

00362

6  
2 y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MÉXICO

**DESPLAZAMIENTO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS  
HOMOGENEOS Y FRACTURADOS.**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA)**

PRESENTA

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

La Fis. Juana Cruz Hernández.

México, D.F., septiembre 1990.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# CONTENIDO

	Pág.
CAPITULO 1 INTRODUCCION .....	1
CAPITULO 2 GENERALIDADES .....	3
2.2 Experimento de Darcy. ....	4
2.3 Ecuaciones de Navier-Stokes. ....	5
2.4 Desplazamiento Inmiscible. ....	8
CAPITULO 3 DESPLAZAMIENTO DE FLUIDOS MISCIBLES EN MEDIOS POROSOS FRACTURADOS. ....	9
3.1 Formulación Matemática del Problema. ....	9
3.2 Trabajo Experimental. ....	18
CAPITULO 4 DESPLAZAMIENTO DE FLUIDOS INMISCI- BLES EN MEDIOS POROSOS HOMOGENEOS. ....	21
4.1 Teoría. ....	21
4.2 Trabajo Experimental. ....	28
CAPITULO 5 CONCLUSIONES .....	30
APENDICE A .....	31
APENDICE B .....	37
APENDICE C .....	52
SIMBOLOGIA .....	63
REFERENCIAS .....	

## CAPITULO 1 INTRODUCCION

La física de flujo de fluidos a través de medios porosos se ha hecho indispensable en muchas áreas de la ciencia aplicada e ingeniería, aparte del interés que tiene desde el punto de vista puramente científico. Campos tan diversos como la mecánica de suelos, hidrogeología, ingeniería petrolera, ingeniería de cerámicas han contribuido a enriquecer la literatura sobre la materia. Los estudios realizados abarcan desde la física de los procesos involucrados hasta la implementación de simuladores computacionales, pasando por el posible carácter fractal de la dispersión<sup>(1,2)</sup>.

La información del flujo de fluidos a través de medios porosos está dispersa en libros y revistas, que generalmente está referida a la aplicación específica. Entre los libros que contienen rasgos generales del tema sobresale el escrito por Muskat<sup>(3)</sup> que a pesar de su antigüedad (1937) contiene discusiones interesantes. Entre los libros más completos están Bear<sup>(4)</sup>, el editado por De Wiest<sup>(5)</sup> y más recientemente el de Scheidegger<sup>(6)</sup>, que contiene valiosas referencias.

Uno de los primeros científicos interesados en el flujo de fluidos a través de medios porosos fue Darcy<sup>(7)</sup> quien estudió el flujo de agua en filtros de arena y dedujo empíricamente la ley que lleva su nombre y que relaciona el gasto de agua (volumen por unidad de tiempo) a la salida del filtro y la diferencia de

presiones que hay entre los extremos de él.

Coats y Smith<sup>(8)</sup> propusieron que el espacio poroso de un medio homogéneo (sin fracturas) está constituido por zonas de conducción de fluidos llamados canales y zonas de estancamiento llamadas trampas. Aplicando estas ideas a la ecuación de convección-dispersión describieron el desplazamiento de fluidos miscibles en medios porosos homogéneos.

El flujo de fluidos en medios homogéneos ha sido objeto de numerosos estudios<sup>(7-12)</sup>. Sin embargo, no es así en el caso de medios porosos que presentan fracturas. El capítulo 3 de este trabajo está dedicado a la aplicación de la teoría convectiva dispersiva al desplazamiento miscible en medios porosos fracturados. Aunque los resultados son satisfactorios al utilizar un bloque de forma cilíndrica para probar experimentalmente la validez del modelo propuesto, se hace necesario realizar experimentos con otras geometrías.

Por otra parte, para el proceso de desplazamiento inmisible a través de un medio poroso homogéneo, la literatura existente sobre el tema indica que la teoría más utilizada para su descripción es la debida de Buckley y Leverett<sup>(13)</sup> que tiene el inconveniente de conducir a valores múltiples de la saturación para un mismo punto. En el capítulo 4 de este trabajo se propone que el proceso puede describirse con la teoría de convección dispersión mediante la introducción del concepto de volumen de poro activo.

El capítulo 2 está dedicado a describir el experimento de Darcy, además de discutir brevemente las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo viscoso y generalidades del desplazamiento de fluidos inmiscibles en medios porosos.

El capítulo 5 da las conclusiones a que condujo este trabajo, y en los apéndices A, B y C se hacen los desarrollos matemáticos de los modelos propuestos en los capítulos 3 y 4.

## CAPITULO 2 GENERALIDADES

### 2.1.- Medios Porosos.

Estudiar el flujo de fluidos a través de medios porosos requiere dejar claro lo que entenderemos por "medios porosos".

De entrada, estaríamos tentados a definir los medios porosos como cuerpos sólidos que contienen "poros", suponiendo que queda claro qué se entiende por un "poro". Sin embargo, es muy difícil dar una definición geométrica exacta de un poro.

Intuitivamente, los poros son espacios vacíos que deben estar distribuidos con cierta regularidad si el material ha de considerarse poroso. Los huecos extremadamente pequeños de un sólido son llamados intersticios moleculares y los muy grandes son llamados cavernas. Los poros son espacios porosos de tamaño intermedio (unas cuantas micras) entre cavernas e intersticios moleculares; la limitación de su tamaño es además intuitiva y más bien indefinida.

Los poros en un sistema poroso pueden estar interconectados o no interconectados. El flujo intersticial del fluido es posible solamente si al menos parte del espacio poroso está interconectado.

De acuerdo con la descripción anterior (el término definición es difícilmente aplicable), los siguientes son ejemplos de medios

porosos: el suelo, rocas homogéneas y fracturadas, cerámicas, papel filtro, filtros de arena, un trozo de pan, etc.

Un medio poroso puede ser caracterizado por una variedad de propiedades geométricas. En primer lugar, el cociente del volumen de poro y el volumen total es muy importante. Esta cantidad es llamada la porosidad (comúnmente denotada por  $\phi$ ) y es expresada tanto como una fracción como por un porcentaje.

## 2.2. - Experimento de Darcy.

En 1856, Henry Darcy<sup>(7)</sup> estudió el flujo de agua en filtros de arena. De sus experimentos, Darcy concluyó que el gasto  $Q$  es: (a) proporcional a la sección transversal constante  $A$ , (b) proporcional a la diferencia de alturas ( $h_1 - h_2$ ) y (c) inversamente proporcional a la longitud  $L$  del material poroso (fig. 2.1). Estas conclusiones se resumen en la famosa fórmula de

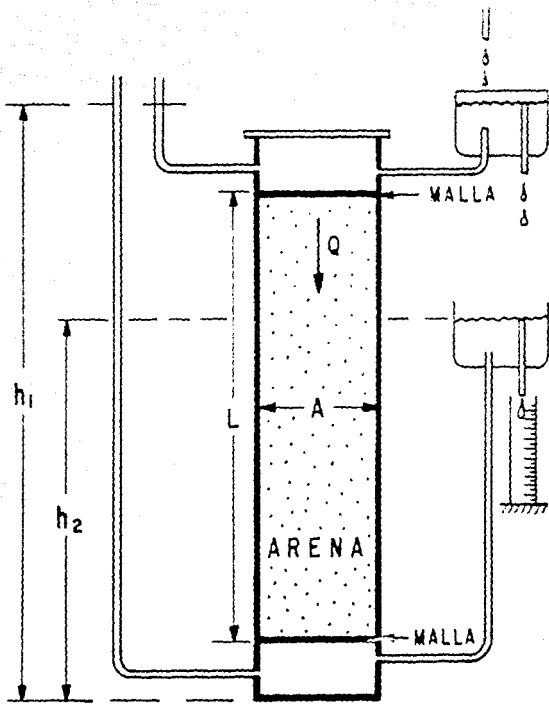
Darcy:

$$Q = \frac{K A (h_1 - h_2)}{L} \quad [L^3 T^{-1}] \quad (2.1)$$

donde  $K$  es un coeficiente de proporcionalidad llamado conductividad hidráulica del medio y que en términos de la permeabilidad  $k$  del medio se define como

$$K = \frac{k \rho g}{\mu} \quad [L T^{-1}] \quad (2.2)$$





**FIG.2.1.- EXPERIMENTO DE DARCY.**

Las dimensiones de la permeabilidad  $k$  son de longitud al cuadrado, lo que sugiere que en el sistema c.g.s. debe ser  $\text{cm}^2$ . Esta unidad ha sido adoptada sólo por algunos físicos y químicos. En algunas ramas de la ciencia aplicada, se han adoptado otras unidades específicas del área, por ejemplo, en la industria petrolera, se usa el "darcy", con

$$1 \text{ darcy} = 9.87 \times 10^{-9} \text{ cm}^2$$

### 2.3. - Ecuaciones de Navier-Stokes.

Expondremos aquí los fundamentos de las ecuaciones de Navier-Stokes o de "flujo viscoso" de la hidrodinámica. Seguidamente haremos una discusión de su aplicación al flujo de fluidos en medios porosos.

Formulemos primeramente la ley de continuidad, en la forma: el exceso neto del flujo de masa, por unidad de tiempo, que entra o sale de cualquier elemento infinitesimal de un sistema fluido, es exactamente igual al cambio por unidad de tiempo de la densidad del fluido en ese elemento multiplicado por el volumen poroso del elemento, lo que es equivalente a la ecuación

$$\text{div} (\rho V) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = - \phi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(2.3)

donde  $V$  es la velocidad del flujo en el punto  $(x,y,z)$ ,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\phi$  la porosidad del medio.

Para proseguir, es claro que debemos especificar la naturaleza del fluido involucrado y el carácter termodinámico de su flujo. En otras palabras, debemos conocer la "ecuación de estado" del fluido. En términos generales, ésta será una relación cuantitativa entre su densidad, la presión  $P$  y la temperatura absoluta  $T$ , que puede ser expresada por una ecuación de la forma

$$\tau(P, \rho, T) = 0 \quad (2.4)$$

donde  $P$ ,  $\rho$  y  $T$  se refieren al mismo elemento del fluido.

Además de la ecuación de continuidad y una ecuación de estado, se requiere una definición dinámica de la naturaleza del flujo. considerando un elemento de volumen del fluido, se encuentra que en general estará sujeto a tres tipos de fuerzas: (1) gradientes de presión cuyas componentes son  $\partial P/\partial x$ ,  $\partial P/\partial y$ ,  $\partial P/\partial z$ ; (2) fuerzas externas tales como la gravedad, de componentes  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  y (3) las fuerzas que se oponen al movimiento del fluido y debidas a la resistencia interna o fricción experimentada por el fluido. En los textos de hidrodinámica se muestra que para el caso de "flujo viscoso" se obtienen las siguientes ecuaciones dinámicas de movimiento, originalmente deducidas por Navier y Stokes.

$$\rho \frac{d V_x}{d t} = - \frac{\partial P}{\partial x} + F_x + \mu \nabla^2 V_x + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

$$\rho \frac{d V_y}{d t} = - \frac{\partial P}{\partial y} + F_y + \mu \nabla^2 V_y + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\rho \frac{d V_z}{d t} = - \frac{\partial P}{\partial z} + F_z + \mu \nabla^2 V_z + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

donde

$$\Theta = \text{div } \mathbf{V}$$

La formulación anterior puede considerarse completa, ya que tenemos cinco ecuaciones independientes (2.3, 2.4 y 2.5) para las cinco incógnitas esenciales,  $\rho$ ,  $P$ ,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ .

Estrictamente hablando, el flujo de un fluido viscoso a través de un medio poroso no es sino un caso especial del problema general del flujo viscoso entre fronteras impermeables. Debido a que los poros del medio están fijos, el flujo a través de ellos está en principio descrito por las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5). Pero, excepto para ciertos casos de geometría relativamente simple, las dificultades que se presentan en la solución de las ecuaciones con insuperables. El tratamiento de problemas en que el fluido fluye a través de canales irregulares y tortuosos, como en el caso de una arena, son muy difíciles de resolver y uno debe recurrir a otro método de ataque.

De las consideraciones anteriores está claro que la hidrodinámica del flujo a través de medios porosos debe ser formulada de manera diferente de la teoría clásica del fluido viscoso. La diferencia debe residir esencialmente en la expresión de las ecuaciones dinámicas que la teoría clásica presenta en la forma de las ecuaciones (2.5). La ley de la conservación de la masa y las definiciones termodinámicas de un fluido deben ser conservadas en cualquier sistema termodinámico. Sin embargo, no es irrazonable que las reacciones dinámicas de un fluido al pasar a través de los finos canales de un medio poroso puedan, desde un punto de vista macroscópico, aparecer de manera diferente que analizadas microscópicamente y representadas por las ecuaciones (2.5).

Es esta diferencia la que ha sido establecida empíricamente por los experimentos de Darcy para líquidos y en experimentos más recientes para gases, y ha sido formulada como ley de Darcy. Esta ley establece que *macroscópicamente*, la velocidad de un fluido fluyendo a través de un medio poroso es directamente proporcional al gradiente de presión que actúa sobre el fluido. Por el calificativo *macroscópicamente* queremos decir que los elementos de volumen a los cuales se refiere la velocidad y la presión contienen un gran número de poros y las variables dinámicas son realmente promedios sobre un gran número de poros, aunque en detalle puedan mostrar grandes variaciones en las celdas individuales, como sería realmente, de acuerdo con la descripción detallada implicada por las ecuaciones (2.5), si uno pudiera

resolverías explícitamente. En otras palabras, la ley de Darcy es de la naturaleza de un resultado estadístico que da la equivalente empírica de las ecuaciones de Navier-Stokes (2.5) promediadas sobre un número muy grande de poros individuales.

#### 2.4.- Desplazamiento Inmiscible.

Quando el espacio poroso del medio está ocupado por dos o más fluidos inmiscibles, la saturación en un punto con respecto a un fluido particular, está definida como la fracción del volumen poroso ocupado por ese fluido particular.

Muchos investigadores<sup>(3,13-19)</sup> concluyen de sus experimentos que cuando dos fluidos inmiscibles fluyen simultáneamente a través de un medio poroso, cada fluido establece su propio camino. Suponen que a cada grado de saturación corresponde un conjunto único de canales. Así, si se tienen un fluido 1 de saturación  $S_1$  y un fluido 2 con saturación  $S_2$ , a medida que  $S_2$  se reduce, los canales del fluido 2 tienden a romperse hasta que solamente quedan regiones aisladas ocupadas por ese fluido permaneciendo como una saturación irreducible del fluido 2. En forma analoga para el caso en que la saturación del fluido 1 se reduce.

Con estas ideas en mente, parece natural aplicar el concepto de permeabilidad establecida para el flujo de un solo fluido, modificando su valor para permitir la presencia del segundo fluido. Buckley y Leverett<sup>(19)</sup> plantearon el problema desde este

punto de vista, resolviéndolo para el caso de fluidos incompresibles, despreciando la presión capilar y la fuerza de gravedad. Su solución ha sido la más utilizada por muchos años, no obstante que presenta el inconveniente de conducir a valores múltiples de la saturación para un mismo punto.

Numerosos son los autores<sup>(16-19)</sup> que han tratado de explicar o eliminar la incongruencia que presenta la solución de Buckley-Leverett, sin resultados satisfactorios. En un intento por ofrecer una alternativa, para la descripción del desplazamiento inmiscible en medios porosos, en el capítulo 4 proponemos que se puede aplicar la teoría convectiva-dispersiva.

## CAPITULO 3

### DESPLAZAMIENTO DE FLUIDOS MISCIBLES EN MEDIOS POROSOS FRACTURADOS.

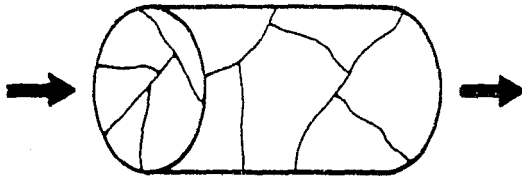
#### 3.1. -Formulación Matemática del Problema.

Un medio poroso fracturado es un sistema de doble porosidad, una asociada a la matriz y la otra asociada al volumen de las fracturas. A la primera se le conoce con el nombre de porosidad primaria y a la otra se le llama porosidad secundaria.

Para hacer un estudio del desplazamiento en una muestra de este tipo, supongamos que tenemos una muestra fracturada lineal (fig 3.1) completamente saturada con un fluido; entonces, a un tiempo dado se empieza a inyectar un segundo fluido en una cara de la muestra. Suponiendo que los fluidos son miscibles, se desea encontrar una expresión analítica para la concentración del fluido inyectado como una función de la distancia y del tiempo.

Experimentos de laboratorio indican que la permeabilidad de las fracturas es mucho mayor que la de los bloques. Entonces, para fines prácticos, se puede considerar que el desplazamiento de los fluidos tiene lugar exclusivamente a través de las fracturas por un proceso de convección-dispersión, mientras que los bloques de la matriz actúan como regiones de estancamiento, que intercambian materia con las fracturas por difusión molecular (fig. 3.2). El desplazamiento por convección es debido a la existencia de gradientes de presión y su densidad de corriente  $J_0$  está dada por





**FIG. 3.1.- MUESTRA DE UN MEDIO POROSO  
FRACTURADO.**

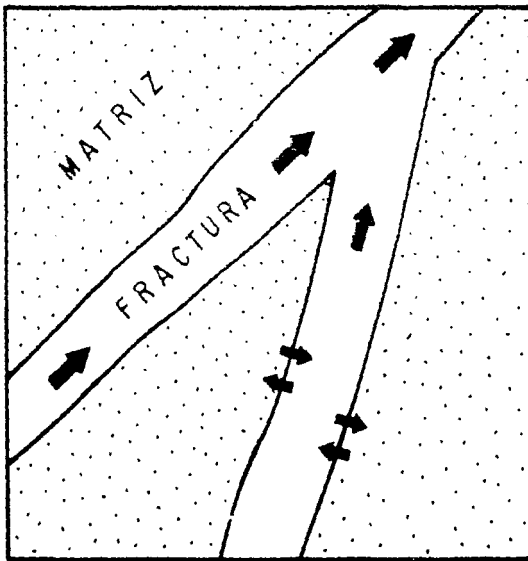


FIG. 3.2.- MECANISMO DE DESPLAZAMIENTO DE FLUIDOS EN UN MEDIO POROSO FRACTURADO.

$$J_c = \phi C v \quad (3.1)$$

donde  $\phi$  es la porosidad total del sistema (fractura + poros de la matriz),  $C$  es la concentración del trazador y  $v$  la velocidad intersticial media, que está relacionada con la velocidad Darcy  $v_D$  por la expresión

$$v = \frac{v_D}{\phi}$$

Por otra parte, el desplazamiento por dispersión, debido a fenómenos de tipo azaroso como la difusión molecular (ocasionada por gradientes de concentración) y la dispersión mecánica (debida a la aleatoriedad de las trayectorias), y está regida por una ley tipo Fick de la forma

$$J_d = -\phi D \nabla C \quad (3.2)$$

donde  $J_d$  es la densidad de corriente de dispersión y  $D$  es el coeficiente de dispersión.

Superponiendo los efectos de convección y dispersión, se tiene para la densidad de corriente total

$$J = \phi (Cv - D\nabla C) \quad (3.3)$$

Consideremos ahora una región R del medio poroso, limitada por una superficie S (fig. 3.3). Es obvio que el flujo de masa por unidad de tiempo, a través de la superficie S, está dado por

$$\iint_S \phi (Cv - D\nabla C) \cdot \hat{n} \, dA$$

donde dA es un elemento de área y  $\hat{n}$  su normal unitaria.

Aplicando el teorema de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_S \phi (Cv - D\nabla C) \cdot \hat{n} \, dA &= \\ \iiint_R \nabla \cdot \phi (Cv - D\nabla C) \, dV & \quad (3.4) \end{aligned}$$

En ausencia de fuentes y sumideros, el principio de la conservación de la masa se puede expresar como

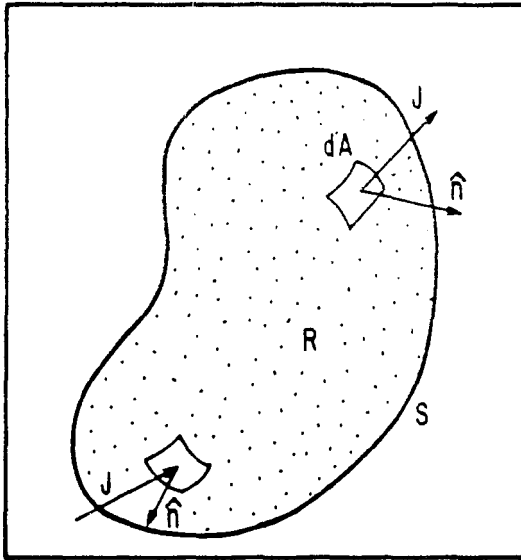


FIG.3.3.—REGION R DEL MEDIO POROSO LIMITADA POR LA SUPERFICIE S.

$$\iint_S \phi (Cv - D\nabla C) \cdot \hat{n} \, dA =$$

$$- \frac{d}{dt} \left( \iiint_{R'} \phi_2 C \, dV + \iiint_R \phi_1 C^* \, dV \right)$$

(3.5)

donde  $\phi_1$  es la porosidad primaria,  $\phi_2$  la porosidad secundaria y  $C^*$  es la concentración promedio del fluido inyectado en los bloques de la matriz.

Si  $R$  no varía con el tiempo

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_R \phi_2 C \, dV + \iiint_R \phi_1 C^* \, dV \right) =$$

$$\iiint_R \left( \phi_2 \frac{\partial C}{\partial t} + \phi_1 \frac{\partial C^*}{\partial t} \right) dV \quad (3.6)$$

Sustituyendo la ec. (3.6) en la ec. (3.5), se tiene

$$\iint_S \phi (\nabla C - D \nabla C) \cdot \hat{n} \, dA = - \iiint_R \left( \phi_2 \frac{\partial C}{\partial t} + \phi_1 \frac{\partial C^*}{\partial t} \right) dV \quad (3.7)$$

y de la igualación de los segundos miembros de las ecuaciones (3.4) y (3.7) obtenemos

$$\iiint_R \left[ \phi \nabla \cdot (\nabla C - D \nabla C) + \phi_2 \frac{\partial C}{\partial t} + \phi_1 \frac{\partial C^*}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (3.8)$$

Si  $\nabla \cdot (\nabla C - D \nabla C)$ ,  $\frac{\partial C}{\partial t}$  y  $\frac{\partial C^*}{\partial t}$  son continuas, el integrando de la ecuación (3.8) debe ser cero para todo punto, puesto que la ecuación es válida para cualquier volumen. Por lo tanto,

$$\phi \nabla \cdot (\nabla C - D \nabla C) + \phi_2 \frac{\partial C}{\partial t} + \phi_1 \frac{\partial C^*}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

que se puede escribir como

$$\nabla C \cdot v + C \nabla \cdot v + \nabla \cdot D \nabla C + \frac{\phi_2}{\phi} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\phi_1}{\phi} \frac{\partial C^*}{\partial t} = 0 \quad (3.10)$$

Para un fluido incompresible  $\nabla \cdot v = 0$ . Consecuentemente,

$$\nabla C \cdot v - \nabla \cdot D \nabla C + \frac{\phi_2}{\phi} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\phi_1}{\phi} \frac{\partial C^*}{\partial t} = 0 \quad (3.11)$$

Si  $D$  es constante

$$D \nabla^2 C - \nabla C \cdot v = \frac{\phi_2}{\phi} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\phi_1}{\phi} \frac{\partial C^*}{\partial t} \quad (3.12)$$

En una dimensión

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\phi_2}{\phi} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\phi_1}{\phi} \frac{\partial C^*}{\partial t} \quad (3.13)$$

donde  $u$  es la componente de la velocidad en la dirección del eje  $x$ .



Finalmente, representando la fracción de fracturas,  $\frac{\phi_2}{\phi}$ , por  $f$  se tiene

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} = f \frac{\partial C}{\partial t} + (1 - f) \frac{\partial C^*}{\partial t} \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) tiene la misma forma matemática de la ecuación que se aplica a medios porosos homogéneos (sin fracturas) que contienen poros de entrapamiento<sup>(1)</sup>. Esta equivalencia matemática se debe a que, tanto los bloques de los medios fracturados, como las trampas de los medios homogéneos, pueden considerarse zonas de estancamiento.

Ahora bien,  $C^*$  es la concentración promedio en los bloques que, para un bloque a un tiempo dado, está definida como

$$C^*(t) = \frac{1}{V} \iiint c'(r, t) dV \quad (3.15)$$

donde  $c'(r, t)$  es la concentración en un punto del bloque y  $V$  es el volumen de poro del bloque. La ecuación (3.14) tiene dos incógnitas;  $C$  y  $C^*$ ; así es que, se necesita otra ecuación para

obtener soluciones explícitas de estas variables. Esta puede obtenerse mediante consideraciones físicas, como sigue: Al inicio del experimento, la concentración de fractura del fluido inyectado es cero. Cuando se inicia la inyección, el fluido avanza preferencialmente a través de las fracturas y en corto tiempo alcanza un estado cuasi-estacionario, así es que, la concentración de fractura puede ser aproximada por un valor constante que será denotado  $C_q$ .

El fluido inyectado penetra a los bloques exclusivamente por difusión molecular; consecuentemente, la concentración dentro de los bloques obedece una ecuación de difusión de la forma

$$D' \nabla^2 c' = \frac{\partial c'}{\partial t} \quad (3.16)$$

donde  $D'$  es el coeficiente de difusión molecular.

Las condiciones iniciales y de frontera son:

$$c' \text{ (en el bloque)} = 0 \quad \text{para } t = 0 \quad (3.17)$$

$$c' \text{ (en la superficie)} = C_q \quad \text{para } t \geq 0 \quad (3.18)$$

En el apéndice A se resuelve la ec. (3.16) con las condiciones dadas por las ecuaciones (3.17) y (3.18), para cuatro sistemas diferentes que constan de: (1) placas paralelas

infinitas, (2) cubos, (3) esferas y (4) cilindros infinitos. Para los cuatro casos se encuentra que

$$C_q - C^* = c'_q \exp(-kt) \quad (3.19)$$

donde  $c'_q$  y  $k$  son constantes.

Derivando la ec. (3.19) con respecto al tiempo, se tiene

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} = -c'_q k \exp(-kt) = -k(C_q - C^*) \quad (3.20)$$

Como se mencionó anteriormente,  $C_q$  es sólo una aproximación de la concentración de fractura actual,  $C$ , así que utilizando este valor en lugar de  $C_q$ , y definiendo  $B = (1-f)k$ , la ecuación (3.20) se reduce a

$$(1-f) \frac{\partial C^*}{\partial t} = B(C - C^*) \quad (3.21)$$

donde  $B$  es el llamado coeficiente de transferencia de masa entre matriz y fracturas.

La ecuación (3.21) fue originalmente propuesta por Coats y Smith<sup>(6)</sup> para explicar la transferencia de masa entre canales (poros conductores de fluidos) y trampas (poros de entrapamiento)

en un medio homogéneo.

Su validez ha sido establecida por algunos investigadores<sup>(9,12)</sup>. En este capítulo se muestra que puede aplicarse la misma expresión a medios fracturados, teniendo en cuenta que  $C^*$  representa la concentración de bloque promedio definida por la ec. (3.15). Aunque aquí se analizan sólo cuatro casos, los resultados obtenidos sugieren que la ecuación (3.21) es una expresión general que es aplicable a cualquier forma de bloque.

La solución analítica del sistema formado por las ecuaciones (3.14) y (3.21) se presenta en el apéndice B, donde se hace uso de variables adimensionales. Cuando la inyección del fluido desplazante se hace en forma continua y se utilizan las condiciones iniciales y de frontera adecuadas, la solución para la concentración en las fracturas es

$$C_v = \frac{e^{-t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(MX_D)}{(1+z^2) [(1 - D_D M)^2 + (D_D N)^2]} \left[ (1 - D_D M - D_D Nz) \cos(zt_D - NX_D) + (z - D_D Mz + D_D N) \sin(zt_D - NX_D) \right] dz \quad (3.22)$$

donde

$$M = \frac{1}{2D_D} (1 - \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2})$$

$$N = \frac{1}{2D_D} \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{V}{U}$$

$$U = 1 + 4D_D \left[ f + \frac{B_D b + B_D (1 + z^2)}{(1 + b)^2 + z^2} \right]$$

$$V = 4D_D z \left[ f + \frac{B_D b}{(1 + b)^2 + z^2} \right]$$

$$b = \frac{B_D}{1 - f}$$

De manera similar puede obtenerse una expresión para la concentración promedio en el bloque, en el apéndice B se muestra que

$$C_D^* = \frac{t_D}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b \exp(MX_D)}{(1 + z^2) [(1 - D_D M)^2 + (D_D N)^2] [(1 + b)^2 + z^2]} dz$$

$$\left[ \gamma \cos (zt_D - NX_D) + \delta \sin (zt_D - NX_D) \right] dz \quad (3.23)$$

donde

$$\gamma = \alpha (1 + b) - \beta z$$

$$\delta = \beta (1 + b) + \alpha z$$

$$\alpha = 1 - D_D M - D_D N z$$

$$\beta = z - D_D M z + D_D N$$

los demás parámetros están definidos en la ec. (3.22)

Es interesante hacer una comparación entre el comportamiento de la concentración de fractura (dada por la ec (3.22)) y la concentración de matriz (dada por la ec. (3.23)). Con fines ilustrativos, consideremos un sistema de longitud L con las siguientes características: coeficiente de dispersión adimensional  $D_D = 0.2$ , coeficiente adimensional de transferencia de masa  $B_D = 0.15$  y fracción volumétrica de fracturas  $f = 0.25$ . También consideremos que las observaciones se hacen a la salida de la muestra, esto es, para  $X_D = 1$  (ver apéndice B). Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3.4.

Observamos en esta figura que, al inicio de la corrida la concentración de fractura crece mucho más rápido que la concentración de matriz, que es prácticamente cero. Esto significa que el fluido inyectado se canaliza a través de las fracturas. Sin embargo, a medida que pasa el tiempo, el fluido desplazante empieza a penetrar en la matriz y para tiempos muy largos las concentraciones de fractura y matriz tienden a igualarse.

La curva para la concentración de fractura presenta dos regiones bien definidas. La región de pendiente mayor corresponde a la parte del proceso que es dominada por el desplazamiento por convección de los fluidos que estaban inicialmente en la fractura,

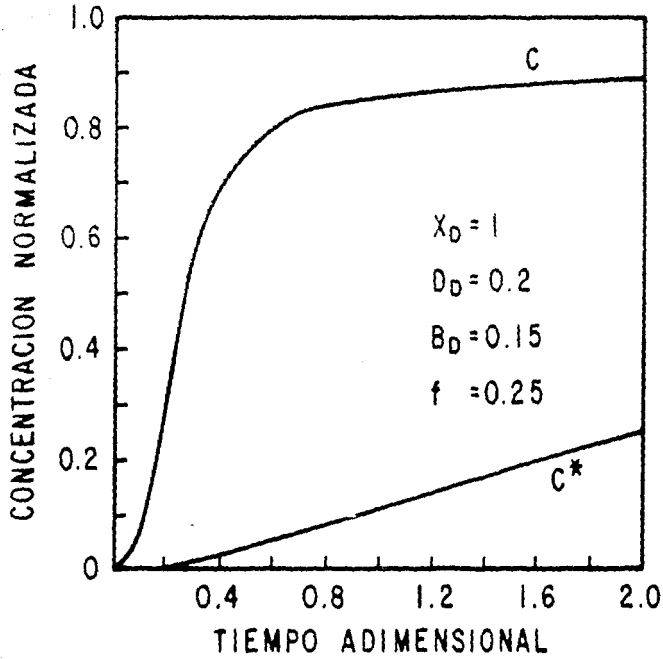


FIG.3.4.-COMPARACION ENTRE LA CONCENTRACION DE FRACTURA C Y DE BLOQUE C\* A LA SALIDA DE UNA MUESTRA.

mientras que la región de pendiente pequeña representa la parte dominada por el intercambio de masa entre matriz y fractura.

La figura 3.5 presenta el perfil de concentraciones para el sistema anterior, cuando se ha inyectado un volumen de fluido igual a la mitad del volumen de poro total de la muestra, es decir,  $t_p = 0.5$ . Al igual que en la figura anterior, notamos una marcada diferencia entre la concentración de fractura y la concentración de matriz, siendo ésta muy baja, lo que pone de manifiesto que para estas condiciones el intercambio de fluidos bloque-fractura es muy lento.

### 3.2. -Trabajo Experimental.

El estudio experimental del flujo de fluidos a través de medios fracturados no es un problema fácil, debido a la dificultad que implica tener un control preciso de las propiedades geométricas de la red de fracturas. Para resolver este tipo de problemas, generalmente se hace uso de arreglos que de alguna manera son equivalentes a los sistemas reales. En el presente estudio se utilizó un sistema de geometría simple que reproduce de manera realista los mecanismos de desplazamiento en medios fracturados.

El sistema consta esencialmente de una muestra cilíndrica de roca porosa homogénea introducida en un contenedor plástico, como se muestra esquemáticamente en la fig. 3.6. La muestra R es



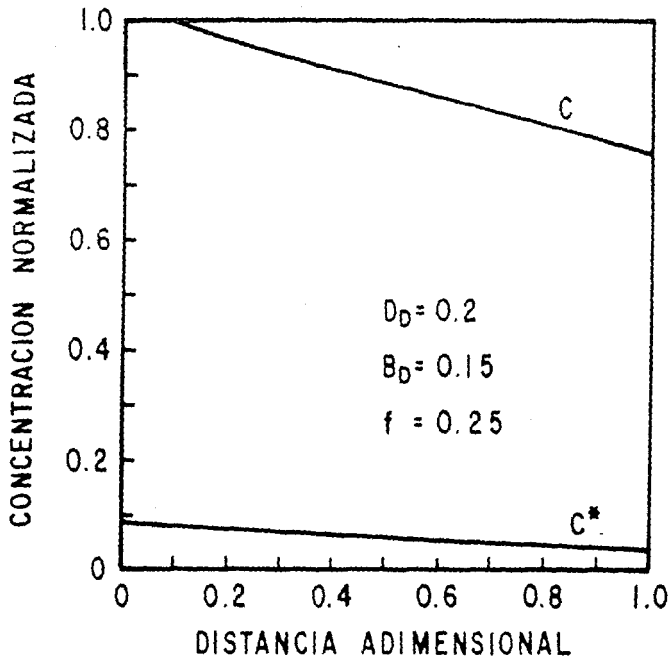


FIG.3.5.- PERFIL DE CONCENTRACION DE  
 FRACTURA C Y DE MATRIZ C\* PARA  
 UN VOLUMEN DE PORO INYECTADO  $t_D=0.5$ .

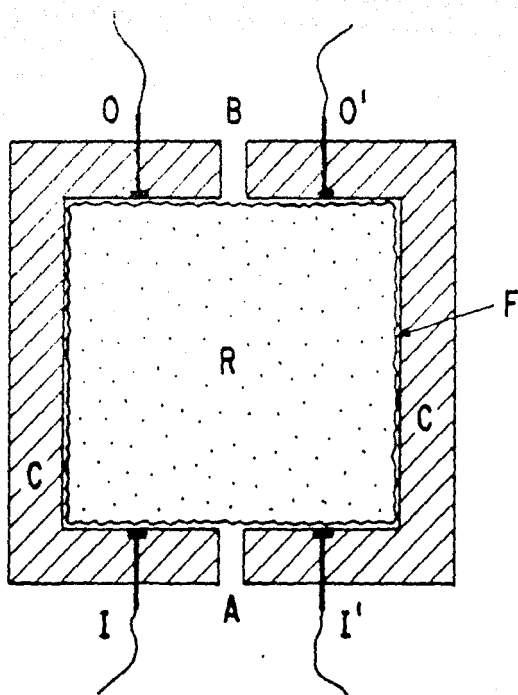


FIG. 3.6.— SISTEMA PARA ESTUDIAR  
LOS MEDIOS POROSOS FRACTURADOS.

ajustada en el cilindro hueco C, de paredes lisas. Debido a las irregularidades externas de la muestra porosa, se forma un delgado espacio anular F, entre la roca y el contenedor. Los fluidos entran en A y salen en B. Cuando los fluidos se están desplazando, lo hacen mucho más rápido a través del espacio anular que a través de la roca, así es que el espacio anular actúa como una fractura de un medio fracturado. Mediante los pares de electrodos I-I' y O-O' se hicieron mediciones de resistencia eléctrica, a partir de las cuales fue posible determinar las concentraciones relativas de las soluciones salinas usadas como fluidos desplazado y desplazante.

Las corridas experimentales fueron efectuadas con una muestra de arenisca Berea lavada y estabilizada, insertada en un tubo plástico. La tabla 3.1 indica las características del sistema.

TABLA 3.1  
CARACTERISTICAS DE LA MUESTRA

CLAVE:	DMF-1
Diámetro	3.8 cm.
Longitud	8.4 cm
Porosidad primaria	0.20
Porosidad secundaria	0.03
Fracción volumétrica de fracturas	0.06
Permeabilidad	3.3 darcy

Las corridas de desplazamiento se realizaron a gasto constante, usando dos soluciones de cloruro de potasio: 5 g/l para

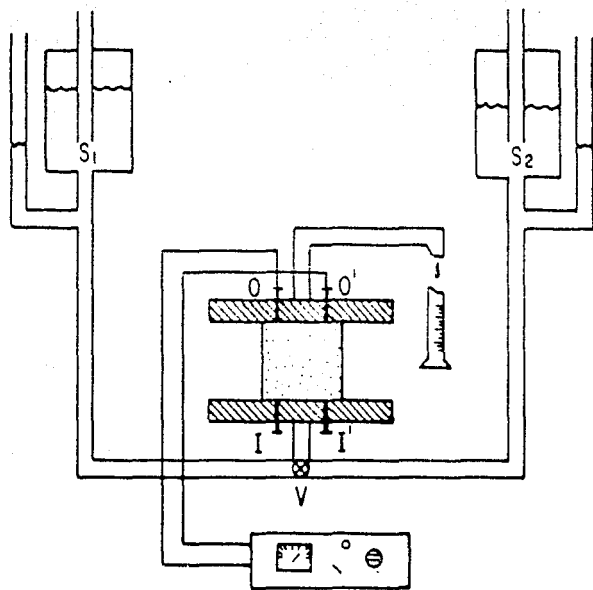
el fluido desplazante y 1 g/l para el fluido desplazado.

La fig. 3.7 esquematiza el arreglo experimental utilizado. La muestra, 100% saturada con la solución de baja concentración  $S_1$  es montada en la celda portamuestras y se le hace pasar de la misma solución hasta que la medición de resistencia en los electrodos de salida O-O' se estabiliza, en ese momento se acciona la válvula de dos vías V para dar paso a la solución de alta concentración  $S_2$  y se inician las mediciones. Se obtiene así una tabla de volumen de poro inyectado contra resistencia. La resistencia puede relacionarse con la concentración relativa definida como

$$C = \frac{c - c_{\min}}{c_{\max} - c_{\min}} \quad (3.24)$$

Esta es una variable adimensional que varía linealmente entre la concentración mínima (de la solución  $S_1$ ) y la concentración máxima (de la solución  $S_2$ ). Cuando la concentración es mínima, la resistencia entre los electrodos es máxima y viceversa. En términos de la resistencia R medida entre los electrodos a un tiempo dado, la concentración relativa se puede escribir como <sup>(3.25)</sup>

$$C = \frac{R_{\min} (R_{\max} - R)}{R (R_{\max} - R_{\min})} \quad (3.25)$$

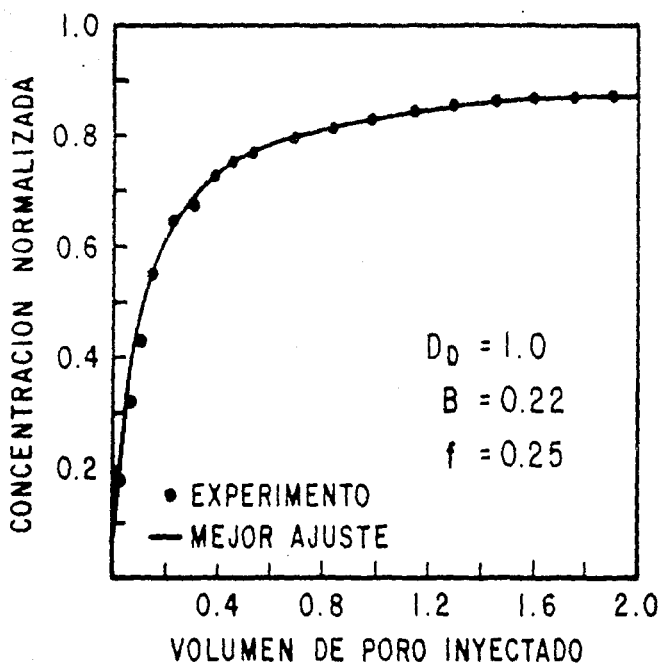


**FIG.3.7.- ARREGLO EXPERIMENTAL.**

La fig. 3.8 muestra los resultados experimentales obtenidos en una de las corridas efectuadas. Ajustando una curva teórica a los puntos experimentales, se encontró que  $D_D = 1.0$ ,  $B_D = 0.22$  y  $f = 0.25$ . Como podemos observar, hay buen ajuste entre la predicción del modelo y el experimento. Sin embargo, notamos que el valor teórico de  $f$  es cuatro veces el valor medido (comparar valores de  $f$  de la tabla 3.1 y la fig. 3.5). Esto se debe probablemente al hecho de que los poros que están en la parte central de la muestra no participan en el movimiento de los fluidos, así es que los fluidos de esa parte de la muestra se comportan como si fueran parte de la fase sólida.

Es conveniente mencionar aquí que los datos experimentales obtenidos en medios fracturados con ajustados por el modelo con valores de  $f$  pequeños, lo cual es representativo de los sistemas reales, donde la fracción del espacio poroso es pequeño comparado con el volumen total de la roca. Los datos experimentales obtenidos con sistemas homogéneos (sin fracturas) son ajustados con valores de  $f$  muy cercanos a la unidad. Entonces, el modelo es capaz de describir el flujo de fluidos en medios fracturados y el flujo de fluidos en medios homogéneos que presentan entrapamientos.

La forma de explicar la aparente contradicción (esperaríamos que en medios homogéneos, donde el volumen de fractura es cero se tuviera  $f = 0$  y no un valor de  $f$  cercano a 1) es interpretar a  $f$  como "la fracción del espacio poroso que conduce fluidos", más que la fracción de "canales" o "fracturas". El caso límite  $f = 1$  es



**FIG.3.8.- AJUSTE DEL MODELO A LOS PUNTOS EXPERIMENTALES.**

aquel en que todo el espacio poroso es conductor de fluidos, como cuando se tiene un empacamiento de esferas de vidrio.



## CAPITULO 4

### DESPLAZAMIENTO DE FLUIDOS INMISCIBLES EN MEDIOS POROSOS HOMOGENEOS.

#### 4.1 .-Teoría.

El desplazamiento de fluidos inmiscibles en medios porosos homogéneos es un fenómeno complejo que depende de una serie de factores, tales como la geometría interna de los poros, el movimiento térmico de las moléculas, capilaridad, etc. Debido a su complejidad, este tipo de desplazamiento puede considerarse como un proceso estocástico. Una de las características del proceso es que entre las dos fases no hay un frente de avance bien definido, sino una zona de mezclado con saturaciones variables de los fluidos.

Con el fin de hacer un estudio analítico del proceso, consideremos el siguiente experimento: se tiene un medio poroso lineal de longitud  $L$ , completamente saturado con agua; entonces se inyecta aceite para desplazar al agua hasta que sólo queda el agua residual; finalmente, se inyecta agua para desplazar al aceite. Describimos analíticamente el comportamiento de la saturación de agua, como una función de la distancia y el tiempo, durante la última etapa del experimento.

Como punto de partida, supongamos que el proceso tiene dos componentes que actúan simultáneamente. Por un lado, hay un

desplazamiento frontal llamado convección y, por el otro, hay un movimiento dispersivo, de naturaleza estocástica, que genera la zona de mezclado. Además, consideramos que el movimiento dispersivo sigue una ley tipo Fick<sup>(1,23)</sup>.

Experimentos de laboratorio muestran que durante el desplazamiento de aceite por agua, hay volúmenes muertos que no participan en el movimiento de los fluidos. La saturación de agua asociada al volumen efectivo (volumen de poro activo de la figura 4.1) será llamada saturación activa y será representada por  $S_{wa}$ , definida como

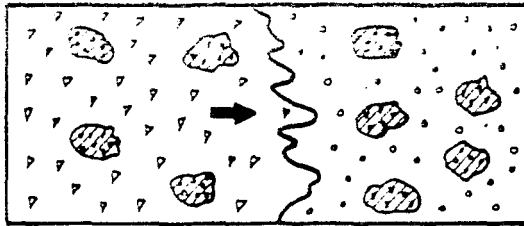
$$S_{wa} = \frac{S_w - S_{wi}}{S_{wf} - S_{wi}} \quad (4.1)$$

donde  $S_w$ ,  $S_{wi}$  y  $S_{wf}$  son las saturaciones total a un tiempo dado, inicial y final, respectivamente. Como puede observarse, el rango de variación de  $S_{wa}$  es de 0 a 1. El objetivo del concepto de saturación activa es eliminar las fracciones inmóviles de las formulaciones matemáticas.

Con estas consideraciones, la densidad de corriente de convección (flujo por unidad de área) está dado por

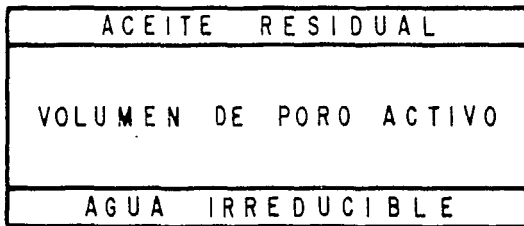
$$J_c = \phi u S_{wa} \quad (4.2)$$

donde  $u$  es la velocidad intersticial y  $\phi$  la porosidad del medio.



(a)

- ACEITE RESIDUAL   
  AGUA MOVIL  
 AGUA IRREDUCIBLE   
  ACEITE MOVIL



(b)

**FIG.4.1.-OCUPACION DEL ESPACIO POROSO DEL MEDIO. LA SATURACION ACTIVA ESTA REFERIDA AL VOLUMEN DE PORO ACTIVO.**

Como se mencionó anteriormente, se supone que el movimiento dispersivo es un proceso que obedece la ley de Fick; además, la densidad de corriente de dispersión está dada por:

$$J_d = - \phi D \frac{\partial S_{wa}}{\partial x} \quad (4.3)$$

donde  $x$  es distancia y  $D$  es el coeficiente de dispersión.

Superponiendo los dos procesos, tenemos para la densidad de corriente de agua activa

$$J = \phi \left( u S_{wa} - D \frac{\partial S_{wa}}{\partial x} \right) \quad (4.4)$$

De la ec. (4.4) y haciendo un balance de materia, se encuentra que

$$D \frac{\partial^2 S_{wa}}{\partial x^2} - u \frac{\partial S_{wa}}{\partial x} = \frac{\partial S_{wa}}{\partial t} \quad (4.5)$$

donde  $t$  es tiempo. Esta es la conocida ecuación unidimensional de convección-dispersión.

Con el fin de obtener soluciones generales, podemos hacer uso de las siguientes variables adimensionales:

$$X_D = x/L \quad (4.6)$$

$$t_D = ut/L \quad (4.7)$$

$$D_D = D/uL \quad (4.8)$$

donde  $L$  es una distancia de referencia que, en el caso de una muestra real, representa su longitud, y  $t_D$  (tiempo adimensional) es igual al volumen de agua inyectada en términos del volumen activo de la muestra.

Con estas definiciones, la ecuación (4.5) se transforma en

$$D_D \frac{\partial^2 S_{wa}}{\partial X_D^2} - \frac{\partial S_{wa}}{\partial X_D} = \frac{\partial S_{wa}}{\partial t_D} \quad (4.9)$$

Considerando un medio semi-infinito, las condiciones iniciales y de frontera, de interés son

$$S_{wa}(X_D, 0) = 0 \quad \text{para } x_D > 0$$

$$S_{wa}(\infty, t_D) = 0 \quad \text{para } t_D \geq 0 \quad (4.10)$$

$$S_{wa}(0, t_D) = 1 + D_D \frac{\partial S_{wa}}{\partial X_D} t_D \geq 0$$

La tercera condición supone que hay contraflujo a la entrada de la muestra, cuya contribución está dada por el sumando que contiene la derivada parcial de la saturación.

Resolviendo la ecuación (4.9) con las condiciones dadas por la ecuación (4.10), por el método de la Transformada de Laplace (ver Apéndice C), se obtiene

$$S_{wa}(X_D, t_D) = \frac{e^{-t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-MX_D)}{(1+z^2) [(1-MD_D)^2 + (ND_D)^2]} \left[ (1-MD_D - ND_D z) \cos(zt_D - NX_D) + (z - MD_D z + ND_D) \right. \\ \left. \sin(zt_D - NX_D) \right] dz \quad (4.11)$$

donde

$$M = \frac{1}{2 D_D} ( 1 - \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} )$$

$$N = \frac{1}{2 D_D} \sqrt{\rho} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$\theta = \operatorname{arc} \tan \frac{V}{U}$$

$$U = 1 + 4 D_D$$

$$V = 4 D_D z$$

En este punto es interesante observar gráficamente el comportamiento de la saturación con la distancia y el tiempo. Con este objetivo, se hace la suposición que un sistema de longitud finita puede ser considerado como un segmento de un sistema semi-infinito, de tal manera que la ecuación (4.11) es aplicable.

La fig. 4.2 muestra la distribución de la saturación activa de agua para tres sistemas de longitud  $L$  y coeficientes de dispersión  $D_D = 0.001$ ,  $D_D = 0.01$  y  $D_D = 0.1$ , cuando se ha inyectado un volumen de poro activo  $t_D = 0.5$ . Observamos que a medida que el coeficiente de dispersión se incrementa, la zona de transición o de mezclado, en la que conviven saturaciones

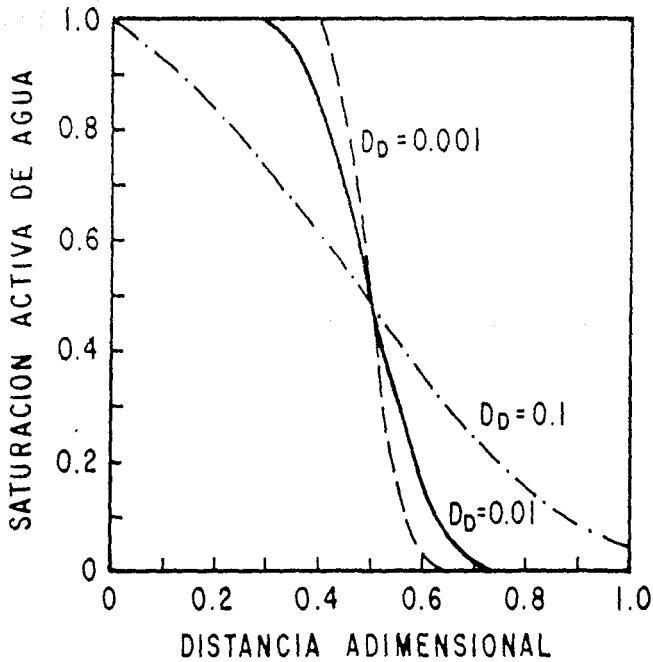


FIG. 4.2.- PERFIL DE SATURACION PARA TRES SISTEMAS CUANDO SE HA INYECTADO UN VOL. ACTIVO  $t_D = 0.5$ .



variables de los dos fluidos, aumenta de tamaño, como era de esperarse.

En la fig. 4.3 se muestra el comportamiento de la saturación a la salida de la muestra; esto es, para  $X_D$  cuando  $D_D = 0.01$  y  $D_D = 0.1$ . En el segundo caso, tenemos que la surgencia del fluido inyectado es más rápida, presentando además un efecto de cola.

Por otra parte, el flujo fraccional de agua se define como

$$f_w = \frac{q_w}{q_t} \quad (4.12)$$

donde  $q_w$  y  $q_t$  son el gasto de agua y gasto total, respectivamente.

Ahora, de la ecuación (4.4) tenemos

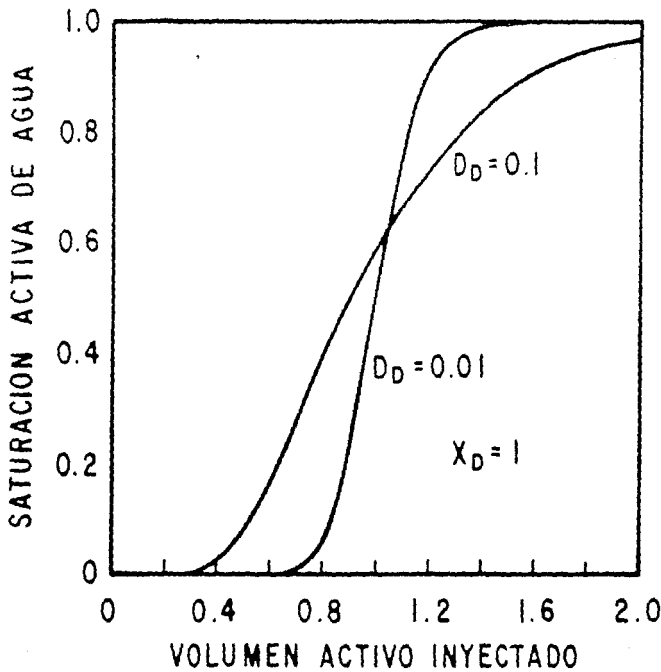
$$q_w = \phi A \left[ u S_{wa} - D \frac{\partial S_{wa}}{\partial x} \right] \quad (4.13)$$

donde A es la sección transversal de la muestra. Además

$$q_t = \phi u A \quad (4.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.13) y (4.14) en la ecuación (4.12) obtenemos

$$f_w = S_{wa} - D_D \frac{\partial S_{wa}}{\partial X_D} \quad (4.15)$$



**FIG. 4.3.- COMPORTAMIENTO DE LA SATURACION ACTIVA DE AGUA A LA SALIDA DE DOS MUESTRAS.**

Derivando  $S_{wa}$  de la ec. 4.11 con respecto a  $z$ ; sustituyendo la 2.14.14,

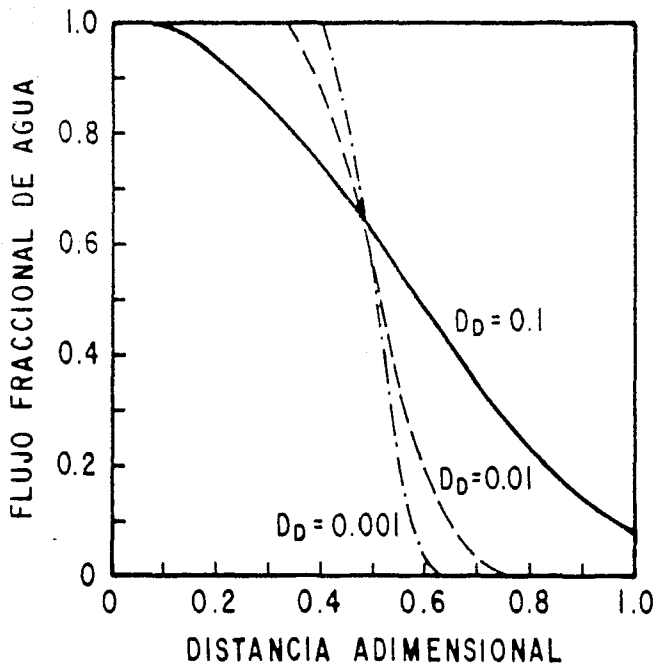
se tiene

$$f_w = \frac{t_D}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-MX_D)}{1+z^2} \left[ \cos(zt_D - NX_D) + z \sin(zt_D - NX_D) \right] dz \quad (4.17)$$

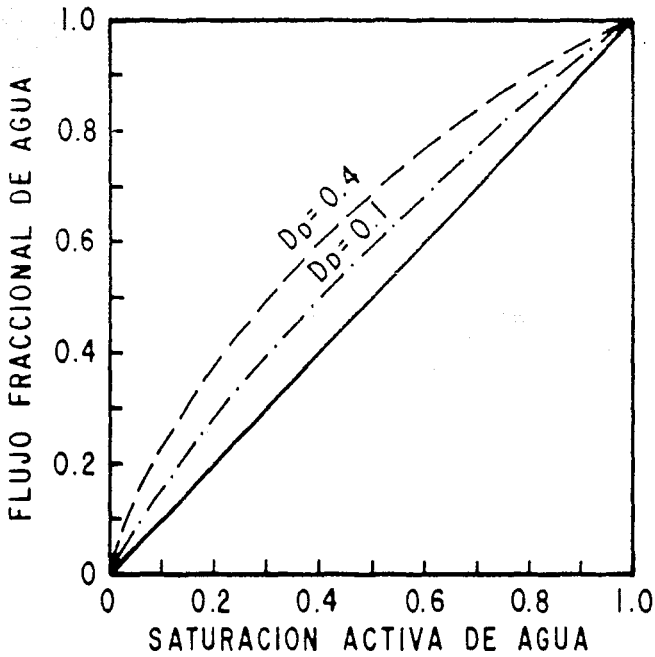
La Fig. 4.4 muestra el comportamiento del flujo fraccional contra la distancia adimensional, cuando se ha inyectado un volumen de poro activo igual a 0.5 para los sistemas considerados anteriormente.

Es importante hacer notar la correlación que existe entre la saturación de agua activa y el flujo fraccional de agua en un plano perpendicular a la dirección de flujo. Esta correlación puede obtenerse de las ecuaciones (4.11) y (4.17). La fig. 4.5 muestra la correlación que existe a la salida de dos sistemas, uno de ellos con  $D_D = 0.1$  y el otro con  $D_D = 0.4$ . Como puede observarse, el valor de  $f_w$  es siempre mayor que  $S_{wa}$ . Esto es una consecuencia de la componente dispersiva, que no puede ser evitada en un proceso de desplazamiento y es cierto para cualquier plano perpendicular a la dirección de flujo.

El flujo fraccional de aceite está definido como



**FIG.4.4.-FLUJO FRACCIONAL DE AGUA  
PARA UN VOLUMEN ACTIVO INYECTADO  
 $t_D = 0.5$ .**



**FIG. 4.5.-CORRELACION ENTRE FLUJO FRACCIONAL Y SATURACION DE AGUA A LA SALIDA DE DOS MUESTRAS.**

$$f_o = 1 - f_w \quad (4.18)$$

y representa el gasto normalizado de aceite. Consecuentemente, para un volumen  $t_{Di}$  de agua inyectada, la recuperación normalizada de aceite  $N_{pn}$  está dada por

$$N_{pn} = \int_0^{t_{Di}} f_{oi} dt_D \quad (4.19)$$

donde  $f_{oi}$  es el flujo fraccional de aceite a la salida del sistema, que puede ser obtenida a través de las ecuaciones (4.17) y (4.18). La ecuación (4.19) da la recuperación de aceite como una fracción del aceite total recuperable.

Para probar las predicciones del modelo se efectuaron corridas de desplazamiento de aceite por agua en muestras de arenisca Berea. Después de lavadas y estabilizadas, las muestras fueron saturadas 100% con agua destilada; enseguida se pasó aceite a través de las muestras hasta que sólo quedó el agua residual; finalmente, el aceite fue desplazado con agua destilada hasta que se obtuvo todo el aceite recuperable. El arreglo experimental utilizado es una variante del usado en los experimentos con medios porosos fracturados, haciendo ahora la inyección con una bomba de gasto constante.

La tabla 4.1 muestra las características de la muestra utilizada en la corrida que aquí se reporta, y la tabla 4.2 presenta algunos de los datos obtenidos durante la corrida.

TABLA 4.1  
CARACTERISTICAS DE LA MUESTRA

CLAVE	DIH-2
DIAMETRO	3.78 CM
LONGITUD	5.53 CM
POROSIDAD	23%
PERMEABILIDAD	554 md

TABLA 4.2  
DATOS DE LA CORRIDA

VISCOSIDAD ACEITE	1.8 cP
$S_{wi}$	31%
$S_{wf}$	85%
$N_p$	78%

En la tabla 4.2  $S_{wi}$  y  $S_{wf}$  se refieren a las saturaciones inicial y final de agua usadas en la ecuación (4.1), y  $N_p$  representa la recuperación de aceite con respecto al aceite

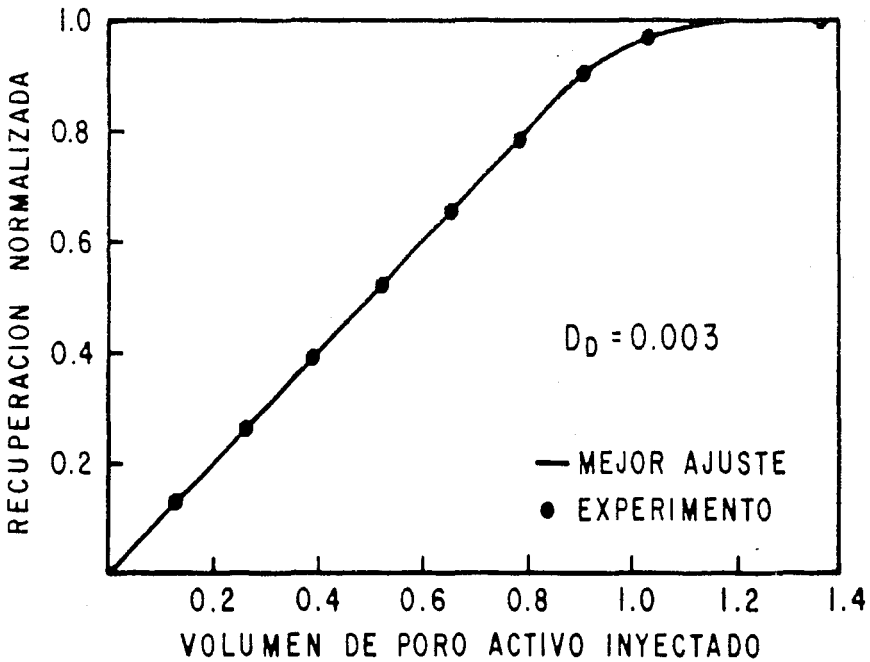
original.

La fig. 4.6 es una gráfica de la recuperación normalizada de aceite  $N_{pn}$ , como una función del volumen activo inyectado  $t_D$ . Ajustado una curva teórica a los puntos experimentales, se encontró que para este caso  $D_D = 0.003$ , como se indica en la figura.

Examinando los resultados experimentales, tenemos que todo el aceite recuperable fue obtenido después de inyectar 1.3 volúmenes activos, es decir, se tiene un avance casi frontal, un proceso en que predomina la componente convectiva sobre la componente dispersiva, debido a la baja viscosidad del aceite utilizado.

El coeficiente de dispersión juega un papel muy importante en el modelo utilizado. Este coeficiente depende de una gran variedad de propiedades tanto de la roca como de los fluidos, tales como la naturaleza de la roca, geometría de los poros, permeabilidad, viscosidad, difusión molecular y tensión interfacial. El efecto individual de cada uno de estos factores en un proceso de desplazamiento no es bien conocido; solamente el efecto total, que puede determinarse a partir de una corrida de desplazamiento.





**FIG.4.6.- COMPARACION ENTRE LAS PREDICCIONES DEL MODELO Y PUNTOS EXPERIMENTALES.**

CAPITULO 5  
CONCLUSIONES.

1.- El desplazamiento de fluidos miscibles en medios porosos fracturados presenta dos etapas. La primera, de corta duración, está dominada por el desplazamiento convectivo de los fluidos originalmente en la fractura. La segunda etapa, de larga duración, está asociada con el intercambio de fluidos entre la matriz y la fractura.

2.- La formulación matemática que gobierna los procesos de desplazamiento en medios fracturados es similar a la de los medios homogéneos.

3.- Aunque en este trabajo se analizan sólo cuatro formas de bloque, se considera que la formulación obtenida es de tipo general.

4.- Para el caso de fluidos inmiscibles a través de medios porosos homogéneos, el excelente ajuste entre teoría y puntos experimentales, muestra que puede ser visualizado como un proceso de convección-dispersión.

## APENDICE A

Se presentan aquí soluciones a la ec. (3.16) con las condiciones dadas por (3.17) y (3.18), para cuatro sistemas de geometrías diferentes.

### PLACAS PARALELAS INFINITAS.

En este caso, se considera una placa infinita paralela al plano Y-Z, de espesor L. En una dimensión, la ec. (3.16) toma la forma

$$D' \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} = \frac{\partial c'}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

y las condiciones iniciales y de frontera son

$$c'(x,0) = 0 \quad , \quad 0 < x < L \quad (\text{A.2})$$

$$c'(0,t) = c'(L,t) = C_q \quad , \quad t > 0 \quad (\text{A.3})$$

Usando el método de separación de variables, obtenemos la solución<sup>(22)</sup>

$$c'(x,t) = C_q \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \exp \left( -\frac{D'(2n+1)^2 \pi^2 t}{L^2} \right) \right]$$

(A.4)

ya la concentración promedio dada por la ecuación (3.15) se reduce a

$$C^*(t) = \frac{1}{L} \int_0^L c'(x,t) dx = C_q \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left( -\frac{D'(2n+1)^2 \pi^2 t}{L^2} \right) \right]$$

(A.5)

En la figura A-1 se grafica  $-\ln [(C_q - C^*)/C_q]$  contra tiempo, para cuatro casos diferentes. La curva A corresponde a un sistema de placas paralelas con  $D' = 1.35 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{seg}$  y  $L=10 \text{ cm}$ . Se observa que, a excepción de tiempos pequeños, el comportamiento puede describirse por una línea recta. Además, si  $k$  es la pendiente de la parte recta,

$$- \ln \left( \frac{C_q - C^*}{C_q} \right) = kt + d \quad (\text{A.6})$$

donde d es una constante. Así,

$$C_q - C^* = C'_q \exp(-kt) \quad (\text{A.7})$$

donde  $C'_q = C_q \exp(-d)$

### CUBOS.

En este caso, es suficiente con considerar un solo cubo. Si se supone que el coeficiente de difusión es isotrópico, tenemos

$$D' \left( \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial c'}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

Para evitar dividir por cero cuando se use el método de separación de variables, es conveniente definir

$$Q(x, y, z, t) = 1 - c'(x, y, z, t) \quad (\text{A.9})$$

Con esta nueva variable, la ec. (A.8) toma la forma

$$D' \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

Considerando un cubo de arista  $L$ , y aplicando a  $c'$  las mismas condiciones usadas en el caso previo, por el método de separación de variables se encuentra que

$$\begin{aligned} Q(x, y, z, t) &= Q_p(x, t) Q_p(y, t) Q_p(z, t) \\ &= \left[ 1 - C'_p(x, t) \right] \left[ 1 - C'_p(y, t) \right] \\ &\quad \left[ 1 - C'_p(z, t) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde las  $C'_p$  son soluciones de la forma de la ec. (A.4)

De las ecuaciones (A.9) y (A.11), tenemos que

$$\begin{aligned} c'(x, y, z, t) &= \left[ 1 - \left[ 1 - C'_p(x, t) \right] \left[ 1 - C'_p(y, t) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[ 1 - C'_p(z, t) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En consecuencia, la concentración promedio en el cubo está dada por

$$\begin{aligned}
 C^*(t) &= \frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L c'(x,y,z,t) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L \left[ 1 - \left[ 1 - C'_p(x,t) \right] \right. \\
 &\quad \left. \left[ 1 - C'_p(y,t) \right] \left[ 1 - C'_p(z,t) \right] \right] \, dx \, dy \, dz \\
 &= 1 - \left[ \frac{1}{L} \int_0^L \left[ 1 - C'_p(x,t) \right] \, dx \right]^3
 \end{aligned}$$

(A.13)

La curva B de la figura (A.1) ilustra el comportamiento de un sistema con  $D=1.35 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{seg}$  y  $L = 10 \text{ cm}$ . Como puede observarse, el comportamiento es similar al caso de placas paralelas.

#### ESFERAS.

Se considera aquí una esfera de radio R. Ya que la difusión es radial, la ecuación a resolver es

$$D' \left( \frac{\partial^2 c'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c'}{\partial r} \right) = \frac{\partial c'}{\partial t} \quad (\text{A.14})$$

con las condiciones

$$c' (r, 0) = 0, \quad r < R \quad (\text{A.15})$$

$$c' (R, t) = C_q, \quad t \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

Haciendo la sustitución

$$v = c'r \quad (\text{A.17})$$

La ecuación (A.14) se transforma en

$$D' \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

cuya solución es



$$c'(r, t) = C_a \left[ 1 + \frac{2R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{R} \exp \left[ \frac{-D' n^2 \pi^2 t}{R^2} \right] \right] \quad (\text{A.19})$$

y

$$c''(t) = C_a \left[ 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[ \frac{-D' n^2 \pi^2 t}{R^2} \right] \right] \quad (\text{A.20})$$

El comportamiento para  $D' = 1.35 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{seg}$  y  $R = 5 \text{ cm}$  está descrito por la curva C de la figura A.1.

#### CILINDROS PARALELOS INFINITOS.

Se considera, para este caso, un cilindro de radio R. Como existe simetría cilíndrica, la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r D' \frac{\partial c'}{\partial r} \right] = \frac{\partial c'}{\partial t} \quad (\text{A.21})$$

Con las condiciones

$$c'(r, 0) = 0 \quad , \quad r < R \quad (A.22)$$

$$c'(R, t) = C_q \quad , \quad t \geq 0 \quad (A.23)$$

En términos de funciones Bessel, la solución es

$$c'(r, t) = C_q \left[ 1 - \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-D' \alpha_n^2 t) J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n J_1(R \alpha_n)} \right] \quad (A.24)$$

donde  $\alpha_n$  son las raíces positivas de  $J_0(R \alpha_n) = 0$ .

El valor de  $C^*$  se obtiene de la misma manera que en los casos anteriores y está dado por

$$C^*(t) = C_q \left[ 1 - \frac{4}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \exp(-D' \alpha_n^2 t) \right] \quad (A.25)$$

La curva D de la figura (A.1) muestra el comportamiento de para un sistema con  $D' = 1.35 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{seg}$  y  $R = 5 \text{ cm}$ .

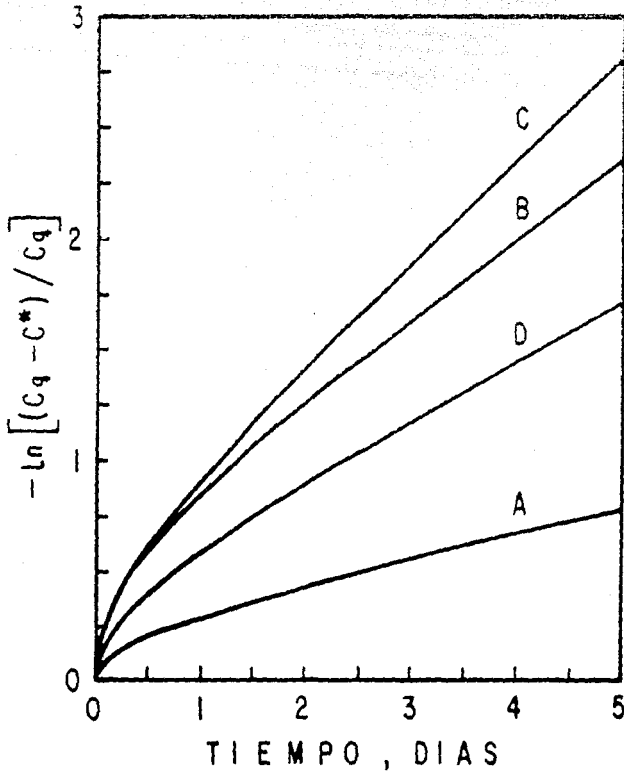


FIG.A.I.-COMPORTAMIENTO PARA CUATRO SISTEMAS. A: PLACAS, B: CUBOS, C: ESFERAS, D: CILINDROS.

## APENDICE B

Para resolver el sistema formado por las ecuaciones (3.14) y (3.21) se hará uso de las siguientes variables adimensionales:

$$X_D = \frac{x}{L}$$

$$t_D = \frac{ut}{L}$$

$$D_D = \frac{D}{uL}$$

$$B_D = \frac{LB}{u}$$

$$C_D = \frac{C}{C_0}$$

$$C_D^* = \frac{C^*}{C_0}$$

donde  $L$  es la longitud de la muestra y  $C_0$  es la concentración inicial del fluido desplazante. De la definición del tiempo adimensional,  $t_D$ , se tiene que esta variable es igual al número de volúmenes de poro inyectados. Con las relaciones de arriba, las ecuaciones (3.14) y (3.21) toman la forma

$$D_D \frac{\partial^2 C_D}{\partial X_D^2} - \frac{\partial C_D}{\partial X_D} = f \frac{\partial C_D}{\partial t_D} + (1-f) \frac{\partial C_D^*}{\partial t_D} \quad (B.1)$$

$$(1-f) \frac{\partial C_D^*}{\partial t_D} = B_D (C_D - C_D^*) \quad (B.2)$$

Para un medio semi-infinito, las condiciones iniciales y de frontera son

$$C_D(X_D, 0) = 0, \quad X_D > 0 \quad (B.3a)$$

$$C_D^*(X_D, 0) = 0, \quad X_D > 0 \quad (B.3b)$$

$$C_D(\omega, t_D) = 0, \quad t_D \geq 0 \quad (B.3c)$$

$$C_D(0, t_D) = 1 + D_D \frac{\partial C_D}{\partial X_D}, \quad t_D \geq 0 \quad (B.3d)$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones (B.1) y (B.2) y haciendo uso de las condiciones (B.3a) y (B.3b), se tiene

$$D_D \frac{d^2 \bar{C}_D}{d X_D^2} - \frac{d \bar{C}_D}{d X_D} = \psi f \bar{C}_D + \psi (1 - f) \bar{C}_D^* \quad (B.4)$$

$$\psi (1 - f) \bar{C}_D^* = B_D (\bar{C}_D - \bar{C}_D^*) \quad (B.5)$$

Despejando  $\bar{C}_D^*$  de la ec. (B.5) y sustituyendo en la ec. (B.4) tenemos

$$D_D \frac{d^2 \bar{C}_D}{d X_D^2} - \frac{d \bar{C}_D}{d X_D} = \left[ \psi f + \frac{B_D \psi (1 - f)}{B_D + \psi (1 - f)} \right] \bar{C}_D$$

pero

$$\frac{B_D \psi (1 - f)}{B_D + \psi (1 - f)} = \frac{B_D \psi}{\psi + \frac{B_D}{1 - f}}$$

Entonces,

$$D_D \frac{d^2 \bar{C}_D}{d X_D^2} - \frac{d \bar{C}_D}{d X_D} - n \bar{C}_D = 0 \quad (B.6)$$

donde

$$n = \psi \left[ f + \frac{B_D}{\psi + \frac{B_D}{1 - f}} \right]$$

La solución de la ecuación (B.6) es

$$\bar{C}_D = G_1 \exp \frac{X_D}{2D_D} (1 + \sqrt{1 + 4D_D n}) + G_2 \exp \frac{X_D}{2D_D} (1 - \sqrt{1 + 4D_D n})$$

La transformada de la condición (B.3c) es

$$\bar{C}_D(\omega, s) = 0$$

Lo que quiere decir que  $G_1 = 0$ . Por lo tanto,

$$\bar{C}_D = G_2 \exp \frac{X_D}{2D_D} (1 - \sqrt{1 + 4D_D n}) \quad (B.7)$$

Por otra parte, la transformada de la condición (B.3d) es

$$\bar{C}_D(0, s) = \frac{1}{s} + D_D \frac{d \bar{C}_D}{d X_D}(0, s) \quad (B.8)$$

Derivando la ec. (B.7) con respecto a  $X_D$  y evaluando en  $(0, s)$  tenemos,

$$\frac{d \bar{C}_D}{d X_D}(0, s) = \frac{G_2}{2D_D} (1 - \sqrt{1 + 4D_D n})$$

Por lo que la ec. (B.8) queda

$$\bar{C}_D(0, s) = \frac{1}{s} + \frac{G_2}{2} (1 - \sqrt{1 + 4D_D n}) \quad (B.9)$$

Además, evaluando la ec. (B.7) en  $(0, s)$  se tiene

$$\bar{C}_D (0, \omega) = G_2 \quad (B.10)$$

Iguando (B.9) y (B.10) obtenemos para  $G_2$

$$G_2 = \frac{z}{\omega (1 + \sqrt{1 + 4D_D n})} \quad (B.11)$$

La ec. (B.7) se convierte así en

$$\bar{C}_D = \frac{z}{\omega (1 + \sqrt{1 + 4D_D n})} \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - \sqrt{1 + 4D_D n}) \right]$$

(B.12)

que sustituyendo el valor de  $n$  queda

$$\bar{C}_D = \frac{z}{\omega \left[ 1 + \sqrt{1 + 4D_D \omega \left( f + \frac{B_D}{\omega + b} \right)} \right]} \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} \left( 1 - \sqrt{1 + 4D_D \omega \left( f + \frac{B_D}{\omega + b} \right)} \right) \right]$$

(B.13)

donde hemos sustituido



$$b = \frac{B_D}{1 - f}$$

Para encontrar la transformada inversa de la ec. (B.13), se puede hacer uso del método de la integral de inversión compleja<sup>(24)</sup>.

Haciendo  $s = 1 + iz$  en la ec. (B.13) se tiene

$$\begin{aligned} \bar{C}_D = & \frac{2}{[1 + iz] \left[ 1 + \sqrt{1 + 4D_D(1 + iz) \left[ f + \frac{B_D}{(1+iz)+b} \right]} \right]} \\ & \exp \frac{X_D}{2D_D} \left[ 1 - \sqrt{1 + 4D_D(1 + iz) \left[ f + \frac{B_D}{(1+iz)+b} \right]} \right] \end{aligned} \quad (B.14)$$

Separando las partes real e imaginaria del radicando esta ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} \bar{C}_D = & \frac{2}{[1 + iz] \left[ 1 + \sqrt{U + iV} \right]} \\ & \exp \frac{X_D}{2D_D} \left[ 1 - \sqrt{U + iV} \right] \end{aligned} \quad (B.15)$$

donde

$$U = 1 + 4D_D \left[ f + \frac{B_D b + B_D (1 + z^2)}{(1 + b)^2 + z^2} \right]$$

$$V = 4D_D z \left[ f + \frac{B_D}{(1 + b)^2 + z^2} \right]$$

Mediante un diagrama de Argand en el plano complejo, se tiene que

$$\theta = \arctan \frac{V}{U}$$

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$$

Además

$$\begin{aligned} \sqrt{U + iV} &= \sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2} \\ &= \sqrt{\rho} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Entonces la ec. (B.15) toma la forma

$$\bar{C}_D = \frac{2}{[1 + iz] \left[ 1 + \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} + i \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} \right]} \exp \frac{X_D}{2D_D} \left( 1 - \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} - i \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\bar{C}_D = \frac{2}{(1 + iz)(1 + M_1 + iN_1)} \exp \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1 - iN_1)$$

donde

$$M_1 = \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$N_1 = \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}$$

Multiplicando y dividiendo por  $(1 - iz)(1 + M_1 - iN_1)$  tenemos

$$C_D = \frac{2 \left[ (1 + M_1 - N_1 z) - i(z + M_1 z + N_1) \right]}{(1 + z^2) \left[ (1 + M_1)^2 + N_1^2 \right]} \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) - i \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right]$$

Tomando en cuenta que

$$\exp \left( -i \frac{N_1 X_D}{2D} \right) = \cos \frac{N_1 X_D}{2D} - i \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D}$$

y separando las partes real e imaginaria

$$\bar{C}_D = \frac{2 \exp \left[ \frac{X_D}{2D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) \left[ (1 + M_1)^2 + N_1^2 \right]}$$

$$\left\{ \left[ (1 + M_1 - N_1 z) \cos \frac{N_1 X_D}{2D} - \right. \right.$$

$$\left. (z + M_1 z + N_1) \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D} \right] -$$

$$i \left[ (1 + M_1 - N_1 z) \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D} + \right.$$

$$\left. (z + M_1 z + N_1) \cos \frac{N_1 X_D}{2D} \right] \right\} \quad (B.16)$$

Es decir,

$$\bar{C}_D = p + i q$$

con

$$p = \frac{2 \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) \left[ (1 + M_1)^2 + N_1^2 \right]} \left[ (1 + M_1 - N_1 z) \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} - (z + M_1 z + N_1) \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right]$$

$$q = \frac{-2 \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) \left[ (1 + M_1)^2 + N_1^2 \right]} \left[ (1 + M_1 - N_1 z) \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} + (z + M_1 z + N_1) \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right]$$

Podemos así aplicar la fórmula

$$C_D(X_D, t_D) = \frac{e^{-t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} (p \cos zt_D - q \sin zt_D) dz$$

obteniendo

$$C_D(X_D, t_D) = \frac{2 e^{-t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1 z) \right]}{(1 + z^2) \left[ (1 + M_1)^2 + N_1^2 \right]} \left[ (1 + M_1 - N_1 z) \cos \left( z t_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) + (z + M_1 z + N_1) \sin \left( z t_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right] dz \quad (B.17)$$

Haciendo ahora

$$M = \frac{1}{2D_D} (1 - M_1)$$

$$N = \frac{N_1}{2D_D}$$

en la ec. (B.17), tenemos

$$C_D(X_D, t_D) = \frac{e^{-t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp M X_D}{(1 + z^2) \left[ (1 - D_D M)^2 + (D_D N)^2 \right]} \left[ (1 - D_D M - D_D N z) \cos (z t_D - N X_D) + (z - D_D M z + D_D N) \sin (z t_D - N X_D) \right] dz \quad (B.18)$$

donde

$$M = \frac{1}{2D_D} (1 - \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2})$$

$$N = \frac{1}{2D_D} \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{V}{U}$$

$$U = 1 + 4D_D \left[ f + \frac{B_D b + B_D (1 + z^2)}{(1 + b)^2 + z^2} \right]$$

$$V = 4D_D z \left[ f + \frac{B_D b}{(1 + b)^2 + z^2} \right]$$

$$b = \frac{B_D}{1 - f}$$

Hallaremos ahora  $C_D^*$ , la concentración de bloque del fluido inyectado.

Haciendo

$$\alpha_1 = 1 + M_1 - N_1 z$$

$$\beta_1 = z + M_1 z + N_1$$

en la ec. (B.16) tenemos

$$\bar{C}_D = \frac{2 \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) \left[ (1 + M_1)^2 + N_1^2 \right]} \left[ \left( \alpha_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} - \beta_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) - i \left( \beta_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} + \alpha_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right]$$

(B.18)

Ahora, de la ec. (B.6)

$$\bar{C}_D^* = \frac{b \bar{C}_D}{1 + b} = \frac{b \left[ (1 + b) - iz \right]}{(1 + b)^2 + z^2}$$

donde hemos utilizado  $z = 1 + iz$

Sustituyendo la expresión para  $\bar{C}_D$  dada por la ec. (B.18) la última ecuación se convierte en

$$\bar{C}_D^* = e \left\{ \left[ (1 + b) \left( \alpha_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} - \beta_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) - z \left( \alpha_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} + \beta_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right] - i \left[ (1 + b) \left( \alpha_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} + \beta_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) + z \left( \alpha_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} - \beta_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right] \right\} \quad (B.19)$$



donde hemos denotado

$$e = \frac{2b \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) \left[ (1 + M_1)^2 + z^2 \right] \left[ (1 + b)^2 + z^2 \right]}$$

Agrupando términos en la ec. (B.19) tenemos

$$\begin{aligned} \bar{C}_D^* = e \left\{ \right. & \left[ \alpha_1 (1 + b) - \beta_1 z \right] \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} \\ & - \left[ \beta_1 (1 + b) + \alpha_1 z \right] \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D_D} \\ & - i \left[ \beta_1 (1 + b) + \alpha_1 z \right] \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} \\ & \left. - i \left[ \alpha_1 (1 + b) - \beta_1 z \right] \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right\} \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

Sean

$$\gamma_1 = \alpha_1 (1 + b) - \beta_1 z$$

$$\delta_1 = \beta_1 (1 + b) + \alpha_1 z$$

Entonces,

$$\bar{C}_D^* = \varepsilon \left[ \left( \gamma_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} - \delta_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) - l \left( \delta_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} + \gamma_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right] \quad (B.21)$$

Es decir,

$$\bar{C}_D^* = p + lq$$

con

$$p = \varepsilon \left( \gamma_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} - \delta_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right)$$

$$q = -\varepsilon \left( \delta_1 \cos \frac{N_1 X_D}{2D_D} + \gamma_1 \sin \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right)$$

Utilizando ahora la fórmula

$$C_D^* = \frac{e^{t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} (p \cos zt_D - q \sin zt_D) dz$$

obtenemos

$$C_D^* = \frac{e^{t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon \left[ \gamma_1 \cos \left( z t_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) + \delta_1 \sin \left( z t_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right] dz$$

que sustituyendo la expresión correspondiente a  $\varepsilon$  se transforma en

$$C_D^* = \frac{e^{t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) \left[ (1 + M_1)^2 + N_1^2 \right] \left[ (1 + b)^2 + z^2 \right]} \left[ \gamma_1 \cos \left( z t_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) + \delta_1 \sin \left( z t_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right] dz$$

(B.22)

donde

$$\gamma_1 = \alpha_1 (1 + b) - \beta_1 z$$

$$\delta_1 = \beta_1 (1 + b) + \alpha_1 z$$

$$\alpha_1 = 1 + M_1 - N_1 z$$

$$\beta_1 = z + M_1 z + N_1$$

$$M_1 = \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$N_1 = \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{V}{U}$$

$$U = 1 + 4D_D \left[ f + \frac{B_D b + B_D (1 + z^2)}{(1 + b)^2 + z^2} \right]$$

$$V = 4D_D z \left[ f + \frac{B_D b}{(1 + b)^2 + z^2} \right]$$

$$b = \frac{B_D}{1 - f}$$

La ecuación (B.22) puede ser escrita como

$$C_D^* = \frac{e^D}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b \exp M X_D}{(1+z^2) \left[ (1 - D_D M)^2 + (D_D N)^2 \right] \left[ (1+b)^2 + z^2 \right]} \left[ \gamma_1 \cos (z t_D - N X_D) + \delta_1 \sin (z t_D - N X_D) \right] dz$$

(B.23)

donde

$$\delta = \beta (1+b) + \alpha z$$

$$\gamma = \alpha (1+b) - \beta z$$

$$\beta = z - D_D M z + D_D N$$

$$\alpha = 1 - D_D M - D_D N z$$

$$M = \frac{1}{2D_D} (1 - \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2})$$

$$N = \frac{1}{2D_D} \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}$$

las variables  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $U$ ,  $V$  y  $b$  quedan definidas como en la ec. (B.22).

APENDICE C

Resolveremos aquí la ecuación (4.9), que reproducimos a continuación

$$D_D \frac{\partial^2 S_{wa}}{\partial X_D^2} - \frac{\partial S_{wa}}{\partial X_D} = \frac{\partial S_{wa}}{\partial t_D} \quad (C.1)$$

Las condiciones iniciales y frontera de interés son

$$S_{wa}(X_D, 0) = 0 \quad X_D > 0 \quad (C.2a)$$

$$S_{wa}(\infty, t_D) = 0 \quad t_D \geq 0 \quad (C.2b)$$

$$S_{wa}(0, t_D) = 1 + D_D \frac{\partial S_{wa}}{\partial X_D} \quad t_D \geq 0 \quad (C.2c)$$

Tomando la transformada de Laplace de la ec. (C.1) y utilizando la condición (C.2a) tenemos

$$D_D \frac{d^2 \bar{S}_{wa}}{d X_D^2} - \frac{d \bar{S}_{wa}}{d X_D} - \psi \bar{S}_{wa} = 0 \quad (C.3)$$

cuya solución es

$$\bar{S}_{wa} = G_1 \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 + \sqrt{1 + 4D_D \psi}) \right] + G_2 \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - \sqrt{1 + 4D_D \psi}) \right] \quad (C.4)$$

La transformada de la condición (C.2b) es

$$S_{wa}(\omega, \phi) = 0$$

Lo que implica que  $G_1 = 0$ . Por lo tanto,

$$\bar{S}_{wa} = G_2 \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} \left( 1 - \sqrt{1 + 4D_D \phi} \right) \right] \quad (C.5)$$

Además, la transformada de la condición (C.2c) es

$$\bar{S}_{wa}(0, \phi) = \frac{1}{\phi} + D_D \frac{d \bar{S}_{wa}(0, \phi)}{d X_D} \quad (C.6)$$

Derivando la ecuación (C.5) con respecto a  $X_D$  se tiene

$$\frac{d \bar{S}_{wa}}{d X_D} = G_2 \frac{1}{2D_D} \left( 1 - \sqrt{1 + 4D_D \phi} \right) \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} \left( 1 - \sqrt{1 + 4D_D \phi} \right) \right]$$

de manera que  $\frac{d \bar{S}_{wa}(0, \phi)}{d X_D}$  está dada por

$$\frac{d \bar{S}_{wa}(0, \phi)}{d X_D} = \frac{G_2}{2D_D} \left( 1 - \sqrt{1 + 4D_D \phi} \right) \quad (C.7)$$

Además, de la ec. (C.5)

$$\bar{S}_{wa}(0, \psi) = G_2$$

Sustituyendo este resultado y la ec. (C.7) en la ec. (C.6) obtenemos

$$G_2 = \frac{2}{\psi (1 + \sqrt{1 + 4D_D \psi})} \quad (C.8)$$

La ec. (C.5) puede entonces escribirse como

$$\bar{S}_{wa} = \frac{2}{\psi (1 + \sqrt{1 + 4D_D \psi})} \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - \sqrt{1 + 4D_D \psi}) \right] \quad (C.9)$$

Para encontrar la transformada inversa de la ec. (C.9), se puede utilizar el método de la integral de inversión compleja.

Haciendo  $\psi = 1 + iz$  en la ec. (C.9) tenemos

$$\bar{S}_{wa} = \frac{2}{(1+iz) (1 + \sqrt{1 + 4D_D(1+iz)})} \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - \sqrt{1 + 4D_D(1+iz)}) \right]$$

Separando la parte real e imaginaria del radicando se tiene



$$\omega_{wa} = \frac{2}{(1 + iz) \left[ 1 + \sqrt{U + iV} \right]} \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - \sqrt{U + iV}) \right] \quad (B.10)$$

donde

$$U = 1 + 4D_D$$

$$V = 4D_D z$$

Mediante el uso de un diagrama de Argand en el plano complejo

$$\theta = \arctan \frac{V}{U}$$

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$$

Además,

$$\begin{aligned} \sqrt{U + iV} &= \sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2} \\ &= \sqrt{\rho} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$S_{wa} = \frac{1}{1+iz} \frac{2}{[1 + \sqrt{\rho} (\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})]} \\ \exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} - i \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}) \right]$$

Multiplicando numerador y denominador por

$$(1 + iz) [1 + \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} - i \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}]$$

$$S_{wa} = \frac{2(1+iz)[1 + (M_1 - iN_1)]}{(1+z^2)[(1+M_1)^2 + N_1^2]}$$

$$\exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1 - iN_1) \right]$$

donde

$$M_1 = \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$N_1 = \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}$$

Ahora,

$$(1 - iz)(1 + M_1 - iN_1) = (1 + M_1 - N_1 z) - i(z + M_1 z + N_1)$$

y

$$\exp \left( -i \frac{N_1 X_D}{2D} \right) = \cos \frac{N_1 X_D}{2D} - i \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D}$$

Por lo tanto,

$$S_{wa} = \frac{2 [(1 + M_1 - N_1 z) - (z + M_1 z + N_1)]}{(1 + z^2) [(1 + M_1)^2 + N_1^2]}$$

$$\left( \cos \frac{N_1 X_D}{2D} - i \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D} \right) \exp \left[ \frac{X_D}{2D} (1 - M) \right]$$

De donde podemos fácilmente separar la parte real  $p$  y la parte imaginaria  $q$ , de tal manera que

$$\bar{S}_{wa} = p + iq$$

$$p = \frac{2 \exp \left[ \frac{X_D}{2D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) [(1 + M_1)^2 + N_1^2]}$$

$$\left[ (1 + M_1 - N_1 z) \cos \frac{N_1 X_D}{2D} - (z + M_1 z + N_1) \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D} \right]$$

$$q = \frac{-2 \exp \left[ \frac{X_D}{2D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) [(1 + M_1)^2 + N_1^2]}$$

$$\left[ (z + M_1 z + N_1) \cos \frac{N_1 X_D}{2D} + (1 + M_1 - N_1 z) \operatorname{sen} \frac{N_1 X_D}{2D} \right]$$

Podemos ahora aplicar la fórmula (24)

$$S_{wa}(X_D, t_D) = \frac{e^{t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} (p \cos zt_D - q \operatorname{sen} zt_D) dz$$

y utilizar las identidades trigonométricas

$$\cos(\Psi - \xi) = \cos\Psi \cos\xi + \operatorname{sen}\Psi \operatorname{sen}\xi$$

$$\operatorname{sen}(\Psi - \xi) = \operatorname{sen}\Psi \cos\xi - \cos\Psi \operatorname{sen}\xi$$

para obtener

$$S_{wa}(X_D, t_D) = \frac{2 e^{t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[\frac{X_D}{2D} (1 - M_1)\right]}{(1 + z^2) [(1 + M_1)^2 + N_1^2]} \left[ (1 + M_1 - N_1 z) \cos\left(zt_D - \frac{N_1 X_D}{2D}\right) + (z + M_1 z + N_1) \operatorname{sen}\left(zt_D - \frac{N_1 X_D}{2D}\right) \right] dz \quad (C.12)$$

donde

$$M_x = \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$N_x = \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{V}{U}$$

$$U = 1 + 4D_D$$

$$V = 4D_D z$$

Como el flujo fraccional de agua activa  $f_w$  está dado por la ec. (4.16)

$$f_w = S_{wa} - D_D \frac{\partial S_{wa}}{\partial X_D} \quad (4.16)$$

Derivando la ec. (C.12) con respecto a  $X_D$  y sustituyendo en la ec. (4.16) obtenemos para el flujo fraccional

$$r_w = \frac{2 e^{t_D}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) [(1 + M_1)^2 + N_1^2]} \right.$$

$$\left. \left[ (1 + M_1 - N_1 z) + \frac{N_1}{2} (z + M_1 z + N_1) - \frac{1 - M_1}{2} (1 + M_1 - N_1 z) \right] \cos \left( z t_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right\} dz +$$

$$\frac{2 e^{t_D}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) \right]}{(1 + z^2) [(1 + M_1)^2 + N_1^2]} \right.$$

$$\left. \left[ (z + M_1 z + N_1) - \frac{N_1}{2} (1 + M_1 - N_1 z) - \frac{1 - M_1}{2} (z + M_1 z + N_1) \right] \sin \left( z t_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right\} dz$$

Pero,

$$(1 + M_1 - N_1 z) + \frac{N_1}{2} (z + M_1 z + N_1) - \frac{1 - M_1}{2} (1 + M_1 - N_1 z) = \frac{1}{2} [(1 + M_1)^2 + N_1^2],$$

$$(z + M_1 z + N_1) - \frac{N_1}{2} (1 + M_1 - N_1 z) - \frac{1 - M_1}{2} (z + M_1 z + N_1) =$$

$$\frac{1 - M_1}{2} (z + M_1 z + N_1) = \frac{z}{2} [(1 + M_1)^2 + N_1^2]$$

Por lo tanto,

$$f_w = \frac{e^{-t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp \left[ \frac{X_D}{2D_D} (1 - M_1) \right]}{1 + z^2} \left[ \cos \left( zt_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) + z \operatorname{sen} \left( zt_D - \frac{N_1 X_D}{2D_D} \right) \right] dz \quad (C.13)$$

Si en la ec. (C.12) hacemos  $M = \frac{1 - M_1}{2D_D}$  y  $N = \frac{N_1}{2D_D}$  tenemos,

$$S_{wa}(X_D, t_D) = \frac{e^{-t_D}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp (MX_D)}{(1 + z^2) [(1 - MD_D)^2 + (ND_D)^2]} \left[ (1 - MD_D - ND_D z) \cos (zt_D - NX_D) + (z - MD_D z + ND_D) \operatorname{sen} (zt_D - NX_D) \right] dz \quad (C.14)$$

Mientras que para el flujo fraccional

$$f_w = \frac{t_D}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(MX_D)}{1+z^2} \left[ \cos(zt_D - NX_D) + z \operatorname{sen}(zt_D - NX_D) \right] dz \quad (C.15)$$

donde

$$M = \frac{1}{2D_D} (1 - \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2})$$

$$N = \frac{1}{2D_D} \sqrt{\rho} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$\theta = \operatorname{arc} \tan \frac{V}{U}$$

$$U = 1 + 4D_D$$

$$V = 4D_D z$$



## REFERENCIAS

1. - FEDER, J. AND JASSANG, T. *Fractal Flow in Porous Media*. Physica Scripta, Vol. T29, 1989.
2. - ORBACH, R. *Dynamics of Fractal Networks*. Science, Vol. 231, 1986.
3. - MUSKAT, M. *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. McGraw-Hill Book Company 1st Edition 1937. 2nd Printing J.W. Edwards Inc., Ann harbor, Michigan, 1946.
4. - BEAR, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. American Elsevier Publishing Company, Inc. 2nd. Printing, 1975.
5. - DE WIEST, R.J.M. *Flow Through Porous Media*. Academic Press, Inc. 5th Edition, 1969.
6. - SCHEIDEGGER, A.E. *The Physics of Flow Through Porous Media*. University of Toronto Press, Third Edition, 1974.
7. - DARCY, H. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, Paris, 1856.
8. - COATS, K.H. AND SMITH, B.D. *Dead-End Pore Volume and Dispersion in Porous Media*. Soc. Pet. Eng. J. Marzo 1964.
9. - BRIGHAM, W.E. *Mixing Equations in Short Laboratory Cores*. Soc. Pet. Eng. J., Feb. 1974.
10. - DEANS, H.A. *A Mathematical Model for Dispersion in the Direction of flow in Porous Media*. Soc. Pet. Eng. J., Marzo 1963.

11. -OGATA, A. *Theory of Dispersion in a Granular Medium.* Geological Survey Professional Paper 411-I, U.S. Department of the Interior, 1970.
12. -BAKER, L. E. *Effects of Dispersion and Dead-End Pore Volume in Miscible Flooding.* Soc. Pet. Eng. J., Junio 1977.
13. -BUCKLEY, S. E. AND LEVERETT, M. C. *Mechanism of Fluid Displacement in Sands.* Trans. AIME Vol. 146, 1942.
14. -WYCKOFF, R. D. AND BOTSET, H. G. *The Flow of Gas-Liquid Mixtures Through Unconsolidated Sands.* Physics, Vol 7, 1936.
15. -LEVERETT, M. C., LEWIS, W. B. AND TRUE, M. E. *Dimensional-Model Studies of Oil-Field Behavior.* Trans. AIME, 1942.
16. -TERWILLIGER, P. L. ET AL. *An Experimental and Theoretical Investigation of Gravity Drainage Performance.* Trans. AIME, Vol. 192, 1952.
17. -KERN, L. R. *Displacement Mechanism in Multi-Well Systems.* Trans. AIME Vol. 195, 1952.
18. -WELGE, H. J. *A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive.* Trans. AIME, Vol 195, 1952.
19. -CARDWELL, W. T. *The Meaning of the Triple Value in Noncapillary Buckley-Leverett Theory.* Trans. AIME, Vol. 216, 1959.
20. -PEREZ CARDENAS F. C. *Dispersión de Trazadores en Medios Porosos Fracturados.* Tesis Profesional, Facultad de Ciencias UNAM, 1986.
21. -MARTINEZ DE LA ROSA J. J. *Sistema para Estudiar el Comportamiento de Trazadores en Medios Porosos Fracturados.* Revista del Instituto Mexicano del Petróleo, Vol XIX No. 1 Enero 1987.

- 22.-CARSLAW, H.S. AND JAEGER, J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1959.
- 23.-PEREZ ROSALES C., PEREZ CARDENAS, F.C., CRUZ HERNANDEZ J. *Waterflooding as Convection-Dispersion Process*. Paper # 18732 de la Society of Petroleum Engineers of AIME. Aceptado para publicación.
- 24.-CHURCHILL, R.V. *Modern Operational Mathematics in Engineering*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1944.