu(E_i \cap E_2) v_i)\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} K \|\mu(E_i \cap E_2) v_i\| \le K\|f\|_1 \le K\mu(\Sigma)^{1/q} \|f\|_p$$

Esto significa que F^* es un operador lineal acotado sobre las funciones elementales en $B_p(\Sigma, V, \mu)$. En consecuencia F^* tiene una extensión lineal -

continua sobre $B_1(\Xi,V,\mu)$. Tal extensión la denotaremos también por F^*. Por hipótesis existe $g \in B_q(\Xi,V^*,\mu)$ tal que:

$$F^*(f) = \int \langle g, f \rangle d\mu \qquad \forall\ f \in B_1(\Xi,V,\mu)\ .$$

Como consecuencia de la igualdad anterior se tiene que:

$$G(E \cap E_2)(v) = F^*(v\chi_E) = \int_E \langle g, v \rangle d\mu$$

$\forall\ v \in V$ y $E \in \mathcal{S}$. Al igual que en la prueba de la suficiencia podemos definir para cada $v \in V$ fijo, el operador lineal acotado $T_v : V^* \to \mathbb{C}$ por $T_v(v^*) = v^*(v)$ $\forall\ v^* \in V^*$. Luego entonces por (3.9) tenemos:

$$\int_E \langle g, v \rangle d\mu = \int_E T_v(g)\, d\mu = T_v\left(\int_E g\, d\mu\right) = \left(\int_E g\, d\mu\right)(v) \qquad \forall\ E \in \mathcal{S}$$

Por lo tanto $G(E \cap E_2)(v) = \left(\int_E g\, d\mu\right)(v)$ $\forall\ E \in \mathcal{S}$. Es decir,

$$G(E \cap E_2) = \int_E g\, d\mu \qquad \forall\ E \in \mathcal{S}$$

y como $g \in B_q(\Xi,V^*,\mu)$ entonces $g \in B_1(\Xi,V^*,\mu)$. //

<u>COROLARIO 5.22</u>

Sea V es reflexivo y $1 \leq p < \infty$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces:

i) $B_p(\Xi, V, \mu)^* = B_q(\Xi, V^*, \mu)$

ii) $B_p(\Xi, V^*, \mu)^* = B_q(\Xi, V, \mu)$

iii) $B_p(\Xi, V, \mu)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.

DEM:

i) Como V es reflexivo, entonces V^* tambien lo es. Por el corolario (5.12) V^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Por el teorema anterior se sigue que $B_p(\Sigma,V,\mu)^* = B_q(\Sigma,V^*,\mu)$.

ii) Como $V = V^{**}$ y V tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces por la parte (i) tenemos que $B_p(\Sigma,V^*,\mu)^* = B_q(\Sigma,V^{**},\mu) = B_q(\Sigma,V,\mu)$.

iii) Combinando (i) y (ii) se tienen las igualdades:

$$B_p(\Sigma,V,\mu)^{**} = B_q(\Sigma,V^*,\mu)^* = B_p(\Sigma,V,\mu) \quad . \qquad //$$

Para el siguiente resultado definiremos el concepto de μ-medibilidad débil*, que por falta de utilidad no fue enunciado en el capitulo 2.

DEFINICION 5.23

i) $f:\Sigma\to V$ es Γ-medible, con $\Gamma\subseteq V^*$, si v^*f es μ-medible $\forall\ v^*\in\Gamma$.

ii) $f:\Sigma\to V^*$ es débil*-medible si f es V-medible. (V es identificado con su imagen bajo el encaje natural de V en V^{**})

OBSERVACION 5.24

Si $f:\Sigma\to V$ es μ-esencialmente separablemente valuada y existe un conjunto normador Γ (Ver [8] p. 54) tal que v^*f es μ-medible $\forall\ v^*\in\Gamma$, entonces f es μ-medible. En efecto, esto es inmediato del Teorema de Pettis (2.12).

TEOREMA 5.25 (DUNFORD-PETTIS 1940)

Si V^* es separable, entonces V^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

DEM:

Para facilitar la prueba, supongamos que V es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. Sea $G: \int \to V^*$ una medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Como se tiene que $G \ll |G| \ll \mu$, entonces al igual que en el caso real puede probarse (lo omitimos) que:

$$\frac{dG}{d\mu} = \frac{dG}{d|G|} \cdot \frac{d|G|}{d\mu}$$

en el caso de que $\frac{dG}{d|G|}$ y $\frac{d|G|}{d\mu}$ existan. Pero por el Teorema de Radon-Nikodym (caso real) queda garantizada la existencia de $\frac{d|G|}{d\mu}$. Resta probar que G tiene derivada de Radon-Nikodym con respecto a $|G|$. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1) $\forall\, v \in V$ (fijo) existe $g: \mathrm{I} \to V^*$ tal que:

$$\int_A g(x)(v)\, d|G|(x) = G(A)(v) \qquad \forall\, A \in \int$$

Es decir G tiene derivada débil* con respecto a $|G|$

2) $g \in B_1(\mathrm{I}, V^*, |G|)$

3) $G(A) = \int_A g\, d|G|$

PRUEBA DE 1

Sea $v \in V$ fijo. Definimos $G_v: \int \to \mathbb{R}$ por $G_v(A) = G(A)(v)$ $\forall\, A \in \int$.

Se sigue que G_v es una medida real-valuada. Además

$$|G_v(A)| \leq \|G(A)\|\|v\| \leq \|v\||G|(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \text{ y } v \in V.$$

En consecuencia G_v es $|G|$-continua y de variación acotada. Por el Teorema de Radon-Nikodym (caso real) existe $g_v \in L_1(|G|)$ tal que:

$$G_v(A) = \int_A g_v \, d|G| \qquad \forall A \in \mathcal{S}$$

Como $|G_v|(A) = \int_A |g_v| d|G|$ y $|G_v|(A) \leq \|v\||G|(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$, entonces por el <u>lema del promedio</u> (Ver [10] Ej 43) $|g_v| \leq \|v\|$ c.d. En consecuencia $\|g_v\|_\infty \leq \|v\|$.

Por otro lado, como V^* es separable, entonces V tambien lo es. Sea $D \subseteq V$ un conjunto denso numerable y $V' \subseteq V$ el subespacio vectorial$/_{\mathbb{Q}}$ definido así:

$$V' = \{v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} q_i v_i \text{ con } q_i \in \mathbb{Q},\ v_i \in D \ \forall i=1,\dots,n\}$$

Como D y $\mathbb{Q}$ son numerables, así V'. Si $v \in V'$ es de la forma $v = \sum_{i=1}^{n} q_i v_i$ con $q_i \in \mathbb{Q}$ y $v_i \in D$ $\forall i=1,\dots,n$, entonces se tienen los siguientes hechos:

a) existe $N_v^{(1)} \in \mathcal{S}$ con $|G|(N_v^{(1)}) = 0$ tal que $|g_v(x)| \leq \|v\|$ $\forall x \in Z \setminus N_v^{(1)}$

b) $$\int_A g_v(x) d|G|(x) = G(A)(v) = G(A)\left(\sum_{i=1}^{n} q_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} q_i G(A)(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q_i \int_A g_{v_i}(x) d|G|(x) = \int_A \sum_{i=1}^{n} q_i g_{v_i}(x) d|G|(x) \qquad \forall A \in \mathcal{S}$$

En consecuencia, existe $N_v^{(2)} \in \mathcal{S}$ con $|G|(N_v^{(2)}) = 0$ tal que:

$$g^{(x)}_{\sum_{i=1}^{n} q_i v_i} = \sum_{i=1}^{n} q_i g^{(x)}_{v_i} \quad \forall \; x \in \Sigma \setminus N_v^{(2)}$$

Si $N = \bigcup_{v \in V'} (N_v^{(1)} \cup N_v^{(2)})$, entonces N es la unión numerable de conjuntos $|G|$- nulos y así $|G|(N) = 0$. Por las observaciones a) y b) obtenemos:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} q_i g^{(x)}_{v_i} \right| = \left| g^{(x)}_{\sum_{i=1}^{n} q_i v_i} \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} q_i v_i \right\| \quad \forall \; x \in \Sigma \setminus N .$$

Por lo tanto, si $x \in \Sigma \setminus N$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} d_i g^{(x)}_{v_i} \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} d_i v_i \right\| \quad \forall \; d_i \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \; v_i \in D$$

En vista de la desigualdad anterior, es posible hallar $g(x) \in V^*$ para cada $x \in \Sigma \setminus N$, tal que $\|g(x)\| \leq 1$ y $g(x)(v) = g_v(x)$ $\forall \; v \in D$. Conviniendo que $g(x) = 0$ $\forall \; x \in N$, resulta que $g(\cdot)(v) \in L_1(|G|)$ $\forall \; v \in D$ y

$$G(A)(v) = \int_A g(x)(v) \, d|G|(x) \quad \forall \; v \in D \text{ y } \forall \; A \in \mathcal{S} .$$

Lo que procede ahora es extender la igualdad anterior para cualquier $v \in V$, para ello, sean $v \in V$ fijo y $(v_n) \subseteq D$ tal que $\lim_n v_n = v$. Como $\lim_n g(x)(v_n) = g(x)(v)$ y $|g(x)(v_n)| \leq \sup_n \|v_n\| \|g(x)\|$ $\forall \; x \in \Sigma \setminus N$, entonces por el Teorema de Convergencia Dominada $g(\cdot)(v) \in L_1(|G|)$ y

$$\int_A g(x)(v) \, d|G|(x) = \lim_n \int_A g(x)(v_n) \, d|G|(x) = \lim_n G(A)(v_n) = G(A)(v)$$

$\forall \; A \in \mathcal{S}$. Queda probada así la parte 1).

PRUEBA DE 2)

Como V^* es separable y $g(\cdot)(v) \in L_1(|G|)$ $\forall v \in V$, entonces g es separablemente valuada y débil*-medible. Aprovechando (5.24), para probar que g es $|G|$-medible, basta hallar $\Gamma \subseteq V^{**}$ (Γ conjunto normador) tal que $v^{**}(g)$ es $|G|$-medible $\forall v^{**} \in V^{**}$. Sea $\Gamma = i(\bar{X})$, con $i: V \to V^{**}$ el encaje natural. Se sigue que Γ es normador y $v^{**}(g)$ es $|G|$-medible pues g es débil*-medible $\forall v^{**} \in \Gamma$. Además como $\|g(x)\| \leq 1$ $\forall x \in \bar{X} \setminus N$, se tiene que $g \in B_1(\bar{X}, V^*, |G|)$.

PRUEBA DE 3

Sea $v \in V$ fijo. Definimos el operador $T_v: V^* \to \mathbb{R}$ por:

$$T_v(v^*) = v^*(v) \qquad \forall\ v^* \in V^*$$

Es inmediato verificar que T_v es un operador lineal acotado. Por el corolario (3.9) tenemos para cada $A \in \mathcal{S}$:

$$G(A)(v) = \int_A g(x)(v)\, d|G|(x) = \int_A T_v(g(x))\, d|G|(x)$$

$$= T_v\left(\int_A g(x)\, d|G|(x)\right) = \left(\int_A g(x)\, d|G|(x)\right)(v)$$

Por lo tanto $G(A) = \int_A g\, d\mu \quad \forall\ A \in \mathcal{S}$. //

OBSERVACION 5.26

En el caso de que V^* sea separable, el resultado en (1) del corolario (5.22) es válido inmediatamente. Es decir $B_q(\Sigma,V,\mu)^* = B_q(\Sigma,V^*,\mu)$.

El teorema anterior puede generalizarse vía el siguiente resultado.

TEOREMA 5.27

i) Si para todo $W \subseteq V$ subespacio vectorial cerrado separable, se tiene que W posee la propiedad de Radon-Nikodym, entonces V la tiene.

ii) Si V tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces cualquier $W \subseteq V$ subespacio vectorial cerrado la tiene.

DEM:

i) Sea $T \in LB(L_1(\mu),V)$. Se probará que T es representable y así por el teorema (4.7) se tendrá la conclusión deseada. Para esto consideremos el conjunto $\{T(\chi_E): E \in \Sigma\}$. Notemos que si $\{T(\chi_E): E \in \Sigma\}$ es relativamente norma compacto, entonces el rango de T resulta norma separable. En consecuencia $\overline{T(L_1(\mu))}$ es un subespacio vectorial cerrado separable y por hipótesis T es representable.

Para verificar que $\{T(\chi_E): E \in \Sigma\}$ es relativamente norma compacto, sea (E_n) una sucesión en Σ y Σ_1 la sub-σ-álgebra de Σ generada por $\{E_n: n \in \mathbb{N}\}$. Se sigue que $L_1(\Sigma_1,\mu)$ es un subespacio vectorial separable de $L_1(\mu)$. Definimos ahora $T_1: L_1(\Sigma_1,\mu) \to V$ por:

$$T_1(f) = T(f) \quad \forall\, f \in L_1(\Sigma_1,\mu)$$

Así pues, T_1 es un operador lineal continuo sobre $L_1(\mu)$ y con rango en $\overline{T_1(L_1(\mu))}$. Por hipótesis T_1 es representable. Además por el lema (5.8) T_1 mapea subconjuntos de $L_1(\mu)$ acotados y uniformemente integrables en conjuntos relativamente norma compactos de V. Luego entonces el conjunto $\{T_1(\chi_{E_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente norma compacto y así la sucesión $(T(\chi_{E_n}))$ tiene una subsucesión norma convergente. Por lo tanto $\{T(\chi_E) : E \in \mathcal{S}\}$ es relativamente norma compacto.

ii) Sea $W \subseteq V$ un espacio vectorial cerrado y $G : \mathcal{S} \to W$ una medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Como V tiene la propiedad de Radon-Nikodym, existe $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $G(E) = \int_E g\,d\mu$ $\forall E \in \mathcal{S}$. Por el lema (5.1) existe una sucesión (π_n) de particiones tales que $\lim_n E_{\pi_n}(g) = g$ c.d. Además $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$E_{\pi_n}(g) = \sum_{A \in \pi_n} \frac{\int_A g\,d\mu}{\mu(A)} \chi_A = \sum_{A \in \pi_n} \frac{G(A)}{\mu(A)} \chi_A$$

En consecuencia $E_{\pi_n}(g)$ es W-valuada. Por lo tanto g es W-valuada c.d. y así $g \in B_1(\Sigma, W, \mu)$. Esto prueba que W tiene la propiedad de Radon-Nikodym. //

COROLARIO 5.28

Si cada subespacio vectorial cerrado separable de V es isomorfo a un subespacio de un espacio dual separable, entonces V tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

DEM:

Sea $W \subseteq V$ un subespacio vectorial cerrado separable. Supongamos que W es isomorfo a Y, un subespacio del espacio dual separable Z^*. Digamos que $i: W \to Y$ es tal isomorfismo. Ahora bien, si $G: \mathcal{J} \to W$ es una medida vectorial μ-continua y de variación acotada, entonces $i \cdot G: \mathcal{J} \to Y$ es también una medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Como Y tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces existe $g' \in B_1(\mathfrak{X}, Y, \mu)$ tal que:

$$i \cdot G(E) = \int_E g' d\mu \qquad \forall\ E \in \mathcal{J}$$

Pero $i^{-1}: Y \to W$ es un operador lineal continuo. Así que:

$$G(E) = \int_E i^{-1}(g') d\mu \qquad \forall\ E \in \mathcal{J}$$

Además $i^{-1} g': \mathfrak{X} \to W$ es una función μ-medible y $\| i^{-1} g' \| \in L_1(\mu)$. Por lo tanto $i^{-1} g' \in B_1(\mathfrak{X}, W, \mu)$ y aplicando la parte (i) del teorema anterior se tiene que V tiene la propiedad de Radon-Nikodym. //

COROLARIO 5.29

Si cada subespacio separable de V tiene dual separable, entonces V^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

DEM:

Sea $M \subseteq V^*$ un subespacio vectorial cerrado separable y $\{v_m^* : m \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de M. Seleccionamos sucesiones $(v_{m,n})_{n=1}^{\infty}$ en V tal que $\|v_{m,n}\| = 1$ y $|v_m^*(v_{m,n})| \geq (1 - 1/n)\|v_m^*\|$. Si Y es el espacio vectorial cerrado generado por $\{v_{m,n} : m,n = 1,2,\ldots\}$, entonces Y es separable y por hipótesis, Y^* también lo es. Definimos $T : M \longrightarrow Y^*$ por:

$$(Tv^*)(y) = v^*(y) \quad \forall\ v^* \in M \text{ y } y \in Y$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \|Tv^*\| &= \sup\{|(Tv^*)(v)| : \|v\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|v^*(v)| : \|v\| \leq 1\} \\ &= \|v^*\| \end{aligned}$$

Así pues, $\|T\| \leq 1$. Por otro lado:

$$\|Tv_m^*\| \geq \sup_n |v_m^*(v_{m,n})| = \|v_m^*\|$$

En consecuencia T es una isometría de M en Y^*. Como Y^* es separable, por el teorema (5.15) se tiene que Y^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Por el corolario anterior, M tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Por lo tanto, el teorema (5.27) garantiza que V^* posee la propiedad de Radon-Nikodym. //

Tenemos también un par de corolarios adicionales que resultan de gran interés.

COROLARIO 5.30

Si cada subespacio separable de V tiene dual separable, entonces $B_p(\Sigma, V^*, \mu)$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym, para $1 < p < \infty$.

DEM:

Se probará que cada subespacio separable de $B_q(\Sigma, V, \mu)$ tiene dual separable. En consecuencia $B_q(\Sigma, V, \mu)^*$ tiene la propiedad la propiedad de Radon-Nikodym. Además por hipótesis V^* tiene también la propiedad de Radon-Nikodym. Por lo tanto, como $B_q(\Sigma, V, \mu)^* = B_p(\Sigma, V^*, \mu)$, se sigue $B_p(\Sigma, V^*, \mu)$ tiene la propiedad deseada.

Si M un subespacio separable de $B_q(\Sigma, V, \mu)$, entonces existe una σ-álgebra $B \subseteq \Sigma$ contablemente generada y un subespacio Y de V tal que $M \subseteq B_q(\Sigma, Y, \mu|B)$. Como Y^* es separable, se tiene que Y^* posee la propiedad de Radon-Nikodym. En consecuencia $B_q(\Sigma, Y, \mu|B)^* = B_p(\Sigma, Y^*, \mu|B)$. Ahora bien, como B es contablemente generada y nuevamente, Y^* separable, se sigue que $B_p(\Sigma, Y^*, \mu|B)$ es separable. Finalmente, en vista de que M^* es un espacio cociente de $B_p(\Sigma, Y^*, \mu|B)$, se concluye que M^* es separable. //

Con el material expuesto en esta sección se puede probar que cualquier espacio de Hilbert (real) tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

COROLARIO 5.31 (VON NEUMANN)

Espacios de Hilbert (reales) tienen la propiedad de Radon Nikodym.

DEM:

Si H es un espacio de Hilbert, entonces $B_2(\Sigma, H, \mu)$ también lo es. Así pues $B_2(\Sigma, H, \mu)^* = B_2(\Sigma, H^*, \mu)$. Por (5.21) $H^* = H$ tiene la propiedad de R-N. //

CAPITULO 6

ESPERANZA CONDICIONAL, MARTINGALAS Y TEOREMAS DE CONVERGENCIA

En éste último capítulo se definirán los conceptos probabilísticos de esperanza condicional y martingalas a partir de las funciones Bochner integrables. Por supuesto se enunciarán y probarán algunas propiedades al respecto. Además abordaremos el asunto de la convergencia puntual y en $B_1(\mathfrak{X},V,\mu)$-norma de una martingala.

Al igual que en los capítulos anteriores, $(V,\|\ \|)$ es un espacio de Banach (sobre $\mathbb{C}$) y $(\mathfrak{X},\mathcal{S},\mu)$ un espacio de medida finito.

DEFINICION 6.1

Sea $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{S}$ una σ-álgebra de $\mathcal{S}$ y $f\in B_1(\mathfrak{X},V,\mu)$. f es llamada $\mathcal{H}$-integrable si $f\in B_1(\mathfrak{X},V,\mu/\mathcal{H})$ (i.e si $f\in L_1(\mu/\mathcal{H})$ y f es $\mu/\mathcal{H}$-medible).

DEFINICION 6.2

Sea $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{S}$ una σ-álgebra de $\mathcal{S}$ y $f\in B_1(\mathfrak{X},V,\mu)$. Una función $g\in B_1(\mathfrak{X},V,\mu)$ es llamada la esperanza condicional de f relativa a $\mathcal{H}$, si:

1) g es $\mathcal{H}$-integrable, y

2) $\int_E g\,d\mu=\int_E f\,d\mu \quad \forall\ E\in\mathcal{H}$

En este caso, g se denotará por $E(f\mid\mathcal{H})$.

OBSERVACIONES 6.3

1) $E(f\mid\mathcal{H})$ está únicamente definida (c.d), en el caso de que exista.

DEM:

Aplicar el corolario II.2.5 //

2) Si $\mathcal{H}=\{\emptyset, \mathfrak{X}\}$, entonces $E(f|\mathcal{H})$ existe $\forall f \in B_1(\mathfrak{X}, V, \mu)$. En efecto, la función constante $g = \int_{\mathfrak{X}} f d\mu / \mu(\mathfrak{X})$ satisface las condiciones de la definición (6.2)

3) Si $f \in B_1(\mathfrak{X}, V, \mu)$ es $\mathcal{H}$-integrable, entonces $E(f|\mathcal{H}) = f$ (c.d)

4) Si $E(f|\mathcal{H})$ y $E(h|\mathcal{H})$ existen para $f, h \in B_1(\mathfrak{X}, V, \mu)$, entonces

$$\alpha E(f|\mathcal{H}) = E(\alpha f|\mathcal{H}) \text{ c.d } \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$E(f+h|\mathcal{H}) = E(f|\mathcal{H}) + E(h|\mathcal{H}) \quad \text{c.d}$$

5) Sea $f \in B_1(\mathfrak{X}, V, \mu)$ y $T: V \to W$ un operador lineal acotado con rango en el espacio de Banach (sobre $\mathbb{C}$) W. Si $E(f|\mathcal{H})$ existe, entonces:

$$E(Tf|\mathcal{H}) = T E(f|\mathcal{H}) \quad \text{c.d}$$

DEM:

$$\int_E T E(f|\mathcal{H}) d\mu = T \int_E E(f|\mathcal{H}) d\mu = T \int_E f d\mu = \int_E T f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{H}. \quad \text{(Ver 3.9)} //$$

Veamos ahora un ejemplo de esperanza condicional.

EJEMPLO 6.4

Sea (A_n) una sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$, con $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathfrak{X}$. Si $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra de todas las uniones de miembros de (A_n), entonces $E(f|\mathcal{H})$ existe para cada $f \in B_1(\mathfrak{X}, V, \mu)$; de hecho:

$$E(f|\mathcal{H}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{A_n} f d\mu}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} \qquad \left(\text{convención } \frac{0}{0} = 0\right)$$

y que no es más que $E_\pi(f)$ donde $\pi=\{A_1,A_2,\dots\}$.

DEM:

1) Claramente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_{A_n}f\,d\mu}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}$ es $\mu/\mathcal{H}$-medible.

2) Por el lema de Fatou tenemos lo siguiente:

$$\int\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{\int_{A_n}f\,d\mu}{\mu(A_n)}\right\|\chi_{A_n}\,d\mu \le \lim_m \int\sum_{n=1}^{m}\left\|\frac{\int_{A_n}f\,d\mu}{\mu(A_n)}\right\|\chi_{A_n}\,d\mu$$

$$=\lim_m \sum_{n=1}^{m}\left\|\int_{A_n}f\,d\mu\right\| \le \lim_m \sum_{n=1}^{m}\int_{A_n}\|f\|\,d\mu \le \|f\|_1<\infty$$

Así pues, la función $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_{A_n}f\,d\mu}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}$ es $\mathcal{H}$-integrable. Por otro lado, consideremos un elemento $E\in\mathcal{H}$. En el caso de que E sea una unión finita de elementos de (A_n) entonces se verifica fácilmente que:

$$\int_E\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_{A_n}f\,d\mu}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}\,d\mu=\int_E f\,d\mu \qquad \text{-----------(6.4.1)}$$

Ahora bien, si $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{n_j}$, con $(A_{n_j})\subset(A_n)$, entonces:

$$\int_E\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_{A_n}f\,d\mu}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}\,d\mu=\int\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\int_{A_{n_j}}f\,d\mu}{\mu(A_{n_j})}\chi_{A_{n_j}}\,d\mu$$

y como:

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\frac{\int_{A_{n_j}}f\,d\mu}{\mu(A_{n_j})}\chi_{A_{n_j}}\right\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{\int_{A_n}f\,d\mu}{\mu(A_n)}\right\|\chi_{A_n} \quad \forall\, m\in\mathbb{N} \text{ y } x\in\Sigma,$$

entonces por el Teorema de Convergencia Dominada, (6.4.1) se satisface. Por lo tanto según la definición 6.2 se tiene que:

$$E(f\mid\mathcal{H})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_{A_n}f\,d\mu}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}$$

Si consideramos $E(\cdot|\mathcal{H})$ como un operador sobre el subespacio vectorial de las funciones f en $B_1(\Sigma,V,\mu)$ para las cuales $E(f|\mathcal{H})$ existe, las observaciones 3) y 4) demuestran que $E(\cdot|\mathcal{H})$ se comporta como la identidad sobre las funciones en $B_1(\Sigma,V,\mu)$ que son $\mathcal{H}$-integrables y además que es un operador lineal.

El objetivo inmediato es probar que el dominio del operador $E(\cdot|\mathcal{H})$ es justamente $B_1(\Sigma,V,\mu)$. Es decir, $E(f|\mathcal{H})$ existe $\forall\ f\in B_1(\Sigma,V,\mu)$. Para esto, se probará en primer lugar que $E(f|\mathcal{H})$ existe $\forall\ f\in L_1(\mu)$. Veamos esto en el lema siguiente.

<u>LEMA 6.5</u>

Sea $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{S}$ una σ-álgebra. Si $f\in L_1(\mu)$, entonces $E(f|\mathcal{H})$ existe. Más aun, si $1\le p<\infty$, entonces:

$$\|E(f|\mathcal{H})\|_p\le\|f\|_p \qquad \forall\ f\in L_1(\mu)$$

En consecuencia $E(\cdot|\mathcal{H})$ es una proyección lineal contractiva sobre $L_1(\mu)$.

<u>DEM:</u>

Sea $f\in L_1(\mu)$. Definimos $\lambda:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ por:

$$\lambda(A)=\int_A f\,d\mu \qquad \forall\ A\in\mathcal{H}$$

Es claro que λ es una medida finita y $\mu|\mathcal{H}$-continua. Así por el teorema de Radon-Nikodym (caso real), existe $g\in L_1(\mu)$, $\mathcal{H}$-integrable tal que:

$$\lambda(A)=\int_A g\,d\mu \qquad \forall\ A\in\mathcal{H}.$$

Por lo tanto $E(f|\mathcal{H})$ existe. De hecho $E(f|\mathcal{H})=g$ c.d.

Por otro lado, si $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ es una función convexa, entonces la desigualdad de Jensen garantiza que:

$$\varphi \circ E(f|\mathcal{H}) \leq E(\varphi \circ f|\mathcal{H}) \qquad \forall\ f \in L_1(\mu)$$

En consecuencia, si $\varphi(x) = |x|^p$ con $1 \leq p < \infty$, entonces

$$|E(f|\mathcal{H})|^p \leq E(|f|^p|\mathcal{H}) \qquad \forall\ f \in L_p(\mu)$$

Se sigue que $\|E(f|\mathcal{H})\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall\ f \in L_p$.

Finalmente, como $E(E(f|\mathcal{H})) = E(f|\mathcal{H}) \quad \forall\ f \in L_1(\mu)$ se tiene que $E(\cdot|\mathcal{H})$ es una proyección lineal contractiva sobre $L_1(\mu)$. //

La existencia de $E(f|\mathcal{H})$ para $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ es inmediata si V tiene la propiedad de Radon-Nikodym; basta imitar la prueba del lema anterior. En el caso de que V carezca de esta propiedad, la existencia de la esperanza condicional para funciones en $L_1(\mu)$ nos permitirá probar la existencia de $E(f|\mathcal{H})$ para funciones Bochner integrables.

TEOREMA 6.6

Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ una σ-álgebra. Si $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$, entonces $E(f|\mathcal{H})$ existe. Más aun, si $1 \leq p < \infty$, entonces:

$$\| E(f|\mathcal{H}) \|_p \leq \| f \|_p \qquad \forall\ f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$$

En consecuencia, $E(\cdot|\mathcal{H})$ es una proyección lineal contractiva sobre $B_p(\Sigma, V, \mu)$.

DEM:

Sea $f \in A(\Sigma, V, \mu)$ de la forma $f = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$ donde por supuesto, $v_i \in V$, $E_i \in \mathcal{F}$ y $E_i \cap E_j = \phi$ para $i \neq j$. Definimos $E(\cdot|\mathcal{H}) : A(\Sigma, V, \mu) \longrightarrow B_p(\Sigma, V, \mu|\mathcal{H})$ por:

$$E(f|\mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, E(\chi_{E_i}|\mathcal{H})$$

donde $E(\chi_{E_i}|\mathcal{H})$ es la esperanza condicional de $\chi_{E_i} \in L_p(\rho)$, cuya existencia está garantizada por el lema (6.5). Como la representación canónica de una función elemental es única, es inmediato que $E(f|\mathcal{H})$ está bien definido. Además es lineal sobre el subespacio vectorial $\Delta(\Sigma,V,\rho)$ de $B_p(\Sigma,V,\rho)$. Además por el lema (6.5):

$$\|E(f|\mathcal{H})\|_p = \left(\int \|E(f|\mathcal{H})\|^p d\rho\right)^{1/p} \leq \left(\int \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\| E(\chi_{E_i}|\mathcal{H})\right)^p d\rho\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int \left(E\left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\| \chi_{E_i}|\mathcal{H}\right)\right)^p d\rho\right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \|v_i\| \chi_{E_i} \right\|_p$$

$$= \left(\int \|f\|^p d\rho\right)^{1/p} = \|f\|_p$$

Por lo tanto, $E(\cdot|\mathcal{H})$ es un operador lineal continuo sobre $\Delta(\Sigma,V,\rho)$. En consecuencia $E(\cdot|\mathcal{H})$ admite una extensión sobre $B_p(\Sigma,V,\rho)$, que satisface las propiedades deseadas. //

<u>COROLARIO 6.7</u> (TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DOMINADA PARA ESPERANZAS CONDICIONALES)

Sean (f_n) una sucesión en $B_1(\Sigma,V,\rho)$ y $h \in L_1^+(\rho)$ tales que:

1) $f_n \to f$ c.d, y

2) $\|f_n\| \leq h$ c.d $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces $f \in B_1(\Sigma,V,\rho)$ y $\|E(f_n|\mathcal{H}) - E(f|\mathcal{H})\|_1 \to 0$ $(n\to\infty)$.

<u>DEM:</u>

Por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que $f \in B_1(\Sigma,V,\rho)$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$ $(n\to\infty)$. Se sigue del teorema anterior que:

$$\|E(f_n|\mathcal{H}) - E(f|\mathcal{H})\| \leq \|f_n - f\|_1 \to 0 \quad (n\to\infty) \qquad //$$

COROLARIO 6.8

Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$ una σ-álgebra. $\forall f \in B_1(\mathbb{X}, V, \mu)$ y $h \in L_\infty(\mathcal{H})$ se tiene que:

$$E(fh|\mathcal{H}) = h\,E(f|\mathcal{H}) \quad \text{c.d}$$

DEM:

Notemos en primer lugar que por la desigualdad de Hölder $h \cdot E(f|\mathcal{H})$ es $\mathcal{H}$-integrable. Para probar que es la esperanza condicional de fh relativa a $\mathcal{H}$, considoremos una sucesión $(h_n) \subseteq \Delta(\mathbb{X}, V, \mu_{\mathcal{H}})$ tal que $\|h_n - h\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$. Es inmediato verificar que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$E(fh_n|\mathcal{H}) = h_n E(f|\mathcal{H}) \quad \text{c.d}$$

Además por el corolario (6.7):

$$\|E(fh_n|\mathcal{H}) - E(fh|\mathcal{H})\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

En consecuencia, existe una subsecesión (h_{n_j}) de (h_n) tal que:

$$\lim_j E(fh_{n_j}|\mathcal{H}) = E(fh|\mathcal{H}) \quad \text{c.d} \quad (\text{por } 6.6 \text{ y Teo. de Riesz})$$

Por lo tanto existe $N \in \mathcal{H}$ con $\mu(N) = 0$ tal que las igualdades siguientes son válidas si $x \in \mathbb{X} \setminus N$:

$$E(fh|\mathcal{H})(x) = \lim_j E(fh_{n_j}|\mathcal{H})(x) = \lim_j h_{n_j} E(f|\mathcal{H})(x)$$
$$= h\,E(f|\mathcal{H})(x) \qquad //$$

El corolario siguiente proporciona una definición equivalente a la definición (6.2).

COROLARIO 6.9

Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$ una σ-álgebra. Si $f \in B_1(\mathbb{X}, V, \mu)$, entonces son equivalentes:

1) $\displaystyle\int_E E(f|\mathcal{H})\,d\mu = \int_E f\,d\mu \qquad \forall\, E \in \mathcal{H}$

2) $\displaystyle\int E(f|\mathcal{H})\,h\,d\mu = \int fh\,d\mu \qquad \forall\, h \in L_\infty(\mathcal{H})$

DEM:

2) ⇒ 1) Si $E \in \mathcal{H}$, entonces ponemos $h = \chi_E$ y el resultado se sigue.

1) ⇒ 2) Por el corolario (6.8) se tiene que:

$$\int E(f|\mathcal{H})\, h \, d\mu = \int E(fh|\mathcal{H})\, d\mu = \int fh \, d\mu \qquad \forall\, h \in L_\infty(\mathcal{H}) \qquad //$$

COROLARIO 6.10

Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$ una σ-álgebra. Si $f \in B_1(X,V,\mu)$, entonces:

$$\|E(f|\mathcal{H})\| \leq E(\|f\| \,|\, \mathcal{H}) \qquad \text{c.d}$$

DEM:

Si $f = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i}$ con $v_i \in V$, $E_i \in \mathcal{S}$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces:

$$\|E(f|\mathcal{H})\| = \Big\|E\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i} \Big| \mathcal{H}\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} v_i E(\chi_{E_i}|\mathcal{H})\Big\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|v_i\| E(\chi_{E_i}|\mathcal{H}) = E\Big(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\| \chi_{E_i} \Big| \mathcal{H}\Big)$$

$$= E(\|f\| \,|\, \mathcal{H})$$

Sea (f_n) una sucesión en $\Delta(X,V,\mu)$ tal que $|||f - f_n|||_1 \to 0$ $(n \to \infty)$. Por el teorema (6.6) se tiene que:

$$|||E(f - f_n|\mathcal{H})|||_1 \leq |||f - f_n||| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

En consecuencia es posible hallar una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que:

$$\|E(f - f_{n_k}|\mathcal{H})\| \to 0 \qquad \text{c.d} \qquad (k \to \infty)$$

Por otro lado, como $\|E(\|f\| - \|f_{n_k}\| \,|\, \mathcal{H})\|_1 \leq |||f - f_{n_k}|||_1 \to 0$ $(n \to \infty)$, entonces existe una subsucesión (f_m) de (f_{n_k}) tal que $|E(\|f\| - \|f_m\| \,|\, \mathcal{H})| \to 0$ c.d $(m \to \infty)$

Así pues:

$$\|E(f|\mathcal{H})\| = \lim_m \|E(f_m|\mathcal{H})\| \leq \lim_m E(\|f_m\| \,|\, \mathcal{H}) = E(\|f\| \,|\, \mathcal{H}) \qquad \text{c.d} \qquad //$$

Antes de entrar en materia de martingalas, se probará la desigualdad de Hölder en la versión para esperanzas condicionales. A saber:

TEOREMA 6.10 (Desigualdad de Hölder)

Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ una σ-álgebra. Si $f \in B_p(\mathbb{X}, \mathcal{V}, \mu)$ y $h \in L_q(\mu)$ donde $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces:

$$\| E(fh \mid \mathcal{H}) \| \leq [E(\|f\|^p \mid \mathcal{H})]^{1/p} [E(|h|^q \mid \mathcal{H})]^{1/q} \quad \text{c.d} \quad (\text{rel } \mu|\mathcal{H})$$

DEM:

Definamos el conjunto $A = \{ x \in \mathbb{X} \mid E(\|f\|^p \mid \mathcal{H})(x) > 0 \text{ y } E(|h|^q \mid \mathcal{H})(x) > 0 \}$.
Claramente $A \in \mathcal{H}$. Por otra parte, de la desigualdad:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \forall \; a, b \geq 0,$$

se sigue que:

$$\frac{\|f\|}{[E(\|f\|^p \mid \mathcal{H})]^{1/p}} \cdot \frac{|h|}{[E(|h|^q \mid \mathcal{H})]^{1/q}} \leq \frac{\|f\|^p}{p E(\|f\|^p \mid \mathcal{H})} + \frac{|h|^q}{q E(|h|^q \mid \mathcal{H})} \quad \text{sobre } A$$

Aplicando el operador $E(\cdot \mid \mathcal{H})$ en ambos miembros de la desigualdad se tiene que:

$$\frac{E(\|fh\| \mid \mathcal{H})}{[E(\|f\|^p \mid \mathcal{H})]^{1/p} \cdot [E(|h|^q \mid \mathcal{H})]^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{Sobre } A$$

Por el corolario (6.9); $\| E(fh \mid \mathcal{H}) \| \leq E(\|fh\| \mid \mathcal{H})$ c.d sobre A $(\text{rel } \mu|\mathcal{H})$. En consecuencia la desigualdad de Hölder queda demostrada sobre A.

Si definimos ahora el conjunto $A_f = \{ x \in \mathbb{X} \mid E(\|f\|^p \mid \mathcal{H})(x) = 0 \}$, entonces:

$$\int_{A_f} \|f\|^p d\mu = \int_{A_f} E(\|f\|^p \mid \mathcal{H}) d\mu = 0,$$

de donde $f = 0$ c.d sobre A_f $(\text{rel } \mu|\mathcal{H})$. Así pues $E(fh \mid \mathcal{H}) = 0$ c.d sobre A_f $(\text{rel } \mu|\mathcal{H})$. Por lo tanto la desigualdad de Hölder se reduce a la desigualdad $\alpha \leq 0$. Definiendo de manera análoga el conjunto A_n y procediendo como antes, se concluye la validez de la desigualdad de Hölder c.d sobre Σ (rel $\mu|\mathcal{H}$). //

DEFINICION 6.11

Sea T un conjunto dirigido y $(\mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ una filtración (i.e una red creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{J}$, en el sentido de que $\mathcal{H}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{H}_{\tau_2}$ si $\tau_1 \leq \tau_2$ en T). Una red $(f_\tau, \tau \in T)$ en $B_p(\Sigma, V, \mu)$ con $1 \leq p < \infty$, es una martingala si:

$$E(f_\tau | \mathcal{H}_{\tau_1}) = f_{\tau_1} \qquad \forall \; \tau \geq \tau_1$$

NOTACION

Para destacar el papel de la filtración $(\mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$, una martingala será denotada por $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$.

Un ejemplo de martingala proviene de manera natural del resultado que enunciamos a continuación.

LEMITA 6.12

Sean $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sub-σ-álgebras de $\mathcal{J}$ con $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$. Si $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$, entonces

$$E(E(f|\mathcal{H})|\mathcal{H}') = E(f|\mathcal{H}') \qquad \text{c.d}$$

DEM:

Como $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$, entonces:

$$\int_E E(E(f|\mathcal{H})|\mathcal{H}')d\mu = \int_E E(f|\mathcal{H})d\mu = \int_E f d\mu \qquad \forall \; E \in \mathcal{H}' \qquad //$$

EJEMPLO 6.13

Sean $(\mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ una filtración y $f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$ $(1 \leq p < \infty)$. Entonces

$$(E(f|\mathcal{H}_\tau), \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$$

es una martingala. En efecto, por el lema se tiene que:

$$E(E(f \mid \mathcal{B}_\tau) \mid \mathcal{B}_{\tau_1}) = E(f \mid \mathcal{B}_{\tau_1}) = f_{\tau_1} \quad \forall \quad \tau \geq \tau_1 \qquad //$$

EJEMPLO 6.14

Sean $(\mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N})$ una filtración y $G: \mathcal{S} \to V$ una medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Si V tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces $f_n = \frac{dG_n}{d\mu_n}$ existe, donde $G_n = G/\mathcal{B}_n$ y $\mu_n = \mu/\mathcal{B}_n$. Más aún, $(f_n, \mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N})$ define una martingala. En efecto, si $E \in \mathcal{B}_n$, entonces:

$$\int_E f_n \, d\mu = G_n(E) = G(E) = G_{n+1}(E) = \int_E f_{n+1} \, d\mu$$

Así pues, $E(f_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = f_n$ c.d $\forall n \in \mathbb{N}$. //

EJEMPLO 6.15

Sea $([0,1], \mathcal{S}, \lambda)$ el espacio de medida finita en el cual λ es la medida de Lebesgue sobre la σ-álgebra de los subconjuntos de $[0,1]$, Lebesgue medibles. Consideremos la filtración $(\mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N})$ donde $\mathcal{B}_n$ es la σ-álgebra generada por los intervalos diádicos (semi-abiertos de orden n):

$$I_{i,n} = \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right] \quad \text{donde} \quad 1 \leq i \leq 2^n$$

Definimos funciones $f_n : [0,1] \to L([0,1])$ por:

$$f_n(x) = 2^n \chi_{I_{i,n}} \quad \text{para } x \in I_{i,n}, \quad 1 \leq i \leq 2^n$$

En estas condiciones, $(f_n, \mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N})$ resulta ser una martingala. En efecto, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i \leq 2^n$ las siguientes igualdades son válidas:

$$\int_{I_{i,n}} f_n \, d\lambda = \chi_{I_{i,n}} = \chi_{I_{2i-1,n+1}} + \chi_{I_{2i,n+1}} = \int_{I_{2i-1,n+1}} f_{n+1} \, d\lambda + \int_{I_{2i,n+1}} f_{n+1} \, d\lambda = \int_{I_{i,n}} f_{n+1} \, d\lambda$$

Por el Lema de las Clases Monótonas (Ver. [10] p. 5 Teo. 1.13) se tiene que:

$$\int_E f_n \, d\lambda = \int_E f_{n+1} \, d\lambda \qquad \forall \, n \in \mathbb{N} \quad y \quad E \in \mathcal{H}_n$$

Es decir, $E(f_{n+1} | \mathcal{H}_n) = f_n \quad \forall \, n \in \mathbb{N}$. //

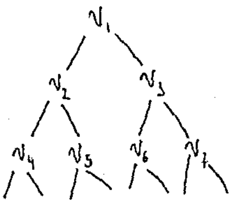
El ejemplo anterior admite una generalización, vía la siguiente definición.

DEFINICION 6.16

Si (V_n) es una sucesión en V que satisface la igualdad:

$$V_n = (V_{2n} + V_{2n+1})/2 \qquad \forall \; n \geq 1,$$

entonces (V_n) es llamada, árbol infinito en V y que denotaremos esquemáticamente como:



Algunas veces a V_1 se le conoce como el tronco y a V_j con $j = 2^k, 2^k+1, \dots, 2^{k+1}-1$ como los k-ésimos retoños

EJEMPLO 6.17

Sea $([0,1], \mathcal{S}, \lambda)$ el espacio de medida del ejemplo (6.15). Consideremos - la filtración $(\mathcal{H}_n, n \in \mathbb{N})$ donde $\mathcal{H}_n$ es la σ-álgebra generada por los - intervalos $I_{k,i} = [(i-2^{k-1})/2^{k-1}, (i-2^{k-1}+1)/2^{k-1}]$ donde $i = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \dots, 2^k-1$ $\forall k \geq 1$

Si $(v_n) \subseteq V$ es un árbol infinito, entonces definimos para cada $k \in \mathbb{N}$, funciones $f_k : [0,1) \longrightarrow V$ por:

$$f_1 = v_1 \chi_{[0,1)}$$

$$f_2 = v_2 \chi_{[0,1/2)} + v_3 \chi_{[1/2,1)}$$

$$\vdots$$

$$f_k = \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} v_i \chi_{I_{k,i}}$$

Notemos que $\forall\, k \geq 1$ e $i = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \ldots, 2^k-1$ se tiene que:

$$\int_{I_{k,i}} f_{k+1}\, d\lambda = \int f_{k+1} \chi_{I_{k,i}}\, d\lambda = \int (v_{2i} \chi_{I_{k,2i}} + v_{2i+1} \chi_{I_{k,2i+1}})\, d\lambda$$

$$= \frac{v_{2i} + v_{2i+1}}{2^k} = \frac{v_i}{2^{k-1}} = \int_{I_{k,i}} f_k\, d\mu$$

Por lo tanto $(f_k, \mathcal{B}_k, k \in \mathbb{N})$ es una martingala en $B_1([0,1), V, \lambda)$. //

En los párrafos siguientes se tratarán dos puntos importantes. Por un lado, la convergencia de una martingala $(f_\tau, \mathcal{B}_\tau, \tau \in T)$ en $B_p(\Sigma, V, \mu)$ - (con respecto a la $B_p(\Sigma, V, \mu)$-norma) con $1 \leq p < \infty$ y, por otro, la - convergencia puntual de martingalas $(f_n, \mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N})$ en $B_1(\Sigma, V, \mu)$.

Antes de enunciar un primer teorema de convergencia veamos el siguiente hecho.

OBSERVACION 6.18

Si $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ es una martingala en $B_p(\Sigma, V, \mu)$ con $1 \le p < \infty$, entonces

$$\lim_\tau \int_E f_\tau d\mu = G(E)$$

existe $\forall E \in \bigcup_\tau \mathcal{H}_\tau$. En efecto, si $E \in \bigcup_\tau \mathcal{H}_\tau$, entonces existe $\tau_1 \in T$ tal que $E \in \mathcal{H}_\tau$ $\forall \tau \geq \tau_1$. Esto es consecuencia del hecho de que $(\mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ es una filtración. Por lo tanto, $\forall \tau \geq \tau_1$ se tiene:

$$\lim_\tau \int_E f_\tau d\mu = \int_E E(f_\tau | \mathcal{H}_{\tau_1}) d\mu = \int_E f_{\tau_1} d\mu$$

Así pues la red $(\int_E f_\tau d\mu, \tau \in T)$ es a la larga constante, (y por lo tanto convergente)//

TEOREMA 6.19

Sea $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ una martingala en $B_p(\Sigma, V, \mu)$ con $1 \le p < \infty$. Son equivalentes:

1) $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ converge en $B_p(\Sigma, V, \mu)$- norma

2) Existe $f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\forall E \in \bigcup_\tau \mathcal{H}_\tau$:

$$\lim_\tau \int_E f_\tau d\mu = G(E) = \int_E f d\mu \qquad \text{----------} (6.19.1)$$

DEM:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\lim_\tau |||f_\tau - f|||_p = 0$. Además como $1 \le p < \infty$ se tiene que para $E \in \bigcup_\tau \mathcal{H}_\tau$:

$$\left\| \int_E f_\tau d\mu - \int_E f d\mu \right\| \le \int_E \|f_\tau - f\| d\mu \le |||f_\tau - f|||_p^p \to 0$$

Por lo tanto $\lim_{\tau} \int_E f_\tau d\mu = G(E) = \int_E f d\mu$.

2) ⇒ 1) Inversamente, sea $f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$ tal que (6.19.1) es válida. Definamos $\mathcal{H}_\infty = \sigma(\bigcup_\tau \mathcal{H}_\tau)$ y $f_\infty = E(f \mid \mathcal{H}_\infty)$. Claramente se tiene que:

a) $G(E) = \int_E f_\infty d\mu \quad \forall E \in \bigcup_\tau \mathcal{H}_\tau$

b) $E(f_\infty \mid \mathcal{H}_\tau) = f_\tau \quad \forall \tau \in T$

Para probar que $\lim_\tau f_\tau = f_\infty$ en la $B_p(\Sigma, V, \mu)$-norma, supongamos s.p.g. que $\mathcal{H}_\infty = \Sigma$. Ahora, si $\varepsilon > 0$, entonces es posible hallar una función $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^n v_i \chi_{E_i}$ con $v_i \in V$ y $E_i \in \bigcup_\tau \mathcal{H}_\tau$ tal que $|||f_\varepsilon - f_\infty|||_p < \varepsilon/2$ (esto porque $1 \leq p < \infty$). Como $(\mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ es una filtración, entonces existe $\tau_0 \in T$ de tal manera que $E_i \in \mathcal{H}_{\tau_0}$ $\forall i = 1, \ldots, n$. En consecuencia, f_ε es $\mathcal{H}_\tau$-medible $\forall \tau \geq \tau_0$. Además $E(f_\varepsilon \mid \mathcal{H}_\tau) = f_\varepsilon \quad \forall \tau \geq \tau_0$. Finalmente para $\tau \geq \tau_0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} |||f_\tau - f_\infty|||_p &\leq |||f_\tau - f_\varepsilon|||_p + |||f_\varepsilon - f_\infty|||_p \\ &= |||E(f_\infty - f_\varepsilon \mid \mathcal{H}_\tau)|||_p + |||f_\varepsilon - f_\infty|||_p \\ &\leq 2|||f_\infty - f_\varepsilon|||_p < \varepsilon \end{aligned}$$

//

COROLARIO 6.20

Sea $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ una martingala en $B_p(\Sigma, V, \mu)$ con $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:

1) $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ converge en la $B_p(\Sigma, V, \mu)$-norma

2) Existe $f \in B_p(\Sigma, V, \mu)$ tal que $E(f \mid \mathcal{H}_\tau) = f_\tau \quad \forall \tau \in T$

DEM:

Es inmediata de la prueba del teorema anterior. //

DEFINICION 6.21

Sea $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ una martingala en $B_1(\Xi, V, \rho)$. Diremos que $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ es uniformemente integrable si:

$$\lim_{\rho(E)\to 0,\, E\in \mathcal{H}_\tau} \int_E \|f_\tau\| \, d\rho = 0 \qquad \text{uniformemente en } \tau \in T.$$

Con base en la definición anterior podemos establecer otra caracterización de convergencia de martingalas con respecto a la $B_p(\Xi, V, \rho)$-norma. Esto es,

TEOREMA 6.23 (Convergencia en media de martingalas)

Sean V un espacio de Banach (sobre $\mathbb{C}$) con la propiedad de Radon-Nikodym y $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ una martingala en $B_p(\Xi, V, \rho)$ con $1 \le p < \infty$. Son equivalentes:

1) $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ converge en $B_p(\Xi, V, \rho)$-norma

2) i) $\sup_\tau |||f_\tau|||_p < \infty$ con $1 < p < \infty$ ó

   ii) si $p = 1$, entonces $(f_\tau, \mathcal{H}_\tau, \tau \in T)$ es uniformemente integrable.

DEM:

1) ⇒ 2) Por el corolario (6.20) existe $f \in B_p(\Xi, V, \rho)$ tal que $E(f|\mathcal{H}_\tau) = f_\tau$ $\forall\ \tau \in T$. Esto nos conduce a las desigualdades:

$$|||f_\tau|||_p = |||E(f|\mathcal{H}_\tau)|||_p \le |||f|||_p < \infty \quad \forall\ \tau \in T \ \text{ y } \ 1 \le p < \infty$$

Esto prueba (en particular para $1 < p < \infty$) que (i) vale. Para probar (ii) -

notemos que como $G(E)=\int_E f\,d\mu$ $\forall\, E \in \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$, entonces $G << \mu|\bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$. En consecuencia la martingala $(f_\tau, \mathcal{B}_\tau, \tau \in T)$ es uniformemente integrable.

2⇒1) Para $p=1$ se tiene que la martingala $(f_\tau, \mathcal{B}_\tau, \tau \in T)$ es uniformemente integrable. De aquí que si $G(E)=\lim_\tau \int_E f_\tau d\mu$ $\forall\, E \in \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$, entonces $\lim_{\mu(E)\to 0} G(E)=0$ $\forall E \in \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$. Por otro lado, si $\pi \subseteq \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$ es una partición (finita) de Σ, entonces existe $\tau_0 \in T$ tal que $\pi \subseteq \mathcal{B}_{\tau_0}$. (pues $(\mathcal{B}_\tau, \tau \in T)$ es una filtración. En consecuencia:

$$\sum_{E\in\pi} \|G(E)\| = \sum_{E\in\pi} \left\|\int_E f_{\tau_0} d\mu\right\| \leq \int \|f_{\tau_0}\| d\mu \leq \sup_\tau \|| f_\tau \||_1 < \infty$$

Así pues, $G << \mu$ y es de variación acotada sobre $\bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$. Por el teorema de extensión de Caratheodory - Hahn - Kluvanek (Ver apéndice), existe $\bar{G}: \mathcal{B}_\infty \to V$ con $\mathcal{B}_\infty = \sigma(\bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau)$, una medida vectorial μ-continua y de variación acotada tal que $\bar{G}(E)=G(E)$ $\forall\, E \in \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$. Como V tiene la propiedad de Radon-Nikodym, existe $f \in B_1(\Sigma, V, \mu|\mathcal{B}_\infty)$ que satisface la igualdad:

$$\lim_\tau \int_E f_\tau d\mu = G(E) = \bar{G}(E) = \int_E f\,d\mu \qquad \forall\, E \in \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$$

Por el teorema 6.19, $\lim_\tau \|| f_\tau - f \||_p = 0$.

Supongamos ahora que $1<p<\infty$. Por la desigualdad de HöIder:

$$\int_E \|f_\tau\| d\mu \leq \|| f_\tau \||_p \, \mu(E)^{1/q} \leq \sup_\tau \|| f_\tau \||_p \, \mu(E)^{1/q} \qquad \forall\, E \in \mathcal{B}_\tau \quad y\ \tau \in T.$$

Por lo tanto, $(f_\tau, \mathcal{B}_\tau, \tau \in T)$ es de manera automática uniformemente integrable y acotada en $B_1(\Sigma, V, \mu)$. Con el auxilio de la prueba del caso $p=1$, es posible justificar la existencia de $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\lim_\tau \|| f_\tau - f \||_1 = 0$. De donde:

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{\tau} \int_E f_\tau\,d\mu = G(E) \quad \forall \; E \in \bigcup_{\tau} \mathcal{A}_\tau$$

Nuevamente por el teorema (6.19) tenemos la conclusión deseada. Resta probar que $f \in B_p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Para esto, seleccionamos una sucesión (τ_n) en T tal que $\lim_n \|f_{\tau_n} - f\|_1 = 0$ y $\lim_n f_{\tau_n} = f$ c.d. Por el Lema de Fatou se tiene que:

$$\int \|f\|^p d\mu \leq \underline{\lim_n} \int \|f_{\tau_n}\|^p d\mu \leq \sup_{\tau} \|f_\tau\|_p^p < \infty \quad . \;//$$

En el corolario (4.18) se probó que $L_1([0,1), \mathcal{S}, \lambda)$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto al espacio de medida $([0,1), \mathcal{S}, \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue sobre los subconjuntos de $[0,1)$ Lebesgue medibles. El siguiente corolario prueba lo mismo, pero ahora nos apoyaremos en el teorema anterior.

<u>COROLARIO 6.24</u>

$L_1([0,1))$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

<u>DEM:</u>

Consideremos la martingala construida en el ejemplo (6.17) a partir del siguiente árbol infinito en $L_1([0,1))$:

$$v_1 = \chi_{[0,1)} \;,\; v_2 = 2\,\chi_{[0,1/2)} \;,\ldots,\; v_i = 2^{k-1}\chi_{I_{k,i}} \quad \text{para } i = 2^{k-1}, \ldots, 2^k - 1 \quad \text{y } k \geq 1 \,.$$

Para verificar que la sucesión (v_n) en $L_1([0,1))$ es efectivamente un árbol infinito, notemos que $\forall\, k\geq 1$ se tiene que $I_{k,i} = I_{k+1,2i} \cup I_{k+1,2i+1}$ para cada $i = 2^{k-1},\dots,2^k-1$. En consecuencia,

$$v_i = 2^{k-1}\chi_{I_{k,i}} = 2^{k-1}\left(\chi_{I_{k+1,2i}} + \chi_{I_{k+1,2i+1}}\right)$$

$$= 2^{k-1}\chi_{I_{k+1,2i}} + 2^{k-1}\chi_{I_{k+1,2i+1}} = \frac{v_{2i}}{2} + \frac{v_{2i+1}}{2}.$$

De este hecho se tiene que:

$$\|v_n - v_{2n}\|_1 = \|-\tfrac{1}{2}v_{2n} - \tfrac{1}{2}v_{2n+1}\|_1 = \tfrac{1}{2}\|-v_{2n} + v_{2n+1}\|_1$$

$$= \tfrac{1}{2}\|-2^k\chi_{I_{k+1,2n}} + 2^k\chi_{I_{k+1,2n+1}}\|_1 = 1 \quad \forall\, n\geq 1$$

Análogamente, $\|v_n - v_{2n+1}\|_1 = 1 \quad \forall\, n\geq 1$. Por otra parte, como $f_n = \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} v_i\chi_{I_{n,i}}$ $\forall\, n\geq 1$, entonces

1) $\|f_n(t)\|_1 = 1 \quad \forall\; t\in[0,1)$

2) $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\|_1 = 1 \quad \forall\; t\in[0,1)$

3) $|||f_n - f_{n+1}|||_1 = 1 \quad \forall\; n\geq 1$

En efecto, para $t\in[0,1)$ y $n\geq 1$, existe un intervalo $I_{n,i}$ con $i = 2^{n-1},\dots,2^n-1$ tal que $t\in I_{n,i}$. Así pues,

$$\|f_n(t)\|_1 = \|v_i\chi_{I_{n,i}}(t)\|_1 = \|v_i\| = 1$$

También, como $I_{n,i} = I_{n+1,2i} \cup I_{n+1,2i+1}$, entonces

$$\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\|_1 = \begin{cases} \|v_i - v_{2i}\|_1 & \text{si } t \in I_{n+1,2i} \\ \|v_i - v_{2i+1}\|_1 & \text{si } t \in I_{n+1,2i+1} \end{cases}$$

Por lo tanto $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\|_1 = 1 \quad \forall\, t \in [0,1)$ y $n \geq 1$. Claramente se sigue que $|||f_n - f_{n+1}|||_1 = 1 \quad \forall\, n \geq 1$.

Por otro lado, para $E \in \mathcal{G}_n$ se tiene que:

$$\int_E \|f_n\|_1 \, d\lambda = \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n - 1} \|v_i\|_1 \lambda(I_{n,i} \cap E) = \lambda(E) \qquad \forall\, n \geq 1$$

Esto garantiza que la martingala $(f_n, \mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$ es uniformemente integrable. Pero además por (1), $\sup_n |||f_n|||_1 < \infty$. Luego entonces $L_1([0,1])$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodym pues por (3), la martingala $(f_n, \mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$ no es convergente con respecto a la $B_1([0,1], L_1([0,1]), \lambda)$ - norma. //

COROLARIO 6.25

Si V tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces V no contiene árboles infinitos acotados que satisfacen

$$\|v_n - v_{2n}\| \geq \delta \qquad \forall\, n \geq 1$$

$$\|v_n - v_{2n+1}\| \geq \delta \qquad \forall\, n \geq 1$$

Para alguna $\delta > 0$. (Este tipo de árboles infinitos que satisfacen las -

desigualdades anteriores para alguna $\delta > 0$, se acostumbra llamarlos δ-árboles infinitos).

DEM:

De los resultados obtenidos en el ejemplo (6.17) y corolario (6.24) se deduce la existencia de una martingala $(f_n, \mathcal{H}_n, n \in \mathbb{N})$ uniformemente acotada y no convergente con respecto a la $B_1([0,1], V, \lambda)$ - norma. Esto por supuesto en el caso de que V contenga un δ-árbol infinito. Pero por el teorema (6.23) esto es imposible. //

A continuación enunciamos y probamos un teorema que va en sentido inverso al teorema (6.23), concretamente:

TEOREMA 6.26

Sea V un espacio de Banach (sobre $\mathbb{C}$) tal que para cada espacio de medida finita (Σ, V, μ), cada martingala en $B_1(\Sigma, V, \mu)$ acotada y uniformemente integrable converge en la $B_1(\Sigma, V, \mu)$ - norma. Entonces V tiene la propiedad de Radon Nikodym.

DEM:

Sea (Σ, λ, μ) un espacio de medida finita. Consideremos la clase $\mathcal{P}$ de todas las particiones de Σ con elementos de $\mathcal{S}$, dirigida por refinamientos. Si $G \in MB(\mathcal{S}, V, \mu)$ entonces definimos la función $f_\pi : \Sigma \to V$ por:

$$f_\pi = \sum_{E \in \pi} \frac{G(E)}{\mu(E)} \chi_E \qquad (\text{convención } \tfrac{0}{0} = 0)$$

Si $\mathcal{H}_\pi = \sigma(\pi)$, entonces $(f_\pi, \mathcal{H}_\pi, \pi \in \mathcal{P})$ es una martingala en $B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que:

$$G(E)=\lim_{\pi}\int_E f_\pi d\mu \quad \forall\ E\in\mathcal{S}.$$

Tambien se tiene que:

$$\int \|f_\pi\| d\mu = \sum_{E\in\pi}\left\|\frac{G(E)}{\mu(E)}\right\|\mu(E) = \sum_{E\in\pi}\|G(E)\| \leq |G|(\Omega) < \infty$$

Como $G<<\mu$, entonces $\forall\ \varepsilon>0$, existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que $|G|(E)<\varepsilon$ si $\mu(E)<\delta$. Así pues, para $E\in\mathcal{F}_\pi$ con $\mu(E)<\delta$ tenemos que:

$$\int_E \|f_\pi\| d\mu \leq |F|(E) < \varepsilon$$

Por lo tanto, la martingala $(f_\pi, \mathcal{F}_\pi, \pi\in P)$ es uniformemente integrable. Por hipotesis, $\lim_{\pi}\|f_\pi - f\|_1=0$ para alguna $f\in B_1(\Omega,V,\mu)$. Luego,

$$G(E)=\lim_{\pi}\int_E f_\pi d\mu = \int_E f d\mu \quad \forall\ E\in\mathcal{S} \qquad //$$

En los párrafos siguientes se abordará el problema de la convergencia puntual de una martingala en $B_1(\Omega,V,\mu)$. En este caso se considerará el conjunto dirigido $T=\mathbb{N}$ con el orden acostumbrado. Esto es, estudiaremos la convergencia c.d (m, μ) de las martingalas $(f_n, \mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$ en $B_1(\Omega,V,\mu)$. En adelante la martingala $(f_n, \mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$ será simplemente denotada por $(f_n, \mathcal{F}_n)$.

Para probar el primer teorema de convergencia puntual, nos apoyaremos en el siguiente lema, mejor conocido en el medio probabilistico por <u>Lema Maximal</u>.

LEMA 6.27 (LEMA MAXIMAL)

Sea $(f_n, \mathcal{B}_n)$ una martingala en $B_1(X, \nu, \mu)$. Si $\forall\, \delta > 0$ definimos el conjunto:

$$D_\delta = \{x : \sup_n \|f_n(x)\| > \delta\},$$

entonces son válidos:

1) $\limsup_n \int_{D_\delta} (\|f_n\| - \delta)\, d\mu \geq 0$

2) $\mu(D_\delta) \leq \frac{1}{\delta} \sup_n \|f_n\|_1$

DEM:

1) Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $D_\delta^m = \{x : \|f_m(x)\| > \delta,\ \|f_j(x)\| \leq \delta$ para $j < m\}$. Notemos que $D_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_\delta^m$, $D_\delta^n \cap D_\delta^m = \emptyset$ si $m \neq n$ y $D_\delta^m \in \mathcal{B}_m\ \forall m$. Así pues,

$$\limsup_n \int_{D_\delta} (\|f_n\| - \delta)\, d\mu \geq \limsup_n \lim_K \sum_{m=1}^{K} \int_{D_\delta^m} (\|f_n\| - \delta)\, d\mu \quad \text{------ (6.27.1)}$$

Por otra parte, $\forall\, K \in \mathbb{N}$ fijo, si $n \geq K$, entonces $E(f_n | \mathcal{B}_m) = f_m\ \forall\, m = 1, \ldots, K$. Se sigue entonces que:

$$\int_{D_\delta^m} (\|f_m\| - \delta)\, d\mu = \int (\|E(f_n \chi_{D_\delta^m} | \mathcal{B}_m)\| - \delta \chi_{D_\delta^m})\, d\mu \qquad \text{(por 6.8)}$$

$$\leq \int (\|f_n \chi_{D_\delta^m}\| - \delta \chi_{D_\delta^m})\, d\mu \qquad \text{(por 6.6)}$$

$$= \int_{D_\delta^m} (\|f_n\| - \delta)\, d\mu$$

Por lo tanto,

$$\limsup_n \int_{D_\delta} (\|f_n\| - \delta)\, d\mu \geq \limsup_n \lim_K \sum_{m=1}^{K} \int_{D_\delta^m} (\|f_m\| - \delta)\, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{D_\delta^m} (\|f_m\| - \delta)\, d\mu \geq 0$$

2) Por (1) tenemos que:

$$\sup_n \frac{|||f_n|||_1}{\delta} \geq \limsup_n \frac{1}{\delta}\int_{D_\delta} \|f_n\| d\mu \geq \frac{\delta}{\delta}\mu(D_\delta) = \mu(D_\delta) \ . \ //$$

TEOREMA 6.28

Sea $(f_n, \mathcal{F}_n)$ una martingala en $B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\lim_n |||f_n - f|||_1 = 0$ para alguna $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$. Entonces $\lim_n \|f_n - f\| = 0$ c.d (c.t.μ).

DEM:

Supongamos que existe $f \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\lim_n |||f_n - f|||_1 = 0$. Para $\varepsilon, \delta > 0$ hallamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $|||f_n - f_m|||_1 \leq \varepsilon\delta$. Si $m \in \mathbb{N}$ es fijo, entonces se sigue que $(f_n - f_m, \mathcal{F}_n, n \geq m)$ es una martingala en $B_1(\Sigma, V, \mu)$. Por el Lema Maximal tenemos que:

$$\mu\{x : \sup_{n \geq m} \|f_n(x) - f_m(x)\| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{n \geq m} |||f_n - f_m|||_1 \leq \delta$$

Luego, (f_n) es casi-uniforme (c.u) de Cauchy. Por lo tanto $\lim_n \|f_n - f\| = 0$ c.d

//

La cuestión ahora es ¿qué sucede con la convergencia puntual si una martingala $(f_n, \mathcal{F}_n)$ en $B_1(\Sigma, V, \mu)$ no es convergente con respecto a la norma definida en el espacio de las funciones Bochner integrables?. Al igual que en párrafos anteriores, si $G(E) = \lim_n \int_E f_n d\mu$ $\forall E \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ y $(f_n, \mathcal{F}_n)$ es $B_1(\Sigma, V, \mu)$-acotada, entonces la prueba del teorema (6.23) garantiza que G es de variación acotada. Ahora bien, si agregamos la hipótesis de que $G \ll \mu$ (equivalentemente si $(f_n, \mathcal{F}_n)$ es uniformemente integrable), entonces por el teorema (6.23) se tiene que la martingala $(f_n, \mathcal{G}_n)$ es $B_1(\Sigma, V, \mu)$-convergente. En consecuencia, $(f_n, \mathcal{G}_n)$ converge c.d $(\text{rel}\ \mu)$ por el teorema (6.28). El problema ahora radica en ver que sucede si quitamos la hipótesis de que $G \ll \mu$. La solución a esto está en el siguiente resultado.

TEOREMA 6.29 (TEOREMA DE CONVERGENCIA PUNTUAL DE MARTINGALAS)

Sean, $(f_n, \mathcal{G}_n)$ una martingala $B_1(\Sigma, V, \mu)$-acotada, $G(E) = \lim_n \int_E f_n d\mu \quad \forall\, E \in \bigcup_n \mathcal{G}_n$. Si $G = \overline{G} + H$ con $|\overline{G}| \ll \mu$ y $|H| \perp \mu$ es la descomposición de Lebesgue de G con respecto a μ, entonces son equivalentes:

1) $\lim_n f_n$ existe c.d $(\text{rel}\ \mu)$

2) $\overline{G}$ tiene derivada de Radon-Nikodym en $B_1(\Sigma, V, \mu)$. En este caso

$$\lim_n f_n = E(g \mid \mathcal{G}_\infty) \quad \text{donde} \quad \mathcal{G}_\infty = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{G}_n\right)$$

DEM:

En toda la prueba se supondra que $\sigma(\bigcup_n \mathcal{G}_n) = \Sigma$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $g \in B_1(\Sigma, V, \mu)$ tal que $\overline{G}(E) = \int_E g\, d\mu \quad \forall\, E \in \Sigma$. Si definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n = E(g \mid \mathcal{G}_n)$, entonces es inmediato que $(g_n, \mathcal{G}_n)$ es una martingala $B_1(\Sigma, V, \mu)$-acotada, la cual converge a g en $B_1(\Sigma, V, \mu)$ (por el corolario (6.20)) y c.d $(\text{rel}\ \mu)$ también a g (por el teorema (6.28)). Así pues, si $h_n = f_n - g_n$, entonces $(h_n, \mathcal{G}_n)$ es una martingala acotada en $B_1(\Sigma, V, \mu)$. Más aún, se probará que

$$\lim_n h_n = 0 \quad \text{c.d} \quad (\text{rel}\ \mu)$$

Ahora bien, como $G = \bar{G} + H$ y de la definición de las funciones g_n se tiene que $\forall E \in \mathcal{Y}_n$:

$$\bar{G}(E) + H(E) = G(E) = \int_E f_n d\mu = \int_E g_n d\mu + \int_E h_n d\mu$$
$$= \int_E g d\mu + \int_E h_n d\mu = \bar{G}(E) + \int_E h_n d\mu$$

Se deduce que $H(E) = \int_E h_n d\mu \quad \forall E \in \mathcal{Y}_n$. Por otro lado, el hecho de que $|H| \perp \mu$ nos conduce a la desigualdad:

$$\mu(\mathfrak{X} \setminus A) + |H|(A) < \varepsilon\delta/2$$

donde $\varepsilon, \delta > 0$, $\varepsilon < 1$ y $A \in \bigcup_n \mathcal{Y}_n$ elegido adecuadamente. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{Y}_{n_0}$. Por el lema maximal se tiene que:

$$\mu(\{x : \sup_{n \geq n_0} \|h_n(x)\| > \varepsilon\}) = \mu(\{x : \sup_{n \geq n_0} \|h_n(x)\| > \varepsilon\} \setminus A)$$
$$+ \mu(\{x : \sup_{n \geq n_0} \|h_n(x)\| > \varepsilon\} \cap A)$$
$$\leq \varepsilon\delta/2 + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{n \geq n_0} \int_A \|h_n\| d\mu$$
$$\leq \varepsilon\delta/2 + \frac{1}{\varepsilon} |H|(A) < \delta$$

Se sigue que $\lim_n h_n = 0$ c.u (casi-uniformemente). En consecuencia $\lim_n f_n = g$ c.d

1) ⇒ 2) Supongamos que $\lim_n f_n = \phi$ c.d. Por el lema de Fatou tenemos que:

$$\int \|\phi\| d\mu \leq \underline{\lim}_n \int \|f_n\| d\mu \leq \sup_n \|f_n\|_1 < \infty$$

Esto significa que $\phi \in B_1(\Sigma, V, \mu)$. Como es de esperarse, definamos $g_n = E(\phi | \mathcal{H}_n)$. Notemos que $(f_n - g_n, \mathcal{H}_n)$ es una martingala $B_1(\Sigma, V, \mu)$-acotada. Sea $H_1 : \bigcup_n \mathcal{H}_n \to V$ definida como:

$$H_1(E) = \lim_n \int_E (f_n - h_n) d\mu \quad \forall\ E \in \bigcup_n \mathcal{H}_n .$$

Sea además $H_{11} + H_{12} = H_1$ la descomposición de Lebesgue de H_1 respecto a μ, donde $H_{11} << \mu$ y $H_{12} \perp \mu$. Para probar que $H_1 \perp \mu$ basta verificar que $H_{11} \equiv 0$. En caso contrario, existe $v_0^* \in V^*$ tal que $v_0^* H_{11} \not\equiv 0$. Así pues:

$$\lim_n \int_E v_0^*(f_n - g_n) d\mu = v_0^* H_{11}(E) + v_0^* H_{12}(E) \quad \forall \quad E \in \bigcup_n \mathcal{H}_n .$$

Por el teorema de Radon-Nikodym (caso real), existe $h \not\equiv 0 \in L_1(\mu)$ tal que

$$v_0^* H_1(E) = \int_E h\, d\mu \quad \forall \quad E \in \Sigma$$

Por la prueba de la primera parte $\lim_n v_0^*(f_n - h_n) = h$ c.d (rel μ). Pero,

$$\lim_n (f_n - g_n) = \lim_n (f_n + \phi - g_n) = 0 \quad \text{c.d} \quad (\text{rel } \mu)$$

En consecuencia $h = 0$ ∇. Así pues $H_{11} \equiv 0$ y $H_1 \perp \mu$. Finalmente definamos $G_1(E) = \int_E \phi\, d\mu$ $\forall\ E \in \bigcup_n \mathcal{H}_n$. Por lo tanto, $\forall\ E \in \bigcup_n \mathcal{H}_n$ se tiene que:

$$G(E) = \lim_n \int_E f_n d\mu = \lim_n \int_E g_n d\mu + H_1(E) = G_1(E) + H_1(E)$$

Como $G_1 << \mu$ y H_1 es μ-singular, entonces $G = \bar{G} + H$ donde $\bar{G} = G_1$ y $H = H_1$. //

APENDICE

MEDIDAS VECTORIALES

DEFINICION A.1

Sean $(V, \| \ \|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y A una álgebra de subconjuntos de X. Una función $G: A \to V$ es llamada una medida vectorial finito aditiva o simplemente una medida vectorial si:

$$G(E_1 \cup E_2) = G(E_1) + G(E_2) \qquad \text{con } E_1 \cap E_2 = \phi$$

Si además $G\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} G(E_n)$ convergente en la norma de V, para toda sucesión (E_n) de elementos disjuntos de A tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in A$, entonces decimos que G es una medida vectorial contablemente aditiva.

EJEMPLOS A.2

1) Sea $T: L_\infty[0,1] \to V$ un operador lineal continuo. Para cada conjunto $E \subset [0,1]$ Lebesgue medible definimos $G(E) = T(\chi_E)$. Claramente G es una medida vectorial finito aditiva.

2) Sea $T: L_1[0,1] \to V$ un operador lineal continuo. De manera análoga que en 1), escribimos $G(E) = T(\chi_E)$ para $E \subset [0,1]$ Lebesgue medible.

Como $\|G(E)\| \leq \|T\| \|\chi_E\|_1 = \|T\| \lambda(E)$, entonces G es una medida vectorial contablemente aditiva. En efecto, si (E_n) es una sucesión disjunta de subconjuntos de $[0,1]$ Lebesgue medibles, entonces:

$$\lim_m \left\| G\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{n=1}^{m} G(E_n) \right\| = \lim_m \left\| G\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right) \right\| \leq \|T\| \left(\lim_m \lambda\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right)\right) = 0$$

PROPOSICION A.3

Sea $g \in B_1(S, V, \mu)$ y $G : S \to V$ la función definida por:

$$G(E) = \int_E g \, d\mu \quad \forall \; E \in S$$

Si (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos de S, con $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} G(E_n)$ es absolutamente convergente. Más aun

$$G(E) = \sum_{n=1}^{\infty} G(E_n)$$

Es decir, G es una medida vectorial contablemente aditiva.

DEM:

La convergencia absoluta se sigue de las desigualdades:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|G(E_n)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|g\| \, d\mu = \int_E \|g\| \, d\mu \leq |||g|||_1 < \infty$$

Por otra parte, $\left\| G\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{n=1}^{m} G(E_n) \right\| = \left\| G\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right) \right\| \leq \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} \|g\| \, d\mu$. Pero $\lim_m \mu\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right) = 0$, entonces $\lim_m \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} \|g\| \, d\mu = 0$. //

DEFINICION A.4

Sea $G : \mathcal{A} \to V$ una medida vectorial. La función $|G| : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ – definida como:

$$|G|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|G(A)\| \quad \forall \; E \in \mathcal{A}$$

es llamada la <u>variación de G</u>, donde el supremo es tomado sobre todas las particiones π finitas y disjuntas de E, mediante elementos de A. Si $|G|(I) < \infty$, entonces G es llamada <u>medida de variación acotada</u>.

<u>EJEMPLO A.5</u>

Sea G la medida vectorial definida como en el ejemplo A.2.2. $\forall E \subset [0,1]$ Lebesgue medible se tiene que $\|G(E)\| \leq \|T\| \lambda(E)$. En consecuencia se verifica que $|G|(E) \leq \|T\| \lambda(E)$. En particular, $|G|(I) \leq \|T\| \lambda(I) = \|T\| < \infty$ Así pues G es de variación acotada.

<u>PROPOSICION A.6</u>

Si G es la medida vectorial definida como en la proposición (A.3), entonces G es de variación acotada. Más aun

$$|G|(E) = \int_E \|g\| d\mu \quad \forall E \in \mathcal{S}$$

<u>DEM:</u>

Si π es una partición de $E \in \mathcal{S}$, entonces:

$$\sum_{A \in \pi} \|G(A)\| = \sum_{A \in \pi} \left\| \int_A g \, d\mu \right\| \leq \sum_{A \in \pi} \int_A \|g\| d\mu = \int_E \|g\| d\mu < \infty$$

Se sigue que G es de variación acotada. Por otro lado, sea (Δ_n) una sucesión en $\Delta(I, V, \mu)$ tal que $\lim_n \int \|g - \Delta_n\| d\mu = 0$. Como las estimaciones anteriores prueban que $|G|(E) \leq \int_E \|g\| d\mu$, resta entonces verificar la desigualdad opuesta. Para esto, consideremos a $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo tal que:

$$\int \|g - \Delta_{n_0}\| d\mu < \varepsilon/3 \qquad \text{--------} \quad (A.6.1)$$

Hallamos ahora una partición π' de E tal que:

$$\sum_{A\in\pi'} \left\| \int_A h_{n_0}\, d\mu \right\| = \int_E \|h_{n_0}\|\, d\mu$$

Sea π una partición de E que refina a π' y satisface:

$$|G|(E) - \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B g\, d\mu \right\| < \varepsilon/3 \qquad \text{------ (A.6.2)}$$

De (A.6.1) y (A.6.2) se siguen las desigualdades:

$$\sum_{B\in\pi} \left| \left\| \int_B g\, d\mu \right\| - \left\| \int_B h_{n_0}\, d\mu \right\| \right| \leq \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B (g - h_{n_0})\, d\mu \right\|$$

$$\leq \sum_{B\in\pi} \int_B \|g - h_{n_0}\|\, d\mu = \int_E \|g - h_{n_0}\|\, d\mu < \varepsilon/3$$

Además como $\sum_{B\in\pi} \left\| \int_B h_{n_0}\, d\mu \right\| = \int_E \|h_{n_0}\|\, d\mu$ se tiene que:

$$\left| |G|(E) - \int_E \|h_{n_0}\|\, d\mu \right| = \left| |G|(E) - \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B h_{n_0}\, d\mu \right\| \right|$$

$$\leq |G|(E) - \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B g\, d\mu \right\| + \sum_{B\in\pi} \left| \left\| \int_B g\, d\mu \right\| - \left\| \int_B h_{n_0}\, d\mu \right\| \right|$$

$$< 2\varepsilon/3$$

Por lo tanto:

$$\left| |G|(E) - \int_E \|g\|\, d\mu \right| \leq \left| |G|(E) - \int_E \|h_{n_0}\|\, d\mu \right| + \left| \int_E \|h_{n_0}\|\, d\mu - \int_E \|g\|\, d\mu \right|$$

$$< 2\varepsilon/3 + \int_E \|g - h_{n_0}\|\, d\mu = 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \quad //$$

LEMA A.7

Sea $G: \mathcal{A} \to V$ una medida vectorial. Entonces:

1) La variación $|G|$ de G es finito aditiva.

2) $|G|(E_1) \geq |G|(E_2)$ si $E_1 \supset E_2$.

DEM:

1) Sean E_1 y $E_2 \in \mathcal{A}$ ajenos. Se probará que $|G|(E) = |G|(E_1) + |G|(E_2)$ donde $E = E_1 \cup E_2$. Para ello, notemos que si $\pi = \{C\}$ es una partición de E, entonces $\{E_i \cap C\}_{C \in \pi}$ y $\{E_i \cap C\}_{i=1,2}$ son particiones de E_i $(i=1,2)$ y C $(\forall C \in \pi)$ respectivamente. En consecuencia:

$$\sum_{C \in \pi} \|G(C)\| = \sum_{C \in \pi} \|G(\bigcup_{i=1}^{2} E_i \cap C)\| = \sum_{C \in \pi} \|\sum_{i=1}^{2} G(E_i \cap C)\|$$

$$\leq \sum_{C \in \pi} \sum_{i=1}^{2} \|G(E_i \cap C)\| = \sum_{i=1}^{2} \sum_{C \in \pi} \|G(E_i \cap C)\|$$

$$\leq |G|(E_1) + |G|(E_2)$$

Supongamos que $|G|(E) < |G|(E_1) + |G|(E_2)$. Hallamos α y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha < |G|(E_1)$, $\beta < |G|(E_2)$ y $\alpha + \beta = |G|(E)$. Por la definición de $|G|$, es posible encontrar particiones π_1 y π_2, de E_1 y E_2 respectivamente, que satisfacen:

$$\alpha < \sum_{A \in \pi_1} \|G(A)\|$$

$$\beta < \sum_{B \in \pi_2} \|G(B)\|$$

$\forall A \in \pi_1$ y $\forall B \in \pi_2$ se tiene que $A \cap B = \phi$, $A \subset E_1 \cup E_2$ y $B \subset E_1 \cup E_2$. Por lo tanto $|G|(E) = \alpha + \beta < \sum_{A \in \pi_1} \|G(A)\| + \sum_{B \in \pi_2} \|G(B)\| \leq |G|(E_1 \cup E_2) = |G|(E)$ ∇

2) Por la parte 1) y el hecho de que $|G|(E) \geq 0$ $\forall E \in \mathcal{A}$ tenemos:

$$|G|(E_2) \leq |G|(E_2) + |G|(E_1 - E_2) = |G|(E_1) \qquad //$$

PROPOSICION A.8

Sea $G: \mathcal{A} \to V$ una medida vectorial de variación acotada. Son equivalentes:

i) G es contablemente aditiva

ii) $|G|$ es contablemente aditiva

DEM: ($ii \Rightarrow i$)

Como $\|G(E)\| \leq |G|(E)$ es inmediato que G es contablemente aditiva.

($i \Rightarrow ii$) Sea (E_n) una sucesión disjunta de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Si π es una partición de $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces:

$$\sum_{A \in \pi} \|G(A)\| = \sum_{A \in \pi} \|G(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)\| = \sum_{A \in \pi} \|\sum_{n=1}^{\infty} G(A \cap E_n)\|$$

$$\leq \sum_{A \in \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|G(A \cap E_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{A \in \pi} \|G(A \cap E_n)\|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |G|(E_n)$$

Se sigue que $|G|(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |G|(E_n)$. Por el lema (A.7) se tiene:

$$\sum_{n=1}^{m} |G|(E_n) = |G|(\bigcup_{n=1}^{m} E_n) \leq |G|(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |G|(E_n) \leq |G|(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$. Así pues $|G|$ es contablemente aditiva //

DEFINICION A.9

Sean $(\Sigma, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida finita y $G: \mathcal{S} \to V$ una medida vectorial. G es llamada μ-continua, denotado por $F << \mu$, si $\lim_{\mu(E) \to 0} G(E) = 0$.

Algunos teoremas a los cuales haremos referencia en esta sección, solamente los enunciaremos y su demostración, si se desea consultarla, estará a disposición del lector mediante la referencia correspondiente. Esta decisión tiene fundamento en el hecho de que el material empleado en tales pruebas no está al alcance de nuestras manos.

TEOREMA A.10 (PETTIS 1938)

Sea $G: \mathcal{S} \to V$ una medida vectorial contablemente aditiva. Son equivalentes:

i) $G << \mu$

ii) $G(E) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) = 0$.

DEM:

(Ver [7] p. 10 teo. 1)

COROLARIO A.11

Sea $G: \mathcal{S} \to V$ una medida vectorial contablemente aditiva. Son equivalentes:

i) $G << \mu$

ii) $|G| << \mu$

DEM:

(ii ⇒ i) Como $\|G(E)\| \leq |G|(E)$ entonces $G(E)=0$, si $\mu(E)=0$. Por el teorema (A.10) $G \ll \mu$.

(i ⇒ ii) Sea $E \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(E)=0$. Si π es una partición de E, entonces $\mu(A)=0 \ \forall A \in \pi$. En consecuencia $G(A)=0 \ \forall A \in \pi$. Así pues $|G|(E)=0$ //.

COROLARIO A.12

Sea $g \in B_1(S, V, \mu)$ y $G: \mathcal{S} \to V$ la medida vectorial definida por $G(E)=\int_E g\, d\mu$ $\forall E \in \mathcal{S}$. Entonces $G \ll \mu$.

DEM:

Por la proposición (A.6), $|G|(E)=\int_E \|g\| d\mu$ $\forall E \in \mathcal{S}$. Pero $|G| \ll \mu$, de donde $G \ll \mu$ por corolario (A.11). //

La siguiente proposición es la versión para la integral de Bochner del Teorema del Valor Medio. (Ver [2] p. 465).

PROPOSICION A.13

Si $G: \mathcal{S} \to V$ es la medida vectorial definida en (A.12), entonces:

$$\frac{1}{\mu(E)} G(E) \in \overline{co}\,(g(E)) \qquad \forall E \in \mathcal{S} \text{ con } \mu(E) > 0$$

donde $\overline{co}\,(g(E))$ es la $\| \ \|$-cerradura del casco convexo de $g(E)$.

DEM:

Supongamos que existe $E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) > 0$ tal que $\frac{1}{\mu(E)} G(E) \notin \overline{co}(g(E))$. Por el Teorema de Hahn-Banach (Ver [16] p.58 Teo. 3.4), existe $v^* \in V^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$v^*\left(\frac{1}{\mu(E)} G(E)\right) < \alpha \leq v^* g(x) \quad \forall\ x \in E.$$

Por el corolario (3.9) se tiene que:

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E v^* g \, d\mu < \alpha \leq v^* g(x) \qquad \forall\ x \in E.$$

Integrando sobre E obtenemos:

$$\int_E v^* g \, d\mu < \alpha \mu(E) \leq \int_E v^* g \, d\mu \qquad \overset{\triangleright}{o} \qquad //$$

DEFINICION A.14

Sea A una álgebra de subconjuntos de X y $G: A \to V$ una medida vectorial. G es llamada fuertemente aditiva si para toda sucesión (E_n) de elementos disjuntos de A, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} G(E_n)$ converge en norma.

PROPOSICION A.15

Si $G: A \to V$ es una medida vectorial de variación acotada, entonces G es fuertemente aditiva.

DEM:

Si (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{k} \|G(E_n)\| \leq |G|\left(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\right) \leq |G|(\Sigma) < \infty$$

En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} G(E_n)$ es absolutamente convergente y por lo tanto $\|\ \|$- convergente. //

DEFINICION A.16

Sea $G: \mathcal{A} \to V$ una medida vectorial. La función $|G|: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por:

$$|G|(E) = \sup\{\, |v^* G|(E) : v^* \in V^*,\ \|v^*\| \leq 1 \,\}$$

donde $|v^* G|$ es la variación de la medida (en el sentido de la definición A.1) real-valuada $v^* G$, es llamada la semivariación de G. Si $|G|(\Sigma) < \infty$, entonces diremos que G es una medida de semivariación acotada o brevemente, que G es acotada.

TEOREMA A.17 (TEOREMA DE EXTENSION DE CARATHÉODORY - HAHN- KLUVANEK)

Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Σ y $\mathcal{S}$ = σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Si $G: \mathcal{A} \to V$ es una medida acotada, débil - contablemente aditiva (i.e si $v^* G$ es contablemente aditiva $\forall\ v^* \in V^*$), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) G tiene una extensión (única) $\overline{F}: \mathcal{F} \to V$ contablemente aditiva.

(ii) Existe una casi-medida (Ver [10] p. 47) $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, finita tal que $G << \mu$.

(iii) G es fuertemente aditiva

(iv) $G(\mathcal{A})$ es un subconjunto de V relativamente débilmente compacto.

DEM:

Ver [7] p. 27 //

TEOREMA A.18 (TEOREMA DE DESCOMPOSICION DE LEBESGUE)

Sean $G: \mathcal{A} \to V$ una medida vectorial fuertemente aditiva y $\nu: \mathcal{A} \to [0, \infty)$ una medida en el sentido de la definición A.1. Entonces existen medidas vectoriales G_c, $G_s: \mathcal{A} \to V$ (únicas) tales que:

(i) $G_c << \nu$

(ii) $v^* G_s$ y ν son mutuamente singulares $\forall v^* \in V^*$

(iii) $G = G_c + G_s$

Además, si G y ν son contablemente aditivas, entonces G_c y G_s también lo son. Asimismo, si G es de variación acotada, entonces G_c y G_s son de variación acotada, $|G|(E) = |G_c|(E) + |G_s|(E)$ $\forall E \in \mathcal{A}$ y, $|G_s|$ y ν son mutuamente singulares.

DEM:

Ver [7] p. 31 //

SIMBOLOGIA PARA LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS

$P.R.N(V)$ = V tiene la propiedad de Radon-Nikodym

$P.R.N(V)/_{(\Sigma,S,\mu)}$ = V tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a (Σ,S,μ).

W = Subespacio cerrado separable de V

W' = Subespacio cerrado de V

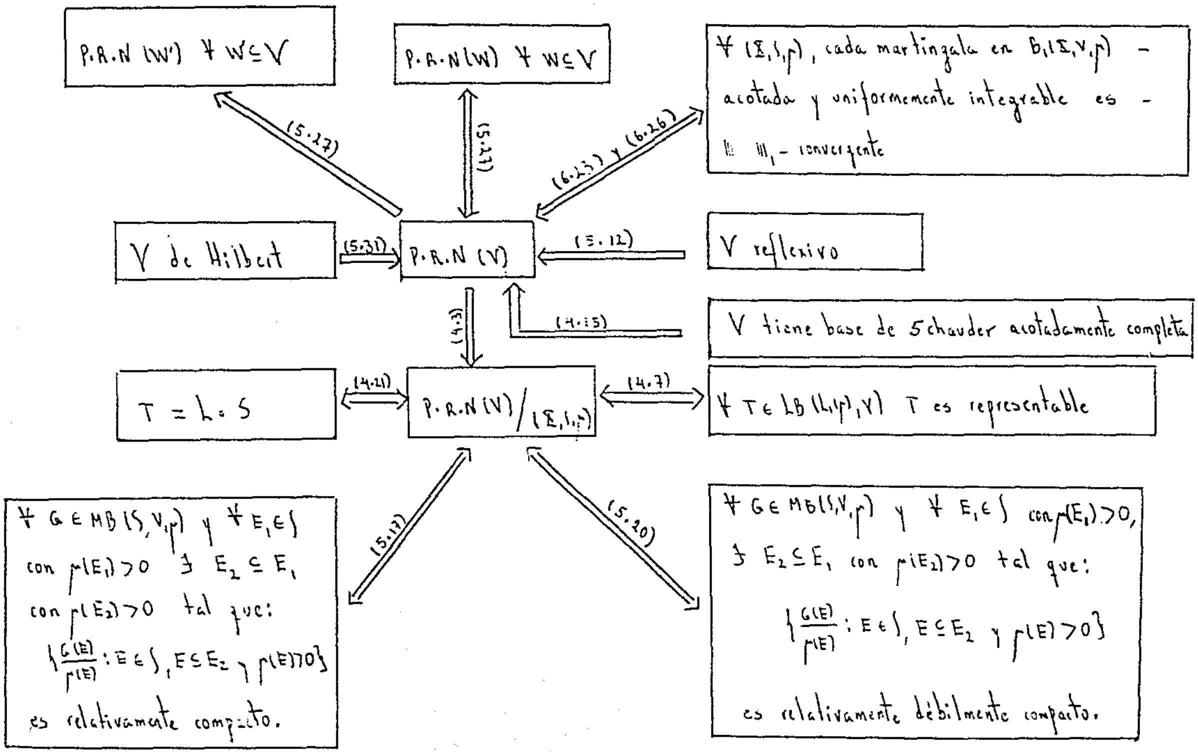
L = Operador lineal continuo sobre l_1 y con rango en V

S = Operador lineal continuo sobre $L_1(\mu)$ y con rango en l_1

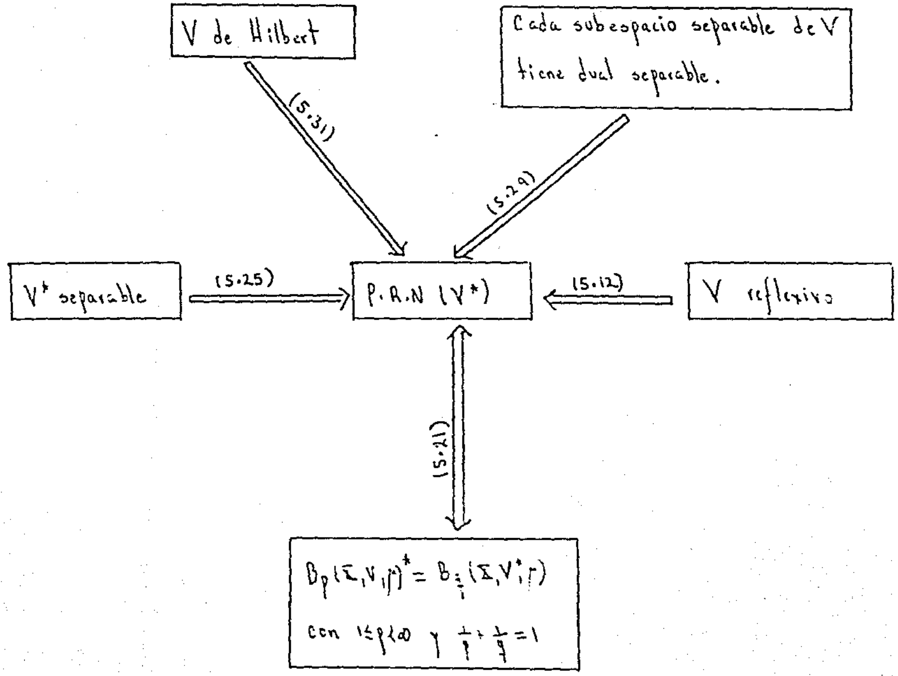
(Σ,S,μ) = Espacio de medida finito.

NOTA:

En los diagramas aparecen paréntesis que corresponderán a los teoremas, corolarios etc., que prueban tales implicaciones o equivalencias.



P.R.N (W') ∀ W ⊆ V
(5.27)
P.R.N (W) ∀ W ⊆ V
(5.27)
∀ (Ω, Σ, μ), cada martingala en $B_1(\Omega, V, \mu)$ - acotada y uniformemente integrable es - ‖ ‖$_1$ - convergente
(6.25) y (6.26)
V de Hilbert
(5.31)
P.R.N (V)
(5.12)
V reflexivo
(4.3)
(4.15)
V tiene base de Schauder acotadamente completa
T = L∘S
(4.21)
P.R.N (V)/(Ω, Σ, μ)
(4.7)
∀ T ∈ LB (L₁(μ), V) T es representable
(5.13)
(5.20)
∀ G ∈ MB(Σ, V, μ) y ∀ E₁ ∈ Σ con μ(E₁) > 0 ∃ E₂ ⊆ E₁ con μ(E₂) > 0 tal que: { G(E)/μ(E) : E ∈ Σ, E ⊆ E₂ y μ(E) > 0 } es relativamente compacto.
∀ G ∈ MB(Σ, V, μ) y ∀ E₁ ∈ Σ con μ(E₁) > 0, ∃ E₂ ⊆ E₁ con μ(E₂) > 0 tal que: { G(E)/μ(E) : E ∈ Σ, E ⊆ E₂ y μ(E) > 0 } es relativamente débilmente compacto.


V de Hilbert
Cada subespacio separable de V tiene dual separable.
(5.31)
(5.29)
V^* separable
(5.25)
P.R.N (V^*)
(5.12)
V reflexivo
(5.21)
$B_p(\Sigma, V, \mu)^* = B_q(\Sigma, V^*, \mu)$
con $1 \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

BIBLIOGRAFIA

[1] Barbu, V.

Convexity and Optimización in Banach Spaces, Editura Academici, Bucarest, Romania, 1986.

[2] Bartle G. Robert

Introducción al Análisis Matemático, Editorial Limusa, México, 1982.

[3] Bartle G. Robert

The Elements of Integration, Wiley, Nueva York, 1966,

[4] Berberian, S.K., Measure and Integration, The Macmillan Co New York, 1965.

[5] Brown, Arlen

Introduction to operator Theory, Springer-Verlag, New York,

[6] Conway, J. B.

A Course in Functional Analysis,

[7] Diestel, J., Uhl, J. J. Jr.

Vector Measures, Providence,

[8] Diestel, J.

Sequences and Series in Banach Spaces, Springer-Verlag, New York, 1984.

[9] Dinculeanu, N.

Vector Measures, Pergamon Press, New York, 1967

[10] Grabinsky, Steider, G.

Análisis Matemático, Vínculos Matemáticos No. 163, Publicaciones del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, D.F, 1988.

[11] Holmes, Richard B.

Geometric Functional Analysis and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[12] Halmos, R. Paul

Measure Theory, Springer-Verlag, New York, 1974

[13] Hutson, V., and Pym, J., S.

Application of Functional Analysis and Operator Theory, Academic, London 1980.

[14] Köthe, G.

Topological Vector Spaces I, Springer-Verlag, New York, 1969

[15] Larsen, R.

Functional Analysis, Marcel Dekker, New York, 1973

[16] Rudin, W.

Functional Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1973

[17] Rudin, W.

Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1974

[18] Shilov, G., E.

Integral, Measure and Derivate: A Unified Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J, 1966

[19] Vakhania, N., N.

Probability Distributions on Banach Spaces, D. Reidel Publishing Company, Holanda, 1987.

[20] Yosida, K.

Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[21] Zaanen, A. C.

An Introduction to the Theory of Integration, Interscience - Publishers Inc., New York, 1958.