

42 2d



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ingeniería

## DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

T E S I S

Que para obtener el título de:  
INGENIERO MECANICO  
ELECTRICISTA

P r e s e n t a :

**EDUARDO ESLAVA JIMENEZ**



Director de Tesis: Dra. Cristina Verde Rodarte

México, D. F.

**FALLA DE ORIGEN**

Noviembre de 1990



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2. PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS RETROALIMENTADOS	4
2.1 Introducción.	4
2.2 Función de Sensibilidad de Horowitz.	5
2.3 Relación entre $S_G^T(s)$ y la Función de Transferencia $Y(s)/P(s)$ .	7
2.4 Robustez.	8
2.5 Respuesta a Señales de Referencia.	9
CAPÍTULO 3. ALGORITMO DE DISEÑO	10
3.1 Introducción.	10
3.2 Procedimiento de diseño.	11
3.2.1 Modelo nominal.	11
3.2.2 Modelo con incertidumbres.	15
3.2.2.1 Controlador $C(s)$ sin restricción en el orden.	19
3.2.2.2 Controlador propio $C(s)$ con restricciones en el orden.	21
3.3 Algoritmo de ajuste.	23
CAPÍTULO 4. APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE AJUSTE	25
4.1 Introducción.	25
4.2 Ejemplo 1. Regulación de la dirección de un barco.	25
4.2.1 Objetivos de diseño.	26
4.2.2 Selección de la función de sensibilidad.	26
4.2.3 Banda de respuesta frecuencial de la planta.	27
4.2.4 Controlador en el caso ideal.	28
4.2.5 Ajuste del controlador inicial.	30

4.2.6 Análisis de resultados.	32
4.3 Ejemplo 2. Un brazo manipulador industrial.	33
4.3.1 Especificaciones y restricciones de diseño.	34
4.3.2 Controlador en el caso ideal $Co(s)$ .	35
4.3.3 Ajuste del controlador $Co(j\omega)$ .	38
4.3.4 Análisis de resultados.	40
CAPITULO 5. CONCLUSIONES	41
APÉNDICE A. INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES	44
A.1 Introducción.	44
A.2 Corolario 3.2.	44
A.3 Corolario 3.3.	46
APÉNDICE B. DIAGRAMAS DE FLUJO PARA LOS ALGORITMOS DE AJUSTE	49
B.1 Introducción.	49
B.2 Diagrama de flujo del programa principal CORISE.	49
B.3 Diagrama de flujo del programa INICIO.	51
B.4 Diagrama de flujo del programa CONTROL.	51
B.5 Diagrama de flujo del programa AJUSTE.	51
APÉNDICE C. MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE YULE-WALKER.	67
C.1 Las ecuaciones de Yule-Walker modificadas.	67
C.2 Ecuaciones sobredeterminadas.	70
C.3 Orden de las ecuaciones MYW.	73
C.4 Estimación de los parámetros espectrales MA.	73
C.5 Estimación de un filtro digital.	74
REFERENCIAS.	78

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

Al diseñar un sistema de control se busca obtener de éste un comportamiento adecuado a las necesidades del proceso. Sin embargo existen varios factores que dificultan esta tarea, tales como las perturbaciones que afectan a la planta, las incertidumbres en cuanto al modelo y sus parámetros, los efectos no lineales despreciados, etc.

El esquema más conveniente para reducir el efecto de estas dificultades ha sido la retroalimentación ( ver [1] ). Empero, en la mayoría de los casos no es suficiente el esquema en lazo cerrado para compensar satisfactoriamente las perturbaciones externas y variaciones en el modelo considerado.

Este problema ha sido atacado con diferentes técnicas entre las que destacan los controladores adaptables y los más antiguos, pero no menos eficientes, controladores fijos. Estos últimos son diseñados comúnmente tomando en cuenta tipos particulares de perturbaciones e incertidumbres estructuradas. Este tipo de controladores se denotan robustos respecto a las perturbaciones consideradas en el diseño ( ver [3] ).

En particular I. Horowitz [2] propuso un método frecuencial para ajustar compensadores fijos, a través del ábaco de Nichols. La idea básica consiste en considerar que definido un conjunto de plantas  $P$  cuyo comportamiento frecuencial está acotado por medio de una banda y un conjunto de respuestas frecuenciales admisibles en lazo cerrado  $R$ , es posible encontrar un compensador fijo que garantice que para toda planta  $P$  dentro del conjunto  $P$  considerado, la respuesta en lazo cerrado  $R$  se encuentra en el conjunto  $R$ .

Con base en esta idea, denotada de aquí en adelante como QFT (quantitative feedback techniques) se han reportado algunas variantes

[4], donde el principal problema ha sido la implantación del método, ya que se requiere gran cantidad de programas de soporte de cálculo numérico y graficación.

Sin embargo, actualmente la existencia de paquetes matemáticos completos y confiables, tanto para análisis y síntesis de sistemas de control como para visualización y presentación de resultados, hacen factible la implantación de la idea de Horowitz en una computadora personal con relativa facilidad.

Estos hechos motivaron en el Instituto de Ingeniería el siguiente trabajo, cuyo objetivo consiste en diseñar usando el paquete MAT-LAB un algoritmo de ajuste para controladores lineales robustos, limitándose por el momento al caso de una entrada una salida (SISO), con un grado de libertad.

El tipo de variaciones no estructuradas consideradas en la planta se definen a partir de un valor nominal  $G_0(s)$  conocido. Las especificaciones de diseño se imponen en términos de la función de sensibilidad o diferencia de retorno  $S(s) = (1 + C(s)G(s))^{-1}$ , donde  $C(s)$  es la función de transferencia del compensador y  $G(s)$  la del proceso.

Particularmente el problema se plantea de la siguiente forma:

Considere un conjunto  $G$  de puntos que definen los límites máximos y mínimos de variaciones no estructuradas de la planta nominal  $G_0(s)$ , esto es

$$G = \{ G(j\omega) \mid \| G_{\min}(j\omega) \| < \| G(j\omega) \| < \| G_{\max}(j\omega) \| \} \quad \forall \omega \in \Omega_1.$$

donde  $\Omega_1$  es un conjunto arbitrario de frecuencias espaciadas adecuadamente y además  $G_0(j\omega)$  pertenece al conjunto  $G$ .

Entonces se desea encontrar un controlador propio  $C(s)$  tal que la magnitud de la función de sensibilidad para toda planta  $G(j\omega)$  elemento de  $G$ , definida como  $\| S_G(j\omega) \|$  satisfaga

$$\| S_G(j\omega) \| < \| S_{\max}(j\omega) \| \quad \forall \omega \in \Omega_1.$$

donde  $\| S_{\max}(j\omega) \|$  establece el límite del desempeño deseado. Esto implica que para cualquier  $G \in G$  se garantiza una atenuación de las perturbaciones en el rango en el cual la magnitud de la función de sensibilidad impuesta  $\| S_{\max}(j\omega) \|$  sea menor a uno. Así, al imponer fronteras más severas tanto en  $G_1$  como en la  $\| S_{\max}(j\omega) \|$  se lograrán sistemas más robustos. Sin embargo esto implica en la mayoría de los casos compensadores de ordenes superiores, para lograr satisfacerlos.

Para presentar la solución propuesta se ha organizado la presente tesis de la siguiente manera. En el segundo capítulo de este trabajo se describen brevemente los lineamientos para expresar los requerimientos de diseño en función de cotas adecuadas en la sensibilidad  $S(s)$  y por tanto en su complemento  $T(s) = 1 - S(s)$ .

En el tercer capítulo, se presenta el algoritmo propuesto para resolver el problema arriba planteado, mostrando que se reduce a resolver un conjunto de ecuaciones polinomiales, para las que se de además una posible forma de solución.

En el capítulo cuarto, la solución propuesta, es empleada para diseñar el controlador de la dirección de un barco, el cual está sometido a perturbaciones externas producidas por condiciones atmosféricas y también a cambios en los parámetros ocasionados por las diferentes condiciones de operación. Al final del ejemplo se hace un análisis de los resultados obtenidos.

Así mismo en el capítulo cuarto se diseña el sistema de control para compensar el modelo de un brazo manipulador sujeto a variaciones paramétricas en su función de transferencia nominal de tal forma que estas variaciones sean atenuadas cuando se presentan para cumplir con el índice de desempeño deseado.

Finalmente en el capítulo cinco se presentan las conclusiones del estudio realizado y se dan algunas recomendaciones para futuros trabajos basados en el algoritmo aquí estudiado.

## CAPÍTULO 2

### PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS RETROALIMENTADOS

#### 2.1 Introducción.

Considérese el lazo de control retroalimentado monovariable mostrado en la figura 1, donde la función de transferencia de la planta a controlar esta denotada por  $G(s,\alpha)$ , la función de transferencia global por  $T(s,\alpha)=Y(s,\alpha)/R(s)$  y se desea determinar la sensibilidad de la función de transferencia  $T(s,\alpha)$ , para un cambio relativo en  $G(s,\alpha)$  denotado por  $S_G^T(s)$ .

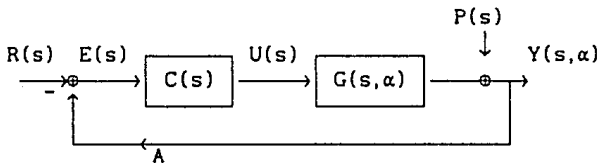


Fig. 2.1 Sistema retroalimentado con un grado de libertad.

En la Fig. 2.1 se observa que:

$R(s)$  corresponde a la señal de referencia o comando,  
 $U(s)$  es la señal de entrada a la planta o acción,  
 $P(s)$  perturbaciones aditivas a la salida de la planta,  
 $Y(s)$  es la salida controlada de la planta.

Sea la función de transferencia de la planta

$$G(s,\alpha) = \frac{Y(s,\alpha)}{X(s,\alpha)} \quad (2.1)$$

con  $Y(s,\alpha)$  y  $X(s,\alpha)$  polinomios de coeficientes reales, que no poseen raíces comunes (para garantizar una realización controlable y observable) con grados  $m$  y  $n = m + e$  respectivamente; siendo  $e$  el orden relativo de  $G(s,\alpha)$ . Además

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.2)$$

representa la función de transferencia del controlador, con  $N(s)$  y  $D(s)$



polinomios de coeficientes reales, a determinar.

La función de transferencia de lazo cerrado está dada por

$$T(s, \alpha) = \frac{C(s)G(s, \alpha)}{1 + C(s)G(s, \alpha)} \quad (2.3)$$

Calculando la función de sensibilidad propuesta por Bode se obtiene para el caso tratado

$$S_G^T(s, \alpha_0) \equiv \frac{\partial T(s, \alpha)}{\partial G(s, \alpha)} \bigg|_{\alpha_0} = \frac{1}{T(s, \alpha_0)} \frac{1}{1 + C(s)G(s, \alpha_0)} \quad (2.4)$$

Se puede observar además que si se abre el lazo de control en A,  $T(s) = C(s)G(s, \alpha_0)$  y por tanto  $S_G^T(s, \alpha_0) = 1$ .

## 2.2 Función de Sensibilidad de Horowitz.

La función de sensibilidad de Bode arriba usada, fue definida para variaciones paramétricas infinitesimales en la planta  $G(s, \alpha)$ . En el caso de variaciones paramétricas moderadas y grandes, Horowitz [5] propuso la siguiente definición.

Definición 1. Función de sensibilidad de Horowitz. Sea  $G_0$  la representación de la función de transferencia del sistema y  $\alpha_0$  el valor nominal del parámetro en consideración, y sean  $G(s)$ , y  $\alpha$  los valores actuales de la función de transferencia y el parámetro respectivamente, esto es:

$$G(s) = G_0(s) + \Delta G(s) \quad (2.5)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha \quad (2.6)$$

donde  $\Delta G(s)$  y  $\Delta \alpha$  denotan los incrementos respectivos.

Entonces la función de sensibilidad propuesta por Horowitz se define como:

$$H_\alpha^G(s) \equiv \frac{\Delta G(s)/G(s)}{\Delta \alpha / \alpha} = \frac{(G(s) - G_0(s))/G(s)}{(\alpha - \alpha_0)/\alpha} \quad (2.7)$$

Si  $G(s)$  contiene un término  $G_1$  que es a su vez función del parámetro  $\alpha$ , la sensibilidad con respecto a  $G_1$  se puede definir de manera análoga, obteniendo

$$H_{G_1}^G \equiv \frac{\Delta G(s)/G(s)}{\Delta G_1(s)/G_1(s)} = \frac{(G(s) - G_0(s))/G(s)}{(G_1(s) - G_{10}(s))/G_1(s)} \quad (2.8)$$

Note que en este caso, contrario a la definición de Bode, las variaciones están relacionadas con los valores actuales.

Usando esta definición se puede determinar la función de sensibilidad de Horowitz  $H_G^T(s)$  para el lazo de control clásico mostrado en la Fig. 2.1.

Sustituyendo en la definición de  $H_G^T(s)$ , ec. (2.8), las funciones de transferencia de lazo cerrado para valores actuales y nominales respectivamente

$$T(s) = \frac{C(s)G(s, \alpha)}{1 + C(s)G(s, \alpha)} \quad (2.9)$$

$$T_0 = \frac{C(s)G_0(s)}{1 + C(s)G_0(s)} \quad (2.10)$$

se obtiene

$$H_G^T(s) = \left[ \frac{T(s) - T_0(s)}{G(s) - G_0(s)} \right] \frac{G(s)}{T(s)} = \frac{G(s) - (T_0(s)G(s))/T(s)}{G(s) - G_0(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G_0(s)} \quad (2.11)$$

Como se observa de la ec. (2.11), la expresión obtenida para  $H_G^T(s)$  es idéntica con la expresión de la función de sensibilidad de Bode del mismo sistema, ec. (2.4). Por tanto, las funciones de sensibilidad de Bode y Horowitz del lazo de control clásico toman los mismos valores, aunque están definidas en diferente forma.

Como consecuencia la función  $S_G^T(s)$ , puede ser interpretada como una

medida del cambio relativo de la transferencia global  $T(s)$  al cambio relativo inducido por los parámetros en la función de transferencia  $G(s)$ .

### 2.3 Relación entre $S_G^T(s)$ y la función de transferencia $Y(s)/P(s)$ .

Por otro lado de la Fig. 2.1 se ve que la ganancia de lazo del sistema corresponde

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{N(s)Y(s)}{D(s)X(s)} \quad (2.12)$$

y por tanto el polinomio característico en malla cerrada, se reduce a

$$R_{cl}(s) = X(s)D(s) + Y(s)N(s). \quad (2.13)$$

La forma en que la perturbación  $p(t)$  afecta la salida del sistema se puede obtener por medio de la función de transferencia tomada desde  $P(s)$  hasta  $Y(s)$  reduciéndose a

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S_G^T(s) \quad (2.14)$$

Se puede ver que esta expresión coincide con la función de sensibilidad de Horowitz obtenida en la ec. (2.11).

Además se puede observar de las ecuaciones (2.9) y (2.14) que éstas satisfacen la relación

$$S_G^T(s) + T(s) = 1 \quad (2.15)$$

esto quiere decir, que una vez definida  $S_G^T(s)$  o a la inversa definida  $T(s)$  la otra función queda fija cuando se usa el esquema de control con un grado de libertad.

Sustituyendo la función  $L(s)$  en las expresiones de  $S_G^T(s)$ , ec. (2.14) y  $T(s)$  ec. (2.3) se obtiene:

$$S_G^T(s) = \frac{X(s)D(s)}{R_{cl}(s)} \quad (2.16)$$

$$T(s) = \frac{Y(s)N(s)}{R_{cl}(s)} \quad (2.17)$$

De la expresión de  $S_G^T(s)$ , ec. (2.16) se observa que ésta corresponde al cociente entre el polinomio característico en lazo abierto y el polinomio característico en lazo cerrado y por lo tanto siempre es una función propia, independiente del proceso  $G(s)$ , si el compensador  $C(s)$  tiene un exceso de ceros  $e'$  menor que el exceso de polos  $e$  de la planta  $G(s)$ .

Por otro lado, analizando los órdenes del numerador y denominador de  $T(s)$ , en (2.17), se puede ver que éstos dependen del exceso de polos y ceros del controlador y la planta. Así, para un controlador con exceso de polos igual a  $e_c$ , la función de transferencia  $T(s)$  tendrá un exceso de polos  $p$ , dado por  $p = e + e_c$ .

Se hace notar que debido a que una especificación indispensable para cualquier sistema de control es que éste sea al menos estable, se definen como controladores admisibles, al conjunto de controladores que garantizan sistemas en lazo cerrado estables.

De la ecuación (2.14) se ve que el efecto de las perturbaciones  $p(t)$ , sobre la salida del sistema  $y(t)$ , se puede obtener por medio de la función de sensibilidad  $S_G^T(s)$ , por lo tanto, si se desea atenuar el efecto de las perturbaciones es necesario que  $S_G^T(s)$  sea relativamente pequeña en los rangos de frecuencia de la perturbación  $p(t)$ . En el caso de querer un rechazo a la perturbación invocando el concepto de cero, se concluye que  $S_G^T(s)$  debe tener como ceros, al menos los polos de la transformada de Laplace de la perturbación  $P(s)$ .

#### 2.4 Robustez.

Para un esquema de control retroalimentado una característica indispensable es la estabilidad en lazo cerrado. Se habla además de estabilidad robusta, si el sistema de control permanece estable cuando es sometido a cierto tipo de perturbaciones. Otro concepto al cual se le antepone el adjetivo robusto es al desempeño. En este caso se dice que un desempeño es robusto si la respuesta nominal se mantiene dentro de un margen razonable, aún, cuando éste es sometido a perturbaciones.

Así, el término de sistema robusto se emplea para indicar que una cierta propiedad de interés, definida de antemano, se mantiene en una región acotada para perturbaciones conocidas o caracterizadas de antemano.

## 2.5 Respuesta a señales de referencia.

Dado que la función de transferencia desde  $r$  hasta  $y$  es igual a  $T(s, \alpha)$ , si se logra una función  $S(s, \alpha)$  pequeña en los rangos de frecuencia de las perturbaciones  $P(s)$ , el módulo de  $T(s, \alpha)$  será muy cercano a 1 en esos rangos. Esto implica que se tendrá una buena respuesta a las señales de referencia en los rangos de frecuencia en los cuales se tiene una atenuación de las perturbaciones.

Se dice que el sistema de control clásico (Fig. 2.1), es de un sólo grado de libertad, porque se restringe la selección de una cualquiera de las dos funciones  $S(s, \alpha)$  ó  $T(s, \alpha)$  para que el comportamiento de la otra quede obligada a satisfacer la relación (2.15). De la ec. 2.15, una vez definida  $S(s, \alpha)$  o a la inversa  $T(s, \alpha)$  la otra función queda fija, lo cual implica que en el rango de frecuencias en que  $|S(j\omega, \alpha)| \ll 1$  las perturbaciones se atenúan fuertemente y como consecuencia el módulo  $|T(j\omega, \alpha)| \cong 1$  por lo que se tiene buena respuesta a las señales de referencia.

Esto quiere decir en términos de  $|S(s, \alpha)|$ , ec. (2.14), que en la selección del conjunto de frecuencias de análisis, se debe tomar en cuenta el rango en que las incertidumbres de la planta y las perturbaciones están presentes. Además una vez caracterizado el módulo de la función de sensibilidad  $|S(j\omega, \alpha)|$ , se define indirectamente el ancho de banda del sistema.

Lo anterior se puede verificar de la ec. (2.15) la cual indica que la suma de los módulos  $|S(j\omega, \alpha)|$  y  $|T(j\omega, \alpha)|$  es la unidad para todo el espectro de frecuencias.

## CAPÍTULO 3

### ALGORITMO DE DISEÑO

#### 3.1 Introducción

Como se hizo notar en el capítulo dos, la función de sensibilidad  $S(s)$  puede ser empleada como una medida de robustez para un sistema retroalimentado ya que caracteriza la clase de perturbaciones que son atenuadas y rechazadas por el sistema.

Este hecho motivó a proponer un algoritmo de ajuste iterativo para diseñar controladores lineales monovariantes propios en los que la especificación del sistema de control esté dada en términos de la magnitud de la función de sensibilidad  $|S(j\omega)|$ , en un conjunto de puntos.

En particular se considera la estructura de un sistema retroalimentado con un grado de libertad, mostrada en la Fig. 3.1, en donde el compensador  $C(s)$  se ajusta iterativamente de tal manera que la magnitud de la función  $|S(j\omega)|$  sea un elemento del conjunto de funciones de sensibilidades aceptables, entendida como aquella en que la respuesta frecuencial de la planta  $G(j\omega, \alpha)$  se encuentra en una banda  $[G_{min}(j\omega), G_{max}(j\omega)]$ , definida de antemano para cada frecuencia  $\omega$ .

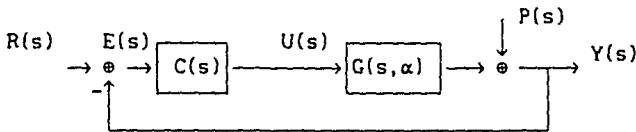


Fig. 3.1 Sistema retroalimentado con un grado de libertad.

Por el momento se consideran únicamente funciones de transferencia para  $C(s)$  y  $G(s, \alpha)$  de fase mínima. Por tanto el objetivo de diseño se plantea de la siguiente manera:

Dada una planta nominal  $G(s, \alpha_0)$  de fase mínima con un intervalo de variación no parametrizada  $I(\omega) = [G_{min}(j\omega), G_{max}(j\omega)]$  para su respuesta

frecuencial en  $\omega$  (ejemplo Fig. 3.2), y un índice de desempeño en términos de una cota superior definida numéricamente de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$  (Fig. 3.3) determinar, con ayuda del paquete comercial de control MAT-LAB para computadora personal [6], un controlador propio lineal estabilizante con función de transferencia  $C(s) = KN_c(s)/D_c(s)$ , tal que la sensibilidad del sistema de control para toda  $G(j\omega, \alpha)$  elemento del conjunto  $I(\omega)$  sea menor o igual a la cota superior  $|S_d(j\omega)|$ .

### 3.2 Procedimiento de diseño

#### 3.2.1 MODELO NOMINAL

Considérese el sistema de control, SISO, retroalimentado con un grado de libertad presentado en la Fig. 3.1, en donde la función de transferencia nominal  $G(s, \alpha)$  es de fase mínima y conocida. Sean las incertidumbres de la planta formuladas como el conjunto

$$G = \{ |G_{\min}(j\omega)| < |G(j\omega)| < |G_{\max}(j\omega)| \} \quad (3.1)$$

presentado a manera de ilustración en la Fig. 3.2, y el conjunto de funciones de sensibilidad aceptables o frontera superior dadas por el conjunto

$$S = \{ |S_i(j\omega, G)| < |S_d(j\omega)| \} \quad \forall i = \min(1), \max(2) \quad (3.2)$$

esquemático en la Fig. 3.3, con la condición  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S_d(j\omega)| = 1$  y en donde las frecuencias de interés (el conjunto  $\Omega$ ) se seleccionan de acuerdo al rango en que las incertidumbres de la planta y las perturbaciones están presentes; se recomienda en general espaciar las frecuencias en forma logarítmica o por octavas.

Reescribiendo la expresión de la función de sensibilidad  $S(s)$  derivada en el capítulo dos, en términos del compensador  $C(s)$  y la planta  $G(s, \alpha)$  se tiene

$$S(s) = (1 + C(s)G(s, \alpha))^{-1} \quad (3.3)$$

de la cual se puede despejar la función de transferencia del controlador

$$C(s) = (S(s)^{-1} - 1)G(s, \alpha)^{-1} \quad (3.4)$$

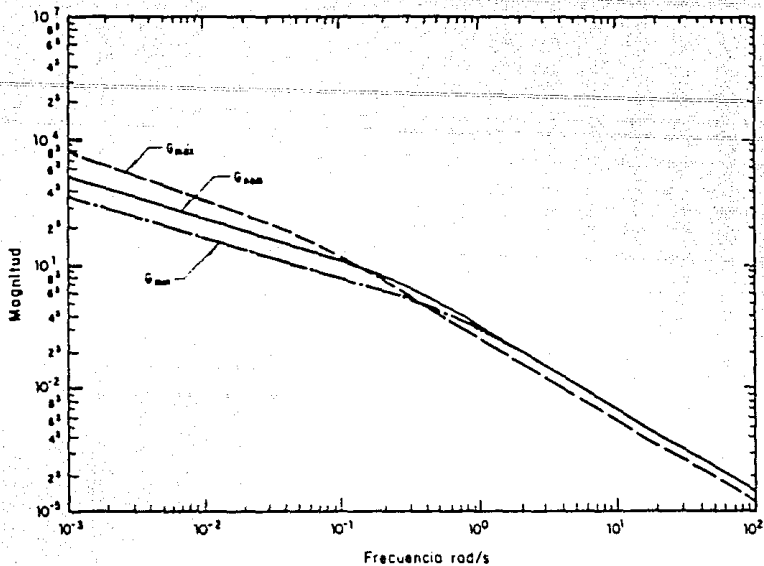


Fig. 3.2 Respuesta frecuencial del conjunto de plantas  $G$ .

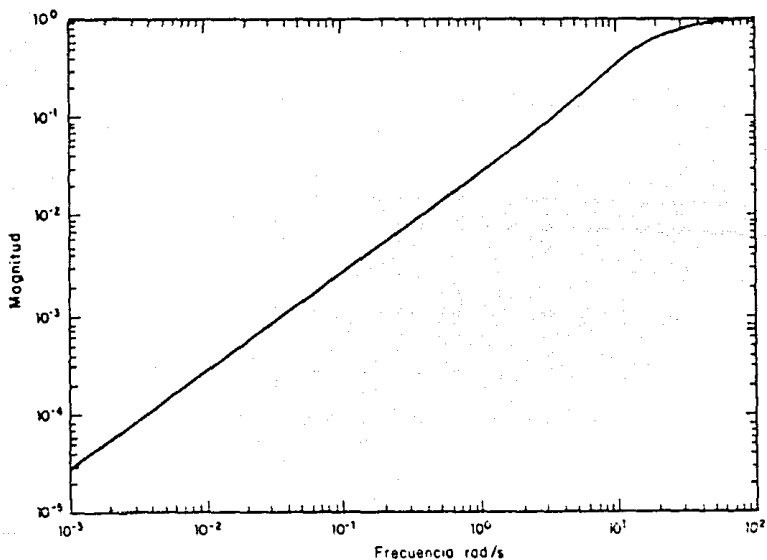


Fig. 3.3 Cota superior de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$  aceptada.

Por tanto, si la planta  $G(s, \alpha)$  corresponde al modelo nominal para una  $S(s)$  dada es posible determinar el controlador  $C(s)$  de la ec. (3.4). Sin embargo, en el caso aquí tratado sólo se conoce la magnitud de la



sensibilidad  $|S(j\omega)|$  en el conjunto  $\Omega$  por lo que no se puede emplear la ec. (3.4) sin antes determinar la fase de la función compleja  $S(j\omega)$  para toda  $\omega \in \Omega$ .

Tomando en cuenta que se supone tanto la planta  $G(s, \alpha)$  como el compensador de fase mínima, y que el sistema en lazo cerrado es estable, de la expresión (2.16) del capítulo 2, se concluye que  $S(s)$  también lo es, puesto que los ceros de  $S(s)$  corresponden a los polos del producto  $C(s)G(s, \alpha)$  y los polos de  $S(s)$  son iguales a los del sistema retroalimentado, si no existe cancelación de polos y ceros.

Por otro lado, se sabe que para una función de fase mínima  $S(s)$  la magnitud  $|S(j\omega)|$  y fase  $\phi(j\omega) = \arg(S(j\omega))$  están relacionados por la integral:

$$\phi(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d \ln |S(j\omega)|}{du} \ln \left[ \coth \left| \frac{u}{2} \right| \right] du \quad (3.5)$$

demostrada por H. Bode en la ref. [1], donde  $u = \ln(\omega/\omega_1)$ . De la integral (3.5) se observa que la fase  $\phi$  se obtiene integrando el producto de la pendiente de la gráfica logarítmica de la magnitud y el factor de ponderación  $\ln[\coth|u/2|]$ . Además en la referencia [1] se demuestra que si la pendiente de la magnitud en la gráfica de Bode es constante en un intervalo de dos décadas, una hacia arriba y una hacia abajo de la frecuencia de interés  $\omega_1$ , la fase puede calcularse simplemente usando

$$\phi(j\omega_1) = \text{pen}|S(j\omega_1)| \times \pi/2. \quad (3.6)$$

La demostración de la ec. (3.6) está basada en el hecho que la función  $f(u) = \ln[\coth|u/2|]$  tiende a cero para valores de  $u > 10$  y  $u < 0.1$ . La Fig. 3.4 muestra la curva normalizada de  $f(u)$ .

Prácticamente, en caso de que la pendiente de  $|S(j\omega)|$  no sea constante en el rango de dos décadas se puede utilizar la ec. (3.6) calculando una pendiente promedio en el intervalo considerado.

Por tanto como  $S(s)$  es de fase mínima, se puede emplear la relación (3.6) para obtener su fase  $\phi(j\omega)$  en función de su magnitud  $|S(j\omega)|$ .

Así, para el caso trivial de una planta nominal  $G(s, \alpha_0)$  sin considerar variaciones, se obtiene la respuesta frecuencial  $C_0(j\omega)$  de un compensador que satisface la especificación de diseño (3.2) simplemente usando la relación

$$C_0(j\omega) = (S_d(j\omega)^{-1} - 1)/G(j\omega, \alpha_0) \quad (3.7)$$

para toda  $\omega \in \Omega$ , junto con la condición de estabilidad

$$|C_0(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi, \alpha_0)| < 1 \quad (3.8)$$

donde  $\omega_\pi$  corresponde a la frecuencia en la cual

$$\arg\{C_0(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi, \alpha_0)\} = \pi \text{ rad} \quad (3.9)$$

Finalmente, es necesario parametrizar la respuesta  $C_0(j\omega)$  en términos de una función de transferencia  $C_0(s) = KN_c(s)/D_c(s)$  usando algún algoritmo de identificación. Empleando algoritmos de identificación de espectros en el procesamiento digital de señales, podemos parametrizar la respuesta frecuencial  $C_0(j\omega)$ . Usamos aquí el método de Yule-Walker, el cual se describe con detalle en el apéndice C.

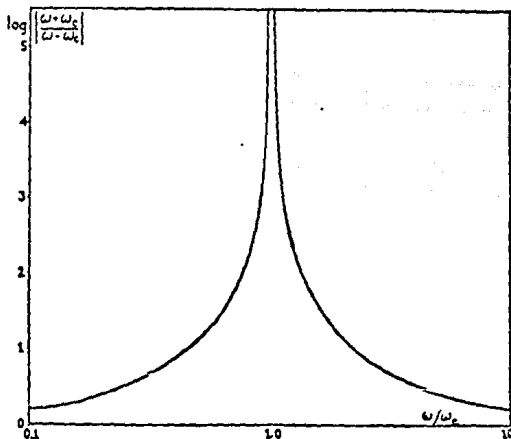


Fig.3.4 Función  $f(u) = \ln|\coth|u/2||$ .

Por tanto para una planta  $G(s, \alpha_0)$  sin incertidumbres la solución al problema planteado se resuelve ejecutando los siguientes pasos:

- a.1 Generar la respuesta frecuencial de la planta nominal  $G(j\omega, \alpha_0)$  en el rango de frecuencias de interés  $\Omega$ .
- a.2 Definir la especificación de diseño  $|S_d(j\omega)|$  o cota superior de la sensibilidad en el rango de frecuencias  $\Omega$ .
- a.3 Determinar la respuesta frecuencial de  $C_0(j\omega)$  usando ec. (3.7) y verificar que el sistema en lazo cerrado sea estable.
- a.4 Identificar la respuesta  $C_0(j\omega)$  por medio de un algoritmo de identificación; en el caso aquí tratado se emplea el de Yule-Walker.
- a.5 Verificar que el compensador diseñado cumple la especificación de la sensibilidad  $S$ , ec. (3.2).

### 3.2.2 MODELO CON INCERTIDUMBRES

Para el caso más general en que la planta  $G(j\omega, \alpha)$  varía dentro del conjunto definido por (3.1), se propone primeramente cuantificar el error o violación de la especificación de diseño, considerando como controlador base el ajustado para el caso nominal  $C_0(s)$ .

Para obtener información de que tanto y en que rango de frecuencias el sistema de control con  $C_0(s)$  no satisface la frontera superior de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$ , se propone dibujar la magnitud de la función de sensibilidad

$$|S_i(j\omega)| = |1 + C_0(j\omega)G_i(j\omega)|^{-1} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad i=1,2 \quad (3.10)$$

con  $G_1(j\omega) := G_{\min}(j\omega)$  y  $G_2(j\omega) := G_{\max}(j\omega)$ , junto con la cota superior permisible  $|S_d(j\omega)|$ . De esta manera, si las dos curvas  $|S_i(j\omega)|$  se encuentran abajo de  $|S_d(j\omega)|$  el controlador  $C_0(s)$  satisface la especificación de diseño exigida y únicamente se requiere verificar la estabilidad en los dos casos extremos usando el criterio de Nyquist.

En caso contrario, si al menos en un punto  $\omega \in \Omega$  alguna de las  $|S_i(j\omega)|$  es mayor a  $|S_d(j\omega)|$ , entonces el controlador  $C_0(s)$  no satisface la especificación de diseño. La Fig. 3.5 muestra a manera de ilustración el tipo de gráficas de Bode que se obtienen y que es necesario comparar.

Otra forma para cuantificar gráficamente la violación de la especificación de diseño, es definir la función de error  $E_i(j\omega)$  como

$$E_i(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S_d(j\omega)| > |S_i(j\omega)| \\ |S_i(j\omega)| - |S_d(j\omega)| & \text{si } |S_d(j\omega)| < |S_i(j\omega)| \end{cases} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad i=1,2 \quad (3.11)$$

Las gráficas de  $E_i(j\omega)$ , presentadas en la Fig. 3.6, para un caso ficticio, permiten visualizar las frecuencias donde no se cumple la especificación.

Así los puntos arriba del eje de ganancia unitaria están asociados a las frecuencias en que se viola la frontera  $|S_d(j\omega)|$ . Estos valores de frecuencias  $\omega_i$  son un número de valores discretos elementos del conjunto  $\Omega$  y se denotará como el conjunto  $\Omega_v \subseteq \Omega$  en el que se excede la sensibilidad tolerada y el error máximo está dado por

$$E_{\max} \approx \max_{\omega \in \Omega_v} \{E_1(j\omega), E_2(j\omega)\} \quad (3.12)$$

Junto con el error máximo se identifica el índice  $i^*$  correspondiente

$$i^* \approx \text{índice} \{ \max_{\omega \in \Omega_v} \{E_1(j\omega), E_2(j\omega)\} \} \quad (3.13)$$

Para modificar los parámetros del controlador  $C_o(s)$  y hacer que el conjunto  $\Omega_v$  sea el vacío se derivan primeramente las relaciones que vinculan los cambios en la sensibilidad cuando se modifican los parámetros  $K$ ,  $N_c(s)$  y  $D_c(s)$  del controlador. Esto es, se buscan los operadores que relacionan las variaciones en la sensibilidad, para  $i=1$  y  $2$ , respecto a los incrementos en

$$\text{el denominador} \quad \Delta S_i = O_{SiD} \Delta D_c \quad (3.14)$$

$$\text{el numerador} \quad \Delta S_i = O_{SiN} \Delta N_c \quad (3.15)$$

$$\text{y la ganancia} \quad \Delta S_i = O_{SiK} \Delta K \quad (3.16)$$

Escribiendo la función de sensibilidad  $S(s)$ , en términos de los parámetros del controlador se tiene

$$S_i(s) = D_c(s) / (D_c(s) + K G_i(s) N_c(s)) \quad (3.17)$$

Si se consideran incrementos en  $C(s)$  pequeños, los operadores  $O_{SiD}$ ,  $O_{SiN}$  y  $O_{SiK}$  de las ecs. (3.14)-(3.16) pueden considerarse lineales y

aproximarse por medio de variaciones de primer orden en  $S_i(s)$ . Así se determinan simplemente a través de las derivadas parciales de  $S_i(s)$  respectivas. Por tanto de la ec. (3.17) se obtiene

$$\frac{\Delta S_i(s)}{\Delta D_c(s)} \approx \frac{\partial S_i(s)}{\partial D_c(s)} = S_i^2(s) G_i(s) K \frac{N_c(s)}{(D_c(s))^2} \quad (3.18)$$

$$\frac{\Delta S_i(s)}{\Delta N_c(s)} \approx \frac{\partial S_i(s)}{\partial N_c(s)} = -S_i^2(s) G_i(s) \frac{K}{D_c(s)} \quad (3.19)$$

$$\frac{\Delta S_i(s)}{\Delta K} \approx \frac{\partial S_i(s)}{\partial K} = -S_i^2(s) G_i(s) \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (3.20)$$

para  $i=1$  y  $2$ . Se concluye entonces de las ecs. (3.18)-(3.20), como era de esperarse, que al variar cualquier parámetro en el controlador, se altera  $S_i(s)$  en todo el espectro de frecuencia. Sin embargo, se está interesado sólo en disminuir la sensibilidad en las frecuencias del conjunto  $\Omega_v$ , sin incrementarla apreciablemente en las otras frecuencias.

Es decir se buscan incrementos pequeños en  $\Delta D_c$ ,  $\Delta N_c$  y  $\Delta K$  con los cuales se cumpla, para  $i=1, 2$  y todo  $s \in \Omega_v$ , la desigualdad

$$|\Delta S_i(s)| = |S_d(s) - S_i(s)| = \left| \frac{S_i(s)^2 G(s)}{D_c(s)} \right| \left| \frac{K N_c(s)}{D_c(s)} \Delta D_c(s) - K \Delta N_c(s) - N_c(s) \Delta K \right| \quad (3.21)$$

y además se mantengan las magnitudes  $|S_i(j\omega)|$  dentro de la frontera superior  $|S_d(j\omega)|$  en el resto del intervalo  $\Omega$ .

Considerando que los incrementos en los polinomios del controlador son independientes, se pueden despejar los incrementos  $\Delta N_c(s)$  y  $\Delta D_c(s)$  de las ecs. (3.18) y (3.19) y expresarlos en términos de las reducciones en  $S_i$  deseadas, obteniendo para el polinomio denominador

$$\Delta D_c(s) = \frac{S_d(s) - S_i(s)}{S_i(s) \{1 - S_i(s)\}} D_c(s) \quad s \in \Omega_v \quad \forall i=1 \text{ y } 2 \quad (3.22)$$

y para el numerador

$$\Delta N_c(s) = - \frac{S_d(s) - S_i(s)}{S_i(s) \{1 - S_i(s)\}} N_c(s) \quad s \in \Omega_v \quad \forall i=1 \text{ y } 2 \quad (3.23)$$

Como en las expresiones (3.22) y (3.23) se conocen todos los términos del lado derecho para  $s \in \Omega_v$ , los valores de los incrementos pueden

calcularse y en consecuencia el problema se reduce a encontrar el polinomio  $\Delta N_c(s)$  o  $\Delta D_c(s)$ , que evaluado en los puntos del conjunto  $\Omega$  para  $i=1$  y  $2$  satisfaga la ec. (3.22) ó (3.23) según sea el caso.

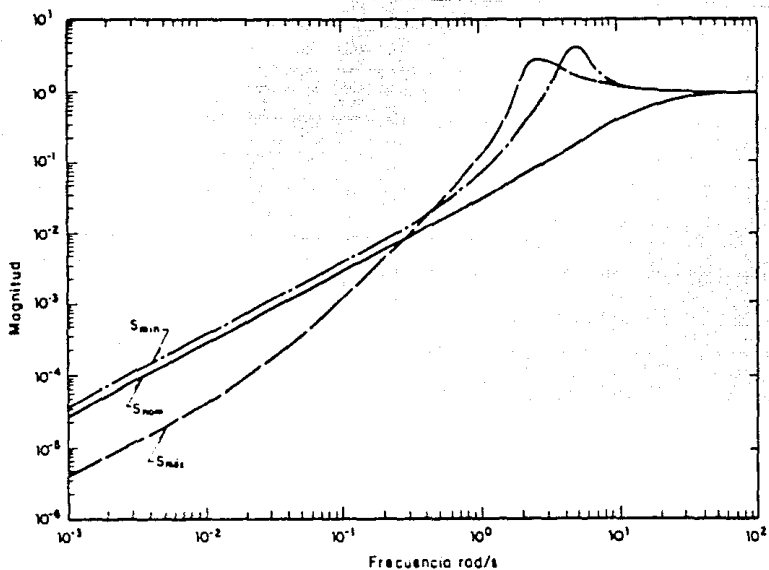


Fig. 3.5 Cota de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$  y  $|S_l(j\omega)|$  para  $i=1$  y  $2$ .

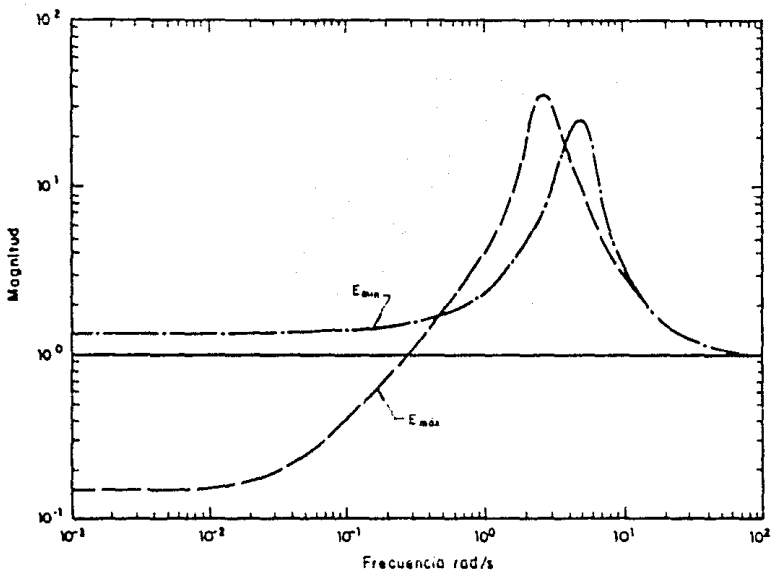


Fig. 3.6 Violación de la especificación de diseño  $E_l(j\omega)$ .

### 3.2.2.1 CONTROLADOR C(S) SIN RESTRICCIÓN EN EL ORDEN

Así en el caso ideal de no tener restricciones en el orden del compensador y que sólo para uno de los extremos de las incertidumbres  $G_i$  se viole la cota de diseño, se puede seleccionar tanto el polinomio numerador  $N_c(s)$  como el denominador  $D_c(s)$  y plantear la determinación del incremento  $\Delta N_c(s)$  o  $\Delta D_c(s)$  respectivamente en términos de un problema de interpolación de polinomios [7]. En particular se puede emplear el siguiente teorema, el cual establece condiciones para interpolar una función polinomial que debe pasar por  $n$  puntos.

**TEOREMA 3.1.** Dada una función polinomial [7]

$$f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (3.24)$$

con  $n$  puntos soportes en coordenadas cartesianas  $(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$ , donde  $x_i$  y  $f_i \in \mathbb{C}$  entonces los coeficientes  $a_i \in \mathbb{C}$  de la función  $f(x)$  están dados por la solución del sistema

$$V_n^T a^T = f^T \quad (3.25)$$

donde  $a = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1]$ ,  $f = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]$  y  $V_n$  es la matriz de

Vandermonde definida como

$$V_n := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Además si todos los valores de  $x_i$  son distintos y las  $f_i$  no son todos cero, entonces la solución para  $f(x)$  es única y no trivial.  $\square\square$

Como en el caso considerado los coeficientes  $a_i$  del polinomio por interpolar deben ser reales, no se puede aplicar directamente el Teorema

3.1. A continuación se presentan dos corolarios derivados del teorema anterior al tomar en cuenta que  $a_1 \in \mathbb{R}$  y que la parte real de los puntos  $x_1$  es siempre cero.

**COROLARIO 3.2.** Dada una función polinomial con coeficientes reales

$$f(x) = \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n} \quad (3.27)$$

con el siguiente conjunto de puntos soportes  $(0+j\omega_1, f_1), (0+j\omega_2, f_2), \dots, (0+j\omega_n, f_n)$  con  $f_i \in \mathbb{C}$ , entonces los coeficientes de la función  $f(x)$  están dados por la solución del sistema.

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_n^T & 0 \\ 0 & \hat{V}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.28)$$

con  $a_1 = [\alpha_{2n} \ \alpha_{2n-2} \ \dots \ \alpha_2]$ ,  $a_2 = [\alpha_{2n-1} \ \alpha_{2n-3} \ \dots \ \alpha_1]$ ,

$f_1 = \text{Re}\{ [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n] \}$ ,  $f_2 = \text{Im}\{ [f_1/\omega_1 \ f_2/\omega_2 \ \dots \ f_n/\omega_n] \}$

y la matriz  $\hat{V}_n$  definida como

$$\hat{V}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 & \dots & -\omega_n^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & \dots & \omega_n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{2n-2} & \omega_2^{2n-2} & \omega_3^{2n-2} & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

□□□

**COROLARIO 3.3.** Dada una función polinomial con coeficientes reales

$$f(x) = \alpha_1 x^{2n} + \alpha_2 x^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n+1} \quad (3.30)$$

con el siguiente conjunto de puntos soportes  $(0+j\omega_1, f_1), (0+j\omega_2, f_2), \dots, (0+j\omega_n, f_n)$  con  $f_i \in \mathbb{C}$ , entonces los coeficientes de la función  $f(x)$  están dados por la solución del sistema de dimensión  $n+1$

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_{n1}^T & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} f_1 \\ 1 \\ f_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.31)$$



con  $a_1 = [\alpha_{2n+1} \alpha_{2n-1} \dots \alpha_1]$ ,  $a_2 = [\alpha_{2n} \alpha_{2n-2} \dots \alpha_2]$ ,

$$f_1 = \text{Re}\{ [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n] \}, \quad f_2 = \text{Im}\{ [f_1/\omega_1 \ f_2/\omega_2 \ \dots \ f_n/\omega_n] \}$$

y las matrices  $\hat{V}_{n1}$  y  $\hat{V}_{n2}$  definidas como

$$\hat{V}_{n1} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 & & -\omega_n^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & & \omega_n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{2n} & \omega_2^{2n} & \omega_3^{2n} & & \omega_n^{2n} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\hat{V}_{n2} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 & & -\omega_n^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & & \omega_n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{2n-2} & \omega_2^{2n-2} & \omega_3^{2n-2} & & \omega_n^{2n-2} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Además el polinomio interpolado es siempre mónico. □□□

Para la demostración de ambos corolarios ver el apéndice A.

### 3.2.2.2 CONTROLADOR PROPIO C(S) CON RESTRICCIONES EN EL ORDEN

En el caso real, se desea ajustar un controlador C(s) propio, que sea del menor orden posible. Además por lo general cuando se viola la restricción ocurre tanto con  $S_1(j\omega)$  como con  $S_2(j\omega)$ ; por lo que la solución arriba propuesta no puede ser aplicada.

Estos hechos motivaron a restringir el número de puntos por interpolar en función del orden del compensador. Así si el polinomio a modificar es de orden m impar (con base en el Corolario 3.2) se considera un número de puntos soportes  $n' = (m+1)/2$  para la interpolación. En el caso de un polinomio de orden m par, se deduce del Corolario 3.3 que se debe emplear un número  $n' = m/2$  de puntos soportes para la interpolación.

En ambos casos la selección del error  $E_i(j\omega)$  que se reduce se realiza con base en el error máximo. En consecuencia se toman para el error considerado los  $n'$  puntos de frecuencias asociados a los  $n'$  valores máximos de  $E_i(j\omega)$ .

A nivel de ejemplo se presentan el sistema de ecuaciones que debe resolverse para  $m=1, 2, 3$  y  $4$ .

Ejemplo 1: Polinomio de primer orden  $\Delta(s) = \alpha_1 s + \alpha_2, \Rightarrow m=1, n'=1$

Ejemplo 2: Polinomio de segundo orden  $\Delta(s) = \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3, \Rightarrow m=2, n'=1$

Ejemplo 3: Polinomio de tercer orden  $\Delta(s) = \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4, \Rightarrow m=3, n'=2$

Ejemplo 4: Polinomio de cuarto orden  $\Delta(s) = \alpha_1 s^4 + \alpha_2 s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s + \alpha_5, \Rightarrow m=4, n'=2$

El procedimiento arriba propuesto se puede repetir e ir ajustando iterativamente tanto el polinomio del numerador como del denominador del controlador hasta lograr satisfacer la frontera superior de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$  para  $S_1(j\omega)$  y  $S_2(j\omega)$ .

Para verificar la estabilidad, se debe graficar para cada ajuste o interpolación del controlador el diagrama de Nyquist de los tres sistemas  $C(j\omega)G(j\omega)$ ,  $C(j\omega)G_1(j\omega)$  y  $C(j\omega)G_2(j\omega)$ , ya que al no tener parametrizadas las incertidumbres de la planta no se puede emplear el criterio de Routh-Hurwitz.

Por otro lado el mecanismo no garantiza a priori a que con el orden del polinomio  $n'$  fijo se pueda lograr bajar la sensibilidad en el rango deseado para ambas fronteras de la planta. Como consecuencia en caso de no lograrlo es necesario aumentar el orden del controlador.

A continuación se describen los pasos propuestos para el algoritmo.

### 3.3 ALGORITMO DE AJUSTE

Para ajustar el controlador propio  $C(s) = KNc(s)/Dc(s)$  que mejor satisfaga las especificaciones se propone el siguiente algoritmo:

A.1 Definir la banda de incertidumbres de la planta  $\mathcal{G} \{G_{\min}(j\omega), G_{\max}(j\omega)$  y  $G(j\omega, \omega_0)\}$ , ec. (3.1), y el límite superior de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$ , ec. (3.3), en el rango de frecuencias de interés  $\Omega$ .

A.2 Hacer  $k=1$ , calcular un controlador nominal estabilizante  $C^k(s)=C_0(s)$  que satisfaga la condición de diseño  $\mathcal{L}$  (emplear el procedimiento aquí propuesto o cualquier otro) e ir a A.5.

A.3 Verificar la estabilidad para el modelo nominal. Si es inestable continuar, en caso contrario borrar el paso A.4.

A.4 Hacer  $p^{k+1}=p^k$ ,  $inc^{k+1}=inc^k/2$ ,  $k=k+1$  e ir a A.12.

A.5 Calcular los tres márgenes de fase usando la respuesta  $C^k G_1(j\omega)$ ,  $C^k G_2(j\omega)$  y  $C^k G_0(j\omega)$ .

A.6 Determinar los errores  $E_1^k(j\omega)$ , el error máximo  $E_{\max}^k(j\omega)$ , el índice  $i^*k$ , y el subconjunto  $\Omega^k$  (ecs. (3.11) - (3.13)).

A.7 Si  $E_{\max}^k > E_{\max}^{k-1}$  ir a A.4, si no continuar. Donde  $E_{\max}^0 = 1$ .

A.8 Graficar la cota superior de la sensibilidad  $S_d(j\omega)$  junto con los extremos,  $S_1^k(j\omega)$ ,  $S_2^k(j\omega)$  y presentar los errores  $E_1^k(j\omega)$  para  $\omega \in \Omega^k$ .

A.9 Preguntar si se modifica el controlador, en caso afirmativo seleccionar el parámetro de la tripleta  $(\Delta K, \Delta Nc(s), \Delta Dc(s))$ , a modificar y su porcentaje ( $p, inc$ ),  $k=1$ ; de lo contrario terminar.

A.10 Calcular el incremento de  $\Delta p(j\omega)$  usando la ec. (3.22) ó (3.23) según corresponda.

A.11 Interpolar el polinomio  $\Delta p(j\omega)$  usando el corolario 3.2 o 3.3, con el número de puntos soportes igual al grado del polinomio p.

A.12 Definir el nuevo polinomio correspondiente

$$p^{k+1}(s) = p^k(s) + inc^k \Delta p \quad (3.34)$$

A.13 Si  $1 \leq k \leq 5$  regresar al paso A.3; en caso contrario desplegar en pantalla "inadecuado el cambio propuesto" y brincar a A.9.

Comentario: si no es posible lograr un sistema estable y reducir el error se debe incrementar el orden del controlador e iniciar el proceso de nuevo.

El algoritmo de ajuste se implanta usando tres programas los cuales de agrupan en uno solo principal llamado CORISE como abreviación de "Controladores con restricciones en la sensibilidad".

Los tres programas componentes se clasifican según su función como:

INICIO. Recopila todos los datos necesarios de la banda de incertidumbres de la planta  $\mathcal{S}$  y de la cota superior de la sensibilidad  $\mathcal{S}$ .

CONTROL. Calcula la respuesta frecuencial del controlador inicial  $Co(j\omega)$  y la parametriza con una función de transferencia  $Co(s)$ .

AJUSTE. Verifica que el controlador  $C^k(s)$  satisfaga las especificaciones de diseño, si las viola, realiza el proceso de ajuste ya descrito.

Los diagramas de flujo correspondientes del programa principal así como de los tres programas componentes se explican en el apéndice B. Y el listado de los programas con las funciones y formatos que maneja el paquete MAT-LAB también se presentan en dicho apéndice.

## CAPÍTULO 4

### APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE AJUSTE

#### 4.1 Introducción.

Para mostrar la efectividad del algoritmo de diseño descrito en el capítulo anterior, a continuación se presentan los resultados al emplearlo en dos sistemas de control. El primer diseño corresponde al controlador que regula la dirección de un barco sujeto a perturbaciones paramétricas y ruidos, y el segundo al control para un brazo manipulador sujeto a variaciones paramétricas en su modelo.

#### 4.2. Ejemplo 1. Regulación de la dirección de un barco.

Como se mencionó en la introducción, el algoritmo de diseño se emplea para ajustar el sistema de control de la dirección de un barco. El modelo reducido descrito por Åström para el proceso corresponde a la función de transferencia, [ref. 8]

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(s+a)} , \quad (4.1)$$

en la cuál la variable controlada  $Y(s)$  corresponde a la dirección del barco y la variable de control o señal de acción  $U(s)$ , corresponde al ángulo de la aleta guía del barco.

En [ref. 8] se muestra que esta función de transferencia simplificada, conocida como "modelo Nomoto" es bastante general y puede ser empleada para describir el comportamiento de diferentes tipos de barcos, (tanques, cargueros y de pasajeros) en donde los valores de  $k$  y  $a$ , dependen de la clase considerada. El parámetro  $k$ , depende de la longitud del barco, la velocidad y de la aleta guía. El parámetro  $a$  depende tanto de la carga como de la velocidad y puede cambiar de signo para diferentes puntos de operación.

Los valores de estos parámetros para las condiciones nominales de

operación, para un barco tipo tanque son:  $a=0.26$  y  $k=0.38$ .

Existen dos tipos de perturbaciones que afectan el comportamiento del barco y que dependen de las condiciones atmosféricas, el viento y el movimiento de las olas.

La influencia del viento se considera como una perturbación aditiva a la salida que puede ser descrita como una fuerza constante que produce un desplazamiento constante  $v$ , en la dirección del barco cuya magnitud depende de las condiciones del mar.

El movimiento de las olas actúa sobre el barco como una fuerza que produce una desviación que se puede representar como

$$v = v_0 \sin \omega t + V_0 \quad (4.2)$$

La amplitud  $v_0$  depende de las condiciones del mar; la frecuencia  $\omega$  depende del ángulo entre la proa y el frente de onda de las olas. Los valores típicos dados por Åström son:  $v_0 = 0.2^0/s$  y la frecuencia  $\omega$ , en el rango (1 - 2 rad/s).

#### 4.2.1 Objetivos de diseño.

Para el modelo dado en (4.1), se desea diseñar un controlador continuo, acoplado a la planta en el esquema de control de un grado de libertad estudiado en el capítulo 2, de tal manera que el sistema en malla cerrada tenga las siguientes características:

- a) Estabilidad en malla cerrada para todas las variaciones consideradas de la planta nominal.
- b) Atenuación de perturbaciones de la forma dada por (4.2) en el rango de frecuencias 1 - 2 rad/s para todas las variaciones consideradas de la planta nominal.

#### 4.2.2 Selección de la función de sensibilidad.

Como se planteó en el capítulo 2, la función de sensibilidad  $S(s)$  del esquema de control relaciona la salida controlada  $Y(s)$  con sus perturbaciones  $P(s)$ , por lo tanto, para las perturbaciones dadas por

(4.2) es necesario especificar el módulo de la respuesta frecuencial de la función de sensibilidad del sistema  $|S_d(j\omega)|$  suficientemente pequeño en el rango de frecuencias de 1 a 2 rad/s.

De esta manera se garantiza una atenuación del efecto de las perturbaciones sobre la salida del sistema.

Se propone el rango de frecuencias de .01 a 100 rad/s, para tener una ventana amplia de análisis del sistema, y se toman 20 puntos dentro de dicho rango espaciados logarítmicamente. El módulo  $|S_d(j\omega)|$  del índice de desempeño deseado en los 20 puntos considerados, tiene magnitudes inferiores a la unidad a frecuencias menores que 1 - 2 rad/s y cercanas a la unidad para  $\omega > 1 - 2$  rad/s como puede verse de la Fig. 4.1.

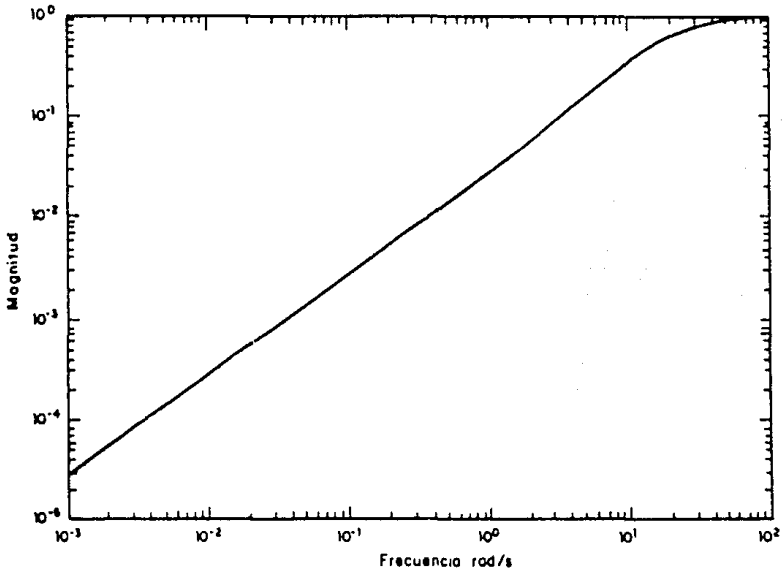


Fig. 4.1. Respuesta frecuencial de la cota superior de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$ .

#### 4.2.3 Banda de respuesta frecuencial de la planta.

Para obtener la caracterización de la planta (magnitud y fase) en el punto de operación nominal, así como la banda de incertidumbres (variaciones máxima y mínima) se genera la respuesta en frecuencia de la

función de transferencia (4.1) de .01 a 100 rad/s para los siguientes valores de k y a:

- 1)  $k=0.38$  y  $a=0.26$  para el punto de operación nominal,
- 2)  $k=0.37$  y  $a=0.75$  para el punto de operación de variación máximo en un sentido
- 3)  $k=0.18$  y  $a=.04$  para el punto de operación de variación máximo en el otro sentido.

En la Fig. 4.2 se presentan la respuesta frecuencial de la banda de incertidumbres correspondientes con las tres condiciones de operación.

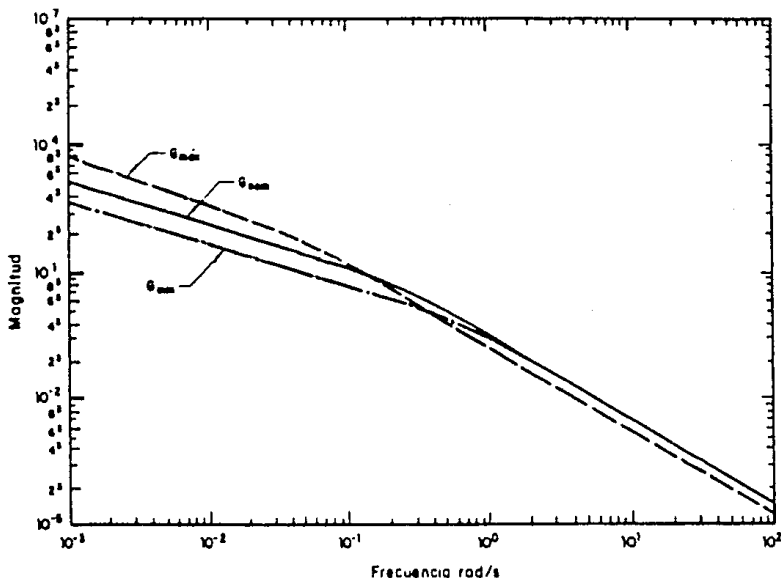


Fig. 4.2. Respuesta frecuencial de la banda de incertidumbres de la planta  $G$ .

#### 4.2.4 Controlador en el caso ideal.

Aplicando la metodología descrita en el inciso (3.2.1) para el caso nominal e identificándolo con una función de transferencia de orden 2 se obtiene el controlador inicial:

$$Co(s) = \frac{180.4s^2 + 1.225 \times 10^5 s + 9.742 \times 10^6}{s^2 + 1116.3s + 1.855 \times 10^5} \quad (4.3)$$



Con este controlador se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado para los tres puntos de operación de la planta, graficando la respuesta frecuencial de los productos  $CoGo(j\omega)$ ,  $CoG1(j\omega)$  y  $CoG2(j\omega)$  (Fig. 4.3) y usando el criterio de Nyquist. En los tres casos el sistema es estable y los márgenes de fase correspondientes son:

- i) Para la planta nominal =  $7.46^{\circ}$
- ii) Para la cota máxima de la planta =  $4.85^{\circ}$
- iii) Para la cota mínima de la planta =  $13.2^{\circ}$

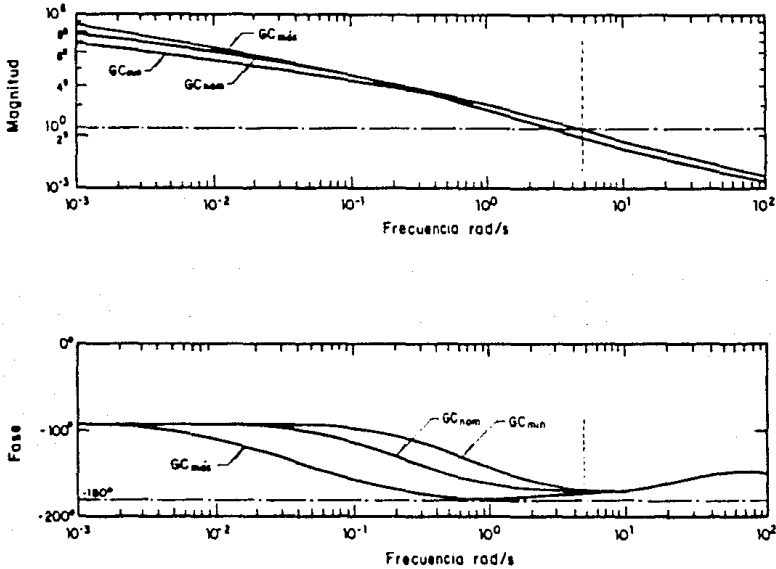


Fig. 4.3. Diagramas de Bode de los productos  $CoGo(j\omega)$ ,  $CoG1(j\omega)$  y  $CoG2(j\omega)$ .

Observando los márgenes de fase de los tres puntos de operación se puede concluir que el sistema es poco robusto.

Si se calculan las funciones de sensibilidad  $|S1(j\omega)|$  y  $|S2(j\omega)|$  para  $Co(j\omega)$  y se grafican junto con la cota superior  $|Sd(j\omega)|$ , se comprueba que la sensibilidad en los extremos quedan por encima de la deseada, esto se ve en la Fig. 4.4. Por lo tanto se deben modificar los parámetros ( $\Delta K$ ,  $\Delta Nc(s)$  ó  $\Delta Dc(s)$ ) del controlador inicial  $Co(s)$  en (4.3).

Por otro lado la Fig. 4.5 muestra los errores  $E1(\omega)$  para los dos extremos al usar el controlador nominal, ec.(4.3), con el error máximo igual a 34.

Este exceso se verifica en la Fig. 4.4 donde se presenta la cota de la sensibilidad  $\ell$  y la sensibilidad para las respuestas extremas.

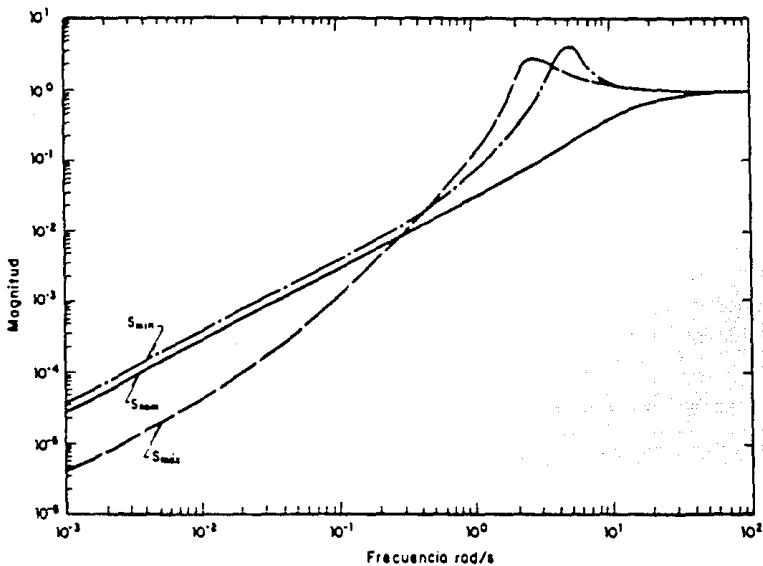


Fig. 4.4. Sensibilidad de  $|S_d(j\omega)|$ ,  $|S_1(j\omega)|$  y  $|S_2(j\omega)|$ .

#### 4.2.5 Ajuste del controlador inicial.

Después de modificar  $\Delta N_c(s)$  nueve veces con variaciones del 100% para lograr el ajuste rápidamente y restringiéndolo a que sea un controlador estable se obtienen no solo un sistema estable, sino que los márgenes de fase son satisfactorios.

- i) Para la planta nominal =  $131.25^0$
- ii) Para la cota máxima de la planta =  $131.02^0$
- iii) Para la cota mínima de la planta =  $131.76^0$
- iv) El error máximo se reduce a 0.98 en la frecuencia de 100 rad/seg.

Los resultados con la novena iteración para las respuestas frecuenciales de  $C^9G_0(j\omega)$ ,  $C^9G_1(j\omega)$  y  $C^9G_2(j\omega)$ , el error  $E_1^9(\omega)$  y la cota superior de la sensibilidad junto con los extremos,  $|S_d(j\omega)|$ ,  $|S_1(j\omega)|$  y  $|S_2(j\omega)|$ , se muestran en las Figs. 4.6, 4.7 y 4.8 respectivamente.

El controlador final que satisface ambas especificaciones de diseño es:

$$C^9(s) = \frac{189.4s^2 + 1.144 \times 10^7 s - 1.056 \times 10^9}{s^2 + 1116.3s + 1.855 \times 10^5} \quad (4.4)$$

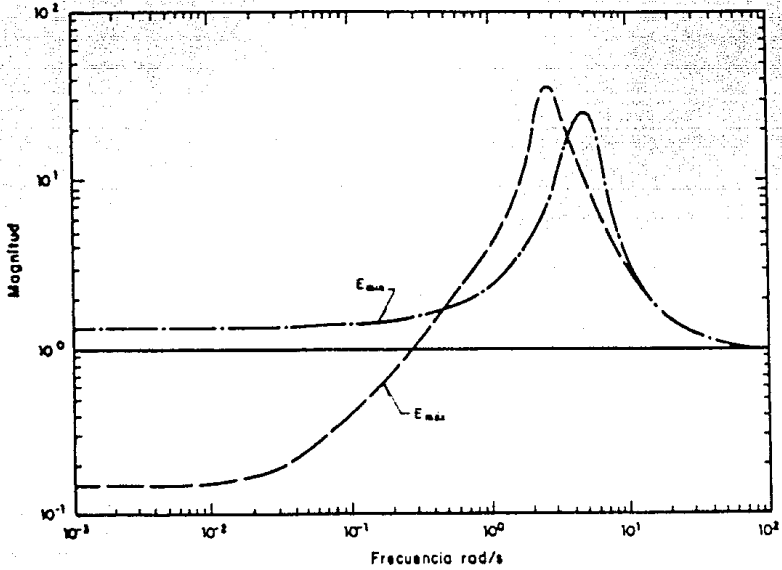


Fig. 4.5. Gráfica del error  $E_{max}(j\omega)$  y  $E_{min}(j\omega)$ .

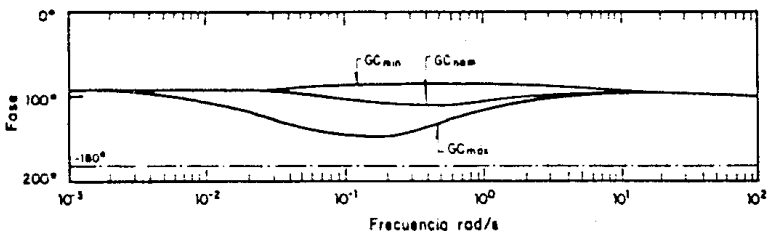
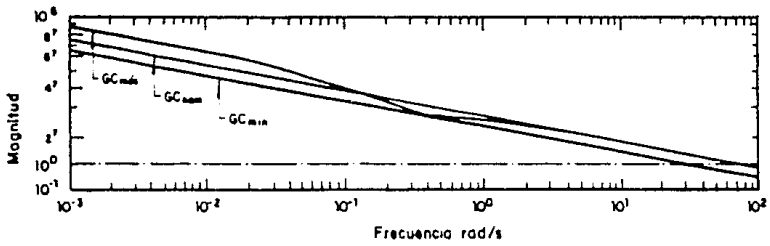


Fig. 4.6. Diagramas de Bode para los productos  $C^9G_0(j\omega)$ ,  $C^9G_1(j\omega)$  y  $C^9G_2(j\omega)$ .

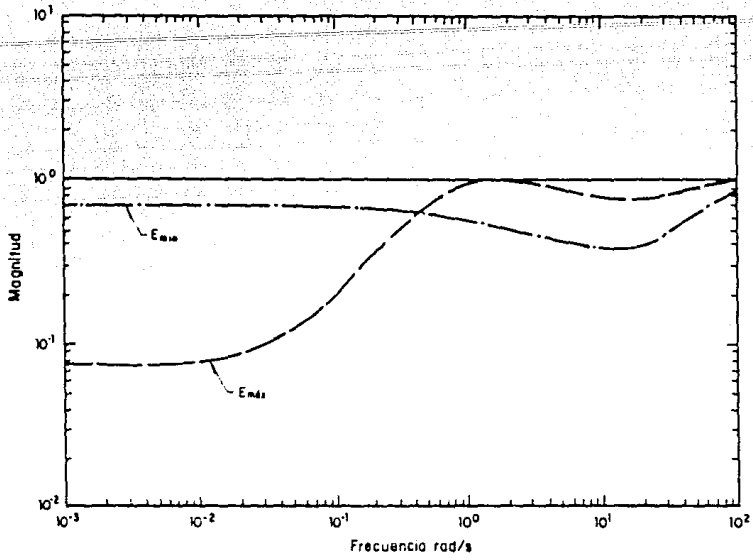


Fig. 4.7. Función error  $E_1^\sigma(\omega)$  para  $\sigma=1$  y 2.

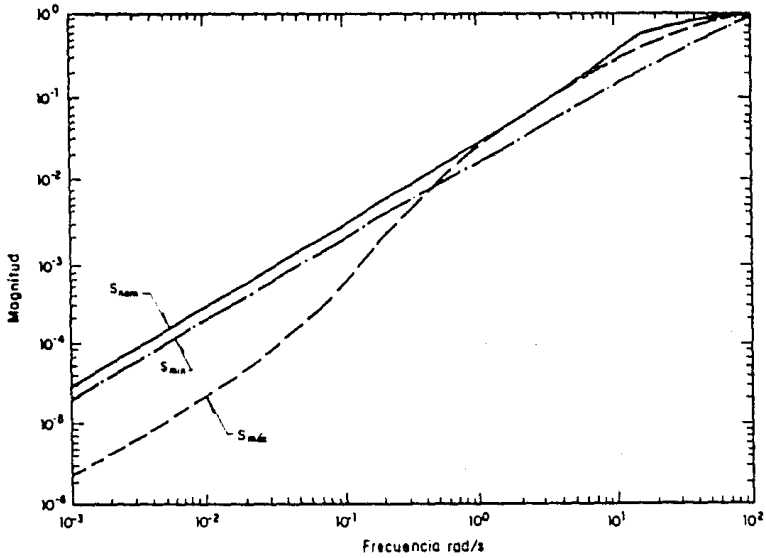


Fig. 4.8. Sensibilidades  $|S_d(j\omega)|$ ,  $|S_1(j\omega)|$  y  $|S_2(j\omega)|$ .

#### 4.2.6 Análisis de resultados.

Para el diseño del controlador inicial  $C_0(s)$  estabilizante se garantiza

que las perturbaciones escalón son rechazadas debido al integrador que posee la planta en su función de transferencia nominal. Pero el sistema tiene márgenes de estabilidad muy pobres.

Se observa que los márgenes de estabilidad se modifican en forma clara al ajustar los parámetros del controlador  $C^k(s)$ , dando como resultado que el sistema de control aumenta su margen de estabilidad.

Para la segunda especificación de diseño, la cota de la sensibilidad, se observa que  $|S_1(j\omega)|$  y  $|S_2(j\omega)|$  después de 9 iteraciones quedan dentro de la cota superior  $|S_d(j\omega)|$ . Por lo tanto el sistema de control logra atenuar las perturbaciones de la forma definida en la ec.(4.2).

Las magnitudes de los coeficientes de la función de transferencia del controlador indican que posee constantes de tiempo pequeñas.

Por la relación que existe entre la función de sensibilidad  $|S(j\omega)|$  y la función de transferencia de lazo cerrado  $|T(j\omega)|$  del sistema de control tratado, se tiene como consecuencia una buena respuesta a las señales de acción ó comando en las frecuencias donde la sensibilidad es menor a uno.

#### 4.3. Ejemplo 2. Un brazo manipulador industrial.

El modelo simple de un brazo manipulador tomado de la ref. [8] es usado en este ejemplo. La función de transferencia de la entrada de control (corriente  $I$  del motor ) a la salida medible (velocidad angular  $\omega$  del motor) está dada por

$$G_p(s) = \frac{\Omega(s)}{I(s)} = \frac{k_m (J_a s^2 + d s + k)}{J_a J_m s^3 + d(J_a + J_m) s^2 + k(J_a + J_m) s} \quad (4.5)$$

con  $J_a \in [0.0002, 0.002]$ ,  $J_m=0.002$ ,  $d=0.0001$ ,  $k=100$ , y  $k_m=0.5$ . El momento de inercia  $J_a$  del brazo manipulador varia con el ángulo del brazo.

Para determinar la banda de incertidumbres del modelo del brazo manipulador  $G_p(s)$  se obtiene variando el valor de la inercia de armadura

$J_a$  en la función de transferencia para sus valores extremos, para obtener  $G_{p_{max}}(s)$  y  $G_{p_{min}}(s)$ . La respuesta frecuencial de la banda de incertidumbres del modelo para los valores extremos de la inercia de armadura  $J_a$  se muestran en la Fig. 4.9.

El propósito del sistema de control es diseñar un controlador robusto, propio, estabilizante de tal manera que la sensibilidad en los extremos queden por debajo del límite superior especificado  $|S_d(j\omega)|$  en el intervalo de frecuencias en estudio.

#### 4.3.1 Especificaciones y restricciones de diseño.

Como en el primer ejemplo, el índice de desempeño  $|S_d(j\omega)|$  debe ser especificado con restricción grande en el intervalo de frecuencias donde se dan los disturbios externos y variaciones del modelo.

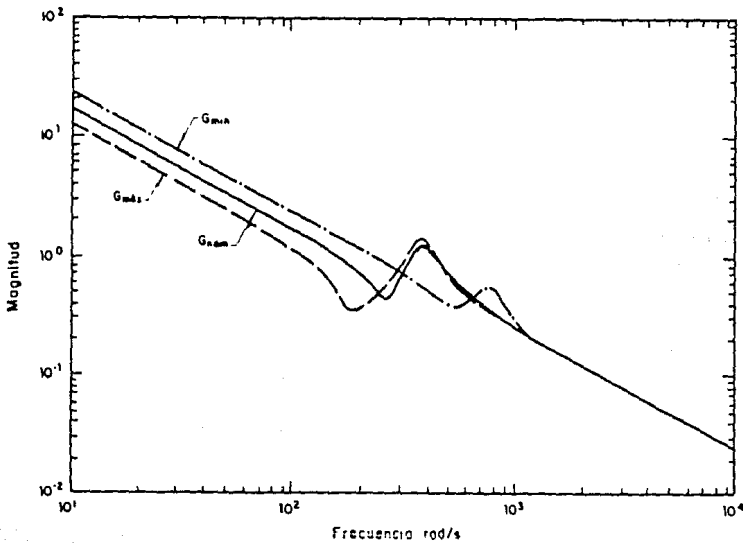


Fig. 4.9. Respuesta frecuencial de la banda de incertidumbres de la planta  $G$ .

La cota superior de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$  se selecciona con una pendiente suavizada en el rango de frecuencias donde se presentan las frecuencias de la planta, (picos abruptos en la respuesta frecuencial de

la Fig. 4.9). Como consecuencia se seleccionó el rango de frecuencias de interés de 100 a 1000 rad/s. La cota superior de la sensibilidad propuesta se muestra en la Fig. 4.10.

De la misma forma que en el primer ejemplo se considera conveniente abrir la ventana de análisis de frecuencias para tener mejor visualización del problema. En particular se propone el conjunto  $\Omega$  de veinte puntos espaciados logarítmicamente en el intervalo de 10 a 10000 rad/s, esto es una década por abajo y una década por arriba del rango crítico inicial.

#### 4.3.2 Controlador en el caso ideal $C_0(s)$ .

El primer paso de acuerdo con el método propuesto es obtener la respuesta frecuencial del controlador nominal estabilizante  $C_0(s)$  que satisfaga la cota de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$  mediante la ec. (3.3) del capítulo 3. Como resultado obtenemos la función de transferencia inicial dada en (4.6).

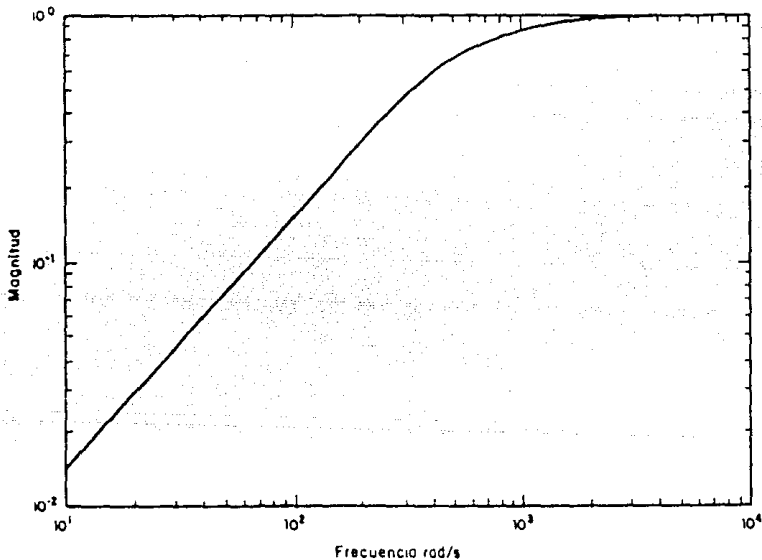


Fig. 4.10. Cota superior de la sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$ .

Para verificar que este controlador cumple con las especificaciones de diseño y restricciones, se determina la estabilidad, los márgenes de fase para las variaciones extremas de operación a partir de los diagramas de

Bode de los productos  $CoGo(j\omega)$ ,  $CoG_1(j\omega)$  y  $CoG_2(j\omega)$  (Fig. 4.11).

Función de transferencia inicial:

$$Co(s) = \frac{2.181s^2 + 8.046 \times 10^4 s + 1.064 \times 10^9}{s^2 + 2.501 \times 10^4 s + 2.556 \times 10^8} \quad (4.6)$$

Para las condiciones iniciales del controlador las gráficas de fase no cruzan los  $180^\circ$ , no se pueden definir los márgenes de ganancia para el sistema en los tres puntos de operación, pero por otro lado, al calcular los polos de lazo cerrado para el caso nominal estos resultan estables.

Una vez satisfecha la primera restricción de diseño, para verificar si satisface la especificación de sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$  se calculan los errores con el controlador  $Co(s)$  ec. (4.6) y se grafica la función de error Fig. 4.12. La gráfica de la cota máxima de sensibilidad  $|S_d(j\omega)|$  junto con los extremos  $|S_1^0(j\omega)|$  y  $|S_2^0(j\omega)|$  se presentan en la Fig. 4.13.

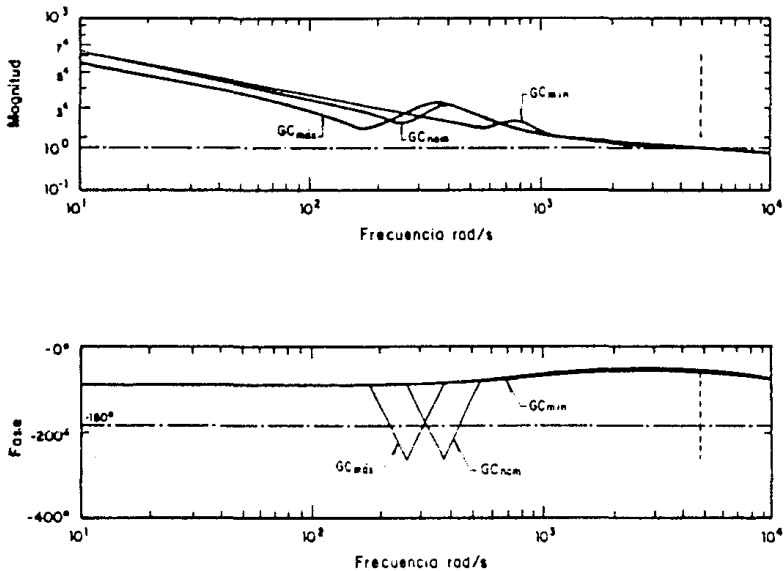


Fig. 4.11. Respuesta frecuencial de los productos  $CoGo(j\omega)$ ,  $CoG_1(j\omega)$  y  $CoG_2(j\omega)$ .

De éstas se concluye que se viola la sensibilidad deseada obteniendo un



error máximo de 2.4 en la frecuencia de 263.67 rad/s con la cota máxima de la planta.

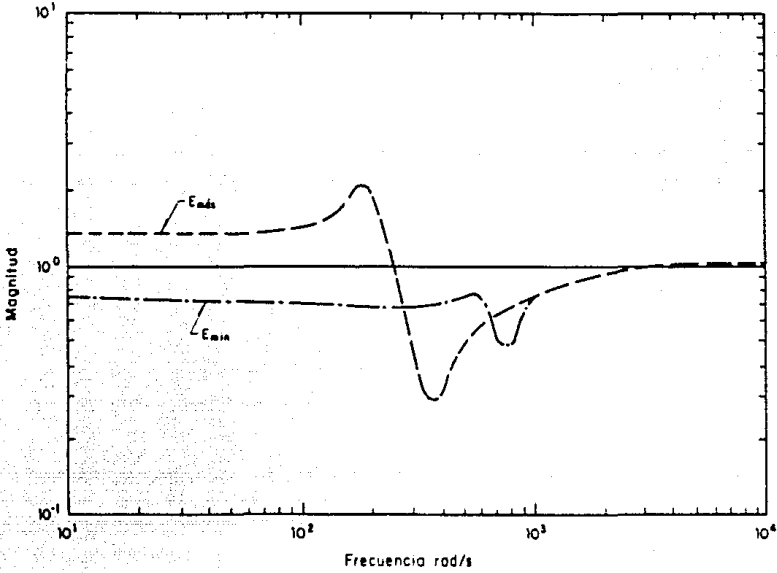


Fig. 4.12. Función error  $E_1^0(j\omega)$  con  $Co(j\omega)$ .

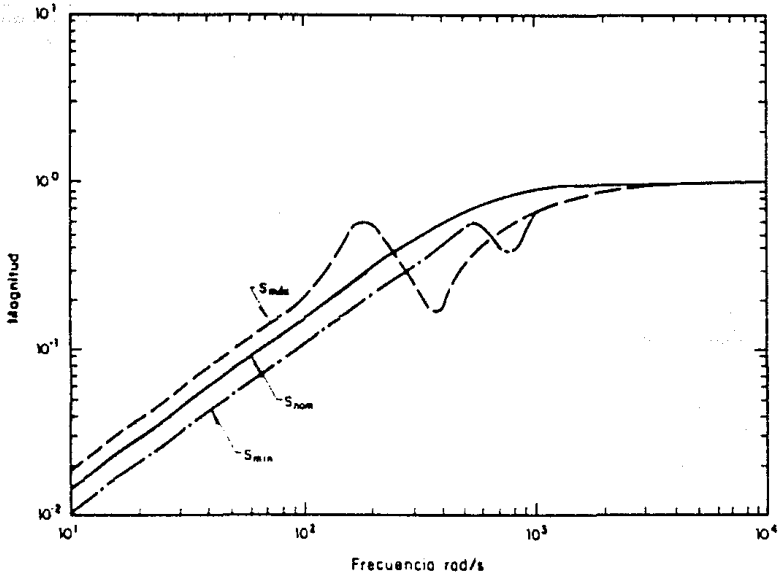


Fig. 4.13. Cota máxima de la sensibilidad y sus extremos  $|S_d(j\omega)|$ ,  $|S_1^0(j\omega)|$  y  $|S_2^0(j\omega)|$  con  $Co(j\omega)$ .

#### 4.3.3 Ajuste del controlador $C_0(j\omega)$ .

Variando los parámetros del polinomio numerador  $\Delta N_c(s)$  y los parámetros del polinomio denominador  $\Delta D_c(s)$  del controlador con dos y una iteración respectivamente, se logra cumplir con los objetivos de diseño. La función de transferencia del controlador resultante es:

$$C^3(s) = \frac{4.181s^2 + 3.987 \times 10^5 s + 2.336 \times 10^9}{2s^2 + 7.467 \times 10^4 s + 2.429 \times 10^8} \quad (4.7)$$

La Fig. 4.14 muestra las gráficas de Bode de los productos  $C^3G_0(j\omega)$ ,  $C^3G_1(j\omega)$  y  $C^3G_2(j\omega)$ ; se ve que el sistema es robusto ya que se logran márgenes de fase del orden de  $75.5^\circ$  para los dos puntos extremos de operación así como para el caso nominal.

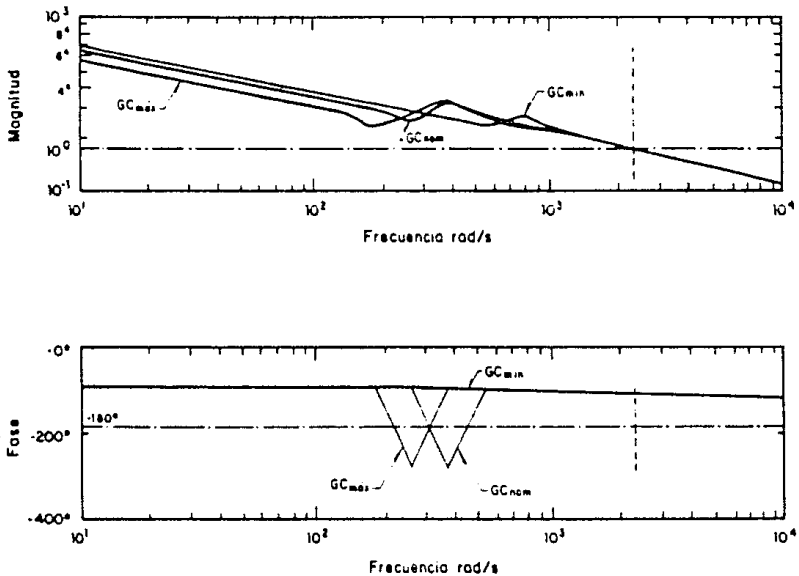


Fig. 4.14. Respuesta frecuencial de los productos  $C^3G_0(j\omega)$ ,  $C^3G_1(j\omega)$  y  $C^3G_2(j\omega)$ .

Las gráficas de la función del error  $E_1^3(j\omega)$  y las funciones de sensibilidad  $|S_1^3(j\omega)|$  y  $|S_2^3(j\omega)|$  para el sistema con las variaciones de la planta  $G_{p_{max}}(j\omega)$  y  $G_{p_{min}}(j\omega)$  con el controlador ajustado se muestran en las Figs. 4.15 y 4.16, respectivamente. Se comete un error máximo de

1.074 en la frecuencia 4832.9 rad/s, y las sensibilidades están abajo de la cota superior  $\mathcal{L}$ .

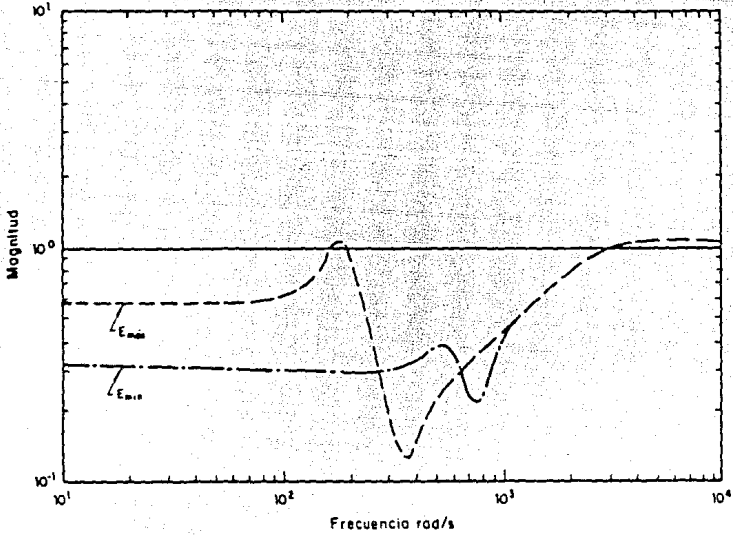


Fig. 4.15. Función error  $E_1^3(\omega)$  con  $C^3(j\omega)$ .

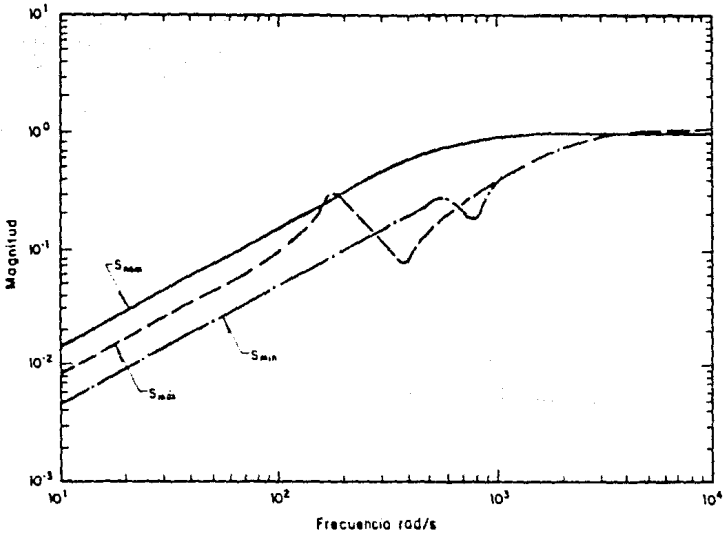


Fig. 4.16. Cota máxima de la sensibilidad y sus extremos  $|S_d(j\omega)|$ ,  $|S_1^3(j\omega)|$  y  $|S_2^3(j\omega)|$  con  $C^3(j\omega)$ .

#### 4.3.4 Análisis de resultados.

De nuevo, en éste ejemplo se verifica la efectividad del procedimiento de ajuste para el controlador inicial  $C_0(s)$ , ya que se mejoran los resultados en un número menor de iteraciones; también se comprueba que la restricción de diseño  $\mathcal{Y}$  que se seleccione se debe especificar conforme a las características de la planta a compensar. Sin embargo para índices de desempeño  $\mathcal{Y}$  más exigentes no se garantiza que con el ajuste a los parámetros del controlador ( $\Delta K$ ,  $\Delta N_c(s)$ ,  $\Delta D_c(s)$ ) se mejore dicho rendimiento, es decir, disminuir el error  $E_1^k(j\omega)$ , aún cuando se aumente el orden del controlador  $C(s)$ .

El método de parametrización de la respuesta  $C_0(j\omega)$  propuesto en el algoritmo de ajuste puede ser reemplazado por cualquier otro en donde se garantice que la especificación de diseño,  $\mathcal{Y}$ , se cumple para el modelo nominal (por ejemplo PID). Y así, lograr mejorar los resultados que se obtienen con el método aquí propuesto para satisfacer las especificaciones de diseño lo más aceptable posible.

También en el modelo del brazo manipulador  $G_p(s)$  se presenta un integrador, por lo que invocando el concepto de cero, el rechazo a la perturbación constante se garantiza independientemente de la función de transferencia del controlador  $C^k(s)$ .

Los márgenes de estabilidad de este sistema de control, contrario al primer ejemplo, disminuyen para cada ajuste de los parámetros ( $\Delta N_c(s)$  ó  $\Delta D_c(s)$ ) de  $C^k(s)$ . Se logran márgenes de fase del orden de  $130^\circ$  para el controlador nominal y del orden de  $75.5^\circ$  para el último ajuste del controlador. Entonces, la medida de robustez del sistema de control decrece con cada ajuste.

Aunque el método de ajuste sacrifica la medida de estabilidad del sistema al decrecer éste, el beneficio que se logra obtener es disminuir las sensibilidades  $|S_1^k(j\omega)|$  para  $i=1$  y  $2$ , abajo de la cota  $\mathcal{Y}$  deseada, cumpliendo con ello con ambas especificaciones de diseño.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es presentar un programa conversacional y amigable para identificar y ajustar controladores robustos en una computadora personal, de tal manera que el usuario interactúe con la máquina en forma sencilla, un programa de interacción entre una máquina PC y el usuario.

Tomando como idea básica la propuesta por Horowitz (1972), para el ajuste de controladores robustos en el dominio de la frecuencia, se aprovechan las ventajas y gran cantidad de soporte de cálculo numérico y graficación existente para las PC's en el diseño de controladores cuando las incertidumbres se caracterizan por una banda de la respuesta frecuencial de la planta nominal  $G(s, \omega)$ .

Para el sistema de control considerando un esquema con un grado de libertad, se emplea como índice de desempeño una cota superior en la función de sensibilidad  $S(s)$  del sistema retroalimentado, la cual no debe ser sobrepasada para un conjunto de plantas,  $P(s, \alpha)$  con incertidumbres grandes, caracterizadas por su respuesta frecuencial.

El conjunto de frecuencias  $\Omega$  que se debe considerar para el análisis y síntesis del sistema de control es aquel en cual se presentan las perturbaciones  $P(s)$  aditivas a la salida controlada  $Y(s)$  y las variaciones paramétricas y no paramétricas  $\mathcal{S}$  del modelo nominal de la planta a compensar.

El módulo del índice de desempeño  $|S_a(j\omega)|$  se selecciona con valores inferiores a la unidad dentro del conjunto  $\Omega$  donde se presentan las perturbaciones y variaciones del modelo nominal para atenuar fuertemente dichos disturbios, y con magnitud tendiendo a la unidad cuando la frecuencia  $\omega$  tiende a infinito (altas frecuencias).

La selección del número de puntos a considerar dentro del intervalo de frecuencias de interés  $\Omega$  depende de la respuesta frecuencial de la planta así como del criterio del usuario que maneje el programa. Se recomienda tomar entre 20 y 30 puntos para mejorar la resolución del trazo de las gráficas.

Al tomar un número suficiente de puntos en  $\Omega$  se evita que pasen inadvertidos efectos escondidos sobre la respuesta frecuencial de la planta principalmente y que los resultados que se obtienen con el ajuste del controlador sean engañosos, es decir, que se pierda información entre frecuencias dentro de las cuales puede presentarse discontinuidades, como frecuencias de corte (ejemplo del brazo manipulador).

Se hace notar que cuando la especificación en la sensibilidad requiere pendientes grandes, por ejemplo  $-60$  db/dec, es difícil mejorar el controlador nominal sin deteriorar el comportamiento en otros rangos de frecuencia. Además, el aumentar el orden del controlador tampoco garantiza superar los resultados obtenidos con uno de orden inferior.

Los únicos parámetros que se ajustan en el algoritmo son los coeficientes del numerador y denominador ( $\Delta N_c(s)$  y  $\Delta D_c(s)$ ), sin considerar la ganancia de la función de transferencia ( $\Delta K$ ).

Si se varía la ganancia,  $\Delta K$ , sólo se puede considerar un elemento del conjunto  $\Omega_v$  de frecuencias donde se viola la especificación de diseño, esto es una desventaja. Por el contrario, al modificar los polinomios  $N_c(s)$  ó  $D_c(s)$ , se pueden calcular los incrementos correspondientes en todo  $\Omega_v$  y así copar todo el error  $E_1^k(j\omega)$ .

Cuando se tengan errores  $E_1^k(j\omega)$  pequeños, el porcentaje de ajuste (inc) de los parámetros de  $C^k(j\omega)$  debe ser seleccionado con valores pequeños, puesto que el sistema es más sensible para ajustes grandes en rangos pequeños del error. Pero al ajustar con incrementos pequeños se tienen reducciones de las sensibilidades  $|S_1^k(j\omega)|$  casi inapreciables.

Puede presentarse el caso en el cual los signos de los coeficientes de  $N_c(s)$  o de  $D_c(s)$  cambien al ajustar  $C^*(s)$ , en cuyo caso el porcentaje (inc) es reducido automáticamente al cincuenta por ciento de su valor actual y se repite el ajuste, garantizando con ésto que el controlador siga siendo de fase mínima, al aplicar el criterio para polinomios Hurwitz.

En algunos casos el escalamiento en la pantalla junto con el hecho de tener únicamente el comportamiento en un rango determinado de frecuencia no permite determinar la estabilidad, ya que no se puede visualizar fácilmente si la gráfica de Nyquist encierra el número de veces adecuado el punto  $(-1,0)$ .

Por tanto se emplean las gráficas de Bode para tener una visión global de la estabilidad y márgenes en cada ajuste ya que si la fase toma valores de  $-180$  grados cuando la magnitud es menor a uno, el sistema es estable por considerar plantas y controladores estables.

Una de las principales desventajas del algoritmo de ajuste es el método empleado para la identificación del controlador. Ya que se tienen limitaciones en cuanto a la diferencia de polos y ceros y orden del controlador nominal  $C_0(s)$ . Sin embargo no es el objetivo del trabajo identificar un espectro, por lo que se decidió emplear el algoritmo que ya se tiene implementado en el paquete MAT-LAB. Posteriormente éste puede ser reemplazado fácilmente sin afectar el resto del programa.

Los alcances del paquete están restringidos por el momento a sistemas analógicos lineales, monovariantes SISO (single-input single-output). Los resultados como se ve de los ejemplos presentados son aceptables. Como trabajo futuro está la implantación para sistemas MIMO (multi-input multi-output) eliminando la restricción de sistemas de fase mínima.

**APÉNDICE A**  
**INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES.**

**A.1 Introducción.**

En este apéndice se demuestran los dos corolarios utilizados para interpolar los polinomios del controlador para cada ajuste. Dependiendo del orden del controlador, par o impar, se debe utilizar el corolario 3.2 o el corolario 3.3 respectivamente.

**A.2 Corolario 3.2.** Dada una función polinomial con coeficientes reales

$$f(x) = \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n} \quad (\text{A.1})$$

con el siguiente conjunto de puntos soportes  $(0+j\omega_1, f_1), (0+j\omega_2, f_2), \dots, (0+j\omega_n, f_n)$  con  $f_i \in \mathbb{C}$ , entonces los coeficientes de la función  $f(x)$  están dados por la solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2n-2} \\ 1 & -\omega_2^2 & \dots & \omega_2^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\omega_n^2 & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2n} \\ \alpha_{2n-2} \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{f_1\} \\ \text{Re}\{f_2\} \\ \vdots \\ \text{Re}\{f_n\} \end{bmatrix}; \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2n-2} \\ 1 & -\omega_2^2 & \dots & \omega_2^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\omega_n^2 & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2n-1} \\ \alpha_{2n-3} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Im}\{f_1\}/\omega_1 \\ \text{Im}\{f_2\}/\omega_2 \\ \vdots \\ \text{Im}\{f_n\}/\omega_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

**Demostración.** Al evaluar la función  $f(x)$  en cada punto soporte y agrupando la parte real y la parte imaginaria por separado se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1 = f(j\omega_1) &= \text{Re}\{f_1\} + j\text{Im}\{f_1\} = \alpha_1 (j\omega_1)^{2n-1} + \alpha_2 (j\omega_1)^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n} = \\ &= -j\alpha_1 (\omega_1)^{2n-1} + \alpha_2 (\omega_1)^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f_1\} &= \alpha_{2n} - \alpha_{2n-2} \omega_1^2 + \dots + \alpha_2 (\omega_1)^{2n-2} \\ \operatorname{Im}\{f_1\} &= \alpha_{2n-1} \omega_1 - \alpha_{2n-3} \omega_1^3 + \dots + \alpha_1 (\omega_1)^{2n-1} \\ \operatorname{Im}\{f_1\}/\omega_1 &= \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n-3} \omega_1^2 + \dots + \alpha_1 (\omega_1)^{2n-2} \\ f_2 = f(j\omega_2) &= \operatorname{Re}\{f_2\} + j\operatorname{Im}\{f_2\} = \alpha_1 (j\omega_2)^{2n-1} + \alpha_2 (j\omega_2)^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n} \\ &= -j\alpha_1 (\omega_2)^{2n-1} + \alpha_2 (\omega_2)^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n} \\ \operatorname{Re}\{f_2\} &= \alpha_{2n} - \alpha_{2n-2} \omega_2^2 + \dots + \alpha_2 (\omega_2)^{2n-2} \\ \operatorname{Im}\{f_2\} &= \alpha_{2n-1} \omega_2 - \alpha_{2n-3} \omega_2^3 + \dots + \alpha_1 (\omega_2)^{2n-1} \\ \operatorname{Im}\{f_2\}/\omega_2 &= \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n-3} \omega_2^2 + \dots + \alpha_1 (\omega_2)^{2n-2} \\ &\vdots \\ f_n = f(j\omega_n) &= \operatorname{Re}\{f_n\} + j\operatorname{Im}\{f_n\} = \alpha_1 (j\omega_n)^{2n-1} + \alpha_2 (j\omega_n)^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n} \\ &= -j\alpha_1 (\omega_n)^{2n-1} + \alpha_2 (\omega_n)^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n} \\ \operatorname{Re}\{f_n\} &= \alpha_{2n} - \alpha_{2n-2} \omega_n^2 + \dots + \alpha_2 (\omega_n)^{2n-2} \\ \operatorname{Im}\{f_n\} &= \alpha_{2n-1} \omega_n - \alpha_{2n-3} \omega_n^3 + \dots + \alpha_1 (\omega_n)^{2n-1} \\ \operatorname{Im}\{f_n\}/\omega_n &= \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n-3} \omega_n^2 + \dots + \alpha_1 (\omega_n)^{2n-2} \end{aligned}$$

Al definir el vector de coeficientes de la función  $f(x)$  como los vectores de incógnitas  $a_1$  para la parte real y  $a_2$  para la parte imaginaria se tiene:

$$a_1 = [\alpha_{2n} \quad \alpha_{2n-2} \quad \dots \quad \alpha_2], \quad a_2 = [\alpha_{2n-1} \quad \alpha_{2n-3} \quad \dots \quad \alpha_1],$$

con el vector de datos como  $f_1$  y  $f_2$  para la parte real e imaginaria respectivamente:

$$f_1 = \operatorname{Re}\{ [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n] \}, \quad f_2 = \operatorname{Im}\{ [f_1/\omega_1 \quad f_2/\omega_2 \quad \dots \quad f_n/\omega_n] \}$$

y acomodando el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial definiendo la matriz  $\hat{V}_n$  como:

$$\hat{V}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 & \dots & -\omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{2n-2} & \omega_2^{2n-2} & \omega_3^{2n-2} & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

se puede obtener la siguiente ecuación matricial de la forma  $A\bar{x}=\bar{b}$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_n & 0 \\ 0 & \hat{V}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.5})$$

lo que demuestra el corolario 3.2.

A.3 Corolario 3.3. Dada una función polinomial con coeficientes reales

$$f(x) = \alpha_1 x^{2n} + \alpha_2 x^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n+1} \quad (\text{A.6})$$

con el siguiente conjunto de puntos soportes  $(0+j\omega_1, f_1)$ ,  $(0+j\omega_2, f_2)$ , ...,  $(0+j\omega_n, f_n)$  con  $f_i \in \mathbb{C}$ , entonces los coeficientes de la función  $f(x)$  están dados por la solución del sistema de dimensión  $n+1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2n} \\ 1 & -\omega_2^2 & \dots & \omega_2^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\omega_n^2 & \dots & \omega_n^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2n+1} \\ \alpha_{2n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{f_1\} \\ \text{Re}\{f_2\} \\ \vdots \\ \text{Re}\{f_n\} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2n-2} \\ 1 & -\omega_2^2 & \dots & \omega_2^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\omega_n^2 & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2n} \\ \alpha_{2n-2} \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Im}\{f_1\}/\omega_1 \\ \text{Im}\{f_2\}/\omega_2 \\ \vdots \\ \text{Im}\{f_n\}/\omega_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

**Demostración.** Nuevamente al evaluar la función  $f(x)$  para todos los puntos soporte con parte real cero se obtienen el siguiente sistema de ecuaciones al agrupar la parte real por un lado y la parte imaginaria por otro:

$$f_1 = f(j\omega_1) = \text{Re}\{f_1\} + j\text{Im}\{f_1\} = \alpha_1 (j\omega_1)^{2n} + \alpha_2 (j\omega_1)^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1 (\omega_1)^{2n} + j\alpha_2 (\omega_1)^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n+1} \\
\operatorname{Re}\{f_1\} &= \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n-1} \omega_1^2 + \dots + \alpha_1 (\omega_1)^{2n} \\
\operatorname{Im}\{f_1\} &= \alpha_{2n} \omega_1 - \alpha_{2n-2} \omega_1^3 + \dots + \alpha_2 (\omega_1)^{2n-1} \\
\operatorname{Im}\{f_1\}/\omega_1 &= \alpha_{2n} - \alpha_{2n-2} \omega_1^2 + \dots + \alpha_2 (\omega_1)^{2n-2} \\
f_2 = f(j\omega_2) &= \operatorname{Re}\{f_2\} + j\operatorname{Im}\{f_2\} = \alpha_1 (j\omega_2)^{2n} + \alpha_2 (j\omega_2)^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n+1} \\
&= \alpha_1 (\omega_2)^{2n} + j\alpha_2 (\omega_2)^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n+1} \\
\operatorname{Re}\{f_2\} &= \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n-1} \omega_2^2 + \dots + \alpha_1 (\omega_2)^{2n} \\
\operatorname{Im}\{f_2\} &= \alpha_{2n} \omega_2 - \alpha_{2n-2} \omega_2^3 + \dots + \alpha_2 (\omega_2)^{2n-1} \\
\operatorname{Im}\{f_2\}/\omega_2 &= \alpha_{2n} - \alpha_{2n-2} \omega_2^2 + \dots + \alpha_2 (\omega_2)^{2n-2} \\
&\vdots \\
f_n = f(j\omega_n) &= \operatorname{Re}\{f_n\} + j\operatorname{Im}\{f_n\} = \alpha_1 (j\omega_n)^{2n} + \alpha_2 (j\omega_n)^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n+1} \\
&= \alpha_1 (\omega_n)^{2n} + j\alpha_2 (\omega_n)^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n+1} \\
\operatorname{Re}\{f_n\} &= \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n-1} \omega_n^2 + \dots + \alpha_1 (\omega_n)^{2n} \\
\operatorname{Im}\{f_n\} &= \alpha_{2n} \omega_n - \alpha_{2n-2} \omega_n^3 + \dots + \alpha_2 (\omega_n)^{2n-1} \\
\operatorname{Im}\{f_n\}/\omega_n &= \alpha_{2n} - \alpha_{2n-2} \omega_n^2 + \dots + \alpha_2 (\omega_n)^{2n-2}
\end{aligned}$$

Pero sólo se tienen  $n$  ecuaciones, lo que significa que falta definir una ecuación más para tener el sistema de dimensión  $n+1$ . La última ecuación surge al considerar que el coeficiente de mayor orden varía en una unidad, es decir, se interpola un polinomio mónico.

Al definir el vector de coeficientes de la función  $f(x)$  como los vectores de incógnitas  $a_1$  para la parte real y  $a_2$  para la parte imaginaria se tiene;

$$a_1 = [\alpha_{2n+1} \ \alpha_{2n-1} \ \dots \ \alpha_1], \quad a_2 = [\alpha_{2n} \ \alpha_{2n-2} \ \dots \ \alpha_2],$$



## APÉNDICE B

### DIAGRAMAS DE FLUJO PARA LOS PROGRAMAS DEL ALGORITMO DE AJUSTE

#### B.1 Introducción.

A continuación se presentan los programas implantados para el ajuste de controladores robustos. EL primer programa que se presenta es el que contiene el esquema general del algoritmo.

Los diagramas de flujo de los tres programas principales que componen el algoritmo global de diseño tienen los siguientes nombres:

**INICIO.** Para el programa que caracteriza la planta y sus incertidumbres, así como el índice máximo de desempeño deseado.

**CONTROL.** En este programa se estima el controlador nominal con el cual se pretende satisfacer las especificaciones de diseño.

**AJUSTE.** Aquí se verifica que con el controlador nominal no se violen las restricciones especificadas, si no son satisfechas, se ajustan los parámetros del controlador nominal. Dentro de este programa se tienen tres subrutinas **PLAN**, **FUN** y **GRABO** y sus funciones son:

**PLAN.** Calcula el error máximo que se comete con el controlador.

**FUN.** Interpola el polinomio del controlador que se ajusta.

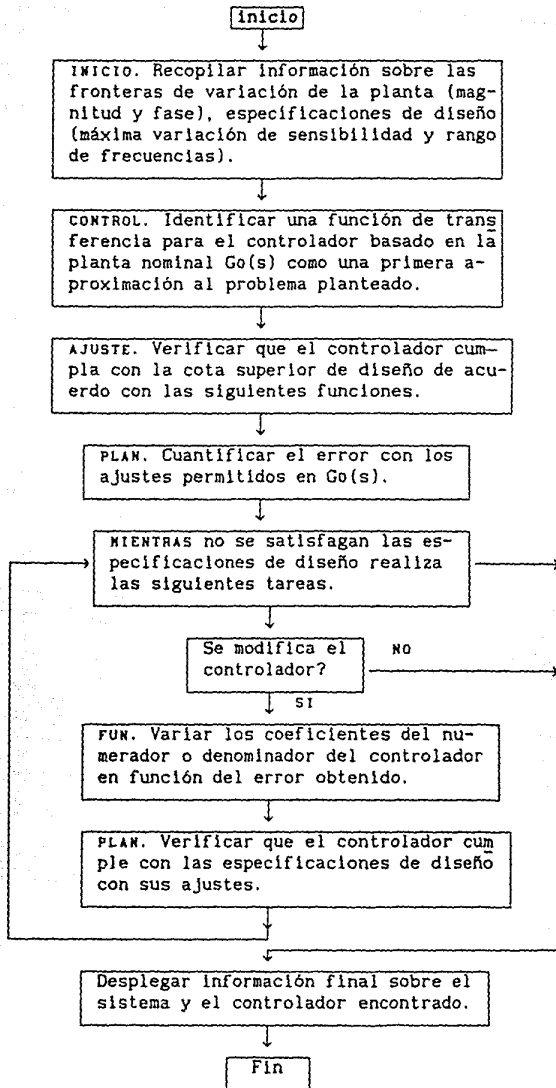
**GRABO.** Calcula los márgenes de fase y traza los diagramas de Bode.

y son presentados también en este apéndice.

#### B.2 Diagrama de flujo del programa principal CORISE.

El diagrama de flujo del programa CORISE debe su nombre a la abreviación de "Controladores con Restricciones en la Sensibilidad", y es el que a continuación se muestra:

DIAGRAMA DE FLUJO (CORISE)



### B.3 Diagrama de flujo del programa INICIO.

El programa INICIO, prepara toda la información necesaria para el diseño del controlador robusto, como son la función de transferencia de la planta nominal  $G_o(s)$ , sus variaciones extremas especificadas por puntos  $\mathcal{S}$ , la restricción de diseño deseada también definida por puntos  $\mathcal{S}$ , así como el rango de frecuencias de interés  $\Omega$  y el número de puntos a considerar.

### B.4 Diagrama de flujo del programa CONTROL.

En este programa se parametriza el controlador nominal  $C_o(s)$  a partir de su respuesta frecuencial  $C_o(j\omega)$ , calculada en función de  $G_o(j\omega)$  y  $S_d(j\omega)$ . El orden del modelo lo selecciona el usuario por teclado, y el método con el que se estima la función de transferencia  $C_o(s)$  es el de Yule-Walker.

### B.5 Diagrama de flujo para el programa AJUSTE.

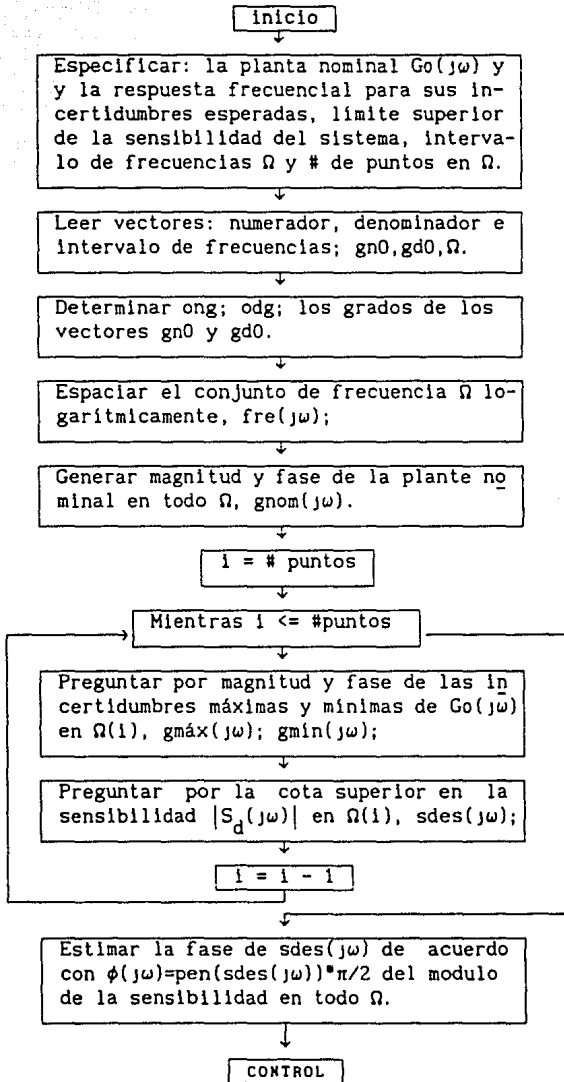
El programa AJUSTE verifica que el controlador nominal  $C_o(s)$  satisfaga las especificaciones de diseño, en caso de violarlas, se ajustan los parámetros del controlador iterativamente hasta que se logren verificar dichas especificaciones.

El subprograma PLAN calcula el erro máximo (erro) e identifica si éste se obtiene con la máxima o mínima incertidumbre de la planta.

En el subprograma FUN se determinan los incrementos necesarios para los coeficientes del polinomio a modificar, seleccionado por el usuario, de tal forma que el error disminuya. La interpolación de polinomios es la herramienta utilizada para cumplir con este objetivo. Y finalmente la función GRABO calcula los márgenes de fase y grafica los Bodes.

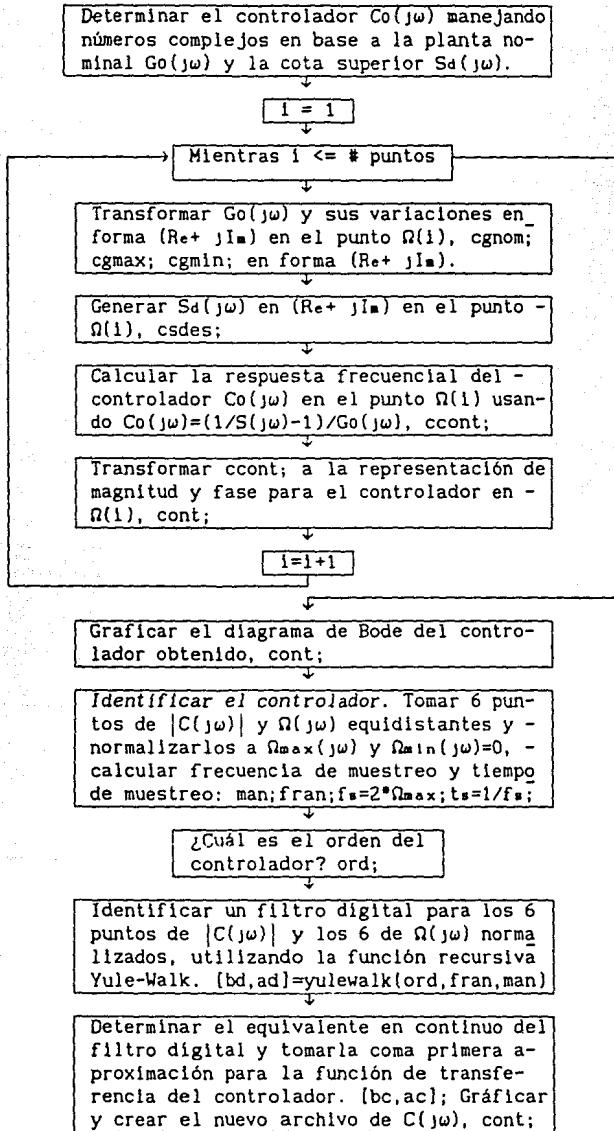
Los diagramas de flujo correspondientes para cada programa se muestran en las siguientes páginas en el orden que se mencionan.

## DIAGRAMA DE FLUJO (INICIO)

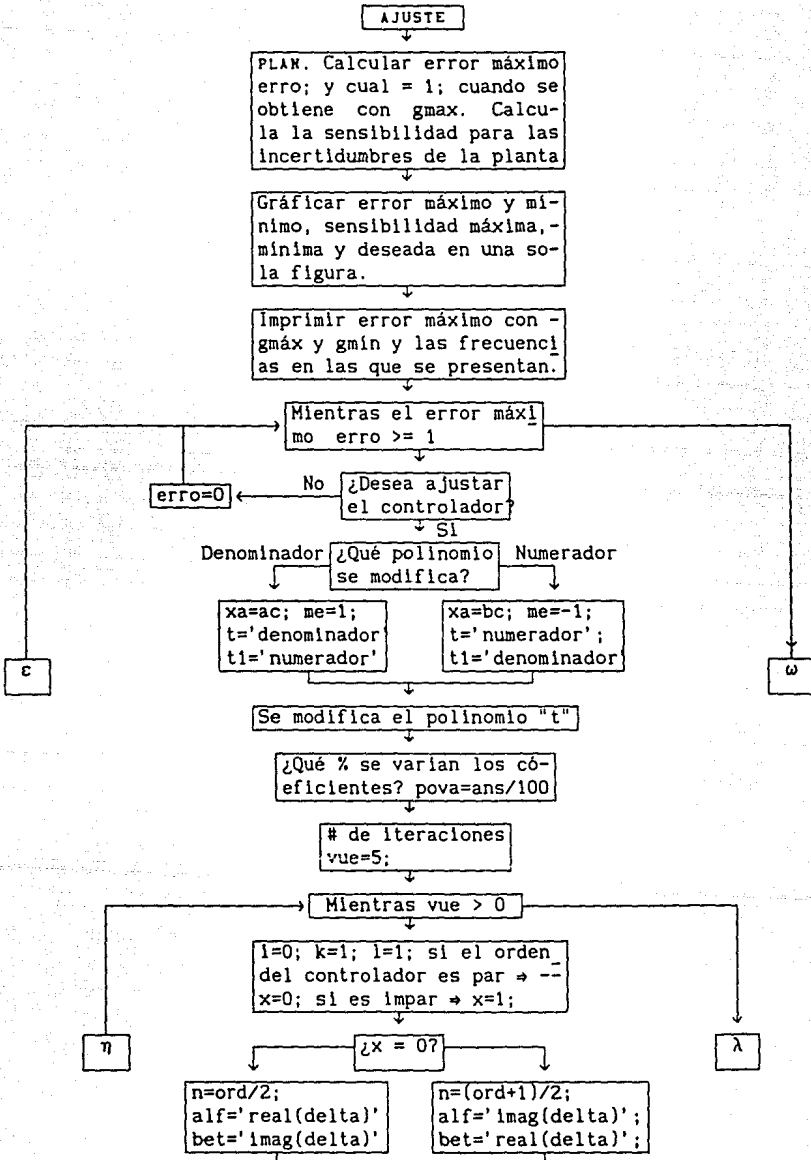


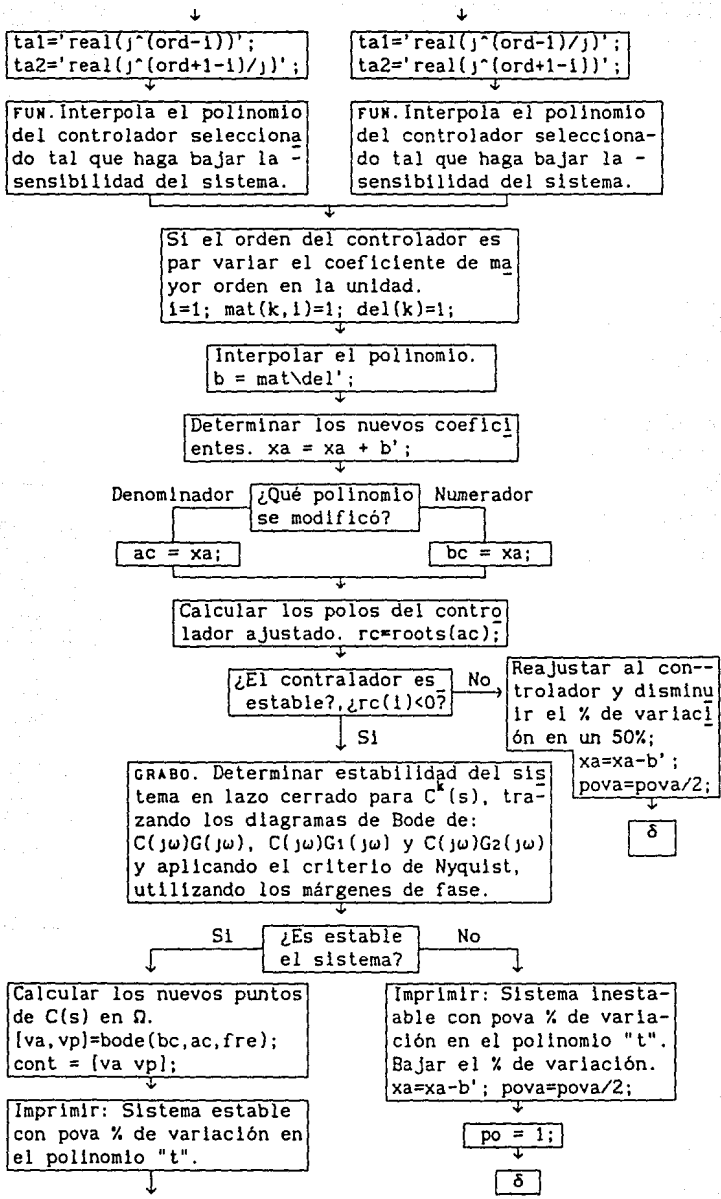


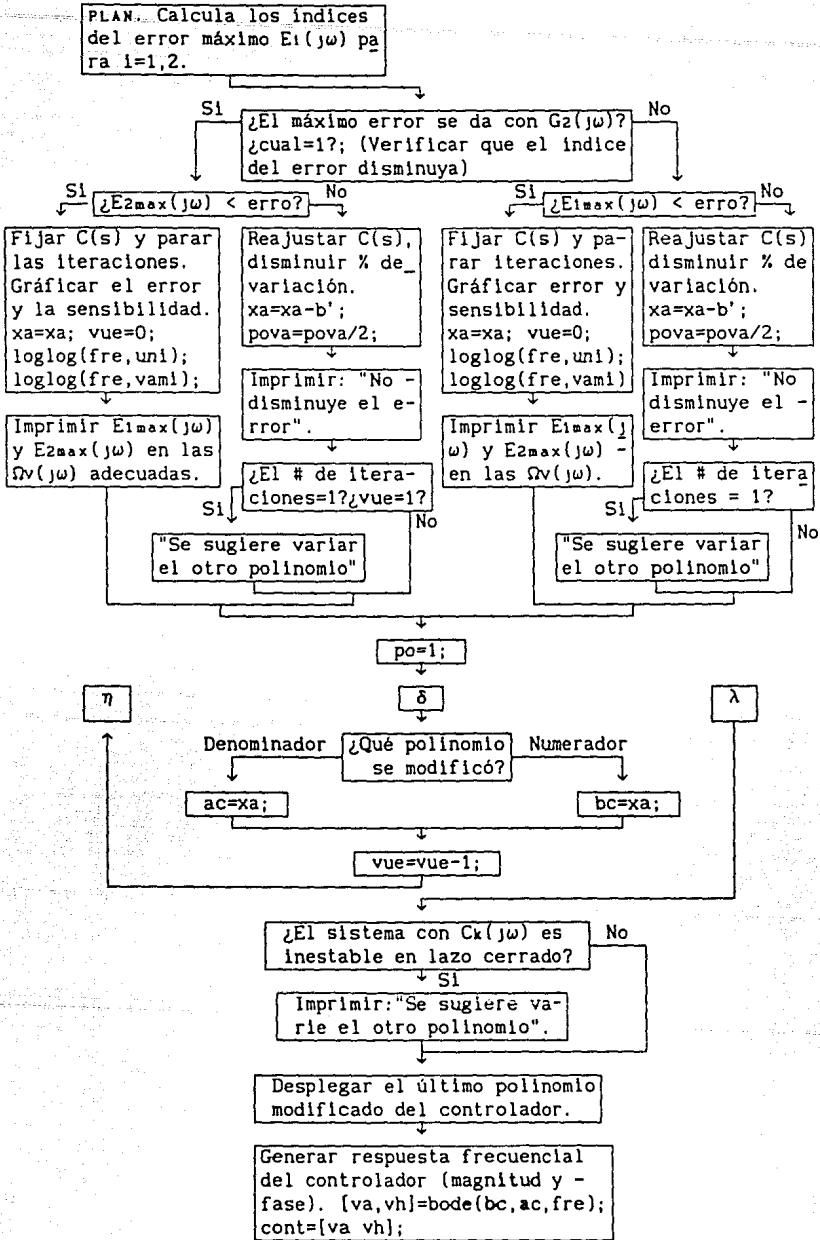
## DIAGRAMA DE FLUJO (CONTROL)



### DIAGRAMA DE FLUJO (AJUSTE)







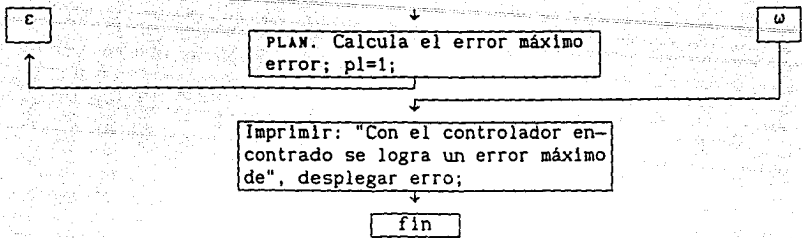


DIAGRAMA DE FLUJO DEL SUBPROGRAMA (PLAN)

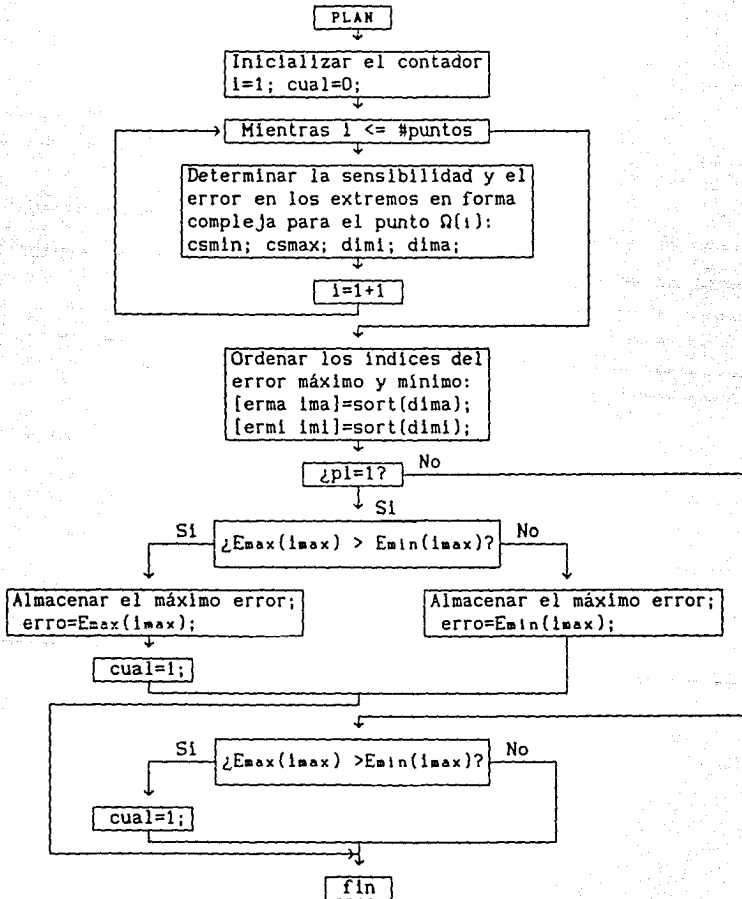


DIAGRAMA DE FLUJO DEL SUBPROGRAMA (FUN)

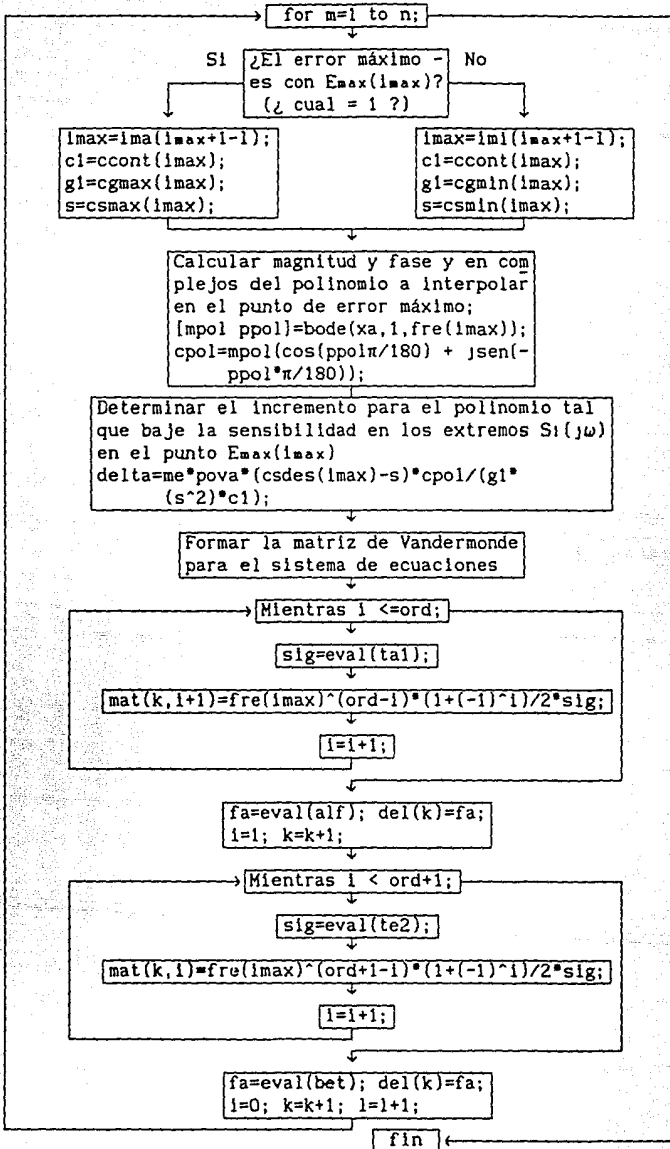
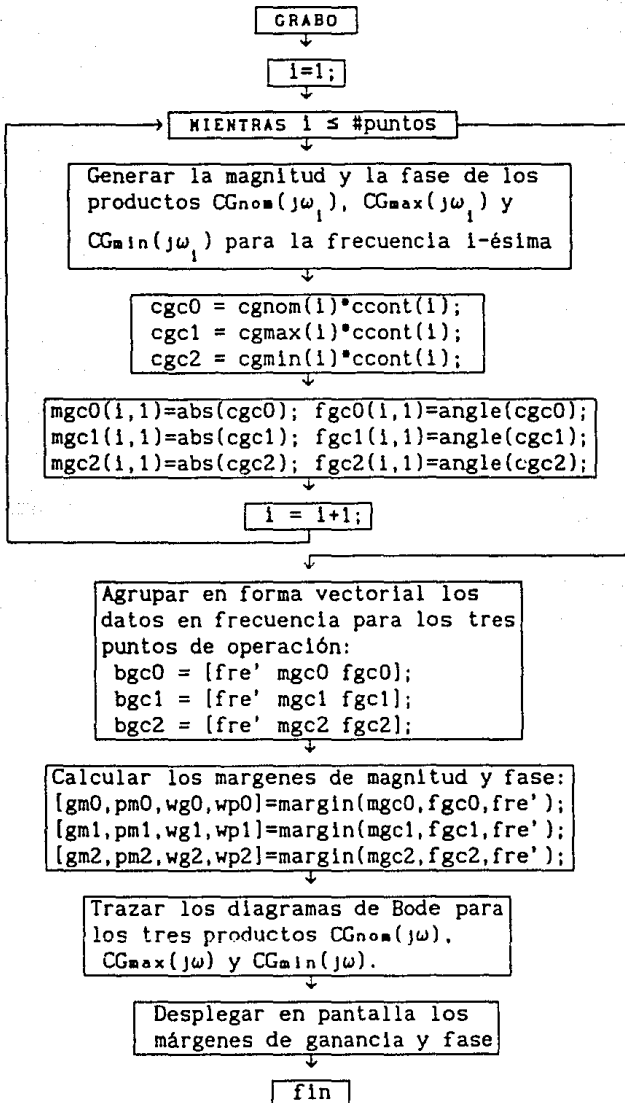


DIAGRAMA DE FLUJO DEL SUBPROGRAMA (GRABO)



```

% El programa INICIO maneja los datos necesarios para la planta nominal asi
% como para las especificaciones de diseño.
clc;
disp('ESPECIFICACIONES DE LA PLANTA NOMINAL Y SUS VARIACIONES MAX Y MIN ');
% numerador b(n)*s**n+ b(n-1)*s**(n-1)+...+b(0)
input('numerador de la planta nominal [b(n) b(n-1)...] - ');
%gn0 y gd0 son los polinomios del numerador y denominador de la planta nominal;
% ong y odg representa el orden del numerador y denominador;
gn0=ans; ong=length(gn0)-1;
input('denominador de la planta nominal [a(n) a(n-1)...] - ');
gd0=ans; odg=length(gd0)-1;
input('intervalo de frecuencia y el número de puntos [fmin,fmax,#puntos] - ');
f=ans; fre=logspace(log10(f(1)),log10(f(2)),f(3)); i=1; clc;
[va,vh]=bode(gn0,gd0,fre);
% fre contiene la frecuencia mínima, máxima y el número de puntos considerados;
while i<=f(3);
    % gnom contiene las magnitudes y fases de la planta nominal en los puntos;
    % determinados por fre;
    gnom(i,1)=va(i);gnom(i,2)=vh(i); disp('En la frecuencia'),disp(fre(i));
    input('¿Cuál es la magnitud y fase de la planta mínima? [mag,fas]');
    % gmin contiene la magnitud y fase de la planta mínima en los puntos;
    % determinados por fre;
    v1=ans;gmin(i,1)=v1(1); gmin(i,2)=v1(2);
    input('¿Cuál es la magnitud y fase de la planta máxima? [mag,fas]');
    % gmax contiene la magnitud y fase de la planta máxima en los puntos;
    % determinados por fre;
    v1=ans; gmax(i,1)=v1(1); gmax(i,2)=v1(2);
    input('¿Cuál es la magnitud del limite superior de la sensibilidad?');
    % sdes contiene la magnitud de la maxima sensibilidad tolerada;
    % en lo puntos determinados por fre;
    sdes(i,1)=ans; i=i+1;
end;
% Este bloque calcula la fase del archivo de la máxima variación permisible;
% de la sensibilidad determinando las pendientes promedio entre puntos de fre;
i=f(3);
while i>=1;
    if i==1; pen(i,1)=pen(i+1,1);
    else;
pen(i,1)=(log10(sdes(i,1))-log10(sdes(i-1,1)))/(log10(fre(i))-log10(fre(i-1)));
end; i=i-1;
end; i=f(3);
while i>=1;
    if i==1; pen(i,1)=pen(i+1,1);
    else; pen(i,1)=(pen(i,1)+pen(i-1,1))/2;
end; i=i-1;
end;
i=f(3);
while i>=1;
    if i==f(3); sdes(i,2)=pen(i,1)*90-360; else; end;
    if i==1; sdes(i,2)=sdes(i+1,2);
    else; sdes(i-1,2)=(pen(i,1)+pen(i-1,1))/2*90-360;
end; i=i-1;
end;

```



```

% La función CONTROL parametriza la respuesta frecuencial del controlador por
% medio del algoritmo de identificación recursiva de Yule-Walker.
%
clc; disp('Se parametriza la respuesta del Controlador!')
format short e;
% gmin.m contiene los puntos de la planta minima gmin={ma,ph}
% gmax.m contiene los puntos de la planta máxima gmax={ma,ph}
% sdes.m contiene los puntos de la sensibilidad deseada sdes={ma,ph}
% gnom.m contiene los puntos de la planta nominal gnom={ma,ph}
% fre.m contiene los puntos de la frecuencia
j=sqrt(-1);i=1;
while i<=f(3);
    cgmin(1)=gmin(i,1)*(cos(gmin(i,2)*pi/180)+j*sin(gmin(i,2)*pi/180));
    cgmax(1)=gmax(i,1)*(cos(gmax(i,2)*pi/180)+j*sin(gmax(i,2)*pi/180));
    csdes(1)=sdes(i,1)*cos(sdes(i,2)*pi/180)+j*sdes(i,1)*sin(sdes(i,2)*pi/180);
    cgnom(1)=gnom(i,1)*cos(gnom(i,2)*pi/180)+j*gnom(i,1)*sin(gnom(i,2)*pi/180);
    ccont(1)=(1/csdes(1) - 1)/cgnom(1);
    cont(1,1)=abs(ccont(1)); cont(1,2)=angle(ccont(1))*180/pi-360;
    bo(1,1)=fre(1); bo(1,2)=cont(1,1);bo(1,3)=cont(1,2);
    i=i+1;end;
bodeplot(bo);pause
disp('Se identifica el controlador')
inc=round(f(3)/6);i=1;jj=1;
infr(jj)=0; ma(jj)=cont(i,1); i=inc;
while jj<=5;
    jj=jj+1; ma(jj)=cont(i,1); infr(jj)=fre(1); i=i+inc;
end;
fs=2*fre(f(3)); fran=infr/infr(6); man=ma; ts=1/fs;
input('¿Orden del Controlador? - '); ord=ans; x=logspace(-2,5,f(3));
% bd numerador y ad denominador del filtro didital
%
[bd,ad]=yulewalk(ord,fran,man);
[mad,mbd,mcd,mdd]=tf2ss(bd,ad);
[mac,mbc]=d2c(mad,mbd,ts);
% bc numerador y ac denominador del controlador
%
[bc,ac]=ss2tf(mac,mbc,mcd,mdd,1)
[magc2,phasec2]=bode(bc,ac,x);
loglog(x,magc2),title('Respuesta en Magnitud'),xlabel('Frecuencia rad/s')
ylabel('Magnitud'),pause
semilogx(x,phasec2),title('Respuesta en Fase'),xlabel('Frecuencia rad/s')
ylabel('Fase'),pause
[va,vp]=bode(bc,ac,fre); cont=[va vp];
clear mad mbd mcd mdd bd ad mac mbc ts x magc2 phasec2 bo

```

```

% La función AJUSTE trata de encontrar un controlador que satisfaga las
% especificaciones de diseño en base a las variaciones máxima y mínima de la
% planta nominal y al rango máximo de variación de la sensibilidad del sistema
% en lazo cerrado;
format short e;clc;vue=5;erro=1;po=0;
disp('Algoritmo de ajuste!');disp(' ');
while erro>1.0;
    while vue>0;
        % La función GRABO calcula los márgenes de fase para los tres puntos de
        % operación de la planta;
        disp('Se calculan los tres márgenes de fase!');disp(' ');
        grabo;
        % La función PLAN calcula el error máximo (erro);
        disp(' '); disp('Se calculan los errores!');
        disp(' ');po=0;pl=1;plan;
        % En este bloque se verifica que disminuya el error cuando se obtuvo un
        % controlador que hace al sistema en lazo cerrado estable, y grafica el
        % error y la sensibilidad; no grafica si el error no disminuye;
        if cual==1;
            if erma(f(3))<=erro
                xa=xa; vu=vue; vue=0;
                loglog(fre,va,fre,vami,'o',fre,vama,'*'),title('Sensibilidad'),
                xlabel('Frec. rad/s'),ylabel('Magnitud'),pause
                loglog(fre,unl,fre,dimi,'o',fre,dima,'*'),title('Error'),
                xlabel('Frec. rad/s'),ylabel('Magnitud'),pause,clc
                fprintf('error máximo con gmin = %3.5f en la frecuencia',ermi(f(3)));
                disp(fre(1mi(f(3))));
                fprintf('error máximo con gmax = %3.5f en la frecuencia',erma(f(3)));
                disp(fre(1ma(f(3))));
            else
                xa=xa-b'; disp('No disminuye el error'); disp(' '); pova=pova/2;
                if vue==1;
                    fprintf('Inadecuado el cambio, se sugiere variar otro parámetro');
                    disp(tl); else; end; disp(' ');
            end;
        else;
            if ermi(f(3))<=erro
                xa=xa; vu=vue; vue=0;
                loglog(fre,va,fre,vami,'o',fre,vama,'*'),title('Sensibilidad'),
                xlabel('Frec. rad/s'),ylabel('Magnitud'),pause
                loglog(fre,unl,fre,dimi,'o',fre,dima,'*'),title('Error'),
                xlabel('Frec. rad/s'),ylabel('Magnitud'),pause,clc
                fprintf('error máximo con gmin = %3.5f en la frecuencia',ermi(f(3)));
                disp(fre(1mi(f(3))));
                fprintf('error máximo con gmax = %3.5f en la frecuencia',erma(f(3)));
                disp(fre(1ma(f(3))));
            else;
                xa=xa-b'; disp('No disminuye el error'); disp(' '); pova=pova/2;
                if vue==1;
                    fprintf('Inadecuado el cambio, se sugiere variar otro parámetro');
                    disp(tl); else; end; disp(' ');
            end;
        end; vue=vue-1;
    end; vue=vu;
end;
% Selección del parámetro del controlador a modificar;

```

```

for i=1:1000;
input('Desea modificar el controlador (si o no) - ','s'); sn=abs(ans);
lo=length(sn);
if lo==2; if sn(1)==115 & sn(2)==105; ite=1; break;
else; if sn(1)==110 & sn(2)==111; ite=0; break; end; end;
else; end;
end;
if ite==1;
disp('¿Qué polinomio se modifica? - ');
for i=1:1000;
input('numerador (n) o denominador (d) - ','s'); de=abs(ans);
lnd=length(de); disp(' ');
if lnd==1; if de==110; xa=bc; me=-1;
t='numerador';t1='denominador';break;
else; if de==100; xa=ac; me=1;
t='denominador';t1='numerador'; break; end; end;
else; end;
end;
for i=1:1000;
input('¿Qué % desea variarlo? - ');pova=ans/100; vue=5; disp(' ');
if pova>=.00001 & pova<=1;
fprintf('El polinomio a modificar es el '); disp(t); disp(' ');
disp(xa); break; end;
end;
else;
vue=0; cue=erro; erro=0;
end;
while vue>0;
%
% Interpolación del controlador
disp(';Se interpola el parámetro del controlador a modificar!');
disp(' '); i=0; k=1; l=1; x=rem(ord,2);
if x==0; n=ord/2; alf='real(delta)'; bet='imag(delta)';
ta1='real(j^(ord-1))'; ta2='real(j^(ord+1-1)/j)';
% La función FUN calcula la matriz de Vandermonde para los coeficientes
% de los polinomios del controlador;
fun; i=1; mat(k,i)=1; del(k)=1;
else
n=(ord+1)/2; alf='imag(delta)'; bet='real(delta)';
ta1='real(j^(ord-1)/j)'; ta2='real(j^(ord+1-1))';
% La función FUN calcula la matriz de Vandermonde para los coeficientes
% de los polinomios del controlador;
fun;
end;
b=mat\del'; xa=xa+b';
if de==110; bc=xa; else; ac=xa; end;
% Este bloque determina si el controlador encontrado es estable o no
% calculando los polos del controlador, hace ec=1 si es estable, en caso
% contrario ec=0.
rc=roots(ac);i=1;l=length(rc);
while i<=l;
if rc(i)<=0; ec=1;
else;
fprintf('Control. inestable con %3.1f por ciento de variación',pova*100);
disp(' ');disp(' '); disp(' ');ec=0;break;

```

```

end;i=i+1;
end;
% Este bloque determina si el sistema en lazo cerrado es estable o no
% con el controlador encontrado calculando los polos de lazo cerrado,
% hace co=1 si es estable, en caso contrario hace co=0;
if ec==1;
    fprintf('Control. estable con %3.1f porciento de variación ',pova*100);
    disp(' ');
    d1=conv(gd0,ac); d2=conv(gn0,bc); i=odg+ord+1; k=ong+ord+1; l=1; m=1;
    while l>0
        if i==k; s(l)=d1(l)+d2(m); l=l+1; m=m+1; k=k-1;
        else; s(l)=d1(l); l=l+1;
        end; i=i-1;
    end; ra=roots(s); i=1;
    while l<=odg+ord
        if ra(l)<=0; co=1; i=i+1;
        else; co=0; i=odg+ord+1;
        end;
    end;
    if co==1; vu=vue; vue=0;
        fprintf('Sist. estable con %3.1f porciento de var. en el',pova*100);
        disp(t);disp(' ');
        [va,vp]=bode(bc,ac,fre); cont=[va vp]; po=0;
    else;
        fprintf('Sist. inestable con %3.1f porci. de var. en el',pova*100);
        disp(t); disp(' ')
        xa=xa-b'; pova=pova/2; po=1;
        if de==110; bc=xa; else; ac=xa; end;
        if vue==1; vu=0; else; end;
    end;
    else; xa=xa-b'; pova=pova/2; po=1;
        if de==110; bc=xa; else; ac=xa; end;
        if vue==1; vu=0; else; end;
    end; vue=vue-1;
end; vue=vu;
if lte==1;
    % Si al terminar 5 iteraciones el sistema es inestable po=1 y se sugiere
    % variar el polinomio contrario que se modificó (numerador o denominador);
    if po==1;disp(' ');
        fprintf('Inadecuado el cambio, se sugiere variar los parámetros del ');
        disp(t1);disp(' ');
        fprintf('error mxlmo con gmin = %3.5f en la frecuencia',ermi(f(3)));
        disp(fre(1mi(f(3))));
        fprintf('error mxlmo con gmax = %3.5f en la frecuencia',erma(f(3)));
        disp(fre(1ma(f(3))));
    else;
        end;
    else;end;
    % Se despliega el último controlador modificado, calcular magnitud y fase;
    fprintf('El polinomio modificado del ');disp(t);disp(' '); disp(xa);
    [va,vh]=bode(bc,ac,fre); cont=[va vh];
end;
fprintf('Con el controlador ajustado se logra un error máximo de %6.3f\n',cue);
disp(' '); erro=cue; disp(bc); disp(ac);

```

```

% La funcion PLAN calcula erro = el error maximo y deja cual=1 cuando este se
% obtiene con gmax; ademas grafica la sensibilidad y el error con gmin y gmax
% si pl=1 grafica el error y la sensibilidad en la pantalla;
i=1; cual=0;
while i<=f(3);
    ccont(i)=cont(i,1)*(cos(cont(i,2)*pi/180) + j*sin(cont(i,2)*pi/180));
    csmin(i)=1/(1 + cgmin(i)*ccont(i)); csmax(i)=1/(1 + cgmax(i)*ccont(i));
    vami(i)=abs(csmin(i)); dimi(i)=vami(i)/sdes(i,1);
    vama(i)=abs(csmax(i)); dima(i)=vama(i)/sdes(i,1);
    va(i)=sdes(i,1); ; uni(i)=1;
    i=i+1;
end;
[erma,ima]=sort(dima); [ermi,imi]=sort(dim1);
if pl==1;
    if erma(f(3))> ermi(f(3));
        cual=1;
        erro=erma(f(3));
    else; erro=ermi(f(3));
    end;
else;
    if erma(f(3))> ermi(f(3));cual=1;else; end;
end;

```

```

% La funcion FUN calcula una matriz de incrementos para los coeficientes
% de los polinomios del controlador
for m=1:n;
    if cual==1; imax=ima(f(3))+1-1; c1=ccont(imax); g1=cgmax(imax);
        s=csmax(imax);
    else imax=imi(f(3))+1-1; c1=ccont(imax); g1=cgmin(imax); s=csmin(imax);
    end;
    [mpol,ppol]=bode(xa,1,fre(imax));
    cpol=mpol*(cos(ppol*pi/180)+j*sin(ppol*pi/180));
    delta=me*pova*(csdes(imax)-s)*cpol/(g1*(s^2)*c1);
    while i<=ord;
        sig=eval(ta1);
        mat(k,i+1)=fre(imax)^(ord-i)*(1+(-1)^i)/2*sig;
        i=i+1;
    end; fa=eval(alf); del(k)=fa;
    i=1; k=k+1;
    while i<=ord+1;
        sig=eval(ta2);
        mat(k,i)=fre(imax)^(ord+1-i)*(1+(-1)^i)/2*sig;
        i=i+1;
    end; fa=eval(bet); del(k)=fa;
    i=0; k=k+1; l=l+1;
end;

```

```

% La función GRABO calcula los márgenes de fase y grafica los diagramas de
% Bode para los tres casos tratados de la planta (nominal, máxima y
% mínima)
cgnom=freqs(gn0,gd0,fr);ccont=freqs(bc,ac,fr);
i=1;
while i<=f(3)
    cgc0=cgnom(i)*ccont(i);cgc1=cgmax(i)*ccont(i);cgc2=cgmin(i)*ccont(i);
    mgc0(i,1)=abs(cgc0);fgc0(i,1)=angle(cgc0)*180/pi;
    mgc1(i,1)=abs(cgc1);fgc1(i,1)=angle(cgc1)*180/pi;
    mgc2(i,1)=abs(cgc2);fgc2(i,1)=angle(cgc2)*180/pi;
    muni(i,1)=1;foch(i,1)=-180;
    i=i+1;
end;
i=1;
while i<=f(3)
    e(i,1)=abs(mgc0(i,1)-1);
    i=i+1;
end;
[ema,ime]=sort(e);
i=1;
while i<=f(3)
    fma(i,1)=fre(ime(i));
    i=i+1;
end;
buni = [fre' muni foch]; bgc0 = [fre' mgc0 fgc0];
bgc1 = [fre' mgc1 fgc1]; bgc2 = [fre' mgc2 fgc2];
bmar=[fma mgc0 fgc0];
[gm0,pm0,wg0,wp0] = margin(mgc0,fgc0,fr);
[gm1,pm1,wg1,wp1] = margin(mgc1,fgc1,fr);
[gm2,pm2,wg2,wp2] = margin(mgc2,fgc2,fr);
bodeplot([bgc0 bgc1 bmar buni bgc2]),pause
mf0=180+fgc0(ime(1));mf1=180+fgc1(ime(1));mf2=180+fgc2(ime(1));
fprintf('Márgen de fase de la planta nominal = %3.4f grados',pm0);disp(' ')
fprintf('Márgen de fase de la planta máxima = %3.4f grados',pm1);disp(' ')
fprintf('Márgen de fase de la planta mínima = %3.4f grados',pm2);disp(' ')

```

## APÉNDICE C

### MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE YULE-WALKER.

#### C.1 Las Ecuaciones de Yule-Walker Modificadas.

Considere el problema de estimación de los parámetros AR (Auto Regresivo) de un proceso ARMA (Auto Regresivo de Promedio Móvil) a partir de su secuencia de covariancia. Sea  $\{y_t\}$  un proceso escalar ARMA de orden  $(p, q)$ , con  $p \geq q$ , definido por la ecuación de diferencias

$$y_t = - \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i w_{t-i} \quad (C.1)$$

donde  $w$  es un ruido blanco de media cero y variancia unitaria. Multiplicando ambos lados de (C.1) por  $y_{t-q-1}$  y tomando valores esperados, obtenemos

$$\rho_{q+1} + a_1 \rho_{q+1-1} + \dots + a_p \rho_{q+1-p} = 0, \quad i \geq 1 \quad (C.2)$$

donde  $\rho_i$  son los coeficientes de correlación del proceso  $y_t$

$$\rho_i = E\{y_t y_{t-i}\}, \quad \rho_{-i} = \rho_i. \quad (C.3)$$

El conjunto de ecuaciones lineales (C.2) con  $1 \leq i \leq p$  puede resolverse para obtener los coeficientes AR  $\{a_1 \dots a_p\}$ . Estas ecuaciones son frecuentemente llamadas las ecuaciones de Yule-Walker modificadas (MYW). El nombre es motivado, presumiblemente, por la similitud de éstas con las ecuaciones de Yule-Walker [10, 11], surgidas en el problema del modelado autorregresivo. Las ecuaciones de Yule-Walker tienen la forma de (C.2) con  $q = 0$ .

En el problema de estimación espectral, los valores de la función de correlación reales  $\rho_i$  son desconocidos, así como también los órdenes  $(p, q)$  del proceso ARMA. La información disponible es un conjunto finito de puntos de datos  $\{0 \leq y_t \leq T\}$ . Un método para estimar los coeficientes AR es usar las ecuaciones de MYW, con los valores de la función de

correlación reales  $\rho_1$  remplazados por el patrón de valores de la función de correlación sesgados  $r_1$ ,

$$r_1 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1+1}^T y_t y_{t-1} \quad (C.4)$$

donde  $T$  es el número de puntos de datos grabados.

En este caso (C.2) se convierte en

$$r_{\hat{q}+1} + \hat{a}_1 r_{\hat{q}+1-1} + \dots + \hat{a}_{\hat{p}} r_{\hat{q}+1-\hat{p}} = 0, \quad 1 \leq i \leq \hat{p} \quad (C.5)$$

donde  $\hat{a}_1$  denota una estimación de  $a_1$  y  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$  son los órdenes estimados (o asumidos) del modelo ARMA.

Un algoritmo para generar una secuencia o patrón de covariancia se presenta a continuación. Sea  $H(z)$  un filtro digital estable ARMA de la forma

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^q b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^p a_n z^{-n}}; \quad a_0 = 1 \quad a_n, b_n \text{ números reales}$$

$$\sum_{n=0}^p a_n z^{-n} = 0 \rightarrow |z| < 1. \quad (C.6)$$

La secuencia de covariancia asociada con  $H(z)$  es  $\{r_1\}_{-\infty}^{\infty}$ , con  $r_1 = r_{-1}$  dado por

$$r_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint S(z) z^k \frac{dz}{z}, \quad \forall 1$$

$$S(z) = H(z)H(z^{-1}). \quad (C.7)$$

Aquí el contorno  $C$  cae dentro de la región de convergencia absoluta de  $H(z)$ . El contorno puede ser seleccionado para ser el círculo unitario, en cuyo caso  $S(z = \exp(j2\pi f))$  es el espectro (o respuesta en frecuencia de la magnitud al cuadrado) correspondiente a  $H(z)$ .

La secuencia de la respuesta al pulso unitario correspondiente a  $H(z)$  es  $\{h_1\}_{-\infty}^{\infty}$  con



$$h_i = \begin{cases} 0, & i < 0 \\ b_i - \sum_{n=1}^p a_n h_{i-n}, & i \geq 0. \end{cases} \quad (C.8)$$

Aquí  $b_i$  es asumido cero para  $i \geq q+1$ . La secuencia de covariancia está relacionada con la secuencia respuesta al pulso unitario como sigue:

$$r_i = \sum_{n=0}^{\infty} h_n h_{n+1}, \quad i \geq 0, \quad r_i = r_{-i}. \quad (C.9)$$

Sustituyendo (C.8) en (C.9) para obtener

$$\sum_{n=0}^p a_n r_{i-n} = d_i, \quad i \geq 0 \quad d_i = \sum_{n=0}^{q-k} h_n h_{n+1}. \quad (C.10)$$

Note que  $d_i = 0$  para  $i \geq q+1$ , en cuyo caso la secuencia  $\{r_i\}$  se comporta justo como uno puramente Auto-Regresivo. Esto es, la secuencia  $\{r_i\}$  satisface una ecuación de diferencias homogénea lineal para  $i \geq q+1$ .

De (C.8) es claro que la secuencia de covariancia puede ser generada recursivamente. La idea es inicializar la recursión encontrando  $r_i$  para  $0 \leq i \leq p$ . Escribiendo (C.10) en forma desglosada para  $i = 0, 1, \dots, p$ :

$$A\bar{r} = \bar{d}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & & & & a_p \\ a_1 & a_2+a_0 & a_3 & a_4 & & & & & a_p & 0 \\ a_2 & a_3+a_1 & a_4+a_0 & a_5 & & & & & a_p & 0 & 0 \\ a_3 & a_4+a_2 & a_5+a_1 & a_6+a_0 & \dots & a_p & & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_p & a_{p-1} & & & & & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1 \quad (C.11)$$

$$\bar{r}^T = (r_0, r_1, \dots, r_p) \quad \bar{d}^T = (d_0, d_1, \dots, d_p).$$

La matriz A se genera como sigue: empezar con el primer renglón  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$ ; desplazando este renglón  $(n-1)$  veces y sumar el  $m$ -ésimo sobreflujo al término  $(n, m+1)$  para obtener el  $n$ -ésimo renglón.

Así el elemento  $(i, j)$ -ésimo de la matriz  $A$  es

$$\{A\}_{i,j} = \begin{cases} a_{i-1} & \text{para } j = 1 \\ a_{i+j-2} + a_{i-j} & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad (C.12)$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_p$  están definidas en (C.6) y  $a_i = 0$  para  $i < 0$  e  $i > q$ . Por ejemplo, el cuarto renglón es  $(a_3, a_4 + a_2, a_5 + a_1, a_6 + a_0, \dots, a_q, 0, \dots, 0)$ . La región triangular inferior derecha de la matriz consiste de ceros, excepto el último renglón.

El método de solución es generar  $\{h_i\}_0^q$  de (C.8), resolver (C.11) para  $\bar{r}$ , y entonces usar  $\{h_i\}$ ,  $\{a_n\}_0^p$  y  $\{b_m\}_0^q$  para generar una versión arbitrariamente larga de longitud finita de  $\{r_i\}_{-\infty}^{\infty}$  de (C.10). Si únicamente se requiere  $\{r_i\}_0^N$ , entonces únicamente se debe resolver (C.11) usando técnicas actuales para resolver ecuaciones lineales. Para filtros Auto-Regresivos,  $d_0 = b_0^2$  y  $d_k = 0, k > 0$ .

## C.2 Ecuaciones Sobredeterminadas.

El método de MYW descrito arriba involucra la solución de un conjunto de ecuaciones bien condicionado en el cual únicamente  $2\hat{p}$  valores de la función de correlación son usados. Varios investigadores notaron que, estimaciones mejoradas se pueden obtener al usar un número mayor de ecuaciones con más coeficientes de correlación. En este caso, (C.5) será remplazada por

$$r_{\hat{q}+1} + \hat{a}_1 r_{\hat{q}+1-1} + \dots + \hat{a}_p r_{\hat{q}+1-p} = e_{\hat{q}+1}, \quad 1 \leq i \leq N - \hat{q}. \quad (C.13)$$

Note que el lado derecho de (C.13) no es exactamente cero, sino algún término de error que denotamos como  $e_1$ . Este conjunto de ecuaciones sobredeterminadas será resuelto por un procedimiento de mínimos cuadrados, tal que  $\sum e_1^2$  es minimizado. Estas ecuaciones sobredeterminadas requieren  $N$  coeficientes de correlación  $\{r_1 \dots r_N\}$ , donde  $N \leq T$ .

El mejoramiento en la exactitud de la estimación resulta del hecho de que

hay información relevante en los coeficientes de mayor corrimiento, que no aparecen en (C.5).

Para formar las ecuaciones MYW sobredeterminadas es necesario seleccionar el número N del patrón de coeficientes de correlación. Denotemos por  $\tau_0$  a la extensión de la correlación del proceso  $y_t$ . Si  $\tau_0 \geq T$ , tiene sentido usar tantos coeficientes de correlación como podamos calcular del dato dado (es decir  $N=T$ ). Sin embargo, si  $\tau_0 \ll T$ , los coeficientes de mayor corrimiento tendrán magnitudes inferiores y serán de valor pequeño en el proceso de estimación.

La selección de N también puede ser interpretada desde un punto de vista diferente. La reducción de T puntos de datos en N coeficientes de correlación realiza una operación de suavizamiento en el dato, antes del suavizamiento provocado por el modelado ARMA. El excesivo suavizamiento, es decir, seleccionar N muy pequeño, provocará pérdida de resolución en el espectro estimado resultante. La selección de N, por lo tanto, debe reflejar información a priori sobre las características espectrales.

El método de MYW sobredeterminado que se presenta aquí es sólo una de tantas formas que aparecen en la literatura. Las variaciones principales en el método básico incluyen lo siguiente:

(1) Estructura de la Matriz del Patrón de Covariancias:

Considere una forma general de la ecuaciones de MYW sobredeterminadas:

$$r_{0,j} + \hat{a}_1 r_{1,j} + \dots + \hat{a}_p r_{p,j} = e_j, \quad \hat{q}+1 \leq j \leq N \quad (C.14)$$

donde  $r_{1,j}$  es un estimado del coeficiente de correlación  $\rho_{|1-j|}$ . Tal vez la selección más común para el estimado  $r_{1,j}$  es una en la cual la matriz de covariancias se supone con estructura Toeplitz, esto es,  $r_{1,1} = r_{|1-j|}$ . Esta es llamada algunas veces "la forma de autocorrelación" de la matriz de covariancias.

(2) Mínimos Cuadrados Ponderados: Las ecuaciones MYW

sobredeterminadas no tienen una solución exacta, esto es, una que haga al lado derecho de (C.14) igual a cero. Los parámetros AR  $\{\hat{a}_1\}$  desconocidos son usualmente escogidos para minimizar la suma de los errores al cuadrado  $\sum e_1^2$ . Sin embargo, por otro lado es posible minimizar una suma ponderada de cuadrados  $\sum w_1 e_1^2$ .

La secuencia de ponderación es seleccionada para ser una secuencia no incremental. La motivación de esto es que usualmente los corrimientos mayores contienen menos información que los corrimientos menores y correspondientemente se le deben de dar menores pesos. Más generalmente, la matriz de ponderación positiva definida  $W$  puede ser usada. Para ver esto más claramente, rescribimos (C.14) en forma matricial

$$\begin{matrix}
 \begin{bmatrix}
 \Gamma & \Gamma & \dots & \Gamma \\
 1, \hat{q}+1 & 2, \hat{q}+1 & & \hat{p}, \hat{q}+1 \\
 \Gamma & \Gamma & \dots & \Gamma \\
 1, \hat{q}+2 & 2, \hat{q}+2 & & \hat{p}, \hat{q}+2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \Gamma & \Gamma & \dots & \Gamma \\
 1, N & 2, N & & \hat{p}, N
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \hat{a}_1 \\
 \vdots \\
 \hat{a}_{\hat{p}}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \Gamma \\
 0, \hat{q}+1 \\
 \Gamma \\
 0, \hat{q}+2 \\
 \vdots \\
 \Gamma \\
 0, N
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}
 \tag{C.15}$$

$R \qquad \qquad a \qquad = \qquad r$

La solución en mínimos cuadrados ponderados de (C.15) está dada por

$$a = - [R^T W R]^{-1} R^T W r$$

donde el signo  $T$  denota la transpuesta. La selección  $W = I$  da el caso no ponderado, y  $W = \text{diag}\{w_1\}$  da la ponderación escalar descrita arriba.

(3) Métodos Computacionales: Varias técnicas computacionales están disponibles para resolver las ecuaciones MYW sobredeterminadas. Estas incluyen el cálculo directo de la pseudo inversa de la matriz asociada con las ecuaciones (C.15). La factorización de Cholesky, la descomposición en valor singular, y una variedad de algoritmos computacionales eficientes para un conjunto de ecuaciones Toeplitz y cercanas a Toeplitz.

### C.3 Orden de las Ecuaciones MYW.

La calidad de la estimación espectral no depende únicamente en el número de ecuaciones MYW, sino también en su orden, esto es, el número  $\hat{p}$  de parámetros estimados. Varios investigadores observaron que, usando un orden  $\hat{p}$  mucho mayor que el orden  $p$ , AR real mejora considerablemente el desempeño del algoritmo [12, 13]. Lo que se verifica también por simulaciones de algunos procesos AR (autoregresivos o todo polo).

Las ecuaciones de MYW pueden ser interpretadas como un problema de predicción en mínimos cuadrados para la "serie de tiempo"  $r_1$ . Para lograr un buen ajuste para el dato, el orden  $\hat{p}$  del predictor tiene que igualar al orden efectivo "del proceso AR"  $r_1$ .

### C.4 Estimación de los Parámetros Espectrales MA.

El método de estimación MYW es únicamente el primer paso en la estimación espectral ARMA. Continúa con la estimación de la parte MA del espectro (parámetros de promedio móvil). Los parámetros espectrales MA se calculan a partir del patrón estimado de la secuencia de correlación  $r_1$  y los parámetros AR  $\{\hat{a}_1\}$  estimados.

Finalmente, el espectro estimado está dado por

$$\hat{S}(\omega) = \frac{\hat{b}(z)\hat{b}(z^{-1})}{\hat{a}(z)\hat{a}(z^{-1})} \Bigg|_{z=\exp(j\omega)} \quad (C.16a)$$

donde

$$\hat{b}(z) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \dots + \hat{b}_q z^{-q} \quad (C.16b)$$

$$\hat{a}(z) = 1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \dots + \hat{a}_p z^{-p} \quad (C.16c)$$

Es posible estimar los coeficientes de  $b(z)b(z^{-1})$  definiendo los parámetros espectrales MA  $\{B_1\}$  por

$$B_{-q} z^q + \dots + B_0 + \dots + B_q z^{-q} = b(z)b(z^{-1}) \quad (C.17)$$

donde  $B_{-1} = B_1$ . Definiendo los parámetros espectrales AR  $\{H_i\}$  por

$$\frac{1}{a(z)a(z^{-1})} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_i z^{-i}, \quad H_i = H_{-i}. \quad (C.18)$$

Por medio del método para calcular los parámetros AR descrito arriba, se puede calcular  $H_i$  conociendo  $a(z)$ . En seguida se puede notar que

$$S(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_i z^{-i} \quad (C.19)$$

$$= (B_{-q} z^q + \dots + B_0 + \dots + B_q z^{-q}) \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_i z^{-i} \right)$$

Comparando las potencias de  $z$  en ambos lados de esta ecuación obtenemos la siguiente ecuación para los parámetros MA:

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \dots & H_q \\ H_1 & H_0 & \dots & H_{q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N & H_{N-1} & \dots & H_{N-q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \dots & H_q \\ H_1 & H_2 & \dots & H_{q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N & H_{N+1} & \dots & H_{N+q} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} B_0/2 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_q \end{bmatrix}. \quad (C.20)$$

Note que la matriz de coeficientes es la suma de una matriz Toeplitz y una matriz Hankel. Existen algoritmos eficientes para resolver tales ecuaciones utilizando algoritmos rápidos como el de recurrencias de Levinson en forma de bloque [14]. Este método de calcular  $B_i$  puede interpretarse como encontrar los estimados suavizados  $r_i$  del "proceso" de mediciones del "proceso"  $H_i$  relacionado.

### C.5 Estimación de un filtro digital.

Finalmente se obtiene la función de transferencia para un filtro digital de un proceso ARMA. Los coeficientes del denominador  $\{a_1 \dots a_p\}$  son calculados utilizando las ecuaciones de Yule-Walker modificadas usando los coeficientes de correlación AR, y los coeficientes del numerador  $\{b_0 \dots b_q\}$  son calculados con el método arriba mencionado.

De aquí que la función de transferencia para el filtro digital, con la cual caracterizar los datos  $y_t$ , está dada por

$$C(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{\hat{b}(z)}{\hat{a}(z)} = \frac{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \dots + \hat{b}_q z^{-q}}{1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \dots + \hat{a}_p z^{-p}} \quad (C.21)$$

Para poder evaluar el desempeño del algoritmo para estimación de parámetros de procesos ARMA (autoregresivos y promedio móvil) en el problema de diseño de filtros digitales, a continuación se presentan los resultados para diferentes ordenes.

Utilizando la función de Yule-Walk del programa MAT-LAB para el diseño recursivo de filtros digitales, se determinan filtros de orden 2, 5, 9 y 15 para comparar la aproximación que realiza cada una de ellas a la señal original. Los resultados se presentan en la Fig. C.1.

De la Fig. C.1, se observa que mejores estimaciones del filtro deseado se logra con aquéllos de orden elevado, es decir, se lograrán mejores resultados en el diseño si seleccionamos grande el orden del filtro. Sin embargo, si se desean aproximaciones robustas para el filtro se considera aceptable tomar uno de orden 2 por cuestiones de realización.

Por otra parte, al aproximar los datos de la respuesta frecuencial del controlador tomando sólo 6 puntos como lo hace la función mencionada, y utilizando un modelo todo polo (AR autoregresivo), también se obtienen resultados aceptables para el filtro.

El procedimiento de diseño empieza calculando los coeficientes de correlación de los datos de la señal, esto es, tomar la transformada inversa de Fourier de los datos discretos. Para formar las ecuaciones modificadas de Yule-Walker arriba presentadas, utilizamos una matriz Toeplitz de los primeros  $p-1$  coeficientes de correlación y un vector columna de los últimos  $p-1$  coeficientes de correlación.

El sistema de ecuaciones que se obtiene está bien condicionado, de tal

forma que podemos encontrar una solución para los parámetros  $\{a_0 \dots a_p\}$  (AR) de la señal o proceso AR.

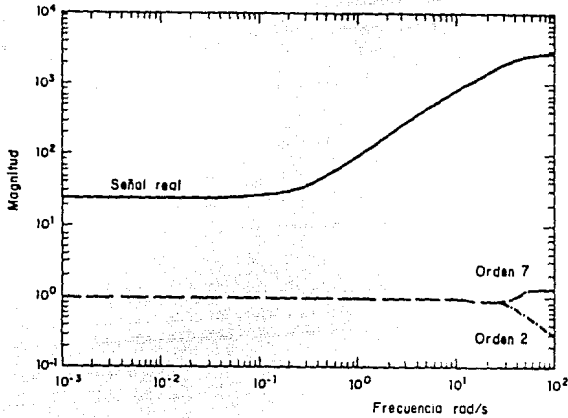


Fig C.1. Respuesta frecuencial del proceso real y estimados de ordenes 2,5,9, y 15.

Los parámetros AR (todo polo) para filtros de orden 7 y 2 se presentan a continuación:

$$A7=[1 \ -0.4217 \ 0.3166 \ 0.2057 \ -0.0968 \ 0.2057 \ 0.3166 \ -0.04217] \quad (C.22)$$

y

$$A2=[1 \ -1.3025 \ -.7657]. \quad (C.23)$$

Las respuestas frecuenciales de estos dos filtros junto con el proceso real se presentan en la Fig. C.2 para comparación. De la figura anterior se puede concluir que la aproximación de orden 7 es mejor, pero inferior a un modelo ARMA dado que aquí se toma como unitario el polinomio numerador. Por lo tanto, se puede concluir que las mejores estimaciones para el problema particular de diseño de filtros digitales se logran con modelos ARMA.



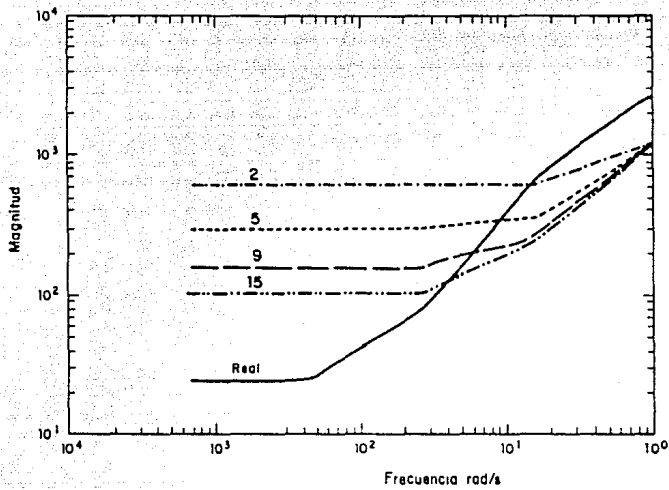


Fig. C.2. Respuesta frecuencial del proceso real y de un modelo de  $2^o$  y  $7^o$  orden AR (todo polo).

## REFERENCIAS

- [1] Bode H. W. (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. Van Nostrand C I.
- [2] Horowitz I. (1972). *Synthesis of Feedbaack Systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances*. Int J. Control, 16-2.
- [3] Ackermann J. (1985). *Uncertainty and Control*. Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Horowitz I. M. y Liao Y. K. (1986). *Quantitative feedback design for sampled-data systems*. Int. J. Control.
- [5] Frank P.M. (1978). *Introduccion to System Sensitivity Theory*.
- [6] PC-MATLAB for MS-DOS personal computer (1987). Version 3.2-PC. *The Mathworks, Inc.*
- [7] Barnett S. (1983). *Polinomials and Linear Control Systems*. Dekker.
- [8] Aström K.J. y Wittenmark B. (1989). *Adaptive Control*. Addison Wesley.
- [9] Friedlander B. and Porat B. (1984). *The Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation*. IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems, Vol. AES-20, No. 2, pp. 158-173, marzo 1984.
- [10] Yule G. U. (1927). *On a method of investigating periodicitics in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot number*. Philosophical Transactions, A 226, 267.

- [11] Walker G. (1931). *On periodicity in series of related terms.* Proceedings of the Royal Society, A 13, 518.
- [12] Cadzow J. A. (1980). *High performance spectral estimation - A new ARMA method.* IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-28, 5 (Oct.), 524-529.
- [13] Kay S. M. (1980). *A new ARMA spectral estimation.* IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-28, 5 (Oct. 1980), 585-588.
- [14] Merchant G. A. and Parks T. W. *Efficient Solution of a Toeplitz-Plus-Hankel Coefficient Matrix System of Equations.* IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-30, 1 (Feb. 1982).
- [15] Dugré J. P., Beex A. A. L. and Scharf L. L. *Generating Covariance Sequences and the Calculation of Quantization and Rounding Error Variances in Digital Filters.* IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-28, 1 (Feb. 1980).