



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA CONFINADO
DE STOKES

TESIS PROFESIONAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A
ESTEBAN FLORES MENDEZ

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F.

1990



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Resumen

Capítulo 1. Las ecuaciones de Navier Stokes.

§ 1.1 Motivación.	1
§ 1.2 Descripción de un fluido.	5
§ 1.3 Principios de conservación.	9
§ 1.4 Ecuaciones constitutivas.	17
§ 1.5 Ecuaciones de movimiento para fluidos incompresibles.	19
§ 1.6 Condiciones de frontera.	20
§ 1.7 El número de Reynolds.	21
§ 1.8 Formulación del problema.	22

Capítulo 2. Antecedentes y teorías modernas del problema.

§ 2.1 Introducción.	28
§ 2.2 Antecedentes del problema.	28
§ 2.3 Efecto de longitud finita y pared cilíndrica.	34
§ 2.4 Efecto de pared cilíndrica angosta.	41
§ 2.5 Forma en que se vincula la fuerza de arrastre con la velocidad terminal.	45
§ 2.6 Conclusiones teóricas.	46

Capítulo 3. Diseño y construcción del experimento.

§ 3.1 Introducción.	50
§ 3.2 Diseño y construcción.	50
§ 3.3 Datos y análisis.	56
§ 3.4 Conclusiones experimentales.	62

Capítulo 4. Conclusiones.

§ 4.1 Diferencias cualitativas entre teoría y experimento.	66
§ 4.2 Comparación de los resultados teóricos con los experimentales.	66
§ 4.3 Teoría que se adapte mejor al experimento.	69
§ 4.4 Perspectivas del trabajo experimental.	69
 Bibliografía	 71

Resumen

La tesis trata de la determinación experimental de la fuerza hidrodinámica que ejerce un fluido sobre el movimiento de una esfera sólida que, sin rotar, se mueve a lo largo del eje de un cilindro.

Como la fuerza hidrodinámica que actúa sobre la esfera no se puede medir directamente, es necesario utilizar un método indirecto. Este parte del hecho de que las fuerzas que actúan sobre la esfera (peso, flotación y fricción) llegan a un balance, por lo que la esfera alcanza su velocidad terminal. Como resultado de la suposición de que la fuerza hidrodinámica se puede expresar como el producto de la velocidad terminal por un factor que depende de la geometría asociada al confinamiento, el método consiste en determinar la forma funcional en que la velocidad terminal depende de los factores de confinamiento.

Se diseña y se construye un dispositivo experimental mediante el cual se mide la velocidad terminal de la esfera cuando ésta se suelta en cilindros de distintos radios y desde distintas distancias a la superficie libre. Con estos datos se determina la velocidad terminal como función de los parámetros geométricos asociados al confinamiento: cociente de los radios (esfera y cilindro) y distancia a la superficie libre.

CAPITULO 1

Las ecuaciones de Navier Stokes.

Introducción.

1.1 Motivación.

Dado un grupo de objetos sumergidos en un fluido, se denomina fuerza hidrodinámica a la fuerza que siente cada uno de ellos debido a su estado de movimiento y a la presencia y movimiento relativo de los otros. Hemos experimentado esta interacción cuando al cerrar la puerta de una habitación las cortinas se mueven o, cuando al desplazarnos en un coche compacto por la carretera, nos rebasa un camión de gran calado. Dentro de este grupo de interacciones hay una que es nuestro objeto de estudio.

Cuando una esfera cae a lo largo del eje de un cilindro que está lleno de líquido, sobre ésta actúa una fuerza en contra de su movimiento. Esta fuerza, llamada de arrastre, depende de varios parámetros, los cuales caracterizan al estado de movimiento de la esfera y las condiciones iniciales de su movimiento, las propiedades del fluido y a la geometría del sistema.

El estado de movimiento de la esfera viene dado por su velocidad que puede ser variable o no. La fuerza de arrastre que actúa en cada caso es muy diferente.

Los parámetros que caracterizan al fluido son la viscosidad y la densidad. Si un líquido tiene una viscosidad o densidad mayor que otro, la fuerza de arrastre será diferente de un caso a otro⁽¹⁾. Dicha fuerza depende también del cociente de las

densidades de la esfera al del líquido.

Los parámetros geométricos son los radios de la esfera y del cilindro, la longitud del cilindro y la posición inicial de la esfera. La fuerza depende del radio de la esfera, ya que mientras mas grande sea la esfera mayor es la cantidad de fluido que tiene que desplazar al moverse⁽¹⁾. Depende también de la proporción que guarden el radio de la esfera y el del cilindro. La esfera se moverá de diferente modo cuando éstos sean parecidos que cuando el radio del cilindro sea mucho mayor que el de la esfera^(2,3). Depende de la longitud del cilindro, ya que el fondo del cilindro y la superficie libre del líquido afectan el movimiento de la esfera. Si el cilindro es corto, sobre la esfera actúa una fuerza de arrastre diferente a si es largo⁽²⁾. Depende de la posición instantánea de la esfera, ya que si se encuentra cerca de la superficie libre o del fondo, actúa una fuerza distinta a si se encontrara lejos de ellas⁽²⁾.

La fuerza depende de las condiciones iniciales con las que se pone en movimiento la esfera, que son la posición y la velocidad. El movimiento de un fluido en general, tiene fuerte dependencia de las condiciones con las que se pone en movimiento. Las ecuaciones que se utilizan para describir fluidos, tienen fuerte dependencia de las condiciones iniciales. Ha sido demostrado que soluciones cuya condición inicial difiere muy poco son completamente diferentes entre si⁽⁴⁾.

La fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera que cae a lo largo del eje de un cilindro no ha sido determinada. Sólo se conocen soluciones aproximadas tanto teóricas como experimentales. El objetivo de este trabajo es presentar un método experimental para determinar la fuerza de arrastre y hacer una revisión de las teorías que se han desarrollado para determinarla.

Las aplicaciones de éste problema son múltiples. Muchas áreas de ingeniería y ciencias aplicadas requieren conocer la fuerza hidrodinámica que actúa sobre una partícula moviéndose con las características anteriormente citadas. Entre otros campos, cabe citar viscosimetría de calda de esfera, flujo sanguíneo, transporte en membranas, y sedimentación.

Transporte en membranas.

Las funciones más importantes de la célula consisten en el metabolismo y la biosíntesis de proteínas. Estas funciones dependen del transporte de sustancias del medio ambiente al interior de la célula y de la célula al medio ambiente.

La combinación del transporte de la sustancia con la conservación y la independencia de la estructura interior de la célula, se realiza por un único modo posible, para realizar sus funciones la célula está separada como un todo del medio exterior por una membrana semipermeable. A través de la membrana, se transporta sustancia sin que por ésto se altere la estructura interna de la célula.

A través de los canales pasa el material que requiere la célula (iones y moléculas) debido al fenómeno de ósmosis. Un ión o molécula se puede idealizar como una esfera y el canal como un cilindro. Por lo que el transporte en membranas se puede ver como el movimiento de una esfera a lo largo de un cilindro^(5,6,7).

Es importante recordar que los iones y moléculas de la sustancia tienen la dimensión de las moléculas que conforman al fluido. En el artículo realizado por Peralta-Fabi y Zwanzig⁽⁸⁾, presentan algunos cálculos de la fuerza de arrastre que actúa sobre una molécula que se mueve en un fluido viscoso. Consideran

que la interacción de la molécula con el fluido se debe a un potencial intermolecular, más que a una condición de frontera impuesta sobre una superficie bien definida. El resultado al que llegan muestra que la fuerza de arrastre que actúa sobre la molécula puede ser calculada con una aproximación hidrodinámica. Resultados experimentales de la autodifusión de un átomo de argón en argón han sido descritos y predichos usando un punto de vista hidrodinámico⁽⁸⁾. Lo cual argumenta en favor del modelo anteriormente descrito para transporte en membranas.

Flujo Sanguíneo.

La sangre es una suspensión, es decir, una gran cantidad de partículas que están suspendidas en un líquido. La forma de dichas partículas es variada. Describir el flujo sanguíneo en arterias, venas o capilares, es algo que todavía no ha sido resuelto. Debido a su importancia, se han desarrollado diversos modelos para poder entenderlo. Estos consisten en una versión muy simplificada del flujo sanguíneo.

El movimiento de un glóbulo rojo en una vena, arteria o capilar, puede ser idealizado el movimiento de una esfera a lo largo de un cilindro (para más detalle ver la introducción de la sección 2.4).

Viscosimetría de Caída de esfera.

La viscosidad es aquella propiedad de un fluido por virtud de la cual ofrece resistencia a un esfuerzo cortante. La melaza y la breva son ejemplos de fluidos altamente viscosos, el agua y el aire tienen viscosidades muy pequeñas.

Uno de los métodos industriales para medir la viscosidad de

ciertos líquidos, es el así llamado de calda de esfera. Se tienen varios tubos llenos con líquidos "estándares" de viscosidades conocidas con una esfera de acero en cada tubo. El tiempo necesario para que la esfera recorra la longitud total del tubo depende de la viscosidad del líquido.

Sedimentación.

La sedimentación estudia la forma en que materia se precipita al fondo de un líquido. En el caso de una suspensión poco concentrada, las partículas se pueden considerar aisladamente y se tomarán en cuenta los efectos de fondo, superficie libre o pared, cuando el caso lo requiera. Esta consideración se puede hacer gracias a que la esfera, al moverse en el seno del líquido, produce un campo de velocidades en él (en la aproximación de Stokes) proporcional al radio de la esfera y a la velocidad de ésta e inversamente proporcional a la distancia. Por lo que si la velocidad y el radio de la esfera son pequeños y la suspensión es diluida, las partículas que se sedimentan se pueden considerar aisladas. El sedimento se puede considerar como una esfera y dependiendo del caso, cierta pared del contenedor como una pared cilíndrica.

1.2 Descripción de un fluido.

Los fluidos pueden idealizarse como medios continuos, es decir, medios carentes de huecos o separación entre sus partículas. Bajo este marco, la estructura molecular de la materia es ignorada y se le sustituye por un continuo. En cada punto de este fluido continuo, para un instante dado, se supone que la velocidad, presión, densidad y otras, así llamadas "variables de campo", toman un valor único. La continuidad de la materia se requiere entonces para deducir las leyes de conservación de masa,

momento, momento angular y energía, que dan lugar a un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales deben satisfacer las variables de campo. La solución de estas ecuaciones define entonces la variación de cada variable de campo en el espacio y el tiempo⁽⁹⁾.

Las variables de campo tales como la densidad ρ y el vector de velocidad \bar{u} son en general funciones de las coordenadas espaciales y del tiempo: $\rho = \rho(\bar{r}, t)$ y $\bar{u} = \bar{u}(\bar{r}, t)$, donde \bar{r} es el vector posición. En cualquier punto del espacio estas variables continúan estando definidas en términos de las propiedades de varias moléculas que ocupan el pequeño volumen en la vecindad del punto.

Considérese un pequeño elemento de volumen ΔV que contiene un gran número de moléculas. Sean Δm y \bar{v} la masa y velocidad media en el volumen ΔV . La densidad y velocidad en un punto están definidas por los siguientes límites:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \left(\frac{\sum \Delta m}{\Delta V} \right),$$

$$\bar{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \left(\frac{\sum \bar{v} \Delta m}{\Delta m} \right),$$

donde ϵ es un volumen lo suficientemente pequeño para considerar $\epsilon^{1/3}$ pequeño comparado con la más pequeña y significativa escala de longitud en el campo de velocidades, pero lo suficientemente grande como para que contenga un gran número de moléculas. Las sumas en las expresiones anteriores se toman sobre todas las moléculas que están dentro de ΔV . Las otras variables de campo se definen de manera similar.

Una vez seleccionada la aproximación del continuo, es

necesario seleccionar el sistema de referencia en el cual se formularán las leyes de conservación. Hay dos sistemas de descripción básicos que pueden ser empleados, se les denomina euleriano y lagrangiano.

En el marco de referencia euleriano las variables independientes son las coordenadas espaciales x , y , z y el tiempo t . Para obtener las ecuaciones básicas de conservación, se enfoca la atención en el fluido que pasa a través de un volumen de control que está fijo en el espacio. El fluido que se encuentra dentro del volumen de control en cualquier instante constará de diferentes partículas de fluido que las que había un instante anterior. Si los principios de conservación se aplican al fluido que pasa por este volumen de control, las ecuaciones de conservación se obtienen en la descripción euleriana.

En la descripción lagrangiana, se enfoca la atención en una masa particular de fluido conforme fluye. Los principios de conservación se aplican a este elemento de fluido, resultando un conjunto de ecuaciones de conservación en la descripción lagrangiana. En este sistema de referencia x , y , z y t no son coordenadas independientes, ya que se sabe que el elemento de fluido pasó por las coordenadas x_0 , y_0 y z_0 en algún instante t_0 , entonces su posición futura puede ser calculada si las componentes de la velocidad u , v y w del elemento son conocidas. Las variables independientes en el sistema lagrangiano son x_0 , y_0 , z_0 y t .

Sea α cualquier variable de campo tal como la densidad o la temperatura del fluido. Desde el punto de vista euleriano, α puede ser considerado una función de las variables independientes x , y , z y t . En el sistema de referencia lagrangiano se observa un elemento de fluido específico por un corto periodo de tiempo dt

conforme fluye, su posición cambiará por las cantidades dx , dy , dz , y α cambiará por una cantidad $d\alpha$. Del cálculo sabemos que estas cantidades están relacionadas por la ecuación

$$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t} dt + \frac{\partial\alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y} dy + \frac{\partial\alpha}{\partial z} dz.$$

Si la expresión anterior se deriva por dt y se identifican los términos $dx/dt=u$, $dy/dt=v$, $dz/dt=w$ y $D\alpha/Dt=da/dt$ entonces

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial\alpha}{\partial x} + v \frac{\partial\alpha}{\partial y} + w \frac{\partial\alpha}{\partial z}.$$

En la notación de Einstein (de suma cuando aparecen índices repetidos) este resultado se escribe

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_k \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}. \quad (1.1)$$

El término $D\alpha/Dt$ de la ecuación (1.1) se denomina "derivada material". Representa el cambio total de la cantidad α según es visto por un observador que sigue al elemento de fluido. La ecuación (1.1) expresa el cambio lagrangiano de α , con respecto al tiempo ($D\alpha/Dt$), para un elemento de fluido dado en términos de las derivadas eulerianas $\partial\alpha/\partial t$ y $\partial\alpha/\partial x_k$ ⁽¹⁾.

El teorema de transporte de Reynolds ⁽²⁾ relaciona la derivada lagrangiana de una integral de volumen con una integral de volumen cuyo integrando contiene derivadas eulerianas.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha u_k) \right] dV. \quad (1.2)$$

1.3 Principios de Conservación.

a) Conservación de la masa.

Uno de los principios básicos de la física clásica establece que la masa es constante. Esto significa que no puede existir creación o aniquilación de materia. La variación de masa en un volumen fijo V se debe al flujo de materia a través de la superficie que lo limita.

Considérese un elemento de fluido específico cuyo volumen V se ha escogido arbitrariamente. Si ρ es su densidad, la masa del elemento es $\int_V \rho dV$. Conforme fluye, su masa debe permanecer constante por lo que

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 ,$$

por la ecuación (1.2) esto implica

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} \right] dV = 0 .$$

Ya que el volumen V es arbitrario, la única forma de que la ecuación anterior se satisfaga es que el integrando se anule:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 , \quad (1.3)$$

es decir,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 .$$

Cuando la velocidad del flujo es pequeña en comparación con

la velocidad del sonido en el fluido, se puede considerar que la densidad permanece constante. A los fluidos que cumplen esta condición se les denomina incompresibles. Matemáticamente se escribe como

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 ,$$

de donde se deduce, por la ecuación anterior,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 . \quad (1.4)$$

Sin embargo, el hecho de que $\nabla \cdot \bar{u} = 0$, no implica que la densidad sea constante, aunque sea constante en el tiempo puede variar con la posición, pues si se considera el flujo estacionario de un fluido estratificado, en donde la densidad sea constante a lo largo de las líneas de flujo, pudiendo variar de línea a línea, se tiene que su derivada material es cero⁽⁹⁾.

b) Conservación del momento.

El principio de la conservación de momento es la aplicación de la segunda ley de Newton al movimiento de un elemento de fluido.

Las fuerzas externas que actúan sobre una masa de fluido pueden ser clasificadas como fuerzas de cuerpo, tales como la gravitacional, o como fuerzas de superficie, tales como las fuerzas de presión o esfuerzos viscosos. Entonces, si \bar{f} es un vector que representa la resultante de las fuerzas de cuerpo por unidad de masa, la fuerza de cuerpo total que actúa en una masa de volumen V es $\int_V \rho \bar{f} dV$. También, si \bar{P} es un vector de superficie que representa la fuerza superficial resultante por

unidad de área, la fuerza de superficie total que actúa sobre la superficie S , que contiene a V , es $\int_S \vec{P} dS$.

De acuerdo con la segunda ley de Newton la suma de las fuerzas externas, descritas arriba, es igual al cambio de momento en la unidad de tiempo. El momento por unidad de volumen es $\rho \vec{u}$, por lo que el momento total que tiene el elemento de volumen V es $\int_V \rho \vec{u} dV$. El cambio de momento total en V , usando una descripción lagrangiana, es $(D/Dt) \int_V \rho \vec{u} dV$. Entonces

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_S \vec{P} dS + \int_V \rho \vec{f} dV .$$

Las fuerzas superficiales actúan sobre la superficie de cada elemento y están determinadas por el área de su superficie y la orientación de ésta; estas fuerzas pueden ser impulsivas debido a la presión y corrientes debido a la viscosidad. La componente j de la fuerza ejercida sobre un elemento de superficie, de área dS y normal \vec{n} , se representa como $\sigma_{ij} n_i dS$, donde σ_{ij} es el tensor de los esfuerzos y es la componente j de la fuerza por unidad de área que actúa sobre una superficie con normal en la dirección i . En notación tensorial la ecuación que expresa la conservación del momento queda

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_S \sigma_{ij} n_i dS + \int_V \rho f_j dV .$$

Usando los teoremas de Reynolds y el de Gauss, la expresión anterior queda

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) \right] dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int_V \rho f_j dV .$$

Estas integrales de volumen se pueden agrupar para llegar a una expresión de la forma $\int_V (\dots) dV = 0$. Como el volumen V es arbitrario, la única forma de que se satisfaga la ecuación anterior, es que el integrando sea igual a cero, por lo que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j .$$

Desarrollando el segundo término de la parte izquierda de esta ecuación y utilizando la ecuación (1.3), la expresión anterior queda

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j . \quad (1.5)$$

El lado izquierdo representa el cambio de momento de un volumen unitario de fluido; el primer término es la variación temporal cuando el flujo no es estacionario y el segundo término representa variaciones locales debidas al movimiento del fluido aún cuando el flujo sea estacionario. En el lado derecho están las fuerzas que originan dicho cambio de momento, por un lado las fuerzas volumétricas y por otro las originadas por los esfuerzos superficiales.

c) Conservación del momento angular.

Una "partícula" de fluido con densidad ρ , velocidad \bar{u} y posición \bar{r} , tiene un momento angular por unidad de volumen $\bar{L} = \bar{r} \times \rho \bar{u}$. El momento angular total del elemento de volumen V es $\int_V \bar{L} dV$.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, el cambio de momento angular total con respecto al tiempo del elemento de fluido es igual a la torca total debida a las fuerzas externas que actúan sobre éste, dichas fuerzas son las de cuerpo y de superficie. La torca debida a las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el elemento de fluido viene dada por $\int_V \vec{r} \times \rho \vec{f} dV$, y la torca debida a las fuerzas de superficie es $\int_S \vec{r} \times (\sigma \cdot \hat{n}) dS$. Por lo que la torca total que actúa sobre el elemento de fluido viene dada por la suma de las dos integrales anteriores. Las expresiones anteriores satisfacen

$$\frac{D}{Dt} \int_V \vec{r} \times \rho \vec{u} dV = \int_S \vec{r} \times (\sigma \cdot \hat{n}) dS + \int_V \vec{r} \times (\rho \vec{f}) dV.$$

Usando el teorema de Reynolds queda

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \times \rho \vec{u}) + \text{div}(\vec{r} \times (\rho \vec{u}) \vec{u}) \right] dV = \int_S \vec{r} \times (\sigma \cdot \hat{n}) dS + \int_V \vec{r} \times (\rho \vec{f}) dV.$$

Utilizando el teorema de Gauss, la componente k-ésima de la ecuación anterior es

$$\int_V \left[\epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_j u_l) \right] dV = \int_V \left[\epsilon_{ijk} \sigma_{ij} + \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{lj} + \epsilon_{ijk} x_i \rho f_j \right] dV,$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita.

Esta expresión se reduce a⁽⁶⁾

$$\int_V \left[x_i \varepsilon_{ijk} \left[\left[\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{lj} - \rho f_j \right] + u_j \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right] \right] - \varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} \right] dV = 0 .$$

Utilizando las ecuaciones (1.3) y (1.5) queda

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} dV = 0 .$$

Como el volumen V es arbitrario

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} = 0 .$$

Después de desarroyar este resultado se llega a la conclusión de que el tensor de esfuerzos es simétrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

d) Conservación de la energía.

El principio de conservación de la energía es el resultado de aplicar la primera ley de la termodinámica a un elemento de fluido. La primera ley de la termodinámica se aplica a sistemas que se encuentran en equilibrio. Bajo estas condiciones se establece que el cambio de energía interna, debido a un proceso cuasi estático, es igual a la suma del trabajo total hecho sobre el sistema y del calor intercambiado. Aún cuando un elemento de fluido en la descripción lagrangiana puede ser considerado un sistema termodinámico, en general, no se encuentra en equilibrio.

La ecuación de conservación de la energía es la generalización de la primera ley de la termodinámica para un

sistema fuera de equilibrio. Para esto, es necesario introducir la hipótesis de equilibrio local, ésta permite establecer la energía de una "partícula" fluida como la suma de la energía interna por unidad de masa e y la energía cinética por unidad de masa $\bar{u} \cdot \bar{u} / 2$. En este sentido, la forma modificada de la primera ley de la termodinámica que se aplicará a un elemento de fluido, establece que el cambio con respecto al tiempo de la energía total del elemento de fluido conforme fluye, es igual a la suma de la potencia desarrollada por las fuerzas de superficie $\bar{u} \cdot \bar{P} dS$ y por las fuerzas volumétricas $\bar{u} \cdot \bar{f} dV$ y el flujo de calor \bar{q} ; la cantidad de calor que sale del elemento de fluido por unidad de tiempo y unidad de área es $\bar{q} \cdot \hat{n}$, donde \hat{n} es la normal a la superficie del elemento. De esta forma, el principio de conservación de la energía para un volumen V con superficie S , está representado por

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho e + \frac{1}{2} \bar{u} \cdot \bar{u} \right) dV = \int_S \bar{u} \cdot \bar{P} dS + \int_V \bar{u} \cdot \rho \bar{f} dV + \int_S \bar{q} \cdot \hat{n} dS.$$

Usando el hecho de que el vector \bar{P} está relacionado con el tensor de los esfuerzos, a través de la relación $P_j = \sigma_{ij} n_i$, la primera integral de superficie se transforma en una integral de volumen utilizando el teorema de Gauss

$$\int_S \bar{u} \cdot \bar{P} dS = \int_V u_j \sigma_{ij} n_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) dV.$$

Aplicando el teorema de Gauss al término debido al flujo de calor:

$$\int_S \bar{q} \cdot \hat{n} dS = \int_V q_j n_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} q_j dV.$$

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds, y agrupando las integrales, se obtiene una expresión de la forma $\int_V () dV = 0$.

Como el volumen V es arbitrario, la única forma de que se cumpla esto es que el integrando sea nulo. De lo cual resulta la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j) u_k \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) - \rho u_j f_j + \frac{\partial}{\partial x_i} q_i.$$

Desarrollando los términos y utilizando las ecuaciones de conservación de la masa y del momento, la expresión anterior se reduce a

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (1.6)$$

El miembro de la izquierda representa el cambio de la energía interna, siendo el primer término el cambio temporal, mientras que el segundo se debe a cambios locales convectivos causados por el flujo del fluido. La parte derecha representa la causa del cambio de la energía interna. El primer término representa la conversión de energía mecánica en energía térmica debido a la acción de los esfuerzos de superficie. El último término representa la cantidad de calor que está siendo intercambiado por unidad de tiempo, por conducción con el exterior.

A partir del principio de conservación se han obtenido cinco ecuaciones que describen el movimiento de un fluido y, como consecuencia de la hipótesis de equilibrio local, hay dos ecuaciones de estado para un sistema simple. Estas son $p = p(\rho, F)$ y $e = e(p, T)$, en donde p es la presión termodinámica y T la temperatura⁽¹⁰⁾. Sin embargo, se cuenta con 16 variables escalares: densidad ρ , energía interna e , tres componentes de la velocidad \bar{u} , tres componentes del flujo de calor \bar{q} , seis componentes del tensor σ_{ij} , la presión p , y la temperatura T . De esta forma se tiene un

sistema abierto por lo que se deben introducir ecuaciones en términos de las mismas variables para obtener un sistema de ecuaciones cerrado. Estas se conocen como las ecuaciones constitutivas.

1.4 Ecuaciones constitutivas.

Las ecuaciones constitutivas permiten cerrar el sistema de ecuaciones. Estas relacionan al tensor de esfuerzos con los gradientes de la velocidad y la presión y al flujo de calor con el gradiente de temperatura. Para construir las se formularán las condiciones que el tensor de esfuerzos y el flujo de calor satisfacen.

a) Viscosidad.

En un fluido en reposo, sólo se ejercen fuerzas normales y están dadas por la presión termodinámica, por lo que el tensor de los esfuerzos es isotrópico en cualquier lugar del fluido y tiene la forma

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij},$$

en donde el signo negativo se debe a que se considera a los esfuerzos normales positivos cuando son de tensión.

A un fluido en movimiento se le debe sumar a la parte derecha de la expresión anterior, un término que dé la transferencia de impulso viscoso en el fluido, el cual se denota por σ'_{ij} , quedando

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}.$$

Puede establecerse la forma general del tensor σ'_{ij} del modo siguiente⁽⁴⁾: en un fluido se presentan procesos de rozamiento interno únicamente en el caso en que las distintas partículas del fluido se muevan con velocidades diferentes, de modo que exista un movimiento relativo entre ellas. Es decir σ'_{ij} no puede depender de la velocidad del fluido, ya que si éste se moviera a velocidad constante no se producirían esfuerzos viscosos en su interior. De aquí que σ'_{ij} dependa de las derivadas espaciales de la velocidad. Si los gradientes de velocidad son pequeños, podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación, σ'_{ij} puede suponerse que es una función lineal de las derivadas $\partial u_i / \partial x_j$. No pueden existir términos en σ'_{ij} independientes de $\partial u_i / \partial x_j$, puesto que σ'_{ij} debe anularse para $\bar{u} = \text{constante}$. A continuación observaremos que σ'_{ij} debe también anularse cuando el fluido completo está en rotación uniforme, puesto que es evidente que en dicho movimiento no se produce ningún rozamiento interno en el fluido. En el caso de rotación uniforme con velocidad angular $\bar{\omega}$, la velocidad \bar{u} es igual al producto vectorial $\bar{\omega} \times \bar{r}$. Las sumas

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} ,$$

son combinaciones lineales de las derivadas $\partial u_i / \partial x_j$, y se anulan cuando $\bar{u} = \bar{\omega} \times \bar{r}$. De aquí que σ'_{ij} deberá contener exactamente estas combinaciones simétricas de las derivadas $\partial u_i / \partial x_j$.

El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es

$$\sigma'_{ij} = a \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} ,$$

siendo a y b independientes de la velocidad. Sin embargo, es conveniente escribir esta expresión en una forma ligeramente distinta, en la que a y b se sustituyen por otras constantes

$$\sigma'_{ij} = \eta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2\delta_{ij}}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (1.7)$$

La expresión entre paréntesis tiene la propiedad de anularse cuando $i=j$. Los coeficientes η y ζ se les denomina coeficientes de viscosidad cortante y volumétrica respectivamente, y los dos son positivos⁽⁴⁾.

b) Conductividad térmica.

La conductividad térmica de un fluido se efectúa gracias a que las moléculas transmiten su movimiento térmico de unas a otras a causa de su interacción. La temperatura se puede pensar como un potencial, cuyo gradiente es equivalente a una "fuerza motriz" que produce un flujo de calor.

La segunda ecuación constitutiva viene dada por la ley de conducción de calor de Fourier, que establece que el flujo de calor por conducción es proporcional al gradiente de la temperatura

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1.8)$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica del fluido.

1.5 Ecuaciones de movimiento para fluidos incompresibles.

En un fluido incompresible $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, lo que permite utilizar

la ecuación (1.4) en la ecuación (1.7). Así, queda $\sigma'_{ij} = \eta(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, y por lo tanto, $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$. El hecho de que ρ sea constante, permite desacoplar las ecuaciones de conservación de masa y de momento de la de la energía. Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.5) se llega a

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_j .$$

En la mayor parte de los casos el coeficiente de viscosidad η no varía notablemente con la posición y puede por tanto considerarse constante; usando la ecuación (1.4) la ecuación anterior queda

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} + \rho f_j ,$$

en forma vectorial la ecuación anterior se escribe

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} + \rho \vec{f} . \quad (1.8)$$

A (1.8) se le denomina la ecuación de Navier-Stokes. Estas ecuaciones de movimiento son el resultado de considerar el cambio de momento de un elemento de fluido, debido a las fuerzas que actúan sobre él, que son las fuerzas volumétricas y las originadas por esfuerzos superficiales.

1.6 Condiciones de frontera.

Experimentalmente se ha determinado que no hay movimiento relativo entre una frontera sólida y un fluido. Entonces, si \vec{v} representa la velocidad de una frontera sólida, la condición que

debe satisfacer la velocidad en la frontera es

$$\bar{u} = \bar{v}, \text{ (sobre la frontera s\u00f3lida).} \quad (1.9)$$

En el caso de un fluido infinito, el valor que debe tomar \bar{u} cuando $r \rightarrow \infty$ depende de varias cosas:

a) El sistema de referencia que se utiliza para describir el campo de velocidades de un fluido, puede alterar la condici\u00f3n en el infinito. Ejemplo de \u00e9sto, es el caso de una esfera que se mueve a cierta velocidad en el seno de un fluido infinito. Si el sistema de referencia se monta sobre la esfera, y la esfera se mueve con velocidad Ue_i , entonces el campo de velocidades en $r \rightarrow \infty$ es $\bar{u} = -Ue_i$; pero si el sistema se monta en el fluido, $\bar{u} = 0$ en $r \rightarrow \infty$, ya que la energ\u00eda que le transmite la esfera al fluido se va disipando por efectos viscosos conforme r crece.

b) El campo de velocidad \bar{u} depende de las condiciones de frontera en el infinito. Si la frontera en el infinito cambia su posici\u00f3n en el tiempo y se considera un sistema de referencia fijo, el campo de velocidades debe satisfacer la ecuaci\u00f3n (1.9) en el infinito. Ejemplo de \u00e9sto, es el primer problema de Stokes^(p).

c) El tipo de campo de velocidades que tiene el fluido determina tambi\u00e9n la condici\u00f3n al infinito. En el caso de un flujo de Poiseuille^(p) el campo de velocidades en el infinito es un perfil parab\u00f3lico.

1.7 El n\u00famero de Reynolds.

La ecuaci\u00f3n de Navier-Stokes contiene las siguientes variables: la velocidad, las coordenadas, el tiempo y la presi\u00f3n. Adimensionalisemos \bar{u} con la magnitud de una velocidad

representativa del flujo U_0 , a las coordenadas con una longitud característica del sistema L , a la presión con $\eta U_0/L$ y al tiempo con $\rho L^2/\eta$. Al introducir estos valores en la ecuación de momento y en ausencia de fuerzas externas aparece una única combinación adimensional: $U_0 L/\nu$ ($\nu = \eta/\rho$ es la viscosidad cinemática) que se conoce como número de Reynolds R . En ausencia de fuerzas externas la ecuación de Navier-Stokes queda

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + R u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nabla^2 u_j .$$

todas las variables en esta expresión son adimensionales.

El número de Reynolds $U_0 L/\nu$ es el cociente de las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas. Un número crítico de Reynolds hace distinción entre regímenes de flujo, tales como flujo laminar o turbulento en tubos⁽⁷⁾.

Cuando las fuerzas viscosas son mucho mayores que las fuerzas inerciales el número de Reynolds es despreciable, y si además se trata de un flujo estacionario y no hay fuerzas externas la ecuación (1.8) queda

$$\nabla p = \eta \Delta \bar{u} . \quad (1.10)$$

A la ecuación (1.10) se le denomina ecuación de Stokes. La cual se utiliza para determinar el campo de velocidades y de presión de un fluido incompresible, uniforme y cuyo número de Reynolds es muy pequeño.

1.8 Formulación del problema.

Del problema que ha sido planteado en la sección 1.1 y que

aquí se explica con más detalle, se conocen sólo soluciones aproximadas. Por lo que es necesario abordar este problema tanto teórica como experimentalmente. El experimento además de servir para comparar las teorías con los resultados, señala nuevas líneas teóricas a seguir.

a) Formulación experimental del problema.

En la presente sección se expone un método experimental para determinar la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera sólida que se mueve sin rotar, por acción de la gravedad a lo largo del eje de un cilindro. Esta fuerza se espera que dependa de los parámetros geométricos (ver diagrama) adimensionales $D=A/l$, $r=A/B$ y $R=\rho v A/\eta$, donde A y B son los radios de la esfera y del cilindro respectivamente, $2L$ es la longitud del cilindro, l es la posición inicial respecto a la superficie libre desde la cual se suelta la esfera, R es el número de Reynolds, v es la velocidad de la esfera, η y ρ son la viscosidad y la densidad del fluido.

En un cilindro lleno de un cierto fluido se suelta una esfera a lo largo de su eje de simetría desde distintas distancias de la superficie libre. La esfera en cada caso alcanza su velocidad terminal. Esta se alcanza cuando las fuerzas que actúan sobre la esfera se compensan mutuamente, dando lugar a que ésta se mueva con velocidad constante (ver sección 2.1.1). La esfera se suelta de la misma forma en cilindros de distintos radios, obteniendo así, velocidades terminales distintas en cada caso. El fluido se escoge de tal forma que la velocidad terminal de la esfera sea tan pequeña que $R \ll 1$ (ver sección 1.4), y por lo tanto que tenga validez la ecuación de Stokes. A través del análisis de movimiento, se puede obtener la forma en que la velocidad terminal depende de los parámetros $(D, l, 2L, \eta, r)$. Este es el objeto del experimento.

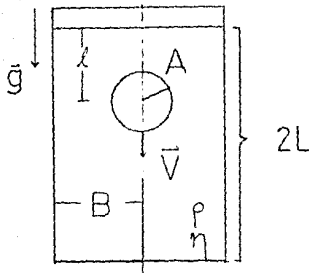


Figura 1.1. Parámetros geométricos asociados al confinamiento.

Una vez hecho esto, se relaciona la fuerza de arrastre con la velocidad terminal para determinar la forma en que la fuerza depende de dichos parámetros. Esta relación se establece considerando que la esfera al caer se mueve en línea recta y a velocidad constante (lo que se logra cuando la esfera alcanza su velocidad terminal). Por lo que las fuerzas que actúan sobre la esfera (gravedad, arrastre y flotación) se encuentran balanceadas. Entonces, la fuerza de arrastre es igual a la de gravedad menos la de flotación. Si durante el experimento la esfera que se suelta siempre es la misma y el fluido es el mismo, las fuerzas de gravedad y de flotación se mantienen constantes, provocando que la fuerza de arrastre también se mantenga constante.

Como la esfera al caer alcanza una velocidad terminal, es natural suponer que la fuerza de arrastre es proporcional a

alguna potencia positiva de la velocidad. Si se considera el caso lineal y que la esfera se mueve a velocidad constante, la fuerza de arrastre (F) se puede suponer que satisface $F = cv$, donde v es la velocidad terminal y c una función que depende de los parámetros geométricos. Como se discutió anteriormente para este caso F es constante, y si se encuentra experimentalmente la forma en que v depende de los parámetros geométricos, se determina la dependencia funcional de c . Encontrando así, la dependencia de F . Este punto se discute con todo detalle en la sección 2.5.

b) Formulación teórica del problema.

El problema consiste en determinar teóricamente la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera que se mueve a velocidad constante a lo largo del eje de un cilindro finito lleno de un fluido de viscosidad η . El radio del cilindro es B , y el de la esfera es A . La longitud del cilindro es $2L$ y la posición instantánea de la esfera es z_0 . La fuerza de arrastre que actúa sobre ésta es

$$\vec{F} = \int_{sup} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \, dS,$$

donde $\vec{\sigma}$ es el tensor de los esfuerzos y la integral es sobre la superficie de la esfera.

Para determinar $\vec{\sigma}$ se debe determinar el campo de velocidades \vec{u} del fluido. Este se encuentra a través de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. Puesto que se desea conocer F cuando la esfera ha alcanzado su velocidad terminal para R pequeño ($R < 0.5$), dichas ecuaciones se reducen a las ecuaciones de Stokes

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \nabla p = \eta \Delta \vec{u}.$$

Si se utiliza un sistema de coordenadas cilíndrico (β, θ, z) , con el origen O fijo al centro del cilindro y el eje z sobre el eje del cilindro, las condiciones a la frontera para estas ecuaciones son:

a) Como el sistema de coordenadas está fijo al cilindro, el campo de velocidades del fluido sobre la superficie de la esfera tiene la velocidad con la que ésta cae por lo que

$$\vec{u} = -v \hat{e}_x \text{ en } r = A, \text{ donde } v \text{ es la velocidad terminal de la esfera y } \hat{e}_z \text{ es un vector unitario a lo largo del eje } z.$$

b) Debido a que el fondo del cilindro es rígido, el campo de velocidades es nulo sobre él

$$\vec{u} = 0 \quad \text{en } z = -L, \quad 0 \leq \beta \leq B.$$

c) La condición que se utiliza en una superficie libre es que la proyección del tensor de esfuerzos a lo largo de la normal a la superficie sea nula, es decir la fuerza sobre la superficie es cero

$$\sigma \cdot \hat{e}_x = 0 \text{ en } z = L, \quad 0 \leq \beta \leq B.$$

d) Como la pared lateral es rígida, el campo de velocidades es nulo sobre ella

$$\vec{u} = 0 \quad \text{en } \beta = B, \quad -L \leq z \leq L,$$

donde z_0 es la posición del centro de la esfera y $r^2 = (z - z_0)^2 + \beta^2$, (ver figura 1.2).

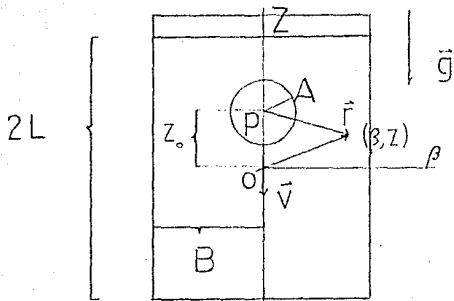


Figura 1.2. Esfera de radio A en un cilindro rígido de longitud $2L$ y radio B . Sistema de coordenadas que se utiliza.

CAPITULO 2

Antecedentes y teorías modernas del problema.

2.1 Introducción.

En este capítulo se exponen los antecedentes históricos y los métodos y resultados de dos artículos^(2.2) recientes que estudian dos distintas aproximaciones al problema teórico planteado en la sección 1.8, b). En éstos se utilizan métodos teóricos modernos para abordar el problema y se obtienen parte de los resultados mas importantes que se tienen hasta ahora; a saber, el efecto que tienen sobre la fuerza de arrastre las paredes del fondo, la superficie libre y lateral, y el efecto que tiene sobre la fuerza una pared cilíndrica muy angosta.

2.2 Antecedentes del problema.

1.-La ley de Stokes. Newton⁽¹²⁾ enunció en su obra "Principia" que si sobre un cuerpo actúa una fuerza constante y la resistencia a su movimiento es proporcional a la velocidad o a cualquier potencia de ella, el cuerpo finalmente alcanzará una velocidad terminal de forma tal que la resistencia experimentada es igual y opuesta a la fuerza que lo lleva. Las ecuaciones clásicas de la hidrodinámica propuestas por Navier, fueron resueltas por primera vez por Stokes⁽¹³⁾ para el caso de un péndulo que tiene una lenteja esférica que oscila en el seno de un fluido viscoso. En particular para un péndulo con un balanceo de período infinito, es decir, para una esfera que se mueve con velocidad uniforme, calculó la fuerza de resistencia al movimiento

$$F = 6\pi\eta Av, \quad (2.1)$$

donde A es el radio de la esfera, v es su velocidad (constante) y η es la viscosidad del fluido. A esta expresión se le denomina ley de Stokes. El tratamiento matemático se puede encontrar en (1). La solución se aplica solo a velocidades bajas y es una primera aproximación solamente, que se obtiene al despreciar, en las ecuaciones de movimiento del fluido, todos los términos inerciales, que son presumiblemente pequeños comparados con los términos lineales (viscosos). Consideraciones de los órdenes de magnitud relativa de los términos permitieron a Rayleigh⁽⁴⁵⁾ señalar que esta consideración puede ser tomada si $v\rho A/\eta$ es despreciable comparado con la unidad. Posteriormente Oseen demuestra que el análisis de Rayleigh era equivocado, como se explica en el siguiente punto de esta sección.

Si la ecuación (2.1) se aplica al caso de una esfera que cae bajo la acción de la gravedad en un medio viscoso, se puede igualar F al peso aparente de la esfera cuando el equilibrio se ha alcanzado, ya que no hay aceleración; despejando a v de esta expresión:

$$v = (m-m')g/6\pi\eta A, \quad (2.2)$$

donde m es la masa de la esfera y m' es la masa de fluido que desplaza la esfera. A la velocidad que se obtiene en (2.2) se le denomina la velocidad de Stokes, y se le denotará como v_s (donde el subíndice s indica que se trata de la velocidad de Stokes).

2.- La corrección de Oseen. Muchos intentos se han hecho para deducir una mejor aproximación que la que dio Stokes tomando en cuenta aquellos términos que se suponen despreciables para deducir su ley.

Fue señalado por Oseen⁽¹⁶⁾ que sólo en la vecindad inmediata del cuerpo en movimiento pueden ser despreciables los términos no lineales en comparación con aquellos debidos a las fuerzas viscosas, y que a una gran distancia de la esfera se vuelven aún más importantes. Oseen encuentra que una mejor aproximación a la resistencia que actúa sobre la esfera es

$$F = 6\pi\eta Av(1 + 3R/8).$$

Para derivar ésta, Oseen⁽¹⁶⁾ asume que R^2 es despreciable comparado con la unidad. Una solución exacta para el sistema de ecuaciones de Oseen, sin atender a esta suposición, fue posteriormente encontrada por Goldstein⁽¹⁷⁾.

En resumen, para obtener sus resultados, Stokes y Oseen hacen las siguientes suposiciones

- (1) El movimiento de la esfera relativo al fluido es lento,
- (2) El fluido es infinito,
- (3) La esfera es rígida,
- (4) El movimiento es uniforme,
- (5) El fluido se adhiere a la esfera.

Si se quiere aplicar la ley de Stokes, se deben poner las condiciones de tal forma que $R < 0.05$, o la extensión de Oseen $R < 0.8$.

3.- Corrección debido a los efectos de pared.

Para entender los resultados de sus experimentos, sobre caída de esferas en un tanque alto de sección cuadrada, Newton⁽¹⁸⁾ reconoció la necesidad de aplicar una corrección debido a la influencia de las paredes del tanque. Suponiendo que la

resistencia al movimiento era proporcional al cuadrado de la velocidad, indicó que para eliminar los efectos de las paredes la distancia que recorre la esfera debía ser multiplicada por un factor que depende de la sección transversal del tanque y del radio de la esfera. Para la caída de una esfera de plomo en agua, Munroe⁽¹⁹⁾ sugirió la fórmula aproximada $v/v_s = 1 - (A/B)^{3/2}$, donde v es la velocidad observada, y v_s es la velocidad de Stokes. Lunnon⁽²⁰⁾ encontró experimentalmente la fórmula $v/v_s = 1 - 0.23A/B$, para el régimen de movimiento rápido ($R > 1000$). El primer intento serio para encontrar una corrección matemática para el régimen laminar fue un cálculo hecho por Lorentz⁽²¹⁾, quien encontró el efecto en la resistencia producido por la presencia de una pared plana e infinita. Esta es:

$$F = 6\pi A\eta v(1 + 9A/32\zeta),$$

donde ζ es la distancia del centro de la esfera a la pared. Stok⁽²²⁾ llevó los cálculos de Lorentz un paso más allá y encontró

$$F = 6\pi A\eta v(1 - 9A/32\zeta)^{-1} - (A/4\zeta)^3).$$

Para el caso de una esfera moviéndose a lo largo del eje de un cilindro infinitamente largo Ladenburg⁽²³⁾ aplicó el método de Lorentz y encontró que para un cilindro de radio B , la fuerza de resistencia que actúa sobre la esfera es

$$F = 6\pi\eta Av(1 + 2.4A/B),$$

donde v es la velocidad de la esfera relativa a las paredes.

Lunnon⁽²⁰⁾ estableció en uno de sus experimentos que la

corrección de Ladenburg es incorrecta cuando $A/B \geq 0.1$.

Como se ha dicho antes, las suposiciones que hizo Stokes para deducir su fórmula, que fueron la base para los cálculos de Ladenburg, son válidas cuando R es muy pequeño. Cuando el movimiento no es extremadamente lento es deseable, por lo tanto, tomar en cuenta los términos no lineales despreciados por Stokes. Para el efecto de la pared sobre el movimiento de la esfera, a lo largo del eje de un cilindro conteniendo un fluido viscoso, Faxén⁽²⁴⁾, empezando del sistema de ecuaciones de Oseen, llega a la fórmula

$$F = 6\pi\eta\gamma v / \left(1 - \frac{3R}{B} - \frac{A}{B} f(BR/A) + 2.09(A/B)^3 - 0.95(A/B)^5 \right),$$

Faxén da valores de una función análoga a $f(BR/A)$ para algunos valores del argumento, éstos son reproducidos en la siguiente tabla con otros tres que Barr⁽²⁵⁾ ha interpolado entre $BR/A = 0$ y $BR/A = 2$.

$BR/A = 0$	0.2	0.4	0.8	2	4	8	20
$f(BR/A) = 2.1$	2.07	2.03	1.96	1.7	1.4	1	0.4

Tabla 2.1 Dependencia funcional de f vs BR/A .

Esta fórmula es obtenida bajo la suposición de que R^2 , $R(A/B)^2$ y $(A/B)^2$ son despreciables comparados con la unidad. Cuando $R^2(B/A)$ es también despreciable, la fórmula se simplifica a

$$F = 6\pi\eta\gamma v \left(1 - 2.104(A/B) + 2.09(A/B)^3 - 0.95(A/B)^5 \right)^{-1},$$

que puede ser deducida más rápidamente del sistema de ecuaciones de Stokes y nos brinda una mejor aproximación que la de Ladenburg cuando la velocidad es tan pequeña que es válida la ley de Stokes.

Es así como el método de reflexiones que introdujo Lorentz y posteriormente aplicó Ladenburg al caso de una esfera que se mueve a lo largo del eje de un cilindro infinito, fue desarrollado por Faxén para encontrar una expresión de la fuerza de arrastre hasta quinto orden en A/B .

4.- Efectos de tubo finito.

El cilindro que se utiliza en la práctica no tiene obviamente longitud infinita, como se asume en el análisis de Ladenburg⁽²⁴⁾ o de Faxén. Así Ladenburg⁽²⁵⁾ procedió a calcular los efectos de los extremos. Para el caso de una esfera moviéndose perpendicularmente a un plano infinito, Lorentz⁽²¹⁾ había demostrado previamente que la resistencia se incrementaba sobre aquella que hay en un medio infinito por el factor $(1 + 18A/16l)$, donde l es la distancia del centro de la esfera al plano. Ladenburg calculó que una esfera que cae con velocidad constante entre dos planos infinitamente rígidos y separados por una distancia h experimenta una resistencia proporcional a $v(1+3.3A/h)$ si la esfera se encuentra a $5h/12$ de uno de los planos.

Se pueden hacer varias objeciones a la aplicación de la segunda corrección de Ladenburg. En primer lugar supone en los cálculos que los extremos son planos infinitos, cuando en realidad subtienden un pequeño ángulo sólido para el centro de la esfera, y la presencia de las paredes cilíndricas modificará naturalmente el "flujo reflejado" que se usa en el método de Lorentz.

En el terreno experimental Schmiedel⁽²⁷⁾ hizo una serie de experimentos para decidir sobre la corrección final que había que aplicarle a sus resultados. Encontró que los resultados teóricos propuestos por Ladenburg diferían de los suyos dentro del error de sus medidas. Es posible, sin embargo, encontrar en el record de

Schmiedel⁽²⁷⁾ resultados que indican que la corrección depende de la diferencia de diámetros entre el cilindro y la esfera. Los resultados indican que la corrección tiende a anularse cuando la distancia de la esfera al fondo del tubo es comparable con la distancia a las paredes. Análogamente el efecto debido a las paredes tiende a anularse cuando la esfera se acerca mucho al fondo sólido. Por lo tanto, es preferible⁽²⁵⁾ no aplicar correcciones debidas al fondo y a la superficie libre, cuando la esfera se encuentra por lo menos cuatro veces más lejos del fondo o la superficie que de la pared.

2.3 Artículo de Sano. Efecto de longitud finita y pared cilíndrica.

Introducción y justificación del artículo.

Sano⁽²⁾ considera el movimiento lento y translacional de una pequeña esfera a lo largo de un cilindro finito y rígido, el cual está lleno de un líquido incompresible y viscoso. Menciona las aplicaciones prácticas de este problema que, como se vio en la sección 1.1, son múltiples. Hace un análisis de la fuerza de resistencia que actúa sobre la esfera debido a la geometría asociada al confinamiento. Los análisis que se han hecho, comenta Sano, se han limitado a cilindros infinitamente largos o a dos paredes planas paralelas, por falta de un sistema coordenado natural que pueda ser utilizado para satisfacer la condición de frontera de no deslizamiento sobre las paredes. Consecuentemente, estima el efecto de esta frontera finita superponiendo la corrección conocida para un cilindro de longitud infinita y aquella para dos paredes planas paralelas. Sano asegura que no hubo forma de determinar las magnitudes relativas de los efectos introducidos en la fuerza debido a los extremos y a la pared

lateral. Así, intenta dar información cuantitativa de los efectos de las paredes en el dominio fluido y, al mismo tiempo, mostrar un criterio para un cilindro "suficientemente largo" en el cual los efectos debido a los extremos sean despreciables en una cierta región del cilindro. Este tipo de cálculos, añade Sano, permiten diseñar un envase cilíndrico, en el cual, la fuerza de arrastre sea mínima a través de escoger el cociente óptimo de longitud y radio del cilindro. Afirma que este trabajo es un primer paso para tratar con este tipo de regiones acotadas usando diferentes tipos de sistemas coordenados, incluyendo otros mucho más complicados que utilicen métodos analíticos y numéricos.

Planteamiento del problema.

Sano hace un estudio teórico del movimiento de una pequeña esfera de radio A a lo largo del eje de un cilindro cuyo radio es B y altura $2L$. El cilindro contiene un fluido incompresible de viscosidad η . La superficie, el fondo y la pared se consideran fronteras rígidas.

Introduce el sistema de coordenadas cilíndricas (β, θ, z) con origen O fijo al centro del cilindro; el eje z a lo largo del eje del cilindro (como se muestra en la figura 1.2). Como la esfera se mueve a lo largo del eje del cilindro, su posición instantánea P se establece con la coordenada z_0 .

Se suponen las condiciones que permiten usar las ecuaciones de Stokes para encontrar el campo de velocidades \bar{u} y el de presión p , por lo que

$$\eta \Delta \bar{u} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad (2.3 \text{ a, b})$$

y las condiciones de frontera que satisface \bar{u} son:

a) Como el sistema de coordenadas está fijo al cilindro y la esfera es sólida, el campo de velocidades del fluido sobre la esfera debe tener la velocidad de ésta

$$\bar{u} = -v \hat{e}_z \quad \text{en } r = A. \quad (2.4 a)$$

b) Como las paredes de los extremos y lateral son rígidas, el campo de velocidades debe ser nulo sobre su superficie

$$\bar{u} = 0 \quad \text{en } \beta = B, \quad -L \leq z \leq L, \quad (2.4 b)$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{en } z = \pm L, \quad 0 \leq \beta \leq B, \quad (2.4 c)$$

donde \hat{e}_z es el vector en la dirección z , z_0 es la posición del centro de la esfera, y A es el radio de la esfera, y r satisface $r^2 = (z - z_0)^2 + \beta^2$.

Método utilizado.

Se busca la solución de las ecuaciones (2.3 a) y (2.3 b), con las condiciones de frontera (2.4 a)-(2.4 c), por el método de reflexiones. En éste⁽²⁸⁾, el campo de velocidades se expresa como la suma de una serie. Todos ellos satisfacen las ecuaciones de Stokes y cada uno satisface las condiciones a la frontera como sigue

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)} &= -v \hat{e}_z & \text{en } r = A, \\ \bar{u}^{(1)} &= -\bar{u}^{(0)} & \text{en } \beta = B, \quad -L \leq z \leq L, \\ & & \text{y en } z = \pm L, \quad 0 \leq \beta \leq B, \\ \bar{u}^{(2)} &= -\bar{u}^{(1)} & \text{en } r = A, \end{aligned}$$

$$\bar{u}^{(3)} = -\bar{u}^{(2)} \quad \text{en } \beta = B, \quad -L \leq z \leq L,$$

$$\text{y en } z = \pm L, \quad 0 \leq \beta \leq B,$$

etc.,

donde se aprecia que el campo de velocidades de orden cero satisface las condiciones a la frontera del fluido sólo en la esfera, si sumamos los campos de velocidades de orden cero y uno, el campo resultante satisface las condiciones de frontera del fluido sólo en las paredes del cilindro y no satisface las condiciones sobre la esfera. Sumando los campos de orden cero, uno y dos, el campo resultante satisface las condición sobre la esfera pero no satisface la correspondiente a las paredes. Sumando términos cada vez de mayor orden, las condiciones a la frontera sobre la superficie de la esfera y sobre las paredes del cilindro se satisfacen alternativamente. Se propone que el campo de velocidades que satisface (2.3 a y b) y las condiciones de frontera (2.4 a-c), sea de la forma

$$\bar{u} = \bar{u}^{(0)} + \bar{u}^{(1)} + \bar{u}^{(2)} + \bar{u}^{(3)} + \dots$$

y el campo de presiones correspondiente dado por

$$p = p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + \dots$$

Si \bar{F} es la fuerza de arrastre que actúa sobre la esfera, ésta se obtiene de forma análoga

$$\bar{F} = \bar{F}^{(0)} + \bar{F}^{(1)} + \bar{F}^{(2)} + \bar{F}^{(3)} + \dots$$

Es claro que esto se puede proponer gracias a la linealidad de las ecuaciones (2.3 a)-(2.4 c). Además, para que dichos campos tengan sentido físico, las series deben converger, por lo que es

natural proponer que la serie se desarrolle en términos de potencias de algún parámetro adimensional que caracterice el problema. Se selecciona a dicho parámetro como el cociente de los radios de la esfera y el cilindro ($r=A/B$). Desafortunadamente para este desarrollo se conocen pocos términos y la convergencia no se ha probado.

Resultados.

El primer término de la serie del campo de velocidades $\vec{u}^{(0)}$, es el campo de velocidades para una esfera moviéndose con velocidad constante en un fluido infinito⁽¹⁾

$$\vec{u}^{(0)} = \frac{3Av}{4} \left[\frac{\hat{e}_z}{r} + (z - z_0) \frac{\hat{r}}{r^3} \right],$$

la presión correspondiente es

$$p^{(0)} = \frac{3Av}{2} \frac{(z - z_0)}{r^3},$$

y la fuerza de arrastre que actúa sobre la esfera es

$$\vec{F}^{(0)} = - \hat{e}_z \frac{6\pi\eta Av}{2}.$$

Estos resultados corresponden al primer término de la serie y corresponden a la potencia cero de r .

El siguiente término de la serie del campo de velocidades $\vec{u}^{(1)}$, se obtiene encontrando la solución general de las ecuaciones (2.3 a y b) con simetría azimutal en coordenadas cilíndricas, ya que las condiciones a la frontera que debe satisfacer $\vec{u}^{(1)}$ están sobre las paredes del cilindro.

Dicha solución establece que el campo de velocidades $\bar{u}^{(1)}$, se expresa como una serie infinita de Fourier-Bessel-Dini⁽¹²⁾. Un conjunto infinito de coeficientes que multiplican a las funciones de la serie, se deben determinar a través de las condiciones a la frontera

$$\bar{u}^{(0)} + \bar{u}^{(1)} = 0 \text{ en } \rho = B, |z| \leq L, \text{ y } z = \pm L, 0 \leq \rho \leq B.$$

Se evalúa a $\bar{u}^{(0)}$ en la frontera cilíndrica, y al resultado se le expande en una serie infinita de Fourier-Bessel-Dini⁽²⁾. La serie que expresa a $\bar{u}^{(0)}$ se evalúa en la frontera cilíndrica, y se le suma a la anterior, igualando esta suma a cero para satisfacer la condición a la frontera. Debido a la ortogonalidad de las funciones de la serie, se encuentran finalmente los coeficientes buscados en términos de la serie correspondiente a $\bar{u}^{(0)}$ evaluado en la frontera.

A través de la ley generalizada de Faxén⁽²⁴⁾ se encuentra la fuerza de resistencia que experimenta la esfera, correcta a primer orden en A/B , quedando

$$F/6\pi\eta Av = 1 + k(L, z_0)\gamma + O(\gamma^2), \quad (2.5)$$

donde $\gamma = A/B$, y $k(L, z_0)$ es una función que queda descrita en las figuras 2.1 y 2.2.

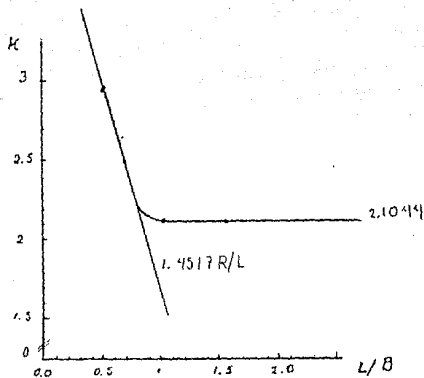


Figura 2.1 Efecto de la pared, sobre la esfera en el centro de un cilindro rígido. La fuerza de arrastre sobre la esfera es $6\pi\eta Av(1+(A/B)k)$. El valor 2,1044 es el coeficiente de efecto de pared para un cilindro infinito, y el valor de 1,4517 es aquel para dos paredes planas paralelas⁽²⁾.

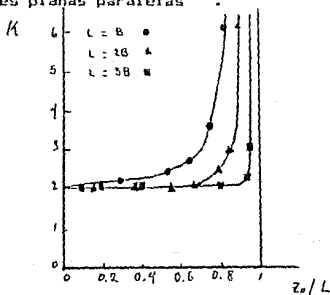


Figura 2.2 Dependencia de k en la posición de la esfera z_0 . La fuerza de arrastre es $6\pi\eta Av(1+(A/B)k)$.

2.4 Artículo de Brenner. Efecto de pared cilíndrica angosta.

Introducción y justificación del artículo.

Bungay y Brenner⁽³⁾ comentan una de las aplicaciones principales de su trabajo, el objetivo y el método que utilizan para alcanzarlo.

Modelar el flujo sanguíneo a través de capilares individuales ha sido el objeto de numerosos estudios teóricos^(20,30). Estos presumen que el plasma sanguíneo presenta propiedades newtonianas incompresibles, y que una capa lubricante de plasma rodea a los eritrocitos, manteniendo a las células del contacto directo con las paredes que contienen al flujo. Si esta premisa es válida, el espesor de la película de plasma entre un glóbulo rojo y la pared del capilar será típicamente pequeño en comparación con las dimensiones radiales características de tanto el capilar como del glóbulo rojo. Estas afirmaciones están basadas en los trabajos de Fitz-Gerald, Hochmut, Marple y Sutera^(31,32). Consecuentemente se han utilizado argumentos de la teoría de lubricación para volver tratables a las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen al flujo sanguíneo. Soluciones de las ecuaciones simplificadas resultan semejantes a expansiones asintóticas en términos de parámetros asociados al espacio libre que hay entre el glóbulo rojo y la pared capilar. Como estas ecuaciones se simplifican de una forma no rigurosa, el análisis de la teoría de lubricación no puede producir correctamente más que el término dominante de la expansión asintótica.

En su estudio, señalan los autores, la solución asintótica de las ecuaciones que describen al flujo (ecuaciones de Navier-Stokes) están colocadas sobre una base matemática firme. Se

desarrolla un procedimiento de desarrollo sistemática, que se realiza sobre conceptos unificados y desde una teoría singular de perturbación.

El modelo que se utiliza consiste en la esfera rígida que se mueve en el seno de un fluido newtoniano a lo largo de un cilindro rígido infinito, siendo el diámetro de la esfera comparable con el diámetro de la sección transversal del cilindro. Las densidades del fluido y de la esfera pueden ser o no similares.

Formulación del problema.

Los autores estudian un problema más general que el que se estudia en este trabajo, por lo que los resultados a los que llegan son reducibles al caso de interés. Considerar un cilindro de radio B y longitud infinita lleno con un fluido newtoniano de viscosidad η y densidad ρ . El flujo es laminar y estacionario y tiene una velocidad promedio V_m , mientras en el interior del cilindro hay una esfera de radio A cuyo centro se encuentra a una distancia b del eje del cilindro. Esta se mueve con velocidad v (relativa a las paredes del cilindro) a lo largo de una recta paralela al eje.

El sistema de coordenadas que se elige es el cilíndrico (β, θ, z) . Este se encuentra fijo al cilindro, pero su origen O , se encuentra en el centro de la esfera para un momento dado (fig 2.1).

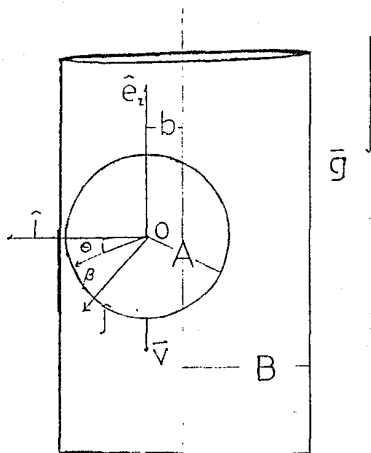


Figura 2.1 Sistema de coordenadas para describir el movimiento de una esfera en un cilindro infinito cuyos radios son semejantes.

Se supone que el número de Reynolds es suficientemente pequeño, comparado con la unidad, como para despreciar el término inercial en las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo que \bar{u} y p satisfacen

$$\eta \Delta \bar{u} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0.$$

y las condiciones de frontera

$$\bar{u} = -v \hat{e}_z, \quad \text{en } r = A, \quad (2.6 a)$$

donde $r^2 = \rho^2 + z^2$ y \vec{r}_0 es un vector que se origina en el centro de la esfera.

$$\bar{u} = 0 \quad \text{en } \beta = A, \quad -\infty \leq z \leq \infty, \quad (2.6 b)$$

$$\bar{u} = 2 \hat{e}_k Vm(1 - (\beta/B)^2) \text{ en } z = \pm \omega. \quad (2.6 c)$$

Método utilizado.

Para resolver el problema se utiliza un método perturbativo, basado en que $A/B \cong 1$. Así se define $\epsilon = (B-A)/A$, que se utiliza como el parámetro de perturbación.

El primer paso es adimensionalizar todas las variables que están involucradas en el problema, y llevar las ecuaciones y las condiciones a la frontera a expresiones adimensionales.

En el segundo paso se define una nueva variable en términos del parámetro ϵ y las coordenadas. A través de ésta se redefinen las coordenadas, siendo las nuevas el producto de las anteriores por una potencia de ϵ .

Al sustituir estas variables en las ecuaciones adimensionales de Stokes y en las condiciones a la frontera, el parámetro ϵ debe ser eliminado de las expresiones. Por lo que los campos de velocidad y presión también se deben reducir para lograrlo. De esta forma se pasa a las ecuaciones y variables de ser adimensionales a ser reducidas.

En el tercer paso se propone que los campos se puedan expresar como una serie de potencias en x , después se sustituyen en las ecuaciones de Stokes y se igualan los términos que tienen el mismo orden en x . Se produce, así, un conjunto ordenado en potencias de x de ecuaciones diferenciales.

Resultados.

En el cuarto paso se resuelven las ecuaciones hasta segundo orden, encontrando el campo de velocidades, y se determina la fuerza que actúa sobre la esfera.

El resultado al que llega es
$$F = \frac{9\pi^2}{2\sqrt{2}} \eta A v_e^{-5/2}. \quad (2.7)$$

2.5 Forma en que se vincula la fuerza de arrastre con la velocidad terminal.

A continuación se presenta la forma en que está relacionada la fuerza de arrastre y la velocidad terminal.

El movimiento unidimensional (a lo largo del eje z) de una esfera que cae en un fluido queda descrito por la ecuación

$$m \dot{z}' = m g - m' g - F,$$

donde m es la masa de la esfera, m' la masa de fluido desplazado por la esfera, F es la fuerza de arrastre (también conocida como la fuerza hidrodinámica), g es la aceleración de la gravedad y \dot{z}' es la aceleración de la esfera.

Del resultado de Stokes (ver ecuación 2.2) $v_e = (m-m')g/6\eta\eta A$.

que sirve para adimensionalizar la velocidad (\dot{z}) de la esfera.

Si $F = c\dot{z}$, donde c depende de los parámetros geométricos de confinamiento: $c = c(\eta, A, B, D)$. La ecuación de movimiento queda

$$m \ddot{z} = (m-m')g - c\dot{z}.$$

Si la esfera alcanza su velocidad terminal ($\dot{z}=v$), entonces $\ddot{z}=0$, despejando v de la ecuación: $v = (m-m')g/c$. Si denominamos $D = A/L$ y $r = A/B$ y se propone que c satisfaga: $c = 6\pi\eta A f^{-1}(r, D)$ se obtiene

$$F = 6\pi\eta A f^{-1}(r, D) v, \quad (2.8)$$

se escoge a c de esta forma, ya que si $D = 0$ y $r = 0$ entonces $f^{-1}(r, D)$ debe ser igual a uno para recuperar la ley de Stokes, y sustituyendo en la expresión para v se obtiene

$$v/v_g = f(r, D). \quad (2.9)$$

2.6 Conclusiones Teóricas.

La teoría elaborada por Sano concluye que si $A/B \ll 1$ y $z_0/L < 0.5$ para $L > 2B$, la ecuación 2.5 queda:

$$F = 6\pi\eta A v (1 + 2.1A/B), \quad (2.10)$$

debido a que $k(L, z_0) \approx 2.1$, si A, B, z_0 y L satisfacen las restricciones anteriores (ver gráficas 2.1 y 2.2).

Si $A/B \cong 1$, la teoría elaborada por Brenner concluye, de

acuerdo con la ecuación (2.7), que

$$F = \frac{9\pi^2}{272} \eta A v \left(\frac{A}{B-A} \right)^{5/2} \quad (2.11)$$

En la sección 2.5 se demostró que la forma en que la fuerza hidrodinámica depende de los parámetros asociados al confinamiento es:

$$F = 6\pi\eta A f^{-1}(r, D) v. \quad (2.8)$$

Si se estuviera estudiando la caída de un elipsoide, la función f debería depender, de los ejes; o bien, si se estudiase la caída de la esfera en un cilindro muy corto, la función f debería depender también de la distancia de la esfera al fondo. Así, en la aproximación que utilizan Sano y Brenner, la función f sólo depende de r (ecuaciones (2.10) y (2.11)), aunque dependen de distinta forma debido a la diferencia en sus aproximaciones. La función f sin embargo, debería ser llamada de diferente modo en cada caso (g o h), pero para recordar que dicha función es la velocidad terminal de la esfera (ecuación (2.9)) en distintas aproximaciones no se le cambiará el nombre. Lo cual sólo indica, que la velocidad terminal de la esfera va a depender de la geometría asociada al confinamiento, y que una vez que se obtenga experimental o teóricamente la dependencia de la velocidad terminal en función de dichos parámetros geométricos, se tendrá la dependencia de la fuerza hidrodinámica.

En el capítulo tres se muestran valores experimentales de la velocidad terminal que se obtuvieron para diferentes valores de r y D . En esta sección se muestran las velocidades terminales que predicen Sano y Brenner como función de r . Aun cuando en su estudio no consideran a D , se escribirá a f en función de r y D como recordatorio de que el estudio experimental que se desea

hacer, busca encontrar la dependencia de f en estas dos variables.

Iguando la ecuación (2.8) con (2.10)

$$6\pi\eta A f^{-1}(r, D) v = 6\pi\eta A v (1 + 2.1r),$$

por lo que

$$f(r, D) = 1 - 2.1r + O(r^2). \quad (2.12)$$

Si en la ecuación (2.9) se renombra $v = v/v_0$, entonces

$$v' = f(r, D). \quad (2.13)$$

De la misma forma, igualando la ecuación (2.8) con (2.11)

$$6\pi\eta A v f^{-1}(r, D) = \frac{9\pi^2}{2\gamma^2} \eta A v \left(\frac{A}{B - A} \right)^{5/2},$$

de donde

$$f(r, D) = 0.6(1/r - 1)^{5/2}. \quad (2.14)$$

Se han realizado estudios experimentales para confirmar estas teorías. La expresión (2.12) a la que llega Sano fue comprobada por A. Ambari, B. Gauthier-Manuel y E. Guyon⁽²²⁾. Los resultados experimentales difieren de los teóricos en menos del 1%. Es importante hacer notar que en el experimento de los autores antes mencionados, la esfera se mantenía fija en una cierta posición dentro de un cilindro muy largo lleno de fluido, mientras dicho cilindro se movía a velocidad constante a lo largo de su eje de simetría. La esfera se suspendía en la posición deseada mediante campos magnéticos.

Christopherson & Dawson⁽⁹⁴⁾ realizaron experimentos de caída de esferas en cilindros en el régimen de lubricación. El resultado teórico obtenido por Bungay y Brenner (ecuación (2.7)) para la velocidad con la que la esfera desciende es muy parecido a aquel encontrado por ellos.

CAPITULO 3

Diseño y construcción del experimento.

3.1 Introducción.

En este capítulo se presenta el diseño y construcción de un dispositivo experimental de acuerdo al problema que fue planteado en la sección 1.8 inciso a. Finalmente, se muestran los resultados que se obtuvieron y se hace un análisis de éstos.

3.2 Diseño y construcción.

Dado el planteamiento teórico del problema lo que se requiere es observar el movimiento de caída de una esfera, sin rotar, a lo largo de los ejes de distintos cilindros llenos de un fluido tal que, cuando la esfera se mueva en su seno, los parámetros que describen la caída satisfagan las hipótesis que conducen a las ecuaciones de Stokes, a saber: fluido incompresible, número de Reynolds mucho menor que uno y velocidad de caída constante.

El líquido que se eligió fue glicerina, debido a su alta viscosidad, transparencia y bajo costo. La viscosidad de la glicerina garantiza que cuando una esfera caiga en su seno, el número de Reynolds R , sea mucho menor que uno, además, permite que la esfera al caer alcance su velocidad terminal.

Se hicieron intentos con agua, pero en la caída de una esfera R resultó ser grande (200), y la esfera estuvo lejos de alcanzar su velocidad terminal, lo que provoca que el campo de velocidades del fluido dependa del tiempo. Por ello, utilizar

glicerina permite al cilindro que la contiene tener una longitud que es posible obtener en el laboratorio. La transparencia permite filmar la caída para su estudio.

La glicerina presenta, sin embargo, una gran desventaja, se hidrata fácilmente, lo que hace que varíe mucho su viscosidad⁽²⁵⁾, por lo que al trabajar con ella se debe manejar con cuidado. Los cilindros que durante el experimento la contenían, por esta razón, siempre estaban sellados con plástico y papel de aluminio. A través del sello se perforó un hueco por donde debía soltarse la esfera. El hueco se mantenía tapado con un parche de plástico que se quitaba sólo cuando se realizaba el experimento.

Se consiguieron siete cilindros transparentes de diferentes radios y cada uno se llenó con glicerina a 41cm de altura (2L figura 3.1). Dos de ellos tienen base y los otros se sujetaron a un soporte universal con pinzas.

Para asegurar que no exista variación de la viscosidad del fluido, es de gran importancia mantener constante su temperatura. Eso se logró colocando el cilindro lleno de glicerina en un baño térmico, esto es, dentro de una caja (transparente) que contiene agua a una temperatura constante y uniforme, que se mantiene así por medio de un control de temperatura previamente calibrado. El volumen del baño térmico era 25 veces el volumen del cilindro más grande.

Los cilindros, sujetos por pinzas, antes de cada experimento se alinearon cuidadosamente con la vertical. Se verificó que el par que tenía base estuviera alineado con la vertical. Todo esto dentro del baño térmico.

La esfera que se utilizó fue un balín de acero. Este, antes de soltarse, se limpió escrupulosamente con acetona, de tal forma que la condición a la frontera, sobre la superficie del balín, en cada caída fuera la misma. Numerosas medidas se realizaron con verniere para verificar la esfericidad. La esfera que se seleccionó se encontró que era esférica hasta el orden de error del verniere (± 0.0025 cm).

Después de intentar varias formas de soltar al balín, como era necesario soltarlo desde el interior del fluido, se optó por pegarle un hilo muy fino a la esfera con pegamento. El punto de pegado se hizo procurando que se alterara lo menos posible la forma de la esfera. El tipo de hilo que se utilizó, se consigue del interior de la sexta cuerda de la guitarra, y es tan fino que su peso es menor a 0.00005 gramos y su diámetro es de tres micras aproximadamente, el material del que está hecho es nylon.

Tapando parcialmente al baño térmico se colocó una superficie plana de vidrio sobre la cual se puso un soporte universal (fig.3.1). El cilindro que se encontraba dentro del baño térmico, no estaba debajo de la superficie. Una polea se fijó sobre un eje, y dicho eje se sujetó al soporte universal mediante una nuez. El eje tenía la suficiente longitud para poner a la polea justo arriba del cilindro.

Una vez que se pegó el hilo a la esfera, para soltarla en el seno del líquido desde cierta distancia a la superficie libre, se colocó arriba del cilindro la polea fija, y sobre ella se puso el hilo de manera tal, que la esfera quedaba suspendida justo arriba del cilindro y el otro extremo del hilo se detuvo con la mano. Al subir la mano (se da hilo), el hilo patina sobre la polea debido al peso de la esfera y ésta baja. Al bajar la mano se

jala al hilo provocando que la esfera suba. Así se puede controlar la posición vertical de la esfera y se lleva a la posición deseada dando el hilo necesario. Una vez ahí, el extremo del hilo que se sujeta con la mano se fija en algún lugar con (comúnmente al baño térmico) sin alterar la posición de la esfera. Para saber en que punto había que detener a la esfera, se marcaron dos puntos con plumón, uno sobre la superficie del cilindro y el otro sobre la superficie del baño térmico a la misma distancia vertical de la superficie libre. La posición de la esfera debía ser aquella en la cual se alineaba la parte superior de ella con las marcas del cilindro y del baño (fig. 3.1). Para soltar a la esfera se quemaba el hilo.

Este método permite además, centrar a la esfera fácilmente, para que, al soltarla se mueva a lo largo del eje del cilindro. Esto sucede así, ya que si la esfera está centrada y el cilindro debidamente alineado con la vertical, al quemar el hilo, la esfera caerá a lo largo del eje del cilindro. Se coloca en la boca del cilindro una mica transparente con un círculo (del radio del cilindro) y su centro pintados; el círculo coincidiendo con la boca del cilindro, entonces, cuando se baja a la esfera, que se halla suspendida sobre el cilindro, se verifica que ésta y el centro del círculo coincidan.

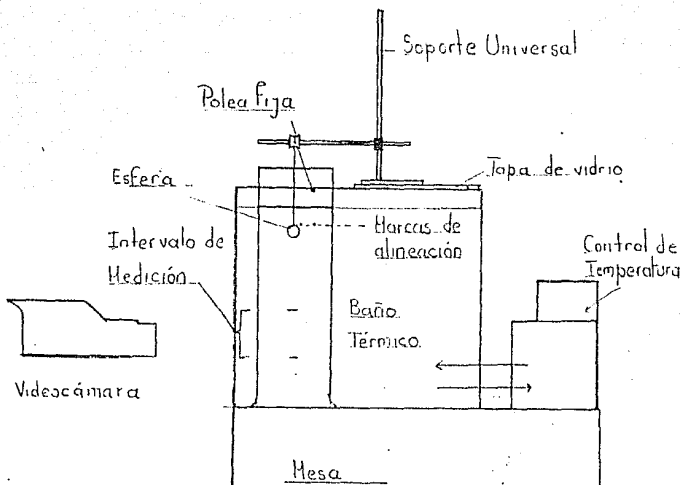


Figura 3.1 Arreglo experimental.

Se filmó cada caída, con una videocámara (Sony-CCD-v90-k) en un intervalo de 10 cm a partir de la mitad de la altura de la glicerina, en adelante a dicho intervalo se le denomina intervalo de medición (ver fig. 3.1). El punto más alto de dicho intervalo coincide con el origen para el sistema de coordenadas propuesto por Sano (figura 1.2), así que a este punto se le denomina origen. De acuerdo a los resultados de Sano (sección 2.5), si un cilindro satisface que $L > 2B$ y el cociente de la posición (con respecto al origen) que guarda la esfera a L es menor que 0.6, los efectos debidos, al fondo son despreciables. El experimento se realizó considerando este criterio para despreciar los efectos debido al fondo en el intervalo de medición. La máxima distancia que alcanza la esfera del origen es la longitud del

intervalo, a saber 10cm. Debido a que la mitad de la altura de la glicerina (L) es 20.5 cm, entonces $10\text{cm}/20.5\text{cm} = 0.48$, y como 0.48 es menor que 0.6, de acuerdo con Sano los efectos debido al fondo son despreciables en el intervalo de medición. Esta es la razón por la cual el intervalo de medición, en el experimento, se tomó de 10cm.

Analizando las tomas que se hicieron de la caída, se vió que la esfera se movía 3 mm/s más rápido al inicio del intervalo que en la mitad, y 1 mm/s mas lento al final que en la mitad, esto en la mayoría de las tomas.

El método que se utiliza para determinar la velocidad de la esfera, consiste en filmar su caída. Como se sabe, una película es un grupo de retratos (cuadros) de una secuencia que al pasar rápidamente dan la sensación de movimiento. La velocidad con la que la videocámara cambia de cuadro es de 1/30 de segundo, es decir, si en un cuadro dado la esfera tiene una cierta posición, en el cuadro que sigue tendrá una posición correspondiente a 1/30s después. La toma de la caída se puede pasar en la televisión cuadro por cuadro, gracias a las funciones con las que dispone la videocámara. Midiendo la distancia recorrida por la esfera entre dos cuadros, como se conoce el tiempo entre cada cuadro se determina fácilmente la velocidad. Para determinar la distancia recorrida por la esfera, se pega un papel a la pantalla de la televisión, procurando que el borde de éste pase por el centro de la esfera en cada cuadro, y se marca sobre el papel un punto determinado de la esfera cada cuadro (comunmente el extremo inferior de la esfera). Se mide con regla la distancia entre marcas. Esto permite determinar si la esfera ha llegado a su velocidad terminal. Además, permite hacer una estadística de la distancia recorrida por la esfera en 1/30 de segundo, y por lo

tanto determinar la velocidad promedio de la esfera en el intervalo de filmación. En ocasiones se consideraba la distancia recorrida por la esfera en tres cuadros, por lo que el tiempo para calcular la velocidad era de $2/30$ de segundo. El número de cuadros que se obtienen en una típica caída es de 40.

Para estudiar el efecto de la distancia desde la cual se suelta la esfera a la superficie libre en la fuerza de arrastre, se soltó la esfera de distintas distancias a dicha superficie. De cada posición inicial, se filmó la caída de la esfera cinco veces y se analizó cada toma, ésto para obtener una mejor estimación de la velocidad y verificar la reproducibilidad del experimento. En los resultados de la velocidad que se obtuvieron, para cada posición, la desviación máxima que se encontró fue del 8%.

Las velocidades que se muestran, son el resultado de dos promedios; el primero es el promedio de la velocidad en el intervalo de filmación, y el segundo es el promedio de las cinco prácticas realizadas.

La forma en que se dispuso el sistema se muestra en la figura 3.1.

3.3 Datos y Análisis.

En esta sección se presentan las características del material que se utilizó, los experimentos que se realizaron, los resultados que se obtuvieron y un análisis de éstos.

Características de la esfera.

masa = 1 ± 0.00005 gr,

diámetro = 0.64 ± 0.005 cm.

Diámetros de los cilindros.

Número de Cilindro	Diámetro (± 0.005 cm)
1	0.7,
2	1,
3	1.62,
4	3.03,
5	3.69,
6	6,
7	7.8.

La temperatura de la glicerina durante el experimento fue de 20 ± 0.1 °C. La viscosidad de la glicerina que se usó a esta temperatura fue de 1490 ± 100 cps.

La velocidad de Stokes de la esfera es

$$v_s = (m - m')g / 6\pi\eta R = 9.3 \pm 1 \text{ cm/s.}$$

Los experimentos que se exponen en éste trabajo se dividen en dos grupos. En el primero, se suelta al balón en todos los cilindros, desde dos posiciones distintas (a 3.5 y 21.5 diámetros de la superficie libre al centro de la esfera). En el segundo, se suelta al balón desde ocho distintas posiciones (separadas cada una por tres diámetros y la primera coincide con la superficie libre) en los cilindros 3 y 4.

La posición de la esfera no está, desde luego, perfectamente definida sobre la pantalla de televisión. Hay aproximadamente 0.3 mm de incertidumbre, lo que en dos cuadros da una incertidumbre de 0.6 mm. Como la esfera en pantalla medía 2.15 cm

en promedio, y el diámetro real es de 0.64 cm, entonces la incertidumbre real de la posición es

$$(0.6 \text{ mm} \times 0.64 \text{ cm}) / 2.2 \text{ cm} = 0.017 \text{ cm},$$

y la incertidumbre en la velocidad es por lo tanto de

$$0.017 \text{ cm} / (1/30) \text{ s} = 0.52 \text{ cm/s}.$$

Si dividimos este valor por v_p , el error adimensional para cada velocidad medida es de 0.52. Pero, para cada toma de calda de esfera, se tienen del orden de 21 cuadros en los cuales la esfera va a velocidad constante, por lo que al obtener la velocidad como resultado de promediar estos cuadros, se debe dividir la incertidumbre entre 20, dando como resultado 0.026.

Los valores que a continuación se presentan para la velocidad han sido divididos por la velocidad de Stokes ($v^* = v/v_p$).

En las siguientes tablas, se presenta la velocidad terminal promedio (en el intervalo de filmación) adimensional (v^*) de la esfera al soltarla, en cada caso, desde 3.5 o 21.5 diámetros (2.24 y 13.76 cm respectivamente) de la superficie libre. El cociente para el cual se tabula es el cociente de los diámetros de la esfera y del cilindro (r).

Tabla 1.

$v' \pm 0.0056$	r	$l = 2.2 \pm 0.25 \text{ cm}$
0	0.91 ± 0.0065	
0.04	0.64 ± 0.006	
0.25	0.39 ± 0.0055	
0.42	0.21 ± 0.0024	
0.44	0.17 ± 0.0018	
0.53	0.1 ± 0.001	
0.57	0.08 ± 0.001	

Tabla 2.

$v' \pm 0.0056$	r	$l = 13.76 \pm 0.25 \text{ cm}$
0	0.91 ± 0.0065	
0.04	0.64 ± 0.006	
0.18	0.39 ± 0.0055	
0.26	0.21 ± 0.0024	
0.29	0.17 ± 0.0018	
0.44	0.1 ± 0.001	
0.48	0.08 ± 0.001	

En las siguientes tablas se presenta la velocidad terminal promedio adimensional de la esfera, al soltarse desde ocho posiciones diferentes en un mismo cilindro; se hace para dos cilindros. El cociente para el cual se grafica es el parámetro adimensional $D = A/l$, donde l es la distancia que separa al centro de la esfera de la superficie libre.

Tabla 3.

$v' \pm 0.0056$	D	$r = 0.39 \pm 0.0055$
0.258	1 ± 0.03	
0.25	0.14 ± 0.003	
0.23	0.076 ± 0.0015	
0.22	0.05 ± 0.001	
0.21	0.04 ± 0.0008	
0.2	0.03 ± 0.001	
0.19	0.027 ± 0.001	
0.18	0.02 ± 0.001	

Tabla 4.

$v' \pm 0.0056$	D		$r = 0.21 \pm 0.0024$
0.47	1	± 0.03	
0.42	0.14	± 0.003	
0.37	0.076	± 0.0015	
0.33	0.05	± 0.001	
0.3	0.04	± 0.0008	
0.29	0.03	± 0.001	
0.27	0.027	± 0.001	
0.26	0.02	± 0.001	

Dichas tablas se grafican en las figuras 3.2 y 3.3. En la figura 3.2 se grafica, además, la dependencia teórica de v vs r de acuerdo con los resultados teóricos (2.12) y (2.13) (se presentan en trazo continuo).

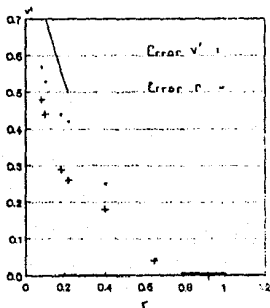


Figura 3.2 Gráfica de v' v.s. r para distintas l . Los puntos que se grafican en la parte de arriba en línea continua son los resultados teóricos de Sano, los de abajo en línea continua son los de Brenner y los demás son los de las tablas 1 y 2.

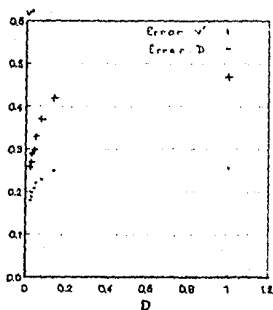


Figura 3.3 Gráfica de v' v.s. D para distintas r . Tablas 3 y 4.

Ajuste de datos.

En la gráfica de v' vs r , para $l = 3.5$ diámetros, los tres puntos con los valores de r más pequeños (0.08, 0.1, 0.17) aparentemente caen sobre una recta. Para $l = 21.5$ diámetros los tres puntos con los valores de r más pequeños también, aparentemente caen sobre otra recta. Por simple inspección se aprecia que estas dos rectas difieren en sus ordenadas al origen y tienen una pendiente parecida. El resultado teórico que obtuvo Sano como se aprecia en la figura 3.2, es una recta igualmente que difiere de las experimentales en su ordenada al origen y tiene una pendiente parecida.

Utilizando mínimos cuadrados se encontró que la recta que mejor ajusta los puntos correspondientes a la posición $l=3.5$

diámetros es

$$v' = -1.8 r + 0.62, \quad (3.1)$$

la desviación que se encuentra para la pendiente y ordenada al origen son 0.23 y 0.02 respectivamente.

Para los puntos correspondientes a la posición $z=21.5$ diámetros es

$$v' = -2.5 r + 0.69, \quad (3.2)$$

y la desviación que se encuentra para la pendiente y ordenada al origen son 0.35 y 0.04 respectivamente.

3.4 Conclusiones experimentales.

El diseño experimental que se hizo es adecuado, en el sentido de que se cumplieron los requerimientos para poder comparar los resultados teóricos con los experimentales. La esfera al caer, lo hacía a lo largo del eje del cilindro sin rotar, y cuando se movía a lo largo del intervalo de medición, durante la segunda mitad del intervalo se movía a velocidad constante (sección 3.2). El hilo no se vió en las tomas.

Cuando una esfera se suelta del reposo en un medio infinito, las fuerzas que actúan sobre la esfera acaban por balancearse. Esto se debe a que la fuerza de fricción es proporcional a alguna potencia positiva de la velocidad. Si las fuerzas no se encuentran balanceadas la esfera se mueve aceleradamente, lo que provoca que la velocidad de la esfera aumente y por lo tanto la fuerza de fricción también aumente.

La fuerza de fricción, al ir aumentando, acaba por igualar en magnitud a la fuerza que acelera a la esfera. Cuando esto sucede la esfera alcanza una velocidad terminal. Desde este marco es de esperar que si se grafica la velocidad instantánea de la esfera contra el tiempo, se obtendrá una curva creciente con concavidad negativa que parte de cero y conforme t crezca tienda asintóticamente a un valor constante, dicho valor es la velocidad terminal.

Por esto es notable que la velocidad de la esfera en el intervalo decrezca asintóticamente. Esto se puede deber al efecto que introduce el fondo del cilindro, sin embargo, el experimento fue diseñado para que dicho efecto fuera despreciable en el intervalo de medición (ver sección 3.2). Esto nos inclina a realizar experimentos con cilindros mas altos para entender este hecho.

La figura 3.2 muestra que los resultados experimentales para v' , conforme se acercan a la región de $r = A/B \cong 1$, tienden a cero, con concavidad positiva. La velocidad de la esfera es practicamente nula para $r \geq 0.9$ y por lo tanto, la velocidad no depende de l en esta región. Por esto, debe haber una r crítica (r_{cr}) a partir de la cual la velocidad de la esfera empiece a depender sensiblemente de l . Preguntas que se podrian responder, entre otras, son: Se podrá dividir en dos ($r < r_{cr}$ y $r > r_{cr}$) la región en la cual la velocidad depende o no sensiblemente de l ?, y r_{cr} depende de l ?. Como se aprecia de los resultados experimentales (ver figura 3.2) esta r_{cr} debe ser menor que 0.64 y mayor que 0.39.

Cuando los resultados se acercan a la región $A/B \cong 0$, aparentemente tienen un comportamiento lineal. Las rectas que

mejor se ajustaron a los resultados con $r < 0.2$ son la (3.1), y (3.2). Las pendientes de dichas rectas son -1.8 ± 0.23 para $l = 3.5$ diámetros y -2.5 ± 0.35 para $l = 21.5$ diámetros. Las ordenadas al origen son 0.62 ± 0.02 para $l = 3.5$ diámetros y 0.69 ± 0.04 para $l = 21.5$ diámetros.

Retomando la ecuación (2.13)

$$v^* = v/v_{\infty} = f(r, D), \quad (2.13)$$

e igualando ésta con las ecuaciones (3.1) y (3.2), notando que $D = 0.14$ para $l = 3.5$ diámetros y $D = 0.02$ para $l = 21.5$ diámetros, queda

$$f(r, 0.14) = -1.8 r + 0.62 \quad (3.3)$$

$$f(r, 0.02) = -2.5 r + 0.69. \quad (3.4)$$

La región en la que son válidas estas expresiones es $0.08 < r < 0.17$, ya que dichas rectas se obtuvieron con mínimos cuadrados. No hay más resultados que ayuden a determinar para una D fija el comportamiento de f en la región $r < 0.08$. Esto es importante para ver si la función f continúa teniendo un comportamiento lineal en dicha región. Es notable que la pendiente de las rectas sea muy parecida dentro del error experimental y no suceda lo mismo para las ordenadas al origen.

En la figura 3.3 se aprecia la dependencia que tiene la velocidad terminal con D ($D=A/l$, para una r fija). Esta figura muestra que $f(r, D)$, para r constante, es creciente en D con concavidad negativa. Creciendo rápidamente para $D < 0.14$ y lentamente para $D > 0.14$. Lo que muestra que mientras se suelte a la esfera más cerca de la superficie libre, más grande es la

velocidad terminal (en el intervalo de medición).

Se adaptaron numéricamente las siguientes funciones a los resultados experimentales para interpolar a la variable v' en términos de r y D :

a) Para la tabla 1, se encontró la función (ver figura 3.4):

$$v' = -0.246463 \ln(r) - 0.018096.$$

b) Para la tabla 2, se encontró la función (ver figura 3.5):

$$v' = -0.198208 \ln(r) - 0.031621.$$

c) Para la tabla 3, se encontró la función (ver figura 3.6):

$$v' = 0.02047 \ln(D) + 0.273129.$$

d) para la tabla 4, se encontró la función (ver figura 3.7):

$$v' = 0.0575 \ln(D) + 0.494597.$$

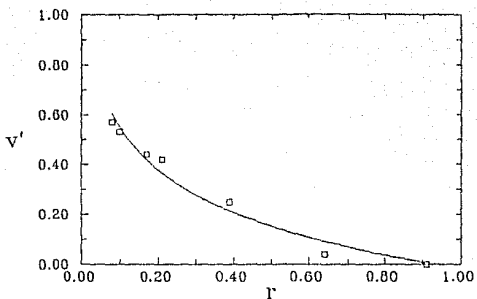


Figura 3.4 Gráfica de la función que se adaptó a los resultados numéricos de la tabla 1.

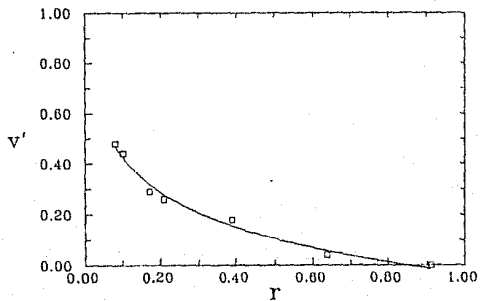


Figura 3.5 Gráfica de la función que se adaptó a los resultados numéricos de la tabla 2.

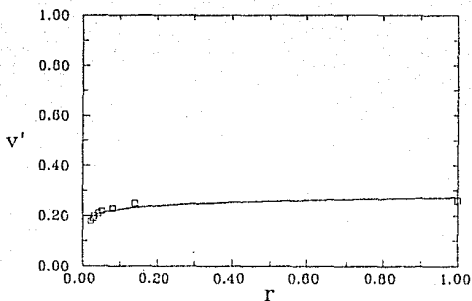


Figura 3.6 Gráfica de la función que se adaptó a los resultados numéricos de la tabla 3.

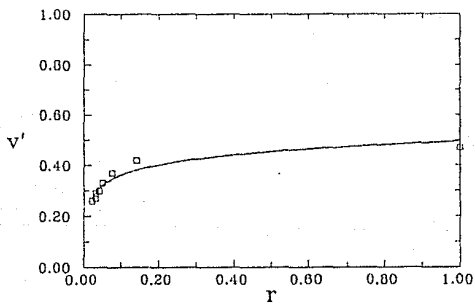


Figura 3.7 Gráfica de la función que se adaptó a los resultados numéricos de la tabla 4.

CAPITULO 4

Conclusiones.

4.1 Conclusiones.

Las conclusiones del presente trabajo se han separado en secciones debido a la diferencia de los puntos a tratar.

4.1 Diferencias cualitativas entre teoría y experimento.

Los estudios teóricos realizados por Sano⁽²⁾ y Brenner⁽²⁰⁾, consideran una esfera que se mueve a velocidad constante a lo largo de un cilindro. Consecuentemente se puede pensar en la fuerza de arrastre que obtienen, como aquella fuerza que hay que aplicar sobre la esfera para que ésta se mantenga a velocidad constante.

En el experimento, si bien la esfera tenía velocidad constante en la segunda mitad del intervalo de medición, ésta se soltó de una cierta posición. Por lo que la velocidad de la esfera estuvo cambiando antes de llegar a dicho lugar. A este hecho se atribuye que la fuerza de arrastre dependa de la posición desde la cual se suelta la esfera (f). Recuérdese que la fuerza que actúa sobre una esfera que se mueve con velocidad $\bar{u}(t)$ en un medio infinito⁽⁴⁾ para $R \ll 1$, tiene un término de "memoria". Es decir, la esfera "sabe" desde donde se soltó, lo que tiene como consecuencia que la velocidad adimensional v' ($f(r, D)$) de la esfera dependa de D ($D = A/l$).

4.2 Comparación de los resultados teóricos con los experimentales.

A pesar de las diferencias cualitativas que hay entre teoría y experimento, éste cumplió con las suposiciones que se usaron para desarrollar la teoría. Lo cual era necesario para poder compararlas. Las suposiciones que, entre otras, se cumplieron con: número de Reynolds muy pequeño, $\partial \bar{u} / \partial t = 0$ en la segunda mitad del intervalo de medición (de donde se obtuvieron los resultados). La distancia que tenía la esfera a la superficie libre y al fondo del cilindro, cuando se encontraba en el intervalo de medición, y el cociente del radio del cilindro entre la longitud del cilindro eran tales, que el efecto de la superficie libre y el fondo en la fuerza de arrastre eran despreciables. De esta forma se pueden comparar los resultados teóricos (2.12) y (2.14) con los resultados experimentales (3.3) y (3.4). Parte de la comparación es puramente cualitativa debido a la naturaleza de los resultados (ver sección 3.3).

El resultado teórico de Brenner predice que la función $f(r,D)$ (definida por la ecuación (2.13) satisface

$$f(r,D) = 0.6 \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^{5/2}, \quad (2.14)$$

como se indica en la sección 2.5. Esta solución es válida para $r \cong 1$, y es claro que solo está definida para valores de r menores que uno. En la región $r > 0.85$, esta función es prácticamente nula (v.g. $f(0.85,D) = 0.0078$). En forma general esta función es decreciente con concavidad positiva.

El experimento se realizó, para determinar aproximadamente a $f(r,D)$, en la región $0.08 \leq r \leq 0.91$. En ésta se aprecia una tendencia claramente decreciente con concavidad positiva (ver figura 3.2).

El resultado teórico de Brenner predice que $f(r, D)$ es prácticamente nulo para $r > 9.1$ (ver figura 3.2).

El resultado teórico de Sano predice que la función $f(r, D)$ satisface

$$f(r, D) = -2.1 r + 1 + O(r^2) , \quad (2.7)$$

como se indica en la sección 2.5. Este resultado es válido para $r \ll 1$.

En el experimento se encontró (ver sección 3.3) que

$$f(r, 0.14) = -1.8 r + 0.62, \quad (3.3)$$

$$f(r, 0.02) = -2.5 r + 0.69. \quad (3.4)$$

donde las pendientes para (3.3) y (3.4) tienen un error de ± 0.23 y 0.35 respectivamente, y las ordenadas al origen para (3.3) y (3.4) de ± 0.02 y 0.04 respectivamente. La región en la que se calcularon dichas rectas es $0.08 \leq r \leq 0.17$.

Los resultados experimentales son un par de rectas que tienen prácticamente la misma pendiente (dentro del error experimental) que el resultado teórico. Tienen sin embargo, diferente ordenada al origen.

El resultado experimental nos inclina a pensar que el término que multiplica a r en las ecuaciones (3.3) y (3.4) depende débilmente de D , y que la ordenada al origen en las ecuaciones (3.3) y (3.4) es una función de D y se le denomina

$g(D)$. Desafortunadamente no se cuenta con resultados experimentales para poder determinar la forma de esta función. De ésta se conoce, sin embargo, $g(0.14) = 0.62$ y $g(0.02) = 0.69$.

De la figura 3.3, se podría obtener la información de la forma funcional de $g(D)$, ya que esta gráfica tiene los resultados experimentales de $f(r,D)$ vs D . En la figura se muestran dos grupos de puntos experimentales correspondientes a dos valores de r (0.21 y 0.39), estos valores de r se encuentran fuera del intervalo $(0.08 \leq r \leq 0.17)$ para el cual se calcularon las rectas (3.3) y (3.4) por mínimos cuadrados de la figura 3.2. Sin embargo, se puede creer que la función $f(r,D)$ no cambia mucho de $r = 0.17$ a $r = 0.21$, intervalo que separa la gráfica de la figura 3.2 del intervalo donde fueron calculadas las rectas (3.2) y (3.4). Con lo que queda que la función $g(D)$ es creciente y tiene concavidad negativa, teniendo un crecimiento muy rápido en la región $0 < D < 0.14$ y lento para $0.14 < D < 1$, como se aprecia en la figura 3.3.

4.3 Teoría que se adapte mejor al experimento.

Como se ha visto, las teorías elaboradas por Sano y por Brenner distan de describir rasgos esenciales del comportamiento de una esfera que se suelta a lo largo del eje de un cilindro finito. Es por esto, que se necesita elaborar una teoría que incluya al término $\partial u / \partial t$ en las ecuaciones de Stokes, para determinar teóricamente la forma en que la fuerza de arrastre depende del parámetro D . Aún cuando se incluya dicho término, el número de Reynolds para el caso de estudio debe ser lo suficientemente pequeño como para despreciar el término no lineal en la ecuación de Navier-Stokes, ya que el número de Reynolds en el experimento es mucho menor que uno.

4.4 Perspectivas del trabajo experimental.

La línea que se ha de seguir experimentalmente es continuar encontrando valores de la velocidad terminal adimensional en función de los parámetros r y D , con los cuales se puede determinar $f(r,D)$ y con ésto, la fuerza de arrastre. Ver la sección 3.3.

Una de las partes cruciales para poder comparar el experimento que se hizo con la teoría, era que la velocidad de la esfera fuese constante en el intervalo de medición. Pero ésto se logró sólo en la segunda mitad del intervalo de medición (ver sección 3.2). Luego es necesario realizar este tipo de experimentos en cilindros mas largos, para disponer de un intervalo de medición mayor.

El método que se utilizó para determinar la velocidad de la esfera al caer (sección 3.2), tiene el defecto de que la pantalla de la televisión es curva, lo que provoca un aumento del error experimental. Esto se puede resolver si se tratan las películas con un digitalizador de imágenes. Con este sistema se podría medir directamente, a través de la computadora, la velocidad promedio de la esfera y su desviación. Ahorrándose la gran cantidad de trabajo manual y mejorando la medida.

BIBLIOGRAFIA

- 1 Landau, L. D. Mecánica de fluidos, Ed. Reverté S.A., (1986).
- 2 Sano O. J. Phys. Soc. Japan., Volo 56, No. 8, Aug. 1987, 2713.
- 3 Bungay & Brenner^a H. Int. J. Multiphase Flow, 1973, vol. 1, p.25-26.
- 4 Ruelle, D. Takens, F., Comm. Math. Phys. 20, 167.(1971).
- 5 J. L. Anderson y J. A. Quinn, Restrictive transport in small pores, a model for steric exclusion and hindered particle motion. Biophys. J. 15, 1080-240 (1977).
- 6 P. L. Paine y P. Scheire, Drag Coefficients for the movement of rigid spheres through liquid-filled cylindrical pores. Biophys. J. 15, 1087-1091 (1975).
- 7 H. Brenner y L. J. Gaydos, The constrained Brownian Movement of spherical particles in cylindrical pores of comparable radius, models of the diffusive and the convective transport of solute molecules in membranes and porous media. J. Colloid Interface Sci. 58, 312-356, (1977).
- 8 Peralta-Fabi, R. & Zwanzig, R. Hydrodynamic friction on a moving molecule, J. Chem. Phys. 70(1), 1 Jan. 1979.
- 9 Currie, I. G. Fundamental Mechanics of Fluids, Ed. McGraw Hill, (1974).
- 10 Chicharro, R. Efecto de la tensión superficial en dinámica de fluidos: El problema de la esfera, Tesis de licenciatura Facultad de Ciencias UNAM (1988).
- 11 Morales E. Revisión experimental del flujo de Poiseuille: Primera inestabilidad, Tesis de licenciatura Facultad de Ciencias UNAM.
- 12 Newton, I. Principia, Lib II. Prop. viii, cor. 2.
- 13 Stokes, Mathematical and Physical papers, vol. ii, p. 10 y vol. iii, p. 56. Cambridge University Press (1880).
- 14 Lamb, H. Hydrodynamics, §§ 337, 338, Cambridge University

- Press, 5th edition (1924).
- 15 Rayleigh, Phil. Mag., 1983, 36, 365.
 - 16 Oseen, Arkiv f. Mat., Astron Och Fysik, 1910, 6, 29.
 - 17 Goldstein. Proc. Roy. Soc., 1929, 123 A, 225.
 - 18 Newton, I. Principia, Lib. II, Prop. XXXIX and Scholium to Sectio vii.
 - 19 Munroe, Trans. Amer. Inst. of Eng., 1908, 17, 643.
 - 20 Lunnon, Proc. Roy. Soc., 1928, 118 A, 680.
 - 21 Lorentz, Abhandl. über theor. Physik (Teubner, Leipzig, 1907).
 - 22 Stok, Bull. Acad. Sci. Crocovie, 1911, 1 a, p. 18.
 - 23 Ladenburg, Ann Physik, 1907, 22, 287.
 - 24 Faxén, Disserin, Uppsala, 1921.
 - 25 Barr, A monograph of viscosity, Oxford University Press, p. 171, (1931).
 - 26 Ladenburg, Ann Physik, 1907, 23, 447.
 - 27 Schmiedel, Phys. Zeits., 1928, 29, 593.
 - 28 Happel J. & Brenner H. Low Reynolds Number Hydrodynamics, Nordhoff International Publishing Leyden (1973).
 - 29 Barnard, A.C., López, L. & Hellums, J. D. 1968, Basic theory of blood flow in capillaries. *Microvas. Res.* 1, 23 - 34.
 - 30 Chen, T. C. & Skalak, R. 1970, Stokes flow in a cylindrical tube containing a line of spheroidal particles. *Appl. Sci. Res. Soc.* 22, 403 - 441.
 - 31 Fitz - Gerald, J. M. 1969, Mechanics of red cell motion through very narrow capillaries, *Proc. Roy. Soc.* B174, 193 - 227.
 - 32 Hochmuth, R. M., Marple, P. N. & Suter, S. P. 1970, Capillarie blood flow 1. Erythrocyte deformation in glass capillaries. *Microvas. Res.* 2, 409 - 419.
 - 33 Ambari, A., Gauthier - Manuel, B. & Guyon, E. 1984, Wall effects on a sphere translating at a constant velocity. *J. Fluid Mech.*, Vol. 149, p. 235 - 253.
 - 34 Christopherson, D.G. & Dawson, D. 1959, An example of minimum

energy dissipation in viscous flow. Proc. Roy. Soc. A251, p. 550-564.

35 Bosart 1932., Industrial and Engineering Chemistry, vol. 29, p. 1044.