



4
204
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

MODELADO SISMICO DE DEPOSITOS
ESTRATIFICADOS CON UNA TECNICA HIBRIDA



T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO GEOFISICO
P R E S E N T A :

CARLOS CALDERON MACIAS



MEXICO, D. F.

NOVIEMBRE, 1990



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I INTRODUCCIÓN

Los terremotos son uno de los desastres naturales que han causado mayores daños a la humanidad en épocas recientes. Lo inesperado de su ocurrencia y los resultados devastadores producidos por ellos en las estructuras construidas por el hombre demandan la atención de la sociedad. Este efecto cobra gran importancia en la ciudad de México en donde las capas más superficiales del antiguo lago, donde la ciudad se encuentra asentada, atrapan la energía sísmica incidente provocando con ello la amplificación del movimiento. Esta amplificación es debida a varios factores como son la relativamente baja impedancia (producto de la velocidad de propagación por la densidad de masa) de los estratos más superficiales con respecto a la impedancia de las capas más profundas, el enfocamiento de la energía sísmica y la generación local de ondas superficiales por irregularidades topográficas y geológicas.

La conversión de ondas de cuerpo a ondas superficiales provoca que las estructuras cercanas a relieves topográficos, estén expuestas a grandes amplitudes del movimiento (e.g., Boore et al.,

1981). Este fenómeno se encuentra relacionado con la duración de los registros de aceleraciones obtenidos en la ciudad de México. Estudios de simulaciones numéricas han mostrado que las ondas superficiales pueden ser un componente importante de la coda sísmica y que esta es de mayor duración en valles aluviales que la observada en terrenos firmes (e.g., Key, 1968; Andrews, 1989). Por ejemplo, los registros de aceleración obtenidos por la red acelerométrica de la ciudad de México muestran duraciones en la zona del lago que no se observan en la zona de lomas (Santoyo et al., 1989).

Existen varios métodos basados en soluciones analíticas y algoritmos numéricos para resolver la ecuación de onda que permiten estimar el movimiento para modelos simplificados. Santoyo et al. (1989) realizan un análisis de los registros obtenidos para el temblor de Cuernavaca del 8 de febrero de 1988 usando el método unidimensional que permite evaluar la respuesta de sitio suponiendo una estratigrafía horizontal. Las comparaciones realizadas con los datos observados muestran diferencias que se pueden interpretar como consecuencia de los efectos de la irregularidad lateral. Para estudiar este tipo de efectos se requiere de modelos más complejos que simulen fenómenos de resonancia lateral y generación local de ondas superficiales.

Harmsen y Hardin (1981) realizan simulaciones con diferencias finitas para ondas de cuerpo incidentes en un depósito aluvial. Sus resultados muestran movimiento retrógrado elíptico de las partículas indicando la presencia de ondas de Rayleigh a lo largo del valle. Ohtsuki et al. (1984) aplican el método de elementos finitos para resolver el mismo problema. Vidale y Heimberger (1988) investigan la generación de ondas superficiales para el terremoto de San Fernando, California de 1971, usando diferencias finitas. La concordancia de máximas amplitudes y duraciones entre los sismogramas sintéticos y los observados se explica como conversión de ondas de cuerpo en el borde del valle de San Fernando en ondas superficiales viajando a lo largo del valle. En otro análisis, Yamanaka et al. (1989) estudian el terremoto de Nagano, Japón de 1984. En los registros se muestran fases tardías

que son interpretadas como ondas superficiales desarrolladas en las capas de menor velocidad del valle. La dispersión observada en el componente transversal es similar a la dispersión calculada para el modo fundamental de ondas de Love en un modelo de velocidades obtenido con técnicas de exploración. Al utilizar estos resultados en un modelo bidimensional de diferencias finitas se obtienen sismogramas sintéticos que se aproximan a los sismogramas observados.

Para el terremoto de Michoacán de 1985, Bravo *et al.* (1989) utilizan una técnica híbrida que combina un método de frontera para las frecuencias bajas (Bravo *et al.*, 1988) y un método de rayos para las frecuencias altas (Sánchez-Sesma *et al.*, 1988) estudiando la respuesta de un depósito aluvial triangular para un intervalo de frecuencias amplio. Para este mismo terremoto, Kawase y Aki (1989) muestran que con un modelo unidimensional no es posible reproducir adecuadamente los últimos arribos de ondas en los registros de aceleraciones. En este trabajo se estudia un modelo bidimensional para incidencia de ondas *P* y *S*. Los resultados muestran la aparición de ondas superficiales de Love y de Rayleigh generadas dentro del valle.

Varios autores han considerado el problema de propagación de ondas superficiales en depósitos de suelo blando (e.g., Lysmer y Drake, 1971; Kelly, 1983; Ohmachi *et al.*, 1988). Un tema común en todos estos estudios es la conversión de energía incidente del modo fundamental en modos superiores (Frankel, 1989). Una de las técnicas más utilizada para modelar ondas superficiales es la obtención del campo de desplazamientos como una superposición de modos de propagación (e.g., Shibuya, 1988; Hisada, 1989). En esta se calculan eigenfunciones para el problema de ondas de Love. Sin embargo, un problema que surge es el cálculo exacto de las curvas de dispersión que definen cada uno de los modos de propagación (Schwab *et al.*, 1984; Panza, 1985).

En este trabajo se estudia la respuesta sísmica de un depósito horizontalmente limitado por dos taludes verticales ante la incidencia de ondas planas de corte (*SH*). La respuesta del

depósito se construye sumando al campo de desplazamientos producido por el medio estratificado (solución unidimensional), un campo de ondas de Love generadas en los bordes del depósito. La solución unidimensional se obtiene utilizando un método matricial (método de Haskell) que satisface las condiciones de frontera de continuidad de desplazamientos y tracciones en todo el medio estratificado. El campo difractado por los extremos del depósito se forma con funciones de Green colocando fuentes con singularidades fuera de la región de interés a largo de estos extremos. Para obtener el campo de ondas de Love se calculan curvas de dispersión que definen modos de propagación viajando dentro del depósito. Se utiliza el mismo método matricial en la evaluación de los modos de propagación. Los coeficientes de los modos y del campo difractado se determinan al satisfacer en el sentido de mínimos cuadrados, las condiciones de frontera en puntos discretos en los extremos del depósito. Ello conduce a resolver sistemas de ecuaciones de dimensiones reducidas, por lo que el método no requiere de grandes recursos de cómputo.

Se estudia la respuesta de varios modelos en los dominios del tiempo y de la frecuencia y se hacen comparaciones con otros métodos. Dicha respuesta se analiza con diagramas frecuencia-número de onda, los cuales resaltan las características de la propagación de ondas superficiales. Se obtienen conclusiones que pueden ser útiles en la interpretación del complicado movimiento registrado por la red acelerométrica de la ciudad de México.

II MODELADO UNIDIMENSIONAL

Pensemos en la respuesta de un conjunto de estratos lateralmente infinitos dispuestos en forma horizontal ante una excitación sísmica. El número de estratos y las propiedades mecánicas de los mismos controlan el contenido de frecuencias y amplitud del movimiento en el medio.

A continuación se presenta un método matricial para conocer los desplazamientos en la superficie de un medio elástico estratificado ante incidencia de un campo de ondas planas de corte polarizadas horizontalmente u ondas *SH* (Haskell, 1953). Los estratos son homogéneos e isótropos y sobreyacen a un semiespacio elástico (Figura 1).

MÉTODO DE THOMSON-HASKELL

La ecuación de movimiento de un medio continuo, homogéneo, isótropo y elástico lineal se escribe como (Fung, 1977)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

donde b_i = vector de fuerzas de cuerpo, σ_{ij} = tensor de esfuerzos ($i, j = x, y, z$), ρ = densidad de masa y $u_i = (u, v, w)$ es el vector de desplazamientos definido en un sistema cartesiano x, y, z .

Considerando sólo el caso de ondas de corte SH, el vector de desplazamientos lo escribimos como $u_i = (0, v(x, z, t), 0)$. Para este caso los componentes del tensor de esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ y τ_{xz} son nulos. Omitiendo las fuerzas de cuerpo, (2.1) queda como

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Para esta ecuación se propone la siguiente solución

$$v(x, z) = \zeta_1(k, z, \omega) \exp[i(\omega t - kx)] \quad (2.3)$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda, $c = \omega/\beta \sin \theta$ es la velocidad de fase, $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ es la velocidad de ondas de corte, μ es el

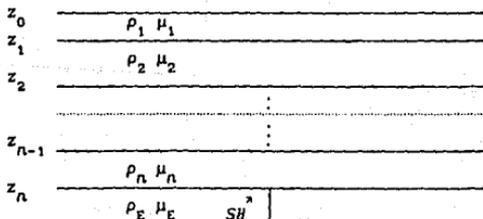


Figura 1. Modelo de estratos homogéneos sobre un semiespacio para incidencia de ondas SH.

módulo de rigidez al cortante, θ es el ángulo de incidencia medido con respecto a la vertical, $i = \sqrt{-1}$ y ℓ_1 es la amplitud del desplazamiento y es función del número de onda, de la profundidad y de la frecuencia de excitación.

Los componentes del tensor de esfuerzos se escriben como

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \mu \frac{d\ell_1}{dz} \exp[i(\omega t - kx)] \quad (2.4)$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = -ik\mu \ell_1 \exp[i(\omega t - kx)] \quad (2.5)$$

Definamos ahora

$$\ell_2 = \mu \frac{d\ell_1}{dz} \quad (2.6)$$

Al sustituir las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) en la ecuación de movimiento (2.2) resulta

$$\frac{d\ell_2}{dz} = (k^2\mu + \rho\omega^2) \ell_1 \quad (2.7)$$

Ahora, es posible escribir la ecuación de movimiento de manera alternativa como un par de ecuaciones diferenciales ordinarias en forma matricial

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\mu \\ k^2\mu - \omega^2\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

donde ℓ_1 y ℓ_2 representan el valor de los desplazamientos y esfuerzos en todo el medio y se denominan componentes del vector desplazamiento-esfuerzo para ondas SH.

En forma abreviada (2.8) se puede escribir como

$$\frac{df}{dz} = A f \quad (2.9)$$

donde A es una matriz que depende de las propiedades mecánicas del medio y del ángulo de incidencia y f es el vector desplazamiento-esfuerzo.

Una solución para esta ecuación es (Aki y Richards, 1980)

$$f = v \exp[\lambda_j(z-z_0)] \quad , \quad j = 1, 2 \quad (2.10)$$

aquí, λ representa los valores característicos de la matriz A , v es el vector característico o eigenfunción correspondiente a λ_j y z_0 es una profundidad de referencia.

Para encontrar los valores característicos se debe cumplir que el determinante $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad; así

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/\mu \\ -\mu^2 - \omega^2/\rho & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2/\rho - k^2 = 0 \quad (2.11)$$

Si se define el número de onda vertical η como

$$\eta^2 = (\omega^2/\rho - k^2) \quad (2.12)$$

se obtiene, de (2.11), que $\lambda_{1,2} = \pm i\eta$.

Sustituyendo los valores de λ en la ecuación (2.10) se obtienen dos soluciones de la ecuación (2.9)

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i\mu\eta \end{bmatrix} \exp(i\eta(z-z_0))$$

y

$$f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\mu\eta \end{bmatrix} \exp(-i\eta(z-z_0))$$

La primera solución (f_1) representa el vector desplazamiento-esfuerzo para ondas SH ascendentes mientras que la segunda (f_2) representa el correspondiente vector para ondas SH descendentes.

Es posible también escribir el vector desplazamiento-esfuerzo

como

$$f = Fw, \quad (2.13)$$

donde F es una combinación lineal de las dos soluciones anteriores la cual se factoriza en una matriz E de los eigenvectores de A y una matriz A con los factores verticales de propagación,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\mu\eta - i\mu\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp[i\eta(z-z_0)] & 0 \\ 0 & \exp[-i\eta(z-z_0)] \end{pmatrix} = E A \quad (2.14)$$

y w es un vector de pesos para las amplitudes de las ondas ascendentes \hat{S} y descendentes \hat{s} .

Al invertir la matriz F se pueden determinar las amplitudes del campo incidente y reflejado; F^{-1} queda entonces como

$$F^{-1} = A^{-1} E^{-1} = \frac{1}{2i\mu\eta} \begin{pmatrix} \eta\mu\exp[-i\eta(z-z_0)] & -i\exp[-i\eta(z-z_0)] \\ \eta\mu\exp[i\eta(z-z_0)] & i\exp[i\eta(z-z_0)] \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

y en forma simplificada, como

$$\begin{pmatrix} \hat{S} \\ \hat{s} \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

Por otra parte definamos la matriz propagadora como

$$P(z, z_0) = I + \int_{z_0}^z A(\xi_1) d\xi_1 + \int_{z_0}^z A(\xi_1) \int_{z_0}^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \dots \quad (2.17)$$

Al derivar con respecto a z esta matriz satisface también la ecuación (2.9), es decir

$$\frac{d}{dz} P(z, z_0) = A(z) P(z, z_0) \quad (2.18)$$

además, de la ecuación (2.17), $P(z_0, z_0) = I$; de donde se obtiene la propiedad principal de esta matriz

$$f(z) = P(z, z_0) f(z_0). \quad (2.19)$$

Por lo tanto podemos usar a $P(z, z_0)$ para generar el vector desplazamiento-esfuerzo a una profundidad z .

Como $A(z)$ es constante dentro de un estrato, al resolver las integrales de la ecuación (2.17) el propagador toma la forma simple

$$P(z, z_0) = I + (z-z_0)A + \frac{1}{2} (z-z_0)^2 AA + \dots = \exp[(z-z_0)A] \quad (2.20)$$

Con objeto de expresar de manera más sencilla esta matriz propagadora, que implica evaluar la exponencial de una matriz, se recurre, por ejemplo, a la fórmula de Sylvester (Aki y Richards, 1980). Para una matriz cuadrada A de orden n con distintos eigenvalores λ

$$F(A) = \sum_{k=1}^n F(\lambda_k) \frac{\prod_{m \neq k} (A - \lambda_m I)}{\prod_{m \neq k} (\lambda_k - \lambda_m)} \quad (2.21)$$

y utilizando la matriz A definida en (2.8) como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/\mu \\ k^2\mu - \omega^2\rho & 0 \end{bmatrix}$$

en la fórmula de Sylvester (2.21), la matriz propagadora P para la capa n queda como

$$P(z, z_0) = \begin{bmatrix} \cos[(z-z_0)\eta_n] & (\mu_n \eta_n)^{-1} \sin[(z-z_0)\eta_n] \\ -\mu_n \eta_n \sin[(z-z_0)\eta_n] & \cos[(z-z_0)\eta_n] \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

donde $\eta_n = (\omega^2/\beta_n^2 - \omega^2/\beta_c^2 \sin^2\theta)^{1/2}$ es el número de onda vertical de la capa n , β_n es la velocidad de propagación de ondas de corte en la capa n y β_c es la velocidad en el semiespacio.

Considérese ahora la ecuación (2.16), para relacionar el campo incidente con el vector desplazamiento-esfuerzo en la base de la estratigrafía; se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{S} \\ \hat{S} \end{bmatrix} &= F^{-1} P(z_n, z_{n-1}) P(z_{n-1}, z_{n-2}) \dots P(z_1, z_0) \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}_{z=0} \\ &= R \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}_{z=0} \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde R es el producto de matrices

$$F^{-1} P(z_n, z_{n-1}) P(z_{n-1}, z_{n-2}) \dots P(z_1, z_0).$$

Como en $z = 0$, $\ell_2 = 0$ por efecto de superficie libre entonces

$$\ell_1|_{z=0} = \hat{S} / R_{11}, \quad (2.24)$$

expresión que permite evaluar el campo de desplazamientos en la superficie de un medio estratificado en términos del campo incidente \hat{S} .

III ONDAS SUPERFICIALES

En un sismograma se reconocen arribos de ondas *P*, que son ondas longitudinales, seguidos por ondas de mayor amplitud conocidas como ondas *S* u ondas transversales y arribos tardíos de ondas de periodo largo que viajan en las capas más superficiales de la Tierra. En 1885, Lord Rayleigh, físico inglés que estudiaba problemas acústicos, demostró la existencia de ondas en la superficie libre de un sólido elástico. Este tipo de ondas se conocen como ondas de Rayleigh y su propagación no está limitada a medios estratificados; estas se pueden propagar también a través de un semiespacio homogéneo. El movimiento de las partículas generado por las ondas de Rayleigh sigue trayectorias elípticas con ciclos retrógrados (a diferencia de los ciclos prógrados en los líquidos) en el plano vertical que contiene a la dirección de propagación. La amplitud de las ondas de Rayleigh decrece de manera exponencial con la profundidad.

En 1911, el también inglés A. H. Love, resolvió el problema de ondas propagándose en una capa superficial. Este tipo de ondas se encuentran polarizadas en un plano horizontal perpendicular a la

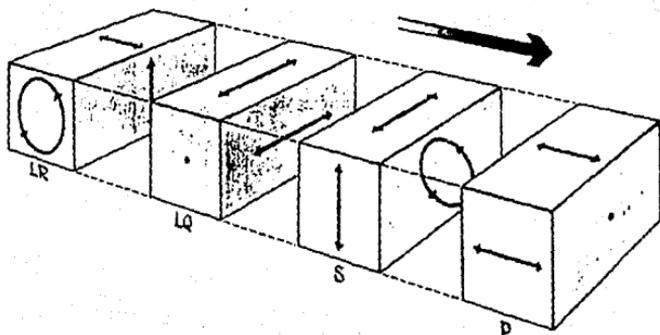


Figura 2. Movimiento de las partículas para ondas P, S, LQ y LR. LQ se refiere a ondas de Love (long y Quervellen) y LR a ondas de Rayleigh.

dirección de propagación y se conocen como ondas de Love. A diferencia de las ondas de Rayleigh, no muestran movimiento vertical y se observan en los componentes horizontales de un sismograma. La Figura 2 muestra el movimiento que describen las partículas para los distintos tipos de ondas.

A continuación se estudia la propagación de ondas de Love en un medio con estratos homogéneos.

ONDAS DE LOVE

Considérese un semiespacio elástico, homogéneo e isótropo en el cual se coloca como referencia un sistema de coordenadas cartesianas x, z , donde el eje x es horizontal y apunta a la derecha y el eje z apunta hacia abajo. El campo de desplazamientos en este medio se escribe como $u_y = v(x, z, t)$, y de acuerdo con la ley de Hooke,

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

Sustituyendo estos esfuerzos en la ecuación (2.2) con $\beta = \sqrt{\rho/\mu}$ se llega a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de separación de variables

$$v = X(x) Z(z) T(t) \quad (3.2)$$

con lo que la ecuación (3.1) toma la forma

$$X'' Z T + X Z'' T - 1/\beta^2 X Z T'' = 0. \quad (3.3)$$

Si se divide toda la ecuación por el término $X Z T$ y se definen las nuevas variables $k^2 = X''/X$, $m^2 = Z''/Z$ y $\omega^2 = T''/T$, la ecuación (2.3) queda como

$$k^2 + m^2 - \omega^2/\beta^2 = 0. \quad (3.4)$$

Si $k = \omega/c$, siendo c la velocidad de fase

$$m = k \{c^2/\beta^2 - 1\}^{1/2}. \quad (3.5)$$

De esta forma la variación espacial y temporal del campo de desplazamientos v se puede escribir como

$$v = A \exp[-imz] \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (3.6)$$

Aquí, A representa la amplitud del campo de desplazamientos. Cuando la velocidad de fase c es mayor que la velocidad del medio β , el valor de m es real y la ecuación (3.6) representa ondas de cuerpo del tipo SH. Si consideramos el caso $c < \beta$, entonces m es una

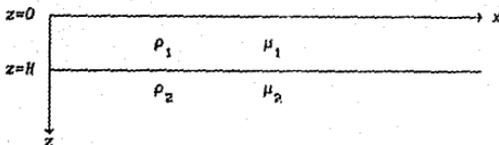


Figura 3. Estrato homogéneo sobre un semiespacio, medio más simple para la generación de ondas de Love.

cantidad imaginaria y se escoge el signo adecuado de (3.6) para tener ondas inhomogéneas que se atenúan con la profundidad. Entonces (3.6) queda como

$$v = A \exp[-k(1 - c^2/\beta^2)^{1/2} \exp\{i(\omega t - kx)\}]. \quad (3.7)$$

La condición de superficie libre impone que allí el campo de esfuerzos (en $z=0$) sea nulo; esto es

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = -\mu A k (1 - c^2/\beta^2)^{1/2} = 0$$

y por lo tanto $A=0$, lo que implica la inexistencia de ondas de Love en un semiespacio.

Para el caso de un estrato que sobreyace al semiespacio (Figura 3) el campo de desplazamientos v , que es solución de la ecuación (3.1), dentro y fuera del estrato se escribe como

$$\begin{aligned} v &= (\sum_1 \exp\{im_1 z\} + \sum_1 \exp\{-im_1 z\}) \exp\{i(\omega t - kx)\} \quad 0 < z < H \\ &= \sum_2 \exp\{-im_2 z\} \exp\{i(\omega t - kx)\} \quad H < z, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde se han eliminado ondas que crecen exponencialmente con la profundidad, ya que no tienen explicación física en el caso aquí estudiado.

En la ecuación (3.8) $m_1 = k(c_1^2 \beta_1^2 - 1)^{1/2}$ con $\text{Im}(m_1) \leq 0$, donde Im representa cantidad imaginaria y $\beta_1 = (\mu_1 / \rho_1)^{1/2}$.

Se ha considerado que la velocidad β_1 es menor que la velocidad β_2 del semiespacio. ζ_1 , $\dot{\zeta}_1$ y $\dot{\zeta}_2$ son variables desconocidas. Por condición de superficie libre $\zeta_1 = \dot{\zeta}_1$ y las otras condiciones que se deben satisfacer son la continuidad de desplazamientos y de esfuerzos en la frontera de los medios ($z=H$), quedando el sistema de ecuaciones como

$$\begin{aligned} 2\dot{\zeta}_1 \cos m_1 H &= \dot{\zeta}_2 \exp[-Im_2 H] \\ 2\mu_1 m_1 \dot{\zeta}_1 \operatorname{sen} m_1 H &= i\mu_2 m_2 \dot{\zeta}_2 \exp[-Im_2 H] \end{aligned} \quad (3.9)$$

o bien,

$$\frac{\dot{\zeta}_2}{\dot{\zeta}_1} = \frac{2 \cos m_1 H}{\exp[-Im_2 H]} = \frac{2\mu_1 m_1 \operatorname{sen} m_1 H}{i\mu_2 m_2 \exp[-Im_2 H]} \quad (3.10)$$

de donde se deduce la ecuación característica para ondas de Love

$$F(k) = \tan m_1 H - \frac{i\mu_2 m_2}{\mu_1 m_1} = 0 \quad (3.11)$$

ecuación que se puede obtener también mediante la condición de determinante nulo para una solución consistente del sistema.

La ecuación (3.11) da eigenvalores k_n que satisfacen $F(k) = 0$ o valores de velocidad de fase $c_n = \omega/k_n$ si sustituimos el valor de m quedando (3.11) como

$$\tan \omega H (1/\beta_1^2 - 1/c^2)^{1/2} = \frac{\mu_2 (1/c^2 - 1/\beta_2^2)^{1/2}}{\mu_1 (1/\beta_1^2 - 1/c^2)^{1/2}} \quad (3.12)$$

La solución gráfica de esta ecuación se muestra en la Figura 4. La curva punteada representa el término derecho de la ecuación (3.12). Ambos términos se grafican como funciones de $H/\beta_1(1-\beta_1^2/c^2)^{1/2}$.

Las raíces reales de c se encuentran dentro de los límites β_1 y β_2 , es decir $\beta_1 < c < \beta_2$. Para una frecuencia ω dada se encuentra un número finito de raíces reales. Para $\omega = 0$ solo existe una raíz que aparece en $c = \beta_2$. La Figura 5 muestra la primera rama de las tangentes en línea punteada para diferentes frecuencias. La velocidad de fase que corresponde a la abscisa del punto donde se intersectan ambas curvas representa la velocidad de propagación del modo fundamental de ondas de Love. Al incrementarse la frecuencia entra una segunda curva tangente (en línea continua), y aparece cuando π/ω es igual a $H/\beta_1(1-\beta_1^2/\beta_2^2)^{1/2}$. La curva tangente

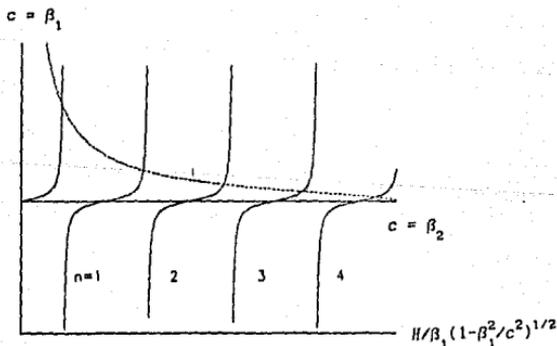


Figura 4. Raíces de la ecuación característica de ondas de Love para una ω fija.

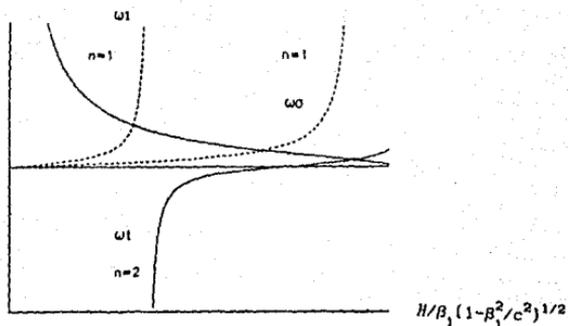


Figura 5. Tangentes del modo fundamental para las frecuencias ω_0 y ω_1 ($\omega_1 > \omega_0$) en línea punteada y tangente del primer modo superior para la frecuencia ω_1 en línea continua.

n aparece cuando ω es igual a

$$\omega_c = \frac{n\pi\beta_1}{H(1 - \beta_1^2/\beta_2^2)^{1/2}} \quad (3.13)$$

que se conoce como la frecuencia de corte del modo n . La Figura 4 muestra cuatro modos superiores ($n = 1, 2, 3, 4$). El número de raíces entre las velocidades β_1 y β_2 corresponde al número de formas modales que se propagan con una frecuencia ω . La excitación de los distintos modos depende de la naturaleza de la fuente sísmica.

La Figura 6 muestra una gráfica de velocidad de fase como función de la frecuencia. En ella se observa la aparición de los modos a las frecuencias de corte ω_c con un valor de $c = \beta_2$, y al aumentar la frecuencia todos los modos tienden a la velocidad del

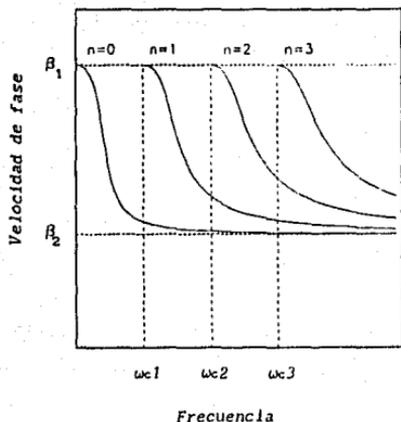


Figura 6. Curvas de dispersión de ondas de Love. Se muestra el modo fundamental ($n=0$) y 3 modos superiores ($n=1, 2, 3$). El modo n aparece a la frecuencia de corte ω_{cn} .

estrato. En la práctica esto significa que ondas de periodo largo alcanzan primero la estación de registro que las ondas de periodo más corto. A este fenómeno se le conoce como *dispersión de ondas*. La velocidad de propagación de ondas dispersivas no es invariable con la frecuencia ya que ésta disminuye al aumentar la frecuencia (dispersión inversa). El término dispersión apareció con los trabajos de Kronig y Kramers en óptica (Hilgevoord, 1962) como resultado de la dependencia del índice de refracción con la longitud de onda (el índice de refracción tiene una parte real determinada por la velocidad de fase y un término imaginario determinado por la absorción). En problemas de dispersión se supone que el sistema físico que se estudia obedece leyes causales (Aki y Richards, 1980).

Las curvas de la Figura 6 se conocen como *curvas de dispersión*. En estas se muestra la dependencia de las velocidades de fase y de grupo en función del periodo o la frecuencia. La velocidad de fase de una onda es la velocidad con que se propaga una señal con

determinada frecuencia (señal monocromática) y la velocidad de grupo para una frecuencia ω se refiere a la velocidad con que viaja un paquete de energía alrededor de esta frecuencia. En el apéndice se muestra la relación que existe entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo.

Una vez obtenidas las raíces de la ecuación (3.12) la eigenfunción correspondiente a cada modo se puede obtener mediante

$$\begin{aligned}
 v_n &= 2S_1 \cos m_1 z \exp[i(\omega t - kx)] & 0 < z < H \\
 &= 2S_2 \cos m_1 H \exp[-im_2(z-H)] \exp[i(\omega t - kx)] & H < z
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

La Figura 7 muestra la dependencia en z del modo fundamental y los siguientes tres modos superiores. Los desplazamientos se muestran normalizados. Cuando $z \rightarrow \infty$ los desplazamientos tienden a cero. Por otro lado, los desplazamientos en la capa se anulan para todos los valores de x y t cuando $mz = (2n-1)\pi/2$ con $n = 1, 2, 3, \dots$; los planos paralelos a la superficie correspondientes al valor de desplazamiento nulo se conocen como planos modales (Ben-Menahem y Singh, 1981). Para el modo fundamental no hay planos modales, y para el n -ésimo modo superior existen $(n-1)$ planos modales.

De la ecuación (3.12) también se pueden obtener valores complejos de c , que se interpretan como modos de propagación que viajan atenuándose de manera exponencial con el tiempo. Estos se conocen como modos evanescentes (*leaky modes*) (Aki y Richards, 1980). Para obtener una solución completa que incluya todos los modos se requiere localizar los polos de la ecuación (3.12) y evaluar integrales adicionales por el método de los residuos (Arfken, 1985). En el modelo que se estudia en el siguiente capítulo sólo se tomarán en cuenta las contribuciones de los modos normales (valores de c reales). Para un análisis completo del problema se sugiere consultar a Kennett (1985).

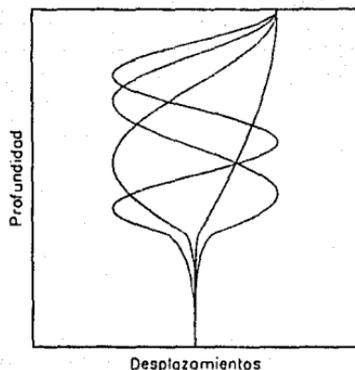


Figura 7. Eigenfunciones del modo fundamental y tres modos superiores de ondas de Love.

ONDAS SUPERFICIALES EN MEDIOS ESTRATIFICADOS

Como se ha visto, la dispersión de las ondas es consecuencia de la heterogeneidad del medio. En este caso la heterogeneidad se presenta por un cambio abrupto en las propiedades del medio. En un semiespacio infinito, en el que los parámetros del medio dependen de la coordenada z ($\rho=\rho(z)$ y $\mu=\mu(z)$), se utilizan técnicas variacionales que permiten calcular la velocidad de grupo, la atenuación y las derivadas parciales de la velocidad de fase respecto a los parámetros del medio (Ben-Menahem y Singh, 1981; Aki y Richards, 1980). Otro aspecto importante es el efecto de la anisotropía en ondas superficiales. En problemas de anisotropía, las ondas se propagan con distinta velocidad según la dirección de propagación. Una representación de este efecto es que la trayectoria de un rayo no es perpendicular al frente de onda, como es el caso de un medio isótropo. Las curvas de dispersión cambian en un porcentaje pequeño cuando existe anisotropía (Bullen y Bolt, 1985).

Cálculo de Curvas de Dispersión.

El cálculo de las curvas de dispersión en un medio homogéneo estratificado es un problema de eigenfunciones o modos de propagación. La solución para el vector desplazamiento-esfuerzo se puede resolver por integración directa de la ecuación (2.8) usando métodos de integración numérica (Takeuchi y Saito, 1972), o bien por el método matricial que considera a la Tierra como un medio compuesto de capas horizontales homogéneas. Esta técnica comenzó con el trabajo de Thomson (1950) para ondas de cuerpo. Haskell (1953) lo generalizó a ondas superficiales y Schwab y Knopoff (1970) lo optimizaron y adaptaron a una computadora.

Para resolver por integración el problema de eigenvalores se comienza por integrar la ecuación (2.8) desde la profundidad de la última capa z_n con valores iniciales de $t_1(z_n) = 0$ y $t_2(z_n) = 1$. Se usa un valor de ensayo de k para una frecuencia ω dada. El proceso se repite para varios valores de k hasta que el valor de los esfuerzos sea nulo en la superficie, es decir $t_2(0) = 0$.

El uso del método matricial (Capítulo I) para ondas de Love requiere relacionar el vector desplazamiento-esfuerzo con la presencia o ausencia de las ondas ascendentes y descendentes del semiespacio. De la ecuación (2.23) el vector de pesos w en el semiespacio se escribe como

$$w_{n+1} = \begin{Bmatrix} \dot{S} \\ \dot{S} \end{Bmatrix}_{n+1} F^{-1} P(z_n, z_0) \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}_{z=z_0} \quad (3.15)$$

Por efecto de superficie libre, $t_2(z_0) = 0$ y $\dot{S}_{n+1} = 0$ de la condición de irradiación, de tal forma que

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{S}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1(z_0) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Esto nos lleva a un problema de eigenvalores en el que

$$R_{11} = 0, \quad (3.17)$$

que es equivalente a la ecuación característica para ondas de Love ($F(k) = 0$). Para encontrar las raíces de esta ecuación se fija el valor de ω o c y se sustituyen los parámetros de las capas en R_{11} . Si ω es el valor fijo, se incrementa el valor de c , por ejemplo, y se calcula un nuevo valor hasta encontrar un cambio de signo en F . Una vez obtenido el valor de c , se calcula la eigenfunción utilizando el método matricial antes descrito.

Para aproximar el valor de la raíz, una vez encontrado un cambio de signo en $F(k)$ se puede seguir uno de los siguientes procedimientos (Schwab y Knopoff, 1972)

1. Por interpolación lineal se obtiene un nuevo valor c_2 de tal forma que $c_1 < c_2 < c_3$. Se calcula el nuevo valor $F(\omega/c_2)$ y se continúa con el valor que difiera de signo $F(\omega/c_1)$ o $F(\omega/c_3)$.
2. El nuevo valor se obtiene por bisección [$c_2 = (c_1 + c_3)/2$] y se aplica el mismo procedimiento del punto anterior.
3. Se obtiene un nuevo valor de c por bisección o interpolación. Los tres valores de F se emplean para calcular nuevas posiciones de la raíz usando interpolación cuadrática $F = e_0 + e_1 c + e_2 c^2$.

Al calcular las raíces con este método en una computadora aparece un problema cuando el cociente entre la profundidad a la última capa H y la longitud de onda λ , que es el número de longitudes de onda desde la superficie hasta el último estrato, excede el valor máximo de punto flotante MAX que se acepta. De acuerdo con Schwab y Knopoff (1972), este valor es ligeramente menor que $\ln(10^2 \text{ MAX})/2\pi$. Este problema se resuelve normalizando las matrices.

El valor del incremento de la velocidad debe ser apropiado al problema que se esté tratando. Para periodos de interés en estudios de ondas superficiales un intervalo de 0.1 km/s parece ser satisfactorio en la localización de las raíces.

Para dispersión de ondas P - SV en un medio estratificado, las matrices que se obtienen son de cuarto orden. Se puede seguir el mismo tratamiento aplicando el método matricial para los componentes del vector de desplazamientos u y w .

IV FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considérese un depósito superficial estratificado y un semiespacio elástico, homogéneo e isótropo como se muestra en la Figura 8. Fuera del depósito el campo de desplazamientos está formado por ondas planas SH que inciden en este con un ángulo θ y ondas que han sido difractadas por las paredes verticales del depósito. Dentro del depósito la respuesta está formada por la superposición de un campo unidimensional de ondas y un campo de ondas de Love generadas en los extremos del depósito.

Fuera del depósito escribimos al campo v que satisface la ecuación de onda (3.1) como

$$v_E = v^{(0)} + v^{(d)} \quad (4.1)$$

donde v denota al semiespacio, $v^{(0)}$ = desplazamientos del campo libre y $v^{(d)}$ = desplazamientos del campo difractado.

El campo libre está formado por ondas planas incidentes y reflejadas en ausencia del depósito superficial. Este campo lo

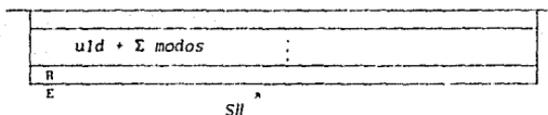


Figura 8. Depósito superficial estratificado (región R) sobre un semiespacio homogéneo (región E).

escribimos como

$$v^{(0)} = 2 \cos(\omega z \cos \theta / \beta_E) \exp(-iux \sin \theta / \beta_E) \quad (4.2)$$

Para obtener el campo difractado se utilizan fuentes lineales para ondas SH en un semiespacio (Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979; Bravo et al., 1988). Esta solución está dada por la función de Green, G, de tal manera que

$$v^{(d)} = \sum_{n=1}^N A_n G_n \quad (4.3)$$

Aquí, N representa el número de fuentes y A_n son coeficientes complejos desconocidos para cada fuente. Estas funciones satisfacen la condición de irradiación al infinito (Sommerfeld, 1949) y de tracciones nulas en la superficie del semiespacio. Debido a que estas funciones son singulares en su origen, las fuentes se localizan fuera de la región E. Para este problema las funciones de Green están dadas por

$$G_n = 1/4 (H_0^{(2)}(\omega/\beta_E r_n) + H_0^{(2)}(\omega/\beta_E r'_n)) \quad (4.4)$$

donde $r_n = [(x-x_n)^2 + (z-z_n)^2]^{1/2}$ = distancia entre el punto de observación, localizado en (x, z) y la fuente, localizada en (x_n, z_n) .

z_n) y $r_n' = [(x-x_n)^2 + (z+z_n)^2]^{1/2}$ = distancia entre el punto de observación y la imagen de la fuente. En esta ecuación $H_0^{(2)}$ = función de Hankel de segunda especie y orden cero. Estas funciones representan ondas cilíndricas SH que se propagan a partir de su origen en dirección radial con velocidad β_e .

El campo refractado se construye con la contribución de una parte unidimensional que corresponde a la solución para un medio estratificado infinito (descrita en el Capítulo II) y una contribución de modos de ondas de Love propagándose en la dirección positiva y negativa del eje x; esto es

$$v_R = v_{1D} + \sum_{m=-N}^{m=0} B_m v_m(z) \exp[-ik_m x] + \sum_{m=0}^N C_m v_m(z) \exp[ik_m x], \quad (4.5)$$

donde n denota la región interna del depósito, v_{1D} es la solución unidimensional, N es el número de modos propagándose a la frecuencia ω y B_m y C_m son coeficientes complejos para modos de ondas de Love que se propagan en sentido positivo y negativo del eje x, respectivamente.

El campo unidimensional está dado por la ecuación (2.24), es decir

$$v_{1D} = \hat{S}/R_{11}. \quad (4.6)$$

Esta solución satisface la condición de tracción nula en la superficie y la condición de continuidad de desplazamientos y tracciones en la interfaz entre los estratos. Adicionalmente se cumplen estas condiciones de continuidad a lo largo de la frontera entre el semiespacio y el depósito estratificado.

Para los modos de Love la variación con z se describe por

$$v_m(z) = \xi_1(k_m, z, \omega). \quad (4.7)$$

En esta ecuación ξ_1 es el componente de desplazamientos del vector

desplazamiento-esfuerzo (definido en la ecuación (2.8)) y k_m es el número de onda que se obtiene de calcular las velocidades de fase c_m para el medio estratificado al obtener los eigenvalores de la ecuación (3.17), y $k_m = k_{-m}$. El valor de ℓ_1 en la superficie se hace igual a 1 y para una profundidad z dentro del depósito ℓ_1 se obtiene multiplicando las matrices de cada estrato de la superficie al semiespacio usando la matriz propagadora descrita en la ecuación (2.22).

Para la región R se considera que el campo de ondas sufre atenuación de tipo histerético. Dado que se supone un comportamiento elástico-lineal, la única forma de disipar energía sería por atenuación con la distancia. Sin embargo, la disipación de energía debido a la fricción entre las partículas puede ser grande, incluso en el rango elástico lineal. Por esta razón se considera un modelo viscoelástico lineal, para tomar en cuenta, de manera aproximada, tal disipación de energía.

En un medio viscoelástico el módulo de rigidez al cortante queda como

$$\mu^* = \mu \left[1 + i \frac{\omega \eta}{\mu} \right]. \quad (4.8)$$

En esta expresión la parte imaginaria corresponde al amortiguamiento viscoso y η es la viscosidad del medio que se obtiene en el modelo Kelvin-Voigth (Ben-Menahem y Singh, 1981). Para cierto intervalo de frecuencias el término imaginario se supone independiente de la frecuencia y (4.7) se escribe como

$$\mu^* = \mu [1 + 2i\xi]. \quad (4.9)$$

Aquí, ξ es el factor de amortiguamiento histerético.

Haciendo estas consideraciones, la velocidad de ondas de corte queda como

$$\beta^* = \sqrt{\mu^* / \rho} = \sqrt{\mu / \rho} [1 + 2i\xi]^{1/2}, \quad (4.10)$$

y una forma de expresar (4.9) sin el radical complejo es

$$\beta^* = \beta \left[\sqrt{1 - \xi^2} + i\xi \right] \quad (4.11)$$

En la solución unidimensional (ecuación (4.6)) se utilizan valores de μ^* y β^* para calcular las matrices de cada estrato mientras que en el cálculo de los modos (ecuación (4.7)) y de las velocidades de fase c_m se usan valores de μ y β . El amortiguamiento sólo se toma en cuenta en el factor de propagación de cada modo (ecuación (4.5)).

Para el cálculo de los coeficientes A_n , B_m y C_m resta aplicar condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones en las fronteras verticales del depósito. Debido a que no es posible satisfacer de manera analítica tales condiciones de frontera, se recurre a una solución numérica que permitirá obtener los valores de los esos coeficientes indeterminados. La satisfacción de dichas condiciones se hace en puntos discretos de las fronteras verticales.

Nótese que satisfacer las condiciones de continuidad en las paredes del depósito es suficiente para obtener los coeficientes desconocidos, lo que no implica el cumplimiento de las condiciones en la frontera horizontal, ya que el campo refractado no toma en cuenta el efecto de las fuentes por debajo de esta frontera. Para depósitos con una longitud mucho mayor que su espesor este efecto es despreciable.

V SOLUCIÓN NUMÉRICA

Al igualar los desplazamientos y las tracciones en los extremos del depósito tenemos

$$\begin{aligned} v_E &= v_R \\ \mu_E \frac{\partial v_E}{\partial n} &= \mu_R \frac{\partial v_R}{\partial n} \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde n representa la normal interior de las paredes verticales del depósito, se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma

$$A \vec{x} = B. \quad (5.2)$$

El número de ecuaciones corresponde al doble de puntos de colocación en las paredes (desplazamientos y esfuerzos) y el número de incógnitas al número de fuentes del campo difractado más el número de modos de Love que se permiten propagar dentro del depósito. La matriz B está formada por los desplazamientos y tracciones del campo libre y del campo unidimensional.

Una forma de resolver el sistema de ecuaciones es de manera que el error cuadrático medio sea mínimo. Este error se escribe como

$$c = \int_{\partial R} \left\{ |v_E - v_R|^2 + c \left| \mu_E \frac{\partial v_E}{\partial n} - \mu_R \frac{\partial v_R}{\partial n} \right|^2 \right\} dS. \quad (5.3)$$

En la ecuación (5.3) n es el vector normal a la interfaz entre las regiones ϵ y α . Para que c sea mínimo, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial A_n^*} &= 0, & n &= 1, 2, \dots, N, \\ \frac{\partial c}{\partial B_m} &= 0, & m &= -N, -N+1, \dots, 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

y

$$\frac{\partial c}{\partial C_m^*} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

donde $*$ denota complejo conjugado.

Una solución que minimiza el error cuadrático medio es (Noble y Daniel, 1977)

$$(A^*)^T A \bar{x} = (A^*)^T B, \quad (5.5)$$

$*$ denota compleja conjugada y T la transpuesta.

Al resolver este sistema, se encuentran los coeficientes A_n , B_m y C_m , los cuales al sustituirse en (4.3) y (4.5) permiten determinar el campo de desplazamientos en cualquier punto del semiespacio y de la región estratificada, respectivamente.

VI DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Generación de sismogramas sintéticos.

La ecuación (4.5) describe el comportamiento de un depósito confinado ante la incidencia de ondas armónicas SH en el dominio de la frecuencia, y se le conoce como *función de transferencia del sistema* la cual se define como la transformada de Fourier de la respuesta del sistema a un impulso unitario (Kulhánek, 1976). Esta función se representa en gráficas de frecuencia contra amplitud o fase.

Para obtener la serie en tiempo de la respuesta del sistema a una excitación dada se utiliza el teorema de convolución (Bracewell, 1978). La función de transferencia del sistema se multiplica por el espectro de frecuencias de la serie de tiempo de la excitación. La transformada de Fourier inversa de este producto se conoce como *sismograma sintético*. En este trabajo se utiliza el pulso de Ricker (Hosken, 1988) como señal incidente. La expresión del pulso está dada por

$$f(t) = C (a^2 - 0.5) \exp[-a^2] ,$$

donde C es la amplitud del pulso, $a = \pi(t - t_*)/t_p$, t_* = tiempo de retraso del pulso y t_p = periodo característico del pulso que permite controlar la frecuencia de excitación. La Figura 9 muestra la gráfica del pulso de Ricker con su par transformado de Fourier y el significado de los parámetros t_* y t_p . Para un pulso asimétrico se puede usar una expresión similar, dada por

$$f(t) = C a \exp[-a^2].$$

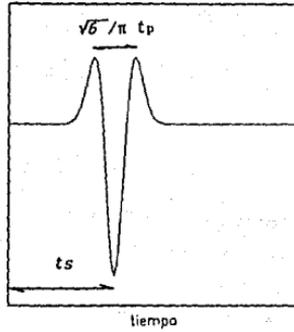
Diagramas $f-k$.

Un análisis sencillo que permite identificar la velocidad de fase y las características modales de la propagación es la obtención de diagramas en el plano frecuencia-número de onda o plano $f-k$. Estos diagramas se obtienen al aplicar la transformada de Fourier en el tiempo y en el espacio (Bracewell, 1978). Para los campos de ondas planas que se han estudiado, es posible obtener diagramas $f-k$ aplicando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (Kelly, 1983) a un campo de desplazamientos evaluado en puntos equiespaciados sobre la superficie de un medio, para un rango de frecuencias.

El primer problema que se estudia es el de un estrato limitado por una pared vertical en un extremo, tal como se muestra en la Figura 1. Rodríguez *et al.* (1990) presentan una solución analítica a este problema considerando que el estrato se encuentra limitado horizontal y verticalmente por una base y una pared rígidas en movimiento. El campo de desplazamientos en la superficie se obtiene sumando a la solución unidimensional la contribución de la pared vertical en forma de series de Fourier.

Para efectos de comparación con el modelo propuesto en este trabajo se utilizó un contraste de velocidades alto entre el

a)



b)

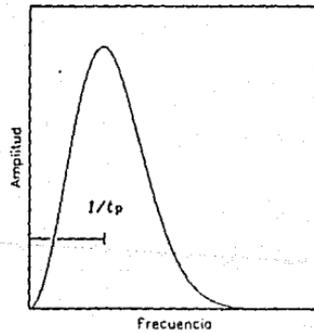


Figura 9. a) Pulso de Ricker simétrico. b) Transformada de Fourier del pulso de Ricker.

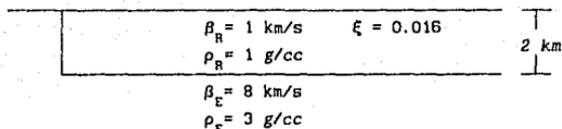


Figura 10. Estrato infinito limitado por una pared vertical.

semiospacio y el estrato para simular la base rígida (Figura 10). La Figura 11 muestra los espectros de amplitud de funciones de transferencia calculadas con ambos métodos a distancias de 1, 6 y 10 km a partir de la pared vertical. Las diferencias que se observan en baja frecuencia se deben a efectos de la difracción ya que el método aquí propuesto no considera la contribución de las fuentes en el campo difractado en la base del estrato. Este efecto es despreciable en puntos de observación lejanos de la pared.

Para estos cálculos empleando la solución con ondas de Love se usan 4 fuentes para formar el campo difractado y 3 puntos de colocación (debido a la senillez de la geometría) para satisfacer condiciones de frontera. En el cálculo del campo refractado sólo se utiliza el modo fundamental de ondas de Love, el cual es suficiente para reproducir el movimiento en la superficie.

Para estudiar el efecto que tiene la pared vertical en la respuesta del medio, en la Figura 12 se muestran gráficas de funciones de transferencia de la solución unidimensional (línea discontinua) y de la solución aquí obtenida (línea continua) para distancias de 10 y 20 km de la pared vertical. La respuesta se obtuvo para un ángulo de incidencia de 0° y 60° . Como se observa, la frontera vertical produce mayores amplitudes y frecuencias de resonancia adicionales en las funciones de transferencia que no son reproducidas por el modelo unidimensional. Para la respuesta unidimensional, el ángulo de incidencia modifica la amplitud pero no altera las frecuencias de resonancia. Sin embargo, la solución

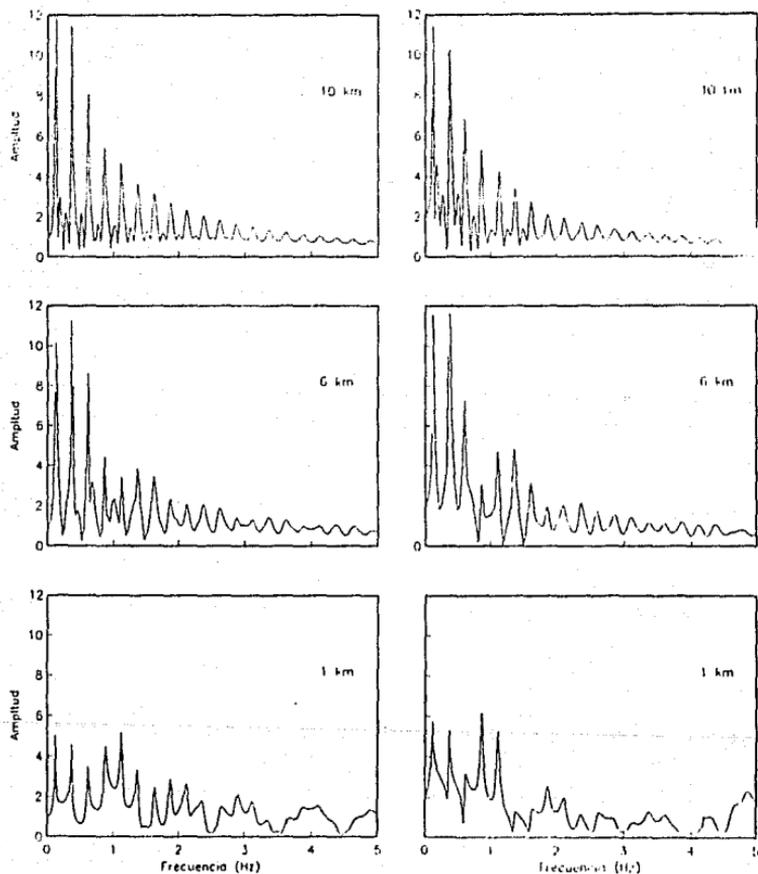


Figura 11. Funciones de transferencia calculadas en la superficie de un estrato limitado por una pared vertical y una base rígidas. En la parte izquierda se muestra la solución obtenida con series de Fourier y a la derecha con el método propuesto.

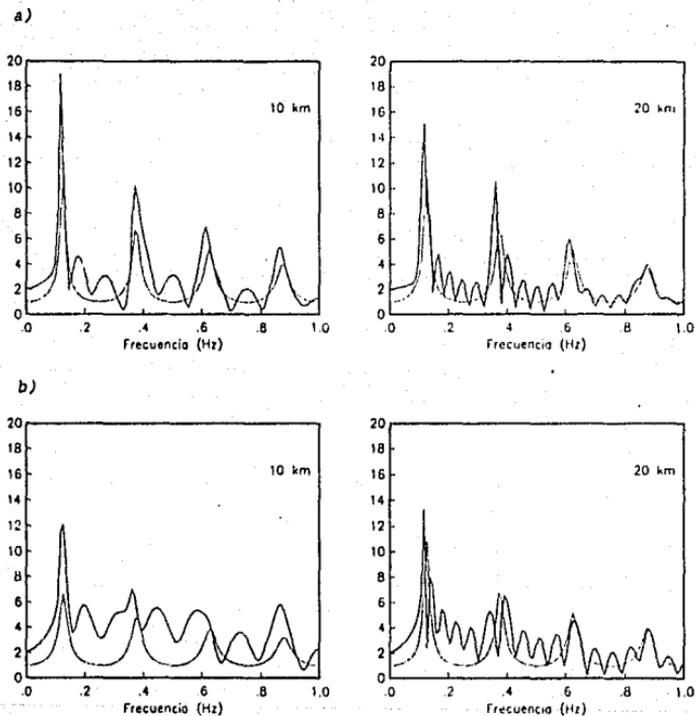


Figura 12. Funciones de transferencia obtenidas con la solución unidimensional (línea discontinua) y con el método híbrido para una incidencia de a) 0° y b) 60° .

de ondas de Love, presenta cambios en las frecuencias de resonancia y en la forma de las funciones.

Nótese que, debido a que en un rango de frecuencias muy bajas las condiciones de frontera no se satisfacen adecuadamente a lo largo de la frontera horizontal depósito-semiespacio, la función de transferencia calculada con el método propuesto inicia con valores cercanos a 2, a diferencia de las funciones de transferencia obtenidas con el método unidimensional que inician con una amplitud de 1 debido a que esta solución se encuentra normalizada con respecto a la amplitud del campo en superficie libre.

En la Figura 13 se muestran resultados en el dominio del tiempo obtenidos a partir de las funciones de transferencia de la Figura 12a usando un pulso de Ricker con $t_p = 6$ s como señal incidente. Se muestra primero el sismograma sintético de la solución unidimensional y luego el obtenido con el método de ondas de Love.

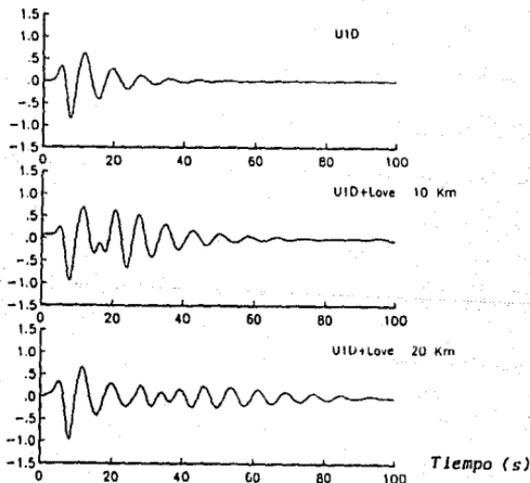


Figura 13. Sismogramas sintéticos obtenidos con un pulso de Ricker con $t_p = 6$ s.

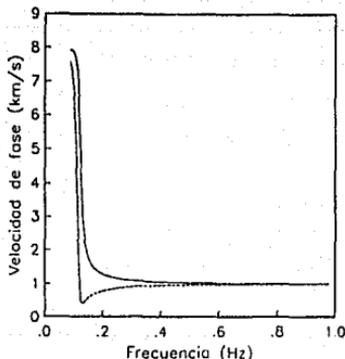


Figura 14. Modo fundamental de ondas de Love para el medio de la Figura 10. En línea discontinua se muestra la velocidad de grupo y en línea continua la velocidad de fase.

Se observa que el movimiento se prolonga por la presencia de las ondas de Love que viajan dentro del depósito de la Figura 10, a una velocidad que corresponde a la del estrato como se ve en la curva de dispersión del modo fundamental (Figura 14). En este caso, el periodo dominante de las ondas de Love (ver funciones de transferencia de la Figura 12) es de poco menos de 10 s, que es el periodo al cual la velocidad de grupo del modo fundamental es mínima. De hecho, la función de transferencia en ese periodo presenta una amplitud alta porque el periodo del estrato coincide con el periodo al que se presenta la velocidad de grupo mínima. Se puede observar de los sismogramas sintéticos (Figura 13) que las fases tardías producen un mayor alargamiento de la señal a 20 km de la pared que a 10 km. Este hecho se explica en la funciones de transferencia obtenidas a 20 km de la pared con el método híbrido (Figura 12) por un aumento en el número de frecuencias de resonancia en comparación a las obtenidas a 10 km.

En la Figura 15 se muestran sismogramas sintéticos obtenidos en 101 estaciones espaciadas cada 0.1 km para una incidencia de 0 y

60° (Figuras 15a y 15b respectivamente). Los primeros arribos corresponden al modo fundamental de ondas de Love. La máxima respuesta unidimensional se presenta a intervalos de tiempo $2H/\beta_R$, donde H es el espesor del estrato y β_R la velocidad de ondas de corte dentro del estrato. Debido al alto contraste de propiedades entre los medios, las fases de la solución unidimensional se invierten en la base del estrato. Por otra parte, las ondas superficiales producen un movimiento continuo de las partículas. Cuando la incidencia es de 60° el contenido de energía dentro del estrato es menor, ya que una mayor energía del campo incidente es reflejada hacia el semiespacio, pero la velocidad de propagación de las ondas de Love es la misma.

En la Figura 16 se muestra el análisis $f-k$ de los resultados de la Figura 15. Estos diagramas muestran claramente la superposición de los dos campos. En el diagrama de la Figura 16a, correspondiente a incidencia vertical, se distinguen dos velocidades de fase, una infinita (pendiente infinita) que corresponde al campo unidimensional y otra que corresponde a la velocidad de fase de las ondas de Love. En la Figura 16b se observa que el ángulo de incidencia modifica la velocidad de fase de la respuesta unidimensional, mientras que en las ondas de Love esta permanece constante. En la Figura 17 se muestra una ventana de los diagramas $f-k$ de la Figura 16 para una frecuencia máxima de 1 Hz y un número de onda máximo de 1 ciclo/km. En una frecuencia aproximada a 2 Hz el valor máximo de la respuesta unidimensional coincide con el valor máximo del modo fundamental. Obsérvese que para frecuencias muy bajas no es posible separar el campo unidimensional del modo de propagación de ondas de Love.

Considérese ahora un depósito cerrado en ambos extremos. Con el fin de comparar la bondad del método híbrido aquí propuesto, se estudia un modelo que utilizan Kawase y Aki (1989) para simular la respuesta sísmica del valle de México con base en un método de frontera. Este modelo tiene una extensión de 10 km, espesor de 1 km y velocidades de 1 y 2.5 km/s para el estrato y semiespacio, respectivamente. El valle se encuentra limitado por taludes con ángulos internos de 26.6° que le dan al valle una forma de

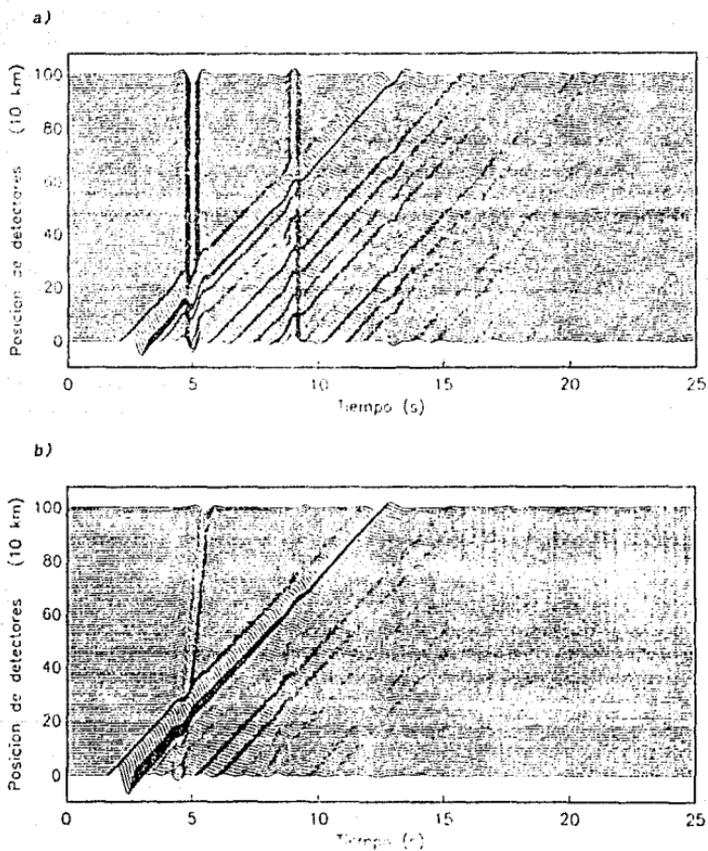


Figura 15. Sismogramas sintéticos obtenidos en 101 detectores colocados cada 0.1 km en la superficie del modelo de la Figura 10 para un pulso de periodo característico de 1 s. a) Incidencia de 0° y b) incidencia de 60° .

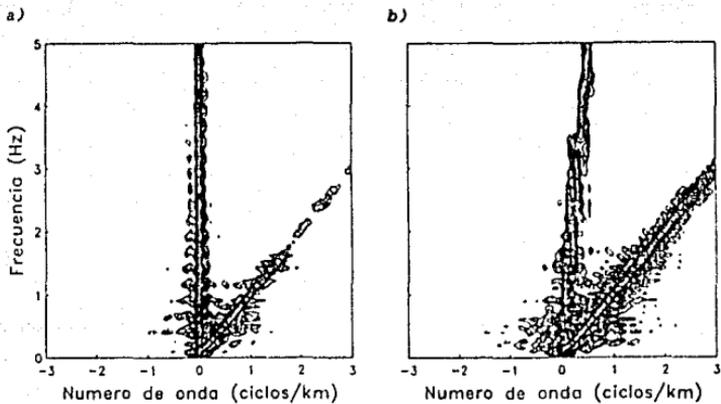


Figura 16. Diagramas f - k para los resultados de la Figura 6. Incidencia de, a) 0° y b) 60° .

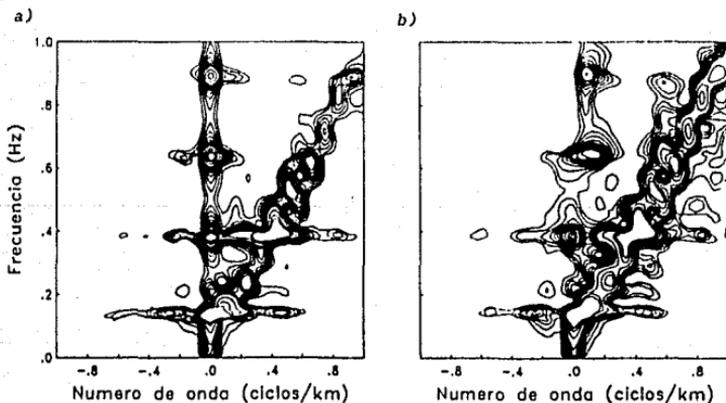


Figura 17. Acercamiento de los diagramas f - k de la Figura anterior.

trapecio. Debido a la dificultad que presenta la forma de este modelo para el método propuesto, se adopta un estrato confinado con paredes verticales (Figura 18).

Para este modelo, Kawase y Aki (1989) calculan funciones de transferencia hasta una frecuencia de 2 Hz. Para estudiar la respuesta en tiempo utilizan un pulso de Ricker con $t_p = 4$ s que corresponde al periodo natural del estrato, y un pulso con $t_p = 2$ s. Estos resultados y los obtenidos con el método propuesto se presentan en las Figuras 19 y 20. Los desplazamientos se evalúan en 49 estaciones separadas cada 0.25 km. En el cálculo de la respuesta usando el método con superposición de modos de ondas de Love, se usan 4 fuentes y 6 puntos de colocación y la frecuencia máxima alcanzada es de 5 Hz. Para el cálculo de las ondas de Love dentro del depósito se consideran los primeros dos modos. En este caso, la energía del campo de ondas superficiales se reparte entre el modo fundamental y el primer modo superior a partir de la aparición de este último como lo muestran las curvas de dispersión de la Figura 21. Como se observa en los sismogramas sintéticos (Figuras 19 y 20), el efecto de la diferencia en la pendiente de los taludes entre ambos modelos se hace más notoria cuando $t_p = 2$ s.

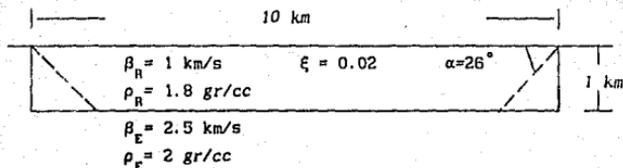
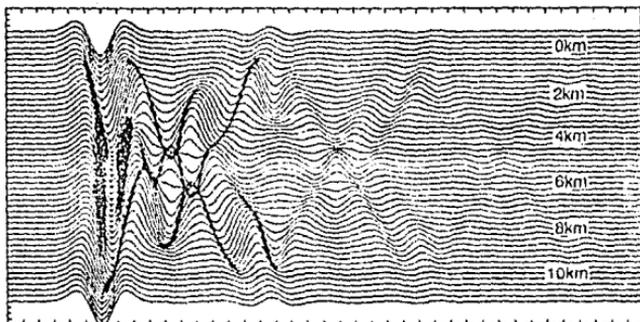


Figura 18. Depósito rectangular aquí utilizado y trapecial usado por Kawase y Aki (1989) en línea discreta.

a)



b)

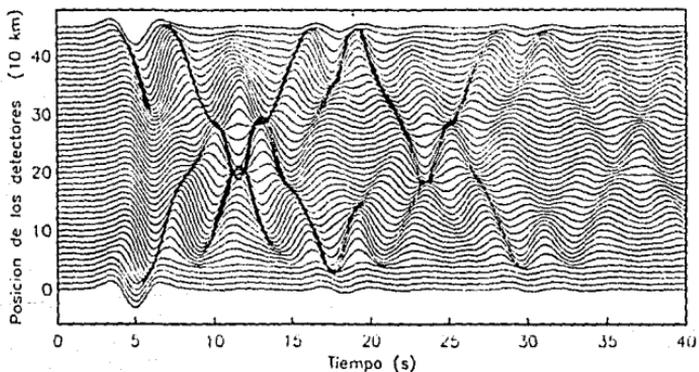
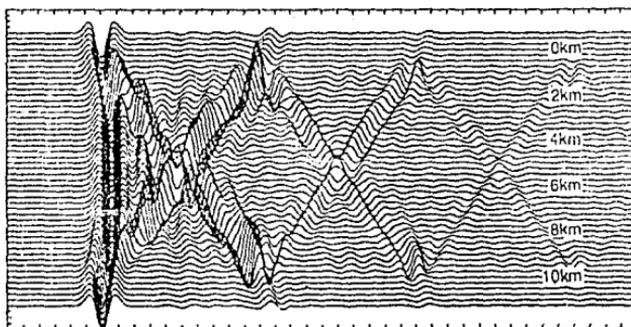


Figura 19. Comparación de resultados en tiempo entre a) método de Kawase y Aki (1989) y b) método híbrido para un ángulo de incidencia de 0° y un periodo característico de excitación de 4 s para los modelos de la Figura 18.

a)



b)

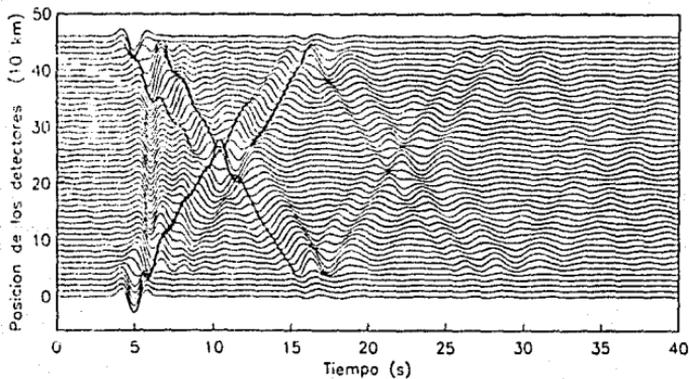


Figura 20. Comparación de resultados en tiempo entre a) método de Kawase y Aki (1989) y b) método híbrido para un periodo característico de 2 s.

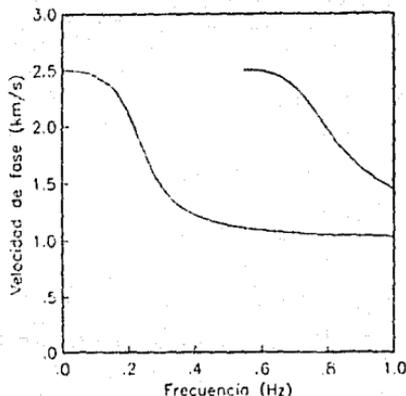
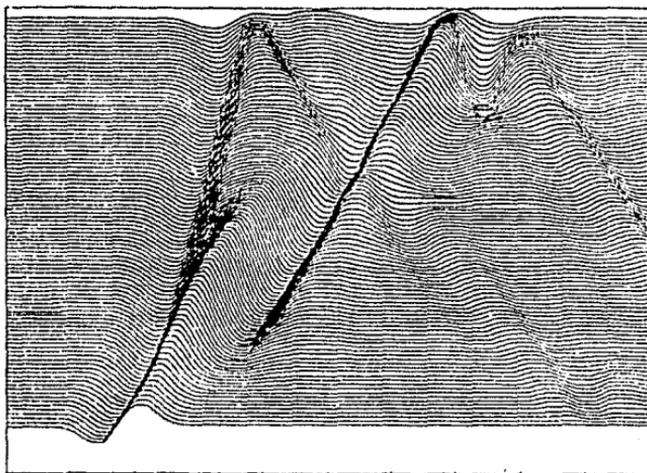


Figura 21. Curvas de dispersión de ondas de Love para el modelo de un estrato de la Figura 18. Se muestra el modo fundamental y el primer modo superior.

Para un modelo similar al usado por Kawase y Aki (Figura 18), sólo que con un ángulo interior para el trapecio de $\alpha = 45^\circ$, se realiza otra prueba comparando con un método en el que las fuentes se colocan a lo largo de la interfaz entre el depósito superficial y el semiespacio (Bravo et al., 1988). Aquí, el campo difractado se construye como una combinación de ondas planas propagándose en todas direcciones con una discretización del número de onda horizontal. En estos cálculos, se obtienen sismogramas sintéticos con un pulso de Ricker asimétrico con periodo característico de 3 s y considerando un ángulo de incidencia de 60° (Figura 22). Como se observa la diferencia entre ambos métodos es mínima. En la Figura 23 se muestran los diagramas $f-k$ para el depósito rectangular de la Figura 18 usando el método propuesto para los ángulos de incidencia de 0° y 60° . En estos diagramas se observa la superposición de los dos modos viajando en las dos direcciones del eje x . El primer modo superior aparece a una frecuencia de 0.6 Hz, y a partir de esta frecuencia el modo fundamental disminuye en amplitud. Para la incidencia de 60° (Figura 23b), las máximas amplitudes aparecen en los números de onda positivos. En éste

a)



b)

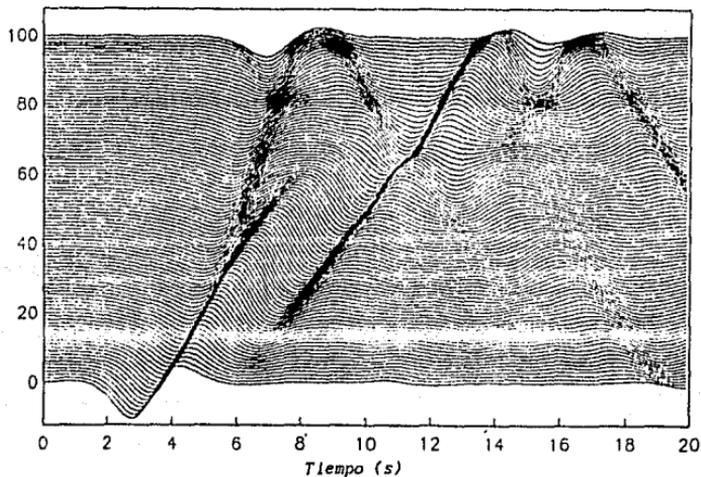


Figura 22. Comparación de sismogramas sintéticos entre a) método de fuentes y b) método híbrido. El ángulo de incidencia es de 60° . Para estos cálculos se usó un pulso de Ricker asimétrico con un período característicos de 3 s.

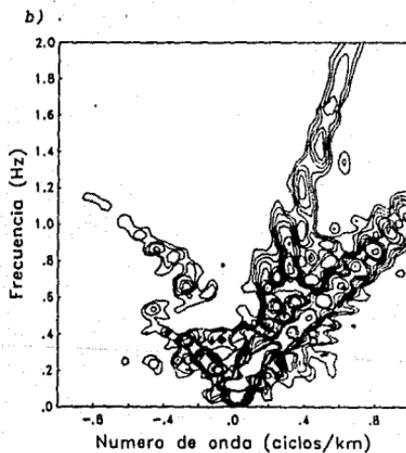
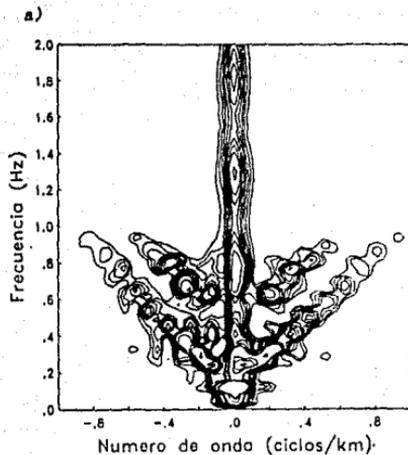


Figura 23. Diagramas $f-k$ obtenidos para el modelo de la Figura 18 para ángulos de incidencia de a) 0° y b) 60° .

diagrama, la mayor contribución de las ondas superficiales se encuentra en el modo fundamental. Debido al ángulo con que viajan las ondas de cuerpo dentro del estrato, la separación de los modos se dificulta en frecuencias menores que 0.6 Hz.

Hasta ahora, se han obtenido sismogramas sintéticos de un depósito de espesor de 1 km y una velocidad de ondas de corte de 1000 m/s. Los sismogramas sintéticos obtenidos (Figuras 19, 20 y 22) en forma general, muestran un aumento en la duración como efecto de las ondas superficiales que viajan en ambos sentidos del eje x generadas en la irregularidad lateral. Sin embargo, las codas de acelerogramas registrados en la zona del lago del valle de México muestran fases monocromáticas de mayor duración que las que se pueden obtener con un depósito de estas características. Kawase y Aki (1989), atribuyen este fenómeno al efecto combinado de estratos superficiales de más baja velocidad y estratos profundos con una velocidad alta. Con este propósito se estudia un depósito con una capa superficial con una velocidad de 300 m/s dentro del estrato del modelo anterior. Las propiedades para este modelo se muestran en la Figura 24. Para ver el efecto del estrato más blando se obtuvieron las funciones de transferencia con la solución unidimensional considerando 1 y 2 estratos (Figura 25).

0.25 km	$\beta = 0.3 \text{ km/s}$	$\rho = 1.0 \text{ g/cc}$	$\xi = 0.03$
0.75 km	$\beta = 1.0 \text{ km/s}$	$\rho = 1.8 \text{ g/cc}$	$\xi = 0.02$
	$\beta = 2.5 \text{ km/s}$	$\rho = 2.5 \text{ g/cc}$	

Figura 24. Depósito con un estrato blando superficial.

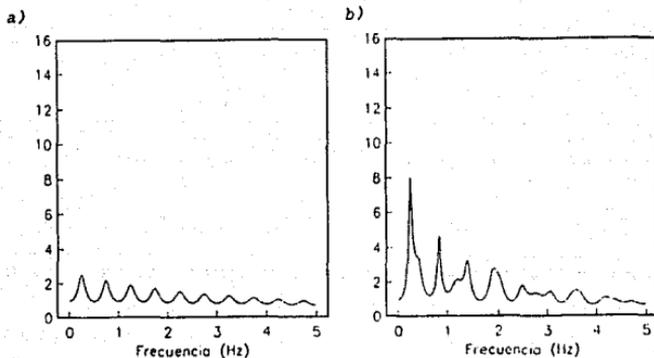


Figura 25. Funciones de Transferencia calculadas con la solución unidimensional para a) 1 estrato (Figura 18) y b) 2 estratos (Figura 24).

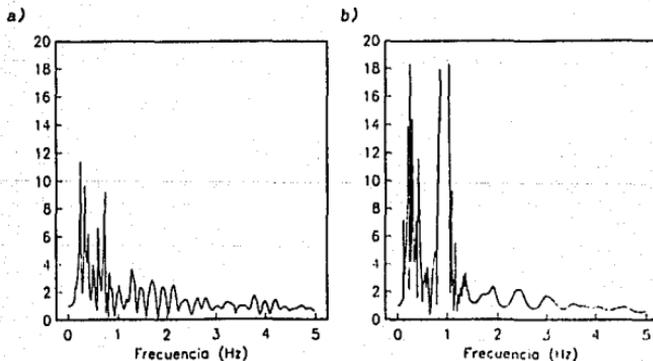


Figura 26. Funciones de transferencia calculadas con la solución híbrida considerando a) 1 estrato y (Figura 18) y b) 2 estratos (Figura 24).

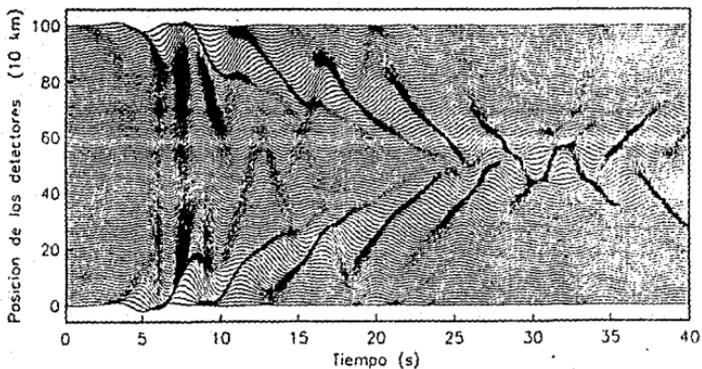


Figura 27. Sismogramas sintéticos obtenidos en la superficie del modelo de la Figura 24. La incidencia es vertical y el periodo característico del pulso es de 4 s.

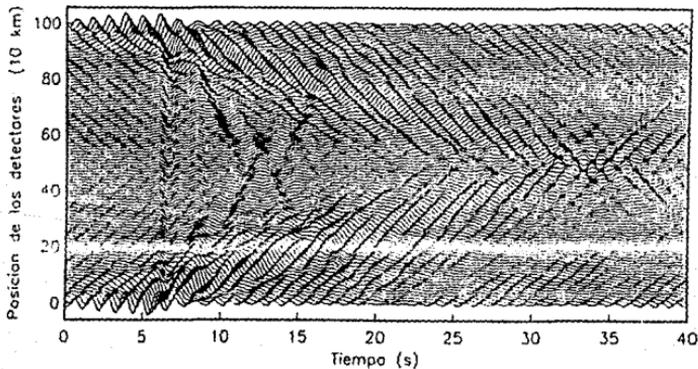


Figura 28. Sismogramas sintéticos obtenidos del modelo de la Figura 24 para un periodo característico de 2 s.

En frecuencias bajas se observa que el estrato blando las amplitudes se amplifican en una relación aproximada de 4 a 1 con respecto al modelo sin estrato blando. En la Figuras 26 se muestran las funciones de transferencia calculadas en el centro del depósito (Figura 24) con 1 y 2 estratos. Debido a la aparición de frecuencias de resonancia adicionales en la función de transferencia para frecuencias bajas (por la presencia del estrato blando), se esperarían mayores duraciones en los sismogramas sintéticos.

Las Figuras 27 y 28 muestran los sismogramas sintéticos calculados en 101 estaciones equiespaciadas por .1 km para t_p de 4 y 2 s, respectivamente. Las velocidades de propagación son menores que las que se observan en las Figuras 10, 11 y 13 debido al estrato de menor velocidad. Las duraciones de estos sintéticos son mayores comparadas con las obtenidas cuando no se considera el estrato más blando. En los sismogramas de la Figura 27 se observa

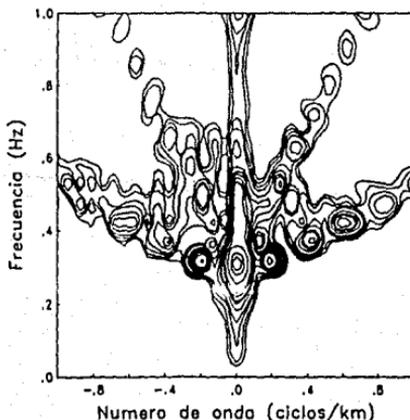


Figura 29. Diagrama $f-k$ para el modelo de la Figura 24.

que la velocidad del estrato de menor velocidad es la que prevalece, mientras que en los primeros arribos se distingue el efecto del estrato profundo. En la Figura 28 este efecto es más notorio. A partir de los 20 s, sólo se identifican fases con la velocidad del estratos superficial. En la Figura 29 se muestra el diagrama $f-k$ calculado hasta una frecuencia de 1 Hz. Las máximas amplitudes para la parte unidimensional se encuentran cercanas a 0.2 Hz. La mayor cantidad de energía se encuentra en la solución unidimensional y en el modo fundamental de ondas de Love. Si bien la parte unidimensional produce un aumento en las amplitudes del primer arribo por efecto del estrato más blando, las grandes duraciones se encuentran asociadas con la propagación de ondas de Love dentro del estrato; este efecto se puede representar en el diagrama $f-k$ por el gran número de valores máximos que se observan en los modos de propagación.

VII CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolla un método híbrido para estudiar el efecto de generación local de ondas superficiales en depósitos estratificados. El tipo de solución que aquí se presenta permite simular la respuesta sísmica de depósitos estratificados de gran extensión. La identificación de la dispersión en los registros de movimiento usando técnicas de filtrado en sitios instrumentados hace plausible el uso de este tipo de modelos para ayudar a explicar la respuesta sísmica del terreno.

Al estudiar un depósito de un sólo estrato limitado por una frontera vertical, se observa que esta frontera introduce frecuencias de resonancia adicionales que no predice la solución unidimensional y que le dan una mayor duración a los sismogramas sintéticos. El análisis de estos resultados en el plano $f-k$ muestra la superposición del campo unidimensional y de los modos de propagación de ondas de Love. Para un modelo compuesto por un estrato limitado en ambos extremos, se obtienen sismogramas sintéticos considerando dos modos de propagación. El diagrama $f-k$ muestra que la mayor contribución de las ondas superficiales se

encuentra en el modo fundamental. Al variar el ángulo de incidencia las velocidades de fase para los modos de Love son las mismas. Sin embargo, la energía asociada con cada modo se modifica con respecto a la incidencia vertical. En estos diagramas la identificación de los modos de propagación y de las ondas de cuerpo se dificulta en frecuencias bajas. Al incluir un estrato de menor velocidad, el estrato blando controla la duración de los sismogramas sintéticos. Al aumentar la frecuencia de excitación, los sismogramas permiten identificar el efecto del estrato profundo. En estos sismogramas se distinguen dos velocidades de fase; una guiada por el estrato de mayor velocidad y otra por el de menor velocidad. La primera sólo se observa al inicio de las señales, mientras que la segunda se encuentra en fases de mayor amplitud a lo largo de todo el sismograma, produciendo un mayor duración del movimiento. En el dominio de la frecuencia, este fenómeno se relaciona con el incremento de frecuencias de resonancia.

El método híbrido es una técnica rápida y sencilla que permite obtener cálculos prácticos para el estudio de la respuesta sísmica de depósitos estratificados. El método requiere pocos recursos de cómputo comparado con los que requieren otras técnicas de dominio y de frontera. Mediante un procedimiento similar al descrito en este trabajo, es posible extender este método de solución al caso de incidencia de ondas P y SV . Otro aspecto interesante, será el estudiar la conversión de ondas superficiales a otros modos de propagación y a ondas de cuerpo.

RECONOCIMIENTOS

Ha sido un placer para mí el haber tenido como director de tesis a Miguel A Bravo, mi más sincero agradecimiento.

Agradezco a Eduardo Pérez-Rocha y a Javier Avilés por sus valiosos comentarios y sugerencias los cuales forman parte de este trabajo.

Agradezco a Jaime Ramos por su desinteresada participación en la elaboración de esta tesis y a Sergio Chávez-Pérez por sus severas pero muy acertadas críticas.

El poder colaborar con Francisco J Sánchez-Sesma ha sido de lo más grato y motivante. Mis agradecimientos.

Un especial reconocimiento al Centro de Investigación Sísmica por todo el apoyo brindado.

Este trabajo forma parte del proyecto *Análisis, procesamiento y modelado de información acelerométrica en el valle de México* patrocinado por la Secretaría General de Obras del Departamento del Distrito Federal (DDF).

REFERENCIAS

Aki, K y P Richards (1980). *Quantitative Seismology: Theory and Methods*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, California.

Andrews, D J (1989). Can earthquake source spectra be inferred from coda spectra?, en revisión por *Bull. Seismol. Soc. Am.*

Arfken G (1985). *Mathematical Methods for Physicists*, 3a edición, Academic Press, Inc., San Diego, California.

Ben-Menahem, Ari y J S Singh (1981). *Seismic Waves and Sources*, Springer Verlag, Nueva York.

Boore, D M, M Harmsen y S Hardin (1981). Wave scattering from a step change in surface topography, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 71, 117-125.

Bravo, M A, F J Sánchez-Sesma y F J Chávez-García (1988). Ground motion on stratified alluvial deposits for incident SH waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 78, 436-450.

Bravo, M A, F J Sánchez-Sesma y S Chávez-Pérez (1989). A hybrid approach to study the seismic response of soft-soil sedimentary basins, *Proc 4th Int Conf Soil Dyn Earth Engr.* México, D.F. Octubre 23-26, en: *Engineering Seismology and Site Response*, A S Carnack e Ismael Herrera (eds), Computational Mechanics Publications, Southampton, 183-194.

- Bracewell, R N (1978). *The Fourier Transform and its Applications*, 2a edición, Mc Graw-Hill Inc., Tokio.
- Bullen, K E y Bruce A Bolt (1985). *An Introduction to the Theory of Seismology*, 4a edición, Cambridge University Press, Cambridge.
- Fung, Y C (1977). *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice Hall, Inc., Nueva Jersey.
- Harmsem, S y S Hardin (1981). Surface motion over a sedimentary valley for incident plane P and SV waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 71, 655-670.
- Haskell, N A (1953). The dispersion of surface waves in multilayered media, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 43, 17-34.
- Hilgevoord J (1961). *Dispersion Relations and Causal Description*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- Hisada Y, S Yamamoto y S Tani (1989). Prediction of ground motion in the Ashigara valley using an analytical method. *Proc of the Nat Symp of Surf Geol on Seis Motion*. Tokio, Japón Diciembre 6-7. *Japanese working group on effects of surface geology on seismic motion* 245-254.
- Hosken, J W J (1988). Ricker wavelets in their various guises, *First Break* 6, 24-33.
- Kawase, H y K Aki (1989). A study of the response of a soft basin for incident S, P and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 79, 1361-1382.
- Kelly, K R (1983). Numerical study of Love wave propagation, *Geophysics* 48, 833-853.
- Kennet B L N (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Key, F. A. (1968). Some observations and analysis of signal generated noise, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 15, 377-392.
- Kulhánek, O (1976). *Introduction to Digital Filtering in Geophysics*, Elsevier S. P. C., Amsterdam.
- Lysmer J y L Drake (1971). The propagation of Love waves across nonhorizontally layered structures, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 61, 1233-1252.
- Noble, B y J W Daniel (1977). *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Ohmuchi T, T Toshinawa y A Hasumi (1988). A simplified numerical analysis procedure for surface waves propagating in sedimentary layers, *Proc of 9th Worl Conf on Earth Engr.* Kyoto, Japón. Agosto: 2-9. Vol 2, 635-640.

Ohtsuki, A, H Yamahara y T Tazoh (1984). Effects of lateral inhomogeneity on seismic Rayleigh waves, *Earth. Engr. Struct. Dyn.* 12, 37-58.

Panza, G F (1985). Synthetic seismograms: The Rayleigh waves modal summation, *J. Geophys.* 58, 125-145.

Rodríguez J L, J Ramos y G Macedo (1990). Respuesta sísmica de un estrato limitado por una pared vertical, sometido a

Sánchez-Sesma, F J y J A Esquível (1979). Ground motion of alluvial valleys under incident plane SH waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 69, 1107-1120.

Sánchez-Sesma, F J, F J Chávez-García y M A Bravo (1988). Seismic response of a class of alluvial valleys for incident SH waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 78, 83-95.

Santoyo, M. A., C Calderón, M Suárez, F J Sánchez-Sesma, M A Bravo y S Chávez Pérez (1989). A time domain study of strong ground motions in Mexico City, *Proc 4th Int Conf Soil Dyn Earth Engr.* México, D.F. Octubre 23-26, en: *Engineering Seismology and Site Response*, A S Carmack e Ismael Herrera (eds), Computational Mechanics Publications, Southhampton, 37-51.

Swab, F y L Knopoff (1970). Surface wave dispersion computations, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 60, 321-344.

Schwab, F A y L Knopoff (1972). Fast surface wave and free modes computations, *Methods in computational physics*, Vol. 12. Editor: Bruce A Bolt, Academic Press Inc., Nueva York, 87-180.

Swab, F, K Nakanishi, M Cuscito, G Panza, G Liang y J Frez (1984). Surface wave computations and the synthesis of theoretical seismograms at high frequencies, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 74, 1555-1578.

Shibuya J (1988). Analysis of ground motions on alluvial deposit considering surface waves, *Proc of 9th Worl Conf on Earth Engr.* Kyoto, Japón. Agosto:2-9. Vol 2, 551-557.

Sommerfeld, A (1949). *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press Inc., Nueva York.

Takeuchi, H y M Sato (1972). Seismic surface waves, *Methods in Computational Physics*, Vol. 12. Editor Bruce A. Bolt, Academic Press Inc., Nueva York, 217-294.

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Thomson, W T (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *J. Appl. Phys.* 21, 89-93.

Vidale, J E y D Helmberger (1988). Elastic finite difference modeling of the 1971 San Fernando, California earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 78, 122-141.

Yamanaka, H, T Seo y T Samano (1989). Effects of sedimentary layers on surface wave propagation, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 79, 631-634.

APÉNDICE

VELOCIDAD DE FASE Y VELOCIDAD DE GRUPO

Podemos expresar el campo de desplazamientos u en términos de la transformada inversa de Fourier en la siguiente forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp[i(\omega t - k(\omega)x)] d\omega . \quad (A.1)$$

La fase de la señal está dada por el término $[\phi_1(\omega) + \omega t - k(\omega)x]$ donde $\phi_1(\omega)$ es la fase de cada componente de $A(\omega)$. En un valor de fase constante se encuentra la velocidad de propagación de cada onda monocromática. Como ϕ no depende de x ni de t entonces $\omega t = k(\omega)x$, o bien

$$c(\omega) = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k} . \quad (A.2)$$

Si consideramos una banda de frecuencias entre $\omega_0 - \Delta\omega$ y $\omega_0 + \Delta\omega$,

es posible hacer una expansión en series de Taylor alrededor de la frecuencia ω_0 ,

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots \quad (A.3)$$

Si sustituimos la ecuación (A.3) en (A.1) y se supone que la energía se concentra en la banda de interés, se obtiene

$$u(x, t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\omega - \omega_0}^{\omega + \omega_0} A(\omega) \exp[i(\omega t - k(\omega_0)x) - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)x] d\omega \quad (A.4)$$

y sacando de la integral los términos que no dependen de ω

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \exp[i \left(\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \omega_0 x - k(\omega_0)x \right)] \cdot \int_{\omega - \omega_0}^{\omega + \omega_0} A(\omega) \exp[i(\omega t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \omega x)] d\omega \quad (A.5)$$

de donde se define la velocidad de grupo U como

$$U = \frac{1}{\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0} \quad (A.6)$$

Ahora, relacionando la velocidad de grupo U con la velocidad de fase c

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(ck)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} \quad (A.7)$$

o bien, en términos de la longitud de onda λ

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}, \quad (A.8)$$

y si la onda no es dispersiva [$dc/d\lambda = 0$] las velocidades de fase y de grupo son iguales.

Es posible también obtener de la ecuación característica (2.11) las raíces para la velocidad de grupo, en cuyo caso se debe cumplir que $F(\omega+d\omega, k+dk) = 0$. Esta expresión la escribimos usando los términos lineales de la serie de Taylor

$$F(\omega+d\omega, k+dk) = F(\omega, k) + \left. \frac{\partial F}{\partial \omega} \right|_k dk + \left. \frac{\partial F}{\partial k} \right|_{\omega} d\omega + \dots \quad (A.9)$$

y la velocidad de grupo U queda como

$$U = \frac{d\omega}{dk} = - \frac{\left. \frac{\partial F}{\partial k} \right|_{\omega}}{\left. \frac{\partial F}{\partial \omega} \right|_k} \quad (A.10)$$

Cuando la onda que se estudia no es dispersiva, como las ondas de Rayleigh viajando en un semiespacio, la forma de onda no se modifica con la propagación por lo que la integral de la ecuación (A.2.1) queda como $u(t-x/c)$. Cuando la onda superficial es dispersiva se puede utilizar el método de fase estacionaria para obtener la forma de la onda (Aki y Richards, 1980).