



28  
2g

# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

“ESTUDIO DEL TRANSPORTE EN UN PLASMA  
PRODUCIDO POR INTERACCIONES CON  
MICROTURBULENCIA ELECTROSTATICA.  
UN ENFOQUE SIMPLIFICADO”

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
F I S I C O  
P R E S E N T A  
MAXIMINO MORA GARCIA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN  
MEXICO, D.F.

1990



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE.

INTRODUCCION.	1
I.- TRANSPORTE CLASICO.	
1-1 DINÁMICA DE LAS COLISIONES.	4
MECANISMO DE UNA COLISIÓN.	5
1-2 ECUACIÓN DE FOKKER-PLANCK.	8
1-3 COEFICIENTES DE TRANSPORTE.	
(a) ASPECTO CUALITATIVO.	12
(b) DERIVACIÓN CUANTITATIVA.	18
1-4 GEOMETRÍA TOROIDAL Y TRANSPORTE NEOCLÁSICO.	
GEOMETRÍA TOROIDAL.	23
RÉGIMEN DE PFIRSCH-SCHLÜTER.	26
RÉGIMEN DE BANANA.	28
II.- TRANSPORTE ANOMALO.	
2-1 EVIDENCIAS DE TRANSPORTE NO CLÁSICO (EXPERIMENTAL) Y LEYES DE ESCALAMIENTO EMPÍRICO.	
(a) FLUJOS DE ENERGÍA Y EVIDENCIAS DE LA CONDUCCIÓN TÉRMICA POR ELECTRONES ANÓMALA.	33
(b) CONFINAMIENTO EN TOKAMAKS Y LEYES DE ESCALAMIENTO EMPÍRICO.	38
2-2 MODELOS DE TRANSPORTE ANÓMALO. (INTERACCIONES ONDA-PARTÍCULA)	
(a) ELECTROSTÁTICOS. (ONDAS DE DERIVA)	44
a.1) CÁLCULOS CUASILINEALES.	46
(b) ELECTROMAGNÉTICOS.	
b.1) TRANSPORTE CUASILINEAL DEBIDO A ONDAS DE DERIVA ELECTROMAGNÉTICAS.	49

b.2) TRANSPORTE ANÓMALO DEBIDO A MODOS MICROTEARING.	50
b.3) ESCALAMIENTO DE OHKAWA DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA ANÓMALA.	52

### III.- MODELO CUASIELECTROSTATICO.

#### 3-1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

a.1) DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN FÍSICA.	55
a.2) DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.	56

#### 3-2 PLANTEAMIENTO NUMÉRICO.

b.1) RESOLUCIÓN DE LA EC. DE LA TRAYECTORIA.	62
b.2) CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES $\langle \Delta v \rangle$ , $\langle \Delta v \Delta v \rangle$ .	66

#### 3-3 LA APROXIMACIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ DÉBIL.

c.1) RESOLUCIÓN DE LA EC. DE LA TRAYECTORIA.	71
--	----

### IV.- ANALISIS DE RESULTADOS.

4-1 LA APROXIMACIÓN NUMÉRICA.	81
4-2 LA APROXIMACIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ DÉBIL.	88

### V.- CONCLUSIONES. 101

APENDICE A. 105

APENDICE B. 108

APENDICE C. 112

BIBLIOGRAFIA. 113

## INTRODUCCION.

Desde los primeros años de investigación en los experimentos de fusión termonuclear realizados en los diferentes dispositivos de confinamiento magnético se ha observado un tipo de transporte de partículas y energía, que no puede ser explicado en términos del transporte colisional (clásico) ni con la inclusión de efectos producidos por la geometría toroidal del sistema (transporte neoclásico). Se cree que este tipo de transporte es debido a las interacciones de las partículas con fluctuaciones microscópicas de campos eléctricos y/o magnéticos producidos por movimientos turbulentos de las partículas [ a este tipo de transporte se le conoce como transporte anómalo ]. Sin embargo aún no se sabe con certeza que tipo de fluctuaciones son mas relevantes para el transporte. En términos generales puede dividirse la turbulencia en un plasma en electrostática (si las fluctuaciones son únicamente del campo eléctrico) y electromagnética (si hay microcampos magnéticos además de los eléctricos ) y se han propuesto diversos modelos de transporte para cada una de ellas.

Los métodos existentes para analizar este tipo de transporte son sumamente complejos. En general se requiere tanto de una teoría para describir el origen de las fluctuaciones en términos de modos de oscilación del plasma que sean inestables y lleguen a un nivel de saturación, como del mecanismo de interacción onda-partícula que afecta la dinámica del transporte. Nosotros nos concentraremos únicamente en el último de estos aspectos. Con el fin de tratar el problema de transporte anómalo inducido por

interacciones con microcampos del plasma adoptaremos un enfoque simplificado , en el que se considerarán las siguientes suposiciones: 1) Los microcampos fluctuantes son establecidos por algún mecanismo de saturación que no nos incumbe y sólo necesitamos conocer el espectro de fluctuaciones que éste produce  $E(\omega, k)$ , ya sea experimental ó teóricamente. 2) Las fluctuaciones son solamente en el campo eléctrico y las posibles fluctuaciones en el campo magnético son muy pequeñas y pueden despreciarse; en este sentido decimos que la turbulencia es cuasi-electrostática. 3) La región de turbulencia se dividirá en subregiones del tamaño de la longitud de correlación de los microcampos y cada subregión se tratará independiente de las otras.

En el primer capítulo se revisan algunos conceptos del transporte clásico [ la dinámica de las colisiones, la ecuación de Fokker-Planck, los coeficientes clásicos de transporte ] y neoclásico [ la geometría toroidal ]. El segundo capítulo se refiere al transporte anómalo y en él se tocan temas como: las evidencias del transporte no clásico y las leyes de escalamiento empírico, así como los modelos para el transporte anómalo, modelos electrostáticos y electromagnéticos [ ó modos reconectivos ].

El modelo cuasielectrostático para la interacción de partículas con la región de microturbulencia se trata en el capítulo III ; utilizando para ello la aproximación de Fokker-Planck para deflexiones pequeñas para hallar los coeficientes de fricción  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y de difusión de partículas  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  producidos al interaccionar un conjunto de partículas con una región de campo eléctrico débil fluctuante en la dirección  $\hat{y}$ , en él se especifica

la metodología que se sigue para hallar cuantitativamente los coeficientes  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$ .

En el capítulo IV se presentan los resultados de los cálculos realizados en el capítulo III para los coeficientes de fricción y de difusión de partículas como función de la velocidad, así como la función de distribución de probabilidad como función del ángulo al cual salen las partículas para diferentes velocidades, y los coeficientes de difusión de partículas, y de conductividad térmica, calculados a partir de los coeficientes de Fokker-Planck.

En el capítulo V se analizan los resultados del capítulo IV, haciendo notar la similitud entre los resultados obtenidos y los resultados cualitativamente esperados y resaltando la metodología utilizada en el capítulo III para el modelo cuasielectrostático, vislumbrando además cuáles son las posibilidades ó las implicaciones del método para un tratamiento más realista de un modelo de transporte que pudiera ser comparado con resultados experimentales obtenidos en los diferentes dispositivos.

El trabajo en sí mismo pretende ser una motivación y una introducción al tratamiento del problema del transporte anómalo utilizando argumentos sencillos que pudieran dar una idea de cuáles son los elementos que influyen en este tipo de transporte, revisando antes algunos conceptos del transporte clásico y neoclásico y la información sobre el transporte no clásico. Todo esto con la finalidad de continuar revisando y trabajando sobre esta línea.

## CAPITULO I .

### TRANSPORTE CLASICO.

#### 1.- DINÁMICA DE LAS COLISIONES.

Las colisiones entre partículas en un gas dan lugar a efectos tales como la termalización de partículas rápidas, la resistividad, difusión, etc., Las partículas cargadas interactúan a través de la fuerza de Coulomb la cual tiene un rango infinito.

La colisión entre dos partículas consiste en la interacción de dos cargas que pueden considerarse puntuales moviéndose sobre trayectorias hiperbólicas bajo el efecto de los campos eléctricos de cada una de ellas; se observa además que el campo de Coulomb asociado a una partícula es apantallado por la presencia de las otras a distancias mucho más grandes que la longitud de Debye, mientras que no es afectado a una distancia mucho más pequeña que esa longitud. De aquí uno puede decir aproximadamente que la partícula pasa a través del plasma y 've' a las partículas lejanas encerradas en un radio de Debye y comienza a interactuar al penetrar la esfera de Debye cuando los campos son todavía débiles.

En ausencia de un campo magnético una partícula libre se mueve en una línea recta con velocidad constante. La colisión distorsiona la trayectoria de la partícula y cambia la magnitud de la velocidad. El movimiento que resulta de varias colisiones se puede representar aproximadamente como una línea quebrada que consiste de segmentos dirigidos azarosamente con longitudes del

orden de  $l = v\tau$  donde  $v = (2KT/m)^{1/2}$  es la velocidad térmica característica y  $\tau$  es el intervalo de tiempo característico entre colisiones con un cambio en la dirección de movimiento.

### MECANISMO DE UNA COLISIÓN.

La colisión entre dos partículas cargadas  $a$  y  $b$  puede ser convenientemente descrita en el sistema del centro de masa donde las partículas se mueven con una velocidad relativa  $u$  [1]. La trayectoria es hiperbólica como se muestra en la siguiente figura:

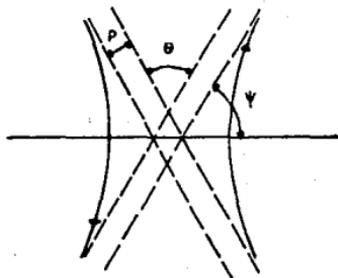


FIG. 1.1 DISPERSION DE COULOMB.

Si introducimos la masa reducida

$$M = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \quad (1.01)$$

se puede demostrar que :

$$\cot \frac{\theta}{2} = \tan \psi = 4\pi\epsilon_0 \frac{M p u^2}{q_a q_b} \quad (1.02)$$

Debido a que los parámetros de impacto en plasmas son estadísticos, se introduce el concepto de sección transversal de colisión diferencial:

$$d\sigma = \{ 2\pi r dp \} \quad (1.03)$$

Definiendo el ángulo sólido diferencial:

$$d\Omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta \quad (1.04)$$

y usando (1.02) obtenemos:

$$d\sigma = \left( \frac{q_a q_b}{8\pi\epsilon_0 \mu v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} = \sigma d\Omega \quad (1.05)$$

Cuando las condiciones iniciales de las partículas que colisionan (parámetro de impacto) son desconocidas, entonces la probabilidad de que el ángulo de deflexión esté entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  es proporcional a la ecuación (1.05) y el ángulo sólido diferencial  $d\Omega$  está dado por la ecuación (1.04). Se puede observar que la dispersión a ángulos pequeños es mucho más probable que las deflexiones a ángulo grande.

Cuando la desviación es  $\theta = \pi/2$  se define el parámetro de impacto  $P_0$  de la ecuación (1.02) y obtenemos:

$$P_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_a q_b|}{\mu v^2} \quad (1.06)$$

Uno puede decir aproximadamente que para  $P < P_0$  uno obtiene deflexiones de ángulo grande, mientras que para  $P_0 < P < \lambda_D$  produce deflexiones de ángulo pequeño. Si  $P > \lambda_D$ ; las dos partículas "no ven" el campo de Coulomb de las otras excepto para los campos suaves de muchas partículas descritos por la ecuación de Vlasov. La razón de colisiones de ángulo grande a ángulo pequeño es:

$$\frac{P_0}{\lambda_D^2 - P_0^2} \approx \left( \frac{P_0}{\lambda_D} \right)^2 \ll 1 \quad (1.07)$$

Para energías de partículas características de 10 eV o más grandes,  $P_0$  es del orden de  $10^{-10}$  m o menor, mucho más pequeña que  $\lambda_D$  bajo condiciones de laboratorio usuales. Uno puede concluir que la abrumadora mayoría de los encuentros entre partículas en un plasma producen deflexiones pequeñas. Si una partícula sufre dos colisiones, la deflexión es  $\theta \approx \theta_1 + \theta_2$ . Como cada partícula "colisiona" simultáneamente con todas las otras partículas en una distancia de Debye, la naturaleza aditiva de los ángulos de dispersión es muy útil.

## 2.- ECUACION DE FOKKER-PLANCK.

Cuando la función de distribución  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ , para cada especie en un plasma es conocida, las propiedades macroscópicas del plasma pueden ser fácilmente calculadas; estas cantidades macroscópicas están representadas por los momentos de  $f$  como son: la densidad de masa  $\rho$ , la densidad de carga  $q$ , la velocidad de masa  $\rho\vec{v}$  y la corriente  $\vec{j}$  [1]. La función de distribución  $f$  está definida como  $f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v d^3x$  que representa el número de partículas que se encuentran a un tiempo  $t$  en el elemento de volumen  $d^3x$  alrededor de  $\vec{x}$  y que tienen velocidades en el rango  $d^3v$  alrededor de  $\vec{v}$ . De la teoría cinética tenemos que la ecuación fundamental que  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  debe de satisfacer es la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (1.08)$$

donde  $\vec{F}$  es una fuerza que actúa sobre las partículas, y  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$  es la variación temporal de  $f$  debido a colisiones,  $\nabla$  es el gradiente en el espacio  $(x, y, z)$ . El simbolo  $\partial/\partial \vec{v}$  ó  $\nabla_v$  es el gradiente en el espacio de velocidades [2].

En un plasma lo suficientemente caliente, las colisiones pueden ser ignoradas. Si, además, la fuerza  $\vec{F}$  es enteramente electromagnética, la ecuación (1.08) toma la forma especial:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (1.09)$$

Esta es la ecuación de Vlasov . Puesto que es una forma simple, esta es la ecuación más comúnmente estudiada en la teoría cinética.

Cuando existen colisiones de ángulo pequeño, como ocurre en un plasma totalmente ionizado el lado derecho de la ecuación de Boltzmann puede ser aproximado como sigue [1]:

Sea  $P(\vec{v} ; \Delta\vec{v})$  la probabilidad de que una partícula cambie en su coordenada de velocidad de  $\vec{v}$  a  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ , en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , debido a colisiones múltiples de ángulo pequeño. Si solamente las colisiones son efectivas en cambiar la función de distribución (temporal y espacialmente), el valor de la función de distribución al tiempo  $t$  está dado por:

$$f(\vec{v}, t) = \int f(\vec{v}-\Delta\vec{v} ; t-\Delta t) P(\vec{v}-\Delta\vec{v} ; \Delta\vec{v}) d^3\Delta v \quad (1.10)$$

Como para colisiones de Coulomb de ángulo pequeño  $\Delta\vec{v}$  es pequeño si  $\Delta t$  es pequeño, uno puede expandir (1.10) en la forma siguiente:

$$f(\vec{v}, t) = \int \left[ f(\vec{v}, t) P(\vec{v}; \Delta\vec{v}) - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} P(\vec{v}; \Delta\vec{v}) - \Delta\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} [f(\vec{v}, t) P(\vec{v}; \Delta\vec{v})] + \frac{1}{2} \Delta v_i \Delta v_k \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} [f(\vec{v}, t) P(\vec{v}; \Delta\vec{v})] + \dots \right] d^3 \Delta v \quad (1.11)$$

Notemos que la probabilidad total es uno,

$$\int P(\vec{v}; \Delta\vec{v}) d^3\Delta v = 1 \quad (1.12)$$

y si definimos el cambio en la velocidad promedio por unidad de tiempo como:

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int P(\vec{v}; \Delta \vec{v}) \Delta \vec{v} \, d^3 \Delta v \quad (1.13)$$

y también

$$\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int P(\vec{v}; \Delta \vec{v}) \Delta v_i \Delta v_k \, d^3 \Delta v \quad (1.14)$$

al olvidarnos de los términos de orden mayor, la ecuación (1.11) produce:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c = - \frac{\partial}{\partial v_i} [ \langle \Delta v_i \rangle f(\vec{v}, t) ] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} [ \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle f(\vec{v}, t) ]$$

$$(1.15)$$

Esta es la conocida ecuación de Fokker-Planck [1]. La ecuación anterior se puede poner en forma de una ecuación de continuidad:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c + \nabla_v \cdot \vec{q} = 0 \quad (1.16)$$

donde  $\nabla_v$  es el operador en el espacio de velocidades y

$$\vec{q} = \langle \Delta \vec{v} \rangle f - \frac{1}{2} \nabla_v \cdot [ \langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle f ] \quad (1.17)$$

El efecto de colisiones múltiples de ángulo pequeño puede ser visto como un flujo de puntos fase en el espacio de velocidades, descritos por el vector de flujo  $\vec{q}$ .

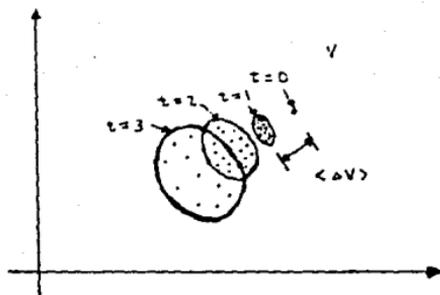


FIG. 1.2. POSICIONES EN EL ESPACIO DE VELOCIDADES DE UN HAZ DE PARTICULAS PRUEBA A LOS SEGUNDOS :  $t = 0, 1, 2, 3$ .

Para entender el significado físico de  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y de  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  consideremos el comportamiento de un haz de partículas prueba con velocidad  $\vec{v}$  que se inyectan dentro del plasma. Una unidad de tiempo después ellas son frenadas (en promedio) debido a las colisiones, tendiendo a la velocidad promedio del campo de las partículas. Este cambio promedio en el vector velocidad es  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$ , y la cantidad  $m \langle \Delta \vec{v} \rangle$ , que tiene dimensiones de fuerza, es llamada fricción dinámica. En la figura (1.2) se muestra un bosquejo de los puntos fase en intervalos de tiempo unitarios de las partículas prueba inyectadas dentro del plasma en equilibrio térmico. El esparcimiento hacia afuera de los puntos está caracterizado por el término de difusión  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$ .

La ecuación de Fokker-Planck como está dada en la ecuación (1.15) es válida para todos los procesos de colisiones múltiples que producen pequeños cambios en los vectores velocidad de las partículas que participan en las colisiones.

### 3.- COEFICIENTES DE TRANSPORTE CLÁSICO.

- a) ASPECTO CUALITATIVO. (Difusión de partículas, conductividad térmica, conductividad eléctrica.)

El fenómeno de transporte en un plasma se debe a los gradientes de los parámetros macroscópicos. Esos gradientes dan lugar a que surjan flujos que finalmente igualan a los parámetros macroscópicos en todo el volumen del plasma.

#### DIFUSIÓN DE PARTICULAS.

De esta manera, consideremos el caso simple del fenómeno de transporte debido al transporte de partículas. Si la densidad de una especie de partículas dada no es espacialmente uniforme y el estado del gas es estable hidrodinámicamente, hay un flujo direccional de partículas que tienden a igualar en el espacio la densidad de la especie de partículas dada. Si la densidad de dicha especie varía lentamente sobre la trayectoria libre media, es decir, si el gradiente de la densidad es pequeño, de manera que la difusión de la densidad de flujo  $\vec{j}$  es proporcional a tal gradiente se tiene la ecuación :

$$\vec{j} = - D \nabla n \quad (1.18)$$

donde  $D$  es llamado el coeficiente de difusión [3].

Estimaremos ahora la magnitud del coeficiente de difusión. El flujo neto de partículas iguala a la diferencia de los flujos en direcciones opuestas, el orden de magnitud de cada uno es

igual a  $Nv$  donde  $N$  es la densidad de una especie dada y  $v$  es su velocidad característica. En cada colisión cada partícula viaja una distancia del orden de la trayectoria libre media  $\lambda \sim (N_g \sigma)^{-1}$  (donde  $\sigma$  es la sección transversal de colisiones característica entre la especie dada y las otras partículas del gas y  $N_g$  es la densidad del gas total). Entonces, el flujo neto de las partículas es  $\Delta N v$  donde  $\Delta N$  es la diferencia en las densidades de la especie dada en dos puntos separados por una distancia del orden de la trayectoria libre media. Así obtenemos que:

$$\Delta N \sim \lambda \nabla N \quad (1.19)$$

y el flujo por difusión :

$$j \sim \lambda v \nabla N \quad (1.20)$$

comparando con la ecuación (1.19) se obtiene que el coeficiente de difusión  $D$  está dado por:

$$D \sim v\lambda \sim \frac{T^{1/2}}{M^{1/2} N_g \sigma} \quad (1.21)$$

Donde  $T$  es la temperatura del gas,  $M$  es la masa de las partículas y  $\sigma$  es la sección transversal de colisiones dada por la ecuación (1.05)

El análisis macroscópico del transporte de partículas en un gas es válido si las variaciones características de la densidad ocurren en intervalos de tiempo que son considerablemente más grandes que el tiempo característico entre dos colisiones

consecutivas de la partícula  $\tau = \lambda/v$ . Entonces, obtenemos  $\tau/\tau_L = (\lambda/L)^2 \ll 1$ , donde  $\tau_L = L^2/D = L^2/(v\lambda)$ , siendo  $L$  la distancia característica en la que ocurre una variación notable en la densidad del gas, es decir, el análisis macroscópico del fenómeno de transporte es válido si la densidad del gas varía marcadamente en una distancia considerablemente más grande que la trayectoria libre media de las partículas.

### CONDUCTIVIDAD TÉRMICA.

Transporte de energía y momentum en un gas.

El transporte de energía y momentum ocurre de manera similar al transporte de partículas cuando existen gradientes en el gas. Un ejemplo sería, el gradiente de temperatura que hace que surja un vector de flujo de calor que tiende a equilibrar la temperatura del gas en las diferentes regiones; el vector de flujo es cero cuando la temperatura es constante sobre todo el volumen del gas. Entonces el vector de flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura:

$$\vec{q} = -\chi \nabla T \quad (1.23)$$

El vector de flujo de calor está definido como:

$$\vec{q} = \int \vec{v} m \frac{v^2}{2} f \, d\vec{v} \quad (1.22)$$

El factor  $\chi$  es la conductividad térmica del gas. La ecuación (1.23) es válida en este análisis si la temperatura del gas varía

lentamente sobre una distancia del orden de la trayectoria libre media de las partículas del gas .

Calculemos ahora la magnitud de la conductividad térmica y su dependencia de los parámetros del sistema de una manera similar a como se hizo con el coeficiente de difusión (1.21). Sea un plano perpendicular al gradiente del vector  $T$  y si calculamos los flujos de calor que pasan a través de él en ambas direcciones de acuerdo con la ecuación (1.22), cada flujo estará dado como :

$$q \sim N v M v^2 \sim N v T \quad (1.24)$$

siendo  $N$  la densidad de las partículas, y  $v$  la velocidad característica de las partículas.

Los flujos de calor son debidos al movimiento de las partículas, que viajan aproximadamente una distancia del orden de la trayectoria libre media  $\lambda$  entre colisiones. Como los flujos de calor en ambas direcciones a través del plano son debidos al movimiento de las partículas en cada lado del plano donde las temperaturas son diferentes, siendo  $\Delta T$  la diferencia de temperaturas sobre la distancia del orden de la trayectoria libre media (es una medida característica de la región en que las partículas colisionan con otras partículas del gas, es decir, cuando intercambian energía), el flujo neto es:

$$q \sim N v \Delta T \quad (1.25)$$

Entonces, obtenemos  $\Delta T = \lambda VT$  y  $q = N v \lambda VT$ . Comparando con la ecuación (1.23) obtenemos la estimación para la conductividad térmica [3]

$$\chi = N v \lambda = v/\sigma = \frac{T^{1/2}}{M^{1/2} \sigma} \quad (1.26)$$

siendo  $\sigma$  la sección transversal característica, para las colisiones entre partículas

La conductividad térmica se ha observado que es independiente de la densidad de las partículas, es decir, un incremento en la densidad de las partículas da lugar a que surja un incremento proporcional en el número de partículas que transportan calor y a un decremento proporcional en la trayectoria libre media de las partículas, esto es, la distancia característica del transporte de calor. Esos dos efectos mutuamente se cancelan.

### CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA.

Movimiento de partículas cargadas.

En el estudio del movimiento de partículas cargadas en un gas en presencia de un campo eléctrico externo se tiene que la movilidad de las partículas cargadas  $K$  está definida como el factor de proporcionalidad entre la velocidad media de las partículas cargadas  $\vec{w}$  y un campo eléctrico fuerte  $\vec{E}$ :

$$\vec{w} = K \vec{E} \quad (1.27)$$

Si  $N_e$  es la densidad de los electrones,  $K_e$  es la movilidad

de los electrones dada por  $e/mv$ , y  $w$  es la velocidad media de los electrones en el campo eléctrico  $E$ , la corriente eléctrica debida a los electrones es:

$$e w N_e = e K_e N_e E \quad (1.28)$$

Una expresión parecida puede ser obtenida para la corriente eléctrica debida a los iones. Debido a que las densidades de los electrones y los iones en el plasma cuasineutro son aproximadamente las mismas, la corriente eléctrica en el gas es debida a los electrones, de tal manera que la conductividad del gas  $\Sigma$  es:

$$\Sigma = e K_e N_e \quad (1.29)$$

Si utilizamos la relación para la movilidad de los electrones y la ecuación (1.28) podemos estimar la conductividad [3]

$$\Sigma \sim N_e e^2 (mT)^{-1/2} (N \sigma)^{-1} \quad (1.30)$$

Siendo  $m$  la masa de los electrones [ en principio  $\sigma$  puede ser para partículas cargadas o neutras ]. Para un gas totalmente ionizado  $\sigma$  está dada por la sección eficaz de Coulomb que varía como  $T^{-2}$  y  $N = N_e$  de modo que  $\Sigma \sim T^{3/2}$ .

## b) DERIVACIÓN CUANTITATIVA

(Coeficientes de transporte)

En la sección anterior se mencionaron y analizaron cualitativamente los coeficientes de difusión, conductividad eléctrica y conductividad térmica; en esta sección se derivan estos coeficientes en términos de los promedios  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$ .

Los coeficientes de transporte surgen a raíz de los coeficientes de proporcionalidad entre los gradientes de cantidades macroscópicas, tales como  $v_n$ ,  $\nabla T$ ,  $\vec{E}$ , y los flujos que producen esos gradientes como son:

$$\text{a) la corriente} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (1.31)$$

$$\text{b) el flujo de partículas} \quad \vec{\Gamma} = -D \nabla n, \quad (1.32)$$

$$\text{c) el flujo de calor} \quad \vec{Q} = -\chi \nabla T. \quad (1.33)$$

Consideremos el caso de la conductividad eléctrica en el plasma libre de campo magnético y aproximadamente en equilibrio térmico. Si consideramos que un campo eléctrico estático y pequeño acelera a los electrones y a los iones en direcciones opuestas hasta alcanzar una velocidad de transporte promedio, para la cual la fuerza eléctrica es balanceada por la fricción y que las distribuciones de electrones e iones son Maxwellianas se tiene que [1]:

$$q E = m \frac{\langle \Delta v_d \rangle}{\Delta t} \quad (1.34)$$

$$\text{Como} \quad \vec{J} = n q v_d \quad (1.35)$$

siendo  $v_D$  la velocidad de deriva de las partículas incidentes,  $q$  la carga y  $n$  la densidad de partículas; la conductividad eléctrica definida por la relación  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  está dada por:

$$\sigma = \frac{n q v_D}{E} \quad (1.36)$$

y de la ecuación (1.34) obtenemos al sustituir en (1.36) que:

$$\sigma = \frac{q^2 n v_D}{m_e \langle \Delta v_{\parallel} \rangle / \Delta t} \quad (1.37)$$

La fricción dinámica  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  sólo tiene una componente  $\langle \Delta v_{\parallel} \rangle$  paralela al vector velocidad  $\vec{v}_e$  de la partícula prueba y el tensor  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  sólo tiene las componentes  $\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle$  y  $\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle$ .

En cuanto al coeficiente de difusión se obtiene de una forma estándar, es decir partimos de la ecuación de movimiento:

$$m n \frac{d\vec{v}}{dt} = m n \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = q n \vec{E} - \nabla P - m n \vec{v} \nu$$

$$(1.38)$$

de manera que en estado estacionario  $\partial v / \partial t = 0$  y si además consideramos velocidades pequeñas y con variaciones lentas de la velocidad, tenemos  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \approx 0$ , la expresión (1.38) se convierte en:

$$0 = q n \vec{E} - \nabla P - m n \vec{v} \nu \quad (1.39)$$

si consideramos un proceso isotérmico, entonces:  $\nabla P = K T \nabla n$  y escribiendo  $\nu = 1/t_c$  obtenemos la velocidad y el flujo:

$$\vec{v} = \frac{q t_c}{m} \frac{\vec{E}}{E} - \frac{t_c K T}{n m} \nabla n \quad (1.40)$$

$$\vec{\Gamma} = n \vec{v} = \frac{n q t_c}{m} \frac{\vec{E}}{E} - \frac{t_c K T}{m} \nabla n \quad (1.41)$$

por lo que identificamos el coeficiente de difusión como:

$$D = \frac{K T}{m} t_c \quad (1.42)$$

El tiempo  $t_c$  es el tiempo entre colisiones, cuando la partícula viaja con aproximadamente la velocidad térmica media; Para distribuciones Maxwellianas  $t_c \approx t_D \approx t_E$ , donde  $t_D$  es el tiempo de deflexión [1]:

$$t_D = \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \quad (1.43)$$

y  $t_E$  es el tiempo de intercambio de energía:

$$t_E = \frac{v^2}{4 \langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle} \quad (1.44)$$

(Los promedios  $\langle \rangle$  sobre las velocidades elevadas al cuadrado están calculados a partir de la ecuación (1.14), que introduce el cambio en el tiempo ( $\Delta t$ ) de tal manera que  $t_c$  y  $t_E$  tienen las unidades correctas. ). Así, una partícula intercambia energía con otras partículas y es deflectada por ellas a la misma razón, esto es lo que caracteriza el tiempo de colisión, que es una característica importante del plasma.

Considerando que  $t_c \approx t_D$  el coeficiente de difusión sería del orden de:

$$D = \frac{K T}{m} t_c \approx \frac{K T}{m} \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \quad (1.45)$$

debido a que la velocidad térmica es  $v_T^2 = 2 K T / m$ , entonces  $D$  adquiere la forma final:

$$D \approx \frac{v_T^2}{2} \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \quad (1.46)$$

El coeficiente de conductividad térmica es similar al coeficiente de difusión de partículas, excepto que el proceso ocurre por colisiones de partículas iguales a diferencia del de difusión de partículas que es producido por colisiones entre partículas de distinta especie. Por lo tanto

$$\chi = \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} D \approx \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{v_T^2}{2} \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \quad (1.47)$$

Si el plasma experimenta un proceso (inestabilidad, compresión, etc), con una escala de tiempo baja comparada con  $t_c$ , podemos considerar que la colisión domina, y un modelo de fluido hidromagnético da una buena descripción del proceso. Sin embargo si la escala de tiempo es mas pequeña que  $t_c$ , uno utiliza una descripción de partícula sin colisiones.

El tiempo de colisión se incrementa con la temperatura y es mas grande para iones que para electrones. Para experimentos de fusión típicos donde el plasma es calentado por compresión magnética

rápida, los electrones son dominados por colisiones y se comportan como un fluido hidromagnético, mientras que un ión típico sufre pocas o ninguna deflexión durante el proceso. El modelo (llamado frecuentemente híbrido) para la descripción de tales procesos incluye las ecuaciones de fluido hidromagnético para los electrones y las ecuaciones cinéticas para los iones.

#### 4.- GEOMETRÍA TOROIDAL Y TRANSPORTE NEOCLÁSICO.

En las secciones anteriores no se ha mencionado el efecto de un campo magnético sobre el transporte. En esta sección se discutirá brevemente este tema poniendo particular atención a configuraciones toroidales que son las de mayor interés en los experimentos de confinamiento magnético. Se puede pensar que la presencia de un campo magnético divide el transporte en una componente paralela al campo, y una componente perpendicular. Esta última se modifica debido a que el movimiento de giro circular alrededor de una línea de campo no permite que una partícula se desplace una distancia  $\lambda$  sino que está limitada a una distancia del orden del radio de giro  $r_g$ . Por lo tanto en las expresiones (1.21) y (1.26) se debe reemplazar  $\lambda$  por  $r_g$ , mientras que (1.30) no se modifica apreciablemente.

#### GEOMETRÍA TOROIDAL.

Como acabamos de mencionar una partícula que gira a lo largo de un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme, tiene una longitud de desplazamiento característica del orden del radio de ciclotrón, es decir, una partícula (o el centro guía) puede desplazarse por esta distancia cuando sucede una colisión.

Si, por alguna causa, la longitud de desplazamiento es más grande, uno esperaría un correspondiente incremento en la velocidad de difusión; un ejemplo característico es la geometría toroidal. En el caso particular de un tokamak, el campo magnético está formado por una componente toroidal, producido por las

bobinas magnéticas, y un campo poloidal menor producido por la corriente toroidal del plasma. Las líneas de campo resultantes forman hélices toroidales [1]. Las superficies que contienen esas líneas de campo son las superficies magnéticas y ellas forman toroides anidados. La siguiente figura muestra una de esas superficies y una parte de una línea de campo magnético.

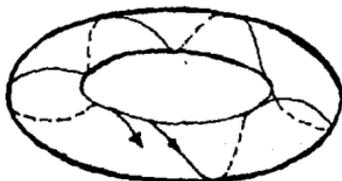


FIG. 1.3. SUPERFICIE MAGNETICA DE UN CAMPO TOROIDAL.

Hay que hacer notar que las líneas de campo son pocas veces cerradas, una sola línea de campo usualmente cubre una superficie uniformemente. Las líneas de campo que se cierran después de girar alrededor  $n$  veces son las que forman las superficies de modos racionales.

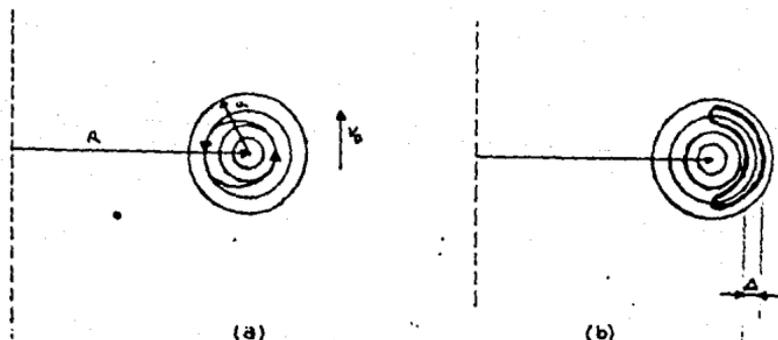


FIG. 1.4. SUPERFICIES MAGNETICAS Y PROYECCIONES DE LAS ORBITAS DEL CENTRO GUIA EN TOKAMAKS a) ORBITA NO ATRAPADA, b) ORBITA (BANANA) ATRAPADA.

Observando la figura 1.4 podemos apreciar como las intersecciones de las superficies magnéticas con un plano que contiene el eje de simetría son círculos concéntricos.

En la aproximación del centro guía a orden mas bajo, una partícula sigue una línea de campo, con el centro guía deslizándose sobre una superficie magnética; a un orden siguiente, surgen derivas del VB y de la fuerza centrífuga llevando partículas hacia arriba en la figura 1.4. Hay que recordar que esta deriva impide el confinamiento de las partículas en un campo toroidal sin una componente poloidal; en nuestro caso sin embargo, la deriva llevará las partículas al interior de las superficies magnéticas en la mitad inferior, y al exterior de las superficies en la mitad superior de la figura.

La superficie resultante se puede mapear sobre una línea en la sección transversal como se muestra en la figura 1.4a, de manera que la partícula es confinada. Una fracción de las partículas se comportan de la siguiente forma: el campo magnético es muy fuerte cerca del eje y débil lejos de él, formando espejos magnéticos. De manera que muchas partículas son impedidas para ir alrededor del toroide por el camino corto y quedan atrapadas. Tal órbita está indicada en la fig.1.4b. Debido a la forma de la órbita, esta ha sido llamada órbita de banana. Debido a que las superficies magnéticas son superficies de presión constante, la longitud de desplazamiento importante es el ancho de banana  $\Delta$ , que generalmente es mucho más grande que el radio de ciclotrón.

El ancho de banana  $\Delta$  reemplaza la escala de longitud de la órbita del ciclotrón en los cálculos de los coeficientes de difusión neoclásica en un régimen de pocas colisiones.

## RÉGIMEN DE PFIRSCH-SCHLÜTER.

( $v_c$  grande)

Cuando se tiene una geometría toroidal hay que distinguir entre las colisiones cuando son frecuentes o cuando son raras. La teoría macroscópica se aplica si la trayectoria libre media de las partículas es más pequeña que la longitud de conexión  $qR$  (en la que una línea de campo tiene un cambio apreciable en su posición meridional sobre una superficie magnética). En todo caso, el problema está en establecer un equilibrio en el que, a diferencia de la geometría plana, exista además una corriente paralela a  $\vec{B}$  conducida contra la resistencia del plasma. Esto no puede ser hecho directamente por la difusión a través del término  $(\vec{v} \times \vec{B})/c$  en la ley de Ohm ya que tal término actúa solamente perpendicularmente a  $\vec{B}$ . Por lo tanto necesitamos, además un campo eléctrico que lleve la corriente paralela. Tales campos surgen automáticamente por separación de carga debido a que la corriente diamagnética no tiene divergencia cero. Pero tales campos de carga espacial tienen que ser campos puramente poloidales debido a la simetría axial. La proyección de esos campos sobre las líneas de campo deberán llevar  $j_{\parallel}$  y por lo tanto tendremos que  $n_{\parallel} j_{\parallel} = n_{\parallel} q j_{diam}$ , lo cual es válido si el campo toroidal es el principal campo de confinamiento. El campo eléctrico poloidal entonces tiene magnitud  $n_{\parallel} q j_{diam} \cdot qR / r$ . La componente de este campo perpendicular a  $\vec{B}$  tendrá que ser cancelada por el término  $(\vec{v} \times \vec{B})/c$ ; de otra manera producirá una corriente

$$\frac{n_{\parallel} q \cdot qR}{n_{\perp} r} j_{diam} \gg j_{diam} \quad (1.48)$$

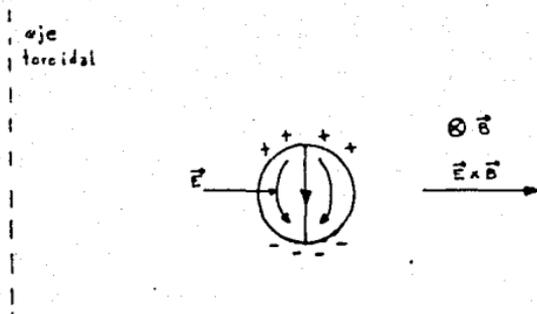


FIG.1.5. DERIVA  $\vec{E} \times \vec{B}$  CAUSADA POR SEPARACION DE CARGA.

La velocidad, que es del tipo  $\vec{E} \times \vec{B}$ , será en el plano poloidal y principalmente hacia el exterior (fig.1.5) [4] y es del orden de:

$$v_p \approx \frac{n_i}{n} 2 \frac{q^2 R}{r} v_{cl} \quad (1.49)$$

donde  $v_{cl} = \eta c^2 \nabla p / B^2$  es la velocidad de difusión clásica. Para asegurar un movimiento casi de divergencia-libre del plasma con un perfil de densidad estacionario, el plasma tendrá un flujo hacia afuera a lo largo de las líneas de fuerza, la velocidad necesaria será:

$$v_{\parallel} = \frac{q R}{r} v_p \quad (1.50)$$

Una fracción  $r/R$  del flujo de partículas poloidal se escapan, dando lugar a que surja una velocidad de difusión:

$$v_{ps} = \frac{r}{R} v_p = \frac{n_i}{n_{\perp}} 2 q^2 v_{cl} = q^2 v_{cl} \quad (1.51)$$

Esta velocidad media que es la energía expansiva correspondiente a  $v_{ps}$  no solamente afecta la disipación de Joule de la corriente diamagnética sino que además produce la disipación de Joule de la corriente secundaria, que es un factor  $n_1 2 q^2/n_1$  más grande que la primera.

Este es el llamado factor de Pfirsch-Schlüter  $q^2$  que además se presenta en la conducción del calor. La física aquí sin embargo es muy diferente a la de difusión. Tiene que ver con un flujo de calor:

$$\overline{q_{k\perp}} = \frac{5}{2} \frac{n_k T_k}{e_k B^2} ( \vec{B} \times \vec{v}_{T_k} ) \quad (1.52)$$

que es perpendicular a  $\vec{v}_T$ . Ya que no tiene divergencia cero, ésta induce un flujo de calor paralelo a  $\vec{B}$  y consecuentemente produce un gradiente de temperatura poloidal. Con este gradiente, la fórmula anterior produce un flujo de calor radial que es entonces del orden de  $q^2$  veces el valor en el plano.

### RÉGIMEN DE BANANA.

( $v_c$  pequeña)

Como se ha mencionado anteriormente, cuando hay pocas colisiones, no todas las partículas en el plasma (tokamak) podrán moverse libremente alrededor del toro a lo largo de las líneas de campo, sino que algunas partículas verán espejos magnéticos antes de recorrer una distancia  $qR$ . La intensidad de los espejos proporcional a  $\Delta B/B$  está dada por el inverso de la razón de radios:

$$\frac{\Delta B}{B} = a/R \quad (1.53)$$

Para calcular el ancho de las órbitas de banana de las partículas atrapadas partimos de la ley de conservación de energía:

$$\mu B + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \text{cte} \quad \text{ó} \quad \mu \Delta B + \Delta \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = 0 \quad (1.54)$$

donde  $\mu$  es el momento magnético ( $\mu = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 / B$ ).

De aquí se sigue que:

$$\left| \Delta \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) \right| = \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right)_{\text{max}} \quad (1.55)$$

que usando la definición de  $\mu$  da:

$$\frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}^2} = \frac{\Delta B}{B} = \frac{a}{R} \ll 1 \quad (1.56)$$

Tales partículas se mueven esencialmente en la dirección vertical con una velocidad:

$$v_{\text{DRIFT}} = c \frac{m v_{\perp}^2 / R}{e B} \quad (1.57)$$

Durante el tiempo en que la partícula viaja de un espejo a otro, esto es, el tiempo  $qR/v_{\parallel}$ , las partículas se mueven una distancia:

$$\delta = v_{\text{DRIFT}} qR / v_{\parallel} = \frac{m v_{\perp}^2 c}{e B} q \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = r_g q \left( \frac{R}{a} \right)^{1/2} \quad (1.58)$$

fuera de una superficie magnética en la dirección vertical. Esto da, el ancho de las órbitas de banana (fig 1.6) [4]

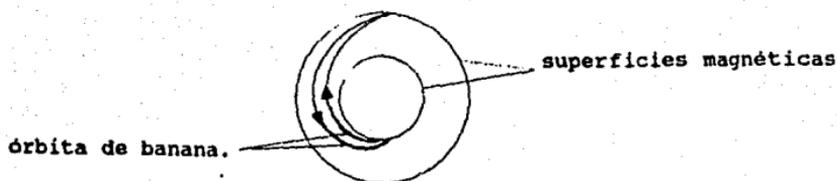


FIG.1.6. ORBITAS DE BANANA.

Al haber una colisión lo primero que ocurre es una inversión de  $v_{\parallel}$ , puesto que  $v_{\parallel}$  es mucho más pequeña que  $v_{\perp}$ . Esto hace que la parte interna de la órbita de banana se convierta en la exterior de la otra y viceversa, es decir, la partícula da pasos del orden del ancho de banana  $\delta$ . El ancho de banana por lo tanto reemplaza el radio de giro en geometría plana. El tiempo para que se invierta  $v_{\parallel}$ , sin embargo, no es el tiempo libre medio usual, sino que es más pequeño que éste por el factor  $v_{\parallel}^2 / v^2$ . Así tendremos que usar una frecuencia de colisión de partícula atrapada:

$$\nu_t = \frac{v^2}{v_{\parallel}^2} \nu = \frac{R}{a} \nu \quad (1.59)$$

El número de partículas atrapadas es proporcional al intervalo  $v_{\parallel}$  dado por la condición de atrapamiento, es decir:

$$n_t = n \frac{v_{\parallel}}{v} = n \left( \frac{a}{R} \right)^{1/2} \quad (1.60)$$

Entonces, un proceso estocástico (es un proceso azaroso en el que solamente se puede conocer de manera probabilística lo que se va a

obtener en un evento posterior ; la distancia entre eventos es lo que se le conoce como paso . Chandrasekhar [ 80 ] hace un estudio detallado de estos procesos )con  $\delta$  como la dimensión del paso produce el coeficiente de difusión:

$$D_B = \delta^2 \nu_t \frac{n_t}{n} = r_g^2 q^2 \frac{v_L^2}{v_I^2} \frac{v^2}{v_I^2} \nu \frac{v_I}{v} = r_g^2 \nu q^2 \left( \frac{R}{a} \right)^{3/2}$$

$$= D_{ps} \left( \frac{R}{a} \right)^{3/2} \quad (1.61)$$

Esta derivación es válida siempre y cuando el atrapamiento de partículas no sea inhibido por las colisiones, es decir, para  $\nu_t q R / v_I < 1$  ó

$$\nu \frac{v^2}{v_I^3} qR = \frac{qR}{\lambda} \left( \frac{v}{v_I} \right)^3 = \frac{qR}{\lambda} \lambda^{3/2} < 1 \quad (1.62)$$

$$\text{ó} \quad \lambda > \lambda^{3/2} qR$$

donde  $\lambda$  es la trayectoria libre media.

El régimen comprendido en el rango:

$$qR < \lambda < \lambda^{3/2} qR \quad (1.63)$$

no está descrito por ninguno de los dos regímenes anteriores. Puesto que tanto  $D_B$  como  $D_{ps}$  son proporcionales a  $1/\lambda$  uno debe tener que:

$$D_B (\lambda = \lambda^{3/2} qR) = D_{ps} (\lambda = qR) \quad (1.65)$$

entonces esperamos el siguiente comportamiento de  $D$  [4] (como se muestra en la figura 1.7).

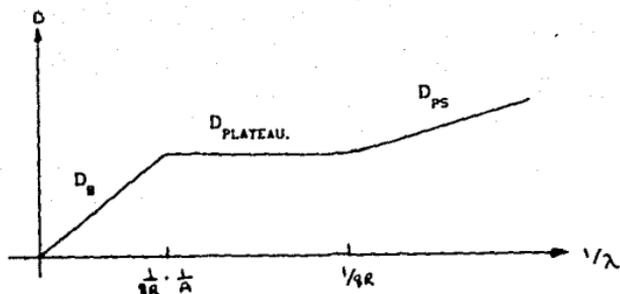


FIG.1.7. COEFICIENTE DE DIFUSION COMO FUNCION DE LA TRAYECTORIA LIBRE MEDIA (idealizada).

La parte interna forma una plataforma y es entonces llamado régimen de plateau. En realidad, hay una transición suave del régimen de Banana al de Pfirsch-Schlüter.

En transporte neoclásico se presentan además dos efectos de importancia que son :a) la corriente de bootstrap (es una corriente que se genera en el plasma sin agentes externos) b) el efecto Ware; Ware (1970) y Galeev (1971) independientemente notaron que un campo eléctrico toroidal causa un movimiento interno radial de las partículas atrapadas, a una velocidad que es mucho mas grande que la deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  en el efecto pinch clásico [ 76 ]. La existencia de una corriente (corriente de bootstrap) de deriva de difusión fue predicha independientemente por Galeev (1971) y Bickertan, Connor y Taylor (1971) [ 76 ]. El origen físico de la corriente de bootstrap es la órbita de banana de los electrones atrapados, en presencia de un gradiente de la densidad.

## CAPITULO II .

### TRANSPORTE ANOMALO.

#### 1. EVIDENCIAS DE TRANSPORTE NO CLÁSICO (EXPERIMENTAL) Y LEYES DE ESCALAMIENTO EMPÍRICO.

##### a) FLUJOS DE ENERGÍA Y EVIDENCIAS DE LA CONDUCCIÓN TÉRMICA ANÓMALA POR ELECTRONES.

Como una medida del desempeño de un tokamak frecuentemente se utiliza el tiempo de confinamiento de energía global:

$$\tau_E = W_{TOT} / P_{in} \quad (2.01)$$

donde  $W_{TOT}$  es la energía total almacenada en el plasma,

$$W_{TOT} = \int dV \quad 3nk_b ( T_e + T_i ) / 2 . \quad (2.02)$$

y  $P_{in}$  es la razón a la cual es aplicada la energía al plasma, que puede ser en forma de calentamiento óhmico, inyección de un haz neutro o alguna forma de calentamiento por radio frecuencias (RF). En estado estacionario la energía que se inyecta al plasma es igual a la energía que sale del plasma, así  $\tau_E$  mide la razón a la cual la energía escapa del plasma. La energía puede escapar del plasma a través de una variedad de procesos 'clásicos' que incluyen transporte de partículas, transporte térmico clásico (o neoclásico) de electrones e iones, radiación, ionización e intercambio de carga. Para esos procesos conocidos, la razón a la cual la energía es perdida puede ser calculada si

los parámetros del plasma y los perfiles son conocidos. En la práctica la radiación perdida está determinada por una medición directa. La medida del tiempo de confinamiento de la energía global, entonces se compara con el tiempo de confinamiento calculado con todas las pérdidas clásicas incluidas, indicando con esto si existe o no una pérdida anómala [ 5 ].

Una clara evidencia del transporte anómalo por electrones se presenta en los tokamaks calentados óhmicamente, operando en regímenes de baja densidad. Para tokamaks calentados óhmicamente, la energía total (integrada sobre el volumen ) de entrada es simplemente la energía óhmica  $P_{ohm} = I V$ , donde  $I$  es la corriente total llevada por el plasma y  $V$  es el voltaje alrededor del toro (voltaje de circuito). La energía óhmica va directamente a los electrones y para densidades lo suficientemente bajas, la razón de calentamiento óhmico de los electrones es mucho más grande que la razón de transferencia de energía clásica de los electrones a los iones . Si suponemos que no existe una transferencia de energía anómala significativa de los electrones a los iones, entonces es muy pequeño el flujo de energía debido a los iones. En este caso, el análisis del flujo de energía es relativamente simple, y es la pérdida por electrones la que domina y determina el confinamiento de la energía global. Una gran incertidumbre en la pérdida por iones causa solamente una pequeña incertidumbre en la pérdida total. Muchos tokamaks operan o han operado en este 'régimen dominado por electrones ', como el Ormak [ 6 ,7], el TFR [ 8, 9], el ISX-A [10] el PLT [11,12] y el Alcator A [13] ; en ellos se muestra que la pérdida electrónica es anómala, es decir que el tiempo de confinamiento de energía

observado es mucho más pequeño (de 10-100) que el esperado sobre la base del transporte por electrones conocido.

En los tokamaks que no operan en el régimen dominado por electrones, es generalmente más complicado determinar la magnitud de la pérdida por electrones anómala.

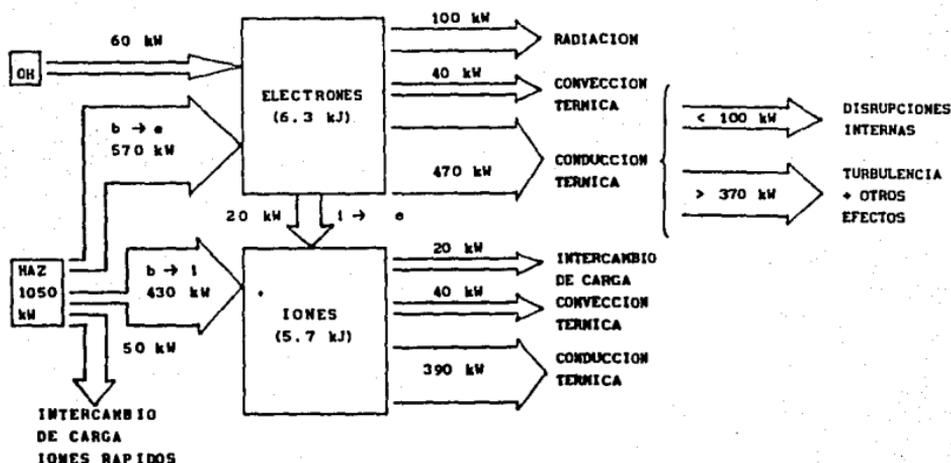


FIG.2.1. FLUJO DE ENERGIA EN UNA DESCARGA EN EL ISX-B CALENTADO POR UN HAZ NEUTRO.

Muchos trabajos teóricos están enfocados al desarrollo de modelos para el coeficiente de conducción térmica anómalo de los electrones. Las comparaciones de las predicciones teóricas de  $K_e$  con los resultados experimentales son posibles solamente en los casos donde la pérdida electrónica anómala puede ser determinada experimentalmente; es decir en los casos donde tales pérdidas pueden ser separadas de las pérdidas clásicas conocidas. No es

posible comparar el tiempo de confinamiento de energía global  $\tau_E$  directamente con las predicciones teóricas obtenidas a partir de  $K_e$ , excepto en los casos raros donde las otras pérdidas son todas insignificantes. En tales experimentos como el ISX-B donde los perfiles del plasma y las pérdidas de radiación son conocidas el flujo de energía puede ser determinado como en la figura(2.1). Uno puede entonces calcular un valor experimental para el coeficiente de conducción térmica de los electrones al dividir la pérdida de conducción por el gradiente de temperatura. Esto es equivalente a resolver para  $K_e$  usando la ecuación de transporte de energía de los electrones en estado estacionario [9]:

$$K_e = n \chi_e \quad (2.03)$$

$$= \frac{Q_{ohm} + Q_{beam} - Q_{rad} - Q_{ei} - Q_{MHD} - Q_{conv,e} - Q_{ion,e}}{- (dT_e)/dr}$$

con:

$$Q_{ei}(r) = \frac{1}{r} \int_0^{r'} dr' r' n \frac{T_e - T_i}{\tau_{eq}} \quad (2.04)$$

Aquí,  $\tau_{eq}$  es el tiempo de equilibrio de energía clásica entre los electrones y los iones.

$$Q_{ohm}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r dr' r' \eta j^2 \quad (2.05)$$

Es la razón de calentamiento óhmico,  $Q_{beam}$  es la razón de calentamiento por haces neutros (que debe ser modelado),  $Q_{rad}$  es la razón de pérdida de energía por radiación (que puede ser medida o

calculada),  $Q_{ion,e}$  es la razón de pérdida por ionización y  $Q_{MHD}$  es la razón de pérdida por las fluctuaciones MHD. Las pérdidas convectivas,  $Q_{conv,e}$  son por lo general insignificantes.

No hay una razón a priori para que la pérdida de energía electrónica anómala deba ser atribuida a procesos tales como la conducción térmica que ocurre a escalas de espacio pequeñas mas que a flujos de escala grande o celdas convectivas. Sin embargo hay evidencias experimentales [ 7,15,16] de que el proceso de pérdida electrónica anómala a una escala pequeña, es un proceso de tipo difusivo. Esta evidencia proviene del estudio de la evolución de un pulso de calor descargado a corta distancia del centro por el colapso de una disrupción interna (es decir por una ruptura interna debida a alguna inestabilidad)  $m = 1$ . Se encuentra [ 7,15,16] que la evolución de este pulso de calor puede ser descrito por la ecuación de difusión con un valor de la difusividad térmica del electrón  $\chi_e = (K_e) / n$  similar al obtenido del análisis de transporte ; es decir evaluando y utilizando la ec.(2.03).

Aunque se ha limitado a presentar la evidencia de que la conducción térmica anómala de electrones, se debe de tomar en cuenta que además existe el transporte anómalo de partículas (de masa ).Generalmente existe un coeficiente de difusión anómalo  $D$  a través del campo , tal que  $D = (0.1 - 0.25) \chi_e$ . Además de esta difusión hacia afuera hay un transporte convectivo anómalo grande del plasma que va del centro a las orillas , donde está localizada la fuente de partículas [17,18, 19] .

## b) CONFINAMIENTO EN TOKAMAKS Y LEYES EMPÍRICAS DE ESCALAMIENTO.

Se ha observado que no hay un modelo teórico o una expresión para la conducción térmica anómala de los electrones  $K_e(r)$  que, cuando sea usada en un código de simulación de transporte en un tokamak dé los resultados observados para una variedad de diferentes tokamaks. Como no existe tal modelo muchos trabajos han sido realizados extrayendo leyes empíricas de escalamiento (las leyes de escalamiento son relaciones entre cantidades que nos dicen cómo es que varía una cantidad al variar alguna de las otras, en nuestro caso observaremos la relación del tiempo de confinamiento  $\tau_E$  con los parámetros del sistema (tokamak), tales como el radio menor, el radio mayor, la densidad, etc) empírico de los datos de confinamiento existentes. Ellos pueden ser utilizados para tratar de predecir el futuro funcionamiento de los experimentos y para tratar de entender la física que está atrás del transporte anómalo.

Enseguida se da una breve descripción de los resultados del confinamiento en tokamaks y las leyes empíricas de escalamiento.

Muchos de los trabajos sobre leyes empíricas de escalamiento son enfocados a encontrar escalas para el tiempo de confinamiento de energía global  $\tau_E$  o el tiempo de confinamiento de energía de los electrones  $\tau_{E,e} = (W_e) / P_{in,e}$  [las definiciones de  $\tau_{E,e}$  varían en la literatura]. Para tokamaks óhmicos se cumple la relación  $\tau_E = \tau_{E,e} (1 + \frac{\langle T_i \rangle}{\langle T_e \rangle})$ , donde  $\langle \rangle$  denota un promedio sobre el volumen. Sin embargo para hacer comparaciones con cálculos teóricos de  $K_e$ , la información acerca del escalamiento

del tiempo de confinamiento no es suficiente debido a que esos tiempos dependen de una manera complicada de todas las pérdidas conocidas y anómalas.

En tokamaks que operan en el régimen dominado por electrones de baja densidad  $\tau_E \ll \tau_{e,q}$ , [ donde  $\tau_{e,q}$  es el tiempo de equilibrio de energía entre los electrones y los iones ], el tiempo de confinamiento de energía, generalmente pero no universalmente, muestra un incremento lineal con la densidad.

Un escalamiento lineal con la densidad primero fue observado en el tokamak Alcator A [13,20] después fue observado en otros como el T-10 [21,22], Doublet III [23], ISX-A [10] y otros. Esta ley de escalamiento simple se le llama escalamiento Alcator

$$\tau_E \propto \bar{n} a^2 \quad (2.06)$$

donde  $\bar{n}$  es la densidad promediada a lo largo de la línea visual y  $a$  es el radio menor del tokamak. Otras leyes de escalamiento para  $\tau_E$  o  $\tau_{E,e}$  tienen un escalamiento lineal con  $n$ , pero con dependencia adicional de otros parámetros tales como  $q$  (factor de seguridad),  $R$  (Radio Mayor), e  $I$  (corriente del plasma) [14,24, 25, 26]. Un ejemplo es la ley de escalamiento encontrada por Pfeiffer y Waltz [27]:

$$\tau_{E,e} = 7.4 \times 10^{-22} \langle n \rangle a^{1.25} R^2 \quad (2.07)$$

Esta ley de escalamiento fue obtenida de los datos de diferentes tokamaks y no muestra un escalamiento con  $a^2$ , pero muestra una fuerte dependencia con  $R$ .

En el régimen dominado por electrones, si la pérdida por conducción térmica de los electrones domina sobre otras (es decir, si radiación, pérdida de los iones etc no son importantes), tales escalamientos dan lugar a modelos para la difusividad térmica promedio de los electrones, a través de las relaciones:  $\tau_r \sim \tau_{E,e} \propto a^2/\chi_e$ . Esto produce como en Alcator A [13], la relación empírica  $\chi_e \propto 1/n$ , y así  $K_e$  es independiente de  $n$ . La relación empírica para la difusividad térmica anómala,  $\chi_e(r) = c/n(r)$  fue utilizada satisfactoriamente en el modelo de muchos tokamaks, tales como el ISX-A con  $c = 10^{17} \text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}$  [10] y en el JFT-2 con  $c = 2 \times 10^{17} \text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}$  [28]. Otro modelo para  $K_e$  que fue utilizado satisfactoriamente para tokamaks óhmicos fue propuesto por Coppi y Mazzucato [29], y se muestra en la tabla 1.

---

EXPRESIONES EMPÍRICAS PARA LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DEL ELECTRÓN ANÓMALA  $K_e = n \chi_e$  PARA TOKAMAKS CALENTADOS ÓHMICAMENTE.

---

INTOR [30]

$$K_e \approx 5 \times 10^{17} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

Merezhkin [32]

$$K_e \approx 10^{20} \frac{[T_e]^{0.5}}{qR} \left( \frac{r}{R} \right)^{7/4} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

Coppi-Mazzucato [29]

$$K_e \approx \frac{2 \times 10^{13} B_t n^{1/5} Z_{\text{eff}}^{1/5}}{(A)^{1/2} q T_e} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$


---

TABLA 1.

Una descripción del transporte en los tokamaks surge de los estudios en tokamaks calentados óhmicamente y que generalmente se refieren a él como el modelo INTOR [30]. Este modelo se convirtió en el aceptado para tiempos de confinamiento de energía (para tokamaks en el régimen dominado por electrones) a través de la ley de escalamiento de INTOR.

$$\tau_E \approx 5 \times 10^{-19} \bar{n} a^2 \quad (2.08)$$

El modelo básicamente consistía en que la difusividad térmica de los electrones era anómala pero decrecía linealmente con la densidad. Era razonable describirlo por  $\chi_e = \frac{c}{n}$ , donde  $c$  era una constante en el rango  $(1-5) \times 10^{17} \text{cm}^{-1} \text{s}^{-1}$ . El transporte de los iones era neoclásico en un factor de dos.

Por los años de 1980, los resultados recientes indicaban que el confinamiento del tokamak no se podía explicar en términos de un modelo simple de INTOR.

Los estudios de confinamiento sistemático en los tokamaks T-11 [31] y en el T-10 [21,22] en regímenes óhmicos tendían a mostrar que el confinamiento electrónico no seguía el modelo INTOR. La dependencia de  $K_e$  anómala con el radio menor (al cambiar el radio del limitador),  $a/R$ ,  $q(a)$  y  $T_e$  fue estudiada en el T-11 [31] y se encontró que seguía una ley empírica, ahora llamado el modelo Merezhkin [32] como se da en la tabla 1. Si ésta es la pérdida de energía de electrones, el tiempo de confinamiento de energía electrónica global resultante es [32]:

$$\tau_E \approx 3.5 \times 10^{-21} (a/R)^{0.25} q(a) n R^3 / \langle T_e \rangle^{0.5} \quad (2.09)$$

que tiene una dependencia muy débil con el radio menor , pero una dependencia muy fuerte con el radio mayor R.

El grupo de Alcator para entender el deterioro en el confinamiento en el Alcator C [33] ,utilizó limitadores para cambiar el radio menor de los tokamaks para investigar la dependencia de  $a^2$  en la ley de escalamiento INTOR-Alcator [34]. El resultado aquí fue que la escala no era  $a^2$ , sino que se encontró una buena aproximación con el escalamiento  $\tau_E \propto a R^2$  [34]. Este resultado combinado con los resultados de varios otros tokamaks dieron la ley de escalamiento 'Neo-Alcator' [35]:

$$\tau_E = 1.3 \times 10^{-21} \bar{n} R^{2.04} a^{1.04} \quad (2.10)$$

El grupo D III [36] confirmó que no se daba un escalamiento con  $a^2$  para el confinamiento de energía .

Berlizer [37] menciona que la conductividad anómala está determinada por tres mecanismos diferentes en tres zonas distintas del plasma: (1) para  $q \leq 1$  , (2) para  $1 \leq q \leq 2$  y (3) para  $q > 2$  Otro modelo de tres zonas fue sugerido por el grupo TFR [ 9].

Goldston derivó una ley empirica de escalamiento; esta ley está basada en la información de los experimentos de inyección de haces neutros de algunos tokamaks, incluyendo el Asdex [38-39], PDX [40] D III [41] y el ISX-B [42-43]. Este escalamiento final para el tiempo de confinamiento de energía [ohmica mas auxiliar] total  $\tau_E$  resulta de combinar el escalamiento para el calentamiento auxiliar  $\tau_E^{aux}$  con un escalamiento parecido al Neo-Alcator para el calentamiento óhmico  $\tau_E^{ohm}$  ; la expresión

final para el confinamiento de energía es:

$$\frac{1}{\tau_E} = \left[ \left( \frac{1}{\tau_E^{\text{aux}}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\tau_E^{\text{ohm}}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.11)$$

$$\tau_E^{\text{aux}} = 6.4 \times 10^{-8} \quad I R^{1.75} \quad a^{-0.37} \quad k^{0.5} / P_{\text{TOT}}^{0.5} \quad (2.12)$$

$$\tau_E^{\text{ohm}} = 7.1 \times 10^{-22} \quad q \bar{n} \quad a^{1.04} \quad R^{2.04} \quad (2.13)$$

donde  $P_{\text{TOT}}$  es la energía de entrada total en watts ,  $I$  es la corriente del plasma en amperes ,  $k$  es el alargamiento del plasma .

En este punto no existe una descripción clara y simple de las escalas de confinamiento de un tokamak que englobe todos los resultados de confinamiento. Existe un optimismo considerable en que los nuevos resultados den un escalamiento con las dimensiones de la forma  $aR^2$ ; que darían un mejor confinamiento para plasmas de dimensiones de un reactor (  $\sim a$  ). Esto se pensó en base a las observaciones iniciales en el TFTR [44]. Sin embargo, el descubrimiento del modo H ( ó de alto confinamiento), junto con los resultados de Alcator C y T-10 discutidos en esta sección indican que muchos efectos físicos diferentes influyen fuertemente en el confinamiento de energía global ; por ejemplo los efectos debidos a las impurezas, el transporte de partículas, y la actividad MHD .

## 2. MODELOS DE TRANSPORTE ANÓMALO (interacciones onda-partícula).

En los modelos de transporte anómalo se puso énfasis en los trabajos que hacen predicciones del transporte o predicciones de algunos otros rasgos de la turbulencia, tal como el espectro o el nivel de saturación, que puede ser comparado con las medidas de los tokamaks.

### a) ELECTROSTÁTICOS (ondas de deriva).

Las ondas de deriva generalmente son consideradas como la causa más frecuente del transporte anómalo en tokamaks de baja beta [  $\beta$  se define como el cociente entre presiones ( presión del plasma / presión magnética) ].

Una onda de deriva está caracterizada como un modo con frecuencia del orden de la frecuencia de deriva diamagnética ,  $\omega - \omega_{e0} = k_p V_{e0}$  donde  $k_p$  es el número de onda en la dirección poloidal  $V_{e0} = c T_e / (e B L_n)$  y  $L_n$  es una escala de variación del gradiente ,  $L_n^{-1} = | d \ln(n) / dx |$  . La velocidad de fase paralela (al campo magnético) está entre la velocidad térmica de los electrones y la de los iones ,  $V_{\parallel} \ll \omega / k_{\parallel} \ll V_{e0}$  . Generalmente las ondas inestables tienen  $k_{\perp} \sim r_s^{-1}$  , donde  $r_s = c_s / \omega_{c1}$  ;  $c_s^2 = T / m_i$  ,  $\omega_{c1} = qB / m_i c$  . Los modos tienen una longitud de escala perpendicular pequeña relativa al radio menor  $a$  (  $k_{\perp} a \gg 1$  ) , ya que  $r_s \ll a$  para tokamaks.

Para muchos cálculos se utiliza la aproximación de geometría rectangular con cizallamiento para el tokamak; ilustrada en la figura(2.2). Ya que  $k_{\perp} a \gg 1$  ; uno puede usar un sistema de

coordenadas rectangular con el eje X correspondiente a la
 dirección radial y el eje Z alineado a lo largo de la dirección
 local ( $X=0$ ) del campo magnético. La variación del campo magnético
 es aproximada como  $B=B_0(\hat{z} + (\hat{y}x/L_s))$  donde, para un tokamak,
 la longitud de cizallamiento está dada por  $L_s = qR/\hat{s}$ , con
 $\hat{s} = d(\ln q) / d \ln r$  y R el radio mayor (generalmente,  $\hat{s} \approx 1$ 
en un tokamak). El número de onda paralelo es entonces
 $k_{\parallel}(x) = k_{\parallel}(0) + K_y X / L_s$ . Tomando  $k_{\parallel}(0) = 0$  entonces implica que
 $x=0$  corresponde a la localización de una 'superficie racional'
del tokamak. En este modelo, la energía se propaga hacia afuera
del modo central ( $x=0$ ) y es absorbida por los iones cuando
 $\omega_0 \sim k_{\parallel}(x) V_i$ . La estabilidad está determinada por la
competencia entre la propagación hacia el exterior de la energía
(llamada amortiguamiento por cizallamiento) y los mecanismos de
desestabilización (colisiones, resonancia de electrones, etc).

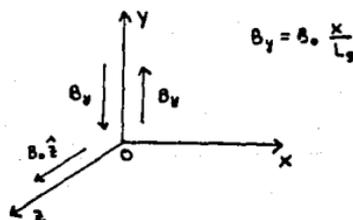


FIG. 2. 2. GEOMETRIA Y SISTEMA DE COORDENADAS PARA LA PROPAGACION
 RECTANGULAR USANDO FLUCTUACIONES DE ESCALA PEQUEÑA EN
 TOKAMAKS. EL EJE Z CORRESPONDE A LA DIRECCION LOCAL DEL
 CAMPO TOTAL  $\vec{B}$  DEL TOKAMAK Y LA DIRECCION X CORRESPONDE
 A LA DIRECCION RADIAL.

Taylor [ 45] sugirió que el amortiguamiento por cizallamiento
 no puede ser efectivo en la estabilización de los modos de deriva

en un tokamak real como en la aproximación rectangular. El razonaba que en la geometría de un tokamak los modos centrados alrededor de las superficies racionales estarán acopladas mutuamente. El modelo rectangular, sin embargo, trata el modo como si fuera una sola superficie racional aislada. Si el acoplamiento a los modos adyacentes es incluido, la propagación hacia el exterior puede ser reducida o eliminada [ 45].

Tiempo después, sin embargo, varios estudios del modo de deriva [ 46- 49] mostraron que el amortiguamiento por cizallamiento se vuelve insignificante y el modo de deriva (comúnmente llamado modo universal) se convierte inestable para valores de cizallamiento típicos de tokamaks. Chen y Cheng [ 49] mostraron que los modos de deriva inducidos por toroidicidad, son inestables debido a la curvatura del campo magnético toroidal.

Un tratamiento similar de la versión toroidal de la onda de deriva colisional o disipativa [ 51-52 ] muestra que es además inestable cuando se incluye la variación del campo toroidal sobre la superficie de flujo. Así, se muestra que todas las inestabilidades de onda deriva conocidas persisten en un tokamak.

#### a.1) CALCULOS CUASILINEALES DE TRANSPORTE DEBIDO A ONDAS DE DERIVA ELECTROSTÁTICAS

El transporte anómalo en un tokamak debido a fluctuaciones electrostáticas de baja frecuencia ( $\bar{E} = 0$ ) en el límite cuasilineal es calculado por varios autores [53, 54, 55, 56, 57]. Suponiendo cuasineutralidad, fluctuaciones de presión isotrópica y que la fluctuación en la velocidad radial es debida a

la deriva fluctuante  $\vec{E} \times B$ , los flujos de calor y partículas inducidos por fluctuaciones pueden ser escritos como: [ 58, 56 ]

$$\Gamma^t = -D \, dn / dr = c \langle \vec{E}_p \cdot \vec{n} \rangle / B \quad (2.14)$$

$$Q_j^t = \frac{5}{2} \frac{c}{B} \langle \vec{E}_p \cdot \vec{P}_j \rangle \quad (2.15)$$

donde  $\vec{E}_p$  es la componente poloidal del campo eléctrico de la fluctuación y  $\langle \rangle$  indica promedio sobre un ensemble de sistemas, donde la fluctuación de la presión de la  $j$ -ésima especie está dada por:

$$\frac{3}{2} \vec{P}_j = \int d v ( m v^2 / 2 ) \vec{f}_j \quad (2.16)$$

y la ecuación de la temperatura es :

$$-\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} ( n T_j ) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} ( r Q_j ) = P_j \quad (2.17)$$

donde  $P_j$  incluye todas las variaciones de calor y enfriamiento y además los procesos de transporte clásico. Esas expresiones son generalmente válidas para iones y electrones en un tokamak, y así la turbulencia electrostática puede causar transporte anómalo de partículas y térmico para iones y electrones, así como el intercambio de energía anómalo entre electrones e iones.

En una onda de deriva, los electrones alcanzan aproximadamente una distribución de Boltzmann, y la perturbación en la densidad muchas veces puede ser aproximada como:

$$\vec{n}_k = n_e \vec{\phi}_k ( 1 - i \delta_k ) / T_e \quad (2.18)$$

donde  $\delta_k$  es una función real. Entonces usando la Ec. (2.14), el

flujo de partículas se convierte en :

$$\Gamma^t = n (cT / eB) \sum_k \delta_k | \bar{n}(k) / n |^2 \quad (2.19)$$

La razón de crecimiento de la onda de deriva está determinada por  $\delta_k$  y  $\delta_k = \gamma(k) / W_r(k) = \gamma(k) / W_{*e}$ , de manera que el coeficiente de difusión puede ser aproximado como:

$$D \sim L_n^2 \sum_k \gamma(k) | \bar{n}(k) / n |^2 \quad (2.20)$$

Esta expresión es usada muchas veces como una base para estimar la cantidad de transporte que se espera de las observaciones o de los niveles estimados de las fluctuaciones de la densidad. En tales estimaciones, la razón de crecimiento  $\gamma(k)$ , no es en general conocida, y así, para usar la ec. (2.20), es necesario considerar un valor, por ejemplo  $\gamma \sim 6 / W_{*e}$  o  $\gamma \sim \Delta W$ .

Una estimación frecuentemente usada del nivel de fluctuación es la de longitud de mezclado  $(\bar{n} / n) - 1 / (k_{\perp} L_n)$  [59, 60]. A este nivel, el gradiente de la densidad perturbada,  $k_{\perp} \bar{n}$ , es comparable al gradiente de la densidad media, que es la fuente de energía libre de la inestabilidad de deriva. Usando este nivel en la ecuación (2.20) resulta  $D \sim \gamma(k) / k_{\perp}^2$ , que es una estimación comúnmente utilizada para el coeficiente de difusión [59, 60].

Un estudio posterior del transporte cuasilineal en geometría rectangular por Waltz y col. [61] usa un perfiles modelados de tokamaks y resuelve una relación de dispersión no local para calcular las respuestas lineales de los electrones y los iones y los flujos. En esta relación de dispersión, las ondas de deriva sin colisiones y con colisiones fueron siempre estables debido

al amortiguamiento por cizallamiento, y así no puede dar lugar a ningún transporte anómalo. Ellos encontraron que muchos tokamaks muestran transporte anómalo en regímenes donde las ondas de deriva fueron estables en la aproximación rectangular y así concluyeron que el modelo cuasilineal electrostático rectangular de ondas de deriva puede no describir adecuadamente el transporte anómalo en tokamaks.

b) ELECTROMAGNÉTICOS (modos reconectivos o tearing).

b.1) TRANSPORTE CUASILINEAL DEBIDO A ONDAS DE DERIVA ELECTROMAGNÉTICAS.

Las ondas de deriva, aunque son modos electrostáticos por lo general, tienen una componente magnética pequeña que como muestra Callen [ 62], puede además dar transporte anómalo.

La expresión general para el flujo de partículas cuando ambas fluctuaciones de campo eléctrico y magnético están presentes están dadas por la ec (2.21) :

$$\Gamma^t = \frac{c \langle \bar{n} \bar{E}_p \rangle}{B} - \frac{\langle \bar{j}_\parallel \bar{B}_r \rangle}{eB} \quad (2.21)$$

donde :

$$\bar{j}_\parallel = -e \int_{-\infty}^{\infty} dv v_\parallel \bar{f}_e \quad (2.22)$$

es la fluctuación en la corriente paralela del electrón .

Manheimer y Cook [ 63] calcularon el flujo de calor cuasilineal a través del campo para turbulencia electromagnética sin colisiones y mostraron que, en efecto, la teoría cuasilineal puede

ser utilizada para calcular los flujos de calor anómalo resultantes de las perturbaciones magnéticas.

Hasegawa y Mina [ 64] calculan los coeficientes de transporte cuasilineal resultantes de la turbulencia de las ondas de Alfvén cinéticas. Ellos notaron que el coeficiente de difusión cuasilineal del electrón a través del campo puede ser expresado como una función del campo eléctrico paralelo perturbado  $\tilde{E}_\parallel$ , solamente, es decir no entran otras fluctuaciones ( $\tilde{E}_\perp$ ,  $\tilde{j}_\parallel$  o  $\tilde{B}$ ) dentro de la expresión final. Este resultado fue válido no solamente para la turbulencia de ondas de Alfvén, sino para algunas fluctuaciones electromagnéticas de baja frecuencia ( $\omega - k_\parallel v_e \ll \omega_{ce}$ ) incluyendo ondas de deriva .

Hitchcock [ 65] calcula el coeficiente de difusión espacial cuasilineal resultante de turbulencia electromagnética de baja beta para geometría arbitraria. Para geometría rectangular, electrones no colisionales y razones de crecimiento pequeñas, los autores además notan que la difusión espacial resultante depende solamente de  $\tilde{E}_\parallel$  [ 65].

## b.2) TRANSPORTE ANOMALO DEBIDO A MODOS MICROTEARING.

Los modos de microruptura (microtearing), entendidos como los modos de ruptura (tearing) resistivos MHD de alta  $m$  (número de onda poloidal) son frecuentemente señalados como una fuente de las fluctuaciones magnéticas en los modelos de transporte de campos magnéticos estocásticos . Los modos microtearing son generalmente estables en el régimen sin colisiones ,  $\omega_{ce} > \nu_{e1}$  , pero puede ser inestable en el régimen colisional  $\omega_{ce} < \nu_{e1}$ , si un

gradiente de temperatura está presente [ 66, 67, 68, 69] . Un cálculo numérico hecho por Gladd y colaboradores [ 67] usa un modelo de perfiles que muestra que el modo microtearing inducido por un gradiente de temperatura es linealmente inestable para los parámetros que se encuentran en el interior de tokamaks tales como en Alcator A , Macrotor , y PLT.

En un cálculo analítico no lineal de esta inestabilidad en geometría rectangular, Drake et al.[70] encuentran que el acoplamiento de modos da un flujo de energía espectral que va de números de onda grandes a pequeños. Los números de onda pequeños son linealmente amortiguados . Así ellos obtienen el nivel de saturación al balancear la tasa de crecimiento lineal con el frenado no lineal debido a la transferencia a números de onda pequeños , lo que produce  $b_0 = |\bar{B}_r/B| \cdot r_e/L_T$  , donde  $r_e$  es el radio de giro del electrón. Los autores dan el coeficiente de transporte a través del campo  $\chi_e = b_0^2 \chi_1$  [ 71], que es la difusividad térmica debida a líneas de campo magnético estocástico en el límite de fluido [ ec. (2.23) ]

$$( \chi_e^f = b_0^2 \chi_1 = V_e D_N \lambda_V / L_0 \quad (2.23)$$

$$D_N = \int_0^{\infty} dz \langle b_r(0) b_r(z) \rangle = L_0 b_0^2 \quad (2.24)$$

usando el coeficiente de difusión de campo magnético en el régimen cuasilineal [ec (2.24) ]. La predicción de este cálculo para la conductividad térmica anómala del electrón usando el cálculo teórico del nivel de saturación está dada en la tabla 2 .

### b.3) ESCALAMIENTO DE OHKAWA DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA ANÓMALA.

Ohkawa [ 71] obtiene una ley de escalamiento para la difusividad térmica del electrón anómalo en un tokamak causada por fluctuaciones electromagnéticas turbulentas microscópicas que son producidas por la resonancia del electrón con las ondas. El atribuye el transporte a fluctuaciones magnéticas radiales de dimensiones de escala radial de aproximadamente  $c/w_{pe}$  que permite a los electrones moverse paralelamente al campo magnético total en respuesta al gradiente de temperatura en equilibrio. Un argumento de longitud de mezclado fue usado para estimar el nivel de saturación de las fluctuaciones magnéticas. La expresión para la difusividad térmica del electrón es dada en la tabla 2. El nivel de fluctuaciones magnéticas deberá satisfacer  $\bar{B}_y/B > r_s / (2\pi a)$  para que esta expresión sea válida [ 71].

Así este modelo implica que el transporte es causado no por los modos que dominan las mediciones de fluctuaciones microscópicas, sino por las fluctuaciones de nivel bajo.

Otros modelos electromagnéticos que existen además de los ya mencionados son los de Balloning (de globo) y rippling( o rizo). En los experimentos del tokamak ISX-B [ 42,87,88 ,89 ], existen evidencias de que la conductividad térmica anómala es causada por fluctuaciones microscópicas magnéticas y los cálculos realizados de la conductividad térmica de los electrones anómala con los modos balloning MHD resistivos muestran una buena aproximación con las conductividades observadas [42].

El modo rippling MHD es un modo  $m$  de deriva inestable (con una

$m \approx 5 - 20$  ) debido a una corriente paralela en presencia de resistividad o de un gradiente de temperatura [ 90]. Existen además los modelos basados en campos magnéticos estocásticos que no hacen referencia específica a ningún mecanismo físico para producir la turbulencia. Rosenbluth y colaboradores [ 91] hacen la descripción de uno de ellos al encontrar un coeficiente de difusión para una línea de campo magnético.

TABLA 2.

EXPRESIONES TEORICAS PARA LA DIFUSIVIDAD ANOMALA  $\chi_e$

TEORIA Y MODO

$\chi_e$

Nolting-Nirshmen-Whitson [92]  
Inestabilidad de deriva universal.

$$0.1 \left( \frac{T_e}{T_e + T_i} \right)^4 \left( \frac{n_e}{n_1 \beta_e} \right) \left( \frac{L_e}{L_n} \right)^2 \frac{v_i \rho_i}{L_n}$$

Mahajan [93]  
Inestabilidad de deriva de electrones atrapados.

$$\approx 20-60 \left( \frac{c}{R} \right)^{1/2} \frac{c v_e}{L_e L_n} \frac{\rho_e^2}{\left( \frac{c}{L_n} + v_{\text{eff}} \right)}$$

Simion-Diamond [94] Inestabilidad de deriva disipativa de electrones atrapados

$$\approx (1-10) \left( \frac{r}{R} \right)^2 \frac{v_e^2}{v_{ei}} \left( \frac{c}{L_n v_{ei}} \right)^{1/3} \frac{1}{\omega}^{-7/3}$$

Carreras-Diamond [42] modo ballooning-resistivo.

$$\frac{3}{2} \frac{v_e a q}{S} \left[ \frac{\beta(0)}{C} \frac{q^2}{a} - \frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right]^{3/2}$$

Drake et al. [69] modo microtearing

$$\sim \frac{v_e^2 \rho_e^2}{v_{ei} L_T^2}$$

$$\approx \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_e}{qR} \quad \text{para el caso Ohmico.}$$

Ohkawa [71] fluctuaciones magneticas

$$\frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \left( v_{ei}^2 + \left( \frac{v_e}{qR} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Parall-Pogutse [95] (modos electrostaticos)

$$\frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_e}{qR} \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

Rozhanskii [96] Inestabilidad de deriva de un gradiente de temperatura de los electrones.

$$\frac{c}{\omega_{pe}} \frac{c T_e}{e B a}$$

## CAPITULO III.

### MODELO CUASIELECTROSTATICO

#### A) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

##### a.1) Descripción de la situación física.

Con la intención de describir el fenómeno de transporte anómalo y retomando la idea de que los flujos de partículas, momento y energía son producidos por la interacción de partículas con microturbulencias y con microcampos eléctricos fluctuantes, tomaremos una situación física que nos simule esta interacción.

El planteamiento de la situación física es el siguiente: se considera la interacción de un flujo de partículas con una región en el espacio donde existe una perturbación cuasi-electrostática (ya que consideramos que la componente eléctrica es mayor que la componente magnética por lo que el campo eléctrico  $E$  es el dominante para los cálculos); tomando una forma simplificada de lo anterior estudiaremos la interacción de una partícula con una región de campo eléctrico fluctuante. Tomaremos entonces un sistema de referencia tal que la partícula es la que se desplaza hacia un blanco que es la región de la microturbulencia y que después de interaccionar con la microturbulencia, la partícula es desviada de su trayectoria original, determinando la desviación. Uno de los objetivos entonces es determinar la desviación que sufre la partícula y con ello poder obtener los coeficientes de transporte.

## a.2) DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.

El problema entonces es analizar la interacción de la partícula que se desplaza, con la región de microturbulencia. Para la región de la microturbulencia suponemos que su frontera tiene simetría cilíndrica y las partículas se propagan en un plano perpendicular al eje de simetría de la perturbación por lo que en este plano se vería lo siguiente:

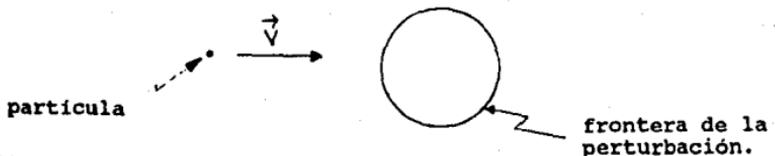


FIG. 3.1. INTERACCIÓN PARTICULA - MICROTURBULENCIA.

La forma escogida para la región de fluctuaciones es la más sencilla que permite simular el efecto de que la interacción onda-partícula no ocurre de la misma manera para todas las partículas. El parámetro de impacto que a fin de cuentas es una cantidad estadística, determina en qué momento se inicia la interacción.

Escojemos un sistema de referencia con origen en el centro de la región de perturbación y consideramos a la microturbulencia como una superposición de un continuo de microcampos eléctricos oscilantes en el espacio y en el tiempo, con distintas frecuencias y longitudes de onda, es decir hacemos una descomposición de Fourier. Para cada modo se tiene

$$\vec{E} = \left[ E_0 \exp(ikx - i\omega t) \right] \hat{y} \quad (3.01)$$

si la velocidad de la partícula antes de la interacción es  $\vec{V} = V_0 \hat{x}$ , podemos esquematizar el encuentro de acuerdo a la figura.(3.2); donde  $L$  es una longitud característica (que se identificará con la longitud de correlación  $L_c$  ( es una cantidad que se obtiene estadísticamente y representa la distancia dentro de la cual las fluctuaciones entre dos puntos son afectados mutuamente, en este sentido es un parámetro máximo de interacción),  $Y_0$  es el equivalente al parámetro de impacto . Para  $Y_0 > L_c$  la partícula no siente el efecto de la microturbulencia.

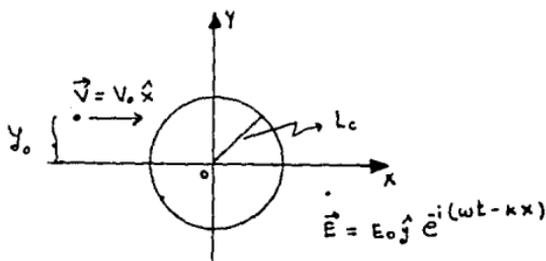


FIG.3.2. SISTEMA DE REFERENCIA ASOCIADO PARA LA INTERACCION PARTICULA-MICROTURBULENCIA.

La ecuación de movimiento es :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E} = \vec{F} \quad (3.02)$$

en  $X_0 < X < L_c$

consideramos que  $X_0 < 0$  como se muestra en la ecuación (3.54), donde  $m$  y  $q$  son la masa y carga de la partícula y  $(X_0, Y_0)$  es el punto donde ésta entra en (o hace contacto con) la región del

campo. Entonces la trayectoria de la partícula es :

$$Y = Y_0 \quad \text{en} \quad -x_0 < X < X_0 \quad (3.03)$$

y dentro de la región del campo sigue una trayectoria gobernada por la ecuación (3.02); para hallar la desviación que sufre la partícula necesitamos encontrar el punto de salida  $(X_s, Y_s)$  del círculo.

Entonces si escribimos la ecuación (3.02) en componentes, usando

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} \quad ; \quad \vec{E} = E_0 \exp(ikx - i\omega t) \hat{j} \quad (3.04)$$

obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= qE_0 \exp(ikx - i\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (3.05)$$

En la dirección x :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dV_x}{dt} = 0 \quad (3.06)$$

$$V_x = \text{cte} = V_0 \quad (3.07)$$

La componente x de la velocidad no varía y es la misma que la que tenía ( $V_0$ ) antes de interactuar con la región del campo.

En la dirección y :

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = qE_0 \exp -i(\omega t - kx) \quad (3.08)$$

tomando la parte real de la relación anterior y usando  $d^2y / dt^2 = V_0^2 y''$  donde la prima representa derivadas con

respecto a X entonces la ecuación (3.08) se transforma en :

$$Y'' = \frac{qE_0}{mV_0^2} \cos(\omega t - kx) \quad (3.09)$$

De la ecuación (3.07) obtenemos que

$$X = X_0 + V_0 t \quad (3.10)$$

y sustituyendo (3.10) en (3.09) resulta lo siguiente:

$$Y'' = \frac{qE_0}{mV_0^2} \cos \left( \left( \frac{\omega}{V_0} - k \right) X - \frac{\omega X_0}{V_0} \right) \quad (3.11)$$

Integrando una vez la ecuación anterior tenemos

$$Y' = Y'_0 + \frac{\Lambda}{\left( \frac{\omega}{V_0} - k \right)} \operatorname{sen} \left( \left( \frac{\omega}{V_0} - k \right) X - \frac{\omega X_0}{V_0} \right) \quad (3.12)$$

La primera condición es que  $Y'(X_0) = 0$  (ya que se supone que las partículas entran horizontalmente a la microturbulencia); esto produce que

$$Y'_0 = \frac{1}{\left( \frac{\omega}{V_0} - k \right)} \Lambda \operatorname{sen}(kX_0) \quad (3.13)$$

si integramos nuevamente obtenemos :

$$Y = Y_1 + Y'_0 X - \frac{1}{\left( \frac{\omega}{V_0} - k \right)^2} \Lambda \cos \left( \left( \frac{\omega}{V_0} - k \right) X - \frac{\omega X_0}{V_0} \right) \quad (3.14)$$

la segunda condición es que :  $Y(X_0) = Y_0$ ; donde  $Y_0 = (L_c^2 - X_0^2)^{1/2}$ .

Si esto se cumple, de la ecuación (3.14) se obtiene que :

$$Y_1 = Y_0 + \frac{A}{\left(\frac{\omega}{V_0} - k\right)} \left( \frac{\cos(kX_0)}{\left(\frac{\omega}{V_0} - k\right)} - X_0 \operatorname{sen}(kX_0) \right) \quad (3.15)$$

sustituyendo (3.13) y (3.15) en la ecuación (3.14) y desarrollando términos obtenemos:

$$Y = Y_0 + \frac{qE_0 \cos(kX_0)}{mV_0^2 \left(\frac{\omega}{V_0} - k\right)^2} - \frac{qE_0 X_0 \operatorname{sen}(kX_0)}{mV_0^2 \left(\frac{\omega}{V_0} - k\right)} + \frac{qE_0 X \operatorname{sen}(kX_0)}{mV_0^2 \left(\frac{\omega}{V_0} - k\right)} - \frac{qE_0}{mV_0^2 \left(\frac{\omega}{V_0} - k\right)^2} \cos \left[ \left( \frac{\omega}{V_0} - k \right) X - \frac{\omega X_0}{V_0} \right] \quad (3.16)$$

si definimos las siguientes cantidades:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{qE_0}{mV_0^2 \left(\frac{\omega}{V_0} - k\right)} ; \quad a_2 = \frac{\omega X_0}{V_0} ; \quad a_3 = \left(\frac{\omega}{V_0} - k\right) \\ a_4 &= Y_0 - a_5 X_0 + a_1 \frac{\cos(kX_0)}{a_3} ; \quad a_5 = a_1 \operatorname{sen}(kX_0) \\ a_6 &= -\frac{a_1}{a_3} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

La ecuación de la trayectoria se convierte en ,

$$Y = a_4 + a_5 X + a_6 \cos(a_3 X - a_2) \quad (3.18)$$

en  $X_0 < X < L_c$

donde  $(X_0, Y_0)$  es el punto de entrada de la partícula y  $L_c$  es la longitud de correlación.

Para hallar el punto de salida  $(X_s, Y_s)$  y por lo tanto la desviación que sufre la partícula, es necesario resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación (3.18) y la ecuación de la frontera de la región de fluctuaciones que es una circunferencia:

$$X^2 + Y^2 = L_c^2 \quad (3.19)$$

si despejamos  $Y$  de (3.19) y se sustituye en (3.18) obtenemos:

$$\pm (L_c^2 - X^2)^{1/2} = a_4 + a_5 X + a_6 \cos(a_3 X - a_2) \quad (3.20)$$

El objetivo es resolver esta última ecuación para  $X$ ; sin embargo como se observa la ecuación es trascendental para resolverla para  $X$ ; de hecho no se puede obtener una expresión explícita analítica para  $X$  en función de las variables  $a_i$ . En la siguiente sección se utilizan algunos métodos para resolver la ecuación (3.20).

B) PLANTEAMIENTO NUMÉRICO.

b.1) Resolución de la ecuación de la trayectoria.

Si resolvemos numéricamente la ecuación (3.20) podemos observar el comportamiento de  $X$  en función de cada uno de los parámetros, así como las desviaciones de su trayectoria, también en función de cada uno de los parámetros que involucra la ecuación (3.20). El primer paso ahora es normalizar la ecuación (3.20) a  $L_c$  para que todas las cantidades puedan ser medidas con respecto a una cantidad fija, de tal forma que queremos hallar las raíces de la siguiente ecuación:

$$F(\hat{X}) = a_4 \frac{1}{L_c} + a_5 \hat{X} + a_6 \frac{1}{L_c} \cos(a_3 L_c \hat{X} - a_2) \mp (1 - (\hat{X})^2)^{1/2} = 0$$

(3.21)

donde 
$$\hat{X} = \frac{X}{L_c} \quad (3.22)$$

recordemos que en  $(X_0, Y_0)$  la partícula "entra" y queremos hallar el punto de salida  $(X_s, Y_s)$ .

Con la finalidad de observar la variación de  $X_s$  y de la derivada de la trayectoria en  $X_s$  como una función de cada uno de los parámetros:  $(\omega, k, V_0, L_c, E_0, Y_0)$ , utilizaremos cantidades normalizadas (denotadas con un gorro) de acuerdo a las relaciones

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 \hat{\omega} & V_0 &= V_0 \hat{V}_0 & k &= k_0 \hat{k} \\ \frac{qE_0}{m} &= C_{01} \hat{E}_0 & L_c &= L_c \hat{L}_c & Y_0 &= L_c \hat{Y}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

donde las cantidades normalizadas son parámetros variables y las letras con subíndice 01 son constantes .

En términos de las variables normalizadas se obtiene que los coeficientes de la ecuación de la trayectoria (3.18) están dados por:

$$a_1 = \frac{C_{01}}{\omega_{01} V_{01}} \frac{\hat{E}_0}{\hat{V}_0^2} \left( \frac{\hat{\omega}}{\hat{V}_0} - \frac{k_{01} V_{01}}{\omega_{01}} \hat{k} \right)^{-1}$$

$$a_2 = \frac{\omega_{01}}{V_{01}} \frac{\hat{\omega}}{\hat{V}_0} X_0$$

$$a_3 L_c = - \frac{\omega_{01} L_{c01}}{V_{01}} \frac{\hat{\omega} \hat{L}_c}{\hat{V}_0} (1 - \hat{Y}_0^2)^{1/2}$$

$$a_5 = a_1 \text{ sen } (k X_0)$$

$$(a_4 / L_c) = \hat{Y}_0 - a_5 \frac{X_0}{L_c} + \frac{a_1}{a_3 L_c} \text{ cos } (k X_0)$$

$$\frac{a_6}{L_c} = - \frac{a_1}{a_3 L_c}$$

(3.24)

Con la finalidad de que todos los términos (las  $a_i$ ) sean del mismo orden hacemos que las constantes sean iguales a 1 , es decir :  $C_1 = C_2 = C_3 = 1$  , donde

$$C_1 = \frac{C_{01}}{\omega_{01} V_{01}} \quad C_2 = \frac{V_{01} k_{01}}{\omega_{01}} \quad C_3 = \frac{\omega_{01} L_{c01}}{V_{01}} \quad (3.25)$$

De las constantes  $C_2$  y  $C_3$  se deduce que:

$$K_{01} L_{c01} = 1 \quad (3.26)$$

y por tanto

$$k X_0 = - K_{01} L_{c01} k \hat{L}_c (1 - \hat{Y}_0^2)^{1/2} = k \hat{L}_c (1 - \hat{Y}_0^2)^{1/2}$$

$$(3.27)$$

Al sustituir el conjunto de ecuaciones (3.24) en la ecuación (3.21) se obtiene una ecuación adimensional cuyos ceros pueden calcularse numéricamente, lo que nos daría la variación de  $X_i$  como una función de cada una de las variables normalizadas  $\xi_i$ , es decir:  $X_i = X_i(\xi_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) [en los apéndices se muestra la estructura de los programas].

Si tomamos ahora la ecuación de la trayectoria, ecuación (3.18) y obtenemos su derivada, obtendremos la pendiente (la desviación) como una función de  $\hat{X}$  es decir:

$$g(\hat{X}) = a_4 \frac{1}{L_c} + a_5 \hat{X} + a_6 \frac{1}{L_c} \cos(a_3 L_c \hat{X} - a_2) \quad (3.28)$$

$$g'(\hat{X}) = a_5 - a_3 a_6 \sin(a_3 L_c \hat{X} - a_2) \quad (3.29)$$

Entonces, sustituyendo la solución de la ecuación (3.21) en la ecuación (3.29) obtenemos la desviación que sufre la partícula en el punto de salida  $\hat{X}_s$ . Se ha desarrollado un programa que implementa este proceso para determinar la variación de  $g'(\hat{X}_s)$  como una función de cada una de las  $\xi_i$  esto es:  $g' = g'(\xi_i)$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ). De esta manera es como podemos obtener información acerca de la desviación que sufre la partícula al variar diversos

parámetros  $(\omega, k, V_0, L_c, E_0, Y_0)$ , cuando variamos las  $\xi_i$  es decir  $f' = f'(\xi_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ )

A partir de lo anterior podemos determinar la probabilidad  $P(\theta)$  de deflexión en forma numérica utilizando el programa para  $X_u$  de la siguiente forma.

La probabilidad  $P(\theta)$  la interpretamos como la fracción de partículas que sale en un intervalo  $(\theta, \theta + d\theta)$ ; entonces podemos lanzar un número  $N$  de partículas contra la región de campo y determinar el número de partículas  $N_p$  que salen a un intervalo  $\theta, \theta + d\theta$  y así determinar  $P(\theta)$ :

$$P(\theta) = \frac{N_p}{N} \quad (3.30)$$

En realidad  $P$  es función de  $\omega, k, V_0, E_0, \theta$ .

En la práctica ( en el programa numérico ) para determinar  $P(\theta)$  se lanzan  $N$  partículas uniformemente distribuidas en  $Y$  contra la región de interacción y se divide el rango de angulos  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  en  $M$  intervalos de tal manera que se determina cuántas partículas caen en cada intervalo.

En la siguiente sección encontraremos los coeficientes de Fokker-Plank  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  en base a la probabilidad obtenida de la forma como se mencionó arriba.

b.2) Cálculo de los coeficientes  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  ;  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$ .

En esta sección utilizaremos los coeficientes de fricción dinámica  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y de difusión en velocidades  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  de una forma similar a como los usa Schmidt [1]

En nuestro esquema de trabajo los coeficientes  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  se calculan como sigue:

Se considera la región:

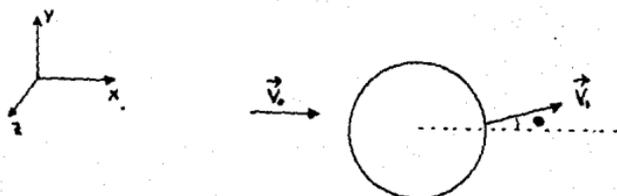


FIG.3.3. DESVIACION SUFRIDA POR LA PARTICULA DESPUES DE LA INTERACCION.

Siendo  $\vec{v}_0$  la velocidad inicial de la partícula y  $\vec{v}_1$  la velocidad final de la partícula ; entonces el cambio  $\Delta \vec{v}$  en la velocidad está dado por:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 \quad (3.31)$$

como el campo eléctrico  $E$  actúa en la dirección  $\hat{y}$ , es decir, ya que  $\vec{E} = [ E_0 \exp (ikX - i\omega t) ] \hat{y}$ ; la componente  $x$  de la velocidad  $\vec{v}_1$  permanece constante , es decir:

$$\vec{v}_1 = |\vec{v}_0| \hat{x} + |\Delta\vec{v}| \hat{y} \quad (3.32)$$

en una forma esquemática :

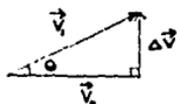


FIG.3.4. RELACION ENTRE LA VELOCIDAD INICIAL ( $\vec{v}_0$ ) Y LA VELOCIDAD FINAL ( $\vec{v}_1$ ).

por lo tanto:

$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_0| \tan(\theta) \quad (3.33)$$

y

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_0| \sec(\theta) \quad (3.34)$$

las componentes de  $\Delta\vec{v}$  son:

$$\Delta v_x = 0 \quad \Delta v_y = |\vec{v}_0| \tan(\theta) \quad (3.35)$$

De acuerdo a lo que se discutió en la sección 2. (cap.I) los coeficientes de Fokker-Planck pueden ser expresados como:

$$\langle A \rangle = \int A |\vec{v}_0| P(\theta, \omega, k) \frac{1}{L_c} \text{ de } dk \text{ de } \omega \quad (3.36)$$

donde  $A$  puede ser  $\Delta\vec{v}$  ó  $\Delta\vec{v} \Delta\vec{v}$ , y  $P(\theta, \omega, k)$  es la función de probabilidad de que una partícula sea deflectada un ángulo  $\theta$ , la cual depende de  $\omega$  y  $k$ . Esto viene de que, para una partícula moviéndose con velocidad  $v_0$ , después de atravesar la región de

fluctuaciones de dimensión  $L_c$ , la probabilidad por unidad de tiempo de que la partícula se defleccione un ángulo  $\theta$  es

$$\frac{V_0}{L_c} \left[ \int P(\theta, \omega, k) d\omega dk \right] d\theta \quad (3.37)$$

Como  $\vec{\Delta V}$  solo tiene componente  $\hat{y}$  entonces obtenemos :

$$\langle \Delta V_y \rangle = \int |V_0|^2 \tan(\theta) P(\theta) \frac{1}{L_c} d\theta dk d\omega \quad (3.38)$$

y para el caso del producto  $\Delta V \Delta V$  la componente  $\hat{y}$  es:

$$\langle \Delta V_y \Delta V_y \rangle = \int |V_0|^3 \tan^2(\theta) P(\theta) \frac{1}{L_c} d\theta dk d\omega \quad (3.39)$$

Las integrales (3.38) y (3.39) estarán normalizadas a  $C = C(\hat{V}_0)$ :

$$C = \int P(\theta) d\theta, \quad (3.40)$$

es decir:

$$\langle \Delta V_y \rangle = \frac{1}{C} \int |V_0|^2 \tan(\theta) P(\theta) \frac{1}{L_c} d\theta dk d\omega \quad (3.41)$$

$$\langle \Delta V_y \Delta V_y \rangle = \frac{1}{C} \int |V_0|^3 \tan^2(\theta) P(\theta) \frac{1}{L_c} d\theta dk d\omega \quad (3.42)$$

En las ecuaciones (3.41) y (3.42) se puede utilizar  $P(\theta)$  calculada numéricamente como en la sección anterior, o con una aproximación analítica como se describe en la sección 3.C.

Una vez que se encuentra  $P(\theta)$ , podemos hacer las integraciones

en  $\omega, k$  y  $\theta$ ; ya que  $P(\theta)$  depende de  $(\omega, k, V_0, E_0, \theta)$ , esto es:

$$P = P(\omega, k, V_0, E_0, \theta). \quad (3.43)$$

Con el fin de incluir el efecto de fluctuaciones turbulentas el valor del campo eléctrico se determina a partir del espectro turbulento, es decir  $E_0 = E_0(\omega, k)$  lo que incluye en las integraciones sobre  $\omega$  y  $k$ , haciendo así la superposición pesada de los diferentes modos de Fourier. La forma del espectro se obtuvo del artículo de Levinson S.T. y colaboradores [73] de los experimentos realizados en el Tokamak Pretext, en particular se utilizó la forma:

$$E_0 = A (\omega)^\alpha (k)^\beta \quad (3.44)$$

donde  $\alpha, \beta$  y  $A$  se determinan directamente de las gráficas experimentales en función de  $\omega$  y  $k$ . Entonces:  $P = P(\omega, k, V_0, E_0(\omega, k), \theta)$  y la integral (3.38) se convierte en:

$$\langle \Delta V_y \rangle = \frac{|\vec{V}_0|^2}{L_c} \int \tan(\theta) P(\theta, |V_0|) d\theta \quad (3.45)$$

donde:  $P(\theta, |V_0|) = \frac{1}{C} \iint P(\omega, k, V_0, E_0(\omega, k), \theta) d\omega dk \quad (3.46)$

y

$$P(\omega, k, V_0, E_0(\omega, k), \theta) = \frac{N_p}{N} (\omega, k, |V_0|, E_0(\omega, k), \theta) \quad (3.47)$$

en forma análoga:

$$\langle \Delta V_y \Delta V_y \rangle = \frac{|\vec{V}_0|^3}{L_c} \int \tan^2(\theta) P(\theta, |\vec{V}_0|) d\theta \quad (3.48)$$

Entonces dadas las ecuaciones (3.47), (3.46), (3.38) y (3.39) podemos instrumentar un programa que nos calcule numéricamente  $\langle \Delta V_y \rangle$  y el producto  $\langle \Delta V_y \Delta V_y \rangle$ . Estos coeficientes serán funciones de  $|\vec{V}_0|$ , de tal manera que podemos observar gráficamente la dependencia de  $\langle \Delta V_y \rangle$  con  $|\vec{V}_0|$  y de  $\langle \Delta V_y \Delta V_y \rangle$  con  $|\vec{V}_0|$ .

C ) LA APROXIMACIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO  $\vec{E}$  DÉBIL.

c.1) Resolución de la ecuación de la trayectoria.

En esta parte utilizaremos la aproximación de que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es pequeño para hallar una solución analítica a la ecuación (3.20) y con ello hallar la desviación que sufre la partícula. Con ello se determinará la función de distribución de probabilidad, por un método independiente al de la sección anterior y así tener una prueba de consistencia.

Primero reescribiremos la ecuación a resolver de una forma más apropiada.

Retomando la ecuación (3.21) normalizada:

$$\pm(1 - (\frac{X}{L_c})^2)^{1/2} = a_4 \frac{1}{L_c} + a_5 \frac{X}{L_c} + a_6 \frac{1}{L_c} \cos(a_3 X - a_2) , \quad (3.21)$$

sea:

$$\hat{X} = \frac{X}{L_c} ; \quad \hat{Y}_0 = \frac{Y_0}{L_c} ; \quad \hat{X}_0 = \frac{X_0}{L_c} . \quad (3.49)$$

entonces la ecuación para  $a_4/L_c$  se transforma en:

$$\frac{a_4}{L_c} = \hat{Y}_0 - a_1 \hat{X}_0 \operatorname{sen}(kX_0) + \frac{a_1}{a_3 L_c} \cos(kX_0) . \quad (3.50)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.21) obtenemos:

$$\begin{aligned} \pm(1 - \hat{X}^2)^{1/2} &= \hat{Y}_0 - a_1 \hat{X}_0 \operatorname{sen}(kX_0) + \frac{a_1}{a_3 L_c} \cos(kX_0) \\ &+ a_5 \hat{X} + \frac{a_6}{L_c} \cos(a_3 L_c \hat{X} - a_2) . \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ahora definimos :

$$\left. \begin{aligned}
 A &= -a_1 \hat{X}_0 \operatorname{sen}(kX_0) + \frac{a_1}{a_3 Lc} \cos(kX_0) \\
 B &= a_5 = a_1 \operatorname{sen}(kX_0) \\
 C &= \frac{a_6}{Lc} \\
 D &= a_3 Lc \\
 E &= -a_2
 \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

y la ecuación (3.51) queda como sigue :

$$\pm(1 - \hat{X}^2)^{1/2} = \hat{Y}_0 + A + B \hat{X} + C \cos(D\hat{X} + E), \quad (3.53)$$

como  $(X_0, Y_0)$  es el punto de entrada de la partícula, satisface la relación :  $(X_0)^2 + (Y_0)^2 = Lc^2$ .

Entonces, para las variables normalizadas

$$\hat{X}_0 = - (1 - (\hat{Y}_0)^2)^{1/2}. \quad (3.54)$$

El signo negativo proviene del hecho de que se considera que las partículas entran por la izquierda del eje Y.

En la aproximación de campo eléctrico débil; la partícula casi no se va a desviar de su trayectoria inicial. Esto puede verse de la ecuación (3.53) notando que los coeficientes A, B y C son proporcionales a  $|\vec{E}|$  y por lo tanto muy pequeños.

Utilizaremos un método perturbativo para resolver la ec (3.53) en un campo eléctrico débil. Si no existe campo eléctrico, la coordenada Y del punto de salida será la misma que la de entrada, por lo que a orden cero en la magnitud del campo

$$\hat{X}_n = -\hat{X}_0 \quad (3.55)$$

donde  $\hat{X}_0 < 0$ .

A primer orden escribimos

$$\hat{X}_n = \hat{X}_0 + c X_1 \quad (3.56)$$

donde  $c$  es un parámetro muy pequeño; sustituyendo (3.56) en la ecuación (3.53) para hallar la coordenada  $\hat{X}_n$ , del punto de salida obtenemos:

$$\begin{aligned} \pm [1 - (\hat{X}_n + c X_1)^2]^{1/2} &= \hat{Y}_0 + A + B (\hat{X}_n + c X_1) \\ &+ C \cos(D (\hat{X}_n + c X_1) + E) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Hay que tomar en cuenta además que  $A$ ,  $B$  y  $C$  son del orden de  $c$  debido a que contienen el término  $a_1$  que es proporcional al campo eléctrico; entonces desarrollando la ecuación anterior tenemos:

$$\pm [1 - (\hat{X}_n)^2 - 2cX_1\hat{X}_n]^{1/2} = \hat{Y}_0 + A + B \hat{X}_n + C \cos(D \hat{X}_n + E) \quad (3.58)$$

El lado izquierdo de la igualdad anterior se puede escribir como:

$$\pm [1 - (\hat{X}_n)^2 - 2cX_1\hat{X}_n]^{1/2} = \pm (1 - (\hat{X}_n)^2)^{1/2} \left[ 1 - \frac{2cX_1\hat{X}_n}{1 - (\hat{X}_n)^2} \right]^{1/2} \quad (3.59)$$

ya que  $\frac{2cX_1\hat{X}_n}{1 - (\hat{X}_n)^2}$  es pequeño; hacemos un desarrollo binomial:

$$\left[ 1 - \frac{2c X_1 \hat{X}_0}{1 - (\hat{X}_0)^2} \right]^{1/2} = 1 - \frac{c X_1 \hat{X}_0}{1 - (\hat{X}_0)^2} \quad (3.60)$$

Sustituyendo (3.60) y (3.59) en (3.58) resulta:

$$(1 - (\hat{X}_0)^2)^{1/2} \mp \frac{c X_1 \hat{X}_0}{(1 - (\hat{X}_0)^2)^{1/2}} = \hat{Y}_0 + A + B \hat{X}_0 + C \cos(D\hat{X}_0 + E) \quad (3.61)$$

Puesto que  $\hat{X}_1 = -\hat{X}_0$  entonces  $\hat{Y}_0 = \pm(1 - (\hat{X}_0)^2)^{1/2}$  y eliminando (c); obtenemos

$$X_1 = \mp [A + B \hat{X}_0 + C \cos(D\hat{X}_0 + E)] \frac{(1 - (\hat{X}_0)^2)^{1/2}}{\hat{X}_0} \quad (3.62)$$

De aquí obtenemos una expresión para el punto de salida  $\hat{X}_1 = \hat{X}_0 + X_1$  en términos de  $\hat{X}_0$ , ya que  $\hat{X}_1 = -\hat{X}_0$ ,

$$\hat{X}_1 = \mp [A + B \hat{X}_0 + C \cos(D\hat{X}_0 + E)] \frac{(1 - (\hat{X}_0)^2)^{1/2}}{\hat{X}_0} + \hat{X}_0 \quad (3.62)$$

La desviación que sufre la partícula se obtiene de la pendiente de la trayectoria en el punto de salida. Siendo:  $Y = \hat{Y}_0 + A + B \hat{X}_0 + C \cos(D\hat{X}_0 + E)$  la ecuación de la trayectoria; entonces:

$$\tan(\theta) = \frac{dY}{d\hat{X}} \bigg|_{\hat{X}_0} = B - DC \sin(D\hat{X}_0 + E) \quad (3.63)$$

Ahora nos interesa encontrar la función de distribución de

probabilidad  $P(\theta)$  de que las partículas salgan a un ángulo  $(\theta)$ . Para ello utilizaremos las últimas dos ecuaciones (3.62) y (3.63).

Sea  $N$  el número de partículas total que se lanzan contra la región de interacción distribuidas uniformemente en  $Y$ ; entonces la distribución de probabilidad la definimos por

(\*)  $N P(\theta) d\theta$  = El número de partículas dispersadas en el intervalo  $(\theta, \theta + d\theta)$ .

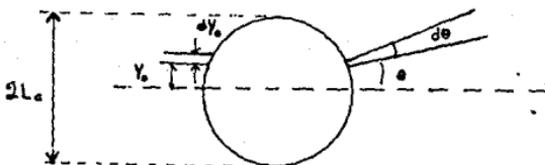


FIG. 3.5. DISPERSION ( EN UN INTERVALO  $\theta, \theta + d\theta$  ) DE PARTICULAS INCIDENTES ( EN UN INTERVALO  $Y_0, Y_0 + dY_0$  ).

Para determinar el rango de parámetros del cual provienen las partículas dispersadas en el intervalo  $(\theta, \theta + d\theta)$  se define de acuerdo con la fig (3.5)

(\*\*)  $N \left[ \frac{dY_0}{2 L_c} \right]$  = El número de partículas incidentes en el intervalo  $( Y_0, Y_0 + dY_0 )$  correspondientes a las que son dispersadas en  $(\theta, \theta + d\theta)$  .

Puesto que las dos cantidades (\*) y (\*\*) están relacionadas a través de la conservación de partículas, éstas deben ser iguales, de donde se obtiene que :

$$P(\theta) = \frac{1}{2 L_c} \left| \frac{dY_0}{d\theta} \right| . \quad (3.64)$$

El problema ahora se concreta a calcular  $d\theta / d\hat{Y}_0 = 1 / (d\hat{Y}_0/d\theta)$ ; para ello utilizaremos la ecuación (3.63), de manera que :

$$\frac{d\theta}{d\hat{Y}_0} = \frac{1}{\sec^2(\theta)} \left[ \frac{dB}{d\hat{Y}_0} - \frac{d}{d\hat{Y}_0} ( DC \operatorname{sen} ( D\hat{X}_s + E ) ) \right] . \quad (3.65)$$

Si utilizamos las ecuaciones (3.54) y (3.62) y los conjuntos de relaciones (3.52) y (3.17) obtenemos las siguientes derivadas después de realizar toda el álgebra:

$$\frac{dB}{d\hat{Y}_0} = - a_1 k L_c \frac{\hat{Y}_0}{\hat{X}_0} \cos(k L_c \hat{X}_0) , \quad (3.66)$$

$$\frac{d}{d\hat{Y}_0} ( DC \operatorname{sen}( D\hat{X}_s + E ) ) = DC \cos( D\hat{X}_s + E ) \left[ D \frac{d\hat{X}_s}{d\hat{Y}_0} + \frac{dE}{d\hat{Y}_0} \right] , \quad (3.67)$$

$$\frac{dE}{d\hat{Y}_0} = \frac{\omega L_c}{V_0} \frac{\hat{Y}_0}{\hat{X}_0} , \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}_s}{d\hat{Y}_0} = \frac{\hat{Y}_0}{\hat{X}_0} \left[ 1 + \frac{\hat{X}_s - \hat{X}_s}{\hat{X}_0 (\hat{Y}_0)^2} + 2 k a_1 Y_0 \cos(k X_0) + \frac{\hat{Y}_0}{\hat{X}_0} B \left( 2 + \frac{k}{a_3} \right) \right. \\ \left. - C \frac{\hat{Y}_0}{\hat{X}_0} \left( D + \frac{\omega L_c}{V_0} \right) \operatorname{sen} ( \hat{D}X_s + E ) \right] , \quad (3.69) \end{aligned}$$

La probabilidad  $P(e)$  dada por la ecuación (3.64) y de las ecuaciones (3.66) a (3.69) debe ser una función de  $e$  además de los parámetros  $(\omega, k, V_0, L_c, E_0)$ . Para ello es necesario expresar  $Y_0$ , que aparece en las relaciones (3.66) a (3.69) como función de  $e$ , a partir de las ecuaciones (3.62) y (3.63). Sustituyendo  $\hat{X}_s$ , (ec.(3.62)) en la ecuación (3.63), obtenemos:

$$\tan(e) = a_1 \operatorname{sen}(kX_0) + a_1 \operatorname{sen} \left[ a_3 L_c \left( \hat{X}_s - [A + B\hat{X}_s + C \cos(D\hat{X}_s + E)] \frac{(1 - (\hat{X}_s)^2)^{1/2}}{\hat{X}_s} \right) - a_2 \right], \quad (3.70)$$

donde se utilizaron además las relaciones (3.52).

Cuando se sustituyen las derivadas (3.65) a (3.69) en la relación para la probabilidad (3.64) calculada como  $1/(de/d\hat{Y}_0)$  y luego se sustituye  $\hat{Y}_0(e)$  obtenida de las raíces de la ecuación (3.70), se introduce mucha incertidumbre cuando se realizan los cálculos numéricos, de manera que una forma alternativa para calcular la probabilidad  $P(e)$  es calcular directamente la derivada  $d\hat{Y}_0/de$  tal y como aparece en la ec.(3.64) a partir de  $\hat{Y}_0(e)$  [la razón por la que se había calculado antes la probabilidad usando  $de/d\hat{Y}_0$  es que se podían obtener directamente las derivadas de la ec.(3.63)].

Para calcular la probabilidad como  $d\hat{Y}_0/de$  se necesita conocer  $Y_0$  como función del ángulo  $e$  que estaría dada por la ec.(3.70). Independientemente de que la ecuación es implícita para  $Y_0$ ,

solamente se necesitan conocer las raíces ( $Y_0$ ) de la ec.(3.70) para un ángulo dado para poder calcular la probabilidad  $P(\theta)$ , de manera que se siguió este camino haciendo las siguientes consideraciones:

Se necesita obtener  $Y_0 = Y_0(\theta)$  para después derivar en  $\theta$ ; sin embargo la función  $Y_0 = Y_0(\theta)$  es multivaluada, ya que puede suceder que para un mismo ángulo  $\theta$  (ángulo con el que salen las partículas de la región de campo) existan varios valores para  $Y_0$ ; por lo que habría que considerar todas las ramas en las cuales exista un valor para  $Y_0$  a un ángulo ( $\theta$ ) dado; esto sería equivalente a considerar todas las raíces [ las raíces se calculan numéricamente ] de la ecuación (3.70) para una ( $\theta$ ) dada y por lo tanto obtendríamos todas las  $Y_0$  correspondientes.

La probabilidad, considerando lo anterior, tendría que modificarse:

$$P(\theta) = \sum_r P(\theta, Y_{\theta r}) \quad (3.71)$$

donde  $r$  indica la suma sobre cada una de las ramas; es decir sobre cada una de las raíces de la ecuación (3.70) para una  $\theta$  dada, y donde

$$P(\theta, Y_{\theta r}) = \frac{1}{2} \left| \frac{d\hat{Y}_0}{d\theta} \right| \quad (3.72)$$

es en realidad la ecuación (3.64) para una raíz  $\hat{X}_0$  de la ecuación (3.70).

La probabilidad de la ecuación (3.71) representa la

contribución de todas las  $Y_0 > 0$  que salen a un ángulo ( $\theta$ ); para obtener la probabilidad  $P_T(\theta)$  total se debe de considerar además la contribución cuando  $Y_0 < 0$ ; entonces la probabilidad total sería:

$$P_T(\theta) = P_+(\theta) + P_-(\theta)$$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA (3.73)

donde:

$P_+(\theta)$  representa la ec. (3.71) para las  $Y_0 > 0$

$P_-(\theta)$  representa la ec. (3.71) para las  $Y_0 < 0$

El principal problema es entonces calcular las raíces de la ecuación (3.70) para lo cual se ha instrumentado un programa numérico que se describe en el Apéndice B.

En resumen se tiene que la probabilidad total es:

$$P_T(\theta) = P_+(\theta) + P_-(\theta)$$

donde:

$$P_+(\theta) = \sum_r P(\theta, Y_{\theta r}) \quad \text{para } Y_0 > 0$$

$$P_-(\theta) = \sum_r P(\theta, Y_{\theta r}) \quad \text{para } Y_0 < 0$$

siendo:

$$P(\theta, Y_{\theta r}) = \frac{1}{2} \left| \frac{d\hat{Y}_0}{d\theta} \right|$$

donde  $\hat{Y}_0$  y  $\hat{X}_0$  son funciones de  $(\omega, k, V_0, \theta)$  que se determinan a partir de las raíces de la ecuación (3.70) y de la relación:

$$(\hat{X}_0)^2 + (\hat{Y}_0)^2 = 1$$

Con esta expresión para la probabilidad  $P_T(\theta)$  se puede proceder a obtener los coeficientes  $\langle \Delta V \rangle$  y  $\langle \Delta V \Delta V \rangle$  de la

misma manera que se hizo en la sección anterior ; a partir de las ecuaciones (3.41) y (3.42) .

Cabe hacer notar la diferencia entre el cálculo numérico de la sección (b.1) y el de esta sección; la diferencia principal se refiere a la probabilidad que se utilizó en (b.1) la cual se calcula, en un caso en forma numérica a través de lanzar un flujo de partículas  $N$  contra la zona de fluctuaciones y determinar la fracción de partículas que salen a un determinado ángulo ( esto se hace en un programa) . En el otro caso ( que es descrito en esta sección), se obtuvo mediante aproximaciones al campo eléctrico  $E$  al considerar que éste era débil (y utilizando además la teoría de dispersión, es decir calculando una distribución angular de partículas dispersadas).

Al igual que en la sección anterior  $\langle \Delta V_y \rangle$  y  $\langle \Delta V_y \Delta V_y \rangle$  son funciones de la velocidad inicial  $|V_0|$  , que se obtienen en el siguiente capítulo.

## CAPITULO IV.

### ANALISIS DE RESULTADOS

#### A) LA APROXIMACIÓN NUMÉRICA.

Los cálculos realizados para la aproximación numérica estuvieron basados en dos programas. El primero de ellos [ que le llamaremos INTERACCIÓN ) nos calcula la probabilidad  $P = P(\theta, V_0)$ , es decir calcula la probabilidad  $P(\theta, \omega, k, V_0)$  como se definió al final de la sección b.1 del capítulo III , luego integra en  $\omega$  y  $k$  obteniendo  $P = P(\theta, V_0)$ . El segundo programa (que le llamaremos INTEGRACIÓN ) integra la probabilidad  $P(\theta, V_0)$  obtenida del programa INTERACCIÓN en el ángulo  $\theta$  , después de multiplicar  $P(\theta, V_0)$  por  $V_0^2 \tan(\theta)$  y  $V_0^3 \tan^2(\theta)$  tal y como se calcula en la sección b.2 del tercer capítulo, para obtener finalmente los coeficientes  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  según las relaciones (3.45) y (3.48) de dicha sección.

En el primer programa (INTERACCIÓN), para obtener la variación en  $\omega$  ,  $k$  y  $V_0$  se manejaron las cantidades normalizadas  $\hat{\omega}$  ,  $\hat{k}$  ,  $\hat{V}_0$ , como se definieron en la sección b.1 . Las cantidades a las que se normalizaron fueron  $\omega_{01}$ ,  $k_{01}$  y  $V_{01}$  con los siguientes valores :

$$\begin{aligned}\omega_{01} &= 1. \times 10^7 && \text{seg}^{-1} \\ k_{01} &= 1. \times 10^{-1} && \text{cm}^{-1} \\ V_{01} &= 1. \times 10^8 && \text{cm seg}^{-1}\end{aligned}$$

que satisfacen la condición de que  $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ , es decir las ecuaciones (3.25) y (3.26) y que además son valores característicos en plasmas confinados magnéticamente en aparatos de fusión termonuclear.

El rango de variación (dividido en 20 intervalos) de  $\omega$  y  $k$  se obtuvo de la forma del espectro para  $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_0(\omega, k)$  [73] ec (3.44) donde:

$$\alpha = \begin{cases} 0.01745 & (15.849)2\pi < \omega < (31.623)2\pi \text{ KHz} \\ -1.66428 & (31.623)2\pi < \omega < (500.0)2\pi \text{ KHz} \end{cases}$$

y

$$\beta = \begin{cases} 0.14410 & 0.233 < k < 0.700 \text{ cm}^{-1} \\ -0.44523 & 0.700 < k < 1.513 \text{ cm}^{-1} \\ -1.60033 & 1.513 < k < 7.00 \text{ cm}^{-1} \end{cases}$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  han sido definidos en la ecuación (3.44).

El rango de variación (dividido en 20 intervalos) de  $V_0$  se obtuvo al considerar una velocidad característica en plasmas y luego determinar hasta que velocidad se tenía una variación apreciable en la deflexión de la trayectoria de una partícula prueba, siendo este de:

$$0.25 \times 10^8 < V_0 < 5.25 \times 10^8 \text{ cm seg}^{-1}$$

El rango de ángulos se determinó para cada velocidad, encontrando el ángulo máximo de desviación y luego dividiendo en

100 intervalos cada rango , siendo el máximo rango de aproximadamente  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  . El ángulo máximo se obtiene a partir de la ecuación para el ángulo (3.70) al variar el rango de  $\omega$  y  $k$  .

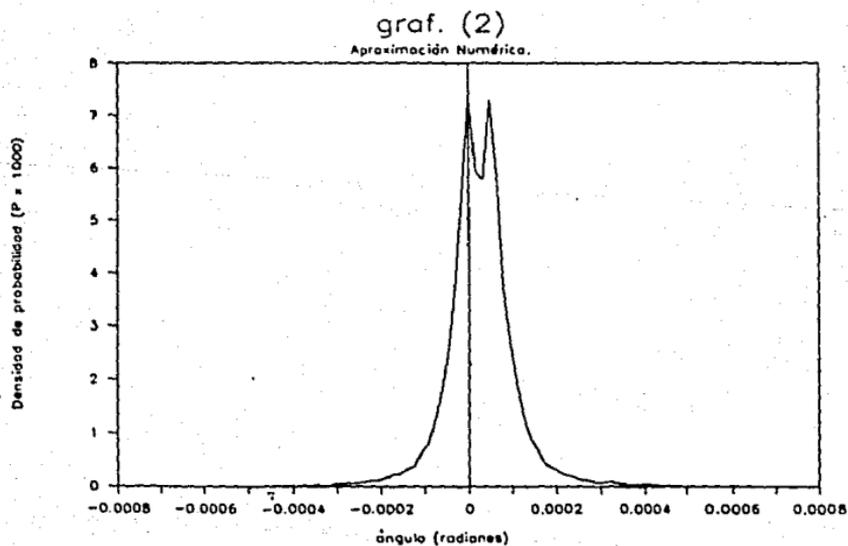
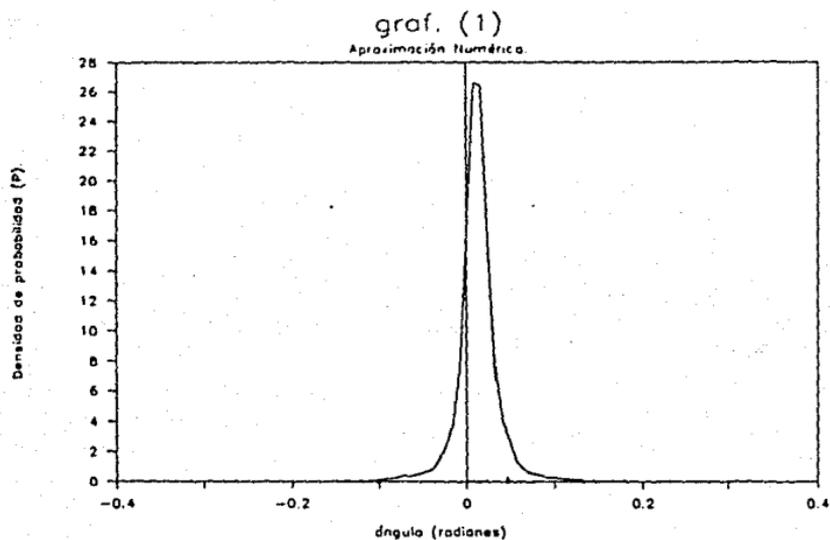
En base a los datos anteriores se obtuvo la densidad de probabilidad  $P = P(\theta, V_0)$  (ec. 3.46). Como muestra representativa de la variación resultante de  $P(\theta, V_0)$  como función del ángulo  $\theta$  , se dan solamente dos gráficas de  $P(\theta, V_0)$  para dos velocidades características ( $.25 \times 10^8$  cm  $\text{seg}^{-1}$  y  $5.00 \times 10^8$  cm  $\text{seg}^{-1}$  ) que son los extremos del rango de variación de la velocidad en la fig 4.1.

Como comentario a las gráficas (1) y (2) de la fig 4.1 , observemos en la gráfica (1) la concentración de puntos ( $P$  con un máximo ) cerca del origen ( $\theta = 0$ ) y  $P$  decreciendo hacia los extremos , esto va de acuerdo con lo que esperábamos con respecto a que las deflexiones que sufren las partículas fueran pequeñas.

La gráfica (2), nos muestra que para velocidades grandes la densidad de probabilidad  $P(\theta, V_0)$  alrededor de cero es mucho más grande que para velocidades pequeñas , como se muestra en la gráfica (1) ; esto va de acuerdo con lo esperado ya que para velocidades grandes de las partículas, la región de microturbulencia casi no afecta a la trayectoria de dichas partículas (suponiendo que las partículas entran a la región de microturbulencia con una pendiente cero, como se menciona en la sección b.1 del capítulo III).

Los coeficientes de Fokker-Planck  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  , debido a la simetría del problema (sección b.2 cap.III) sólo tienen

fig.4.1 Densidad de probabilidad (Aprox. numérica) con velocidades  $V = (0.25 \text{ (graf.1) y } 5.25 \text{ (graf.2) } \times 10^8 \text{ cm seg}^{-1} \text{ )}$ .



componente  $\hat{y}$ , es decir  $\Delta\vec{v} = \hat{y} \Delta v_y$  y  $\Delta\vec{v}\Delta\vec{v} = \Delta v_y \Delta v_y \hat{y} \hat{y}$ . Estos se determinan al integrar la densidad de probabilidad  $P(e, V_0)$  en el ángulo pesada por una función de  $e$  (ec.(3.45) y (3.48)). Para esta parte se utiliza el programa INTEGRACIÓN. Los extremos de integración, las constantes de normalización, los intervalos y los rangos de variación son los mismos que se establecieron al comienzo de esta sección, obteniéndose las dependencias de  $\langle \Delta v_y \rangle$  y  $\langle \Delta v_y \Delta v_y \rangle$  (con  $\hat{V}_0$ ) que aparecen en la fig 4.2.

Con respecto a la gráfica de  $\langle \Delta v_y \rangle$  vs.  $\hat{V}_0$  se puede observar que a velocidades pequeñas  $\langle \Delta v_y \rangle$  es grande y que a velocidades grandes  $\langle \Delta v_y \rangle$  es pequeña, esto en principio se debe al tiempo en que interactúa la partícula con la región de microturbulencia, sin embargo en promedio se debe esperar que  $\langle \Delta v_y \rangle \approx 0$ , debido a que no hay razón para que la partícula sea deflectada preferencialmente hacia  $Y > 0$  o  $Y < 0$ . Las discrepancias de este valor serían debidas a errores numéricos en los cálculos que en realidad son determinantes en los valores que aparecen en la gráfica.

En cuanto a la gráfica de  $\langle \Delta v_y \Delta v_y \rangle$  vs.  $\hat{V}_0$  podemos apreciar una dependencia que varía inversamente con la velocidad, de tal manera que a velocidades pequeñas  $\langle \Delta v_y \Delta v_y \rangle$  es grande y conforme  $\hat{V}_0$  crece  $\langle \Delta v_y \Delta v_y \rangle$  disminuye tendiendo a cero para velocidades grandes. Este comportamiento de  $\langle \Delta v_y \Delta v_y \rangle$  es el esperado cualitativamente ya que a velocidades pequeñas de las partículas existe más tiempo durante el cual las partículas interaccionan con la microturbulencia y por lo tanto mayor probabilidad de deflexión

fig.4.2 Coeficiente de Fricción Dinámica y de Dispersión para la Aproximación numérica.

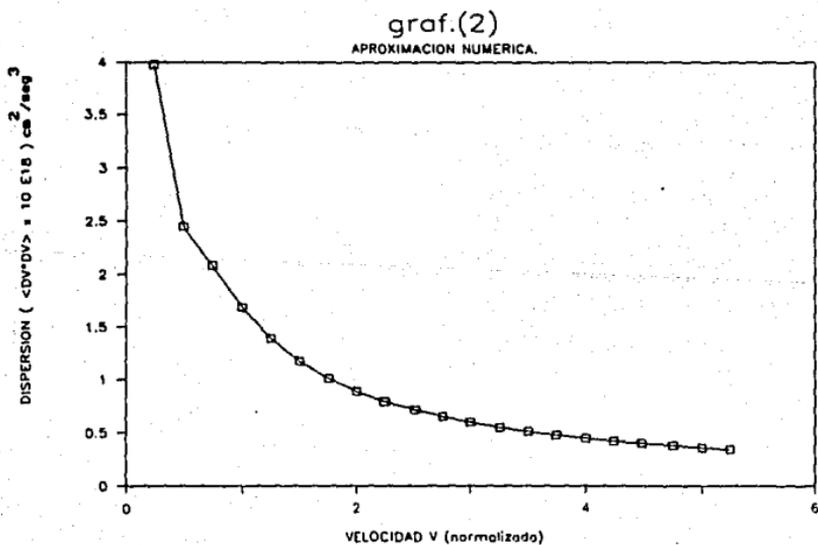
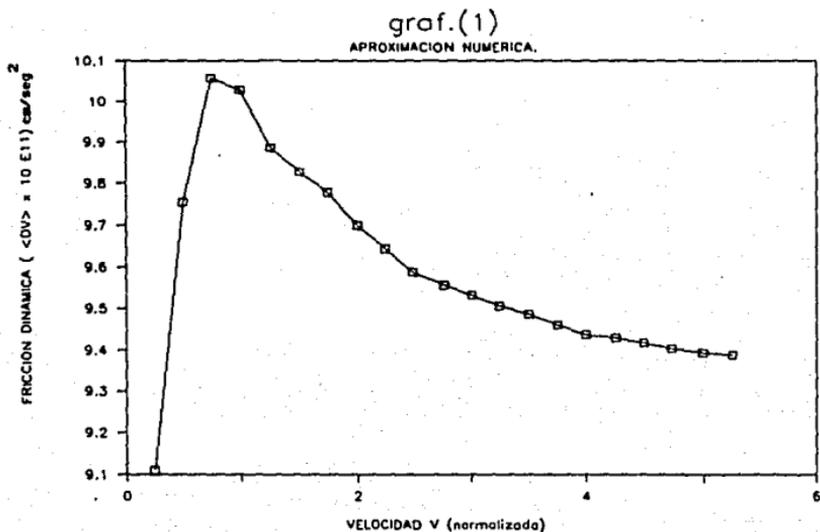
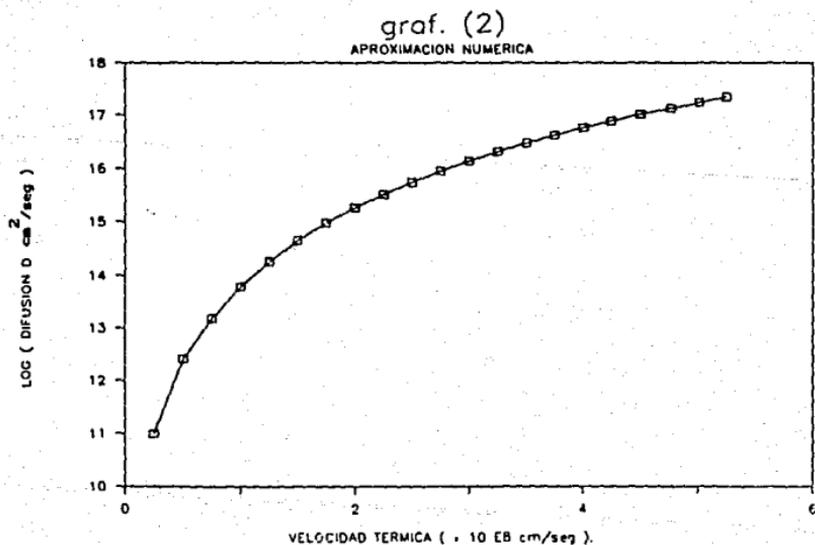
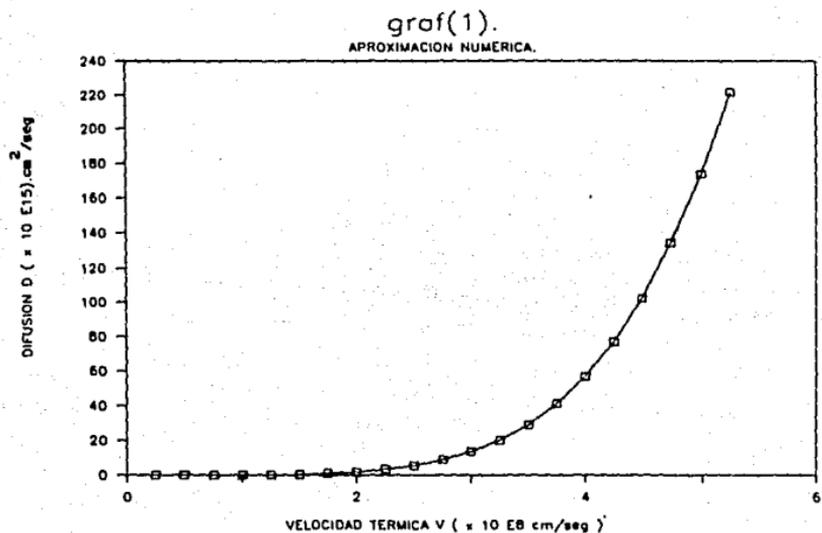


fig.4.3 Coeficiente de Difusion (Aprox. numerica) ; escala  
 . lineal (graf. 1) y logaritmica (graf. 2).



de la trayectoria original , ocurriendo lo contrario para velocidades grandes , es decir menor tiempo de interacción con la región de microturbulencia y por lo tanto menor probabilidad de deflexión. Cabe recordar que  $\langle \Delta v_y \Delta v_y \rangle$  nos mide la dispersión que tienen las partículas.

Los coeficientes de difusión  $D$  y de conductividad térmica  $\chi$  se calculan en base a las relaciones (1.46) y (1.47) al considerar que  $t_c = t_d$  ( $t_c$  es el tiempo de colisión y  $t_d$  es el tiempo de deflexión) . Por esta razón en la figura 4.3 se muestra sólo una función que representa a  $D$  , en escalas lineal y logarítmica.

El coeficiente de difusión y de conductividad térmica son iguales en esta descripción debido a que la interacción en este caso no es entre partículas (ión-electrón , electrón-electrón o ión-ión) , sino entre una partícula ya sea ión ó electrón y la subregión de microturbulencia , en este sentido es que no se considera el factor  $m_e/m_i$  en la relación para la difusión y la conductividad térmica.

La conductividad eléctrica  $\sigma$  en este caso se considera infinita ya que en el cálculo con la relación (1.37)  $\Delta v_x$  es  $\Delta v_x$  , es igual a cero, debido a que la componente  $\hat{x}$  de la velocidad no cambia. Es decir, la componente  $\hat{x}$  de la fricción dinámica es cero.

#### B) LA APROXIMACIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ DÉBIL .

En este enfoque alternativo se encuentra al igual que en la sección anterior la probabilidad  $P(e, \omega, k, V_0)$  utilizando para

ello la aproximación de campo eléctrico débil para hallar el punto de salida (de la subregión de microturbulencia) de las partículas. Este enfoque utiliza un programa numérico (llamado COLISIÓN) para hallar la probabilidad como se definió en la sección c.1 (cap. III), es decir como  $P = \frac{1}{2} d\hat{y}_0 / de$ . Este programa además integra  $P(\omega, k, e, V_0)$  en  $\omega$  y  $k$  obteniéndose la probabilidad  $P(e, V_0)$ .

Los valores que utiliza el programa COLISIÓN para la variación en  $\omega$ ,  $k$ ,  $V_0$  y  $e$  son los mismos que se utilizaron para el programa INTERACCIÓN, contemplando las constantes de normalización, el tamaño de los intervalos, el rango de variación y la forma del espectro para  $\bar{E}_0(\omega, k)$ . Una de las diferencias entre el programa INTERACCIÓN y el COLISIÓN es la forma como se calcula la probabilidad  $P(e, \omega, k, V_0)$ . En el caso del programa INTERACCIÓN (sección anterior) se calcula como  $P = N_p / N$  (siendo  $N_p$  el número de partículas que sale a un determinado ángulo y  $N$  el número de partículas total incidente); para el caso del programa COLISIÓN, la probabilidad se calcula como  $P = \frac{1}{2} d\hat{y}_0 / de$  (siendo  $V_0$  la coordenada  $\hat{y}$  del punto de entrada de las partículas a la región de fluctuaciones).

En la figura 4.4.a se muestran dos gráficas ( $V = .25 \times 10^8$  y  $V = 5.25 \times 10^8$  cm seg<sup>-1</sup>) representativas de la densidad de probabilidad  $P(e, V_0)$  (ec. 3.46) obtenidas siguiendo la metodología descrita en esta sección. Se dan además otras dos gráficas ( $V = .5 \times 10^8$  y  $V = 5.25 \times 10^8$  cm seg<sup>-1</sup>) (fig.4.4 b) como comparación con las de la fig.4.4.a.

Como se puede apreciar de las gráficas, éstas tienen la misma forma cualitativa que las obtenidas en la sección (A), es decir

fig.4.4.a Densidad de probabilidad (Aprox. E débil) con velocidades  
 $V = (0.25 \text{ (graf.1) y } 5.25 \text{ (graf.2) } \times 10^8 \text{ cm seg}^{-1})$ .

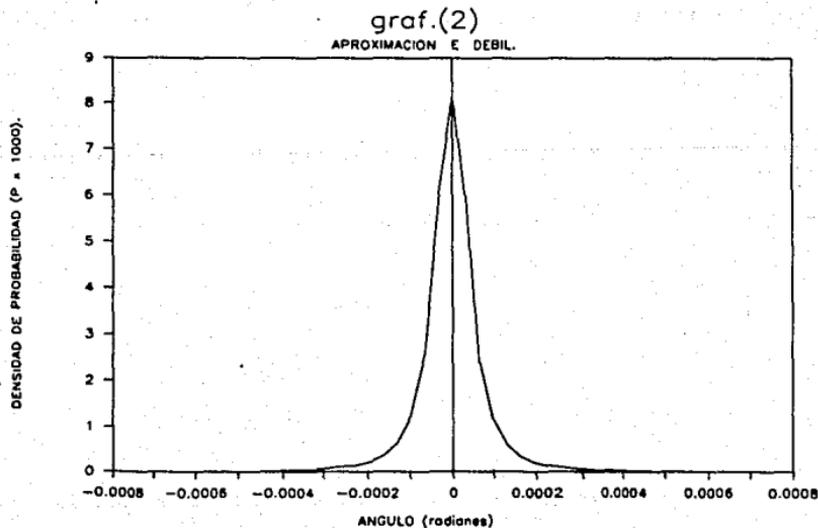
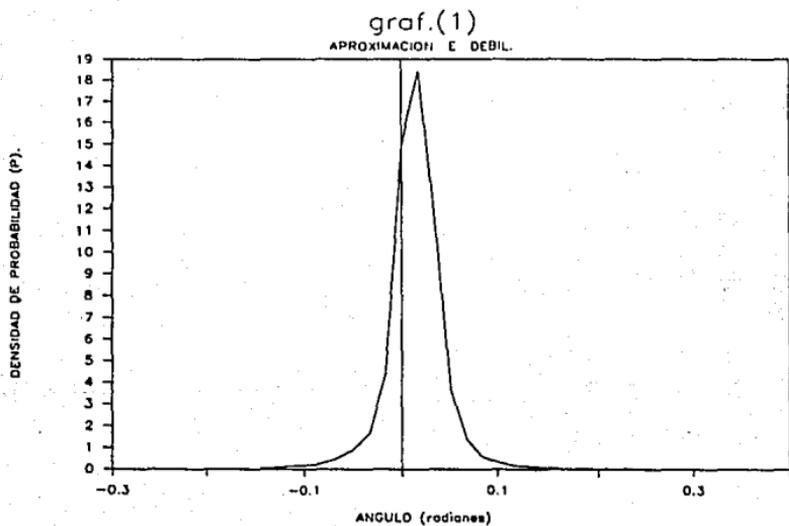
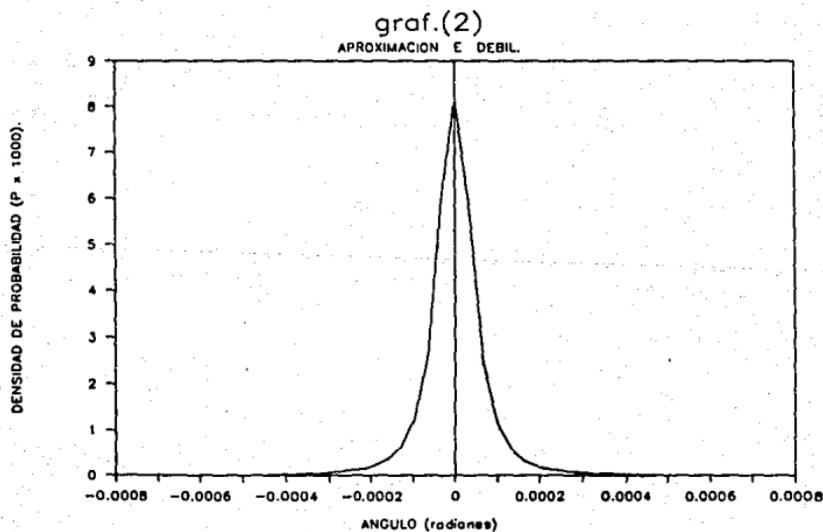
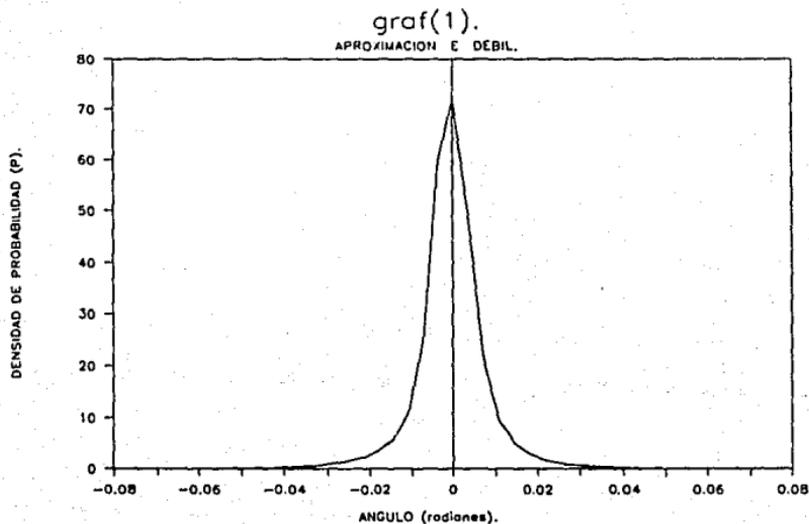


fig.4.4.b Densidad de probabilidad (Aprox.  $\vec{E}$  débil) con velocidades  
 $V = (0.5 \text{ (graf.1) y } 5.25 \text{ (graf.2) } \times 10^8 \text{ cm seg}^{-1} )$ .



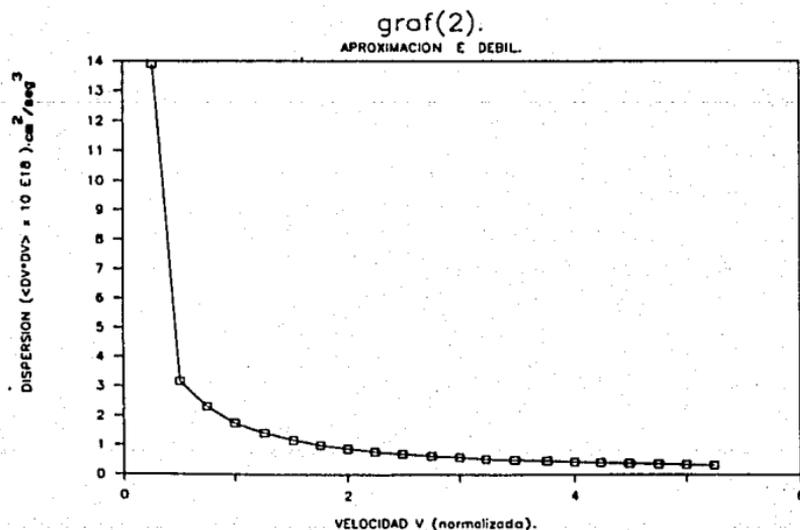
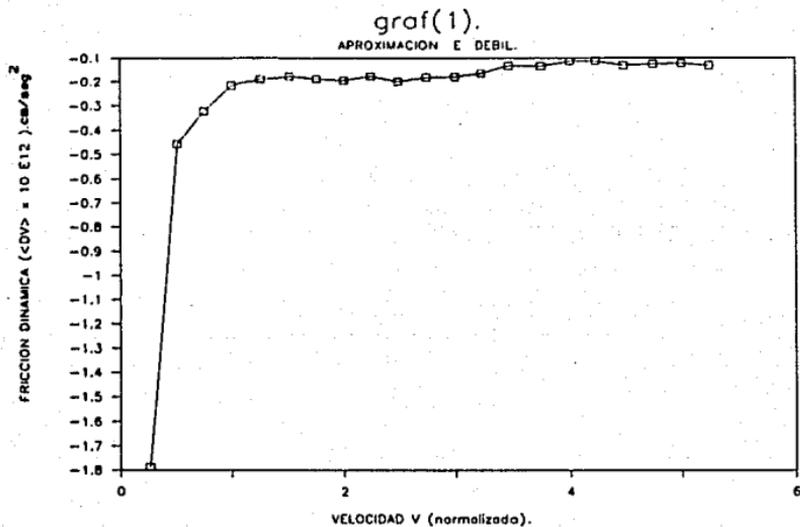
simétrica respecto al eje  $\theta = 0$  y con la probabilidad máxima alrededor de  $\theta = 0$  y decreciendo ésta hacia los extremos. Al igual que lo que se mencionó en la sección A coincide con los resultados esperados al considerar que la región de microturbulencia afecta menos a las partículas conforme éstas se mueven con una velocidad más grande.

Para hallar los coeficientes de fricción dinámica  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y de difusión de partículas  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  se utiliza la densidad de probabilidad  $P(\theta, V_0)$  obtenida del programa COLISIÓN en un programa (INTEGRACIÓN) que después de multiplicar por  $\tan(\theta) V_0^2$  a  $P(\theta, V_0)$  y por  $\tan^2(\theta) V_0^3$  a  $P(\theta, V_0)$  se integra en  $\theta$ , obteniéndose dichos coeficientes. Como se mencionó en la sección anterior, dada la simetría del problema sólo se tiene componente  $\hat{y}$  en el cambio  $\Delta \vec{v}$ , es decir  $\Delta \vec{v} = \hat{y} \Delta v_y$ , de tal manera que los coeficientes de Fokker-Planck son  $\langle \Delta v_y \rangle$  y  $\langle \Delta v_y \Delta v_y \rangle$  y la forma de la dependencia con  $\hat{V}_0$  se da en la figura 4.5.

Estas gráficas nos muestran lo siguiente: al igual que en la sección anterior, la dependencia de  $\langle \Delta v_y \rangle$  con la velocidad no es realista en el sentido de que los valores obtenidos para  $\langle \Delta v_y \rangle$  son producto de las incertidumbres inherentes del método utilizado, de tal manera que si existiera un cambio  $\Delta v_y$  en la velocidad de las partículas promediando sobre todas las partículas este cambio  $\langle \Delta v_y \rangle$  debería ser casi cero, ya que no debería existir una dirección privilegiada para la deflexión.

En cuanto a la segunda gráfica de  $\langle \Delta v_y \Delta v_y \rangle$  vs.  $\hat{V}_0$ , la dependencia es cualitativamente similar a la obtenida en la

fig.4.5 Coeficiente de Fricción Dinámica y de Dispersión para la Aproximación E débil.



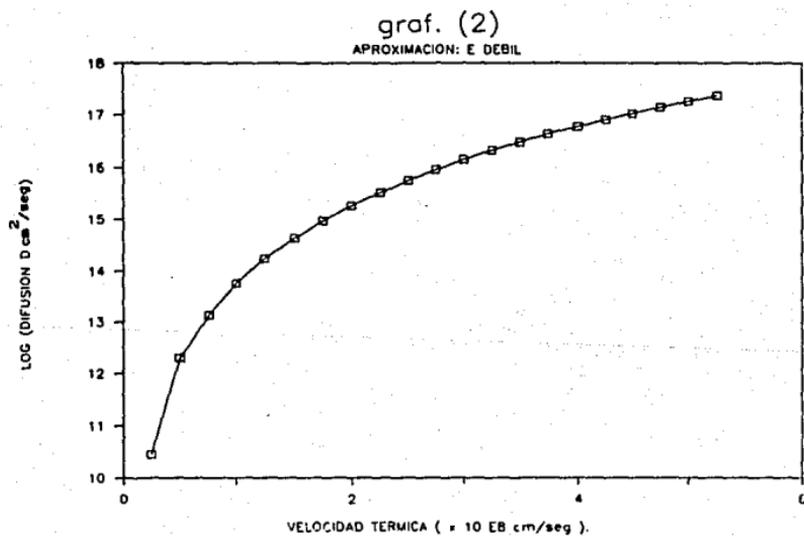
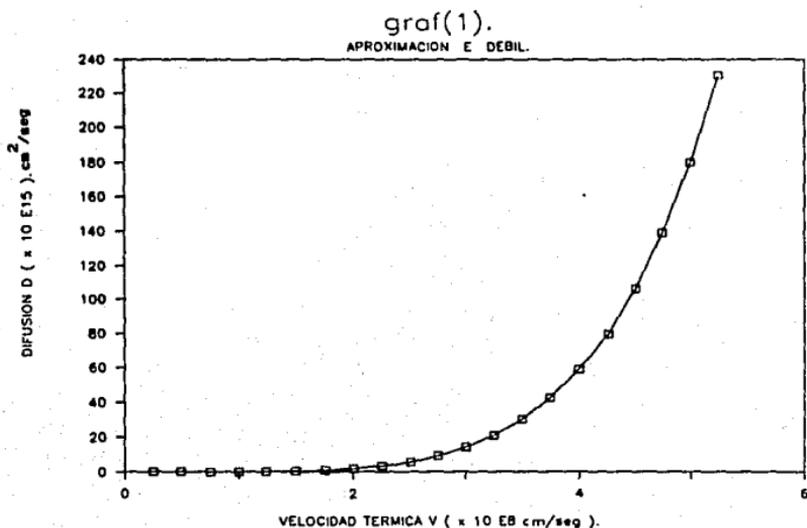
sección (A), siendo válida aquí también la explicación física que se dio sobre la forma funcional del coeficiente de dispersión mediante los tiempos de interacción de las partículas con la región de microturbulencia. Es significativo que la forma funcional de la gráfica coincida con la de la sección anterior considerando que es la que tiene mayor significado físico.

Los coeficientes de difusión de partículas  $D$  y de conductividad térmica  $\chi$  ( $D = \chi$ ) se calculan utilizando para ello el coeficiente de Fokker-Planck de dispersión de partículas  $\langle \Delta v_x \Delta v_y \rangle$ . Las gráficas para  $D$  (y  $\chi$ ) se dan en la figura 4.6 en escalas lineal y logarítmica para apreciar la dependencia funcional más claramente.

Observemos de la figura 4.7 la semejanza cualitativa y cuantitativa de los coeficientes de difusión ( y consecuentemente de la conductividad térmica ) para los dos casos : La aproximación numérica y la aproximación a campo eléctrico  $E$  débil. A su vez notemos la misma semejanza en los dos casos de aproximación para las gráficas del coeficiente de dispersión  $\langle \Delta v_x \Delta v_y \rangle$  que se muestran en la figura 4.8.

Como comparación del comportamiento del coeficiente de difusión  $D$  y del coeficiente de dispersión  $\langle \Delta v_x \Delta v_y \rangle$  se dan las gráficas de estos coeficientes en la figura 4.9 para el caso en que el campo eléctrico no se considera débil usando la aproximación numérica, observándose el mismo comportamiento cualitativo que cuando  $E$  es débil. Los valores en magnitud de la gráfica del

fig.4.6 Coeficiente de Difusión (Aprox. E débil.) ; escala lineal (graf. 1) y logarítmica (graf. 2).



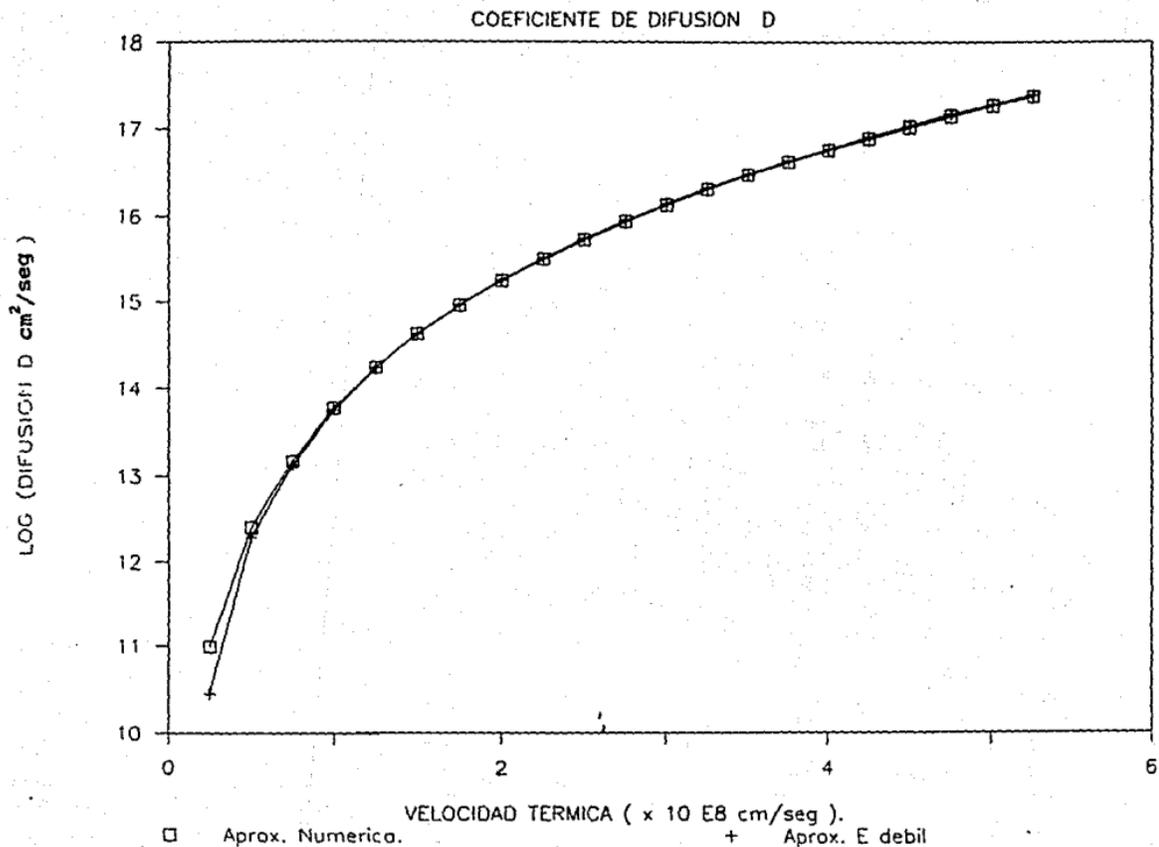


Fig. 4.7 Coeficiente de Difusión en escala logarítmica para la aproximación numérica y de campo E débil.

COEFICIENTES DE DISPERSION

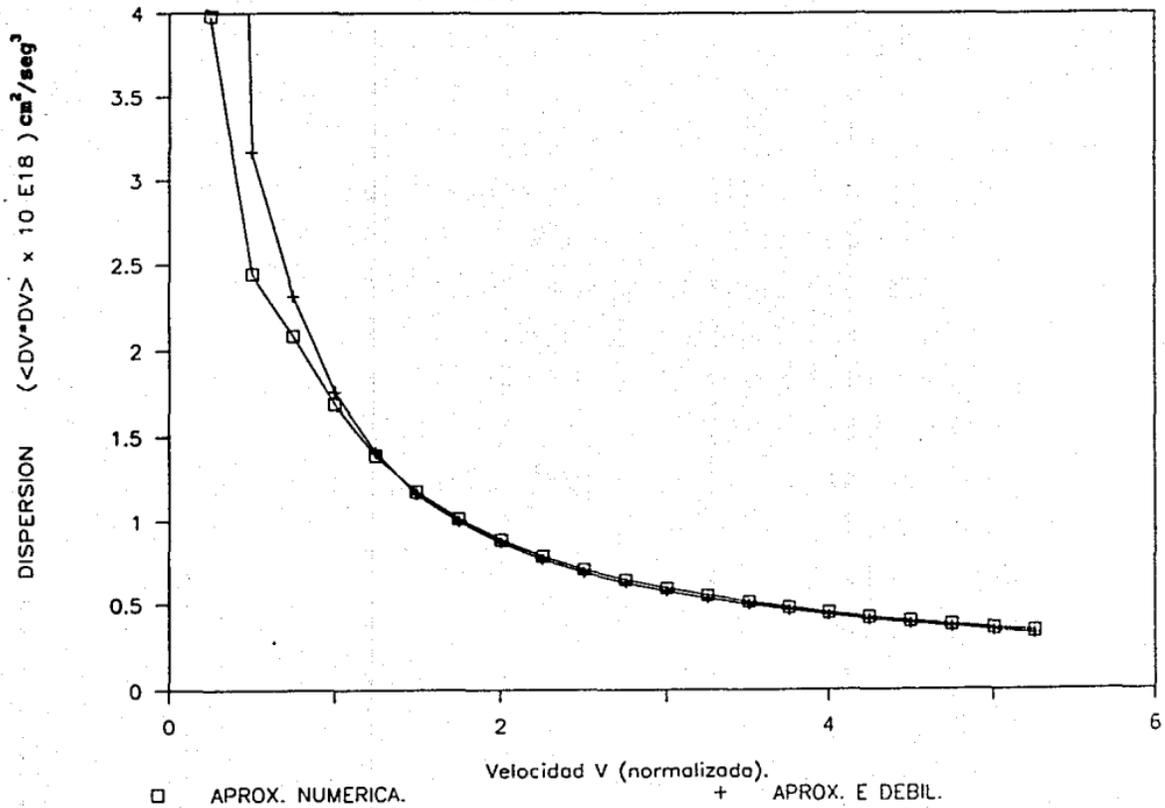
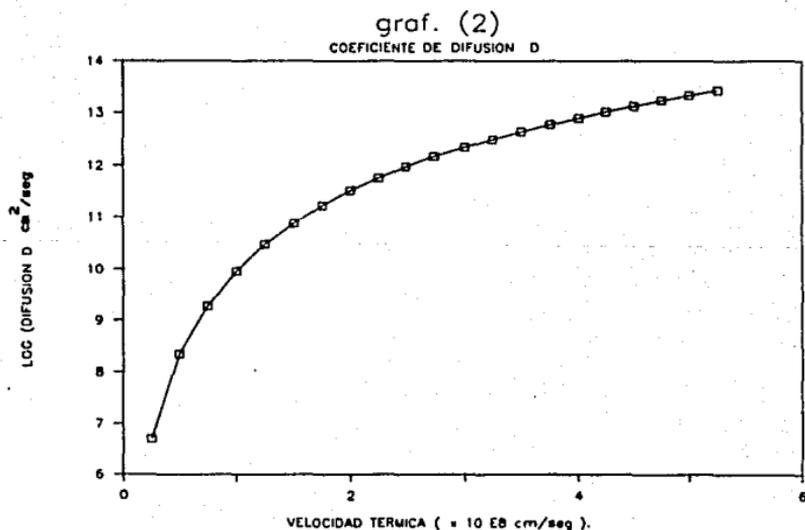
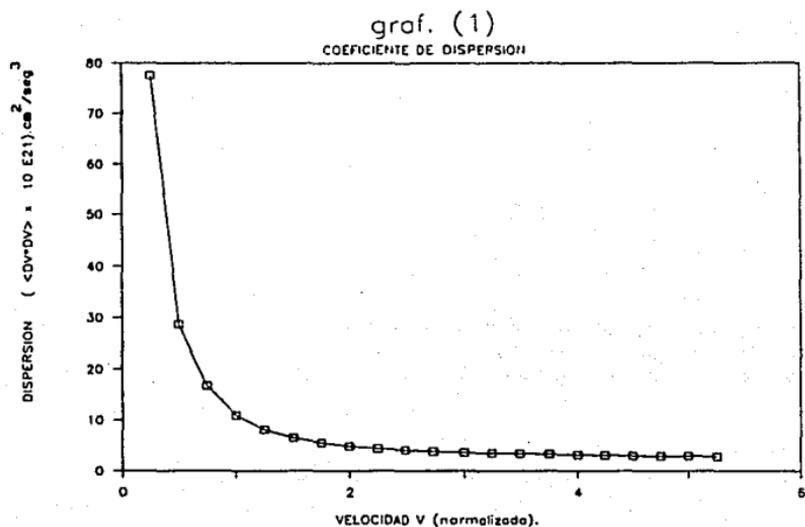
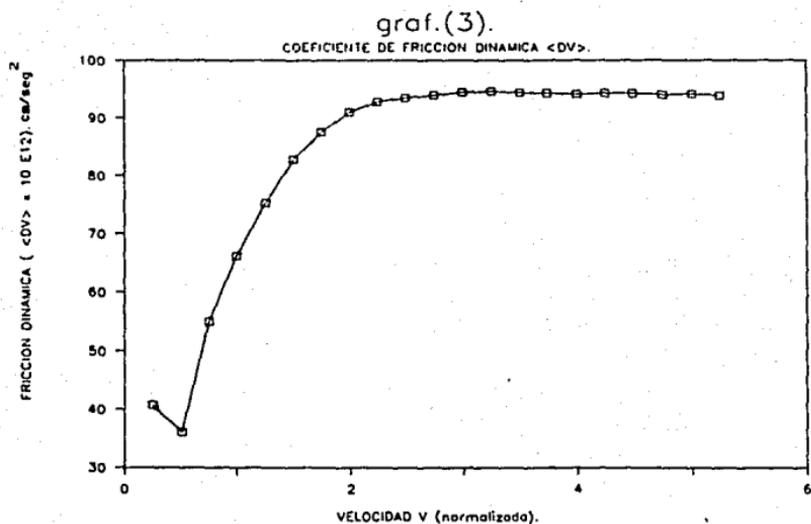


Fig. 4.8 Coeficiente de Dispersión para la aproximación numérica y de campo E débil.

coeficiente  $\langle \Delta v \rangle$  (fig.4.10) son mas grandes debido a la propagación de los errores con respecto a los del caso cuando  $E$  es débil; sin embargo las gráficas que tienen más significado son las de los coeficientes  $D$  y  $\langle \Delta v \Delta v \rangle$  (figuras. 4.7, 4.8 y 4.9).

fig.4.9 Coeficiente de Dispersión y de Difusión para la aprox. numérica considerando un campo E no débil.





**fig.4.10** Coeficiente de Fricción Dinámica para la aprox. numérica considerando un campo E no débil.

## CAPITULO V

### CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha propuesto un modelo sencillo para estudiar el transporte inducido por interacción de partículas con fluctuaciones eléctricas turbulentas. Se analizó el caso en que los campos fluctuantes actúan en dirección perpendicular a la dirección de variación  $\vec{K}$ , es decir,  $\vec{K} \cdot \vec{E} = 0$  y la velocidad de las partículas se tomó normal a  $\vec{E}$ . El modelo consiste en dividir al espacio de campos turbulentos en subregiones de fluctuaciones con las dimensiones de la longitud de correlación del campo turbulento, independientes entre sí, y de forma circular. Así se consideró el proceso de interacción de una partícula con una componente de Fourier de la región de microturbulencia de frecuencia  $\omega$  y número de onda  $k$  y se obtuvo la deflexión correspondiente. Posteriormente se obtuvo la probabilidad  $P(e, \omega, k, V)$  de deflexión para cualquier partícula que incide sobre la región y se promedió sobre todos los modos de Fourier tomando un espectro dado  $E(\omega, k)$  para el campo, obteniendo una probabilidad  $P(e, V)$ . Esta función se utilizó para encontrar los coeficientes de Fokker-Planck  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  que resultarían de considerar el efecto de múltiples deflexiones de las partículas con las diferentes subregiones de la microturbulencia.

El método utilizado para estudiar al transporte inducido por

fluctuaciones en una región dominada por microcampos eléctricos que resultan de turbulencia cuasi-electrostática (en el sentido de que la componente magnética es despreciable), es un método simple, válido sólo para fluctuaciones débiles (es decir turbulencia débil), para que pueda utilizarse el procedimiento de Fokker-Planck. Esto se refleja en la hipótesis que se hace sobre la magnitud (que debe ser pequeña) del espectro  $\vec{E}(\omega, k)$  que nos da la amplitud de los campos en función de la frecuencia  $\omega$  y el número de onda  $k$ .

El modelo además se caracteriza por considerar un proceso markoviano : la interacción de la partícula prueba con las subregiones donde se presenta la fluctuación de los microcampos. Esto es lo que nos permite utilizar además el esquema de Fokker-Planck para hallar los coeficientes de fricción dinámica  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y de dispersión de partículas  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$ .

Se utilizan dos enfoques alternativos de análisis para calcular los coeficientes  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  y  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$ . El primero de ellos calcula la función de distribución de probabilidad  $P(\theta, \omega, k, V_0)$  como en teoría de probabilidades, es decir considera la fracción de partículas  $N_0$  que sale a un ángulo  $\theta$  respecto al total de partículas incidentes, y el segundo enfoque (Aproximación de campo eléctrico  $\vec{E}$  débil) calcula la función de distribución de probabilidad  $P(\theta, \omega, k, V_0)$  de una manera similar a como se calcula en teoría de dispersión al determinar la distribución de partículas dispersadas como  $P = \frac{1}{2} d\hat{V}_0 / d\theta$ .

Las funciones de distribución  $P(e, V_0)$  obtenidas mediante el primer enfoque señalan un comportamiento que va de acuerdo con lo esperado cualitativamente y que tiene que ver con el hecho de que a velocidades grandes el efecto de la región de microturbulencia sobre las partículas es muy débil.

El segundo enfoque produce los mismos resultados cualitativos para las funciones de distribución de probabilidad  $P(e, V_0)$ , señalando con esto una primera prueba de consistencia de los dos enfoques .

Los dos enfoques alternativos de análisis producen los mismos resultados cualitativos [y cuantitativos para el caso del coeficiente  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  ] para los coeficientes de Fokker-Planck  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$ ,  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$ , haciendo notar que en los dos casos la fricción dinámica debe cumplir  $\langle \Delta v_y \rangle = 0$  ( ya que se tienen campos eléctricos transversales) lo cual no se cumple en nuestros cálculos debido a las incertidumbres producidas en los cálculos numéricos de los programas utilizados. Para cuando se tenga una turbulencia electromagnética ó totalmente electrostática (longitudinal) se debe tener que  $\langle \Delta v \rangle = 0$ .

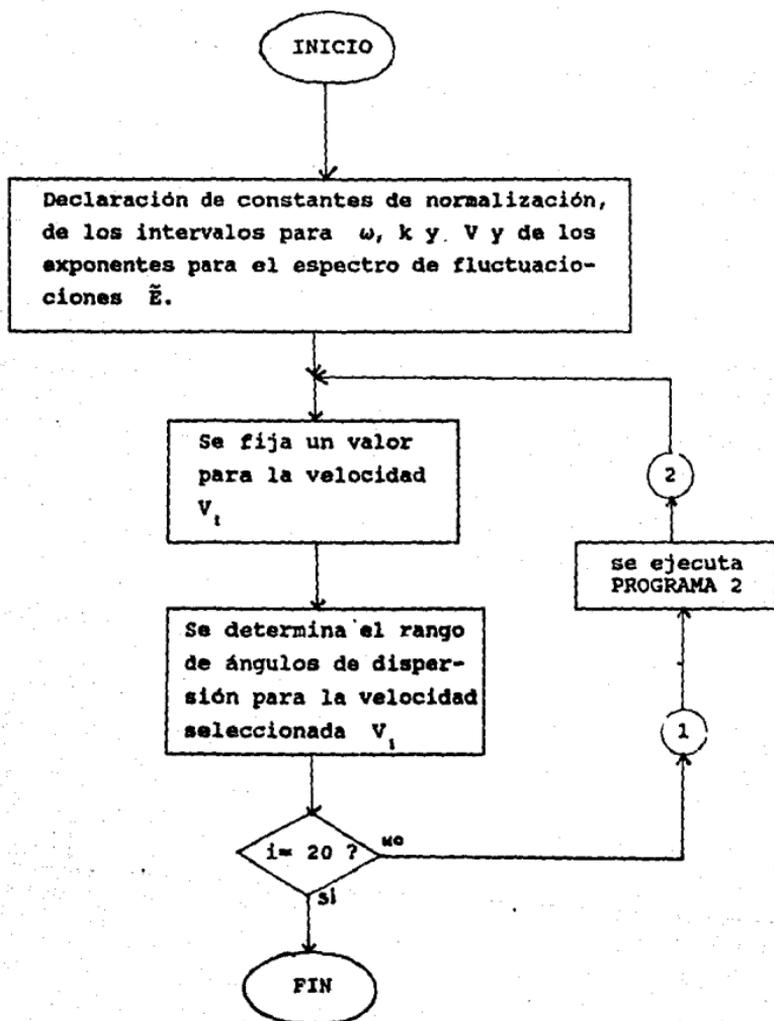
Para el caso de campos eléctricos transversales donde ignoramos la componente magnética, la dependencia del coeficiente de dispersión  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  con la velocidad  $\hat{V}_0$  está de acuerdo con lo esperado físicamente del proceso de interacción de las partículas con la región de microturbulencia, ya que para velocidades pequeñas existe mayor probabilidad de deflexión que a velocidades

grandes.

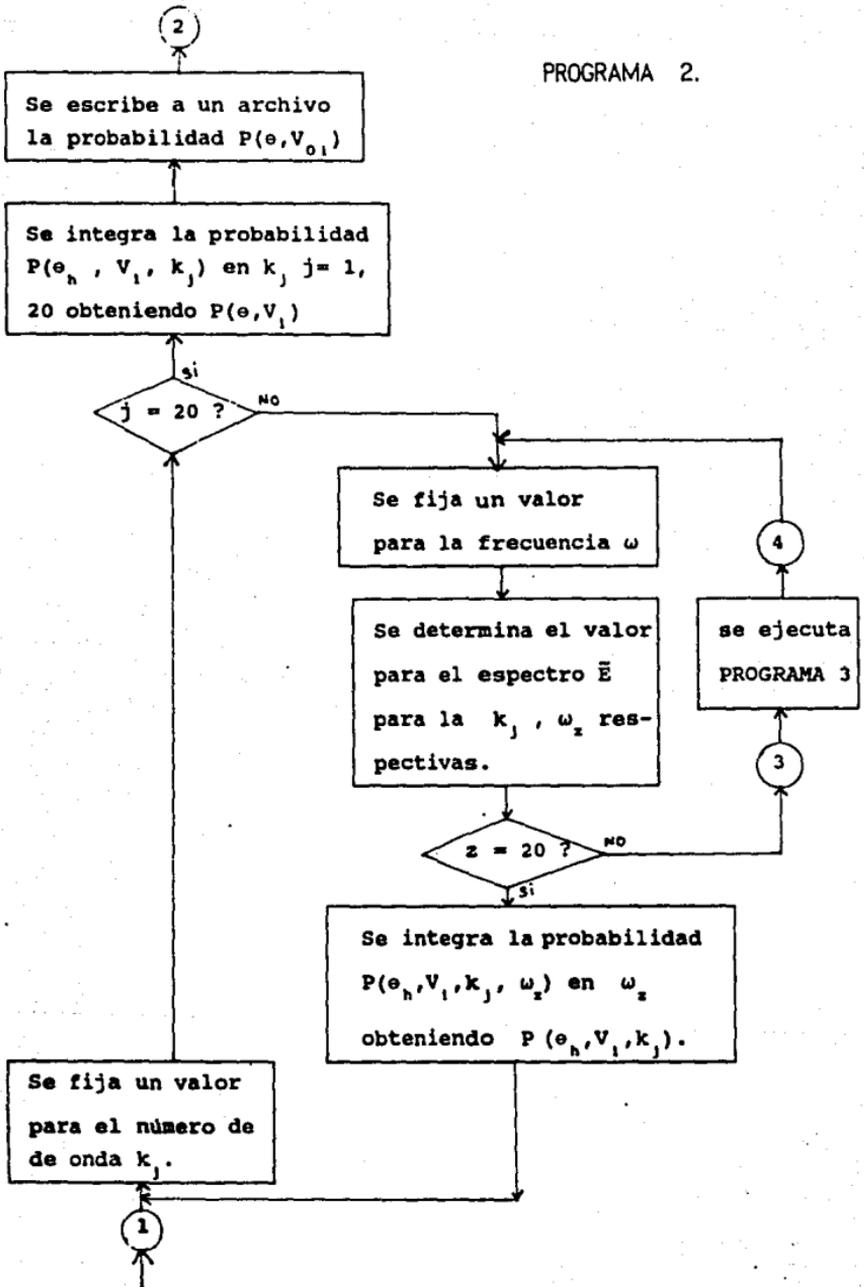
Los coeficientes de transporte observables tales como la difusión de partículas ( $D$ ) y la conductividad térmica ( $\chi$ ) son calculados utilizando los dos enfoques, a partir de los coeficientes  $\langle \Delta v_x \rangle$  y  $\langle \Delta v_x \Delta v_y \rangle$ . Estos coeficientes se pueden comparar con situaciones experimentales donde las frecuencias consideradas estén muy cercanas a las frecuencias de corte del plasma que es donde se cumple la aproximación cuasi-electrostática para la región de microturbulencia. Aún no se sabe de experimentos en esos regímenes, por lo que habría que considerar un modelo totalmente electrostático ó electromagnético para poder hacer comparaciones con resultados experimentales ya establecidos. En nuestro modelo resulta que  $\sigma = \dots$ , pues el tipo de fluctuaciones considerado no se opone al movimiento longitudinal de la partícula,  $D$  y  $\chi$  resultan ser iguales por no haber distinción entre colisiones de partículas (sólo hay colisiones onda-partícula). El trabajo en sí representa una introducción al estudio del transporte producido por la interacción de partículas con fluctuaciones (sin interacciones resonantes) a pequeña escala de campos eléctricos y electromagnéticos, referido comúnmente como transporte anómalo.

APENDICE A.

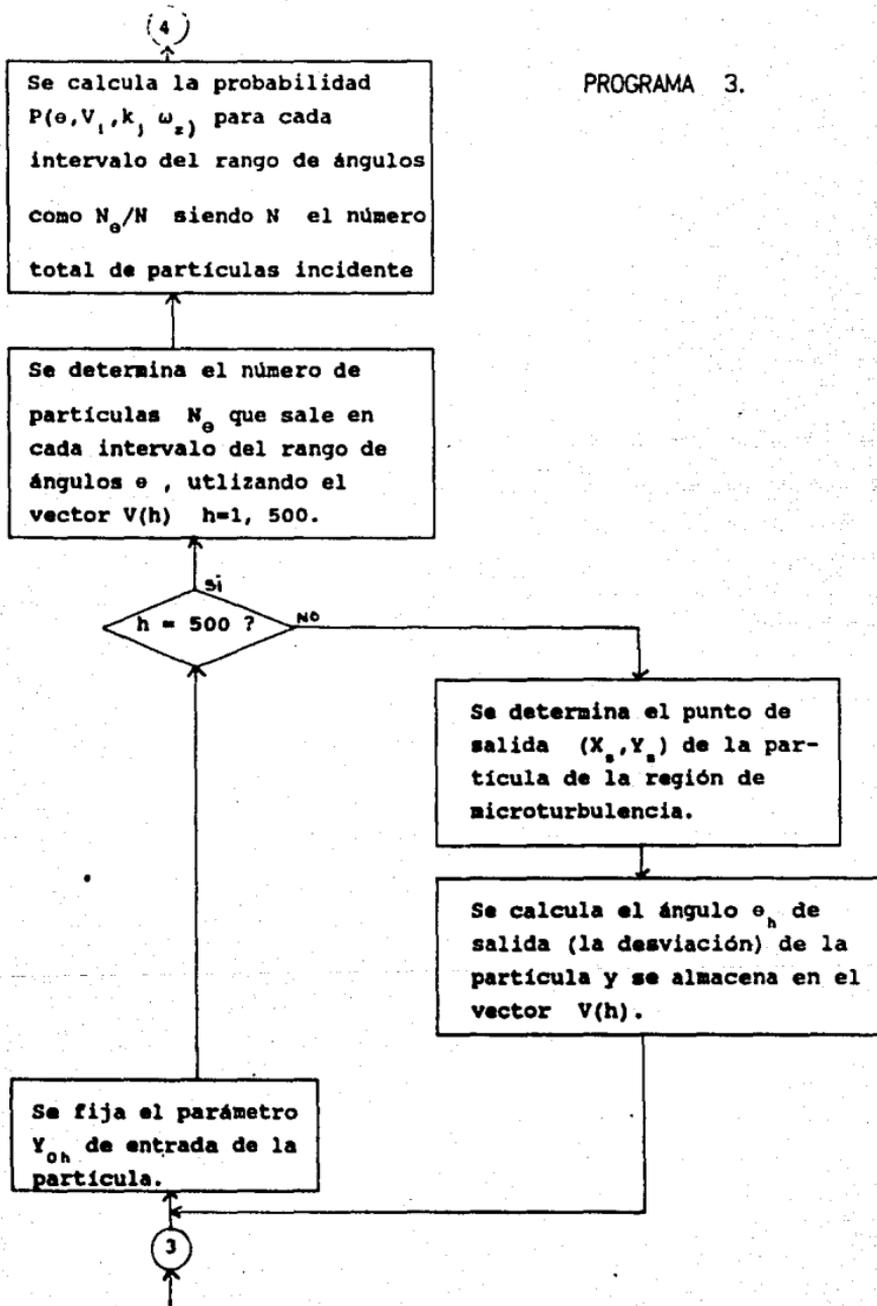
DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL PROGRAMA INTERACCION.



PROGRAMA 2.

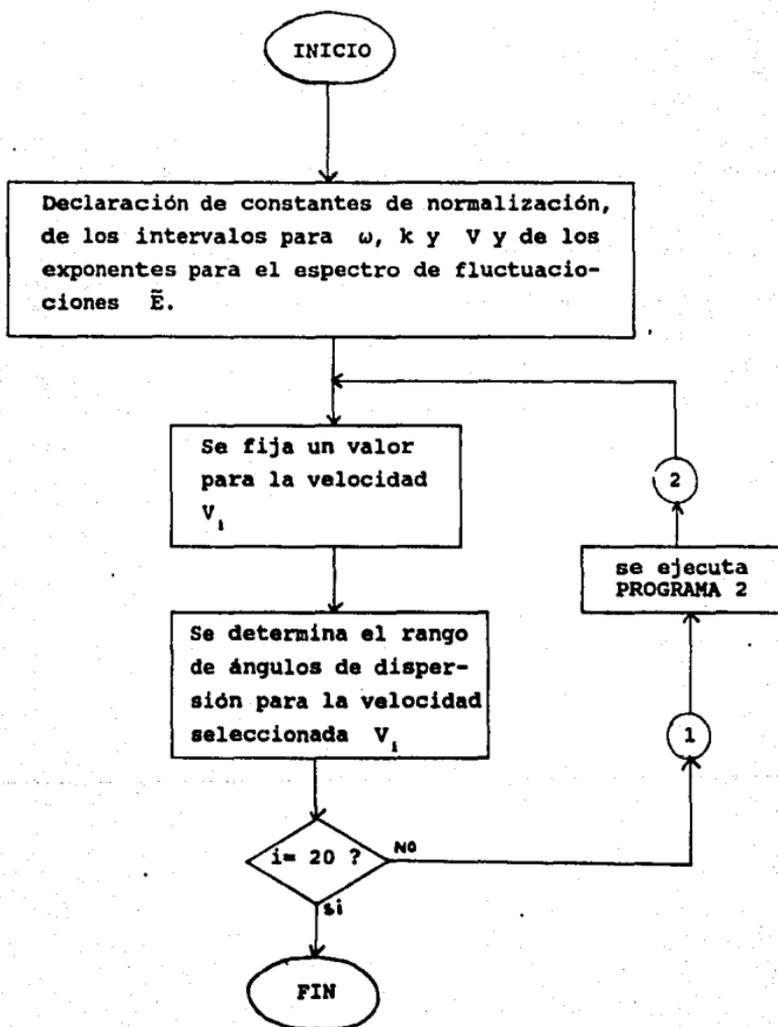


PROGRAMA 3.

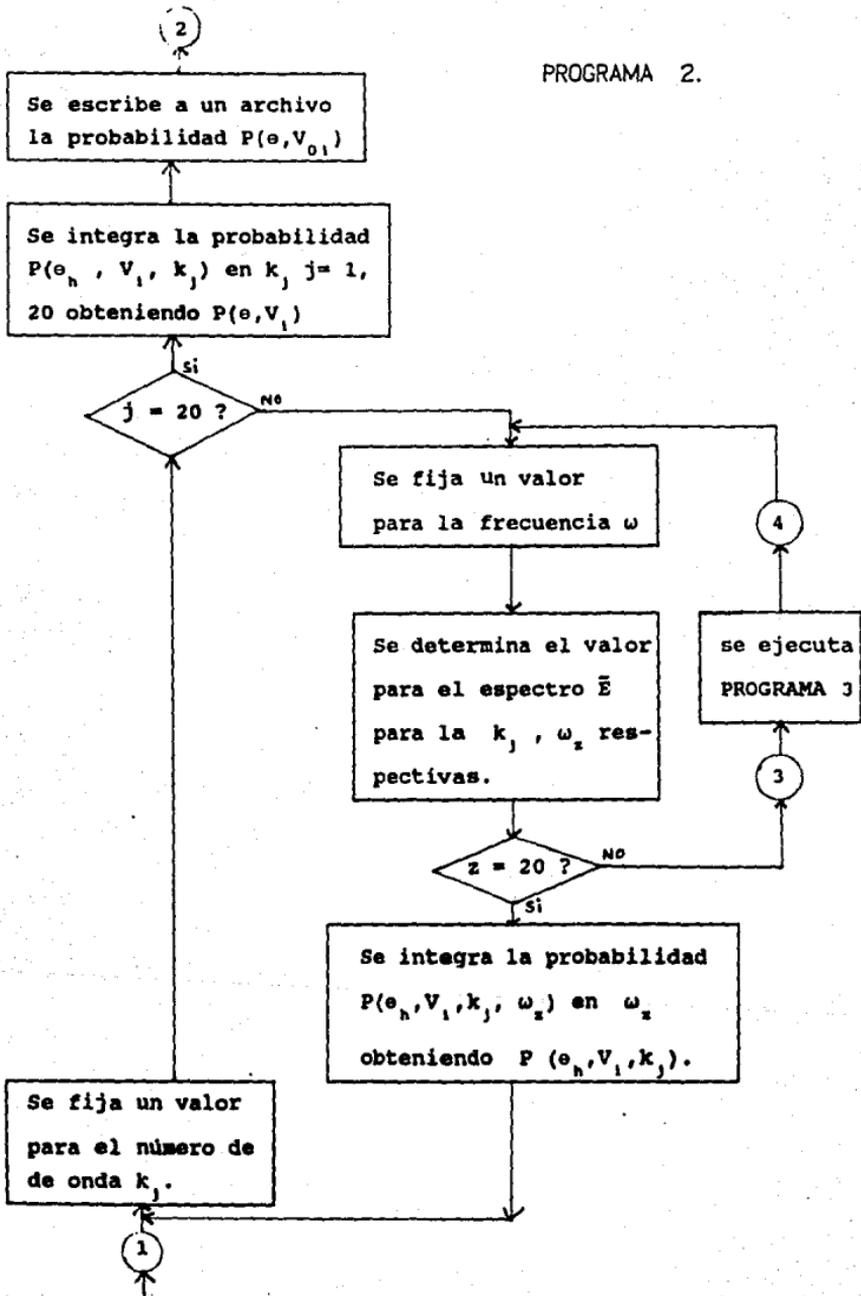


APENDICE B.

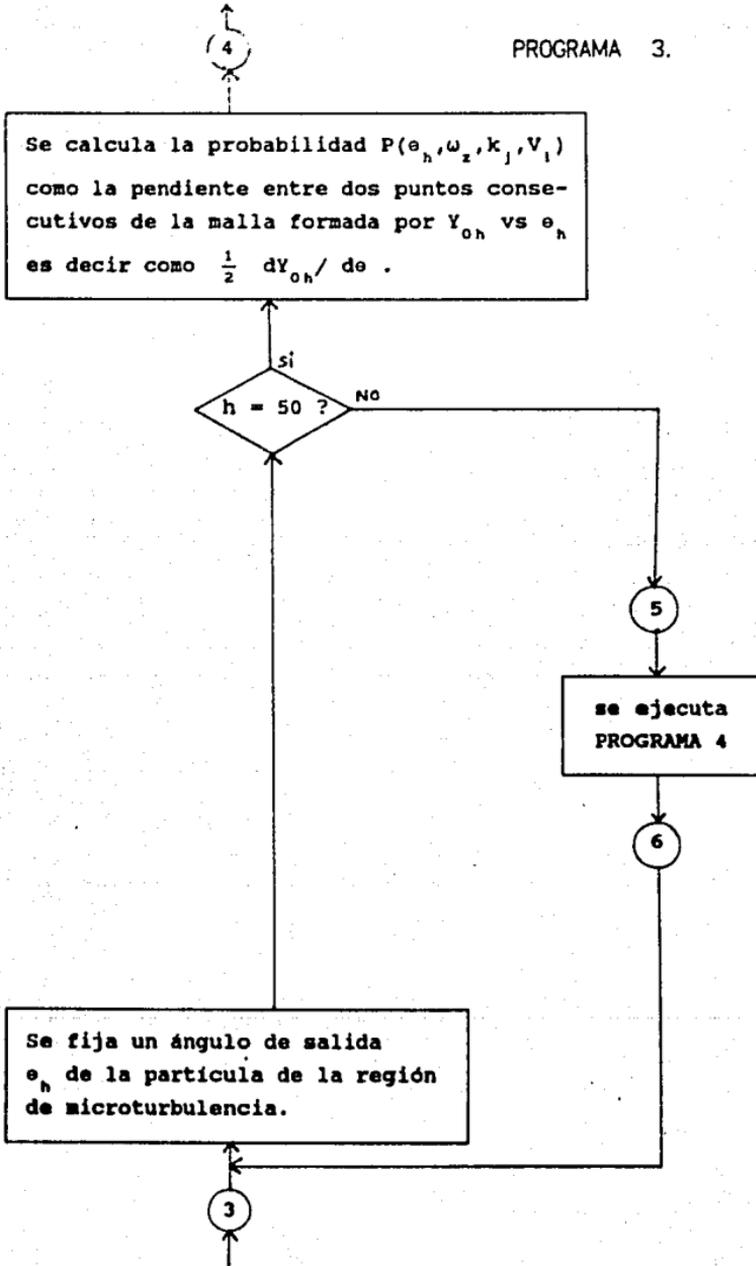
DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL PROGRAMA COLISION.



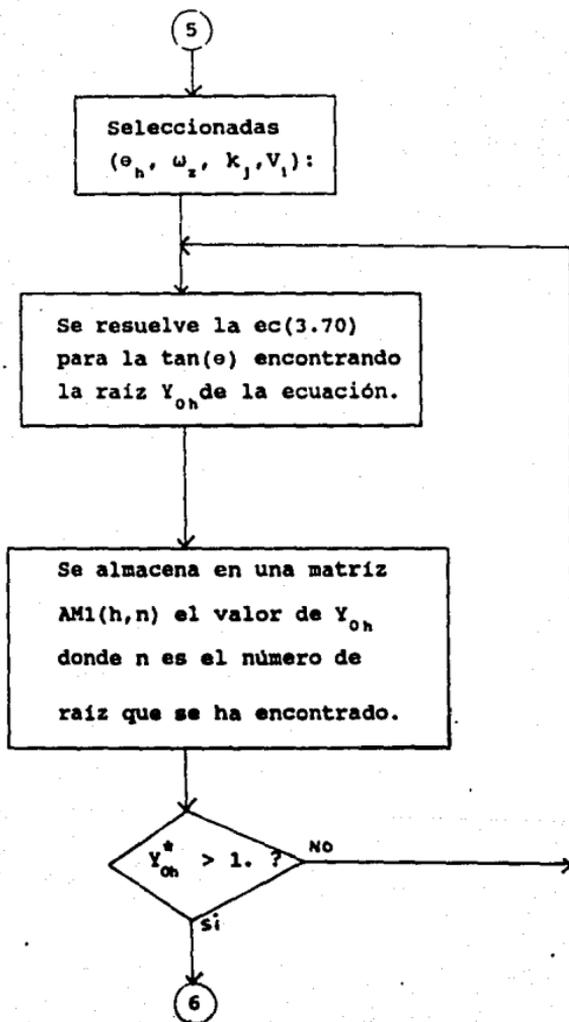
PROGRAMA 2.



PROGRAMA 3.

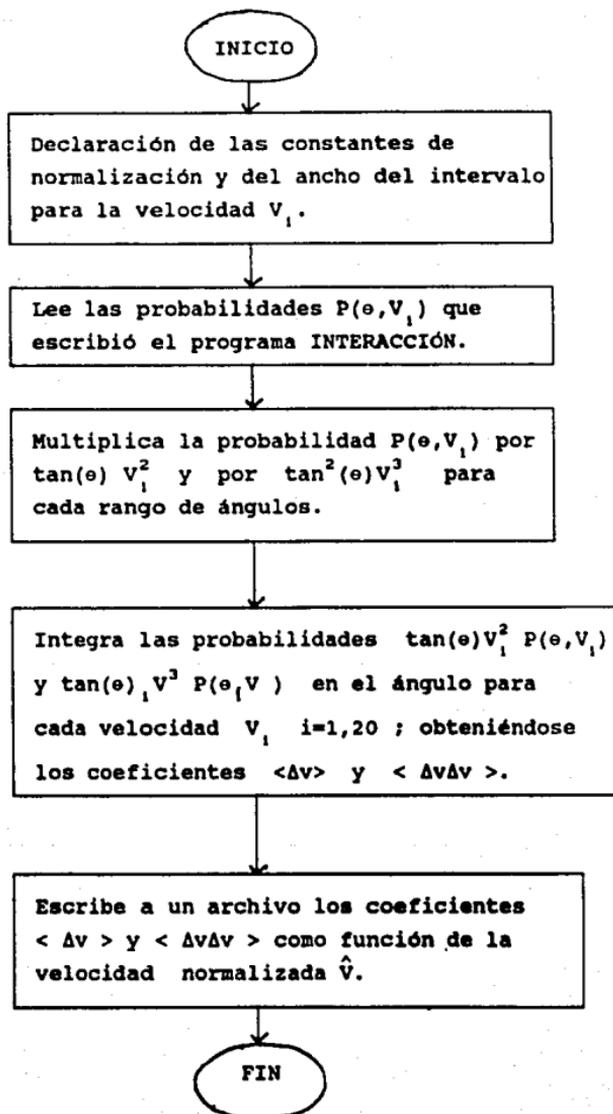


PROGRAMA 4



\* (  $Y_{oh}$  se varia de -1. a 1. )

DIAGRAMA DE BLOQUES PARA EL PROGRAMA INTEGRACION.



## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Schmidt George , Physics of High Temperature Plasmas  
2a. Ed. Plenum Press., New York, 1979., pag.370
- 2.- Chen F.F. Introduction to Plasma Physics  
Plenum Press, New York 1974., pag.206
- 3.- Smirnov B.M. Introduction to Plasma Physics.  
MIR . Moscu 1977., pag.78
- 4.- Pfirsch, D., Collisional Transport. Theoretical and  
Computational Plasma Physics". Lectures presented at the  
International Centre for Theoretical Physics Trieste;  
IAEA , Vienna, 1978 pag 59.
- 5.- LIEWER P.C. " Measurements of Microturbulence in Tokamaks  
and Comparisons with Theories of Turbulence and Anomalous  
Transport". Nuclear Fusion , Vol.25, No. 5 (1985) .
- 6.- ZWEBEN S.J. TAYLOR R.J. Phenomenological Comparison of  
Magnetic and Electrostatic Fluctuations in the Macroto  
Tokamak. Nuclear Fusion. Vol. 21 No. 2 (1981)
- 7.- Berry, L.A. and ORMAK GROUP, in Plasma Physics and Controlled  
Nuclear Fusion Research (Proc. 5th Int. Conf. Tokyo, 1974),  
Vol.1, IAEA, Vienna (1975) 101.
- 8.- Berry, L.A. and ORMAK GROUP, in Plasma Physics and Controlled  
Nuclear Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden,  
1976), Vol. 1, IAEA, Viena (1977) 49.
- 9.- EQUIPE TFR, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion  
Research(Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden 1976), Vol. 1,  
IAEA, Viena (1977) 35.
- 10.- EQUIPE TFR, Nucl. Fusion 20 (1980) 1227.
- 11.- MURAKAMI, M. and ISX-A GROUP, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 655;  
WALTZ, R. E., GUEST, G.E., Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 652;  
MURAKAMI, M. and ISX-A GROUP , in Plasma Physics and Contro  
lled Nuclear Fusion Research (Proc. 7th Int. Conf. Innsbruck,  
1978), Vol.1, IAEA, Viena (1979) 269.
- 12.- STODIEK, W. and PLT GROUP, in Plasma Physics and Controlled  
Nuclear Fusion Research (Proc. 7th Int. Conf. Brussels, 1980),  
Vol.1, IAEA, Viena (1981) 9.
- 13.- EUBANK, H. and PLT GROUP, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 279.

- 14.- GONDHALEKAR, A. and ALCATOR GROUP, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 7th Int. Conf. Innsbruck, 1978), Vol. 1, IAEA, Vienna (1979) 199.
- 15.- FURTH, H.P., in Fusion (TELLER, E., Ed.), Vol. 1, Academic Press, New York (1981) 124, Nucl. Fusion 15 (1975) 487.
- 16.- SOLER, M., CALLEN, J.D., Nucl. Fusion 19 (1979) 703.
- 17.- BELL, J.D., DUNLAP, J.L., PARE, V. K., CALLEN, J.D., HOWE, H. C., et al., Nucl. Fusion 24 (1984) 997; BELL, J. D., Electron Thermal Diffusivity in ISX-B from Observations of Sawtooth Oscillations, ORNL Rep. TM-8891 (March 1984).
- 18.- GREENWALD, M., ALCATOR C GROUP, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 352.
- 19.- BECKER, G., CAMPBELL, D., EBERHAGEN, A., GEHRE, O., GERNHARDT, J., et al., Nucl. Fusion 23 (1983) 1293.
- 20.- STRACHAN, J.D., BRETZ, N., MAZZUCATO, E., BARNES, C.W., BOYD, D., COHEN, S.A., HOVEY, J., KAITA, R., MEDLEY, S.S., SCHMIDT, G., TAIT, G., VOSS, D., Nucl. Fusion 22 (1982) 1145.
- 21.- GAUDREAU, M., GONDHALEKAR, A., HUGHES, M.H., OVERSKEI, D., PAPPAR, D.S., PARKER, R.R., WOLFE, S.M., APGAR, E., HELAVA, H.I., HUTCHINSON, I.H., MARMAR, E.S., MOLVING, K., Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 1266.
- 22.- BERLIZOV, A.B., BUZANKIN, V.V., VERTIPOROKH, A.N., GORBUNOV, E.P., ZAVERYAEV, V.S., LYSENKO, S.E., NOTKIN, G.E., RANTSEV-KARTINOV, V.A., SHCHEGLOV, D.A., Sov. J. Plasma Phys. 7 (1981) 4 [Fiz. Plazmy 7 (1981) 11].
- 23.- BERLIZOV, A.B., BUGARYA, V.I., BUZANKIN, V.V., VASIN, N.L., VERTIPOROKH, A.N., et al., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 8th Int. Conf. Brussels, 1980), Vol. 1, IAEA, Vienna (1981) 23.
- 24.- NAGAMI, M., YOKOMIZO, H., SHIMADA, M., YOSHIDA, H., IOKI, K., IZUMI, S., SHINYA, K., JAHNS, G., BAKER, D., ARMENTROUT, C., BLAU, F., FAIRBANKS, E., FUJISAWA, N., KONOSHIMA, S., SEKI, S., MANENO, M., KITSUNEZAKI, A., Nucl. Fusion 22 (1982) 3.
- 25.- Status of Tokamak Reserach (RAWLS, J.M., ED.), US Dept. of Energy, Washington, DC, DOE/ER-0034 (1979).
- 26.- HUGILL, J., Nucl. Fusion 23 (1983) 331

- 27.- GOLDSTON, R.J., Plasma Phys. Contr. Fusion 26 (1984) 87  
(Invited papers of 11th Europ. Conf. Aachen, 1983).
- 28.- PFEIFER, W., WALTZ, R.E., Nucl. Fusion 19 (1979) 51.
- 29.- SUZUKI, N. and JFT-2 GROUP, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 8th Int. Conf. Brussels, 1980), Vol. 2, IAEA, Vienna (1981) 525.
- 30.- COPPI, B., MAZZUCATO, E., Phys. Lett. 71A (1979) 337; COPPI, B., Comments Plasma Phys. Contr. Fus. 5 (1980) 262.
- 31.- INTOR - International Tokamak Reactor Zero Phase (Rep. Int. Tokamak Reactor Workshop, Vienna, 1979), IAEA, Vienna (1980)
- 32.- LEONOV, V.M., MERZHKIN, V. G., MUKHOVATOV, V.S., SANNIKOV, V.V., et al. in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 8th Int. Conf. Brussels, 1980) Vol. 1, IAEA, Vienna (1981) 393.
- 33.- MERZHKIN, V.G., MUKHOVATOV, V.S. JETP Lett. 33 (1981) 446 [ Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33 (191) 463].
- 34.- FAIRFAX, S. and ALCATOR GROUP, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 8th Int. Conf. Brussels, 1980), Vol. 1, IAEA, Vienna (1981) 439 .
- 35.- BLACKWELL, B., FIORE, C.L., GANDY, R., GODHALEKAR, A., GRANETZ, P.S., et al. in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 9th Int. Conf. Baltimore, 1982) , Vol. 2, IAEA , Vienna (1983) 27.
- 36.- WOLFE, S. and ALCATOR C GROUP, private communication (1984), and see Ref. [26] ).
- 37.- EJIMA, S., PETRIE, T. W., RIVIERE , A.C., ANGEL, T.R., ARMENTROUT, C. J. et. al. Nucl. Fusion 22 (1982) 1627.
- 38.- BERLIZOV, A.B., BOBROVSKIJ, G.A., VASIN, N. L., VERTIPOROKH, A.N., VINOGRADOVA , N. D., et. al., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 9th Int. Conf. Baltimore, 1982), Vol. 2 , IAEA, Vienna (1983) 63.
- 39.- WAGNER, F., BECKER, G., BEHRINGER, K., CAMPBELL, D., EBERHAGEN, A., et. al. , Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1408 ; WAGNER F. BECKER, G., BEHRINGER, K., CAMPBELL, D., EBERHAGEN, A., et. al. , Baltimore 43.
- 40.- KECHLACKER ., M., BECKER, G., BERNARDI, K., EBERHAGEN, A.,

- ELSHAER, M., et. al. Plasma Phys. Contr. Fus. 26 (1984) 49.
- 41.- KAYE, S.M., BELL, M.G., BOL, K., BRAU, K., BUCHENAUER, D., et. al., J. Nucl. Mater. 121 (1984) 817.
- 42.- SURKO, C.M., SLUSHER, R. E., Science 221 (1983) 817.
- 43.- CARRERAS, B.A., DIAMOND, P.H., MURAKAMI, M., DUNLAP, J.L., BELL, J.D., HICKS, H.R., HOLMES, J.A., LAZARUS, E.A., PARE, V.K., SIMILON, P., THOMAS, C.E., WIELAND, R. M., Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 503 ; CARRERAS, B. A., ISLER, R. C., DUNLAP, J.L., MURRAY, L.E., BELL, J.D., et. al., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 9th Int. Conf. Baltimore, 1982), Vol. 3, IAEA, Vienna (1983) 77; MURAKAMI, M., BATES, S. C., BELL, J.D., BUSH, C.E., CARNEVALI, A., et. al., ibid., Vol. 1, 57.
- 44.- SWAIN, D.W., MURAKAMI, M., BATES, S.C., BUSH, C.E., DUNLAP, J.L., EDMONDS, P.H., HUTCHINSON, D., KING, P.W., PARE, V.K., SALTMARSH, M.J., SCOTT, S.D., THOMAS, C.E., WILGEN, J.R., WIELAND, R.M., Nucl. Fusion 21 (1981) 1409.
- 45.- EPITHIMION, P.C., BELL, M., BLANCHARD, W.R., BRETZ, N., CECCHI, J.L., et. al., Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1492; YOUNG, K.M., BELL, M., BLANCHARD, W.R., BRETZ, N., CECCHI, J., et. al., Plasma Phys. Contr. Fus. 26 1A (1984) 11 (Invited papers of 11th Europ. Conf. Aachen, 1983).
- 46.- TAYLOR, J.B., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 9th Int. Conf. Berchtesgaden, 1976), Vol.2, IAEA, Vienna (1977) 323.
- 47.- HASTIE, R.J., HESKETH, K.W., TAYLOR, J.R., Nuclear Fusion 19 (1979) 1223.
- 48.- CHENG, C.Z., CHEN, L., Phys. Fluids 23 (1980) 1770.
- 49.- CHOI, D.- I., HORTON, W., Phys. Fluids 23 (1980) 356.
- 50.- CHEN, L., CHENG, C.Z., Phys. Fluids 23 (1980) 2242.
- 51.- CONNOR, J.W., HASTIE, R.J., TAYLOR, J.B., Phys. Rev. Lett. 40 (1978) 396 ; Proc. R., Soc. (London), Ser. A 1 (1979) 365.
- 52.- CHEN, L., CHANCE, M.S., CHENG, C.Z., Nucl. Fusion 22 (1982) 293; Nucl. Fusion 20 (1980) 901.
- 53.- MARCHAND, R., GUZDAR, P.N., Nucl. Fusion 22 (1982) 289.
- 54.- HORTON, W., in Basic Plasma Physics, II (GALEEV, A.A., SUDAN, R.N., Eds), /north Holland (1985) 383.

- 55.- KRALL, N.A., McBRIDE, J.B., Nucl. Fusion 17 (1977) 713.
- 56.- WALTZ, R.E., PFEIFFER, W., DOMINGUEZ, R.R., Nucl. Fusion 20 (1980) 43.
- 57.- HORTON, W., ESTES, R.D., Nucl. Fusion 19 (1979) 203.
- 58.- DÜCHS, D.F., POST, D.E., RUTHERFORD, P.H., Nucl. Fusion 17 (1977) 565.
- 59.- LIEWER, P.C., ZWEBEN, S.J., GOULD, R.W., Heat Transport by Electrostatic Microturbulence in the Edge Regions of the Caltech Tokamak, Caltech Report (submitted for publication, 1985).
- 60.- TANG, W.M., Nucl. Fusion 18 (1978) 1089.
- 61.- KADOMTSEV, B.B., Plasma Turbulence, Academic Press, London (1965).
- 62.- STIX, T.H., Nucl. Fusion 18 (1978) 353.
- 63.- CALLEN, J.D., Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 1540.
- 64.- MANHEIMER, W., COOK, I., Comments Plasma Phys. Controll. Fus. 5 (1979) 5.
- 65.- HASEGAWA, A., MIMA, K., J. Geophys. Res. 83 (1978) 1117.
- 66.- HITCHCOCK, D.A., MAHAJAN, S.M., HAZELTINE, R.D., Plasma Phys. 21 (1979) 741.
- 67.- DRAKE, J.F., LEE, Y.C., Phys. Fluids 20 (1977) 1341.
- 68.- GLADD, N.T., DRAKE, J.F., CHANG, C.L., LIU, C.S., Phys. Fluids 23 (1980) 1182.
- 69.- DRAKE, J.F., GLADD, N.T., LIU, C.S., CHANG, C.L., Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 944.
- 70.- ROSENBERG, M., DOMINGUEZ, R., PFEIFFER, W., WALTZ, R.E., Phys. Fluids 23 (1980) 2022.
- 71.- EQUIPE TFR, Plasma Phys. 25 (1983) 641; in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 7th Int. Conf. Brussels, 1980), Vol. 1, IAEA, Vienna (1981) 425., see also TFR GROUP and TRUC, A., Plasma Phys. Contr, Fus. 26 (1984) 1045.
- 72.- OHKAWA, T., Phys. Lett. 67A (1978) 35.  
referencia de LIEWER P.C.)
- 73.- LEVINSON, S.J. BEALL J. M. POWERS, E.J. BENGTONSON R.D. "Space/ Time statistics of the turbulence in a tokamak edge plasma". Nuclear Fusion, Vol. 24, No. 5 (1984)

- 74.- Thompson, W. B. "The Transport Equation for a Plasma ",  
Plasma Physics 'Lectures Presented at the Seminar on Plasma  
Physics Organized by and Held at the International Centre  
for Theoretical Physics, Trieste 1964. IAEA,  
Vienna, 1965 . pag. 207.
- 75.- Thompson , W. B. " Bynary Process in Plasma ".,  
Plasma Physics 'Lectures Presented at the Seminar on Plasma  
Physics Organized by and Held at the International Centre  
for Theoretical Physics', Trieste 1964. IAEA,  
Vienna, 1965 . pag. 197.
- 76.- Hinton, F.L., Hazeltine R.D." Theory of plasma transport in  
toroidal confinement systems ." , Reviews of Modern Physics,  
Vol. 28, No. 2 , 1976.
- 77.- Engelmann " Transport in Toroidal Magnetoplasmas ".,  
Modern Plasma Physics . Trieste Course 1979 . A Basic  
Course Given at an autumn College at the International Centre  
for Theoretical Physics Trieste, and Selected Lectures on  
Advanced Topics in Fusion Research Presented at the College  
IAEA, Vienna , 1991 pag.371.
- 78.- Goldston Robert J., " Energy Confinement Scaling in Tokamaks  
Same Implications of Recent Experiments with Ohmic and Strong  
Auxiliary Heating.
- 79.- Chapman, S. and Cowling, T.C. , Mathematical Theory of Non-  
Uniform Gases , C.V.P. Cambridge 1952.
- 80.- Chandrasekhar S. " Stochastic in Physics and Astronomy"  
Reviews of Modern Physics (1943).
- 81.- Zweben S.J. Taylor R.J. Phenomenological Comparison of  
Magnetic and Electrostatic Fluctuations in the Macrotor  
Tokamak. Nuclear Fusion. Vol. 21 No. 2 (1981)
- 82.- Strachan, J.D. Bitter M. " Hig- temperature plasmas in the  
Tokamak Fusion Test Reactor ".  
Physical Review Letters.Vol. 58. N. 10 (1987).
- 83.- Cormick, K. Mc. Sölder ., " Temporal behavior of the plasma  
current distribution in the ASDEX Tokamak during lower -  
hybrid current drive " Physical Review Letters vol.58 No.5  
(1987).
- 84.- Horton, W. Choi D. I.: " Electron difusion in tokamaks due

- to electromagnetic fluctuations ". Plasma Physics, and Control Fusion . Vol.29 No. 7, (1987)
- 85.- Zeew W. A. ,Yousef N. : " Radial Electron thermal difusivities from the perturbation of the electron temperature profile by a turbulent heating pulse in the totur tokamak". Plasma Physics and Controlled Fusion. Vol. 29 No. 5 (1987).
- 86.- Hold, T. "Experimental investigation of flute type electrostatic turbulence " , Plasma Physics and Controlled Fusion " Vol. 30 No. 10 (1988).
- 87.- CARRERAS, B.A., DUNLAP, J.L., COOPER, W.A., MHD Activity in the ISX-B Tokamak: Experimental Results and Theoretical Interpretation, ORNL Rep. TM-8648(June 1983).
- 88.- DIAMOND, P.H., SIMILON, P.L., HENDER, T.C., CARRERAS, B.A., Kinetic Theory of Resistive Ballooning Modes, Univ. of Texas Report IFSR 113 and DOE/ET/53088-113 (Nov.1983 ).
- 89.- HENDER, T.C., CARRERAS, B.A.,COOPER, W.A., HOLMES, J.A.,DIAMOND, P.H., SIMILON, P.L., Phys. Fluids 27 (1984) 1439.
- 90.- FURTH, H., KILLEEN, J., ROSENBLUTH, M.N.,Phys.Fluids 18 (1975) 875.
- 91.- ROSENBLUTH, M.N., SAGDEEV, R.Z., TAYLOR, J.B., ZASLAVSKI, G.M., Nucl. Fusion 6 (1966) 297.
- 92.- MOLVING, K., HIRSHMAN, S.P., WHITSON, J.C., Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 582.
- 93.- MAHAJAN, S. M., Phys. Fluids 26 (1983) 113.
- 94.- SIMILON, P.L., DIAMOND, P.H., Phys. Fluids 27 (1984) 916 .
- 95.- PARAIL, V.V., POGUTSE, O.P., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 8th Int. Conf. Brussels, 1980 ), Vol. 1 , IAEA, Vienna (1981) 67; PARAIL, V.V., POGUTSE, O.P., Sov. Phys. - JETP Lett. 32 (1980) 384 [ Pis'mazh. Ehksp. Teor. Fiz. 32 (1980) 408].
- 96.- ROZHANSKII, V.A., Sov. Phys. - JETP Lett. 34 (1981) 56 [ Pis'mazh. Ehksp. Teor. Fiz. 34 (1981) 60].