



2  
29

# Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ZARAGOZA

## DISEÑO Y ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL MULTIVARIABLE

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO QUIMICO  
P R E S E N T A N  
GONZALO RAFAEL COELLO GARCIA  
SILVIA MARTINEZ FAJARDO  
MARIA DE LOURDES RIVERA HUERTA

MEXICO, D. F.

1990

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**DISEÑO Y ANALISIS DE SISTEMAS  
DE CONTROL MULTIVARIABLE**

# I N D I C E

INTRODUCCION Y OBJETIVOS.....	1
CAPITULO 1 GENERALIDADES.....	5
1.1 ASPECTO HISTORICO.....	7
1.2 OBJETIVOS DE LA DINAMICA DE PROCESOS.....	16
1.3 OBJETIVOS DEL CONTROL DE PROCESOS.....	17
1.4 CLASIFICACION DE LAS VARIABLES DE UN PROCESO.....	18
1.4.1 VARIABLES DE PROCESO.....	18
1.4.2 VARIABLES DE ENTRADA.....	18
1.4.3 VARIABLES DE SALIDA.....	20
1.5 ASPECTOS BASICOS PARA EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL.....	26
1.6 ELEMENTOS DE UN SISTEMA DE CONTROL.....	29
CAPITULO 2 DINAMICA DE PROCESOS.....	33
2.1 TEORIA DE MODELADO.....	35
2.1.1 BASES PARA LA ELABORACION DE UN MODELO.....	35
2.1.2 CLASIFICACION DE LOS MODELOS.....	40
2.2 DINAMICA EN EL ESPACIO DEL TIEMPO.....	47
2.2.1 MODELO DE VARIABLE DE ESTADO.....	48
2.3 DINAMICA EN EL ESPACIO DE LAPLACE.....	53
2.3.1 DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	55

2.3.2	LA FUNCION DE TRANSFERENCIA.....	55
2.3.3	MODELO DE VARIABLE DE ESTADO.....	66
2.3.4	REPRESENTACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN EL DOMINIO DE LAPLACE DE UN MODELO DE VARIABLE DE ESTADO.....	76
2.3.5	DIAGRAMA DE BLOQUES.....	78
2.3.6	TIEMPO MUERTO.....	79
2.4	DINAMICA EN EL ESPACIO DE LA FRECUENCIA.....	81
2.4.1	DEFINICION DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.....	82
2.4.2	INFLUENCIA DE UNA SEÑAL SENOSOIDAL EN UN SISTEMA.....	84
2.4.3	LA SUSTITUCION DE "s" POR "iw".....	92
2.4.4	DIAGRAMAS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.....	96
CAPITULO 3 CONTROL DE PROCESOS.....		103
3.1	TIPOS DE CIRCUITOS DE CONTROL.....	105
3.1.1	SISTEMA DE CONTROL FEEDBACK (RETROALIMENTACION).....	105
3.1.2	SISTEMA DE CONTROL FEEDFORWARD (CONTROL HACIA ADELANTE).....	116
3.1.3	CIRCUITO DE CONTROL ABIERTO.....	126
3.1.4	CIRCUITO DE CONTROL COMPUESTO.....	128
3.2	ELEMENTOS DE UN CIRCUITO DE CONTROL.....	152
3.2.1	INSTRUMENTO DE MEDICION.....	152
3.2.2	CONTROLADOR.....	162
3.2.3	ELEMENTO FINAL DE CONTROL.....	174

3.2.4 INSTRUMENTOS COMPLEMENTARIOS EN UN SISTEMA DE CONTROL.....	187
3.3 TEORIA DE CONTROL DE PROCESOS.....	190
3.3.1 DIAGRAMA DE BLOQUES.....	190
3.3.2 SINTESIS DE SISTEMAS DE CONTROL.....	201
3.3.3 ESPECIFICACIONES DINAMICAS DE UN SISTEMA DE CONTROL.....	208
3.3.4 CONTROLABILIDAD.....	211
3.3.5 ESTABILIZABILIDAD.....	215
3.3.6 NORMALIDAD.....	217
3.3.7 EL PROBLEMA DE INTERACCION.....	217
3.3.8 TECNICAS DE DISEÑO DE CONTROLADORES MULTIVARIABLES.....	224
3.3.9 AJUSTE DEL CONTROLADOR.....	238

#### CAPITULO 4 DISEÑO Y ANALISIS DE UN SISTEMA

DE CONTROL.....	247
4.1 DESARROLLO Y ANALISIS DINAMICO DEL MODELO MATEMATICO PARA UN REACTOR.....	248
4.1.1 DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO.....	248
4.1.2 OBJETIVOS DEL SISTEMA DE CONTROL.....	261
4.1.3 ANALISIS DE GRADOS DE LIBERTAD PARA EL MODELO MATEMATICO DEL RTAC.....	262
4.1.4 CLASIFICACION DE LAS VARIABLES DEL RTAC....	264
4.1.5 SELECCION DE LA ESTRUCTURA DE CONTROL.....	264

4.1.6 SOLUCION DEL MODELO MATEMATICO PARA EL RTAC.....	266
4.1.7 DISEÑO DE LOS CONTROLADORES PARA RTAC.....	294
4.2 RESULTADOS.....	303
4.3 ANALISIS DE RESULTADOS.....	346
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	355
APENDICES.....	359
APENDICE A. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SIMULTANEAS Y TECNICAS ANALITICAS DE SOLUCION.....	361
APENDICE B. LINEALIZACION.....	387
APENDICE C. VARIABLES DE DESVIACION.....	394
APENDICE D. TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	397
INDICES DE FIGURAS, TABLAS Y GRAFICAS.....	407
INDICE DE FIGURAS.....	409
INDICE DE TABLAS.....	414
INDICE DE GRAFICAS.....	416
BIBLIOGRAFIA.....	421

## INTRODUCCION Y OBJETIVOS.

Hoy en día, la necesidad industrial de obtener productos de mayor calidad, incrementar la producción, disminuir el consumo de energía, aumentar la seguridad y cubrir los requisitos legales que regulan las condiciones de los efluentes de las plantas químicas, ha impulsado enormemente el desarrollo de la teoría de control en las últimas décadas. Entonces, se ha incrementado la complejidad de los procesos y surge el problema de controlar más de una variable, es decir, procesos químicos de naturaleza multivariable, los cuales se caracterizan por tener múltiples entradas y múltiples salidas (controladas); y debido a la importancia que van adquiriendo estos sistemas, es necesario para su estudio desarrollar estrategias de control multivariable. Así mismo, se requiere el diseño y el análisis de sistemas de control para poder obtener de esta forma el mejor control de cualquier proceso en estudio.

En la presente tesis se establece el diseño y análisis de sistemas de control multivariable.

En el capítulo 1 se muestran primeramente los antecedentes históricos del surgimiento y desarrollo que ha tenido la dinámica y teoría de control hasta la última década, y como ésto ha contribuido al avance en el diseño y análisis de los sistemas de control multivariable.

También se mencionan los conceptos básicos necesarios para poder hacer el diseño de un sistema de control, por ejemplo, los

objetivos de la dinámica y del control de procesos, las variables que están involucradas en el proceso, los elementos que forman el sistema de control, estos entre los más importantes.

En el capítulo 2 se hace referencia a lo que se conoce como la dinámica de procesos, que es una herramienta indispensable para el diseño de sistemas de control. Para poder analizar un proceso, es necesario establecer el modelo matemático a régimen dinámico del comportamiento del mismo, por lo que se debe de especificar el método y las bases necesarias para el desarrollo del modelo. Esto es importante ya que se debe de conocer detalladamente que tipo de proceso se está estudiando, así como las ecuaciones que lo rigen, y con ésto establecer los primeros pasos para el diseño y análisis de un sistema de control.

En este mismo capítulo también se dan a conocer las diferentes técnicas de análisis dinámico usadas en la teoría de control clásica, como es la dinámica en el espacio del tiempo, en el espacio de Laplace y en el espacio de la frecuencia.

La dinámica en el espacio del tiempo implica un análisis de las ecuaciones que describen el comportamiento de un sistema o proceso con respecto al tiempo; esto es, hablar de sistemas dinámicos representados por ecuaciones diferenciales sean lineales o no lineales, que serán resueltas por los métodos más adecuados.

El análisis dinámico en el espacio de Laplace implica convertir las ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas, lo cual permite una rápida forma de llegar a la solución del

sistema o modelo. Sin embargo, cuando el modelo es complejo resulta complicado el manejo de estas ecuaciones.

La tercera alternativa, la dinámica en el espacio de la frecuencia es un método gráfico que permite resolver sistemas complejos con relativa facilidad, donde su mayor aplicación es en sistemas de control cerrados.

Por lo que respecta a capítulo 3, en éste se dan a conocer los diferentes tipos de estructuras de control y las características de cada uno de ellos para poder ver cual será la más adecuada para el proceso en estudio. Por otra parte, también es necesario saber que tipos de elementos están involucrados dentro de un sistema de control (elemento primario de medición, controlador, válvula, etc.), estos elementos varían dependiendo de lo que se desee controlar.

En este capítulo también se ve la teoría de control de procesos, que involucra lo que se conoce como diagrama de bloques, que se considera un medio muy conveniente para visualizar y analizar los sistemas de control. También esto se obtiene mediante lo que se conoce como síntesis de procesos, que en particular se referirá a la síntesis de estructuras de control de procesos. Todo esto es para poder diseñar y analizar la estructura de control, y saber si el sistema o proceso es estable o no. Esto dependerá del comportamiento que tenga una vez que ya se estableció la estructura de control, si el sistema o proceso no es estable, aquí se debe de establecer un análisis adecuado para lograr que sea estable, mediante el uso de las diferentes

técnicas que se mencionaron anteriormente.

Para poder ver de que forma se aplica todo lo anterior, en el capítulo 4 se desarrolló un modelo para un RTAC no isotérmico, para unas condiciones de operación en particular, en el cual se aplicaron todos los conocimientos adquiridos para desarrollar y establecer el sistema de control más adecuado para el mismo.

Este trabajo fué desarrollado en función de los siguientes objetivos:

1. Analizar los fundamentos teóricos de la dinámica y control de procesos.
2. Analizar las técnicas de modelado para sistemas de control multivariable.
3. Analizar las técnicas de síntesis de diagramas de bloques para sistemas de control multivariable.
4. Analizar las técnicas y criterios de estabilidad y controlabilidad en sistemas de control multivariable.
5. Seleccionar y diseñar un sistema de control multivariable.

**CAPITULO 1**

**GENERALIDADES**

## 1.1 ASPECTO HISTORICO.

En el transcurso de los años la tecnología se ha desarrollado de una manera sorprendente, cada vez son más los recursos y facilidades con los que se cuenta para mejorar los procesos, lo que permite en el caso de la Ingeniería Química, que los productos elaborados sean más puros y a la vez que las empresas tengan mayores beneficios. Estos adelantos se deben al constante estudio para hacer que las máquinas, los equipos de proceso, instrumentos y equipos de control trabajen de una manera más eficiente y continua. Es por esto que en el presente apartado se hará una breve reseña del desarrollo del control a través del tiempo.

No es una sorpresa que el hombre use controladores, ya que en la naturaleza, los controladores automáticos aparecen en todas partes. Por ejemplo, el control de temperatura en animales de sangre caliente y el heliotropismo que causa que las plantas giren hacia el sol. Sin embargo, lo que produjo un incremento en el uso de los controladores fue el aumento de la maquinaria.

Las primeras aplicaciones del control de retroalimentación se basan en los mecanismos regulados con flotador, desarrollados en Grecia en el periodo 0 a 300 a.C. El reloj de agua de Ktesibios usaba un regulador con flotador; una lámpara de aceite inventada por Fnilón aproximadamente en el año 250 a.C. usaba un regulador con flotador para mantener un nivel constante de aceite; Herón de Alejandría que vivió en el primer siglo a.C.

publicó un libro titulado "Pneumática", el cual mostraba mecanismos de control de nivel de agua mediante reguladores con flotador.

El primer sistema de retroalimentación inventado en Europa fue el regulador de temperatura de Cornelis Drebbel (1572-1633). Denis Papin (1647-1712) inventó el primer regulador de presión para calderas de vapor en 1681 (este regulador fue una especie de dispositivo de seguridad semejante a la válvula de las ollas de presión).

El primer regulador de retroalimentación automático usado en un proceso industrial, según se acepta generalmente, fue el regulador centrífugo de James Watt, desarrollado en 1769 para controlar la velocidad de una máquina de vapor.

El regulador de nivel de agua a base de un flotador, que se dice fue inventado por I. Polzunou en 1765, es el primer sistema histórico dado a conocer por la Unión Soviética; el flotador detecta el nivel de agua y controla la válvula que tapa la entrada de la caldera.

Los avances más importantes en el desarrollo de los mejores controladores e instrumentos afines, vino en gran parte después de 1930, los cuales fueron soluciones a problemas que surgieron en la industria, problemas causados por la complejidad de los procesos y la necesidad de una mayor producción, así como el de obtener un producto mejor y más uniforme. Este y otros problemas han hecho absolutamente esencial mantener el desarrollo de controladores e instrumentos de medición con mayor

sensitividad y con respuesta rápida para cualquier perturbación que ocurra en un sistema.

Teóricamente los procesos con control aparecieron en 1930. Grebe, Boundy y Cermak discutieron algunas dificultades en el control de pH y mostraron las ventajas del uso de controladores con acción derivada.

Ivanoff en (1934) introdujo el concepto de desviación potencial y corrección potencial como una evaluación cuantitativa de sistemas de control. Hanzen introdujo el término de "servomecanismo" para la localización del controlador y discutió el diseño de los sistemas de control capaces de ser modificados en el punto de ajuste (set point). Con respecto al trabajo de retroalimentación, Nyquist desarrolló un procedimiento general y relativamente sencillo para determinar la probabilidad de sistemas con retroalimentación.

Se lograron grandes avances durante la segunda guerra mundial en el desarrollo de servomecanismos para el direccionamiento de barcos, aeroplanos y antenas para radar.

En este mismo período de tiempo, Ziegler y Nichols desarrollaron un método de ajuste para el controlador, en donde la ganancia del controlador es gradualmente incrementada hasta que el proceso controlado sufre una oscilación ininterrumpida.

Después de la guerra aparecieron varios textos dando a conocer varios escritos como los de James, Nichols, Phillips, Laver, Lesnick y Matson, en 1947; Brown y Campbell en 1948; Andret, Taplin, Chestnut y Mayer, en 1951.

El control en los procesos químicos se llevaba a cabo por operadores que observaban localmente calibrando y ajustando las válvulas, lo cual se llevaba mucho tiempo y requería de mucha atención. Ante la necesidad de estar alerta, gradualmente esta práctica disminuyó con la evolución del control automático y con los controladores de medición y válvulas combinadas en paquetes. Durante algún tiempo las válvulas se accionaban con aire, un resorte o actuador de diafragma; el desarrollo de la transmisión de señales neumáticas o eléctricas a partir de 1940, permitió el uso de un cuarto de control y trajo consigo la reducción del número de operadores.

En 1945 se controlaba el flujo con orificios, en un manómetro de mercurio de transmisión neumática o con un rotámetro, la temperatura con termocoples o termómetros de bulbo de mercurio y la presión con transmisión neumática.

En 1950 se diseñaron instrumentos, transmisores y controladores, que tuvieron más capacidad neumática, sensibilidad, libertad de impulso y rapidez de respuesta. Los transmisores de temperatura de bulbo de mercurio fueron reemplazados por transmisores de bulbo de gas. En la década de los 50's se comienzan a aplicar las computadoras a sistemas de control, utilizándose como un elemento de control.

Cohen y Coon en 1953 desarrollaron una nueva técnica de ajuste del controlador conocida como "método de la curva de respuesta dinámica del proceso", en donde el controlador es puesto en un modo manual y marcando un pequeño cambio de paso en

la salida del controlador. El resultado de la curva de respuesta del proceso es aproximada por un simple modelo dinámico, con una función de transferencia de primer orden más tiempo muerto, cuyos parámetros son fácilmente determinados.

En los años 60's los desarrollos teóricos se incrementaron encontrando inicialmente dificultad en la aplicación de las computadoras a la ciencia de control. Durante esta década la computadora digital operó sobre aparatos neumáticos e hidráulicos, además de operaciones amplificadoras. El desarrollo y utilización de las computadoras en esta década sirvió de base para el avance en la síntesis de procesos y es a partir de estas fechas que se comienzan a desarrollar cada uno de los subproblemas que integran su campo de aplicación.

Buckley (1964) y Shinskey (1967) llevaron a cabo estos trabajos integrando consideraciones dinámicas. Las estructuras de control eran evaluadas utilizando heurísticas derivadas de consideraciones prácticas y teóricas.

En los comienzos de los 70's se introduce la teoría de control moderna, basada en el espacio de estado, aunque no reemplaza totalmente a la teoría clásica fundada en la respuesta dinámica y en la transformada de Laplace.

Lo mencionado anteriormente es en base a que la teoría de control clásica trata de sistemas lineales de una entrada y salida, siendo absolutamente ineficiente ante sistemas de múltiples entradas y salidas. El desarrollo de la teoría de control moderna afronta no sólo sistemas de múltiples entradas y

salidas, sino también es de gran utilidad en sistemas lineales y no lineales. El control moderno dentro de la Ingeniería trabaja con conocimientos de ambos enfoques o teorías.

Muchas técnicas en el dominio de la frecuencia han sido desarrolladas para el análisis de la estabilidad y diseño de control multivariable, como el teorema multivariable de Nyquist desarrollado por McFarlane en 1972. Astrom y W. Henmark en 1973 dan a conocer los sistemas de control de ajuste (STC's), para un amplio rango de condiciones de operación en modelos lineales modificados para adecuar nuevas condiciones de operación.

Jutan en 1974 realizó estudios de control multivariable por computadora para un reactor en una planta piloto, diseñando un algoritmo para compensar las perturbaciones existentes en el sistema.

Foss (1973), Kestenbaum (1976) y Lee y Wekman (1976) revisaron las teorías de síntesis de control existentes y concluyeron que no estaban dirigidas directamente a los problemas de diseño total de sistemas de control. El énfasis de las teorías comunes ha sido en la evaluación dinámica detallada del sistema de control utilizando características estables entrada-salida del proceso, donde Weber y Brisihow (1972) incluyeron los efectos de errores de medición. Niederliski (1971) estableció que los vínculos de control pueden ser seleccionados de una generación multivariable.

Govind y Power (1976) utilizaron modelos de procesos simples a través de una gráfica de causa y efecto, llevando el

proceso de control, del control de unidades de operación a niveles altos de control de plantas completas. Establecieron una estructura de control feedforward (hacia adelante) o feedback (hacia atrás), generando todas las posibles estructuras de control.

Umeda y Kuriyama (1978) desarrollaron una aproximación diferente a la síntesis de control regulatorio para una planta química descomponiéndola en unidades individuales. Para un primer nivel, sintetizan la mejor estructura de control para cada unidad, independientemente de las otras. En un segundo nivel, ajustan cualquier perturbación que surja del primer nivel, cuando la planta es considerada completamente integrada.

Morari (1978), Arkun y Stephanopoulos (1978) presentaron un desarrollo formal para todas las estructuras de control factibles a través del uso de conceptos generalizados de controlabilidad y observabilidad estructural. Una reciente aproximación a la síntesis de sistemas de control fué sugerida por Douglas (1977) en base a una rápida estimación del impacto económico de las variables de perturbación sobre el proceso para encontrar una estructura de control que compense esos efectos.

Doukas y Luyben en 1978 desarrollaron un método para resolver el problema de controlar un proceso con un distinto número de variables manipuladas y controladas, es decir, sistemas de control multivariable no cuadráticos.

En los 80's las microcomputadoras continuamente reemplazan otros aparatos como los elementos de control, aunque siempre

serán necesarios para ampliaciones operacionales, neumáticas e hidráulicas debido a sus simplicidad, rentabilidad y requerimientos de fuerza.

El uso del control inferencial en procesos de control ha sido el sujeto de algunos recientes estudios realizados por Morari y Stephanopoulos en 1980 para el control de reactores de polimerización. Aproximadamente en este mismo periodo, debido a la introducción de la aproximación en el espacio de estado, Morari también desarrolló la llamada "Teoría de Control de Modelo Interno" (IMC) (que brinda un funcionamiento tan bueno como el logrado por un controlador óptimo. Así, está teoría pretende cerrar la brecha entre la teoría y la práctica en el campo del control de procesos). El control de Modelo Interno se define para sistemas de una entrada y una salida (SISO), de tiempo discreto y se establecen sus relaciones con otros esquemas de control. También la estructura IMC permite un procedimiento racional de diseño del controlador.

En 1981 Astrom estableció dos esquemas del parámetro de control adaptativo: el modelo de referencia del controlador adaptativo y el regulador de ajuste que tienen aplicación en reactores de polimerización. También en este año Anbumadi y Lachmann determinaron sistemas de control de ajuste basados en modelos no lineales que han provisto significativos progresos sobre STC's estandar basados en modelos lineales. La aplicabilidad de está técnica es limitada a procesos con no

TABLA 1.1 ALGUNOS EVENTOS EN LA HISTORIA DE CONTROL.

AÑO	TEORIA DE CONTROL	APLICACION DE CONTROL	ANTECEDENTES
1770		REGULADOR WATT Y SU MEJORAMIENTO.	MOLINO DE VIENTO.
1800			MAQUINA DE VAPOR.
1850	ARTICULO DE MAXWELL ANALISIS DEL SISTEMA DE CONTROL EN UN TELESCOPIO.	REGULADORES RELACIONADOS A GENERACION DE ENERGIA Y TRANSMISION.	PROGRESOS EN MAQUINARIA.
1900	LIBRO SOBRE CONTROL DE VELOCIDAD, USO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DEL CRITERIO DE ROUTH HURWITZ PARA ALGUNOS SISTEMAS SIMILES.	PILOTO AUTOMATICO DE AVION.	PRIMERA GUERRA MUNDIAL.
	METODO DE ZIEGLER-NICHOLS.	INSTRUMENTOS Y REGULADORES PARA PROCESOS E INDUSTRIAS DE ENERGIA.	PROGRESOS EN LA INDUSTRIA.
	METODO DE ZIEGLER-NICHOLS.	CONTOPOLES PARA COMUNICACION.	
	ENFOQUE AL DOMINIO DE LAPLACE Y AL METODO DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA. LUGAR DE LA RAIC.	SEGURMECANISMOS. CONTROLES DE ARMAS.	SEGUNDA GUERRA MUNDIAL.
1950		CONTROLADORES ELECTRONICOS.	
		PROCESOS Y PLANTAS CON CONTROLES COMO PARTE ESENCIAL.	ENERGIA NUCLEAR. COMPUTADORAS.
	METODO DE LA TRANSFORMADA Z.	REGISTRO DE DATOS.	
1960	INICIACION EN EL ESPACIO DE ESTADO.	COMPUTADORA DIGITAL PARA CONTROL DE COMPUTACION.	AUTOMATIZACION. PROYECTOS ESPACIALES.
	TEORIA DE CONTROL OPTIMO.	CONTROL DIGITAL DIRECTO.	SISTEMAS Y CONCEPTOS DE CONTROL EN BIOMEDICINA Y OTROS CAMPOS.
	TEORIA MATEMATICA DE CONTROL DE PROCESOS.		
	ANALISIS DETALLADOS DE CONTROLES OPTIMOS.	PROGRESOS HACIA LA OPTIMIZACION DINAMICA. DESARROLLO DE PROGRAMAS DE COMPUTACION	
1970			EL HOMBRE SOBRE LA LUNA.
1980	DESARROLLO DE LA TEORIA DE CONTROL MODERNA.	TECNICAS DE AJUSTE DE CONTROLADORES DE UNA ESTRUCTURA SISO EN SISTEMAS MULTIVARIABLES.	
	DESARROLLO DE LA TEORIA DE SINTESIS EN SISTEMAS DE CONTROL.	COMPENSADORES DE TIEMPO MUERTO. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA UNA PLANTA. INTEGRACION DE ENERGIA.	

linealidades específicas.

Versiones multivariantes del regulador de ajuste (STR) fueron experimentalmente aplicadas a columnas de destilación por Dahlquist, así como Morris aplicó versiones multivariantes del STC.

Luyben en 1985 propuso el ajuste de controladores de una entrada y una salida (SISO) en el ambiente multivariable. La estructura del sistema debe ser especificada para usar esta técnica: que variables son controladas, que variables son manipuladas y como son introducidas en la estructura SISO.

Agarwill y Seborg desarrollaron un método de sistema de control de ajuste no lineal para una entrada y una salida, así como también en 1986 proveen un algoritmo STC para múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO).

## 1.2 OBJETIVOS DE LA DINAMICA DE PROCESOS.

Los objetivos de la dinámica de procesos son:

- a) Construir modelos matemáticos dinámicos, reales pero razonables, para analizar el comportamiento de procesos o sistemas en estudio.
- b) Diseñar procesos o equipo mediante una simulación, utilizando modelos dinámicos.
- c) Aportar información dinámica (la velocidad de respuesta del proceso con respecto al tiempo, el tipo de respuesta y si el proceso es estable o no lo es) para

el diseño de controladores a través de la solución de dichos modelos.

d) Optimizar el equipo y condiciones de operación.

### 1.3 OBJETIVOS DEL CONTROL DE PROCESOS.

Durante su operación, una planta debe de satisfacer algunos requerimientos impuestos por sus diseñadores y por las condiciones técnicas, económicas y sociales. Algunos de estos requerimientos son:

- 1) Limitar las desviaciones de las especificaciones de un producto.
- 2) Asegurar el cumplimiento de las condiciones de operación y entrada de un proceso.
- 3) Disminuir el consumo de energía.
- 4) Incrementar la producción.
- 5) Aumentar la seguridad, detectando y previendo situaciones de peligro en un proceso.
- 6) Cubrir los requisitos legales que regulan las condiciones de los efluentes de una planta.

En general, el objetivo es diseñar sistemas de control de procesos para:

- a) Suprimir la influencia de perturbaciones externas.
- b) Asegurar la estabilidad de un proceso.
- c) Optimizar el funcionamiento de un proceso.

#### 1.4 CLASIFICACION DE LAS VARIABLES DE UN PROCESO.

A continuación se clasifican y definen las variables que intervienen en un proceso.

##### 1.4.1 VARIABLES DE PROCESO.

Una variable de proceso es una cantidad física o química cuya variación afecta al proceso.

##### 1.4.2 VARIABLES DE ENTRADA.

Las variables de entrada de un proceso son aquellas que denotan los efectos de los alrededores sobre un proceso químico y se clasifican en:

- a) Variables de carga. Son aquellas variables que afectan a la variable controlada incluyendo a las de perturbación.
- b) Variables manipuladas o ajustables. Son aquellas variables que se modifican con propósitos de control.
- c) Variables de perturbación. Son variables de un sistema en las cuales se lleva a cabo un cambio no deseado el cual tiende a afectar a la variable controlada.

A su vez las perturbaciones pueden ser clasificadas en:

- 1) Perturbación tipo escalón. Son funciones que cambian

instantáneamente de un nivel a otro y después se mantienen constantes.

- Escalón unitario. Si el tamaño de paso es igual a la unidad, la perturbación es llamada escalón unitario  $U(t)$  y se define como:

$$U(t) = 1 \quad \text{para } t > 0 \quad t = \text{tiempo}$$

$$U(t) = 0 \quad \text{para } t \leq 0$$

- Escalón no unitario.

$$H(t) = H \quad \text{para } t > 0$$

$$H(t) = 0 \quad \text{para } t \leq 0$$

2) Perturbación tipo impulso. También llamada "función delta de Dirac", cuyas características son: Área igual a uno, altura  $h$ , que tiende a infinito y base igual a  $1/h$  que tiende a cero.

3) Perturbación de tipo pulso. Es una función que empieza y termina en el mismo nivel.

- Pulso de tipo rectangular. Este tipo de funciones es la suma de una función escalonada negativa realizada a un tiempo  $D$  después de cero. Así, un pulso rectangular de altura uno y amplitud  $D$ :

$$D = U(t) - U(t - D)$$

- Pulso de tipo triangular.

- Pulso Gaussiano.

4) Perturbaciones de tipo rampa. Es una función que cambia linealmente con el tiempo.

5) Perturbaciones de tipo onda senosoidal.

Estas y otras funciones más comunes de variables de perturbación se muestran en la tabla 1.2.

#### 1.4.3 VARIABLES DE SALIDA.

Las variables de salida son aquellas que denotan el efecto del proceso sobre los alrededores.

a) Variable controlada. Es aquella variable o condición de proceso que se desea mantener en un valor único.

Las variables controladas se clasifican a su vez en:

- 1) Variables medibles. Son aquellas cuyos valores son conocidos por mediciones directas.
- 2) Variables no medibles. Son aquellas que no pueden ser directamente medidas.

Cuando las variables controladas son no medibles se deben usar otras variables que puedan ser medidas segura y fácilmente, éstas son llamadas mediciones secundarias. Así, la medición de las variables controladas no medibles será función de la medición secundaria.

No todas las variables de salida requieren ser controladas.

En la fig. 1.1 se muestran las clases de variables que se encuentran involucradas en un proceso.

TABLA 1.2 TIPOS DE PERTURBACIONES.

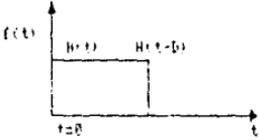
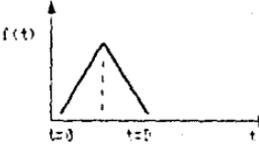
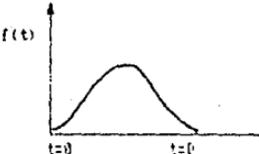
PERTURBACION	GRAFICA	FUNCION
PULSO RECTANGULAR		
PULSO TRIANGULAR		
PULSO GAUSSIANO		$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (t-\mu)^2 / \sigma^2}$ <p> <math>\mu</math> = VALOR MEDIO DE LA DISTRIBUCION  <math>\sigma</math> = DESVIACION ESTANDAR         </p>

TABLA 1.2 TIPOS DE PERTURBACIONES. (CONT.)

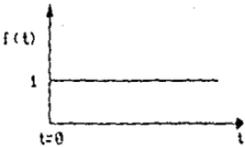
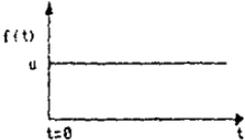
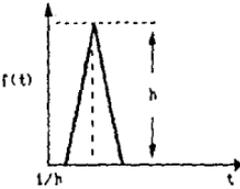
PERTURBACION	GRAFICA	FUNCION
ESCALON UNITARIO		$f(t) = 1$
ESCALON NO UNITARIO		$f(t) = u$
IMPULSO		

TABLA 1.2 TIPOS DE PERTURBACIONES. (CONT.)

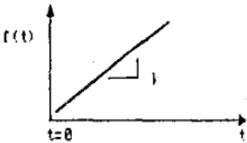
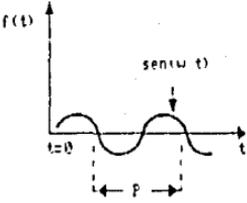
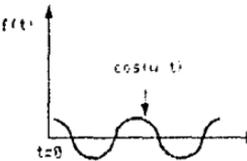
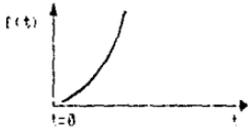
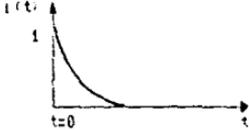
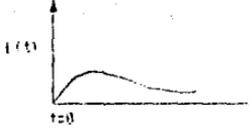
PERTURBACION	GRAFICA	FUNCION
RANPA	 <p>The graph shows a coordinate system with a vertical axis labeled <math>f(t)</math> and a horizontal axis labeled <math>t</math>. A straight line starts at the origin, which is marked <math>t=0</math>, and extends upwards and to the right. A small right-angled triangle is drawn below the line to indicate its constant slope.</p>	$f(t) = t$
ONDA SENOSOIDAL	 <p>The graph shows a coordinate system with a vertical axis labeled <math>f(t)</math> and a horizontal axis labeled <math>t</math>. A sine wave starts at the origin, which is marked <math>t=0</math>. The wave oscillates above and below the horizontal axis. A vertical arrow points to the first peak of the wave, labeled <math>\text{sen}(\omega t)</math>. A horizontal double-headed arrow below the axis indicates the period of the wave, labeled <math>P</math>.</p>	$f(t) = \text{sen}(\omega t)$
ONDA COSENOIDAL	 <p>The graph shows a coordinate system with a vertical axis labeled <math>f(t)</math> and a horizontal axis labeled <math>t</math>. A cosine wave starts at its maximum value at the origin, which is marked <math>t=0</math>. The wave oscillates above and below the horizontal axis. A vertical arrow points to the first peak of the wave, labeled <math>\text{cos}(\omega t)</math>.</p>	$f(t) = \text{cos}(\omega t)$

TABLA 1.2 TIPOS DE PERTURBACIONES. (CONT.)

PERTURBACION	GRAFICA	FUNCION
POTENCIAL		$f(t) = t^n$
EXPONENCIAL		$f(t) = e^{-at}$
POTENCIAL-- EXPONENCIAL		$f(t) = t^n e^{-at}$

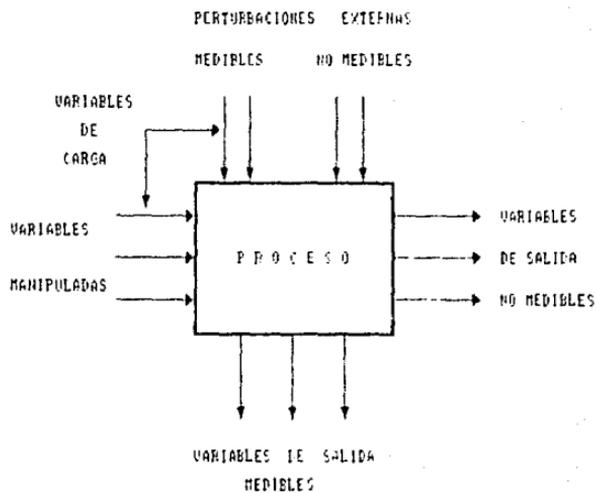


FIGURA 1.1 VARIABLES DE PROCESO.

## 1.5 ASPECTOS BASICOS PARA EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL.

Las cuestiones básicas que se deben contestar cuando se diseña un sistema que satisfaga las necesidades de control de un proceso, se definen en los siguientes puntos:

### a) DEFINICION DE LOS OBJETIVOS DE CONTROL.

El elemento central en una estructura de control es el proceso que se desea controlar. La primera cuestión que debe surgir del diseñador del sistema de control es:

¿ Cuáles son los objetivos operacionales que un sistema de control debe conseguir ? Ver sección 1.3.

Al comienzo, los objetivos de control se definen cualitativamente y subsecuentemente son cuantificados, usualmente en términos de las variables de salida.

### b) SELECCION DE LAS VARIABLES DE MEDICION.

Siempre se necesitan medios para controlar el funcionamiento del proceso. Esto se hace midiendo los valores de ciertas variables de proceso (temperatura, presión, concentración, flujo, etc). Por lo tanto la segunda cuestión es:

¿ Cuáles variables de deben medir a fin de controlar el funcionamiento operacional de una planta ? Ver sección 1.4.3.

### c) SELECCION DE LAS VARIABLES MANIPULADAS.

Una vez que los objetivos han sido especificados y las

variables de medición identificadas, la siguiente pregunta se refiere a como se efectuará o logrará un cambio en el proceso:

¿Cuáles son las variables manipuladas a ser utilizadas para controlar un proceso químico ?

Usualmente, en un proceso tenemos un número de variables de entrada, las cuales pueden ser ajustadas libremente. La selección de algunas de ellas para usarlas como variables manipuladas es una cuestión crucial ya que la elección afectará la calidad de las acciones de control que se tomen.

#### d) SELECCION DE LA CONFIGURACION DE CONTROL.

El problema final a resolver es la definición de la configuración de control.

Una configuración de control es la estructura utilizada para conectar las variables de medición con las variables manipuladas. Así, la pregunta se refiere a:

¿Cuál es la mejor configuración de control para una situación de control de un proceso dado ?

La respuesta a esta cuestión es muy crítica para la calidad del sistema de control.

Dependiendo de cuantas salidas controladas y cuantas entradas haya en el proceso se puede distinguir la configuración como:

1) Sistema de control una entrada-una salida, llamado también SISO de las siglas en inglés (single

input-single output).

- 2) Sistema de control de múltiples entradas-múltiples salidas, llamado también MIMO (multiple input-multiple output).

Por ejemplo, si el objetivo de control en algún sistema es mantener el nivel del líquido a un valor deseado manipulando el flujo del efluente, se tiene un sistema SISO.

De lo contrario, si los objetivos de control son (más de uno) mantener el nivel y la temperatura del líquido a valores deseados, manipulando (más de una variable) el flujo de vapor y el flujo del efluente, se tiene un sistema MIMO.

#### e) DISEÑO DEL CONTROLADOR.

En todas las configuraciones de control, para poder diseñar el controlador se debe de contestar la siguiente pregunta:

¿Cómo es la información tomada de las mediciones, que se utilizará para ajustar los valores de las variables manipuladas ?

La respuesta constituye el modo de control o ley de control, la cual es implementada automáticamente por el controlador.

En el capítulo 3 se estudian las características de varios modos de control; se debe de recordar que la selección del modo de control apropiado es una cuestión

importante que debe de responder el diseñador del control.

## 1.6 ELEMENTOS DE UN SISTEMA DE CONTROL.

Un sistema de control automático es un dispositivo que mide una variable y que actúa para mantenerla en un valor deseado, cuando no lo está.

Por definición, es una serie de instrumentos y un proceso determinado, del que se mide una variable, se hace comparar con un valor prefijado (punto de ajuste) y en el caso de no coincidir se envía una señal para que el elemento final de control varíe su posición para tender a corregir el error.

En todos los sistemas de control se pueden distinguir los siguientes elementos físicos:

- a) El proceso a controlar. Representa el equipo en conjunto con las operaciones químicas y físicas que ocurran en él.
- b) Instrumentos de medición o sensores. Tales instrumentos son utilizados para medir las perturbaciones, las variables de salida controladas o las variables de salida secundarias y son la principal fuente de información acerca de lo que sucede en el proceso.
- c) Transductores. Muchas mediciones no pueden ser utilizadas para controlar, hasta que son convertidas a

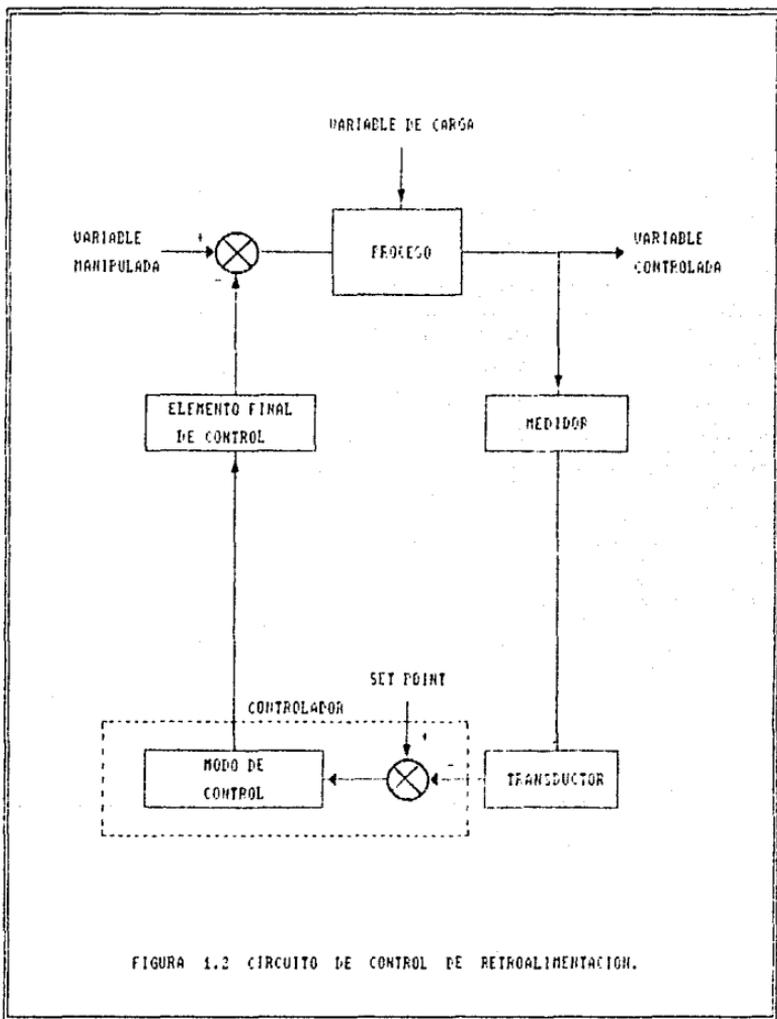
cantidades físicas (tales como voltaje o corriente eléctrica, o una señal neumática, aire o líquido comprimido), las cuales pueden ser transmitidas fácilmente. Es decir, estos dispositivos reciben información, modifican esta información o su forma y envían una señal de salida resultante.

- d) Líneas de transmisión. Son utilizadas para llevar la señal del dispositivo de medición al controlador y la señal de control al elemento final de control. En el pasado, las líneas de transmisión fueron neumáticas, pero con el advenimiento de los controladores analógicos electrónicos y especialmente la expansión del uso de computadoras digitales para control, las líneas de transmisión llevan señales eléctricas.
- e) El controlador. Este es el elemento que recibe la información de los dispositivos de medición y decide que acción debe ser tomada.
- f) Elemento final de control. Es el componente del sistema de control que implementa la acción de control. Este recibe la salida de un controlador (señal de actuación) y ajusta el valor de la variable manipulada. La válvula de control es el elemento final de control más frecuentemente encontrado, pero no es el único. Otros elementos finales de control típicos para procesos químicos son: interruptores de relevo, bombas de

velocidad variable, compresores de velocidad variable, etc.

En casi todos los sistemas de control se utilizan además otros elementos como: indicadores, registradores, alarmas y/o funciones de paro.

Con los elementos descritos anteriormente se pueden formar diferentes configuraciones de control cuya forma depende de la naturaleza del sistema a controlar. Este tema es abordado en el capítulo 3. En la figura 1.2 se muestra un diagrama de la configuración de control más común, el control de retroalimentación (feedback), el cual se analizará con más detalle en el capítulo 3.



CAPITULO 2  
DINAMICA DE PROCESOS

## 2.1 TEORIA DEL MODELADO.

Un modelo es una descripción del mundo real, es una representación de formas más complejas, procesos, funciones, fenómenos físicos, etc.

El tipo de modelo usado con más frecuencia es el modelo matemático que consiste en un grupo de ecuaciones, las cuales describen el comportamiento de un sistema. El proceso de obtención de este grupo de ecuaciones se llama modelado.

Un modelo es construido para facilitar la comprensión e intensificar la predicción de un evento o sistema. Se comprenden los eventos o las ideas cuando se identifican las partes de la estructura, las relaciones funcionales, las relaciones causa-efecto o las combinaciones de éstas. Lo anterior es un vínculo definitivo entre la comprensión y la predicción.

Cuando se han identificado las relaciones fundamentales o las relaciones causa-efecto se pueden construir modelos para predecir lo que ocurrirá en eventos futuros y determinar los parámetros a controlar.

Los modelos matemáticos pueden ser usados en todas las fases de la Ingeniería Química desde la investigación y desarrollo hasta la operación de la planta.

### 2.1.1. BASES PARA LA ELABORACION DE UN MODELO.

El modelado de un proceso es una actividad que requiere el

uso, en el caso de los procesos químicos, de los principios básicos de la Ingeniería Química.

Para desarrollar un modelo se deben considerar las siguientes etapas:

- a) Caracterización del proceso mediante leyes fundamentales y/o experiencia.
- b) Establecimiento de suposiciones.
- c) Prueba de la consistencia matemática del modelo.
- d) Solución de las ecuaciones del modelo.
- e) Verificación.

#### a) CARACTERIZACION DEL PROCESO MEDIANTE LEYES FUNDAMENTALES Y/O EXPERIENCIA.

Con el fin de caracterizar un sistema o proceso y su comportamiento, son necesarios:

- 1) Un grupo de cantidades fundamentales dependientes, cuyos valores describirán el estado de un sistema dado.
- 2) Un grupo de ecuaciones formadas por cantidades fundamentales, con las cuales se describirá como cambia el estado de un sistema con el tiempo.

Para la mayoría de los sistemas de interés en Ingeniería Química hay tres cantidades fundamentales: masa, energía y momentum. Es frecuente que las variables fundamentales dependientes no puedan medirse directa y convenientemente. En tales casos, se seleccionan otras variables que se pueden medir fácilmente y que cuando se agrupan apropiadamente determinan el

valor de las variables fundamentales. Así la masa, energía y momentum pueden ser caracterizadas por variables tales como densidad, concentración, temperatura, presión y flujo. Estas variables son llamadas variables de estado y sus valores definen el estado de un sistema o proceso.

Las ecuaciones que relacionan las variables de estado (variables dependientes) con las variables independientes se derivan de la aplicación de los principios de conservación sobre las cantidades fundamentales y son llamadas ecuaciones de estado.

El principio de conservación de una cantidad A establece que:

$$\begin{array}{rcc}
 \frac{\text{Acumulación de A en el sistema}}{\text{período de tiempo}} & = & \frac{\text{Cantidad de A que entra al sistema}}{\text{período de tiempo}} - \frac{\text{Cantidad de A que sale del sistema}}{\text{período de tiempo}} \\
 & & + \frac{\text{Cantidad de A generada en el sistema}}{\text{período de tiempo}} - \frac{\text{Cantidad de A consumida en el sistema}}{\text{período de tiempo}}
 \end{array}$$

Donde A es una cantidad fundamental que puede ser:

- 1) Masa total.
- 2) Energía.
- 3) Momentum.

Las ecuaciones de estado con las variables de estado asociadas constituyen el modelo matemático de un proceso, el cual describe el comportamiento dinámico o estático del proceso.

La aplicación del principio de conservación dará un grupo de ecuaciones diferenciales con las cantidades fundamentales como variables dependientes y el tiempo como variable independiente. La solución de las ecuaciones diferenciales determinará como las cantidades fundamentales, o equivalentemente, las variables de estado cambian con el tiempo, esto es, determinará el comportamiento dinámico del proceso.

Además de las ecuaciones de balance se necesitan otras relaciones para expresar el equilibrio termodinámico, la velocidad de reacción, y la velocidad de transporte de calor, masa o momentum. Tales relaciones adicionales necesarias para complementar el modelado matemático pueden clasificarse en:

- 1) Ecuaciones de transporte.
- 2) Ecuaciones de cinética química.
- 3) Relaciones de equilibrio de reacción y fase.
- 4) Ecuaciones de estado termodinámicas.

#### b) ESTABLECIMIENTO DE SUPOSICIONES.

Hay estructuras que son fáciles de definir y describir matemáticamente pero que no se pueden manipular con los conocimientos matemáticos actuales, debido a limitaciones teóricas o de las técnicas de cálculo. En estas condiciones, aunque el modelo esté bien definido y resulte adecuado para la

situación real, no sería un método razonable para el desarrollo de predicciones.

La utilización de suposiciones adecuadas genera modelos suficientemente rigurosos, que a su vez puedan ser resueltos. Se debe tomar en cuenta que el uso de muchas suposiciones hace que el modelo pierda confiabilidad.

#### c) CONSISTENCIA MATEMATICA DEL MODELO.

Ya que se han planteado las ecuaciones del modelo se debe asegurar que el número de variables sea igual al número de ecuaciones, es decir, se debe practicar un análisis de grados de libertad.

Se debe checar también que las unidades de todos los términos en todas las ecuaciones sean consistentes.

#### d) SOLUCION DE LAS ECUACIONES DEL MODELO.

En el sentido más general consiste en transformar las ecuaciones matemáticas complejas, que pueden comprender ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales o desigualdades, en relaciones fáciles de visualizar y manipular. Estas soluciones pueden ser de naturaleza analítica, gráfica o numérica, pero tienen la característica común de que relacionan explícitamente las variables dependientes con las variables controlables y los parámetros con ellas relacionadas comúnmente. Se prefieren las soluciones analíticas por ser generales.

## e) VERIFICACION.

Un paso importante, pero frecuentemente ignorado, del desarrollo de un modelo matemático es probar que éste describe la situación real.

Para verificar un modelo, primero se debe averiguar si tiene un rango de validez, es decir, contestar la pregunta: ¿Es posible que el modelo produzca respuestas absurdas si los parámetros se llevan a valores extremos?. Se debe preguntar también si los resultados del modelo son razonables.

Posteriormente, para modelos de sistemas existentes, se puede usar el método atribuido a Turing<sup>40</sup>, éste consiste en encontrar gente que esté directamente involucrada con el sistema real y pedirles que comparen el resultado del modelo con los resultados del sistema real, para hacer la prueba un poco más científica, se pueden presentar algunos grupos de pruebas de datos simulados y algunos grupos de datos del sistema real y así ayudar a los expertos a visualizar la diferencia. Es aconsejable también hacer pruebas de validación de suposiciones.

En la fig. 2.1 se muestra de una manera simplificada el método del desarrollo de modelos matemáticos.

### 2.1.2 CLASIFICACION DE LOS MODELOS.

Una primera clasificación de los modelos puede hacerse de la siguiente forma :

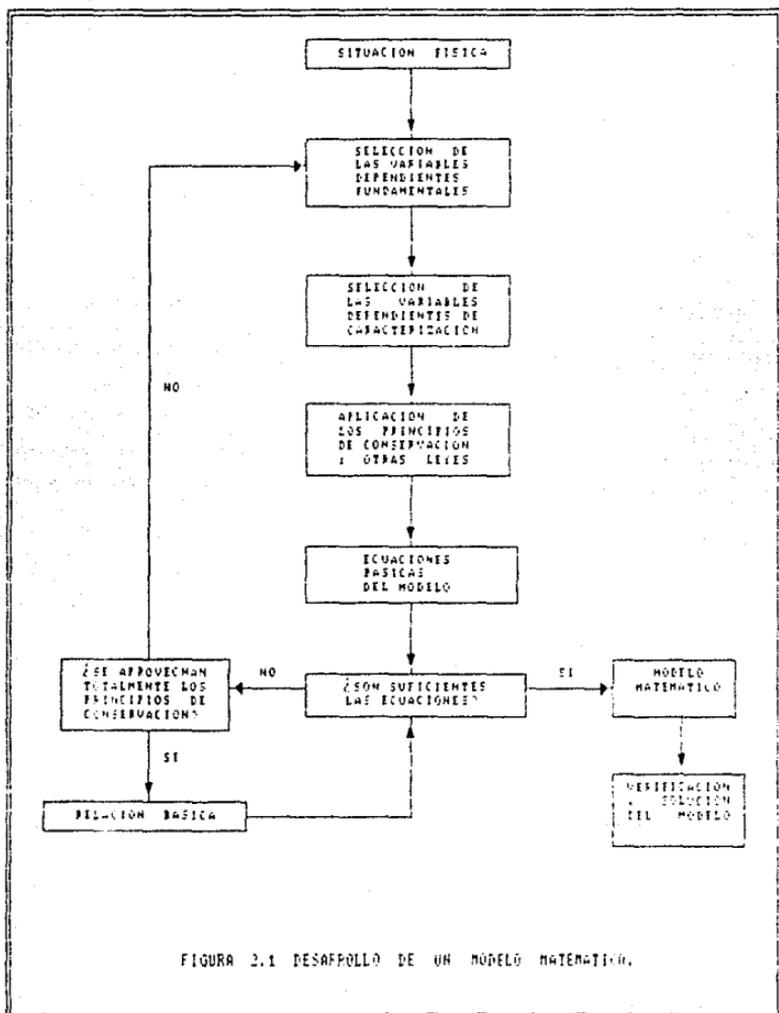
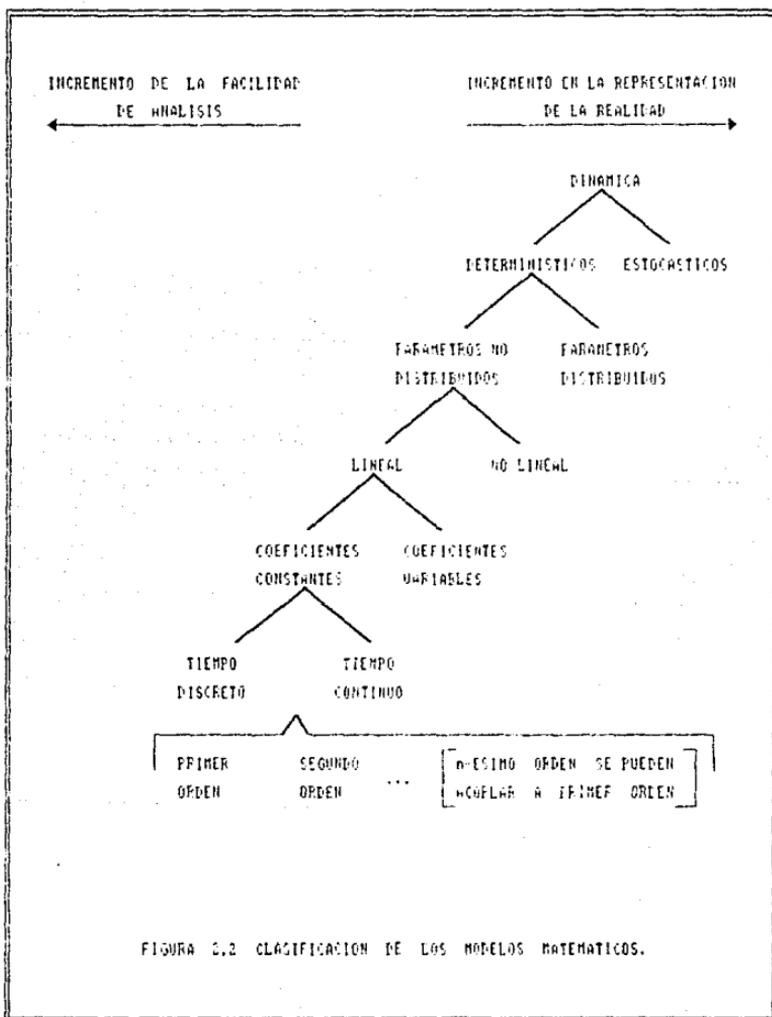


FIGURA 2.1 DESARROLLO DE UN MODELO MATEMATICO.

- a) Modelos empíricos. Su base se establece en la experiencia mediante el uso de equipo apropiado para la obtención de datos experimentales que serán ajustados para poder estudiar el proceso o sistema de interés con más detalle.
- b) Modelos mecanísticos. Se basan en las leyes fundamentales, es decir, en las ecuaciones que describen la conservación de materia, cantidad de movimiento y energía, etcétera.
- c) Modelos empírico-mecanísticos. Son una combinación de los dos modelos anteriores.

Existe otra clasificación de los modelos matemáticos como se muestra en la fig. 2.2. A continuación se hará un análisis de la clasificación de modelos dinámicos en base a esta figura.

- a) Modelos determinísticos y estocásticos. Los modelos determinísticos son aquellos en los que a cada variable y parámetro puede asignárseles un número fijo definido, o una serie de números fijos, para una serie dada de condiciones. Por el contrario en los modelos probabilísticos o estocásticos se introduce el principio de incertidumbre. Las variables o parámetros utilizados para describir las relaciones entrada-salida y la estructura de los elementos (y las restricciones) no son conocidas con precisión.



b) Modelos de parámetro distribuido y parámetro no distribuido. Una representación de parámetro distribuido toma en cuenta variaciones detalladas del comportamiento del sistema en su conjunto. La dependencia espacial es incluida, las variables independientes son las coordenadas espaciales y el tiempo. El modelo de parámetro distribuido consiste de una o más ecuaciones diferenciales parciales, conteniendo derivadas parciales con respecto a las variables independientes. Por otra parte en los modelos de parámetro no distribuido se ignoran las variaciones espaciales y en ellos las distintas propiedades y el estado (variables dependientes) se pueden considerar homogéneas en todo el sistema. Para este tipo de modelos, si son dinámicos, la variable independiente sólo será el tiempo, y el modelo contendrá ecuaciones diferenciales ordinarias.

c) Modelos lineales y no lineales. Otro tipo de modelos se basa en la linealidad. Asignando a "y" la salida y a "x" la entrada de un elemento que puede ser estático o dinámico.

Este modelo es:

$$y = f(x)$$

donde la función  $f(x)$  puede incluir operaciones como diferenciación e integración. El modelo (o elemento) es lineal si, para una entrada  $ax_1 + bx_2$ , la salida es:

$$y = f(ax_1 + bx_2) = a f(x_1) + b f(x_2) = ay_1 + by_2$$

donde a y b son constantes arbitrarias,  $x_1$  y  $x_2$  son entradas arbitrarias, y:

$$y_1 = f(x_1)$$

$$y_2 = f(x_2)$$

Así, la linealidad implica que las constantes multiplicativas y las operaciones aditivas en la entrada pueden ser factorizadas cuando se consideran los efectos sobre la salida. Si el modelo no satisface cualquiera de estas condiciones entonces es no lineal.

d) Modelos de estado estacionario y no estacionario. Los modelos a estado estacionario también pueden llamarse modelos con coeficientes constantes o de tiempo invariante. Estado estacionario quiere decir que los términos de acumulación en los distintos balances son cero. En cada balance, si las condiciones límite son independientes del tiempo, las variables dependientes del sistema pueden alcanzar gradualmente valores constantes con respecto al tiempo en un determinado punto. Otra forma de expresar exactamente la misma idea consiste en que cuando el tiempo tiende hacia infinito desaparecen los estados transitorios y el sistema es invariante con respecto al tiempo. Los procesos a estado no estacionario

también se pueden llamar transitorios, dinámicos, con coeficientes variables o de tiempo variante.

e) Modelos de tiempo continuo y discreto. Algunas veces es inconveniente ver los sistemas dinámicos en términos de variables de tiempo continuo. En tales casos se usará una variable discreta para medir el tiempo.

Los sistemas dinámicos se describen por ecuaciones diferenciales con derivadas de n-ésimo orden según la naturaleza del mismo:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

donde:

$a_i$ : constantes

$f(t)$ : función impulsora o perturbación

Casos especiales:

$n=1$

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Ecuación diferencial de primer orden

$n=2$

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Ecuación diferencial de segundo orden

Las formas dinámicas de estas ecuaciones son:

$$\tau_p \frac{dx}{dt} + x = f(t) \quad \text{Sistemas dinámicos de primer orden}$$

$$\tau_p^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\tau_p \zeta \frac{dx}{dt} + x = f(t) \quad \text{Sistemas dinámicos de segundo orden}$$

donde:

$\tau_p$  : constante de tiempo del proceso

$\zeta$  : coeficiente de amortiguamiento

## 2.2 DINAMICA EN EL ESPACIO DEL TIEMPO.

En este apartado se estudiará el comportamiento dinámico de sistemas multivariados en el dominio del tiempo. Por "dominio del tiempo" se debe entender que se obtiene la dependencia de las variables del sistema con respecto al tiempo, a través de la solución de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. Estas funciones dinámicas describirán lo que sucede en un sistema real en el transcurso del tiempo.

Sólo se tratarán sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. La razón de esta limitante es que prácticamente todas las técnicas matemáticas analíticas comúnmente disponibles son aplicables sólo a estos sistemas.

La mayoría de los sistemas que se trabajan en Ingeniería Química son no lineales. Sin embargo, las técnicas lineales son de una gran importancia práctica, ya que la mayoría de los sistemas pueden ser linealizados alrededor de una condición de operación de estado estable (Apéndice B). Las ecuaciones lineales resultantes describen adecuadamente la respuesta dinámica del

sistema en alguna región alrededor de las condiciones de estado estable. El tamaño de la región sobre la cual el modelo lineal es válido variará con el grado de no linealidad del proceso y la magnitud de las perturbaciones. En muchos procesos el modelo lineal puede ser suficiente para estudiar la dinámica y diseño de controladores.

En la mayoría de los sistemas dinámicos se trabaja frecuentemente en términos que representan una desviación de una condición a régimen permanente, para ello se aplican métodos de variables de desviación (Apéndice C).

Para la solución y análisis de un modelo dinámico multivariable es conveniente utilizar un modelo de variable de estado, ya que es una técnica adecuada para resolver y analizar el comportamiento dinámico de sistemas complejos.

### 2.2.1 MODELO DE VARIABLE DE ESTADO.

La teoría de control moderna se aplica esencialmente en el dominio del tiempo a sistemas multivariables, invariantes (o autónomos) y variantes (o no autónomos) en el tiempo (Apéndice A), todo esto basado en el concepto de estado. A continuación se explican los términos más importantes requeridos para la comprensión de este concepto.

- a) Estado. Se define el estado de un sistema dinámico como el menor número de variables (variables de estado) tales que, el conocimiento de éstas en  $t=t_0$ , junto con la

entrada para  $t \geq t_0$  determinan totalmente el comportamiento del sistema para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ . Así, el estado de un sistema dinámico en el tiempo "t" queda determinado por el estado en el tiempo  $t_0$  y la entrada para  $t \geq t_0$ , siendo independiente del estado y la entrada antes de  $t_0$ . Para sistemas invariantes en el tiempo, generalmente se elige el tiempo de referencia  $t_0 = 0$

b) Variables de estado. Las variables de estado de un sistema dinámico son el grupo de variables las cuales contienen suficiente información para todos los estados futuros del sistema en estudio. Las variables de estado no necesariamente han de ser magnitudes físicamente medibles u observables. En la práctica es conveniente elegir para variables de estado magnitudes fácilmente medibles, porque las leyes de control exigirán la retroalimentación de todas las variables de estado con adecuada ponderación.

c) Vector de estado. Se denomina vector de estado a un vector que determina el estado de un sistema  $x(t)$ , el cual denota a la variable de estado para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ , una vez especificada la entrada  $u(t)$ , para un tiempo  $t \geq t_0$ .

Este vector está formado por "n" componentes que representan a variables de estado que describen

totalmente el comportamiento de un sistema.

- d) Espacio de estado. Se conoce como espacio de estado al espacio  $n$ -dimensional cuyos ejes de coordenadas consisten en los ejes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , y en el cual se puede representar cualquier estado de un sistema por un punto en el mismo.

#### A. REPRESENTACION DE SISTEMAS EN MODELO DE VARIABLE DE ESTADO.

En esta parte se desarrollan algunos métodos para construir el modelo de variable de estado de un sistema lineal dado. Este modelo se construye a partir de relaciones del sistema físico real o a partir de la función de transferencia del mismo (Sección 2.3.3).

En el modelo de variable de estado a partir de las relaciones del sistema físico real, las variables de estado se seleccionan de tal forma que correspondan directamente con las variables físicas del sistema. Teóricamente, estas variables físicas pueden ser medidas aún si no son, explícitamente, salidas medibles.

Es necesario aclarar que el modelo de variable de estado no es único, es decir, se pueden derivar formas alternativas, pero equivalentes.

Si el sistema en estudio es lineal, el modelo general en el espacio de estado es:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + \Gamma d \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Eu \quad (2.2)$$

Sabiendo que la ecuación (2.1) es la ecuación de estado y la ecuación (2.2) es la ecuación de salida, se tiene que:

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$$

es el vector, de orden k, de perturbaciones,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es el vector, de orden n, de variables de estado,

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

es el vector, de orden m, de variables manipuladas, y

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix}$$

es el vector, de orden  $l$ , de salidas (aquellas variables de estado o combinaciones de variables de estado que pueden ser medidas). Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\Gamma$ , y  $E$  están expresadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e_{l1} & e_{l2} & \cdots & e_{lm} \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbb{A}$  es la matriz, de orden  $n \times n$ , del sistema;  $\mathbb{B}$  es la matriz, de orden  $n \times m$ , de entrada;  $\mathbb{C}$  es la matriz, de orden  $l \times n$ , de salida;  $\Gamma$  es la matriz, de orden  $n \times k$ , de perturbación y  $\mathbb{E}$  es la matriz feedforward, de orden  $l \times m$ , que indica la relación directa entrada-salida.

Los criterios de estabilidad de sistemas para este método se estudiarán en el capítulo 3.

### 2.3 DINAMICA EN EL ESPACIO DE LAPLACE.

En esta parte del capítulo se estudia la dinámica en el espacio de la transformada de Laplace para sistemas multivariables; que esencialmente es un método de transformación

de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas. Esto provee una representación muy conveniente de sistemas dinámicos.

El concepto de transformación se emplea en la solución de problemas porque éstos se sitúan en un nuevo dominio en el cual el método de cálculo es más sencillo.

Las principales ventajas que ofrece el uso de esta técnica son:

- a) Permite una rápida solución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales lineales simultáneas.
- b) Permite el desarrollo simple de modelos entrada-salida que son muy usados para propósitos de control.
- c) Las condiciones iniciales y a la frontera son automáticamente incorporadas en la solución del problema para cualquier función de entrada.
- d) En muchos casos, la naturaleza de la respuesta puede verse simplemente por inspección de la ecuación transformada.
- e) Establece un análisis cualitativo directo de como se comporta el sistema cuando se ve afectado por influencias externas.

Sin embargo, esta técnica tiene una fuerte limitante ya que sólo aplica a sistemas lineales.

### 2.3.1 DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Si se tiene la función  $y=f(t)$  la cual puede ser una función que describe el comportamiento de un sistema, la transformada de Laplace de  $f(t)$  consistirá en la integral con respecto al tiempo de 0 a  $\infty$  de la multiplicación de  $f(t)$  por  $e^{-st}$ .

La operación de la transformada de Laplace se indicará por la siguiente notación:

$$\mathcal{L} [f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.3)$$

donde:

$\mathcal{L}$  : Operador de la transformada de Laplace

$s$  : Variable de la transformada de Laplace (variable compleja).

Las propiedades de la transformada de Laplace, así como las de la transformada inversa de Laplace pueden verse en el apéndice D.

### 2.3.2 LA FUNCION DE TRANSFERENCIA.

Uno de los conceptos más usados en la teoría de control es el de función de transferencia, que se obtiene de la transformación de la ecuación diferencial que relaciona una

entrada o función de forzamiento con una salida o función de respuesta:

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \frac{\text{transformada de la función de salida}}{\text{transformada de la función de entrada}}$$

La función de transferencia es el medio más general y conveniente para caracterizar el modelo dinámico de un sistema físico.

La función de transferencia para un elemento lineal, componente o sistema puede obtenerse de la siguiente forma:

- 1.- Establecer las ecuaciones apropiadas que definen el comportamiento del sistema.
- 2.- Transformar estas ecuaciones al espacio de Laplace.
- 3.- Formar la relación de salida  $Y(s)$ -entrada  $U(s)$  como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.4)$$

#### A. MATRIZ DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA.

Considerar un proceso con dos entradas,  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  y dos salidas,  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$ . Su modelo matemático es:

$$\frac{dy}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) \quad (2.6)$$

Las condiciones iniciales son:

$$y_1(0) = y_2(0)$$

Transformando a Laplace ambos lados de las ecuaciones y resolviendo con respecto a  $Y_1(s)$  y  $Y_2(s)$ , se tiene:

$$Y_1(s) = \frac{(s - a_{22})b_{11} + a_{12}b_{21}}{P(s)} U_1(s) + \frac{(s - a_{22})b_{12} + a_{12}b_{22}}{P(s)} U_2(s) \quad (2.7)$$

$$Y_2(s) = \frac{(s - a_{11})b_{21} + a_{21}b_{11}}{P(s)} U_1(s) + \frac{(s - a_{11})b_{22} + a_{21}b_{12}}{P(s)} U_2(s) \quad (2.8)$$

donde  $P(s)$  es el polinomio característico definido por:

$$P(s) = s^2 - (a_{11} + a_{22})s - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) \quad (2.9)$$

las ecuaciones pueden ser escritas como:

$$Y_1(s) = G_{11}(s) U_1(s) + G_{12}(s) U_2(s) \quad (2.10)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s) U_1(s) + G_{22}(s) U_2(s) \quad (2.11)$$

donde las funciones de transferencia  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$  y  $G_{22}$  están definidas como:

$$G_{11}(s) = \frac{s + (a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11})}{P(s)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{s + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})}{P(s)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{s + (a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})}{P(s)}$$

$$G_{22}(s) = \frac{s + (a_{21}b_{12} - a_{11}b_{22})}{P(s)}$$

Las ecuaciones (2.10) y (2.11) pueden ser escritas en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es llamada "matriz de funciones de transferencia".

Para un sistema con dos entradas y dos salidas se tienen  $2 \times 2 = 4$  funciones de transferencia para relacionar todas las salidas con todas las entradas. Para un proceso con  $m$  entradas y  $l$  salidas, se tendrán  $l \times m$  funciones de transferencia de una matriz de función de transferencia de  $l$  renglones (número de

salidas) y  $m$  columnas (número de entradas).

#### B. POLOS Y CEROS DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA.

De acuerdo a la definición de función de transferencia,  $G(s)$  será la relación de dos polinomios:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (2.12)$$

Las raíces del polinomio  $Q(s)$  son llamadas "ceros de la función de transferencia", o ceros del sistema cuya dinámica es descrita por la función de transferencia  $G(s)$ .

Las raíces del polinomio  $P(s)$  son llamadas "polos de la función de transferencia", o polos del sistema.

Los polos y los ceros de un sistema juegan un importante papel en el análisis dinámico de sistemas de proceso y en el diseño de controladores.

#### C. ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA.

La respuesta dinámica de una salida " $y$ " está dada por  $Y(s) = G(s) U(s)$ . Para una entrada dada  $u(t)$  podemos encontrar fácilmente su transformada de Laplace  $U(s)$ , si la función de transferencia es conocida para el sistema particular. La respuesta  $y(t)$  en el dominio del tiempo puede encontrarse si invertimos el término  $G(s)U(s)$ .

Como se sabe:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

y ya que las transformadas de Laplace de todas las entradas comunes pueden también ser expresadas como la relación de dos polinomios:

$$U(s) = \frac{r(s)}{q(s)}$$

entonces:

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \frac{r(s)}{q(s)}$$

Para invertir el lado derecho de la última ecuación usando el método de fracciones parciales se necesita conocer las raíces del polinomio  $P(s)$  (es decir, los polos del sistema) y las raíces de  $q(s)$ . Así, si se sabe donde se localizan los polos del sistema se pueden determinar las características cualitativas de la respuesta del sistema para una entrada particular, sin cálculos adicionales.

Se usará un ejemplo general para aclarar lo anterior. Supóngase que la función de transferencia de un sistema está dada por:

$$G(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \left[ \frac{C_{31}}{s - p_3} + \frac{C_{32}}{(s - p_3)^2} + \dots + \frac{C_{3m}}{(s - p_3)^m} \right] + \frac{C_4}{s - p_4} + \frac{C_4}{s - p_4^*} + \frac{C_5}{s - p_5}$$

Se pueden hacer las siguientes observaciones acerca de la localización de los polos:

1. Polos reales y distintos, tales como  $p_1$  y  $p_2$  son localizados sobre el eje real (fig. 2.3). Durante la inversión se convierten a términos tales como  $C_1 e^{p_1 t}$  y  $C_2 e^{p_2 t}$ . Ya que  $p_1 < 0$ ,  $C_1 e^{p_1 t}$  decae exponencialmente a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  (fig. 2.4a). También, ya que  $p_2 > 0$ ,  $C_2 e^{p_2 t}$  crece exponencialmente a infinito con el tiempo (fig. 2.4b). Por lo tanto polos distintos sobre el eje real negativo producen términos que decaen a cero con el tiempo, mientras polos reales positivos hacen que la respuesta del sistema crezca hacia infinito con el tiempo.
2. Polos reales múltiples, como  $p_3$ , que se repite  $m$  veces. Tales polos dan lugar a términos como el siguiente:

$$\left[ C_{31} + \frac{C_{32}}{1!} t + \frac{C_{33}}{2!} t^2 + \dots + \frac{C_{3m}}{(m-1)!} t^{m-1} \right] e^{p_3 t}$$

El término dentro de los paréntesis crece hacia infinito

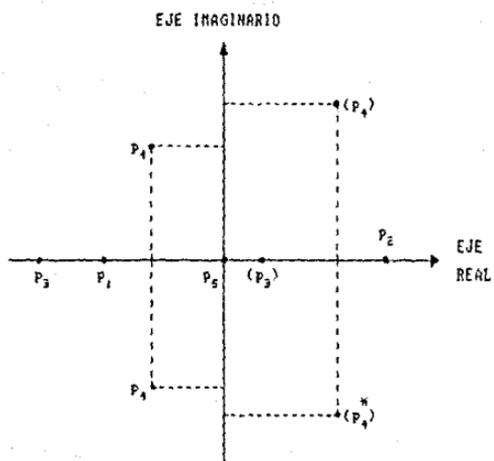


FIGURA 2.3 LOCALIZACION DE POLOS EN EL PLANO COMPLEJO.

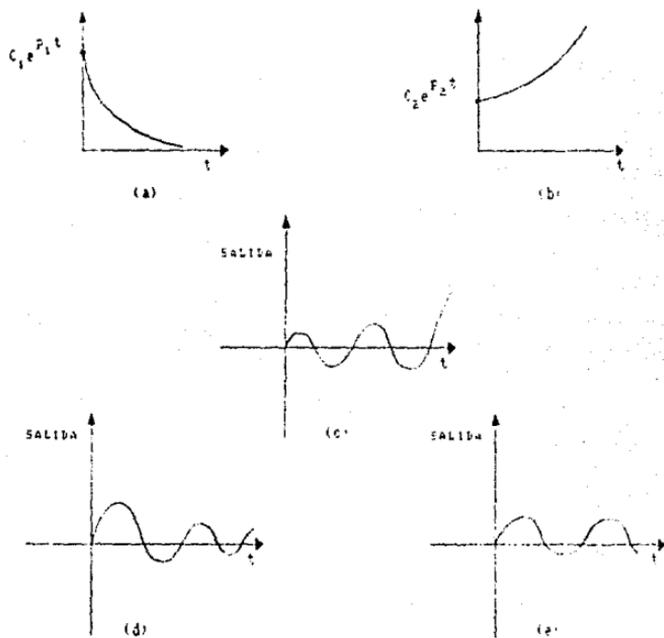


FIGURA 2.4 (a) DECAIMIENTO EXPONENCIAL (b) CRECIMIENTO EXPONENCIAL  
 OSCILACION CON (c) CRECIMIENTO (d) DECAIMIENTO  
 (e) AMPLITUD CONSTANTE.

con el tiempo. El comportamiento del término exponencial depende del valor del polo  $p_3$ .

Si  $p_3 > 0$  entonces  $e^{p_3 t} \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Si  $p_3 < 0$  entonces  $e^{p_3 t} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Si  $p_3 = 0$  entonces  $e^{p_3 t} \rightarrow \infty$  para todo  $t$

Por lo tanto, polos reales múltiples dan lugar a términos los cuales crecen hacia infinito, si el polo es positivo o cero, o decaen a cero si el polo es negativo.

3. Polos conjugados, tales como  $p_4$  y  $p_4^*$ , como se sabe un polo complejo siempre aparece en pares conjugados. Si  $p_4 = \alpha + j\beta$  entonces,  $p_4^* = \alpha - j\beta$ . Cuando se invierten pares conjugados de raíces complejas surgen términos tales como  $e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \phi)$ . El  $\text{sen}(\beta t + \phi)$  es una función oscilatoria periódica, mientras que el comportamiento de  $e^{\alpha t}$  depende del valor de la parte real  $\alpha$ . Así:

Si  $\alpha > 0$ , entonces  $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y  $e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \phi)$  crece hacia infinito de una manera oscilatoria (fig. 2.4c).

Si  $\alpha < 0$ , entonces  $e^{\alpha t} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y  $e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \phi)$  decae a cero de una manera oscilatoria con un decrecimiento de amplitud (fig. 2.4d).

Si  $\alpha = 0$ , entonces  $e^{\alpha t} = 1$  para todo  $t$ , y  $e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \phi) = \text{sen}(\beta t + \phi)$ , el cual oscilará continuamente (fig. 2.4e),

con una amplitud constante.

Por lo tanto, un par de polos conjugados complejos produce un comportamiento oscilatorio, cuya amplitud puede crecer continuamente si la parte real del polo complejo es positiva, decae a cero si es negativa, o permanece sin cambio si la parte real del polo es cero.

4. Polos en el origen, el polo  $p_5$  está localizado en el origen del plano complejo (es decir,  $p_5 = 0 + j0$ ). Así,  $C_5/(s - p_5) = C_5/s$  y después de la inversión éste da un término constante  $C_5$ .

Las observaciones anteriores son generales y pueden ser aplicadas a cualquier sistema. Así, se pueden encontrar las características cualitativas de la respuesta de un sistema si se conoce la localización de los polos de la función de transferencia.

Los polos del lado derecho del eje imaginario producen términos los cuales crecen a infinito con el tiempo. Tales sistemas con comportamiento ilimitado son llamados INESTABLES. Por lo tanto un sistema será ESTABLE (es decir, con comportamiento limitado), si todos los polos de su función de transferencia son localizados en el lado izquierdo del eje imaginario. En el capítulo 3 se estudiará con más detalle el concepto de estabilidad de un sistema.

### 2.3.3 MODELO DE VARIABLE DE ESTADO.

Como se explicó en la parte 2.2, el modelo de variable de estado de un sistema no sólo se puede construir a partir de relaciones del sistema físico real (sección 4.1.6), sino también a partir de la función de transferencia del sistema. A continuación se desarrollarán algunos métodos para obtener el modelo de variable de estado (ecuaciones 2.1 y 2.2), a partir de la función de transferencia del sistema en estudio.

#### A. SISTEMAS SIN PERTURBACIONES CUYA FUNCION DE TRANSFERENCIA NO INVOLUCRA POLINOMIO DE CEROS. SISTEMA SISO.

Sea el sistema de n-ésimo orden con función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.13)$$

la ecuación diferencial de salida correspondiente es:

$$y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = K u(t) \quad (2.14)$$

Ya que el conocimiento de  $y(0)$ ,  $y'(0)$ , ...,  $y^{n-1}(0)$  junto con la entrada  $u(t)$  para  $t \geq 0$  determinan totalmente el comportamiento futuro del sistema, se puede tomar a  $y(t)$ ,  $y'(t)$ , ...,  $y^{n-1}(t)$  como un conjunto de  $n$  variables de estado.

Se define:

$$x_1(t) = y(t) \quad (2.15a)$$

$$x_2(t) = y'(t) \quad (2.15b)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \quad (2.15c)$$

entonces se puede escribir la ecuación (2.14) como:

$$x_1'(t) = x_2(t) \quad (2.16a)$$

$$x_2'(t) = x_3(t) \quad (2.16b)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$x_{n-1}'(t) = x_n(t) \quad (2.16c)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.14)

$$x_n'(t) = -a_0 x_1(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + K u(t) \quad (2.16d)$$

Combinando las ecuaciones (2.15a), (2.16a), (2.16b) y (2.16d)

en la forma matricial de las ecuaciones (2.1) y (2.2) se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} u(t) \quad (2.17)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

## B. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA PROPIAS. SISTEMAS SISO.<sup>(97)</sup>

Un sistema es propio si el polinomio de los ceros es de menor orden que el polinomio de polos o característico.

En el caso general, si la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{K(b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.19)$$

el modelo queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} u(t) \quad (2.20)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Hay una forma alternativa para generar el modelo de variable de estado que se puede aplicar a funciones de transferencia con polos reales como a funciones de transferencia con polos complejos.

### B.1 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA CON POLOS REALES.

A partir de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K(b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.22)$$

se desarrolla en forma de fracciones parciales, generando a partir del sistema principal varios subsistemas que relacionan la entrada con la salida:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K a_1}{s - p_1} + \frac{K a_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K a_n}{s - p_n} \quad (2.23)$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{K a_1}{s - p_1} U(s) \\ X_2(s) &= \frac{K a_2}{s - p_2} U(s) \\ &\vdots \\ X_n(s) &= \frac{K a_n}{s - p_n} U(s) \end{aligned} \quad (2.24)$$

se obtiene:

$$Y(s) = r_1 X_1(s) + r_2 X_2(s) + \dots + r_n X_n(s) \quad (2.25)$$

donde  $r_1, r_2, \dots, r_n$  son las raíces de la ecuación característica:

$$r_i = (s - p_i) G(s) \Big|_{s=p_i}$$

Tomando la inversa de la transformada de Laplace para las ecuaciones (2.23) y (2.24), se tiene:

$$\begin{aligned} x_1' &= p_1 x_1 + K a_1 u \\ x_2' &= p_2 x_2 + K a_2 u \\ &\vdots \\ x_n' &= p_n x_n + K a_n u \end{aligned} \quad (2.26)$$

y

$$y = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n \quad (2.27)$$

Colocando las ecuaciones (2.25) y (2.26) en notación vectorial matricial se genera el modelo de variable de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} u(t) \quad (2.28)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

## B.2 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA CON POLOS COMPLEJOS.

Haciendo el mismo análisis que para el caso B.1, a partir de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.13)$$

se desarrolla en fracciones parciales, se divide en subsistemas con relaciones entrada-salida y se obtienen las raíces de la ecuación característica para generar un modelo de variable de estado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} u(t) \quad (2.30)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

## C. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA IMPROPIAS. SISTEMAS SISO.<sup>(97)</sup>

Un sistema es impropio si el polinomio de los ceros es del mismo orden que el polinomio de polos o característico.

En el caso general, si la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{K(b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.32)$$

el modelo está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} u(t) \quad (2.33)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} (b_0 - b_n a_0) & (b_1 - b_n a_1) & \dots & (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + [K \ b_n] u(t) \quad (2.34)$$

Esta es la forma general de la función de transferencia para un sistema SISO, y aplica a los casos anteriores, si se establece que  $b_n \neq 0$  para sistemas propios.

#### D. REPRESENTACION DE UN SISTEMA MIMO EN UN MODELO DE VARIABLE DE ESTADO.

Para la generación del modelo de variable de estado de un sistema MIMO se establece el siguiente procedimiento que parte de la matriz de funciones de transferencia:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} & \frac{Y_1(s)}{U_3(s)} & \dots & \frac{Y_1(s)}{U_n(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} & \frac{Y_2(s)}{U_3(s)} & \dots & \frac{Y_2(s)}{U_n(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{Y_n(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_n(s)}{U_2(s)} & \frac{Y_n(s)}{U_3(s)} & \dots & \frac{Y_n(s)}{U_n(s)} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

la cual presenta las funciones de transferencia individuales entre la entrada "i" y la salida "j" solamente.

Para cada función de transferencia individual se pueden aplicar los métodos generales para funciones de transferencia propias e impropias (sistemas SISO), y generar, para cada una, su modelo de variable de estado:

$$G_{11} = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 &= C_1 x_1 \end{aligned}$$

$$G_{21} = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u_1 \\ y_2 &= C_2 x_2 \end{aligned}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\begin{array}{l}
 G_{n1} = \frac{Y_n(s)}{Y_1(s)} \longrightarrow \begin{array}{l} x_n' = A_n x_n + B_n u_1 \\ y_n = C_n x_n \end{array} \\
 \\
 G_{12} = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} \longrightarrow \begin{array}{l} x_{n+1}' = A_{n+1} x_{n+1} + B_{n+1} u_2 \\ y_1 = C_{1, (n+1)} x_{n+1} \end{array} \\
 \vdots \\
 \\
 G_{1n} = \frac{Y_n(s)}{U_2(s)} \longrightarrow \begin{array}{l} x_{2n}' = A_{2n} x_{2n} + B_{2n} u_2 \\ y_n = C_{n, 2n} x_{2n} \end{array} \\
 \vdots \\
 \\
 G_{1n} = \frac{Y_1(s)}{U_n(s)} \longrightarrow \begin{array}{l} x_{(n-1)n+1}' = A_{(n-1)n+1} x_{(n-1)n+1} \\ \quad + B_{(n-1)n+1} u_n \\ y_1 = C_{1, (n-1)n+1} x_{(n-1)n+1} \end{array} \\
 \vdots \\
 \\
 G_{nn} = \frac{Y_n(s)}{U_n(s)} \longrightarrow \begin{array}{l} x_{nn}' = A_{nn} x_{nn} + B_{nn} u_n \\ y_n = C_{n, nn} x_{nn} \end{array}
 \end{array}$$

Combinando todos los modelos de variable de estado individuales dentro de un modelo de espacio de estado vectorial-matricial de la forma:

$$x' = \frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \\ x_{n+1}'(t) \\ \vdots \\ x_{2n}'(t) \\ \vdots \\ x_{(n-1)n+1}'(t) \\ \vdots \\ x_{nn}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & A_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{(n-1)n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{(n-1)n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_{n+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & B_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & B_{(n-1)n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 & C_{1,n+1} & 0 & \dots & 0 & C_{1,(n-1)n+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 & 0 & C_{2,n+1} & \dots & 0 & 0 & C_{2,(n-1)n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{(n-1)n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

### 2.3.4 REPRESENTACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN EL DOMINIO DE LAPLACE DE UN MODELO DE VARIABLE DE ESTADO.

El análisis de la dinámica de sistemas lineales multivariantes con coeficientes constantes, como ya se mencionó, se puede hacer en el dominio del tiempo con modelos de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + \Gamma d \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (2.1)$$

$$y = Cx + Eu \qquad (2.2)$$

o en el dominio de la transformada de Laplace, involucrando

funciones de transferencia en la forma:

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}(s)\underline{U}(s) + \underline{G}_d(s)\underline{D}(s) \quad (2.36)$$

donde  $\underline{Y}(s)$ ,  $\underline{U}(s)$  y  $\underline{D}(s)$  denotan la transformada de Laplace de las variables  $y$ ,  $u$  y  $d$ , respectivamente y las matrices  $\underline{G}(s)$  y  $\underline{G}_d(s)$  son las funciones multivariadas de transferencia que relacionan las variables manipuladas del sistema  $\underline{U}(s)$  y perturbaciones  $\underline{D}(s)$  con las salidas del sistema, es decir:

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \dots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{l1}(s) & g_{l2}(s) & \dots & g_{lm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Algunos procedimientos de diseño de sistemas de control son más fáciles en la primera representación mientras que para otros algoritmos es más conveniente usar la segunda.

La transformación de un sistema dinámico del espacio de estado, ecuaciones (2.1) y (2.2), al espacio de las transformadas de Laplace es hecha simplemente tomando las transformadas de estas ecuaciones con  $x_0=0$  para dar:

$$\underline{Y}(s) = \underline{C}(s\mathbb{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}\underline{U}(s) + \underline{C}(s\mathbb{I} - \underline{A})^{-1}\underline{\Gamma}\underline{D}(s) \quad (2.38)$$

por lo tanto:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(s\mathbb{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} \quad (2.39)$$

$$\underline{G}_d(s) = \underline{C}(s\mathbb{I} - \underline{A})^{-1}\underline{\Gamma} \quad (2.40)$$

La transformación inversa a partir del dominio de Laplace es más problemática por algunas razones, una de ellas es que esta transformación no es única, es decir, existen muchos juegos de ecuaciones (2.1) y (2.2) equivalentes a la ecuación (2.38).<sup>(36)</sup>

Para poder resolver un modelo de variable de estado (sistema vectorial-matricial) son aplicables las técnicas de solución de ecuaciones diferenciales lineales que se describen en el apéndice A.

### 2.3.5 DIAGRAMA DE BLOQUES.

Un diagrama de bloques es una representación visual simplificada de la relación causa-efecto que existe entre la salida y la entrada de un sistema. Este diagrama suministra una forma útil y conveniente para caracterizar las relaciones funcionales entre los diferentes componentes de un sistema.

#### A. REPRESENTACION DE DIAGRAMAS DE BLOQUES PARA SISTEMAS MULTIVARIABLES.

Los diagramas de bloques pueden ser considerados como un caso especial de representación general de sistemas multivARIABLES. Estos sistemas están formados por el vector de transformadas de Laplace y la matriz de funciones de transferencia. La transformada de salida toma la forma simple del vector  $\underline{Y}(s)$ , que se puede relacionar al de entrada  $\underline{U}(s)$

simplemente por:

$$\underline{Y}(s) = \mathbb{G}(s)\underline{U}(s) \quad (2.41)$$

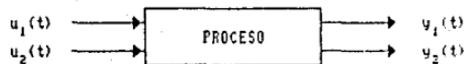
donde  $\mathbb{G}(s)$  es una matriz y cada elemento  $g_{ij}(s)$  es una función de transferencia que relaciona a la  $i$ -ésima salida  $y_i$  con la  $j$ -ésima entrada  $u_j$ . Para el caso de una sola entrada y una sola salida, la función de transferencia se reduce a  $G(s)$ . En la fig. 2.5 se muestra el diagrama de bloques para un proceso con dos entradas y dos salidas.

### 2.3.6 TIEMPO MUERTO.

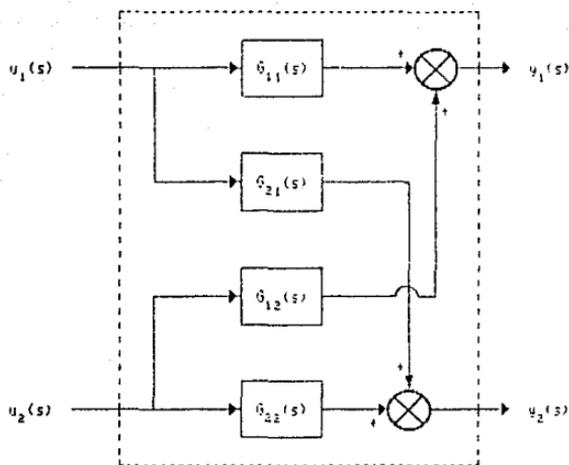
El tiempo muerto es un intervalo de tiempo (corto o largo) durante el cual ningún efecto es observado en las salidas del sistema. Algunas veces es llamado retraso de transportación y es medido en unidades de tiempo.

El comportamiento dinámico de muchos procesos puede representarse por modelos que consisten de grupos de ecuaciones diferenciales y tiempos muertos. Los tiempos muertos pueden surgir debido al flujo a través de una tubería, en ciclos de recirculación o en análisis de composición tal como el tiempo de elución de un cromatógrafo en línea.

Para tomar en cuenta los tiempos muertos, en un diagrama de bloques, se tendrá que multiplicar por su función de transferencia.



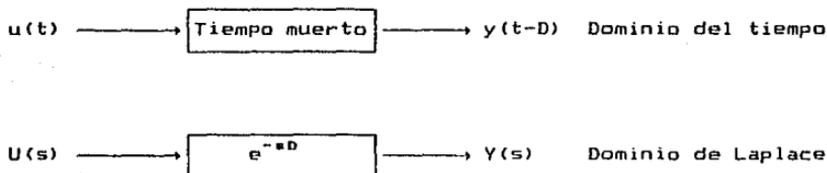
(a)



(b)

FIGURA 2.5 (a) PROCESO DE DOS ENTRADAS-DOS SALIDAS.  
 (b) DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MISMO PROCESO.

$$\text{Función de transferencia para el tiempo muerto } D = G(s) = e^{-D} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.42)$$



## 2.4 DINAMICA EN EL ESPACIO DE LA FRECUENCIA.

En esta última parte del capítulo se estudia una tercera alternativa para analizar la dinámica de sistemas: el análisis de respuesta a la frecuencia. Los sistemas complejos de alto orden son fácilmente manejados en el dominio de la frecuencia, esto se debe a que la manipulación de las funciones de transferencia se transforma a un problema de combinación (adición, multiplicación, etc.) de números complejos. Las principales características de esta técnica son:

- a) La dinámica en el espacio de la frecuencia o "respuesta a la frecuencia" es un método gráfico.
- b) El análisis de respuesta a la frecuencia permite expresar el sistema de las funciones de transferencia en el estado senoidal estacionario.
- c) La respuesta a la frecuencia ignora las condiciones iniciales, pero esto es válido dado que las condiciones iniciales no tienen efecto en la forma de la respuesta

típica y del estado estacionario.

- d) Este método es de gran utilidad en análisis de sistemas de control cerrados.
- e) Una restricción básica de esta técnica es que aplica solamente a sistemas lineales o sistemas que han sido linealizados alrededor de algún nivel de operación de estado estacionario.

#### 2.4.1 DEFINICION DE LA RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

La respuesta a la frecuencia se define como el comportamiento de un sistema a régimen permanente que está sujeto a una entrada senosoidal; donde la respuesta (después de cierto tiempo) es también una salida senosoidal.

Suponer que  $Q(t)$  es una función seno de amplitud  $Q_1$  y frecuencia  $w$ , fig. 2.6, entonces:

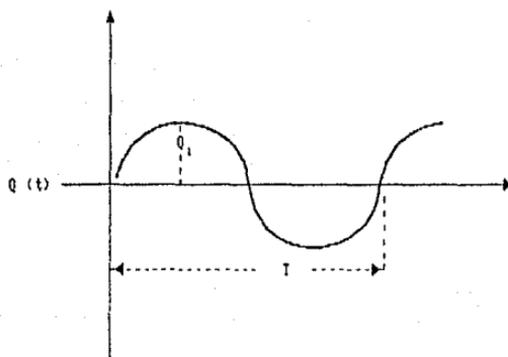
$$Q(t) = Q_1 \text{ sen } wt \quad (2.43)$$

El período de un ciclo completo es  $T$ , en unidades de tiempo y la frecuencia es dada en radianes por unidad de tiempo:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{\text{radianes}}{\text{tiempo}}$$

en grados por unidad de tiempo:

$$w = \frac{360}{T} = \frac{\text{grados}}{\text{tiempo}}$$



$Q(t)$  : ENTRADA

$Q_1$  : AMPLITUD

$T$  : PERIODO

FIGURA 2.6 ENTRADA ONDA SENOSOIDAL.

en ciclos por unidad de tiempo:

$$w = \frac{1}{T} = \frac{\text{ciclos}}{\text{tiempo}}$$

#### 2.4.2 INFLUENCIA DE UNA SEÑAL SENOSOIDAL EN UN SISTEMA.

El término respuesta a la frecuencia se refiere, como se mencionó anteriormente, a la respuesta en estado estable de un sistema sujeto a una señal senosoidal de amplitud fija  $Q_1$ , pero con una frecuencia que varía en cierto rango. Este concepto se ilustra en la fig. 2.7a, en la cual un sistema lineal es forzado por una señal  $Q_1 \sin wt$ . La salida por lo tanto, tiene una diferente amplitud  $x$ , y la entrada tiene un defasamiento (atraso o adelanto).

La fig. 2.7b, muestra la entrada  $Q(t)$  y la salida  $y(t)$  con movimiento retrasado por  $T_x$  unidad de tiempo.

La fig. 2.7c, muestra la entrada y la salida adelantada por  $T_x$  unidad de tiempo.

El ANGULO DE FASE  $\theta$  es definido como la diferencia angular entre la salida y la entrada:

$$y(t) = x \sin(wt + \theta) \quad (2.44)$$

donde:

$y(t)$  : salida con entrada senosoidal de frecuencia  $w$

$x$  : máxima amplitud de la salida  $y$

$\theta$  : ángulo de fase

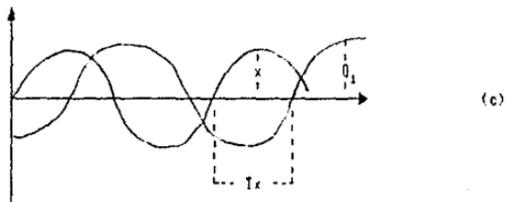
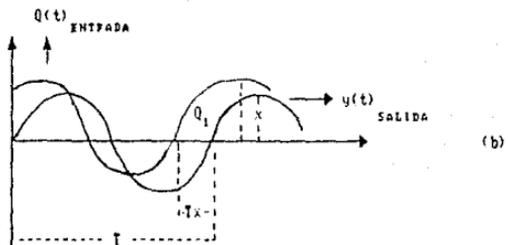
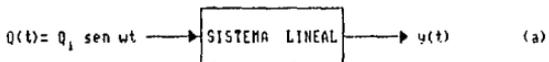


FIGURA 2.7 (a) PROCESOS LINEAL FORZADO POR UNA ENTRADA SENOSOIDAL.  
 (b) SALIDA ATRASADA.  
 (c) SALIDA ADELANTADA.

Si la salida está defasada con respecto a la entrada,  $\theta$  es negativa. Si la salida está adelantada con respecto a la entrada,  $\theta$  es positiva.

$$\theta = \frac{T_x}{T} 2\pi \quad \text{radianes}$$

$$\theta = \frac{T_x}{T} 360 \quad \text{grados}$$

La RELACION DE MAGNITUD  $M$ , es definida como la máxima amplitud de la salida sobre la máxima amplitud de la entrada:

$$M = \frac{x}{Q_1} = AR \quad (2.45)$$

Para cualquier proceso tanto  $\theta$  como  $M$  cambian si cambia la frecuencia  $\omega$ . Por lo tanto, si se quiere conocer la respuesta a la frecuencia del sistema, se debe analizar como varía  $\theta$  y  $M$  con respecto a la frecuencia  $\omega$ , para poder saber todo acerca del sistema.

Sin embargo, para que este análisis sea válido, se requiere que el sistema sea estable para que la salida:

$$y(t) = x \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

tenga significado.

Esto último proviene de lo siguiente, si se tiene:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 x_0(t) = Q_e(t)$$

donde:

$y(t)$  : variable de salida

$Q(t)$  : variable de entrada

Si el sistema es forzado a responder a una entrada senosoidal, entonces:

$$Q(t) = Q_1 \text{ sen } \omega t$$

La solución de esta ecuación diferencial consiste de dos partes:

a) Solución homogénea

b) Solución particular

Si el sistema es estable, la solución homogénea cuyos términos son exponenciales tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  y por lo tanto, la solución del sistema a régimen permanente es del tipo:

$$y(t) = C_1 \text{ sen } \omega t + C_2 \text{ cos } \omega t$$

en general,

$$y(t) = y_h(t) + C_1 \text{ sen } \omega t + C_2 \text{ cos } \omega t$$

donde:

$y_h$  : solución a la homogénea

Si el sistema es estable  $t \rightarrow \infty \rightarrow y_h = 0$ , donde  $y_h$  es una función exponencial,  $e^t$ , entonces  $y_p(t)$  es lo que se define como "respuesta a la frecuencia".

En el caso de que el sistema sea inestable, los términos exponenciales de la solución homogénea tienden a infinito y la solución particular no tendrá significado.

Empleando la siguiente función trigonométrica:

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen} wt + C_2 \operatorname{cos} wt = M \operatorname{sen}(wt + \theta)$$

donde:

$$M = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$$

$$\tan \theta = \frac{C_1}{C_2}$$

Por lo tanto, el análisis de  $M$  y  $\theta$  con respecto a  $w$  va a dar todo el aspecto dinámico del sistema o proceso (sistema de respuesta rápida o lenta).

Por consiguiente, la respuesta a la frecuencia del sistema puede ser encontrada sustituyendo "s" por "iw" en la función de transferencia, obteniendo un número complejo  $G(iw)$  que tiene las siguientes propiedades:

- Una magnitud  $|G(iw)|$  que es la misma magnitud  $M$ , ésta podrá ser obtenida forzando el sistema con una función seno de frecuencia  $w$ .
- Un ángulo de fase o argumento  $\operatorname{ARG} [G(iw)]$  que es igual al

ángulo  $\theta$ , que podrá ser obtenido forzando el sistema por una función seno de frecuencia  $w$ , de esta manera:

$$G(s) = G(iw) = \text{Real} [G(iw)] + i[\text{Im}(G(iw))]$$

en forma polar

$$G(iw) = |G(iw)| e^{i \text{ARG} [G(iw)]}$$

$$G(iw) = M e^{i\theta}$$

donde:

$$M = |G(iw)| = [(\text{Re}(G))^2 + (\text{Im}(G))^2]^{1/2}$$

$$\theta = \text{ARG} [G(iw)] = \text{arc tan} \left[ \frac{\text{Im}(G)}{\text{Re}(G)} \right]$$

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \dots G_n(s)$$

entonces:

$$|G(iw)| = |G_1(iw)| |G_2(iw)| \dots |G_n(iw)|$$

$$M = (M_1)(M_2) \dots (M_n)$$

$$\text{arc tan } \theta = (\text{arc tan } \theta_1)(\text{arc tan } \theta_2) \dots (\text{arc tan } \theta_n)$$

Para funciones más complejas:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q_1(s) Q_2(s) \dots Q_m(s)}{P_1(s) P_2(s) \dots P_n(s)}$$

$$G(i\omega) = \frac{Q_1(i\omega) Q_2(i\omega) \dots}{P_1(i\omega) P_2(i\omega) \dots}$$

$$G(i\omega) = \frac{M_{a_1} \exp[i\theta_{a_1}] M_{a_2} \exp[i\theta_{a_2}] \dots}{M_{p_1} \exp[i\theta_{p_1}] M_{p_2} \exp[i\theta_{p_2}] \dots}$$

$$G(i\omega) = M e^{i\theta}$$

$$G(i\omega) = \frac{M_{a_1} M_{a_2} \dots}{M_{p_1} M_{p_2} \dots} \exp [i(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \dots - \theta_{p_1} - \theta_{p_2})]$$

$$M = \frac{\text{Producto de los factores de magnitud del numerador}}{\text{Producto de los factores de magnitud del denominador}}$$

$$\theta = \left[ \begin{array}{l} \text{suma de los ángulos} \\ \text{del numerador} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{suma de los ángulos} \\ \text{del denominador} \end{array} \right]$$

Finalmente, el procedimiento para obtener analíticamente los datos de respuesta a la frecuencia es relativamente simple y es el siguiente:

- a) Se obtiene la función de transferencia para el elemento o combinación de elementos que haya, es decir:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = G(s)$$

donde  $Q(s)$  y  $P(s)$  son las transformadas de las respuestas

TABLA 2.1 FACTORES PARA LA RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

NOMBRE DEL FACTOR	FACTOR	$AR(\omega)$	$\phi(\omega)$	FUENTE ASINTÓTICA CUANDO $\omega \rightarrow \infty$
CONSTANTE	$A$	$A$	$0$	$0$
DIFERENCIADOR	$s$	$\omega$	$90^\circ$	$1$
INTEGRADOR	$1/s$	$1/\omega$	$-90^\circ$	$-1$
ADELANTE DE PRIMER ORDEN	$\tau s + 1$	$(\tau^2 \omega^2 + 1)^{1/2}$	$\tan^{-1}(\omega \tau)$	$1$
ATRASO DE PRIMER ORDEN	$1/(\tau s + 1)$	$1/(\tau^2 \omega^2 + 1)^{1/2}$	$-\tan^{-1}(\omega \tau)$	$-1$
ADELANTE DE SEGUNDO ORDEN	$\tau^2 s^2 + 2\tau\epsilon s + 1$	$\left[ (1-\tau^2 \omega^2)^2 + (2\tau\omega\epsilon)^2 \right]^{1/2}$	$\tan^{-1}(2\epsilon\tau\omega / (1-\omega^2\tau^2))$	$2$
ATRASO DE SEGUNDO ORDEN	$\frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\tau\epsilon s + 1}$	$\frac{1}{\left[ (1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\omega\epsilon)^2 \right]^{1/2}}$	$-\tan^{-1}(2\epsilon\tau\omega / (1-\omega^2\tau^2))$	$-2$
TIEMPO ABIERTO	$e^{-sD}$	$1$	$-\omega D$	ASINTOTA NO LINEAL SOBRE UNA ESCALA LOGARÍTMICA

y señal, respectivamente. Todas las condiciones iniciales se desprecian porque éstas no afectan la respuesta en el estado estacionario.

- b) En la función de transferencia se sustituye cada "s" por "iw".
- c) Para varios valores de la frecuencia  $\omega$ , se determina la relación de magnitud  $M$  y el ángulo de fase  $\theta$ .
- d) Se grafican los resultados del paso c en coordenadas polares o rectangulares. Estas gráficas no solamente son medios convincentes para presentar los datos de respuesta a la frecuencia, sino que también son la base para los métodos de análisis y diseño.

#### 2.4.3 LA SUSTITUCION DE "S" POR "IW".

En el paso b del procedimiento anterior para obtener la respuesta a la frecuencia se sustituye "s" por "iw" en la función de transferencia. Se puede hablar entonces de que esta simple sustitución de "s" por "iw" es correcta.

Si  $G(s)$  es la función de transferencia de cualquier sistema arbitrario de orden  $n$ , la respuesta a la frecuencia tendrá algún significado si el sistema es estable.

Si el sistema está inicialmente en reposo y después está sujeto a una entrada senoidal, la salida pasa a través de un periodo transiente como se muestra en la fig. 2.8, y posteriormente se fija hasta una oscilación senoidal constante.

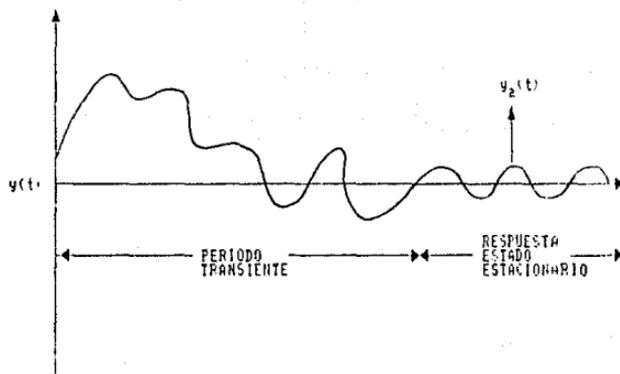


FIGURA 2.8 RESPUESTA DE UN SISTEMA A UNA ENTRADA TIPO ONDA SENOSOIDAL.

En el dominio de Laplace, la salida se define como:

$$Y(s) = G(s) Q(s)$$

para una entrada senoidal:

$$Q(t) = Q_1 \text{ sen } \omega t$$

transformando a Laplace:

$$Q(s) = Q_1 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

por lo tanto, la salida con entrada senoidal es:

$$Y(s) = G(s) Q(s) = G(s) \frac{Q_1 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$G(s)$  es una relación de los polinomios en "s" que pueden ser factorizados en polos y ceros

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{(s - Q_1)(s - Q_2) \dots (s - Q_m)}{(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n)} \quad (2.46)$$

entonces  $Y(s)$  es:

$$Y(s) = \frac{(s - Q_1)(s - Q_2) \dots (s - Q_m) Q_1 \omega}{(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n) s^2 + \omega^2} \quad (2.47)$$

$$Y(s) = \frac{Q_1 \omega Q(s)}{(s + i\omega)(s - i\omega)(s - P_1) \dots (s - P_n)} \quad (2.48)$$

expandiendo en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{A}{s + iw} + \frac{B}{s - iw} + \frac{C}{s - P_1} + \dots + \frac{W}{s - P_n} \quad (2.49)$$

donde:

$$A = \lim_{s \rightarrow -iw} [(s+iw) Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -iw} \left[ \frac{w Q G(s)}{s - iw} \right] = - \frac{Q_1}{2i} G(-iw)$$

$$B = \lim_{s \rightarrow iw} [(s-iw) Y(s)] = \lim_{s \rightarrow iw} \left[ \frac{w Q G(s)}{s + iw} \right] = \frac{Q_1}{2i} G(iw)$$

$$C = \lim_{s \rightarrow P_1} [(s-P_1) Y(s)]$$

sustituyendo en la ecuación (2.49) y antitransformando:

$$y(t) = \left[ \frac{Q_1}{2i} G(iw) \right] e^{-iwt} + \left[ \frac{Q_1}{2i} G(iw) \right] e^{iwt} + \sum_{j=1}^n C_j e^{P_j t} \quad (2.50)$$

Ahora se analizará la respuesta a estado estacionario. Si "t" tiende a infinito, todos los términos exponenciales en la suma de la ecuación (2.50) desaparecen (son cero). El sistema es estable si todos los polos  $P_j$  son negativos. La salida a estado estacionario con una entrada senoidal, la cual es llamada  $y_s(t)$  es:

$$\frac{Q_1}{2i} [G(iw) e^{iwt} - G(-iw) e^{-iwt}] \quad (2.51)$$

Los términos  $G(iw)$  y  $G(-iw)$  son números complejos y pueden

ser escritos en forma polar:

$$G(i\omega) = |G(i\omega)| e^{i \text{ARG } G(i\omega)}$$

$$G(-i\omega) = |G(-i\omega)| e^{i \text{ARG } G(-i\omega)} = |G(i\omega)| e^{-i \text{ARG } G(i\omega)}$$

de la ecuación (2.51) se tiene entonces:

$$y_s(t) = Q_1 |G(i\omega)| \frac{e^{i(\omega t + \text{ARG } G)} - e^{-i(\omega t + \text{ARG } G)}}{2i}$$

por lo tanto,

$$\frac{y_s(t)}{Q_1} = |G(i\omega)| \text{sen} [\omega t + \text{ARG } G(i\omega)] \quad (2.52)$$

de donde se observa que:

- a) La relación de magnitud  $M$  es el valor absoluto de  $G(s)$  con " $s$ " igual a " $i\omega$ ".
- b) El ángulo de fase es el argumento de  $G(s)$  con " $s$ " igual a " $i\omega$ ".

#### 2.4.4 DIAGRAMAS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

La respuesta a la frecuencia de un sistema se caracteriza por la relación de tres propiedades: la relación de amplitudes, el ángulo de fase y la frecuencia.

Hay varios tipos de gráficas que muestran la relación de amplitudes y el ángulo de fase cuando cambia la frecuencia,

sin embargo, las más usadas son las gráficas de Nyquist, Bode y Nichols.

#### A. GRAFICAS DE NYQUIST.

La gráfica de Nyquist es una forma de representar la respuesta a la frecuencia característica de un sistema dinámico. Se usa un plano complejo donde  $\text{Im}[G(i\omega)]$  son las ordenadas y  $\text{Re}[G(i\omega)]$  son las abscisas. La fig. 2.9 muestra la forma de una gráfica de Nyquist.

Un valor específico de la frecuencia  $\omega$  define un punto sobre el plano. Así del punto 1 de la fig. 2.9 cuya frecuencia es  $\omega_1$  se observa:

- a) La distancia del punto 1 al origen (0,0) es la relación de amplitudes cuando la frecuencia es  $\omega_1$ .

$$\text{distancia} = \left[ [\text{Re}(G(i\omega_1))]^2 + [\text{Im}(G(i\omega_1))]^2 \right]^{1/2} = |G(i\omega)| = AR$$

- b) El ángulo  $\theta$  con el eje real es el ángulo de fase a la frecuencia  $\omega_1$ .

$$\theta = \text{arc tan} \frac{\text{Im}[G(i\omega_1)]}{\text{Re}[G(i\omega_1)]} = \text{ARG } G(i\omega_1) = \text{ANGULO DE FASE}$$

Cuando la frecuencia varía de cero a infinito, se forma una línea como se muestra en la fig. 2.9. De esta forma la frecuencia es un parámetro a lo largo de esta curva. La forma y localización de esta curva son características para cada sistema en

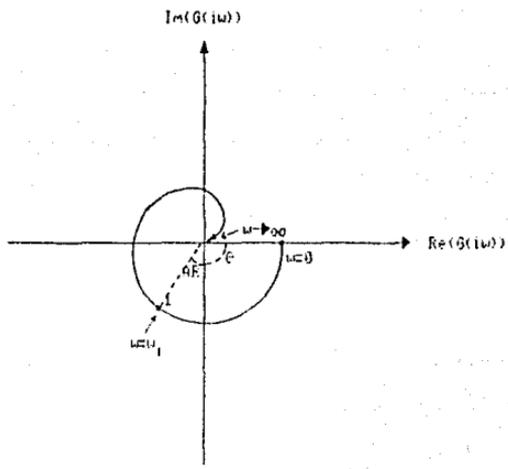


FIGURA 2.9 FORMA DE UNA GRAFICA DE NYQUIST.

particular. En la fig. 2.10 se muestran diferentes gráficas de Nyquist para algunos sistemas típicos.

#### B. GRAFICAS DE BODE.

Las gráficas de Bode constituyen una alternativa conveniente para representar la respuesta a la frecuencia característica de un sistema.

Las gráficas o diagramas de Bode consisten de un par de gráficas que son:

- a)  $\text{Log AR vs } \log w$
- b)  $\phi \text{ vs } \log w$

Es decir, estas gráficas muestran como varía el logaritmo de la relación de amplitudes con la frecuencia, y el ángulo de fase con la frecuencia. Con el objeto de cubrir un amplio rango de frecuencias se usan escalas logarítmicas para las frecuencias. En la fig. 2.11 se muestran diferentes gráficas de Bode para algunos sistemas.

#### C. GRAFICAS DE NICHOLS.

Este tipo de gráficas se generan con:

$$\text{Log AR vs } \phi$$

La fig. 2.12 muestra algunos ejemplos de gráficas de Nichols.

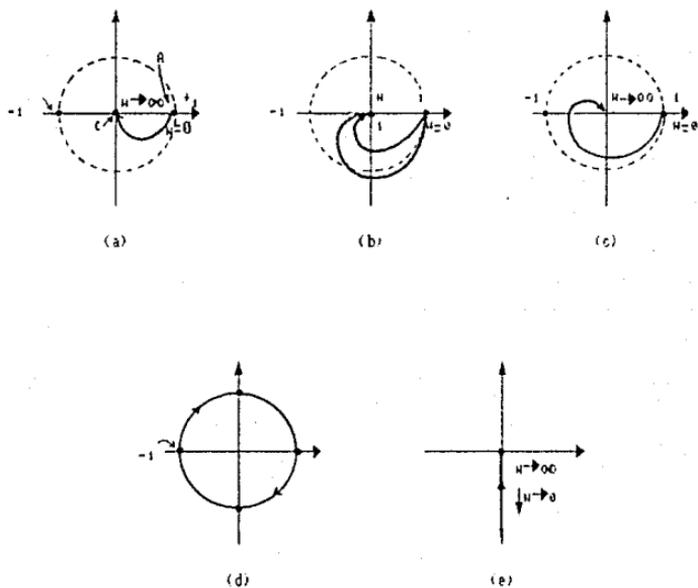
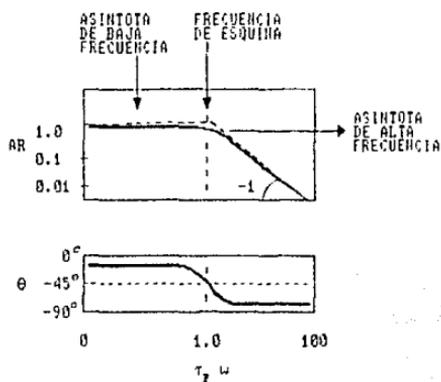
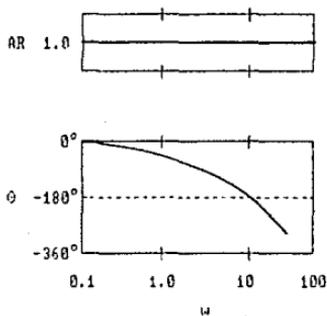


FIGURA 2.10 GRAFICAS DE NYQUIST PARA VARIOS SISTEMAS:  
 (a) PRIMER ORDEN (d) TIEMPO MUERTO  
 (b) SEGUNDO ORDEN (e) CAPACITANCIA PURA.  
 (c) TERCER ORDEN



(a)



(b)

FIGURA 2.11 GRAFICAS DE BODE PARA (a) SISTEMAS DE PRIMER ORDEN  
(b) SISTEMAS DE TIEMPO MUERTO PURO.

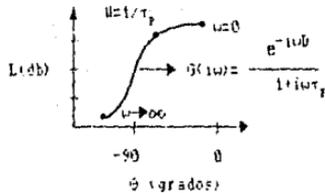
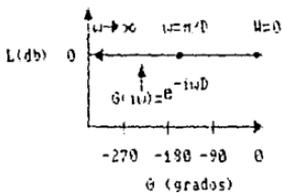
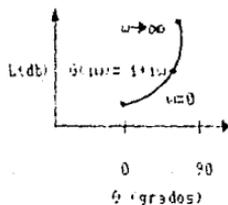
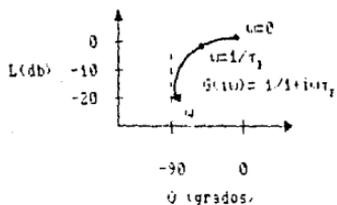


FIGURA 2.12 GRAFICAS DE NICHOLS:

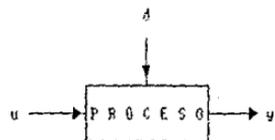
(a) ATRASO DE PRIMER ORDEN

(c) TIEMPO MUERTO

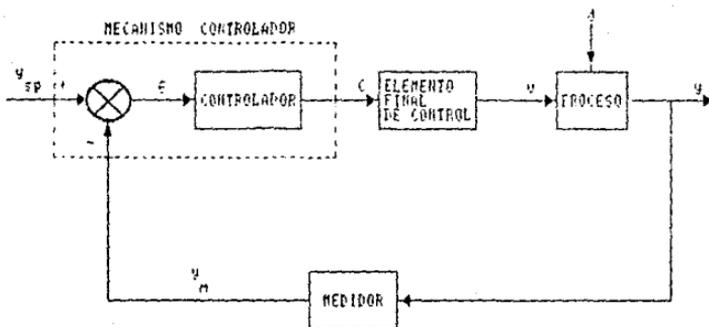
(b) ADELANTO DE PRIMER ORDEN

(d) RETRASO Y TIEMPO MUERTO.

**CAPITULO 3**  
**CONTROL DE PROCESOS**



(a)



(b)

FIGURA 3.1 (a) PROCESO (b) CICLO FEEDBACK CORRESPONDIENTE.

### 3.1 TIPOS DE ESTRUCTURAS DE CONTROL.

Como ya se mencionó, una estructura de control proporciona la información de la relación entre las variables de un proceso. La selección de esta estructura es esencial para la calidad del control a utilizar, por este motivo es importante el conocimiento de los diferentes tipos de estructuras de control, así como sus principales características y aplicaciones.

#### 3.1.1 SISTEMA DE CONTROL FEEDBACK (RETROALIMENTACION).

Considérese el proceso generalizado mostrado en la fig. 3.1a. Este tiene una salida "y", una perturbación "d", y una variable manipulada disponible "u".

La perturbación "d" (también conocida como "carga" o "carga del proceso") cambia de una manera impredecible y el objetivo de control es mantener el valor de la salida "y" a niveles deseados.

La acción del control feedback consta de los siguientes pasos:

- a) Mide el valor de la variable de salida (flujo, presión, nivel del líquido, temperatura, composición) usando el dispositivo de medición apropiado. Se denotará como  $y_m$  al valor indicado por el sensor de medición.
- b) Compara el valor indicado  $y_m$  con el valor deseado  $y_{sp}$  (set point o punto de ajuste), de la variable de salida. Se denotará a la desviación (error) por  $e = y_{sp} - y_m$ .
- c) El valor de la desviación  $e$ , es suministrado al

controlador. El controlador cambia el valor de la variable manipulada "u" con el fin de reducir la magnitud de la desviación  $\epsilon$ . Usualmente, el controlador no afecta directamente a la variable manipulada, sino a través de otro dispositivo (generalmente una válvula de control) conocido como "elemento final de control".

La fig. 3.1b resume, por medio de un diagrama, los tres pasos anteriores.

El sistema de la fig. 3.1a se conoce como ciclo abierto, en contraste al sistema de control feedback de la fig. 3.1b el cual es llamado ciclo cerrado.

También cuando el valor de "d" cambia, la respuesta del primero es llamada respuesta de ciclo abierto, mientras que para el segundo será la respuesta de ciclo cerrado.

El origen del término "ciclo cerrado" es evidente de la fig. 3.1b.

A continuación se representarán esquemáticamente algunos sistemas típicos de control feedback que se encuentran frecuentemente en procesos químicos.

a) Control de flujo.

Un sistema feedback se muestra en la fig. 3.2a controlando la velocidad de flujo  $F$  al valor deseado  $F_{sp}$ .

b) Control de presión.

El sistema feedback de la fig. 3.2b controla la presión de los gases en el tanque, a la presión deseada  $P_{sp}$ .

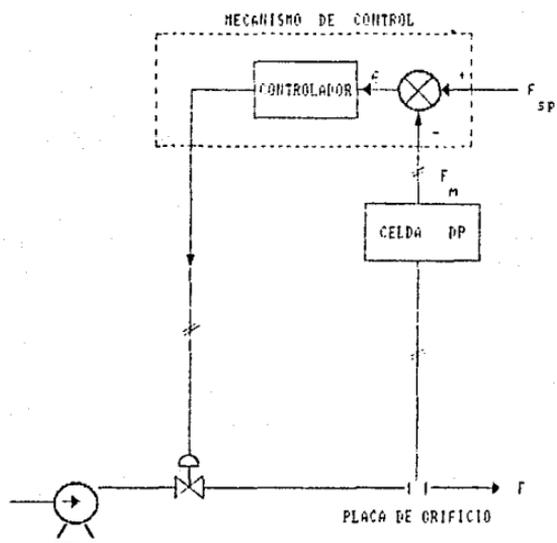


FIGURA 3.2a SISTEMA FEEDBACK PARA CONTROL DE FLUJO.

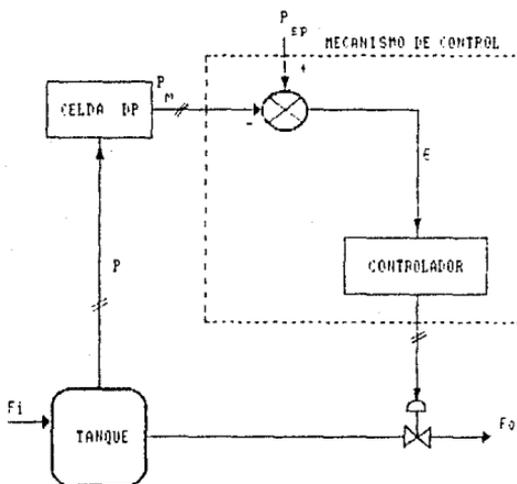


FIGURA 3.2b SISTEMA FEEDBACK PARA CONTROL DE PRESION.

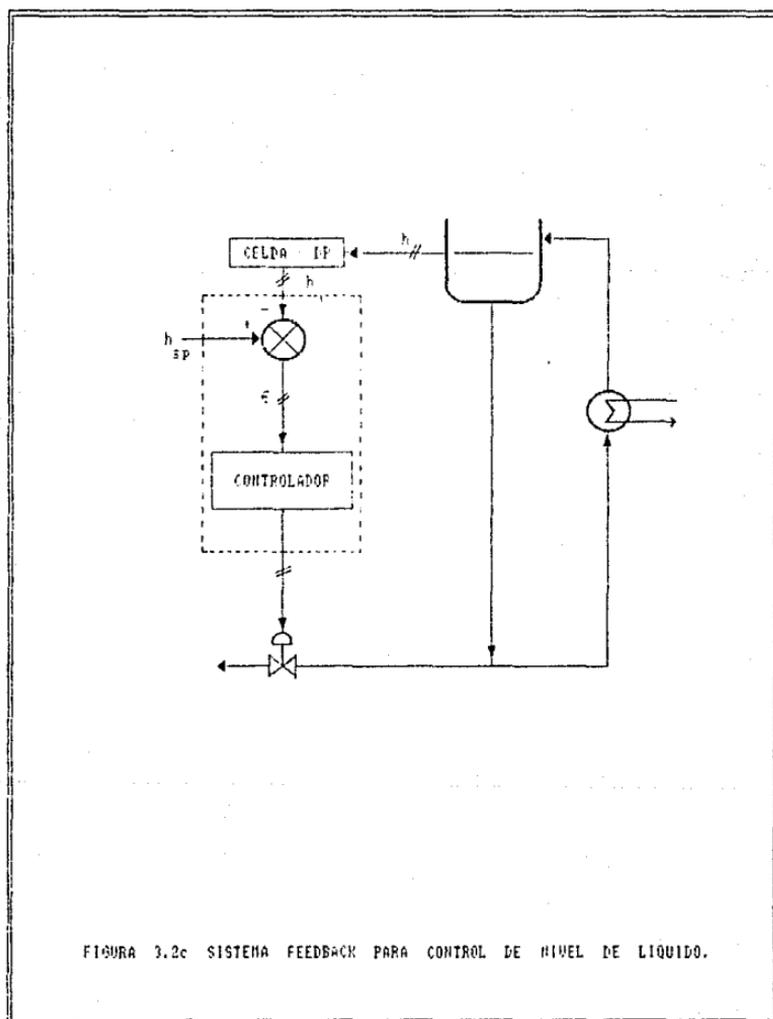


FIGURA 3.2c SISTEMA FEEDBACK PARA CONTROL DE NIVEL DE LIQUIDO.

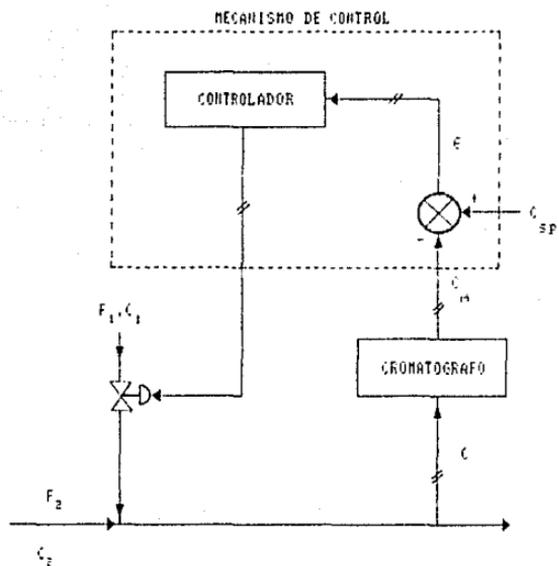


FIGURA 3.2d SISTEMA FEEDBACK PARA CONTROL DE COMPOSICION.

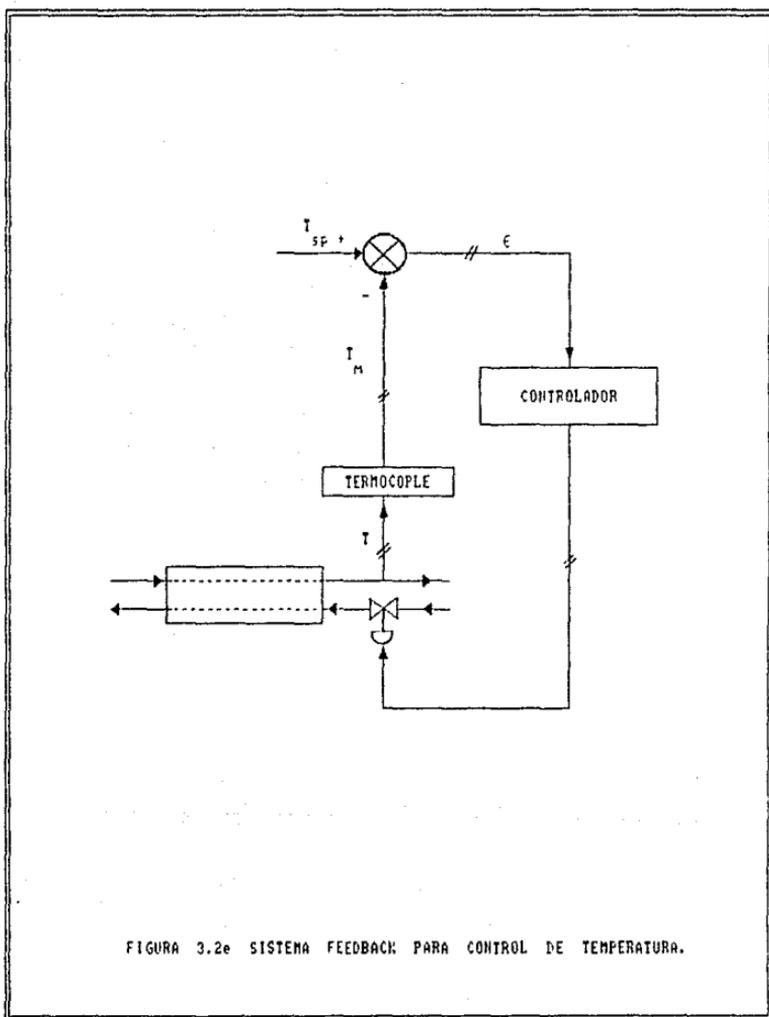


FIGURA 3.2e SISTEMA FEEDBACK PARA CONTROL DE TEMPERATURA.

c) Control de nivel de líquido.

La fig. 3.2c muestra un sistema feedback usado para el control de nivel de líquido en el fondo de una columna de destilación.

d) Control de composición.

La composición es la variable controlada en el sistema de mezclado de la fig. 3.2d. El valor deseado es  $C_{sp}$ .

e) Control de temperatura.

El sistema de la fig. 3.2e controla la temperatura de la corriente caliente de salida al valor deseado  $T_{sp}$ .

Observación. Para simplificar la representación de un sistema de control feedback se reemplazarán usualmente los detalles diagramáticos de un mecanismo de control con un círculo simple que llevará una de las siguientes caracterizaciones:

FC para control de flujo.

PC para control de presión.

LC para control de nivel de líquido.

TC para control de temperatura.

CC para control de composición.

También se usan pequeños cuadros con las caracterizaciones LT, TT, PT, FT, y CT para indicar medición y transmisión de nivel, temperatura, presión, flujo y concentración respectivamente. La fig. 3.3 es equivalente a la fig. 3.2c.

En la tabla 3.1 se resumen las ventajas y desventajas

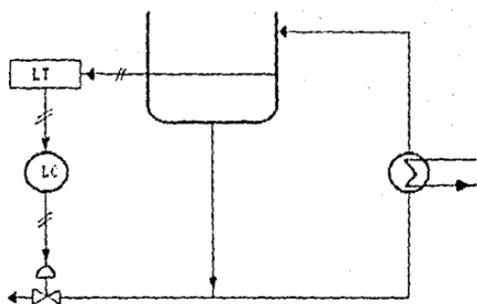


FIGURA 3.3 REPRESENTACION SIMPLIFICADA DE UN CICLO FEEDBACK.

TABLA 3.1 VENTAJAS Y DESVENTAJAS RELATIVAS DEL CONTROL  
FEEDBACK Y DEL CONTROL FEEDFORWARD.

VENTAJAS	DESVENTAJAS
<b>FEEDFORWARD</b>	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ACTUA ANTES QUE EL EFECTO DE LA PERTURBACION SEA SENTIDA POR EL SISTEMA.</li> <li>2. ES BUENO PARA SISTEMAS LENTOS (MULTICAPACIDAD) O CON SIGNIFICANTE TIEMPO MUERTO.</li> <li>3. NO INTRODUCE INESTABILIDAD EN LA RESPUESTA DE CICLO CERRADO.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. REQUIERE LA IDENTIFICACION DE TODAS LAS POSIBLES PERTURBACIONES Y SUS MEDICIONES DIRECTAS.</li> <li>2. NO PUEDE ENFRENTARSE A PERTURBACIONES NO MEDIBLES.</li> <li>3. ES INSENSITIVO A LAS VARIACIONES DE PARAMETROS DE LOS PROCESOS.</li> <li>4. REQUIERE UN BUEN CONOCIMIENTO DEL MODELO DEL PROCESO.</li> </ol>
<b>FEEDBACK</b>	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. NO REQUIERE LA IDENTIFICACION Y LA MEDICION DE ALGUNA PERTURBACION.</li> <li>2. ES INSENSITIVO A LOS ERRORES DEL MODELADO.</li> <li>3. ES INSENSITIVO A LOS CAMBIOS DE PARAMETROS DE UN PROCESO (POR EJEMPLO, LA DESACTIVACION DE UN CATALIZADOR CON EL TIEMPO, LA REDUCCION DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR DEBIDO AL ENSUCIAMIENTO).</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. EL CONTROLADOR ACTUA HASTA QUE EL EFECTO DE LA PERTURBACION HA SIDO SENTIDA POR EL SISTEMA.</li> <li>2. NO ES SATISFACTORIO PARA PROCESOS LENTOS O CON TIEMPO MUERTO SIGNIFICANTE.</li> <li>3. PUEDE CREAR INESTABILIDAD EN LA RESPUESTA DE UN CICLO CERRADO.</li> </ol>

relativas del sistema de control feedback.

Todos los ejemplos anteriores indican que los componentes básicos de un ciclo de control feedback son: Proceso, sensores o instrumentos de medición, líneas de transmisión, controlador y elemento final de control.

Se debe hacer mención de que lo estudiado anteriormente para una estructura de control feedback de una entrada-una salida, es válido también para sistemas multivariables, como se muestra en la fig. 3.4a, el cual tiene dos salidas  $y_1$  y  $y_2$ , dos perturbaciones  $d_1$  y  $d_2$ , y dos variables manipuladas  $u_1$  y  $u_2$ , (ciclo abierto).

En la fig. 3.4b se muestra un diagrama de ciclo feedback (ciclo cerrado) para un sistema multivariable, en donde la acción del controlador es igual que para un sistema de una sola variable.

Existen también sistemas típicos de control feedback para un sistema multivariable, como se muestra en la fig. 3.5, donde se controla temperatura, nivel y presión en el sistema.

### 3.1.2 SISTEMA DE CONTROL FEEDFORWARD (CONTROL HACIA ADELANTE).

Los ciclos de control feedback no pueden lograr un control perfecto de un proceso químico, es decir, mantener la salida del proceso continuamente al valor de set point (punto de ajuste) deseado en presencia de una perturbación o cambios en el set

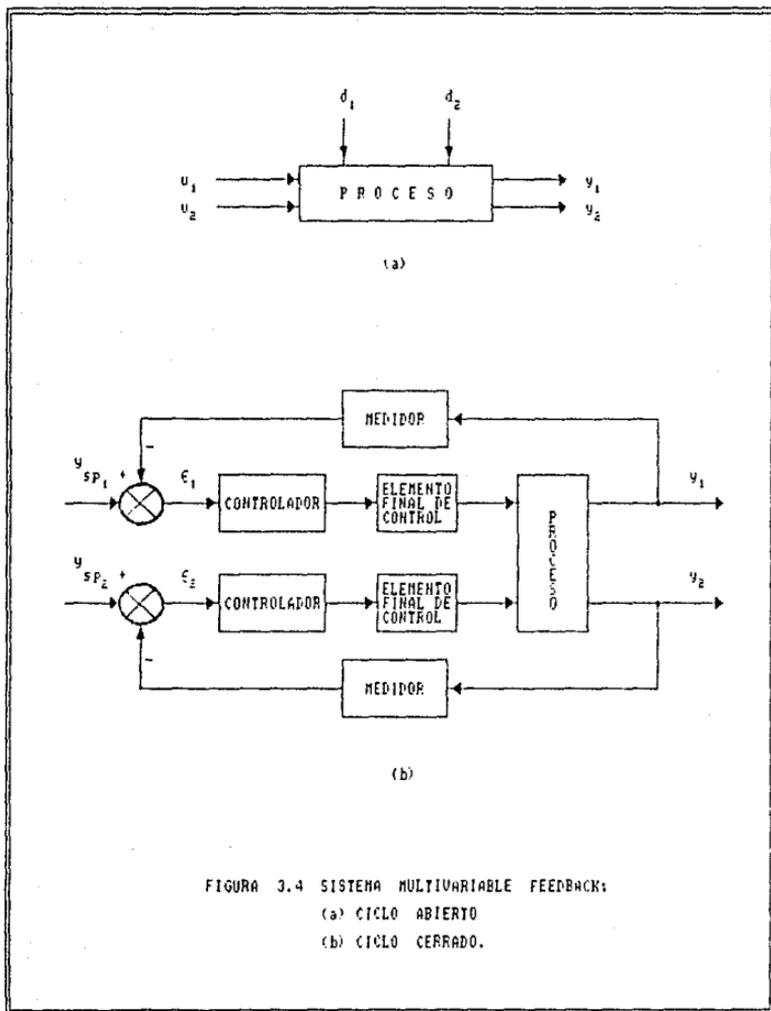
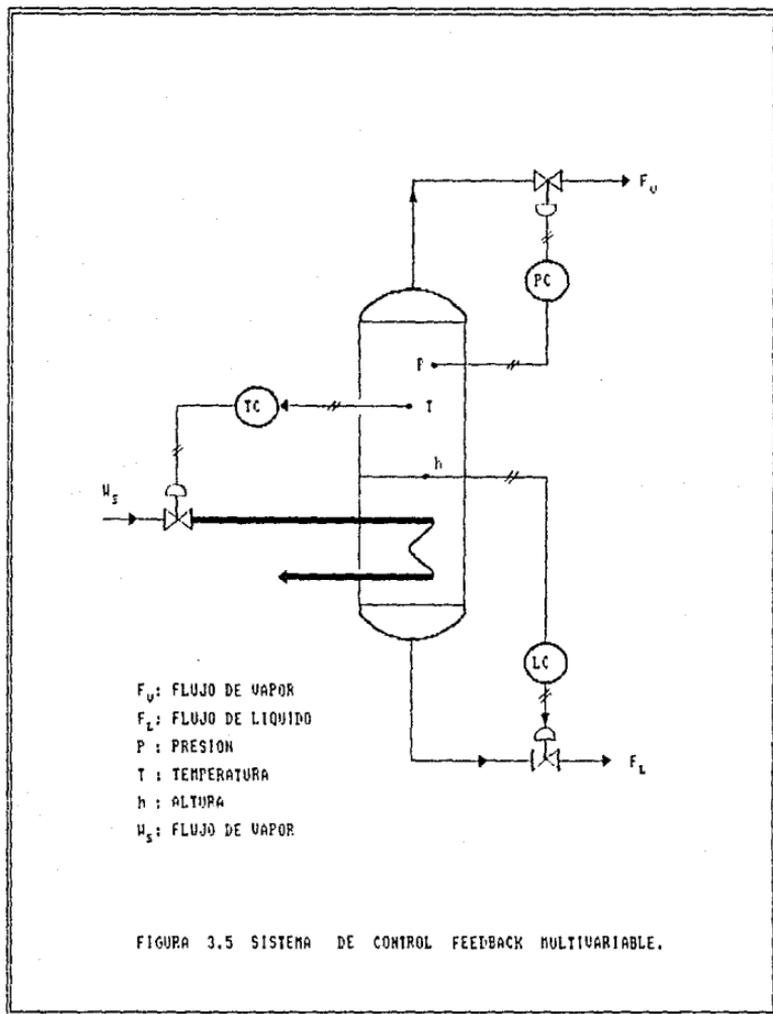


FIGURA 3.4 SISTEMA MULTIVARIABLE FEEDBACK:

(a) CICLO ABIERTO

(b) CICLO CERRADO.



point. La razón es simple: un controlador feedback reacciona solamente después de que ha detectado una desviación, en el valor de la variable de salida, con respecto al set point deseado.

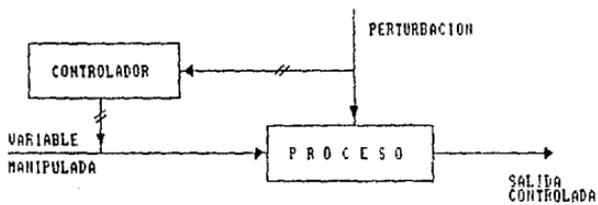
A diferencia de los sistemas feedback, una configuración de control feedforward mide la perturbación directamente y toma la acción de control para eliminar este impacto en la salida del proceso. De esta forma, los controladores feedforward tienen el potencial teórico para el control perfecto.

En la fig. 3.6a se puede ver la forma general de un sistema de control feedforward. Este mide la perturbación directamente y entonces anticipa el efecto que ésta tendrá en la salida del proceso. Subsecuentemente cambia el valor de la variable manipulada, una cantidad tal que elimine completamente el impacto de la perturbación sobre la variable de salida del proceso (variable controlada). La acción de control comienza inmediatamente después de un cambio en la(s) perturbación(es) que se detecta(n). En la fig. 3.6b se repite el esquema típico de un ciclo feedback de modo que se pueden contrastar los dos sistemas directamente. Es claro que el feedback actúa después del hecho, de una manera compensatoria, mientras que el feedforward actúa de antemano, en una forma anticipada.

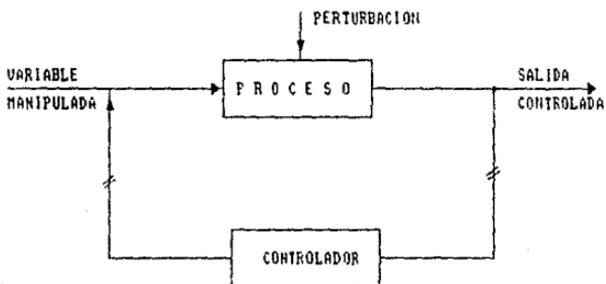
A continuación se mostrarán esquemáticamente dos sistemas de control feedforward usados en procesos químicos.

- a) Control feedforward de un intercambiador de calor.

Fig. 3.7a. El objetivo es mantener la temperatura de



(a)



(b)

FIGURA 3.6 ESTRUCTURA DE UN SISTEMA DE CONTROL:

(a) FEEDFORWARD

(b) FEEDBACK.

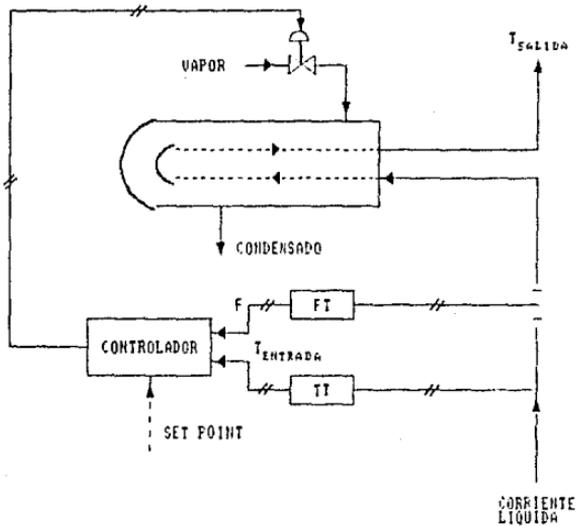


FIGURA 3.7a EJEMPLO DE CONTROL FEEDFORWARD PARA UN INTERCAMBIADOR DE CALOR.

salida del líquido constante, manipulando la presión del vapor. Hay dos perturbaciones principales (cargas) que son medidas por el control feedforward: flujo de líquido y temperatura de entrada de líquido.

- b) Control feedforward de un tanque evaporador.

Fig. 3.7b. Aquí el objetivo es mantener el nivel de líquido en el tanque constante. Las dos perturbaciones son el flujo de salida del hervidor, el cual es dictado por la variación de demanda de otra parte de la planta, y el flujo de agua alimentada. Esta última es también la variable manipulada principal.

**Observaciones:**

- a) El sistema de control feedforward puede ser utilizado para más de una perturbación. El controlador actúa de acuerdo a la perturbación que cambia de valor. Por lo tanto, se puede hablar de la existencia de varias perturbaciones en un sistema de control feedforward con una sola variable controlada.
- b) Con excepción del controlador, todos los elementos en un ciclo feedforward (sensores, transductores, transmisores y elemento final de control), son los mismos que para un ciclo feedback.

Las ventajas y desventajas para el sistema de control feedforward se dan en la tabla 3.1.

Al igual que para un sistema de control feedback, el sistema

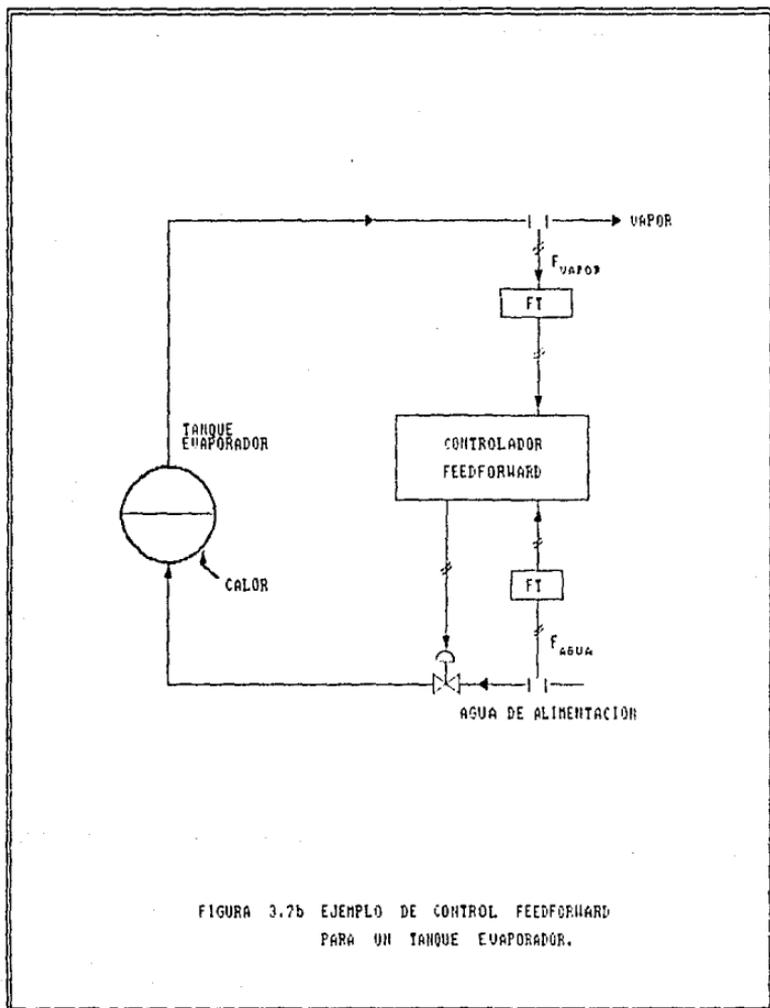


FIGURA 3.7b EJEMPLO DE CONTROL FEEDFORWARD PARA UN TANQUE EVAPORADOR.

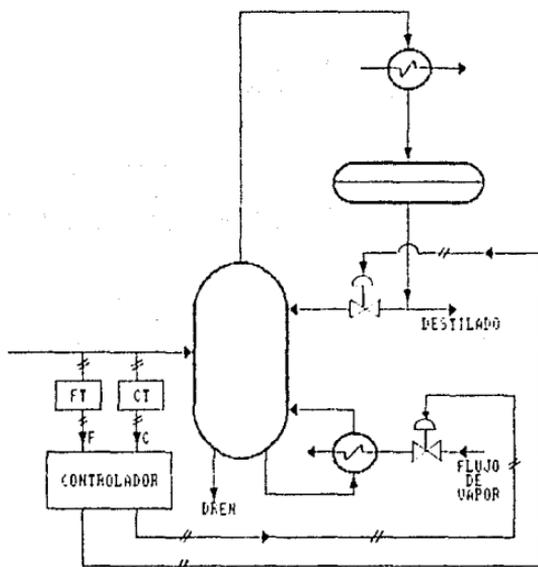


FIGURA 3.0a SISTEMA MULTIVARIABLE FEEDFORWARD PARA UNA COLUMNA DE DESTILACION.

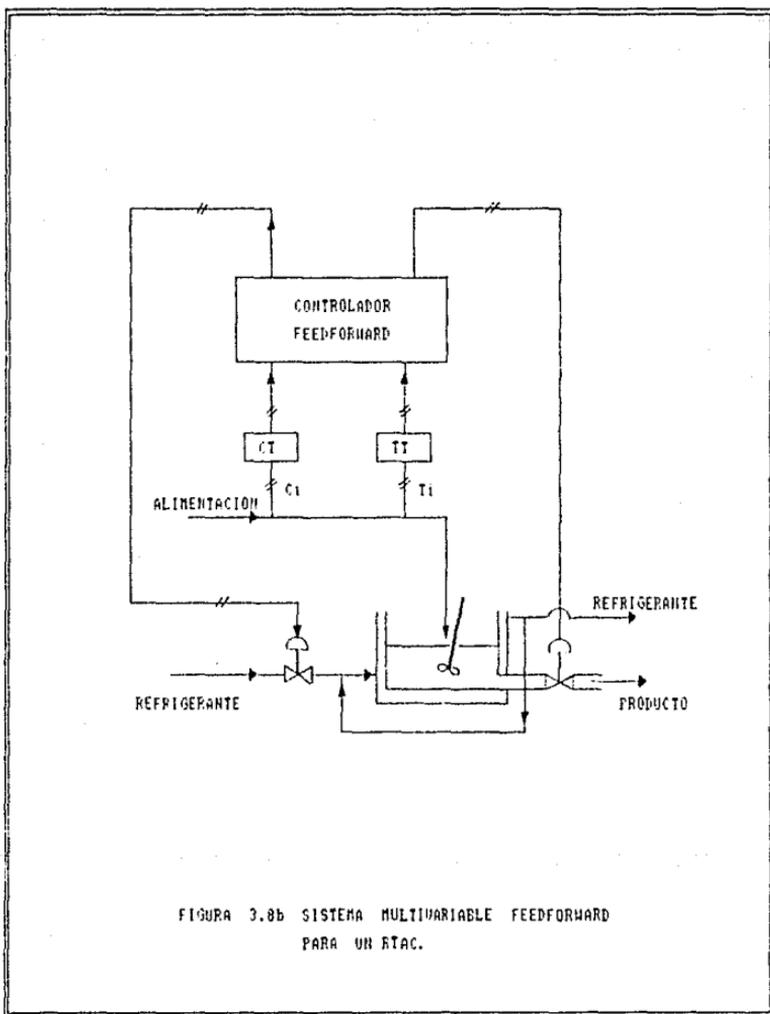


FIGURA 3.8b SISTEMA MULTIVARIABLE FEEDFORWARD  
PARA UN RTAC.

de control feedforward también puede aplicarse a sistemas multivariabes como se muestra en la fig. 3.8a y 3.8b.

### 3.1.3 CIRCUITO DE CONTROL ABIERTO.

En la fig. 3.9 se muestra el diagrama de bloques de este sistema de control.

#### Características:

- a) La acción de control es independiente de la señal de salida.
- b) Con la estación de control se fija un determinado valor de la variable manipulada, por el operador, para obtener un valor de la variable de salida deseado.

#### Ventajas:

- a) Barato.
- b) Estable.
- c) Sencillo.
- d) Requiere poco mantenimiento.

#### Desventajas:

- a) El control depende de un operador.
- b) En algunos casos no se tiene modificación de la salida.

Para un sistema multivariable también se puede establecer un circuito de control abierto como en el caso de una sola variable.

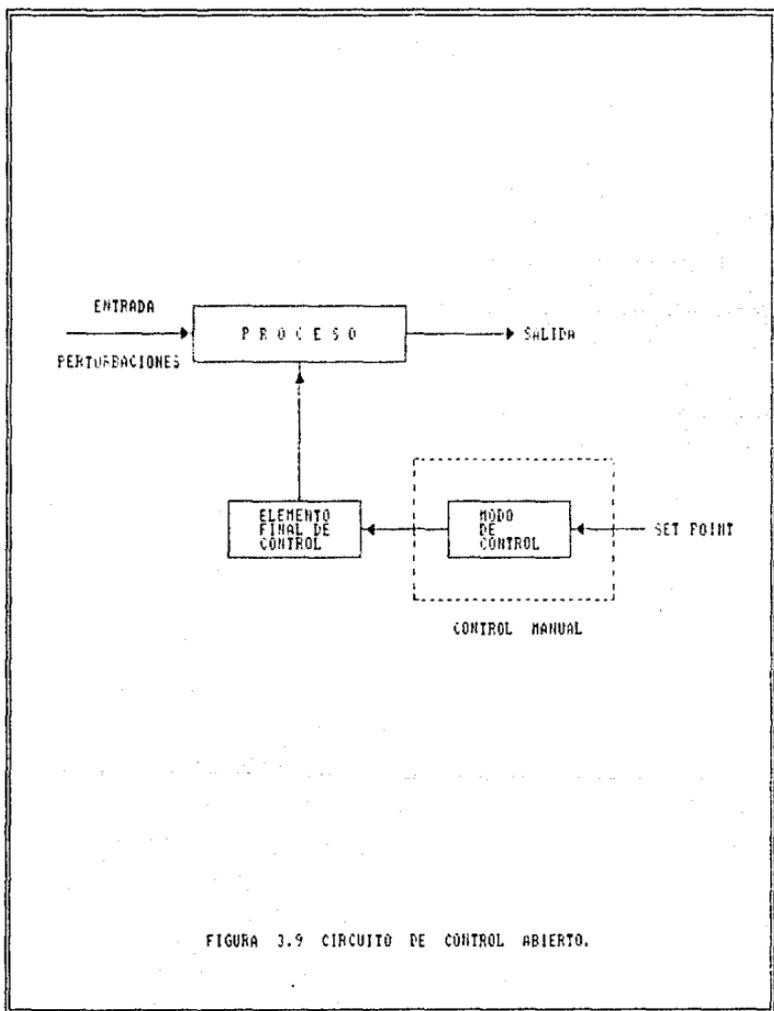


FIGURA 3.9 CIRCUITO DE CONTROL ABIERTO.

### 3.1.4 CIRCUITOS DE CONTROL COMPUESTOS.

Los circuitos de control compuestos tienen como propósito incrementar y mejorar la estabilidad de los procesos. Los sistemas de control compuestos más comunes son:

- A. Circuito de control en cascada.
- B. Control de relación.
- C. Sistema de control de rango dividido.
- D. Control selectivo
  - Control de predominio
  - Control por selección de alta señal.

#### A. CONTROL EN CASCADA.

En una estructura de control en cascada se tiene una variable manipulada y más de una medición. Es claro que con una sola variable manipulada puede controlarse sólo una salida. Se examinarán los motivos del control en cascada y sus características típicas usando un ejemplo generalizado de un proceso químico.

Considerar el reactor de tanque agitado continuo (RTAC) mostrado en la fig. 3.10. La reacción es exotérmica y el calor generado es removido por un medio de enfriamiento, que fluye por la chaqueta alrededor del tanque. El objetivo de control es mantener la temperatura de la mezcla de reacción  $T$  constante a un valor deseado. Las posibles perturbaciones de este sistema incluyen la temperatura de entrada  $T_e$ , y la temperatura de

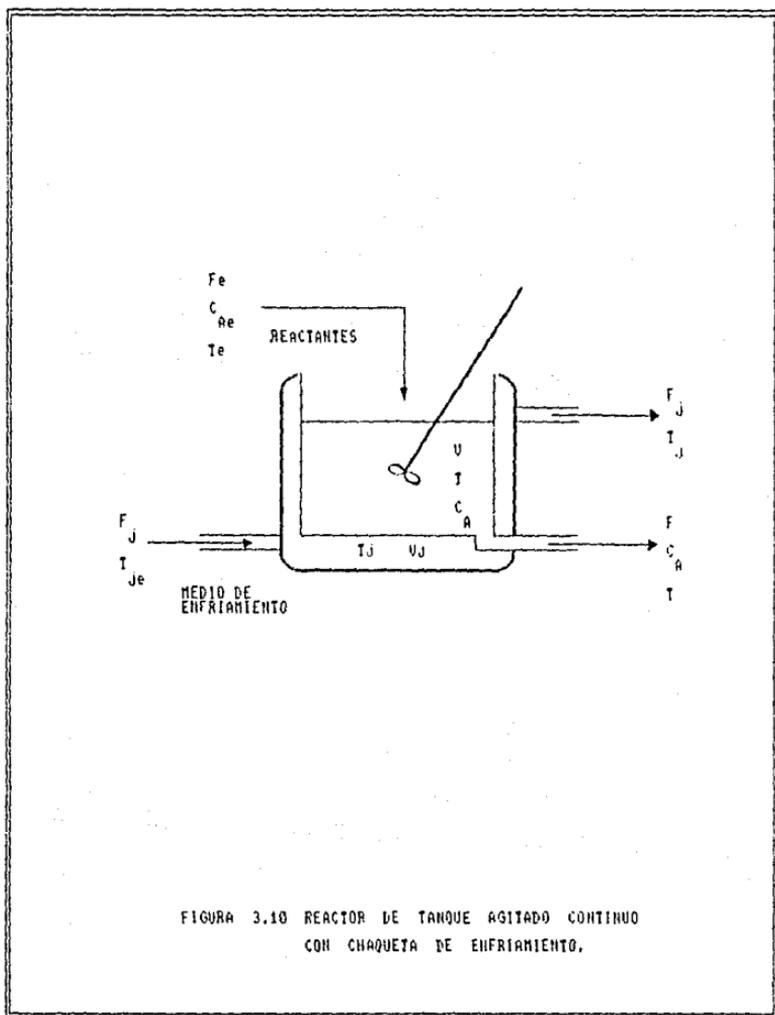


FIGURA 3.10 REACTOR DE TANQUE AGITADO CONTINUO  
 CON CHAQUETA DE ENFRIAMIENTO.

enfriamiento  $T_j$ . La única variable manipulada es el flujo del medio de enfriamiento  $F_j$ .

Sistema de control feedback.

Si se usa un feedback simple, fig. 3.11a (midiendo  $T$  y manipulando la velocidad de flujo de enfriamiento  $F_j$ ). Es claro que  $T$  responderá mucho más rápido al cambio en  $T_e$  que al cambio en  $T_j$ . Por lo tanto, el control feedback simple de la fig. 3.11a será muy efectivo en compensación para un cambio en  $T_e$  y menos efectivo en compensación para cambios en  $T_j$ .

Control en cascada.

Se puede mejorar la respuesta del control feedback simple, para cambios en la temperatura del medio de enfriamiento, midiendo  $T_j$  y accionando el control antes de que su efecto haya sido sentido por la mezcla de reacción.

Así, si  $T_j$  aumenta se incrementa el flujo del medio de enfriamiento para remover la misma cantidad de calor y si  $T_j$  decrece disminuye el flujo del medio de enfriamiento.

Se nota, por lo tanto, que se pueden tener dos ciclos de control usando dos diferentes variables de medición:  $T$  y  $T_j$ , pero tomando parte una variable manipulada común  $F_j$ .

La fig. 3.11b muestra como estos dos ciclos se relacionan. Se debe notar que;

- a) El ciclo que mide  $T$  (variable controlada) es el ciclo de control dominante, primario o maestro y usa un set point suministrado por el operador, mientras que,
- b) El ciclo que mide  $T_j$  usa la salida del controlador

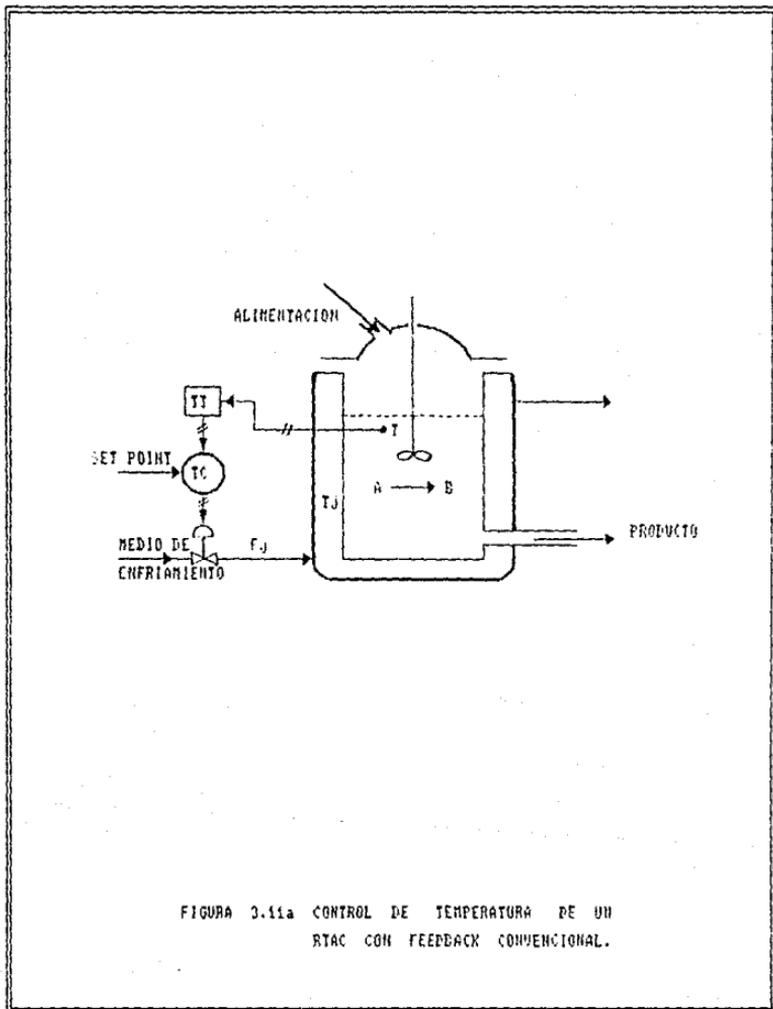


FIGURA 3.11a CONTROL DE TEMPERATURA DE UN  
STRAC CON FEEDBACK CONVENCIONAL.

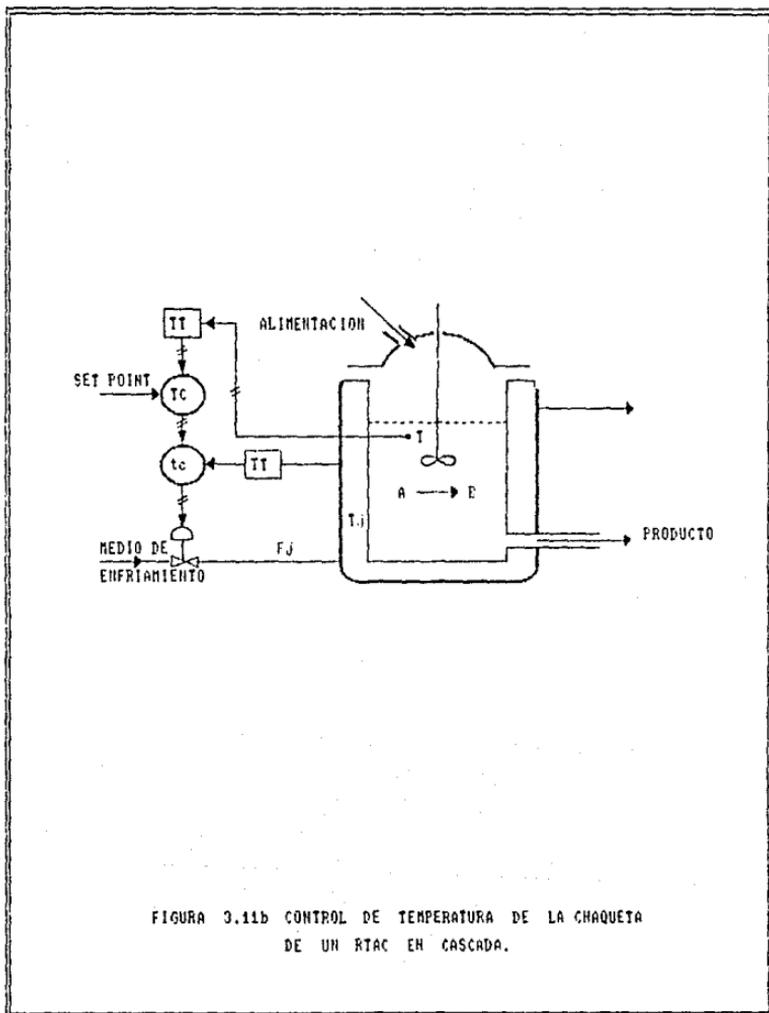


FIGURA 3.11b CONTROL DE TEMPERATURA DE LA CHAQUETA DE UN RTAC EN CASCARDA.

primario como su set point y es llamado ciclo secundario o salvaje.

La configuración de control de estos dos ciclos es conocido como control en cascada y es muy común en procesos químicos.

#### GENERALIZANDO.

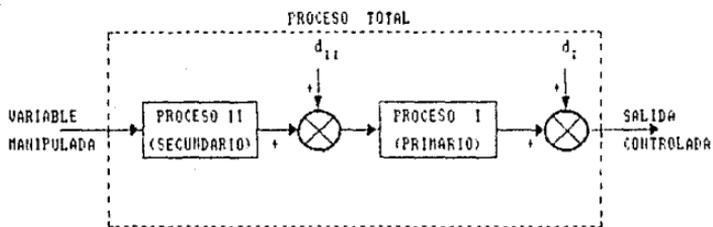
Considerar un proceso que consiste de dos partes, como se muestra en la fig. 3.12a: Procesos I y II. El proceso I (primario) tiene como salida la variable que se quiere controlar. El proceso II (secundario) tiene una salida que no interesa controlar, pero la cual afecta la salida que se desea controlar. Para el sistema del RTAC del ejemplo anterior, el proceso I es la reacción en el tanque y la variable de salida es la temperatura  $T$ . El proceso II es la chaqueta y su salida  $T_j$  afecta el proceso I (reactor) y consecuentemente  $T$ .

La fig. 3.12b muestra el típico sistema de control feedback y la fig. 3.12c indica la forma general del control en cascada. Esta última figura muestra claramente el mayor beneficio del control en cascada.

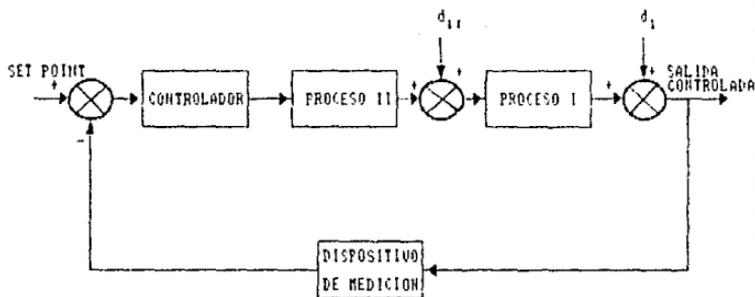
#### Control en cascada para dos procesos químicos:

##### a) Intercambiador de calor.

La configuración típica se muestra en la fig. 3.13a. El objetivo de control es mantener la temperatura de salida de la corriente 2 a un valor deseado. El ciclo secundario es usado para compensar los cambios en la velocidad de flujo de la corriente 1.



(a)



(b)

FIGURA 3.12 REPRESENTACION ESQUEMATICA DE:  
 (a) PROCESO DE CICLO ABIERTO  
 (b) FEEDBACK CONVENCIONAL.

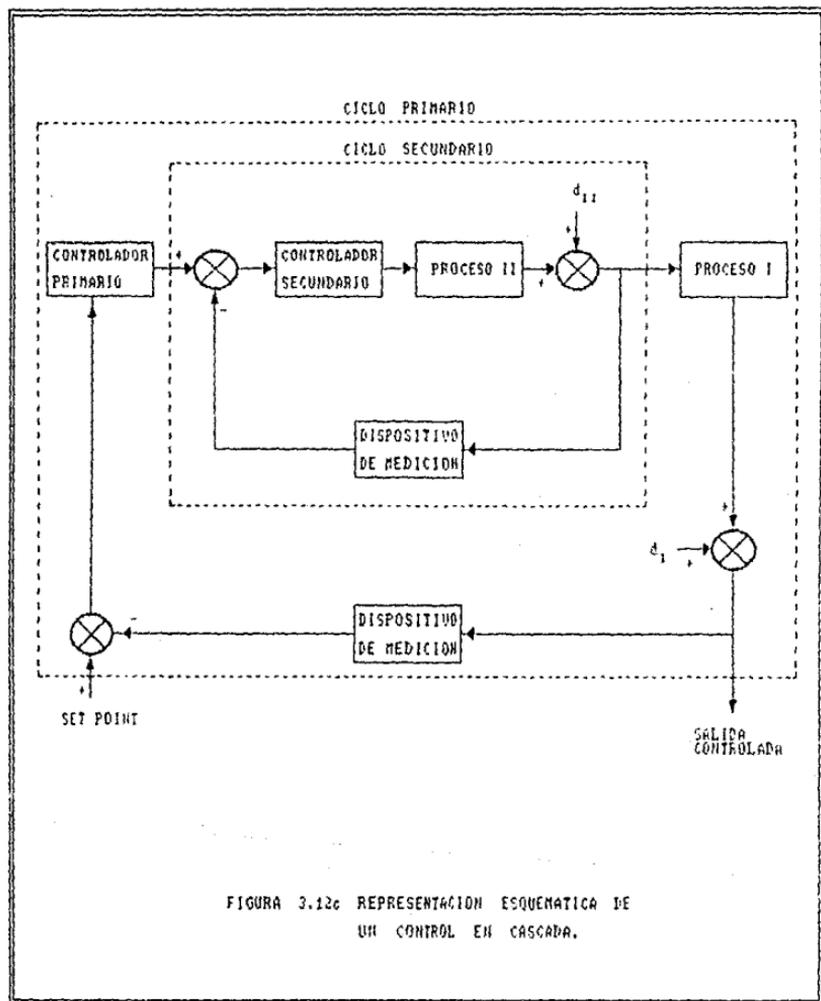


FIGURA 3.12c REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UN CONTROL EN CASCADA.

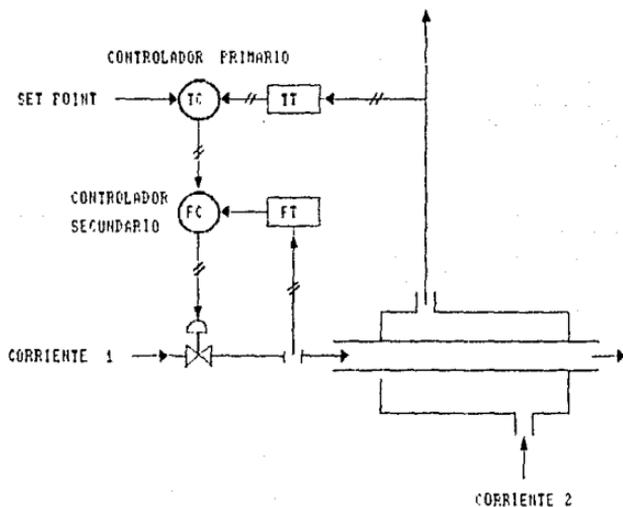


FIGURA 3.13a EJEMPLO DE CONTROL EN CASCA DA PARA UN INTERCAMBIADOR DE CALOR.

b) Columna de destilación.

El control en cascada es usualmente empleado para regular la temperatura (y consecuentemente la concentración) en el domo o fondo de una columna de destilación. La fig. 3.13b muestra un sistema típico de control en cascada para el domo de una columna de destilación.

Las principales ventajas del control en cascada son:

- a) Las perturbaciones que surgen dentro del ciclo secundario son corregidas por el controlador secundario antes de que puedan influir sobre la variable primaria.
- b) La fase retrasada que existe en la parte secundaria de los procesos es reducida considerablemente por el ciclo secundario. Esto mejora la velocidad de respuesta del ciclo primario.
- c) Las variaciones de ganancia en la parte secundaria del proceso son dominadas dentro de su propio ciclo.
- d) El ciclo secundario permite una manipulación exacta del flujo de masa o energía por el controlador primario.

B. CONTROL DE RELACION.

El control de relación es un tipo especial de control feedforward donde dos perturbaciones (cargas) son medidas y mantenidas mutuamente en una relación constante. Esto es frecuentemente usado para controlar la relación de velocidad de flujo de dos corrientes. Ambas velocidades de flujo son medidas pero sólo una puede ser controlada. La corriente cuya velocidad

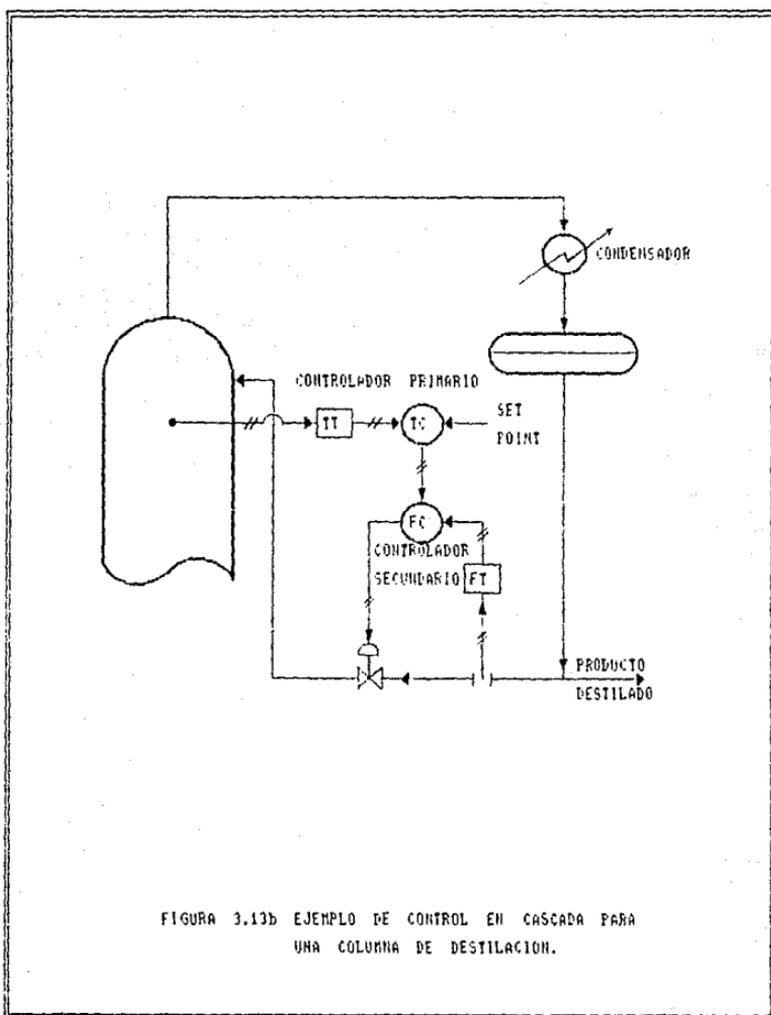


FIGURA 3.13b EJEMPLO DE CONTROL EN CASCADA PARA UNA COLUMNA DE DESTILACION.

de flujo no está bajo control es usualmente llamada corriente "salvaje".

La fig. 3.14 muestra una configuración de control de relación para dos corrientes. La corriente A es la corriente no controlada. Se miden ambas velocidades de flujo y se toma su relación. Esta relación es comparada con la relación deseada (set point) y la desviación (error) entre las relaciones medida y deseada, que constituye la señal actuadora para el controlador de relación.

El control de relación es muy usado en procesos químicos; los ejemplos más comúnmente encontrados son:

- a) Mantener una relación constante entre la velocidad de flujo de alimentación y la corriente en el reboiler de una columna de destilación.
- b) Controlar la proporción de dos reactantes, que entran a un reactor, a un valor deseado.
- c) Mantener la relación de dos corrientes de mezclado constante, para tener la composición de mezclado constante a un valor deseado.
- d) Mantener la relación de una corriente de purga constante para una corriente de recirculación.

### C. CONTROL DE RANGO DIVIDIDO.

A diferencia de los esquemas de control en cascada y del control selectivo, la configuración de control de rango dividido

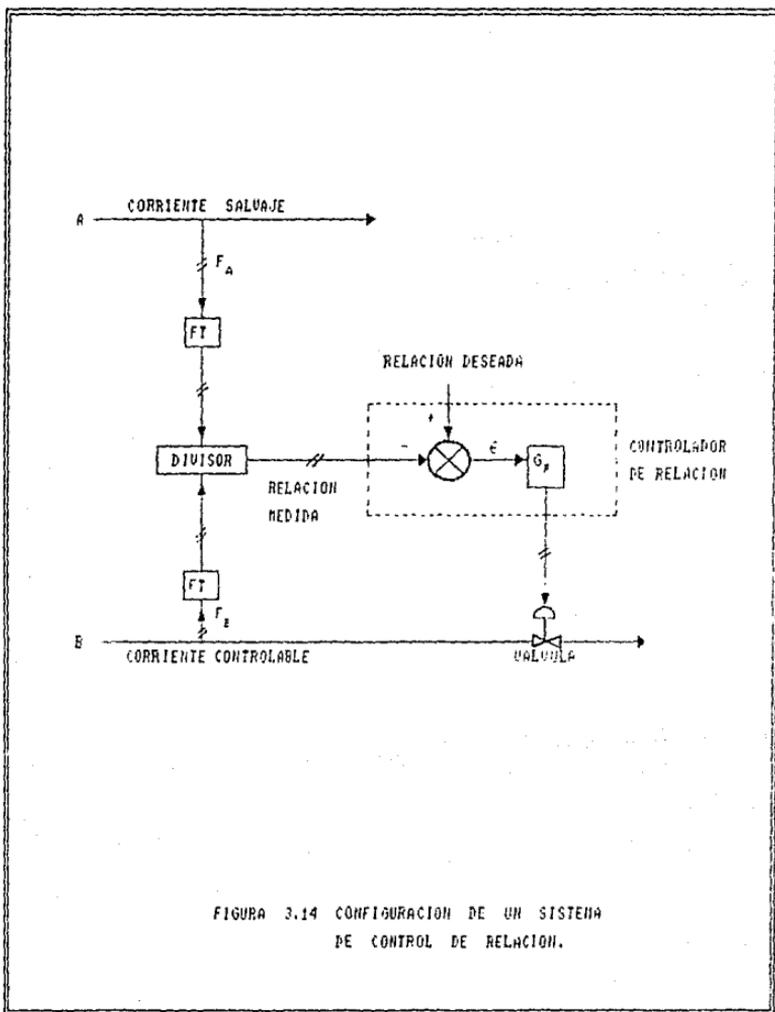


FIGURA 3.14 CONFIGURACION DE UN SISTEMA DE CONTROL DE RELACION.

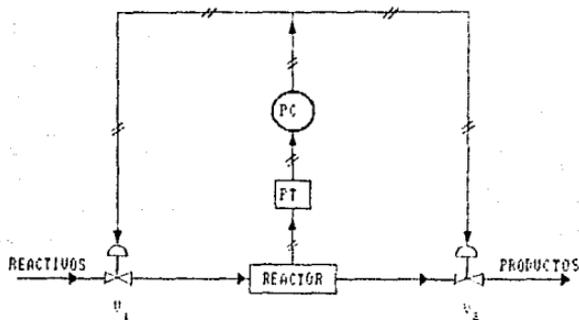
tiene una medición solamente (salida controlada) y más de una variable manipulada.

Puesto que hay una salida controlada, se tiene solamente una señal de control, la cual es dividida en dos partes, cada una afectada igualmente por las manipulaciones disponibles. Por otro lado, se puede controlar una sola salida de proceso coordinando las acciones de algunas variables manipuladas, todas las cuales tienen el mismo efecto sobre la variable de salida controlada. Tales sistemas no son muy comunes en procesos químicos pero proveen una seguridad adicional y una optimización siempre que es necesaria.

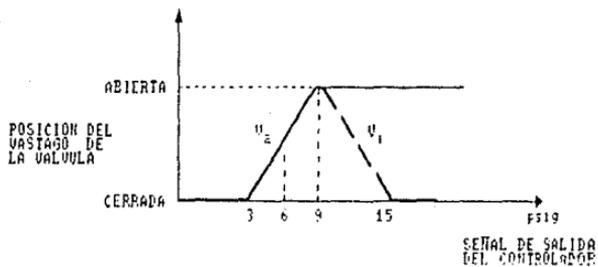
#### EJEMPLO.

Considerar el reactor de la fig. 3.15a donde se lleva a cabo una reacción en fase gaseosa. Dos válvulas de control manipulan los flujos de alimentación y del producto de reacción. Es claro que para controlar la presión en el reactor las dos válvulas no pueden actuar independientemente pero pueden hacerlo coordinadas. Así, cuando la válvula  $V_1$  abre, la válvula  $V_2$  cierra, y viceversa. La fig. 3.15b indica la coordinación de la acción de las válvulas como una función de la señal de salida del controlador (ver tabla 3.2).

La señal de salida del controlador corresponde al valor deseado de la operación del reactor a 6 psig. En la fig. 3.15b se puede ver que la válvula  $V_2$  se abre parcialmente cuando la válvula  $V_1$  se abre completamente. Cuando por varias razones la presión en el reactor se incrementa, la señal de salida del



(a)



(b)

FIGURA 3.15 (a) REACTOR CON CONTROL DE RANGO DIVIDIDO  
(b) ACCION DE DOS VALVULAS.

TABLA 3.2 SEÑAL DE SALIDA Y COORDINACION DE LAS VALVULAS.

SEÑAL DE SALIDA DEL CONTROLADOR	POSICION DE LA VALVULA $V_1$	POSICION DE LA VALVULA $V_2$
3 psig	ABIERTA	CERRADA
9 psig	ABIERTA	ABIERTA
15 psig	CERRADA	ABIERTA

controlador también aumenta. Entonces ésta es dividida en dos partes, afectando las dos válvulas simultáneamente, y toman lugar las siguientes acciones:

- a) Cuando la salida del controlador se incrementa de 6 a 9 psig la válvula  $V_2$  abre continuamente, mientras que  $V_1$  permanece completamente abierta. Ambas acciones conducen a reducir la presión.
- b) Para incrementos grandes en la presión del reactor, la salida del control puede exceder 9 psig. En tal caso, como se ve en la fig. 3.15b, la válvula  $V_2$  está completamente abierta, mientras que  $V_1$  comienza a cerrarse. Ambas acciones reducen la presión hasta que el reactor retorne a la operación deseada.

#### D. CONTROL SELECTIVO.

Estos sistemas de control involucran una variable manipulada y algunas variables controladas. Puesto que con una variable manipulada se puede controlar solamente una variable de salida, los sistemas de control selectivos transfieren la acción de control de una sola salida controlada a otra, según sea necesario. Existen varios tipos de sistemas de control selectivos, pero aquí se discutirán sólo dos:

##### 1. CONTROL DE PREDOMINIO.

Durante la operación normal de una planta o durante su arranque o paro, es posible que surjan situaciones de peligro las cuales pueden llevar a la destrucción del

equipo y/o provocar la muerte del personal de operación. En tales casos, es necesario cambiar la acción de control normal e intentar prevenir que una variable de proceso exceda un límite permisible (inferior o superior). Esto se puede lograr a través del uso de tipos especiales de interruptores. El interruptor-selector-alto (HSS) es usado siempre que una variable no deba exceder un límite superior, y el interruptor-selector-bajo (LSS) es empleado para prevenir que la variable de proceso no exceda un límite inferior.

#### EJEMPLOS

##### a) Protección de un sistema calentador.

Usualmente, la presión de vapor en un calentador es controlada por el uso de un ciclo de control de presión en la línea de descarga (ciclo 1 en la fig. 3.16). Al mismo tiempo el nivel de agua en el calentador no debe caer abajo del límite inferior, el cual es necesario para mantener el serpentín de calentamiento inmerso en agua y así prevenir un incendio. La fig. 3.16 muestra el sistema de control de predominio usando un LSS. De acuerdo a este sistema, siempre que el nivel de líquido cae abajo del límite permisible, el LSS conmuta la acción de control, del control de presión al control de nivel (ciclo 2 en la fig. 3.16) y cierra la válvula en la línea de descarga.

##### b) Protección de un sistema compresor.

La descarga de un compresor es controlada con un sistema

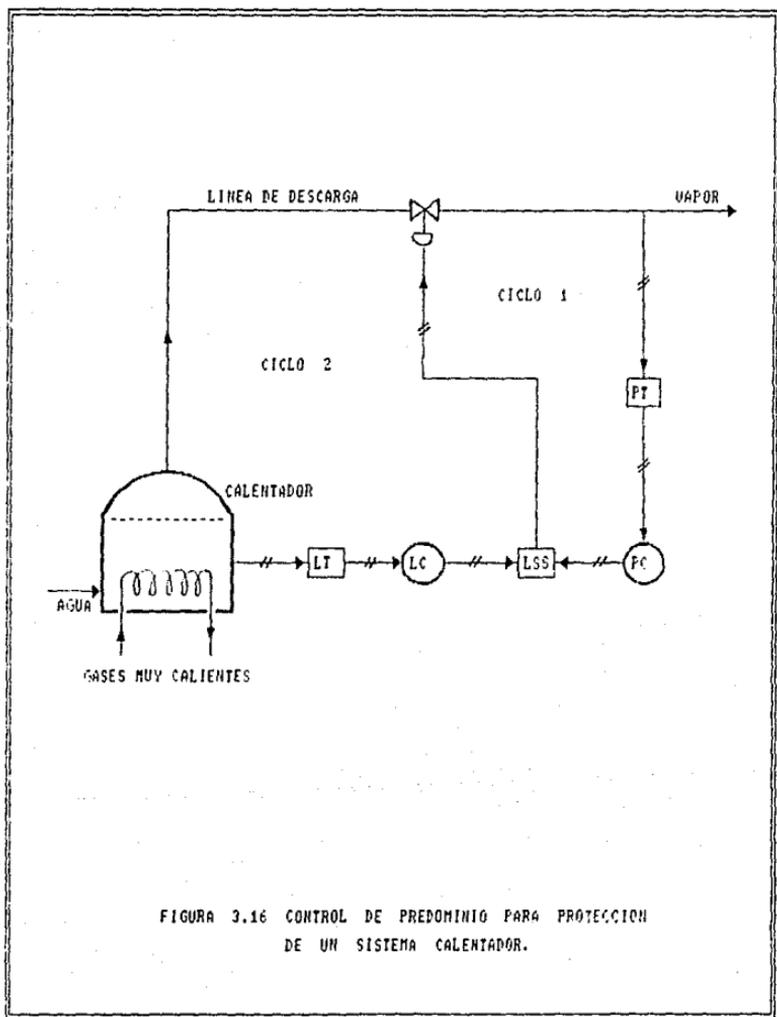


FIGURA 3.16 CONTROL DE PREDOMINIO PARA PROTECCION DE UN SISTEMA CALENTADOR.

de control de flujo (ciclo 1 en la fig. 3.17). Para prevenir que la presión de descarga exceda un límite superior, se introduce un control de predominio con un HSS. Este transfiere la acción de control del ciclo de control de flujo al ciclo de control de presión (ciclo 2 en la fig. 3.17), siempre que la presión de descarga exceda el límite superior.

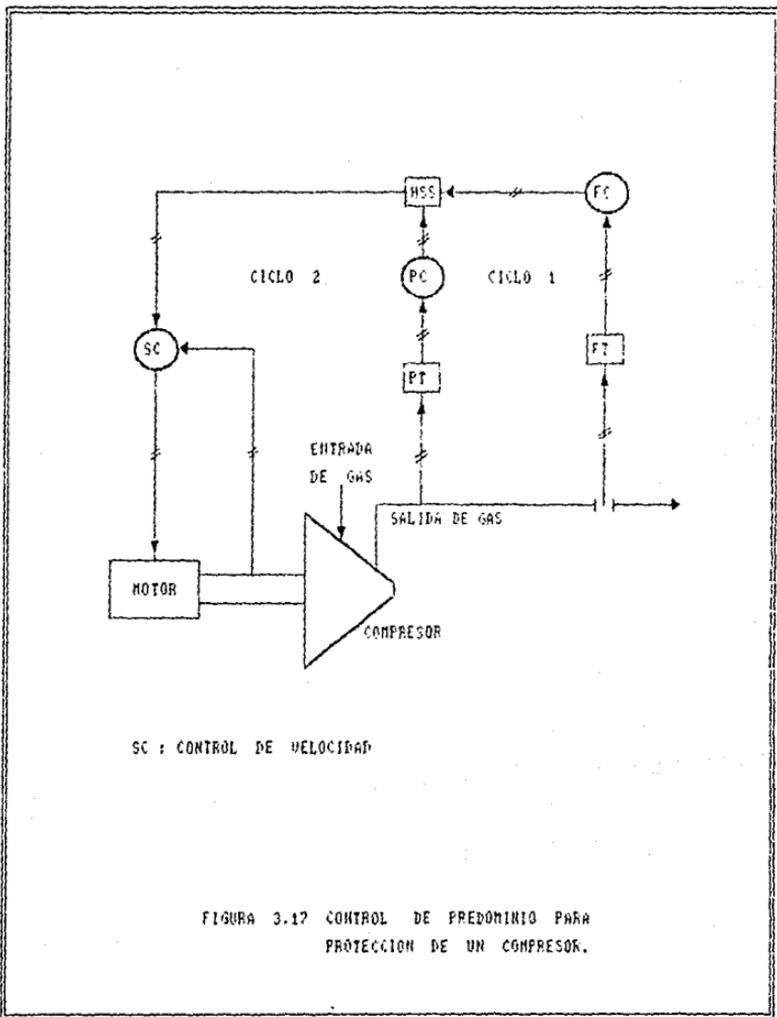
## 2. CONTROL POR SELECCION DE ALTA SERIAL O SUBASTADOR.

Tales configuraciones de control seleccionan, de entre algunas mediciones similares, a una con el valor más alto y alimentan esta información al controlador. Así, éste es un controlador selectivo que procesa algunas variables de salida de medición y una entrada manipulada.

## EJEMPLOS.

### a) Reactores tubulares catalíticos con reacciones altamente exotérmicas.

Algunas reacciones altamente exotérmicas se llevan a cabo en reactores tubulares con lecho catalítico. Los ejemplos típicos son reacciones de oxidación de hidrocarburos, tales como la oxidación de o-xileno o naftaleno para producir anhídrido ftálico. La fig. 3.18 muestra el perfil de temperaturas a lo largo del reactor tubular. El sitio donde se localiza la temperatura más alta es llamado "lugar caliente" (hot spot). La localización del lugar caliente se mueve a lo largo del reactor



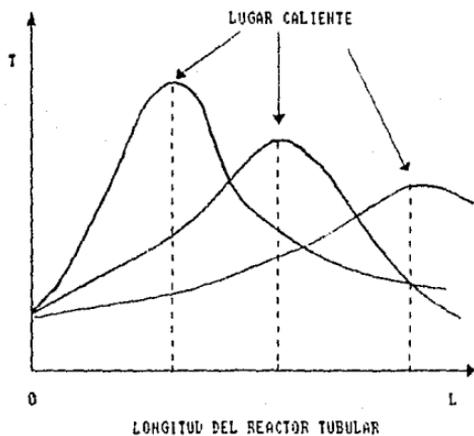


FIGURA 3.18 PERFILES DE TEMPERATURA EN UN REACTOR CATALITICO TUBULAR.

dependiendo de las condiciones de alimentación (temperatura, concentración, flujo, etc.) y de la actividad catalítica (fig. 3.18). El valor de la temperatura del "lugar caliente" también depende de los factores listados anteriormente y de la temperatura y flujo del enfriador. El control de tales sistemas es un desafío real para los ingenieros químicos. El principal objetivo de control es mantener la temperatura del "lugar caliente" por debajo de un límite superior. De esta forma, se necesita un sistema de control que pueda identificar la localización del "lugar caliente" y proporcionar la acción de control propia. Esto puede lograrse a través de:

- La localización de algunos termocoples a lo largo del reactor.
- El uso de un sistema de control por selección de alta señal para seleccionar la temperatura más alta, la cual será usada para controlar el flujo del enfriador (fig. 3.19).

b) Recuperación de reactores catalíticos.

El catalizador en los reactores catalíticos sufre una desactivación con el avance de la reacción debido a los depósitos de carbono en éste. El catalizador puede ser regenerado quemando estos depósitos con aire u oxígeno. Para evitar la destrucción del catalizador debido a temperaturas excesivas, durante la combustión

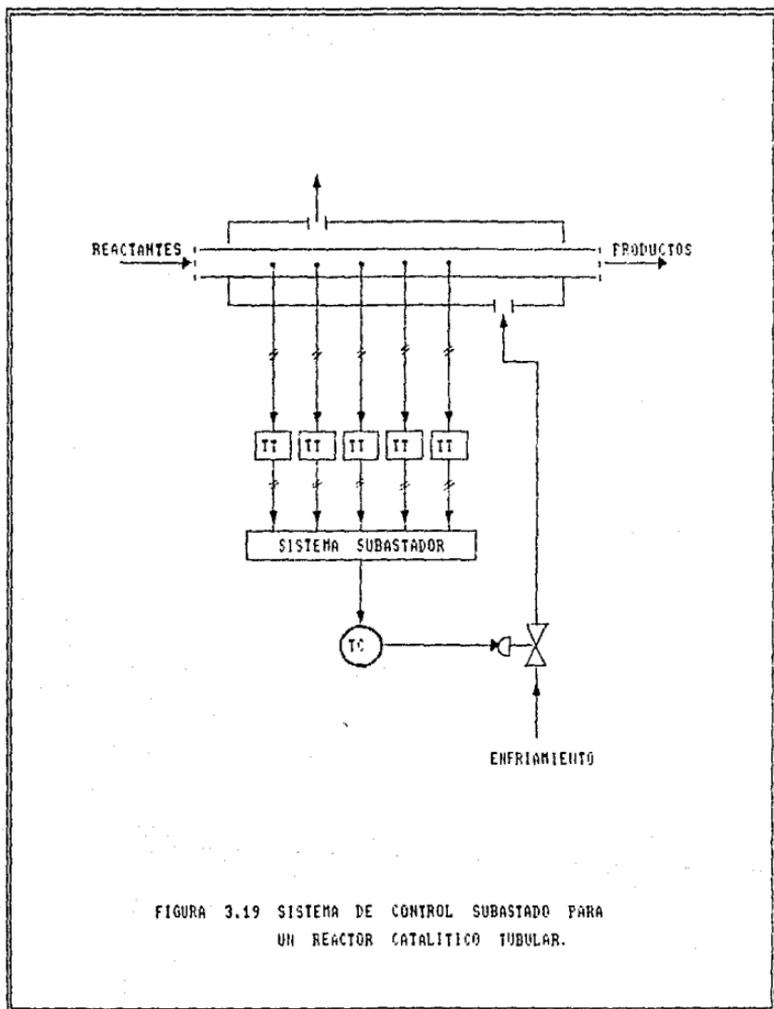


FIGURA 3.19 SISTEMA DE CONTROL SUBASTADO PARA UN REACTOR CATALITICO TUBULAR.

de los depósitos, se puede usar un sistema de control por selección de alta señal el cual:

- Tome las mediciones de temperatura a lo largo del reactor.
- Seleccione la temperatura más alta.
- Controle apropiadamente la cantidad de aire.

Los circuitos de control compuestos, también pueden ser analizados para sistemas multivariables de la misma forma que se estableció anteriormente.

### 3.2 ELEMENTOS DE UN CIRCUITO DE CONTROL.

En esta parte se hace una descripción de los elementos físicos (hardware) que constituyen el circuito de control. Entre estos elementos los más importantes son: el proceso a controlar, instrumentos de medición, transductores, transmisores o líneas de transmisión, controlador e instrumento final de control.

#### 3.2.1 INSTRUMENTO DE MEDICION.

Es un dispositivo utilizado para medir la magnitud de una variable (perturbaciones, variables de salida a controlar y variables de salida secundarias) y representa la principal fuente de información acerca de los cambios que ocurren dentro del proceso.

## A. CLASIFICACION DE INSTRUMENTOS.

### 1. INSTRUMENTOS ANALOGICOS.

Estos instrumentos se caracterizan porque la representación de la magnitud a medir es continuamente variable. Es decir, presentan el comportamiento continuo de la variable a través del tiempo.

### 2. INSTRUMENTOS DIGITALES.

La característica de estos instrumentos es la presentación de la magnitud a medir, la cual sólo adquiere valores discretos.

En el caso de los dispositivos de presentación analógica se puede indicar en una sola mirada el valor aproximado y el valor relativo con respecto a la escala completa. Sin embargo, este tipo de dispositivo no ofrece lecturas tan rápidas y exactas como los de naturaleza digital. La presentación numérica o digital se lee con tanta precisión como se desee, y está limitada sólo por la cantidad de dígitos de que se compone cada forma de representación particular.

## B. CONCEPTOS GENERALES SOBRE MEDICION.

### 1. RANGO DE UN INSTRUMENTO.

El rango de un instrumento designa los límites dentro de los cuales una señal eléctrica, mecánica, neumática u otra pueda ser indicada, registrada, medida o transmitida. El rango de entrada

del instrumento está generalmente implícito y está expresado por las cantidades más baja y más alta de la señal de entrada que el dispositivo puede medir. Ver tabla 3.3.

## 2. SPAN DE UN INSTRUMENTO.

El alcance o span de un instrumento está relacionado directamente al rango del instrumento y es igual a la diferencia algebraica del valor más bajo y el valor más alto del rango. Si el span de un instrumento cambia, el rango también debe cambiar. Sin embargo, un cambio en el rango puede o no cambiar el span. Ver tabla 3.3.

## 3. MEDICION.

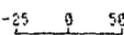
Mecanismo de comparación de la magnitud de una variable de proceso con otro de la misma clase.

## 4. ERRORES DE MEDICION.

El error de medición es la diferencia numérica entre el valor verdadero de una cantidad y el valor obtenido por la medición. Generalmente los errores se clasifican en:

- a) Equivocaciones. Son errores debidos al descuido en la lectura, en el registro de las observaciones o a una mala aplicación de una corrección.
- b) Errores sistemáticos. Algunas veces referidos como una "propensión o inclinación" que influye igualmente sobre todas las mediciones de una variable. Estos errores surgen, por ejemplo, al graduar la escala de un instrumento.

TABLA 3.3 EJEMPLOS DE LA RELACION ENTRE RANGO Y SPAN DE UN INSTRUMENTO.

DESCRIPCION	RANGO	VALOR DEL RANGO		SPAN
		MAS BAJO	MAS ALTO	
	0 a 100	0	100	100
	25 a 125	25	125	100
	-100 a 0	-100	0	100
	-100 a -25	-100	-25	75
	-25 a 50	-25	50	75

c) Errores accidentales. Algunas veces referidos como errores casuales. La causa de tales errores no se conoce o es no determinable en los procesos ordinarios de medición. Tales errores normalmente son pequeños y siguen las leyes del azar.

#### FORMAS BASICAS DE MEDICION.

- a) Conteo. Este método se utiliza para medir conjuntos de unidades discretas y es además el único método que proporciona una medida exacta.
- b) Medición directa. En este método se hace una comparación directa de la variable medida contra un patrón de la misma clase.
- c) Medición indirecta. Este método se emplea cuando la magnitud por medir no puede compararse en forma directa.

#### 5. REPETIBILIDAD.

Para un dispositivo de medición, este término puede ser definido como el acercamiento entre un número de mediciones consecutivas de la salida para el mismo valor de entrada bajo las mismas condiciones de operación.

#### 6. RESOLUCION.

Es el menor valor incremental de entrada o salida que puede ser detectado, causado o discriminado por el dispositivo de medición, controlador o sistema.

## 7. PRECISION.

Es función de la repetibilidad y la resolución del instrumento.

### C. VARIABLES FUNDAMENTALES EN LOS PROCESOS INDUSTRIALES.

El control de un proceso químico se reduce a un balance de materia y energía del mismo. Esto involucra condiciones peculiares de operación tales como la relación de flujo de material y las correctas temperaturas, presiones, niveles de fluidos y composición del material. Las condiciones mencionadas están interrelacionadas. En seguida se discutirán varios parámetros de control para casi todos los procesos.

#### 1. FLUJO.

Un proceso químico continuo requiere el control de los materiales de flujo. Los ciclos de control de flujo son más comunes que ningún otro proceso de una sola variable. El control de otras variables usualmente depende de la regulación de flujo para lograr estabilidad. Por ejemplo, la mayoría de los sistemas de control de temperatura se basan en la regulación del flujo del medio de calentamiento o enfriamiento.

#### 2. TEMPERATURA.

La energía en forma de calor es otra variable importante la cual se controla en la mayoría de las operaciones químicas. En

las reacciones donde el calor es incontrolable, éste debe removerse de algún modo. El rendimiento máximo y las características deseables del proceso son funciones de la temperatura en la mayoría de los casos.

### 3. PRESION.

El control de la presión es necesario en todos los procesos químicos. Muchas operaciones son función de la presión (positiva o vacío), así como de la temperatura. Además de obtener la condición necesaria para lograr una reacción, el control de presión también es necesario para proteger el equipo y los sistemas de tuberías.

### 4. NIVEL.

Otra función importante en el control de procesos continuos es el control de nivel. Este es usado para: (a) Obtener balances de materia cuando hay variación de la velocidad de flujo de materia prima; (b) Lograr el funcionamiento adecuado de las torres de fraccionamiento, tanques clarificadores, reactores y otros equipos; y (c) Regular el flujo de productos finales e intermedios. El control de temperatura y el control de nivel se asocian frecuentemente con el control de flujo del medio de calentamiento o enfriamiento y del material principal, respectivamente.

## 5. OTRAS PROPIEDADES CONTROLABLES.

Las cuatro variables antes mencionadas comprenden un alto porcentaje de las variables involucradas en los ciclos de control de la mayoría de los procesos. Otras variables medidas y controladas se incluyen en la siguiente lista:

- a) Análisis de componentes. Hay algunos tipos de dispositivos analíticos usados para medir la composición de las corrientes de proceso. Algunas veces es necesario determinar y mantener la presencia o ausencia, dentro de los límites determinados, de uno o más componentes. Estos análisis se hacen cromatógrafos u otros dispositivos analíticos.
- b) Propiedades físicas. Entre las propiedades físicas que frecuentemente deben ser controladas se incluyen: viscosidad, gravedad específica, punto de fusión, turbidez, punto de ebullición y color.
- c) Propiedades químicas. Muchos procesos químicos incluyen entre las propiedades que deben ser controladas el pH, la conductividad, redox, etc.
- d) Otras formas de energía. Otras variables que algunas veces deben ser controladas son: velocidad, frecuencia, potencia, voltaje y corriente.

En la tabla 3.4 se listan los instrumentos de medición típicos encontrados en varias aplicaciones de procesos de

TABLA 3.4 DISPOSITIVOS DE MEDICION TÍPICOS PARA PROCESOS DE CONTROL.

VARIABLE DE PROCESO MEDIDA	DISPOSITIVO DE MEDICION	COMENTARIOS
TEMPERATURA	TERMOCOPLE TERMOMETRO DE RESISTENCIA TERMOMETRO BIMETALICO PIROMETRO DE RADIAACION CRISTAL DE CUARZO OSCILANTE	<p>USOS COMUNES PARA TEMPERATURAS RELATIVAMENTE BAJAS</p> <p>USADO PARA ALTAS TEMPERATURAS ALTA SENSITIVIDAD</p>
PRESION	MANOMETRO TUBO BOURDON DIAPHRAGMA FUELLE PIEZORESISTIVO PIEZOELECTRICO CALIBRADOR DE IONIZACION	<p>CON FLOTADOR O DESPLAZADOR PARA BAJAS Y ALTAS PRESIONES BAJAS PRESIONES</p> <p>USADOS PARA CONVERTIR SEÑAL DE PRESION A SEÑAL ELECTRICA</p>
FLUJO	TUBO PITOT PLACA DE ORIFICIO ANNUBAR TUBO VENTURI TUBO DAHL MEDIDOR PENNISON TURBINA ULTRASONIDO ANEMOMETRO CAMPO ELECTROMAGNETICO	<p>USADOS PARA MEDIR CAIDA DE PRESION A TRAVES DE UNA CONSTRICCION DE FLUJO</p> <p>PARA ALTA PRECISION PARA MEDICIONES DIFICILES DE FLUJO</p>

TABLA 3.4 DISPOSITIVOS DE MEDICION TÍPICOS PARA PROCESOS DE CONTROL (CONT.)

VARIABLE DE PROCESO MEDIDA	DISPOSITIVO DE MEDICIÓN	COMENTARIOS
NIVEL DE LIQUIDO	FLOTADOR DESPLAZADOR RESONANCIA SONICA CONDUCTIVIDAD DIELECTRICO PRUEBA TERMOELECTRICA RADIACION NUCLEAR CELDA FOTOELECTRICA	] ACOPLADOS CON VARIOS TIPOS DE INDICADORES Y CONVERTI- TORES DE SEÑAL ] BUENOS PARA SISTEMAS DE DOS FASES
COMPOSICION	CROMATOGRAFICO INFRARROJO ULTRAVIOLETA DE RADIACION VISIBLE PARAMAGNETICO NEFELOMETRICO TURBIDIMETRICO POTENCIOMETRICO CONDUCTIMETRICO OSCILOMETRICO MEDIDOR DE PH POLAROGRAFICO COLORIMETRICO ESPECTROSCOPICO ANALISIS TERMICO DIFERENCIAL	REQUERIDO PARA ANALISIS DE TIEMPOS LARGOS ] CONVENIENTE PARA UNO O DOS COMPONENTES QUIMICOS ] NO MUY CONVENIENTE PARA PROCESOS DE CONTROL ] COSTOSO PARA CICLOS DE CONTROL DE BAJO COSTO

control.

Para poder obtener la función de transferencia de cualquier variable que se quiera medir, se debe de tener la ecuación en función del tiempo que caracteriza a dicha variable, empleando el método de linealización (si se necesita linealizar), variables de desviación y transformada de Laplace (ver apéndices B, C, y D, respectivamente).

### 3.2.2 CONTROLADOR.

El controlador es un dispositivo que realiza básicamente tres funciones:

1. Compara continuamente el valor de la variable medida o controlada contra el valor deseado de esta variable o set point y genera un error o desviación.
2. Procesa el error de acuerdo a los modos de control.
3. Proporciona una indicación del valor de la variable controlada, set point y salida del controlador.

En la fig. 3.20 se presenta el diagrama de bloques de un controlador.

El controlador está formado por dos partes:

1. Sección de comparación.
2. Sección de los modos de control donde se procesa el error.

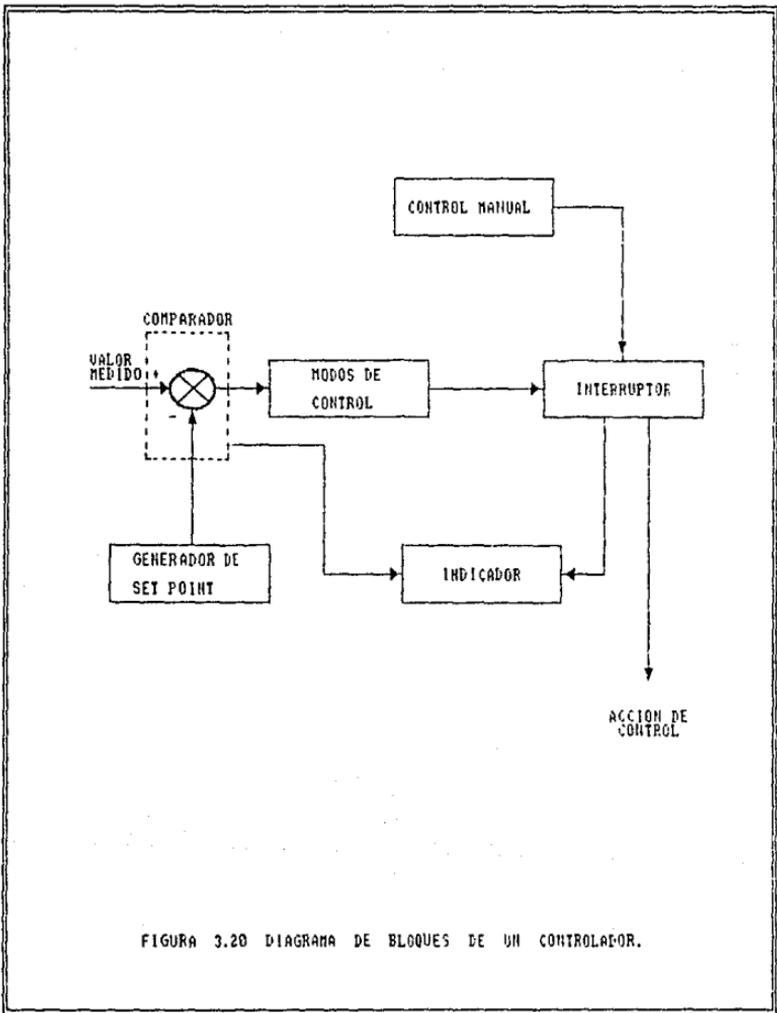


FIGURA 3.20 DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN CONTROLADOR.

## A. MODO DE CONTROL

### 1. MODO DE CONTROL PROPORCIONAL (P).

El modo de control proporcional produce una señal de salida (presión en el caso de un controlador neumático, corriente o voltaje para un controlador electrónico) el cual es proporcional al error.

Esta acción puede ser expresada como:

$$y = K_c \epsilon + C \quad (3.1)$$

donde:

$y$  : señal de salida del controlador.

$K_c$  : ganancia o sensibilidad.

$\epsilon$  : error = set point - variable medida.

$C$  : constante (para que la salida siempre sea positiva).

En un controlador teniendo ganancia ajustable, el valor de la ganancia  $K_c$  puede ser variada por movimiento de un botón en el controlador. El valor de  $C$  es el valor de la variable de salida para cuando  $\epsilon$  es cero, y en muchos controladores  $C$  puede ser ajustada para obtener la señal de salida requerida.

La ganancia del proceso ( $K_c$ ) es definida como:

$$K_c = \frac{\text{cambio en la salida}}{\text{cambio en la entrada}}$$

Para obtener la función de transferencia de la ecuación (3.1), primero se introduce la variable de desviación:

$$y^d = y - \bar{y}$$

dentro de la ecuación (3.1). Al tiempo igual a cero, se asume que el error  $e$  sea cero. Entonces, la ecuación (3.1) se convierte en:

$$y(t) = K_c e(t) \quad (3.2)$$

Tomando la transformada de Laplace para la ecuación (3.2), da la función de transferencia de un controlador proporcional:

$$\frac{Y(s)}{e(s)} = K_c \quad (3.3)$$

El término "BANDA PROPORCIONAL" es comúnmente usado entre procesos de control en lugar del término de ganancia.

La banda proporcional (BP) es definida como el error (expresada como un porcentaje del rango de la variable medida) requerido para accionar al elemento final de control de una posición extrema a otra. El sinónimo usado frecuentemente es el bandwidth. La banda proporcional y la ganancia están inversamente relacionadas, es decir:

$$BP(\%) = \frac{100\%}{K_c}$$

El valor de la banda proporcional usualmente se encuentra dentro de un rango que está entre  $1 \leq BP \leq 500$ .

Cuando se hace interaccionar el controlador con el proceso

se presenta una característica inherente que es el "CORRIMIENTO".

El "punto de control" es el valor de la variable controlada a régimen permanente.

El corrimiento (offset) es la diferencia entre el punto de control y el set point (fig. 3.21).

El corrimiento decrece conforme la ganancia aumenta y teóricamente:

offset  $\longrightarrow$  0      cuando       $K_c \longrightarrow \infty$

#### - CONTROL DE DOS POSICIONES (ON-OFF).

Un caso especial del controlador proporcional es el control on-off. Si la ganancia  $K_c$  es muy grande, la válvula se moverá de una posición extrema a otra, si sólo hay una ligera desviación del set point.

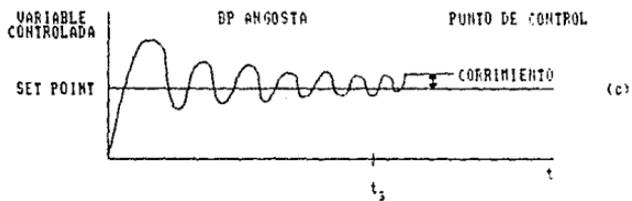
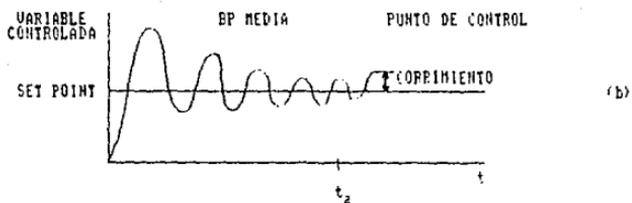
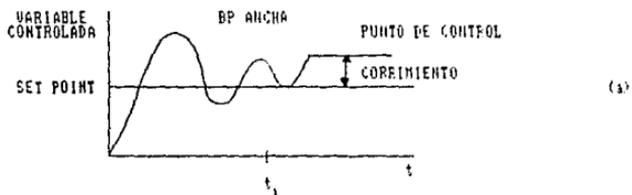
Esta acción muy sensitiva es llamada acción on-off porque la válvula está entre totalmente abierta (on) o totalmente cerrada (off). Este es un controlador muy simple y es ejemplificado por el termostato usado en un sistema de calefacción.

#### 2. MODO DE CONTROL INTEGRAL O RESET (I).

Se produce una acción de control en el cual la salida es proporcional al tiempo integral de la entrada.

El modo de control integral sirve para evitar el corrimiento característico del modo de control proporcional.

El modo de control integral está expresado por:



$t_1, t_2, t_3$  INDICAN EL TIEMPO EN QUE SE ALCANZA EL REGIMEN PERMANENTE.

FIGURA 3.21 CORRIMIENTO (OFFSET).

$$y = \frac{Kc}{\tau_I} \int_0^t e \, dt + C \quad (3.4)$$

donde:

$Kc$  : ganancia.

$\tau_I$  : tiempo integral (  $0.1 \leq \tau_I \leq 50 \text{ min}$  ).

$C$  : constante.

Empleando variables de desviación y la transformada de Laplace para la ecuación (3.4), como se hizo para el modo de control proporcional, se tiene que la función de transferencia para un controlador integral es:

$$\frac{Y(s)}{e(s)} = \frac{Kc}{\tau_I s} \quad (3.5)$$

### 3. MODO DE CONTROL DERIVADO (D).

Sirve para compensar los tiempos muertos, debido a que el controlador actúa inmediatamente al sentir un error y se anticipa a los efectos que pudiera producir un cambio de carga en un proceso con tiempo muerto.

La ecuación del modo de control derivado es:

$$y = Kc \tau_D \frac{de}{dt} + C \quad (3.6)$$

donde:

$K_c$  : ganancia.

$\tau_D$  : tiempo derivado.

$C$  : constante.

Empleando nuevamente variables de desviación, así como la transformada de Laplace para la ecuación (3.6), se tiene que la función de transferencia para un controlador derivado es:

$$\frac{Y(s)}{e(s)} = K_c \tau_D s \quad (3.7)$$

Existen otros modos de control, los cuales son una combinación de los tres modos mencionados anteriormente, como son:

#### 4. MODO DE CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL (PI).

Este modo de control es descrito por la ecuación:

$$y = K_c e + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t e \, dt + C \quad (3.8)$$

En este caso, tenemos adicionado al término de acción proporcional  $K_c e$ , otro término el cual es proporcional a la integral de error. Los valores de  $K_c$  y  $\tau_I$  pueden ser variados por dos botones en el controlador.

Para visualizar la respuesta de este controlador, considerar la respuesta a un cambio de paso unitario en el error, como se muestra en la fig. 3.22. Esta respuesta a paso unitario es

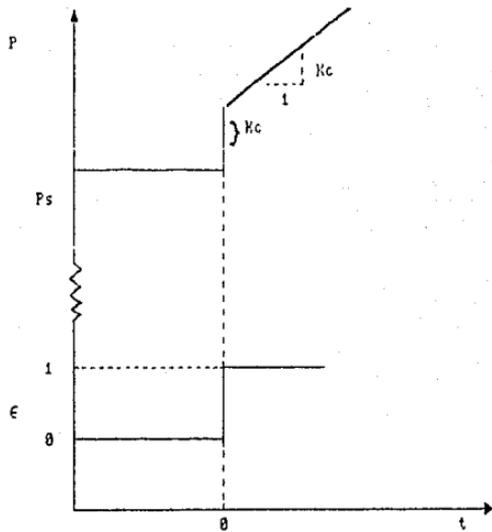


FIGURA 3.22 RESPUESTA DE UN CONTROLADOR PI PARA UN CAMBIO DE PASO UNITARIO EN ERROR.

directamente obtenida poniendo el error igual a uno, dentro de la ecuación (3.8), la cual produce:

$$y(t) = Kc + \frac{Kc}{\tau_I} t + C \quad (3.9)$$

notar que "y" cambia linealmente por un aumento de Kc, y entonces cambia linealmente con el tiempo a una proporción de Kc/τ<sub>I</sub>.

Para obtener la función de transferencia de la ecuación (3.9), se introduce otra vez la variable de desviación dentro de la ecuación (3.9) y después la transformada de Laplace para obtener:

$$\frac{Y(s)}{\epsilon(s)} = Kc \left( 1 + 1/\tau_I s \right) \quad (3.10)$$

#### 5. MODO DE CONTROL PROPORCIONAL-DERIVADO (PD).

Este modo de control puede ser representado por:

$$y = Kc \epsilon + Kc \tau_D \frac{d\epsilon}{dt} + C \quad (3.11)$$

En este caso, se tiene adicionado al término proporcional otro término Kc τ<sub>D</sub> dε/dt, el cual es proporcional a la derivada del error. Los valores de Kc y τ<sub>D</sub> pueden ser variados separadamente por botones en el controlador.

La acción de este controlador puede ser visualizado considerando la repuesta a un cambio lineal en error, como se

muestra en la fig. 3.23. Esta respuesta es obtenida introduciendo la función lineal  $e(t) = A t$  dentro de la ecuación (3.11) para obtener:

$$y = A K_c t + A K_c \tau_D + C \quad (3.12)$$

notar que "y" cambia repentinamente por un aumento de  $A K_c \tau_D$  como un resultado de la acción derivada a una proporción de  $A K_c$ . El efecto de la acción en este caso, es para el cambio lineal en el error por añadir salida adicional ( $A K_c \tau_D$ ) a la acción proporcional.

Para obtener la función de transferencia de la ecuación (3.12), se introduce la variable de desviación y después tomando la transformada de Laplace se obtiene:

$$\frac{Y(s)}{e(s)} = K_c (1 + \tau_D s) \quad (3.13)$$

#### 6. MODO DE CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVADO (PID).

Este modo de control es una combinación de los tres primeros modos que se mencionaron y está dado por la expresión:

$$y = K_c e + K_c \tau_D \frac{de}{dt} + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t e dt + C \quad (3.14)$$

En este caso, el controlador contiene tres botones para ajustar  $K_c$ ,  $\tau_D$ ,  $\tau_I$ . La función de transferencia para este

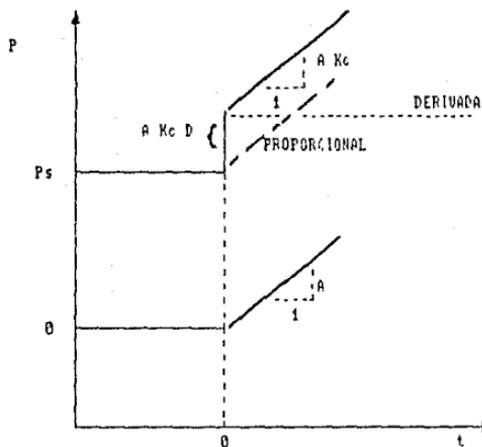


FIGURA 3.23 RESPUESTA DE UN CONTROLADOR PD A UNA ENTRADA LINEAL EN ERROR.

controlador puede ser obtenida de la transformada de Laplace de la ecuación (3.14), entonces se tiene:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_C ( 1 + \tau_D s + 1/\tau_I s ) \quad (3.15)$$

En la tabla 3.5 se muestran algunas características de los diferentes tipos de modos de control.

FORMAS DE OPERACION DE LOS CONTROLADORES. Los controladores se pueden operar de dos formas que son:

- a) AUTOMATICO. Cuando la salida es generada por los modos de control.
- b) MANUAL. Cuando la salida la controla un operador manualmente.

### 3.2.3 ELEMENTO FINAL DE CONTROL.

Es el componente final de un sistema de control, el cual recibe la salida de un controlador (señal de actuación) y ajusta el valor de la variable manipulada.

#### A. VALVULA.

La válvula de control es el elemento final de control más

TABLA 3.5 MODOS DE CONTROL Y SUS APLICACIONES.

MODO DE CONTROL	TIPO DE REACCION DE PROCESO	CAMBIOS DE CARGA		APLICACIONES
		TAMANO	VELOCIDAD	
ON-OFF.	LENTA	CUALQUIERA	CUALQUIERA	GRAN CAPACIDAD EN INSTALACIONES DE TEMPERATURA Y NIVEL, TANQUES DE ALMACENAMIENTO.
PROPORCIONAL.	LENTA O MODERADA	PEQUEÑO	MODERADA	NIVEL DEL REBOILER YETILE, TEMPERATURA DE HORNOS, ESTACIONES REDUCTORAS DE PRESION.
PROPORCIONAL Y DERIVADO.	MODERADA	PEQUEÑO	CUALQUIERA	DONDE LA ESTABILIDAD AUMENTA CON MINIMO OFFSET, PRESION DE DESCARGA DEL COMPRESOR.
PROPORCIONAL E INTEGRAL.	CUALQUIERA	GRANDE	LENTA O MODERADA	MAYOR APLICACIONES INCLUYENDO FLUJO. NO CONVENIENTE PARA OPERACIONES BATCH.
PROPORCIONAL INTEGRAL Y DERIVADO.	CUALQUIERA	GRANDE	RAPIDA	CONTROL BATCH, PROCESOS CON REPENTINA PERTURBACION.

utilizado comúnmente.

Una válvula de control es un dispositivo capaz de controlar el paso de un fluido, permitiendo pasar la cantidad requerida. La fig. 3.24 muestra las principales partes de una válvula de control.

- COEFICIENTE DE FLUJO.

El coeficiente de flujo es el número de galones por minuto de agua que pueden pasar a través de una restricción de flujo dado, con una caída de presión de un psi.

$$Cv = \frac{Q_v}{P/Gf}$$

donde:

Cv : capacidad de la válvula (gpm/psi).

$Q_v$  : flujo (gpm).

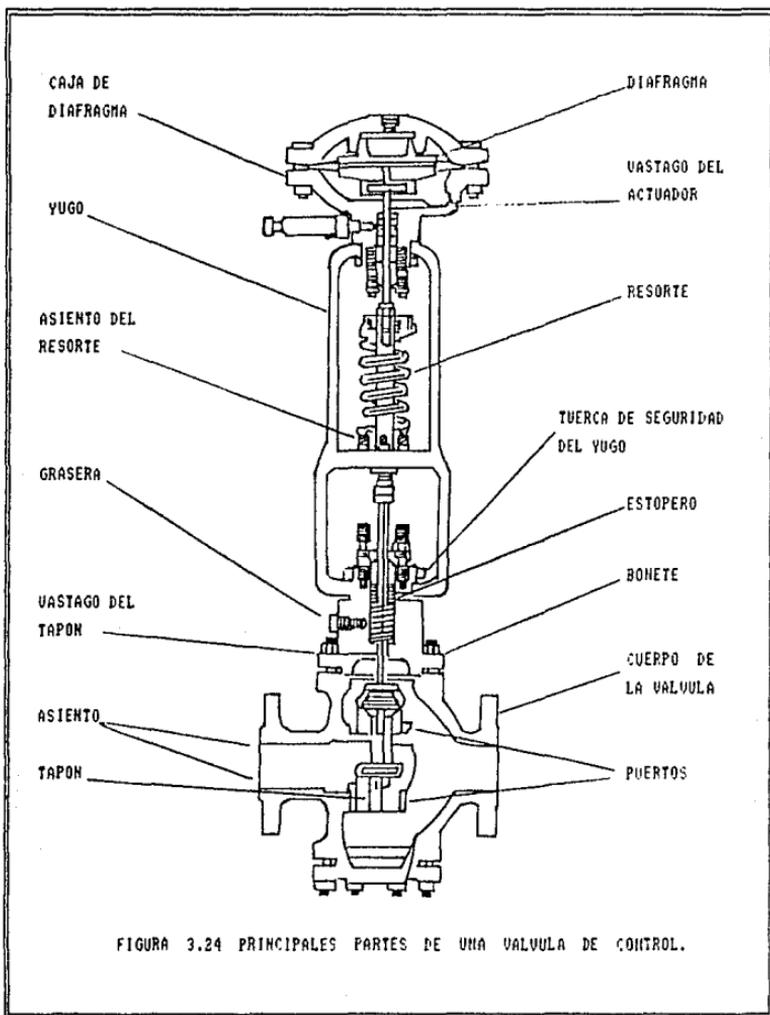
P : caída de presión a través del cuerpo de la válvula (psi).

Gf : gravedad específica (con respecto a la temperatura).

Generalmente, los procesos requieren de un flujo normal; la calibración con un flujo máximo puede ser indeseable, por lo tanto, no debe salir del margen de flexibilidad. Para un mejor procedimiento del tamaño de la válvula, para un flujo máximo teniendo un porcentaje cerca del flujo normal, se deben de tomar las siguientes consideraciones:

$$Q \text{ (calibrada)} = 1.3 Q_{\text{NORMAL}}$$

$$Q \text{ (calibrada)} = 1.1 Q_{\text{MAXIMO}}$$



COEFICIENTE DE FLUJO PARA GAS (Cg)

$$C_g = \frac{Q_s}{520/G P_1 \text{ sen } 3417/C_1 \text{ P/P}_1 \text{ deg}}$$

COEFICIENTE DE FLUJO PARA VAPOR (Cg)

$$C_g = \frac{Q_s}{1.06 d_1 P_1 \text{ sen } 3417/C_1 \text{ P/P}_1 \text{ deg}}$$

Vapor bajo 1,000 psi

$$C_g = \frac{Q_s (1 + 0.00065 T_{sh})}{P_1 \text{ sen } 3417/C_1 \text{ P/P}_1 \text{ deg}}$$

donde:

Qs : flujo calibrado (ft<sup>3</sup> /h gas ; lb/h vapor).

Cg : coeficiente de capacidad de gas o vapor.

G : gravedad específica.

T : temperatura (°R).

P<sub>1</sub> : presión de entrada (psi).

P : caída de presión.

C<sub>1</sub> : Cg/Cv

d<sub>1</sub> : densidad del vapor (lb/ft<sup>3</sup>).

Tsh : grado de supercalentamiento (°F).

Qs = Qm 1.1 ; Qs = Qn 1.3

- CARACTERISTICA DE FLUJO DE UNA VALVULA DE CONTROL.

Es la relación entre la cantidad de flujo que pasa a través de la válvula y el viaje de ésta; cuando la válvula va de 0% a 100%, (es la característica observada como una caída de presión constante a través de la válvula).

El propósito de caracterizar las válvulas de control es para proveer una estabilidad en un sistema de control cerrado, relativamente uniforme sobre el rango esperado de las condiciones de operación del sistema.

a) La característica de apertura rápida. Provee para cambios máximos en cantidad de flujo a viajes de válvula pequeños, una relación lineal moderada.

Incrementos adicionales en el viaje de la válvula da cambios pequeños en cantidad de flujo y cuando el tapón de la válvula está cerca de su posición de abierta completamente, el cambio en la cantidad de flujo es casi cero.

b) La característica lineal. La cantidad de flujo es directamente proporcional a la carrera de la válvula.

Esta relación de proporcionalidad produce una característica con una pendiente constante y una caída de presión constante, la ganancia de la válvula es la misma en todos los flujos (ganancia de la válvula es la relación de un incremento en el cambio de la posición del tapón de la válvula); la ganancia es función de la

configuración y tamaño de la válvula en las condiciones de operación del sistema y de las características del tapón de la válvula.

- c) La característica de igual porcentaje. Incrementos iguales de carrera de la válvula producen cambios de igual porcentaje en el flujo existente. El cambio de la cantidad de flujo es siempre proporcional a la cantidad de flujo justo antes que se realice el cambio en la posición del tapón de la válvula.

Usualmente es aplicable a control de presión y en otras aplicaciones donde un gran porcentaje de la caída de presión es normalmente absorbida por el mismo sistema.

- d) Parabólico modificado. La curva cae entre la lineal y la de igual porcentaje (fig. 3.26). Se usa comúnmente en donde la mayor parte de la caída de presión del sistema es proporcional por la válvula de control.

#### SELECCION DE CARACTERISTICA DE FLUJO.

- Para control de nivel de líquido con caída de presión constante, se utiliza característica lineal.
- Cuando la caída de presión decrece con un incremento de la carga, utilizar característica de igual porcentaje.
- Cuando la caída de presión se incrementa con un incremento en la carga, se utiliza el de apertura rápida.

Para control de presión.

- Para líquidos, utilizar igual porcentaje.
- Para fluidos compresibles, usar igual porcentaje, si el

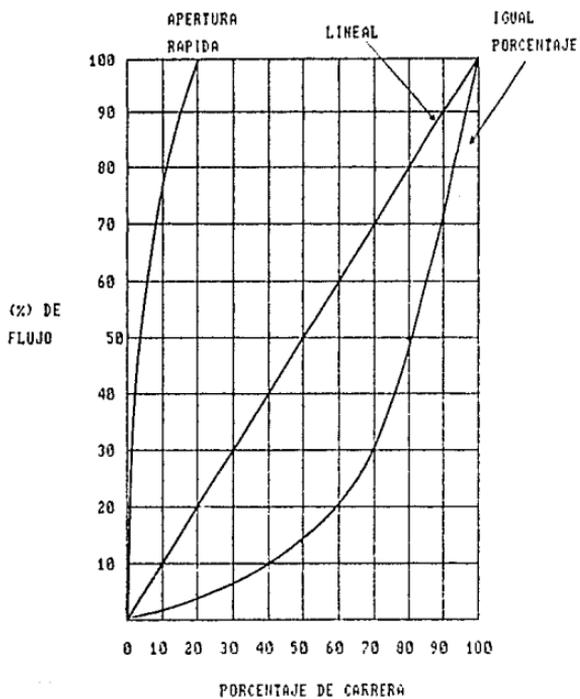


FIGURA 3.25 TIPOS DE CURVAS DE FLUJO CARACTERISTICO.

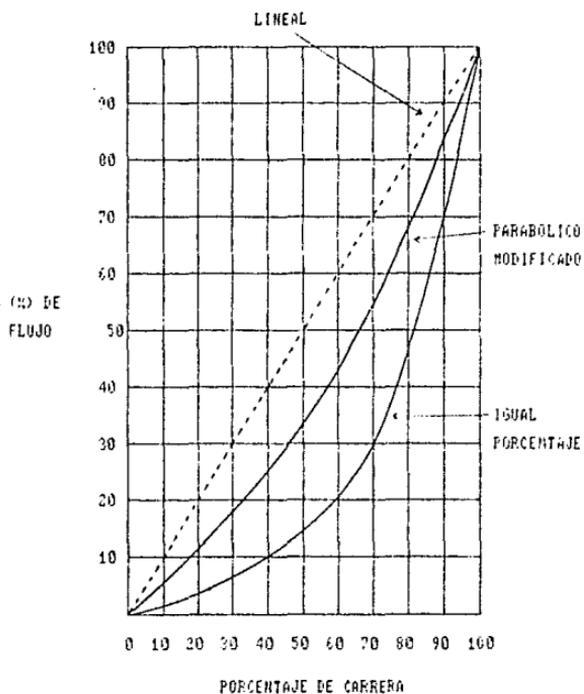


FIGURA 3.26 LA CURVA CARACTERÍSTICA DE FLUJO PARABÓLICO MODIFICADO CAE ENTRE EL TIPO LINEAL E IGUAL PORCENTAJE.

sistema tiene menos de diez pies de tubería corriente abajo de la válvula de control.

- Fluidos compresibles, usar característica de flujo lineal, si el sistema corriente abajo incluye un receptor, sistema de distribución o las líneas de transmisión excede cien pies.

En la tabla 3.6 se listan los tipos de válvula más comúnmente usadas en los sistemas de control.

Si se considera la válvula neumática de la fig. 3.24, la posición del vástago (o equivalentemente, el tapón al final del vástago) determinará el tamaño de la apertura para el flujo y consecuentemente la cantidad de flujo. La posición del vástago es determinada por el balance de todas las fuerzas que actúan sobre éste. Estas fuerzas son:

$pA$  = fuerza ejercida por la compresión de aire a la parte superior del diafragma; la presión "p" es la señal que abre o cierra la válvula y "A" es el área del diafragma. Esta fuerza actúa hacia abajo.

$Kx$  = fuerza ejercida por el resorte unido por el vástago y el diafragma; "K" es la constante de Hooke para el resorte y "x" es el desplazamiento. Esta fuerza actúa hacia arriba.

$C \frac{dx}{dt}$  = fuerza de fricción ejercida hacia arriba y resultante del cierre del contacto del vástago con el empaque de la válvula; "C" es el coeficiente de fricción entre el

TABLA 3.6 DIFERENTES TIPOS DE VALVULAS.

TIPO	CARACTERISTICAS	VENTAJAS	DESVENTAJAS
VALVULA DE GLOBO (PUERTO SENCILLO).	DISPONIBLE EN TAMAÑOS MENORES. RANGO DE 1500 A 2500 PSIG Y 450 °F. ES UTILIZADA EN LA MAYORIA DE LOS SERVICIOS.	DIMENSIONES ESTANDAR. GUARNICION REDUCIDA. CIERRE HERMETICO.	ALTO COSTO. PUEDE REQUERIR MAYOR OPERACION. RANGEBILIDAD LIMITADA.
VALVULA DE GLOBO (PUERTO DOBLE).	IGUAL A LA DE PUERTO SENCILLO.	FUERZAS NO BALANCEADAS. REQUIERE DE PEQUEÑOS OPERADORES. NO TIENE CIERRE HERMETICO.	RANGEBILIDAD LIMITADA. MAS LIGERA QUE LA DE PUERTO SENCILLO. NO TIENE CIERRE AUTOMATICO.
VALVULA DE GLOBO DE GUARNICION QUIADA BALANCEADA.	BUENA DISPONIBILIDAD 2500 PSIG Y 450 °F. RESISTENCIA ENDURECIDA REDUCIENDO EL RUIDO.	CAMBIOS RAPIDOS DENTRO DE LA GUARNICION. ALTA RANGEBILIDAD. DIMENSIONES ESTANDAR.	GUARNICION NO REVERSIBLE. CAPACIDAD REDUCIDA PARA DISMINUIR EL RUIDO.
VALVULA DE MARIPOSA DE ALABE ESTANDAR.	DISPONIBILIDAD EN TAMAÑOS GRANDES. 2500 PSIG. CARACTERISTICAS DE IGUAL PORCENTAJE.	MUY BAJO COSTO/Cv. RANGEBILIDAD FAVORABLE. LAS PARTES REQUIEREN DE MENOR MANTENIMIENTO.	ALTA TRESION DE FLUJO EXTRAJULADO. TEMPERATURA LIMITADA. A ALTAS PRESIONES TIERRA.
VALVULA DE ROTACION DE NACHO EXCENTRICO.	TAMAÑO ESTANDAR DE 12 PULGADAS. 600 PSIG. CARACTERISTICA DE IGUAL PORCENTAJE Y LINEAL.	RANGO MAYOR. Cv TAMAÑO PEQUEÑO. PESO LIGERO. BUENA CAPACIDAD. CIERRE HERMETICO.	SE DEBE REMOVER PARA SU MANTENIMIENTO. PRESION LIMITADA A 600 PSIG.
VALVULA DE BALON.	DE IGUAL PORCENTAJE.	SUSPENSION MANUAL. ALTA CAPACIDAD. MATERIAL DE FIBRA. CIERRE HERMETICO. BAJO COSTO. ALTA RANGEBILIDAD.	FLUJO EXTENSULADO. TEMPERATURA LIMITADA POR EL MATERIAL. SE DEBE REMOVER PARA SU MANTENIMIENTO.
VALVULA DE ANGULO.	SE UTILIZA PARA SERVICIOS ESPECIALES. HIDROCARBUROS. CATALISIS.	ALTA CAPACIDAD. CON CUERPO QUE PREVIENE LA CORROSION. DRENAGE AUTOMATICO.	ALTO COSTO. A PRESIONES ALTAS CAVITA. EL Cv ES IMPREDECIBLE.

vástago y el empaque.

Aplicando la Ley de Newton:

$$pA - Kx - C \frac{dx}{dt} = \left( \frac{M}{g} \right) \frac{d^2 x}{dt^2}$$

o

$$\left( \frac{M}{K g_c} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{C}{K} \frac{dx}{dt} + x = \frac{A}{K} p$$

Haciendo:

$\tau^2 = M/Kg_c$ ,  $2\zeta\tau = C/K$  y  $K_p = A/K$  se tiene:

$$\tau^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dx}{dt} + x = K_p p$$

La última ecuación indica que la posición del vástago "x" sigue inherentemente una dinámica de segundo orden. La función de transferencia es:

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{A/K}{(M/Kg_c) s^2 + (C/K) s + 1}$$

Usualmente,  $M \ll Kg_c$  y como un resultado, la dinámica de la válvula neumática puede ser aproximada por un sistema de primer orden.

## B. OTROS ELEMENTOS FINALES DE CONTROL.

El control automático estaría obstaculizado si las válvulas

de control fueran los únicos elementos finales de control disponibles. Entre otros elementos finales de control se incluyen amortiguadores, persianas, reguladores, bombas, alimentadores y resistores de velocidad variable.

#### 1. AMORTIGUADORES Y PERSIANAS.

Los amortiguadores y persianas son usados para regular el flujo de gas, primariamente, donde el control de calidad no es crítico y donde normalmente las presiones son bajas. Las aplicaciones típicas incluyen los sistemas de acondicionamiento de aire y los ductos de gas de chimenea donde las descargas de los ventiladores y sopladores deben regularse.

#### 2. BOMBAS.

El control de flujo de líquidos y suspensiones se hace frecuentemente usando bombas medidoras como elementos finales de control. El resultado del método varía con el tipo de válvula.

#### 3. IMPULSORES DE VELOCIDAD VARIABLE.

Muchos dispositivos usan alguna clase de control de velocidad variable para ajustar la velocidad de alimentación, para potencia eléctrica variable o para velocidad de motor variable para diferentes aplicaciones. Típicos de estos usos son los alimentadores gravimétricos, alimentadores rotatorios y bombas de diafragma y pistón.

### 3.2.4 INSTRUMENTOS COMPLEMENTARIOS EN UN SISTEMA DE CONTROL.

#### A. TRANSMISOR.

Un transmisor es un dispositivo que detecta una variable de proceso por medio de un elemento primario y que tiene una salida cuyo valor de estado estacionario varía sólo como una función predeterminada de la variable de proceso. El elemento primario puede o no ser integrado al transmisor.

De acuerdo a la definición de transmisor, se dice que este dispositivo es la interfase entre la medición de la variable de proceso y su sistema de control. La función del transmisor es convertir la señal del sensor (milivolts, movimiento mecánico, presión diferencial, etc.) en una señal de control (una señal de presión de aire de 0.2 a 1.0 Kg/cm<sup>2</sup> o de 3 a 15 psi, una señal eléctrica de 1 a 5, 4 a 20 o 10 a 50 miliamperes, etc.).

El estudio de los transmisores es muy amplio e involucra varios tipos de señales (mecánica, eléctrica, neumática, hidráulica, etc.).

La respuesta dinámica de la mayoría de los transmisores es generalmente mucho más rápida que la de los procesos y las válvulas de control, por consiguiente, se puede considerar normalmente al transmisor como una simple "ganancia" (un elemento con una función de transferencia que es una constante) en el circuito de control.

En la tabla 3.7 se listan los transmisores más comúnmente

TABLA 3.7 TRANSMISORES DE PROCESO MAS COMUNMENTE USADOS.

TRANSMISORES	VARIABLE EN LA CUAL SE USA
CELDA DE PRESION DIFERENCIAL	NIVEL
MEDIDOR DE ESFUERZOS	FLUJO
CAPACITANCIA	
RELUCTANCIA VARIABLE	
DESPLAZADOR	NIVEL
TRANSFORMADOR DIFERENCIAL	
CAPACITANCIA	
CONVERTIDOR DE TENSION A CORRIENTE	TEMPERATURA
CELDA DE PRESION	PRESION
MEDIDOR DE ESFUERZOS	
CAPACITANCIA	
RELUCTANCIA VARIABLE	

usados, así como las variables en las cuales son utilizados.

## B. CONVERTIDOR O TRANSDUCTOR.

El desarrollo de pequeños controladores electrónicos al inicio de la década de los cincuenta, crearon la necesidad de usar dispositivos (convertidores o transductores) cuyo uso aumenta continuamente.

Su propósito principal es el de convertir señales de una forma de energía a otra o de una forma de nivel de señal a otra.

Los términos de convertidor y transductor son utilizados cuando algunos procesos están instrumentados para su control. El dispositivo para convertir la señal neumática a electrónica para controlar las válvulas, es referido casi siempre a un transductor. Muchos otros dispositivos que convierten las formas o niveles de señales a otras formas o niveles electrónicos o el switch con señales de electrónica a neumática o viceversa, es más probable que se refieran a un convertidor.

Muchos dispositivos pueden ser clasificados por cualquiera de los dos términos. Los transmisores para todos los procesos convierten las variables medidas de una forma de energía a otra para completar la transmisión y la medición. En el procesamiento de las señales para ser utilizadas por una computadora, éstas condicionan a los dispositivos clasificándolos dentro de cinco grupos:

1. Corriente a Neumática (I/P).
2. Neumática a Corriente (P/I).
3. Voltaje a Corriente (E/I).
4. Voltaje a Neumática (E/P).
5. Corriente a Corriente (I/I).

### 3.3 TEORIA DE CONTROL DE PROCESOS.

La teoría de control de procesos es una parte dentro de la dinámica y control de procesos que permite analizar y entender el comportamiento de una estructura de control para un proceso.

#### 3.3.1 DIAGRAMA DE BLOQUES.

Los diagramas de bloques proporcionan un medio conveniente para visualizar y analizar los sistemas de control. Estos diagramas se obtienen estableciendo primero las ecuaciones que describen el comportamiento de cada uno de los elementos que componen el sistema. Una vez hecho esto, la información contenida en cada una de las ecuaciones se pone en la forma de una relación de cierta cantidad de salida a una cierta cantidad de entrada. La relación así obtenida se llama función de transferencia (sección 2.3.2) y es la representación matemática de cada elemento que compone al sistema, la cual se coloca en el bloque. Cuando todos los elementos de un sistema están representados en bloques convenientemente relacionados, puede obtenerse la ecuación del

sistema (función de transferencia) por una manipulación del diagrama de bloques, en lugar de la solución simultánea de las ecuaciones del sistema por los métodos matemáticos usuales.

En general, un diagrama de bloques consta de una configuración específica de cuatro tipos de elementos-bloques, puntos de suma, puntos de toma y flechas que representan el flujo de señales, como se muestra en la fig. 3.27.

La configuración básica de un sistema de control por retroalimentación se reproduce en la fig. 3.28, donde se representa para todas las cantidades la notación de su transformada de Laplace en forma abreviada. Las cantidades  $G_1$ ,  $G_2$  y  $H$  son las funciones de transferencia de los componentes en los bloques.

Cualquier número finito de bloques en serie se pueden combinar algebraicamente por medio de multiplicación. Es decir, "n" componentes o bloques con las funciones de transferencia  $G_1$ ,  $G_2$ , ...,  $G_n$  conectados en cascada son equivalentes a un sólo elemento  $G$  con una función de transferencia dada por:

$$G = G_1 * G_2 * G_3$$

$$G_n = \sum_{i=1}^n G_i$$

La multiplicación de funciones de transferencia es conmutativa, es decir:

$$G_i G_j = G_j G_i$$

para cualquier  $i$  o  $j$

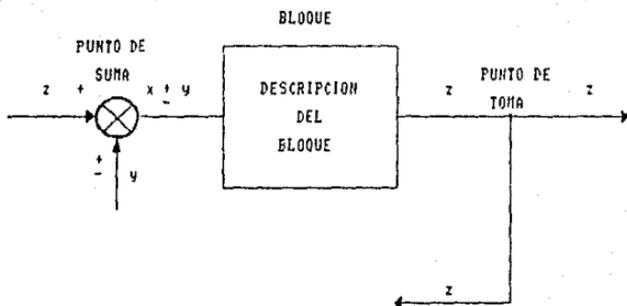


FIGURA 3.27 PARTES QUE FORMAN UN DIAGRAMA DE BLOQUES.

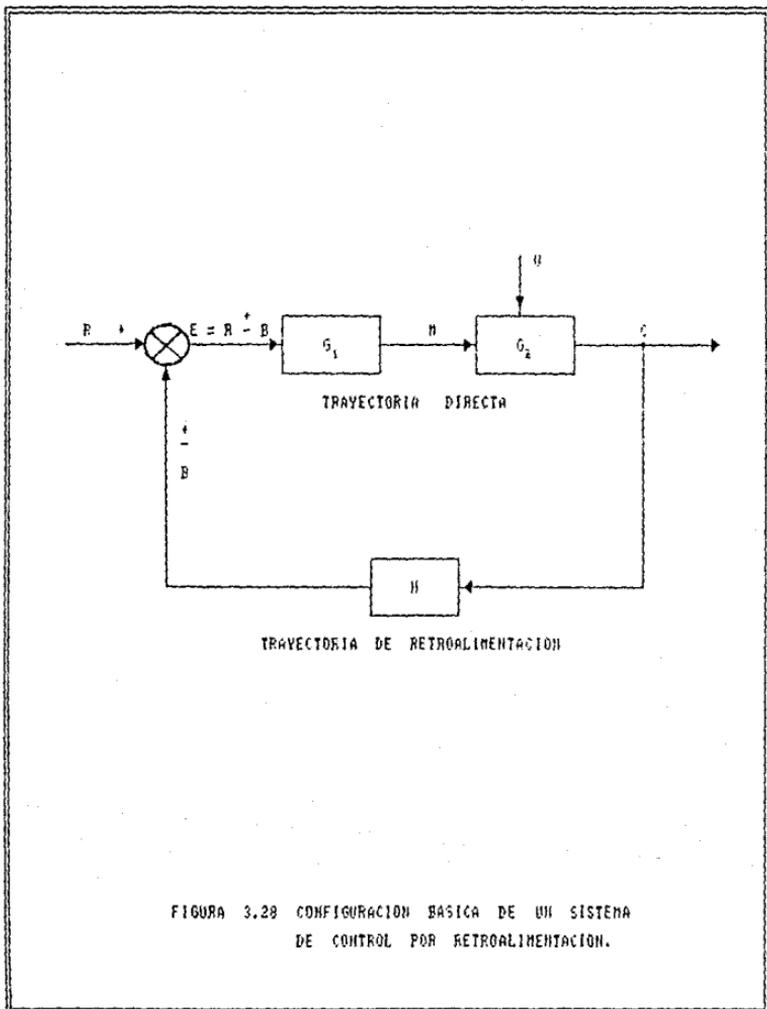


FIGURA 3.28 CONFIGURACION BASICA DE UN SISTEMA DE CONTROL POR RETROALIMENTACION.

### A. FORMA CANONICA DE UN SISTEMA DE CONTROL POR RETROALIMENTACION.

Los dos bloques en la trayectoria hacia adelante del sistema de retroalimentación de la fig. 3.28 se pueden combinar. Siendo  $G = G_1 * G_2$ , la configuración resultante, fig. 3.29, se denomina "forma canónica" de un sistema de control por retroalimentación. G y H no son necesariamente únicos para un sistema.

Las siguientes definiciones se refieren al diagrama de bloques de la fig. 3.29.

G = función de transferencia directa = función de transferencia hacia adelante.

H = función de transferencia de retroalimentación.

GH = función de transferencia del ciclo = función de transferencia del ciclo abierto.

C/R = función de transferencia del circuito cerrado = razón de control.

E/R = razón de señal impulsora = razón de error.

B/R = razón de retroalimentación primaria.

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm G H} \quad (3.17)$$

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 \pm G H} \quad (3.18)$$

$$\frac{B}{R} = \frac{G H}{1 \pm G H} \quad (3.19)$$

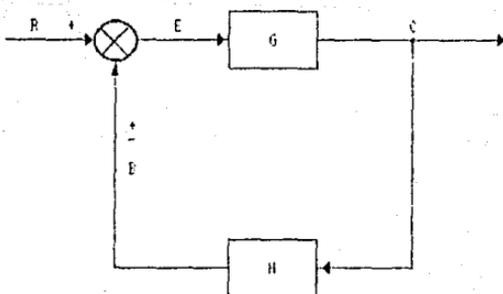


FIGURA 3.29 FORMA CANONICA DE UN SISTEMA DE CONTROL POR RETROALIMENTACION.

La ecuación característica del sistema, la cual se determina a partir de  $1 \pm G H = 0$ , es:

$$D_{OH} \pm N_{OH} = 0$$

donde  $D_{OH}$  y  $N_{OH}$  son el denominador y numerador de  $(G H)$ , respectivamente.

#### B. TEOREMAS DE TRANSFORMACION DE LOS DIAGRAMAS DE BLOQUES.

Los diagramas de bloques de sistemas de control complicados se pueden simplificar usando transformaciones que se pueden derivar fácilmente. Con el fin de dar una visión más completa, en la tabla 3.8 se listan los diferentes teoremas de transformación más comunes. En la tabla la letra  $P$  se usa para representar cualquier función de transferencia y  $W, X, Y, Z$  denotan cualquier señal en el dominio "s".

#### C. ENTRADAS MÚLTIPLES.

A veces es necesario evaluar el trabajo ejecutado por un sistema cuando se aplican simultáneamente puntos del sistema.

Cuando están presentes entradas múltiples en un sistema lineal, cada una se trata independiente de las otras. Para encontrar la salida ocasionada por todos los estímulos actuando conjuntamente, se realizan los siguientes pasos:

1. Igualar todas las entradas a cero excepto una.

TABLA 3.8 TEOREMAS DE TRANSFORMACIONES DE DIAGRAMAS DE BLOQUES.

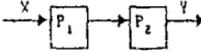
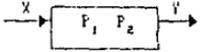
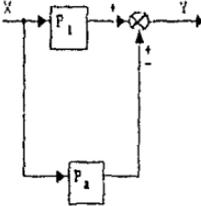
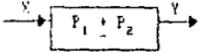
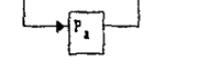
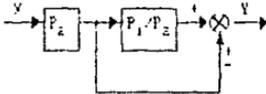
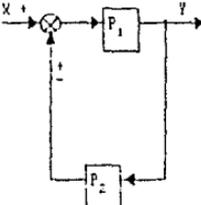
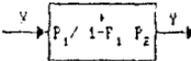
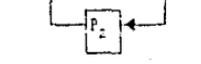
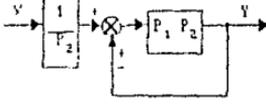
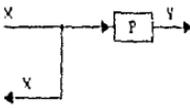
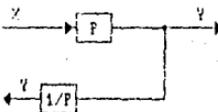
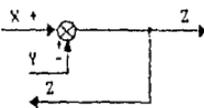
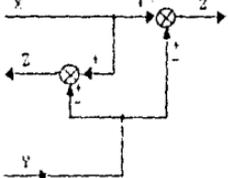
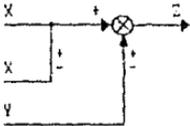
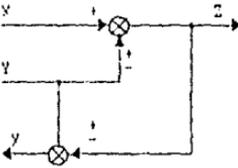
TRANSFORMACION	ECUACION	DIAGRAMA DE BLOQUES	DIAGRAMA DE BLOQUES EQUIVALENTE
1. COMBINACION DE BLOQUES EN CASCADA.	$Y = (P_1 P_2) X$		
2. COMBINACION DE BLOQUES EN PARALELO O ELIMINACION DE UN CICLO CERRADO.	$Y = P_1 X + P_2 Y$		
3. ELIMINACION DE BLOQUES DE LA TRAYECTORIA DIRECTA.	$Y = P_1 X + P_2 Y$		
4. ELIMINACION DE UN CICLO DE RETROALIMENTACION.	$Y = P_1 (X + P_2 Y)$		
5. ELIMINACION DE UN BLOQUE DE UN CICLO DE RETROALIMENTACION.	$Y = P_1 (X + P_2 Y)$		

TABLA 3.8 TEOREMAS DE TRANSFORMACIONES DE DIAGRAMAS DE BLOQUES (CONT.)

TRANSFORMACION	EQUACION	DIAGRAMA DE BLOQUES	DIAGRAMA DE BLOQUES EQUIVALENTE
6a. REDISTRIBUCION DE LOS PUNTOS DE SUMA.	$Z = U + X + Y$		
6b. REDISTRIBUCION DE LOS PUNTOS DE SUMA.	$Z = U + X + Y$		
7. DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO HACIA ADELANTE DE UN BLOQUE.	$Z = P X + Y$		
8. DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE SUMA HACIA ATRÁS DE UN BLOQUE.	$Z = P(X + Y)$		
9. DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE TOMA HACIA ADELANTE DE UN BLOQUE.	$Y = P X$		

TABLA 3.8 TEOREMAS DE TRANSFORMACIONES DE DIAGRAMAS DE BLOQUES (CONT.)

TRANSFORMACION	ECUACION	DIAGRAMA DE BLOQUES	DIAGRAMA DE BLOQUES EQUIVALENTE
<p>10. DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE TOMA MAS ALLA DE UN BLOQUE.</p>	$Y = P X$		
<p>11. DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE TOMA HACIA ADELANTE DE UNO DE SUMA.</p>	$Z = X + Y$		
<p>12. DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE TOMA MAS ALLA DE UNO DE SUMA.</p>	$Z = X + Y$		

2. Transformar el diagrama de bloques a la forma canónica, usando las transformaciones adecuadas.
3. Calcular la respuesta debida a la entrada escogida actuando sola.
4. Repetir los pasos 1 y 3 para cada una de las entradas restantes.
5. Añadir algebraicamente todas las respuestas (salidas) determinadas en los pasos 1 y 4. Esta suma es la salida total del sistema con todas las entradas actuando simultáneamente.

#### D. REDUCCION DE DIAGRAMAS DE BLOQUES COMPLICADOS.

El diagrama de bloques de un sistema simple de control por retroalimentación es a menudo bastante complicado. Puede incluir varios ciclos de retroalimentación o de alimentación directa y entradas múltiples. Por medio de una reducción sistemática del diagrama de bloques, cada sistema de retroalimentación de ciclo múltiple se puede reducir a una forma canónica.

Los siguientes pasos generales se pueden usar como una aproximación en la reducción de diagramas de bloques complicados:

1. Combinar todos los bloques en cascada usando el teorema de transformación 1.
2. Combinar todos los bloques en paralelo usando el teorema de transformación 2.
3. Eliminar todos los ciclos menores de retroalimentación

- usando el teorema de transformación 4.
4. Desplazar los puntos de suma hacia la izquierda y los puntos de toma hacia la derecha del ciclo principal, usando los teoremas de transformación 7, 10 y 12.
  5. Repetir los pasos de 1 a 4 hasta que se logre la forma canónica para una entrada particular.
  6. Repetir los pasos de 1 a 5 para cada entrada según sea necesario.

### 3.3.2 SINTESIS DE SISTEMAS DE CONTROL.

La síntesis de procesos es una área de investigación que constituye la más compleja y demandante tarea confrontada por un ingeniero químico.

La síntesis de sistemas de procesos es una actividad de determinación de la interconexión óptima entre las unidades de procesamiento (estructura de un sistema de proceso) y el diseño óptimo de las unidades dentro del sistema de proceso.

Las síntesis de sistemas puede ser llevada a cabo a través de los siguientes pasos:

1. Definición de los objetivos del sistema.
2. Definición de los criterios para la evaluación del sistema.
3. Selección de la tecnología para alcanzar los objetivos.
4. Descomponer el sistema en un grupo de tareas interconectadas.

5. Realizar las tareas dentro de la tecnología seleccionada.

Los primeros tres pasos son definidos como la "planeación del proceso" y los dos últimos como el "diseño del proceso".

El problema de síntesis de un proceso completo puede ser clasificado en cualquiera de los siguientes subproblemas:

- a) Síntesis de rutas de reacción.
- b) Síntesis de sistemas de separación.
- c) Síntesis de redes de intercambio de calor.
- d) Síntesis de redes de transferencia de energía.
- e) Síntesis de sistemas de separación con integración de energía.
- f) Síntesis de redes de reactores.
- g) Síntesis de sistemas de seguridad.
- h) Síntesis de sistemas de control.
- i) Síntesis de sistemas de procesos completos.

La principal tarea de la síntesis de control de procesos químicos es desarrollar una estructura de control dinámica entre las variables medidas y manipuladas para que los objetivos de control requeridos sean alcanzados en presencia de cualquier perturbación.

Una estructura de control está compuesta de:

- a) Un grupo de objetivos de control.
- b) Un grupo de variables a controlar para alcanzar los objetivos de control.
- c) Un grupo de variables a medir para monitorear el

comportamiento del proceso y llevar a cabo la operación de control.

- d) Un grupo de variables a manipular para alcanzar los objetivos de control en presencia de perturbaciones.
- e) Una estructura de interconexión entre las variables medidas y manipuladas (circuito de control).

Una secuencia para llevar a cabo la síntesis de estructuras de control se muestra en la fig. 3.30, y cuyos pasos a seguir son los siguientes:

#### 1. DEFINICION DE LOS OBJETIVOS DE CONTROL.

Comienza con la formulación cualitativa de los objetivos de control, muchos de los cuales son determinados por la naturaleza específica del sistema.

En la primera categoría de los objetivos de control están aquellos relacionados con la capacidad operacional, y son siempre una función de las variables del sistema, las cuales son mantenidas dentro de ciertos límites específicos a pesar de las perturbaciones que se presenten en el sistema.

El origen de estos requerimientos pueden ser especificaciones de calidad del producto, consideraciones de seguridad, requerimientos operacionales, regulaciones ambientales, etc.

La segunda categoría de objetivos es derivada de consideraciones económicas. Estas se incluyen sí, después de satisfacer la primera clase de objetivos, las variables

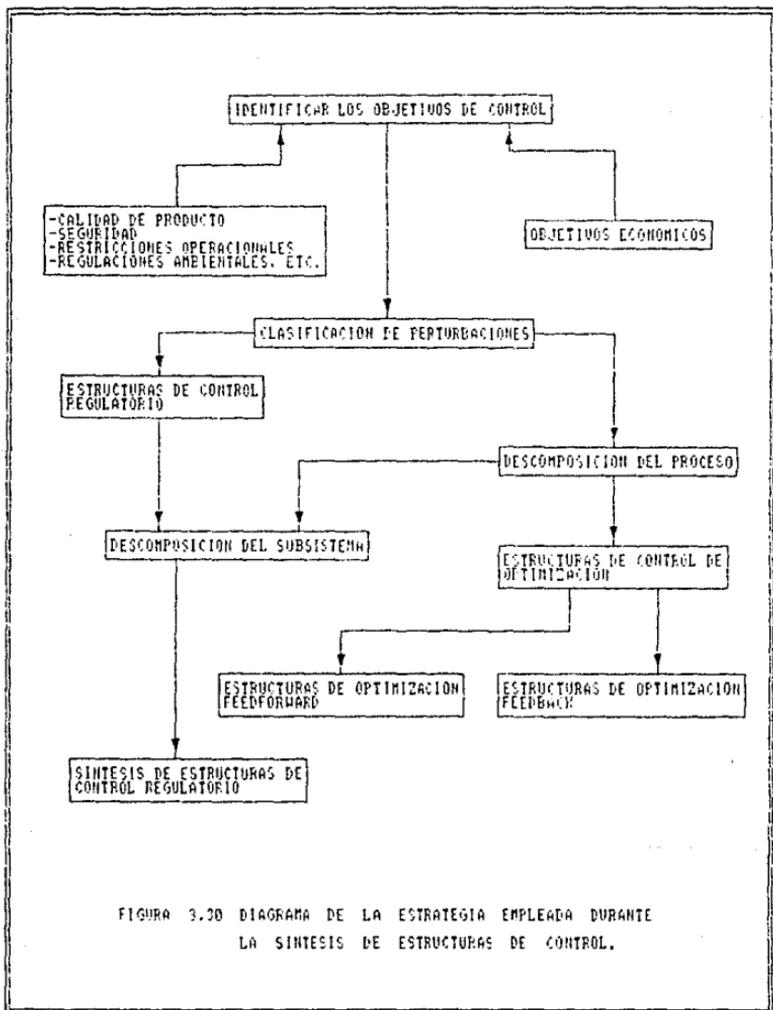


FIGURA 3.20 DIAGRAMA DE LA ESTRATEGIA EMPLEADA DURANTE LA SINTESIS DE ESTRUCTURAS DE CONTROL.

manipuladas son permitidas para adaptar condiciones de operación para establecer el más provechoso punto de operación, a lo largo de la clasificación de los objetivos, guía a la clasificación de las tareas de control, dentro de regulación y optimización.

## 2. DESCOMPOSICION DEL PROCESO.

La descomposición del proceso no es dictada por ninguna consideración computacional, sino que es parte de la estrategia de diseño. La descomposición de procesos revela los agregados de operaciones unitarias y reactores químicos los cuales pueden ser centralmente controlados. La descomposición de procesos puede ser dirigida al desarrollo del control independiente de grupos de unidades en términos de regulación u optimización. Ambos criterios pueden ser aplicados a un mismo sistema simultáneamente e íntimamente independientes. Una descomposición de procesos para propósitos de regulación será factible dentro de los límites de los grupos establecidos de la descomposición de procesos para propósitos de optimización de control.

Para dividir un proceso en subprocesos, los cuales son optimizados separadamente, uno debe de ser capaz de descomponer la linealidad de la función objetivo global y una parte de ésta debe ser asociada a cada sistema. El tamaño mínimo de un subsistema es usualmente dictado por esa restricción. Para la optimización, la magnitud de los subproblemas se balanceará contra los esfuerzos para la solución coordinada.

### 3. SELECCION DE LAS VARIABLES A MEDIR.

La primera clase de objetivos de control, establece directamente las mediciones que deben de ser hechas para el monitoreo del proceso. La segunda clase de objetivos puede ser incluida dentro de un circuito feedback bajo ciertas condiciones, requiriendo así mediciones adicionales. A veces, las variables a medir teóricamente deseables no son siempre disponibles, frecuentemente ellas son sustituidas por otras secundarias. Las variables secundarias de medición nos permiten estimar a las variables primarias de medición sobre la base del modelo del proceso. La elección de las variables secundarias y la asociación al problema de estimación puede ser fuertemente observada a ser independiente de otras decisiones. El grupo completo de variables a medir para una estructura de control factible debe de satisfacer las condiciones de observabilidad estructural, lo que incluye la cuestión de aumentar el grupo de mediciones, siendo desarrollado durante la síntesis de estructuras de control el grupo alternativo de variables a medir.

### 4. SELECCION DE LAS VARIABLES MANIPULADAS.

La selección de las variables manipuladas afectará la capacidad de respuesta para las perturbaciones externas y la habilidad para mantener los objetivos de control a niveles deseables casi continuamente. La disponibilidad de más variables manipuladas será para un mejor control de proceso.

El aspecto estructural del sistema de procesamiento y de las ecuaciones describiendo las unidades de procesamiento fisicoquímico son de suma importancia en el establecimiento factible del grupo de variables manipuladas. Ciertas variables manipuladas desde el punto de vista de ingeniería serán más deseables que otras. Algunas formas cualitativas que las variables manipuladas deben satisfacer son: confiabilidad, facilidad de operación, arranque y paro.

#### 5. INTERCONEXION DE LAS VARIABLES MEDIDAS Y MANIPULADAS.

La solución a este problema debe ser guiado en parte por la ingeniería y costos, y en parte, por consideraciones teóricas de control, con el fin de obtener las estructuras de control alternativas más adecuadas para satisfacer los objetivos de control del sistema. Muchos de los estudios pasados de control (simples circuitos de control), son dirigidos hacia el diseño de estructuras de control multivariable.

La síntesis de estructuras de control es un tema muy amplio que tiene una extensa aplicación en diferentes ramas de la Ingeniería, el desarrollo teórico que se presenta en la última década proporciona las bases para el desarrollo de la teoría de control moderna y a su vez el desarrollo de la teoría de síntesis de estructuras de control.<sup>(22,23 y 24)</sup>

### 3.3.3 ESPECIFICACIONES DINAMICAS DE UN SISTEMA DE CONTROL.

El funcionamiento dinámico de un sistema puede ser deducido por la observación de la localización de las raíces de la ecuación característica del sistema en el plano "s" (fig. 2.3). Las especificaciones en el dominio del tiempo de las constantes de tiempo y coeficientes de amortiguamiento para un sistema de ciclo cerrado pueden usarse directamente en el espacio de Laplace.

1. Si todas las raíces caen en el lado izquierdo del eje imaginario del plano, el sistema es estable.
2. Si todas las raíces caen en el eje real el sistema será sobreamortiguado o críticamente amortiguado.
3. Entre más lejos del eje real negativo caigan las raíces, más rápida será la dinámica del sistema (las constantes de tiempo son más pequeñas).
4. Las raíces que caen cerca del eje imaginario dominarán la respuesta dinámica.
5. Entre más alejadas estén las raíces complejas del eje real el sistema será menos amortiguado.

Hay una relación cuantitativa entre la localización de las raíces en el plano "s" y el coeficiente de amortiguamiento. Si se tiene un sistema de segundo orden o un sistema de mayor orden dominado por las raíces de segundo orden más cercanas al eje imaginario, éstas raíces como se muestra en la fig. 3.31 son complejas conjugadas. De la ecuación dinámica general para

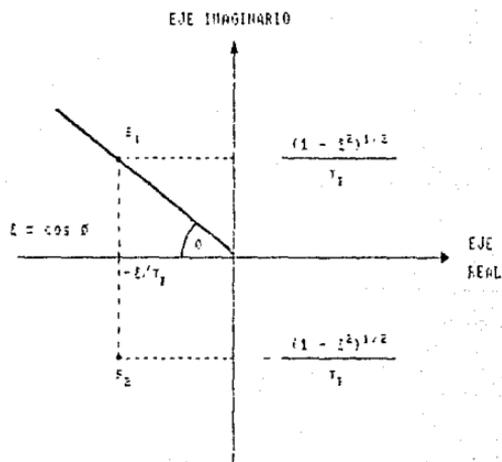


FIGURA 3.31 RAICES DE SEGUNDO ORDEN DOMINANTE:  
EN EL PLANO "s".

procesos de segundo orden las dos raíces son:

$$s_1 = -\frac{\zeta}{\tau_p} + i \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau_p}$$

$$s_2 = -\frac{\zeta}{\tau_p} - i \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau_p}$$

La hipotenusa del triángulo que se muestra en la fig. 3.31, es la distancia del origen a la raíz  $s_1$

$$\sqrt{\left[ \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau_p} \right]^2 + \left[ -\frac{\zeta}{\tau_p} \right]^2} = \frac{1}{\tau_p} \quad (3.20)$$

Si se define al ángulo  $\phi$  a partir de la hipotenusa y el cateto adyacente del triángulo se tiene:

$$\cos \phi = \frac{\zeta/\tau_p}{1/\tau_p} = \zeta \quad (3.21)$$

Así, la localización de la raíz compleja puede convertirse directamente a un coeficiente de amortiguamiento y a una constante de tiempo. El coeficiente de amortiguamiento es igual

al coseno del ángulo entre el eje real negativo y la línea radial del origen a la raíz. La constante de tiempo es igual al recíproco de la distancia radial del origen a la raíz.

### 3.3.4 CONTROLABILIDAD.

Recordando la representación de un sistema dinámico en el dominio del tiempo,

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + \Gamma d \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Eu \quad (2.2)$$

Una noción que es muy usada en el análisis de sistemas de control, es la controlabilidad. Se puede decir que un sistema es controlable si existe un plan de control  $u(t)$ , el cual conducirá o guiará al sistema a partir de cualquier estado inicial dado  $x_0$ , a cualquier otro estado deseado  $x_d$  en un tiempo finito. Una definición más precisa es la siguiente:

"Si todo estado inicial  $x_0(t_0)$  puede ser tomado para cualquier otro estado  $x_d(t)$  en algún tiempo finito  $t > t_0$ , entonces el sistema es completamente controlable. Es posible, también tener sistemas los cuales son sólo parcialmente controlables, es decir, en los cuales hay algunos subgrupos de estados iniciales  $x_0(t_0)$  que no pueden

alcanzar siempre otro estado en tiempo finito".

Es posible definir condiciones de controlabilidad para tipos específicos de sistemas. Por ejemplo, si las matrices  $A$  y  $B$  son constantes, entonces se puede mostrar que el sistema de ecuaciones (2.1) y (2.2) es completamente controlable si y sólo si, el rango de una "matriz de controlabilidad",  $L_c$ , es  $n$

donde:

$$L_c = [B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B] \quad (3.22)$$

Una derivación informal de este resultado puede verse considerando la solución analítica de las ecuaciones (2.1) y (2.2), se omiten las perturbaciones  $d(t)$  porque la controlabilidad es una propiedad del sistema por sí mismo.

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \quad (3.23)$$

donde la matriz exponencial puede escribirse como:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots \quad (3.24)$$

la cual cuando se combina con el teorema de Hamilton-Cayley conduce a la representación de serie finita:

$$e^{At} = c_0 I + c_1 At + c_2 (At)^2 + \dots + c_{n-1} (At)^{n-1} \quad (3.25)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (3.22) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & e^{At} x_0 + \int_0^t \left[ c_0 B + c_1 (t-s) A B + \dots \right. \\
 & \left. + c_{n-1} (t-s)^{n-1} A^{n-1} B \right] u(s) ds \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
 x(t) = & e^{At} x_0 \\
 & + \int_0^t \left[ B \mid A B \mid \dots \mid A^{n-1} B \right] \begin{bmatrix} c_0 u(s) \\ \dots \\ c_1 (t-s) u(s) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ c_{n-1} (t-s)^{n-1} u(s) \end{bmatrix} ds \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Ahora, el concepto de controlabilidad significa que el control  $u$  es capaz de influir sobre todos los estados  $x$  a través de la integral en la ecuación (3.27). Por lo tanto, el sistema es controlable si y sólo si, el integrando en la ecuación (3.27) permite la influencia de  $u(t)$  para afectar todos los estados  $x(t)$ . Esto requiere que la matriz de transformación de orden  $n \times n$

$$\left[ B \mid A B \mid \dots \mid A^{n-1} B \right]$$

tenga rango igual a  $n$ .

Las condiciones de controlabilidad de salida pueden encontrarse multiplicando la ecuación (3.26) por  $C$  para dar:

$$y(t) = Cx = C e^{At} x_0 + \int_0^t \left[ c_0 CB + c_1(t-s)CAB + \dots + c_{n-1}(t-s)^{n-1} CA^{n-1}B \right] u(s) ds \quad (3.28)$$

Así, para los mismos argumentos, los controles  $u(t)$  deben influir en todas las salidas  $y(t)$  para la controlabilidad de salida. Esto significa que las salidas  $y$ , son completamente controlables si y sólo si, el rango de la matriz de orden  $l \times nm$  de controlabilidad  $\mathcal{L}_c^0$  es  $m$ .

donde:

$$\mathcal{L}_c^0 = \left[ CB \mid CAB \mid \dots \mid CA^{n-1}B \right] \quad (3.29)$$

Las condiciones de controlabilidad para el caso de un sistema no autónomo lineal de la forma de la ecuación (2.1) donde  $A(t)$  y  $B(t)$  son funciones conocidas del tiempo, especifican que la no singularidad de la matriz  $n \times n$

$$M(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^{-1} B(t) B^T(t) [\Phi(t, t_0)^T]^{-1} dt \quad (3.30)$$

es necesaria y suficiente para la controlabilidad. Donde la matriz  $\Phi(t, t_0)$  es la solución de la matriz fundamental definida

por:

$$\bar{\Phi}(t, t_0) = A(t)\bar{\Phi}(t, t_0) \quad \bar{\Phi}(t_0, t_0) = I \quad (3.31)$$

Aquí para que el sistema sea controlable es suficiente que el integrando sea no singular para cualquier instante de tiempo  $t_0 < t < t_1$ .

### 3.3.5 ESTABILIZABILIDAD.

Una condición mucho más débil que la controlabilidad para un sistema, es la estabilizabilidad. La estabilizabilidad es la propiedad del sistema de la ecuación (2.1) de que todos los modos inestables del sistema pueden hacerse estables por acción de un controlador. Esto significa que cualquier eigenvalor positivo de  $A$  puede hacerse negativo por acción de un controlador. Entonces, cualquier sistema cuya matriz  $A$  tenga todos sus eigenvalores negativos es estabilizable (de hecho incluso sin acción de un controlador). En suma, cualquier sistema el cual es controlable es automáticamente estabilizable.

En el caso del controlador feedback proporcional de ganancia constante sobre las variables de estado,

$$u(t) = -K x(t) \quad (3.32)$$

donde  $K$  es una matriz feedback de orden  $n \times m$  de ganancias de controladores, el sistema de la ecuación (2.1) se vuelve:

$$\frac{dx}{dt} = (A - BK)x \quad (3.33)$$

El sistema sería entonces estabilizable con tal controlador feedback si y sólo si, existiera una combinación de ganancias feedback  $k_{ij}$ , la cual causará que las partes reales de todos los eigenvalores de  $(A - BK)$  fueran negativas.

Con un controlador proporcional sobre las variables de salida

$$u(t) = -Ky(t) \quad (3.34)$$

el sistema de la ecuación (2.1) toma la forma:

$$\frac{dx}{dt} = (A - BKC)x \quad (3.35)$$

En este caso, la estabilizabilidad requiere que las partes reales de todos los eigenvalores de  $(A - BKC)$  sean negativas para alguna selección de las ganancias feedback  $k_{ij}$ .

Así:

1. Siempre se puede diseñar un sistema de control para un sistema completamente controlable, sin embargo es algunas veces imposible diseñarlo para uno que no sea completamente controlable.
2. Si el sistema es estabilizable (pero no completamente controlable) y los eigenvalores incontrolables del

sistema son suficientemente grandes y negativos, entonces es posible diseñar un sistema de control aceptable. Sin embargo, si el sistema es no estabilizable, entonces el control es generalmente imposible.

### 3.3.6 NORMALIDAD.

Una forma más fuerte de controlabilidad es llamada normalidad. Un sistema es normal si cada elemento del vector de control,  $u$ , por sí sólo logra la controlabilidad. Esto será verdad si y sólo si la matriz de normalidad  $\mathcal{N}_c$ ;

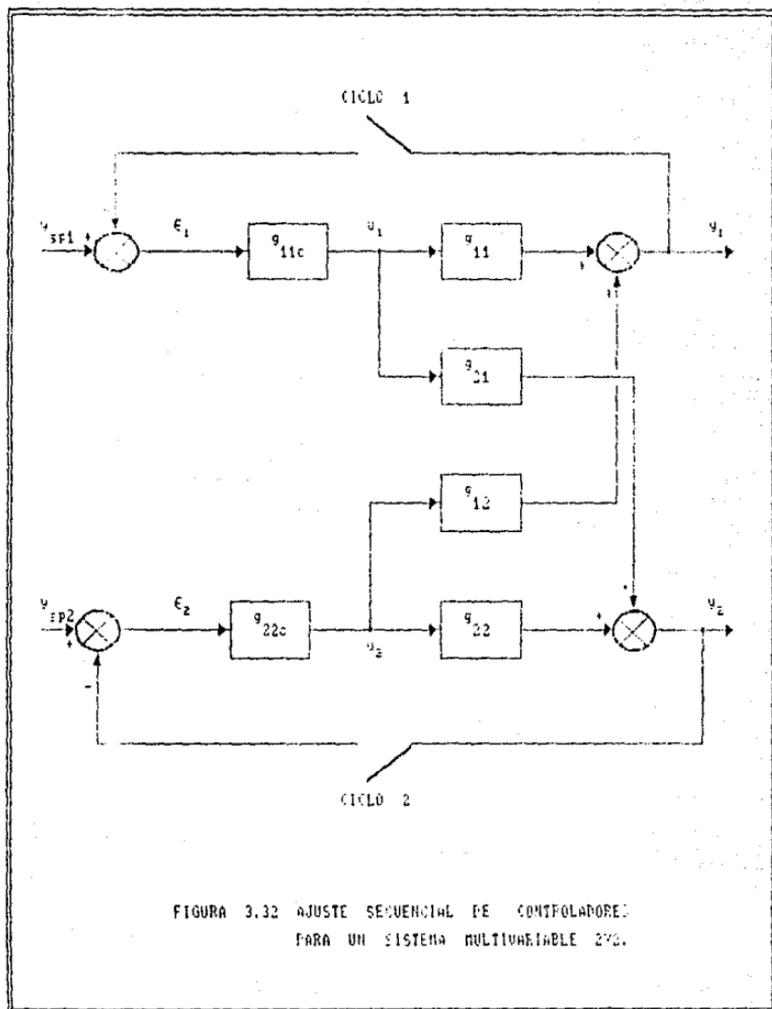
$$\mathcal{N}_c = \begin{bmatrix} b_i & | & Ab_i & | & A^2b_i & | & \dots & | & A^{n-1}b_i \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

tiene rango  $n$  para toda  $i$ , donde  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , son las columnas de la matriz  $B$ . Para variables de control escalar, la normalidad y la controlabilidad son propiedades idénticas.

### 3.3.7 EL PROBLEMA DE INTERACCION.

El problema fundamental en el diseño de controladores feedback multivariables está en las interacciones dinámicas y de estado estacionario que ocurren entre las variables de entrada y salida. Si el sistema no tiene acoplamiento entre variables y el número de variables de control iguala al número de salidas a ser





Si no hubo interacción ( $g_{12} = g_{21} = 0$ ) se podrían cerrar ambos ciclos y suponer que el sistema trabajará bien. Sin embargo, en presencia de interacciones, el desempeño del sistema de control total podría ser bastante pobre cuando ambos ciclos están cerrados. Bristol desarrolló una medición general de esta interacción en el estado estacionario el llamado "Arreglo Bristol".

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mm} \end{bmatrix}$$

cuyos elementos son definidos como la siguiente relación a estado estacionario:

$$\delta_{ij} \equiv \frac{\left[ \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right]_{\text{todos los ciclos abiertos}}}{\left[ \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right]_{\text{todos los ciclos cerrados, excepto para } u_j}} \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

Los elementos del arreglo Bristol son entonces la relación de la respuesta de ciclo abierto a estado estacionario y la respuesta de ciclo cerrado a estado estacionario cuando una

variable manipulada particular es ajustada. La determinación de los elementos del arreglo Bristol es directa, para el numerador es simplemente el elemento  $i, j$ -ésimo de la función de transferencia a estado estacionario de ciclo abierto, es decir,

$$\lim_{s \rightarrow 0} g_{ij}(s)$$

El denominador es calculado asumiendo que todos los ciclos cerrados trabajan perfectamente, de modo que  $y_k$  es constante para  $k \neq j$ .

Así,

$$\left[ \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right]_{\substack{\text{todos los ciclos} \\ \text{cerrados excepto} \\ \text{para } u_j}} \equiv \left[ \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right]_{y_k \text{ constante}, k \neq j} \equiv \left[ \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \right]_{y_k \text{ constante}, k \neq j}^{-1}$$

Sin embargo,  $[\partial u_j / \partial y_i]$  es justo el elemento  $j, i$ -ésimo de la inversa de la función de transferencia del proceso a estado estacionario, es decir,

$$\frac{\partial u_j}{\partial y_i} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ G^{-1}(s) \right]_{ji}$$

Así:

$$\delta_{ij} \equiv \left[ G(0) \right]_{ij} \left[ G(0)^{-1} \right]_{ji}$$

donde  $[ ]_{ij}$  denota el elemento  $i, j$ -ésimo de la matriz en cuestión.

Para ilustrar la aplicación del arreglo Bristol se usará el sistema mostrado en la fig. 3.32.

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$[G(0)^T]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} & -k_{21} \\ -k_{12} & k_{11} \end{bmatrix}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$$

y

$$\Delta = \frac{\begin{bmatrix} k_{11}k_{22} & -k_{21}k_{12} \\ -k_{21}k_{12} & k_{11}k_{22} \end{bmatrix}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$$

De aquí se pueden observar algunas propiedades de este ejemplo, las cuales son propiedades generales del arreglo Bristol:

1. La suma de cualquier renglón o cualquier columna en el arreglo Bristol es la unidad.
2. Cuando la matriz de funciones de transferencia es diagonal o triangular, el arreglo Bristol es la matriz

identidad.

De la definición de la medición de interacción es claro que la mejor situación posible es tener todos los términos de fuera de la diagonal cerca de cero y los términos de la diagonal muy cercanos a la unidad, es decir:

$$\Delta_{\text{ideal}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Esto significa que hay una pequeña interacción y que el comportamiento de ciclo cerrado es similar al comportamiento de ciclo abierto. Mientras los términos fuera de la diagonal se incrementan en magnitud absoluta y los términos de la diagonal se alejan de 1.0 indican más interacción.

La INTERACCION POSITIVA surge cuando todos los elementos de  $\Delta$  son positivos; esto significa que hay alguna interacción, y uno debe elegir la pareja del ciclo  $(u_i, y_i)$  que haga los términos de la diagonal tan cercanos como sea posible a la unidad.

La INTERACCION NEGATIVA ocurre cuando algunos de los elementos de  $\Delta$  son negativos. Esto significa que cambiar  $u_i$  en la situación de ciclo cerrado tiene justo el efecto opuesto de cambiar  $u_i$  en el caso de ciclo abierto.

El arreglo Bristol puede usarse como una guía en la elección de parejas (variable manipulada-variable de salida). Algunas reglas generales para esta elección son:

1. Del examen de  $G(0)$ , la pareja  $(u,y)$  tal que los elementos de la diagonal sean los más grandes relativos a los elementos fuera de la diagonal.
2. Del examen de  $\Delta$  la pareja  $(u,y)$  tal que los términos de la diagonal sean dominantes y cercanos, en valor absoluto, a la unidad. Si algunos términos de la diagonal son negativos, entonces, para un buen funcionamiento, todos deben ser negativos.

### 3.3.8 TECNICAS DE DISEÑO DE CONTROLADORES MULTIVARIABLES.

Hay una gran cantidad de técnicas de diseño de controladores multivARIABLES. Estos métodos usualmente implementados en una computadora permiten el diseño en una forma iterativa de las ganancias feedback hasta que se obtiene una buena respuesta del sistema de control multivariable. En esta parte del capítulo se describirán algunas de las técnicas de diseño de controladores multivARIABLES más conocidas.

#### A. METODO DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES (ROOT LOCUS).

Es un método clásico en ingeniería de control que consiste en graficar las raíces de la ecuación característica de ciclo

cerrado de un sistema en función de la o las ganancias de los controladores del proceso.

El método del lugar geométrico de las raíces es un procedimiento por el cual se trazan en un plano "m" o "s" (fig. 2.3) las raíces de la ecuación característica para todos los valores de la o las ganancias del sistema de control desde cero a infinito.

Los pasos a seguir para construir una gráfica del lugar geométrico de las raíces son:

1. Se obtiene la ecuación característica y se reordena esta ecuación de manera que se obtenga una expresión en función de la o las ganancias del sistema.
2. Se resuelve la ecuación característica del sistema para diferentes valores de ganancias.
3. Se grafican en el plano "m" o "s" todas las raíces para cada valor de ganancia.

Para seleccionar la o las ganancias de operación del controlador se puede usar la definición del coeficiente de amortiguamiento que se desarrolló en la sección 3.3.3.

#### **B. CONTROL INTERACTUANTE.**

El funcionamiento de un sistema de control multivariable frecuentemente puede mejorarse significativamente por algún tipo de compensación el cual considere las interacciones. Tal mejora es posible aún para sistemas los cuales parezcan tener solamente

interacciones débiles de acuerdo al arreglo Bristol. Hay numerosas técnicas para diseño de controladores feedback multivariable con compensación para interacciones.

Una de las aproximaciones clásicas para el problema es diseñar un control no interactuante. Para ilustrar el control no interactuante se asumirá que se desean controlar las salidas del proceso  $y(t)$ , ajustando las variables de control  $u(t)$ . En la fig. 3.33 se muestra una estructura de control feedback con controladores de ciclo único y que incluye un compensador de no interacción  $G_c$ . Los controladores de un sólo ciclo dan a  $G_c$  la forma diagonal.

$$G_c = \begin{bmatrix} g_{11c} & & & 0 \\ & g_{22c} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & g_{nnc} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

La función de transferencia de ciclo cerrado para el esquema de control no interactuante mostrado en la fig. 3.33 es:

$$\underline{Y} = (I + G G_c G_c)^{-1} (G G_c G_c \underline{Y}_d + G_d \underline{D}) \quad (3.39)$$

o

$$\underline{Y} = T \underline{Y}_d + T_d \underline{D} \quad (3.40)$$

Aquí  $G_c$  es un compensador el cual debe ser diseñado para

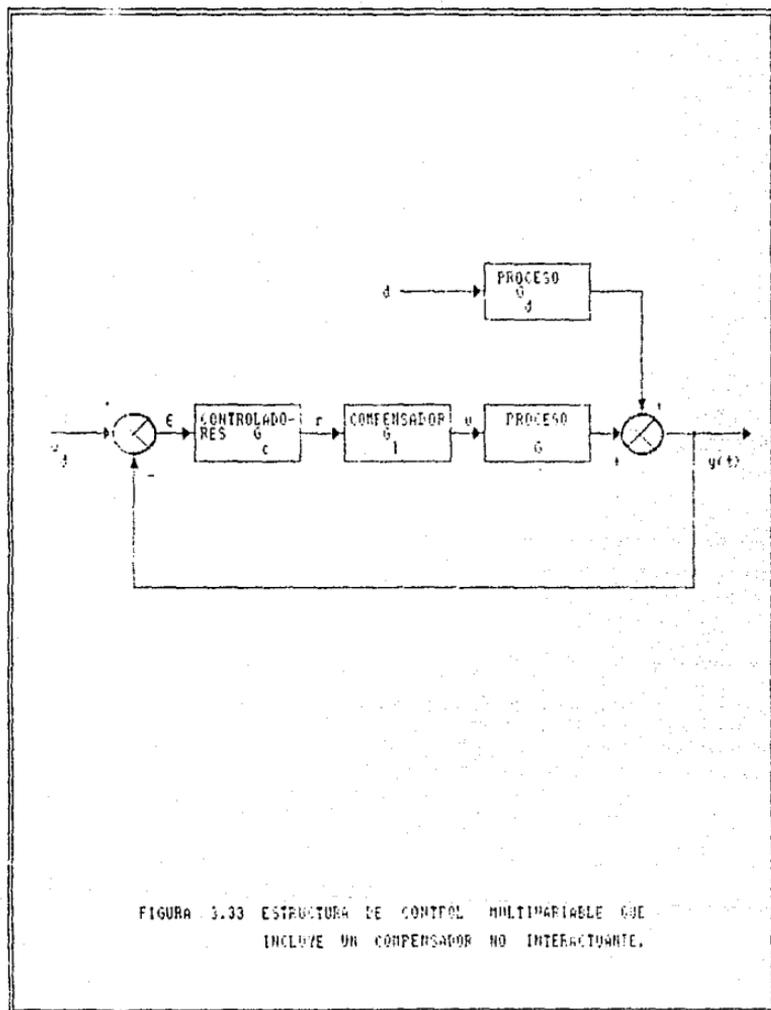


FIGURA 3.33 ESTRUCTURA DE CONTROL MULTIVARIABLE QUE INCLUYE UN COMPENSADOR NO INTERACTUANTE.

eliminar tantas interacciones como sean posibles. Idealmente  $G_l(s)$  se elegiría para hacer,

$$T = (I + G G_l G_c)^{-1} G G_l G_c \quad (3.41)$$

diagonal y llevar  $T \rightarrow 0$  para  $s = 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) para alguna elección de los parámetros de ajuste del controlador (tal como la ganancia del controlador). Obviamente el control no interactuante solamente tiene sentido cuando  $G$ ,  $G_l$  y  $G_c$  sean matrices cuadradas es decir, cuando el número de variables de control (variables manipuladas) y variables de salida sea el mismo. Si hay más variables de control que variables de salida,  $m > l$ , entonces, puede escogerse un subgrupo de controles para completar el desacoplamiento; mientras que si hay más variables de salida que variables de control  $l > m$ , entonces solamente es posible un desacoplamiento parcial.

Recordando que  $G_c$  es diagonal, una condición suficiente para que  $T$  sea diagonal y  $T(0) \rightarrow 0$  cuando la ganancia del controlador se incrementa es que:

$$G G_l = \text{diag } G(s)$$

o (3.42)

$$G_l = G^{-1} \text{diag } G(s)$$

donde  $\text{diag } G(s)$  es una matriz diagonal que tiene elementos de la diagonal de  $G(s)$  a lo largo de la diagonal principal, es decir:

$$\text{diag } G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & & 0 \\ & g_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g_{\ell\ell}(s) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Si esta compensación fue hecha perfectamente, la función de transferencia de ciclo cerrado debe tomar la forma:

$$Y(s) = (I + G G^{-1} \text{diag } G G_c)^{-1} (G G^{-1} \text{diag } G G_c Y_d + G_d D)$$

o

$$Y_i(s) = \frac{g_{iic}(s) g_{ii}(s)}{1 + g_{iic}(s) g_{ii}(s)} y_{id}(s) + \frac{1}{1 + g_{iic}(s) g_{ii}(s)} \sum_{j=1}^k g_{ijd}(s) D_j(s) \quad (3.44)$$

$$i = 1, 2, \dots, \ell$$

Se puede notar que hay un desacoplamiento total para cambios del set point y que cualquier perturbación puede influir sobre todas las salidas, los efectos de las perturbaciones sobre cualquier salida  $Y_i$ , son amortiguadas por un controlador  $g_{iic}$ .

Algunas veces es difícil o imposible compensar perfectamente el sistema de la forma de la ecuación (3.41), sin embargo, siempre se puede llevar a un desacoplamiento de estado

estacionario, el cual elimine las interacciones de estado estacionario. Esto requiere que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} T(s)$$

en la ecuación (3.42) sea diagonal. El compensador de estado estacionario está dado por:

$$G_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} G_L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ G(s)^{-1} \text{diag } G(s) \right] = G_{ss}^{-1} \text{diag } G_{ss} \quad (3.45)$$

En este caso las funciones de transferencia de ciclo cerrado toman la formas:

$$Y = (I + G G_{ss}^{-1} \text{diag } G_{ss} G_c)^{-1} (G G_{ss}^{-1} \text{diag } G_{ss} G_c Y_d + G_d D) \quad (3.46)$$

Con tal desacoplamiento de estado estacionario, las interacciones de estado estacionario son eliminadas incrementando las ganancias de los controladores, el corrimiento a estado estacionario puede decrecer más fácilmente. No obstante hay aun un periodo de interacción dinámica lo que puede causar que los controladores de un sólo ciclo luchan entre si, si ellos fueron ajustados fuertemente. Por la misma razón, la acción integral significativa en los controladores es generalmente no deseada, porque esto conduce a los controladores a luchar entre si en un intento por eliminar el corrimiento.

Puede haber condiciones donde la implementación de este método es difícil o imposible, por ejemplo si la función de

transferencia  $G(s)$  contiene retrasos de tiempo, entonces el compensador dinámico frecuentemente contendrá directores de tiempo que requerirán conocer la salida para algunos tiempos futuros. Es claro que esto no puede implementarse exactamente. Sin embargo, en algunos casos, tal esquema de control involucra un predictor que puede dar resultados razonables. Otro problema también encontrado frecuentemente resulta del hecho que una compensación perfecta requiere de un modelo de función de transferencia perfecto. Ya que el modelo del proceso es casi siempre aproximado, el esquema de control real implementado tendrá la función de transferencia de ciclo cerrado:

$$Y = (I + G^* G^{-1} \text{diag } G \ G_C)^{-1} G^* G^{-1} \text{diag } G \ G_C Y_d \quad (3.47)$$

donde  $G^*$  es el proceso real y  $G^{-1}$  es la inversa del modelo del proceso. Si las diferencias entre el modelo y el proceso son también grandes, el esquema de control se comporta mal y puede volverse inestable.

Estos problemas de estabilidad son más serios si alguno de los ceros de la función de transferencia cae en el lado derecho del plano. Estos ceros se vuelven polos inestables en  $G_c$  y la cancelación imperfecta de estos elementos debido a imperfecciones en el modelo pueden resultar en polos inestables en la función de transferencia. Otra desventaja potencial del control no interactuante es que mucha de la flexibilidad de control es usada para lograr no interacción, algunas veces a expensas de la

respuesta dinámica global.

### C. CONTROL FEEDBACK MODAL.

Otra aproximación al diseño de controladores multivariables es el control feedback modal. Esta técnica hace uso de la naturaleza lineal del modelo del sistema para diseñar un esquema de control el cual permita especificar los eigenvalores del ciclo cerrado del sistema. Para ilustrar esta técnica se considerará el sistema descrito en el espacio de estado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu + \Gamma d \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde, para esta discusión se asumirá que el número de variables a controlar y el número de salidas es el mismo que el número de estados. Así  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices de orden  $n \times n$  constantes y se supondrá que  $A$  tiene eigenvalores reales y distintos. Estas limitaciones no son cruciales para el método y hacen más fáciles las siguientes explicaciones.

Además, supongase un controlador proporcional en la salida:

$$u(t) = -G_c y = -G_c Cx\tag{3.48}$$

Recordando de los conceptos generales de eigenvalores y eigenvectores, si  $A$  es una matriz diagonal de eigenvalores de

una matriz de orden  $n \times n$ ,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

entonces,

$$RA = AR \quad (3.50)$$

$$AL = LA \quad (3.51)$$

donde R y L son los eigenvectores normalizados izquierdo y derecho para la matriz. Esto significa que R y L son las matrices de las n soluciones de las ecuaciones:

$$Ar_i = \lambda_i r_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.52)$$

$$\ell_i^T A = \lambda_i \ell_i^T \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.53)$$

donde, los eigenvalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son soluciones de las ecuaciones:

$$|A - \lambda_i I| = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.54)$$

los n vectores  $\ell_i$ ,  $r_i$  son divididos cada uno por una constante para hacerlos ortonormales, es decir:

$$\ell_i^T r_j = \delta_{ij} \quad r_i^T \ell_j = \delta_{ij} \quad (3.55)$$

$$LR = RL = I \quad (3.56)$$

donde:

$$R = \left[ r_1 \mid r_2 \mid \dots \mid r_n \right] \quad (3.57)$$

$$L = \left[ l_1 \mid l_2 \mid \dots \mid l_n \right]^T$$

Así, las propiedades en las ecuaciones (3.50) y (3.51) se siguen directamente de las ecuaciones (3.52) y (3.56).

Haciendo uso de las ecuaciones (3.50) y (3.51) se puede mostrar que:

$$A = LAR \quad (3.58)$$

y

$$RAL = A \quad (3.59)$$

Así, sustituyendo las ecuaciones (3.48) y (3.59) en las ecuaciones (2.1) se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = (RAL - BG_c)x \quad (3.60)$$

Ahora, si se escoge la matriz de control como:

$$G_c = B^{-1}RK \quad (3.61)$$

donde K es una matriz diagonal de controladores proporcionales

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

y se escoge la matriz de salida  $C = L$ , entonces la ecuación (3.60) se transforma a:

$$\frac{dx}{dt} = R(\Lambda - K)Lx \quad (3.63)$$

Notando que:

$$y = Lx$$

la ecuación (3.63) toma la forma:

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda - K)y \quad (3.64)$$

y claramente  $(\Lambda - K)$  es una matriz diagonal, así las salidas no tienen interacción y:

$$y_i = \alpha_i e^{(\lambda_i - k_i)t} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.65)$$

En suma, la solución de ciclo cerrado para las ecuaciones de estado toman la forma:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i e^{(\lambda_i - k_i)t} \quad (3.66)$$

donde,  $\alpha_i$  es una constante determinada a partir de las condiciones iniciales. Note que ajustando  $k_i$  se puede hacer que los eigenvalores de ciclo cerrado sean tan grandes y negativos como se desee sin provocar interacción entre las  $y_i$ . Ajustando la constante  $k_i$  del controlador  $i$ -ésimo se afecta solamente el modo  $i$ -ésimo. Esto significa que se pueden controlar los modos del proceso y aún si hay interacción de estados, la salida  $y$ , no tiene interacción. Las desventajas de este esquema de control son que solamente se puede usar el controlador proporcional, es necesario escoger  $C = I$  y el ajuste del mismo es un problema. El diagrama de bloques para el esquema de control feedback modal se muestra en la fig. 3.34.

En el caso donde hay más estados que salidas a controlar, es posible aplicar el control modal a los primeros  $m$  eigenvectores (donde,  $m$  es el número de variables controladas) con interacción de salida cero.

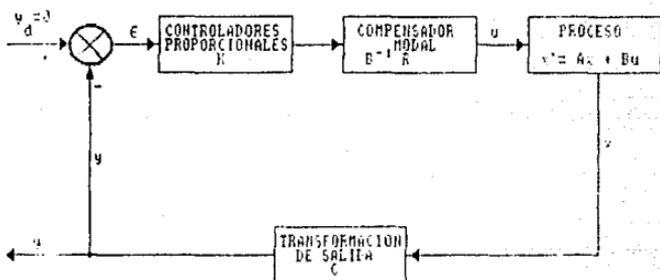


FIGURA 3.34 DIAGRAMA DE BLOQUES PARA CONTROL FEEDBACK MODAL.

### 3.3.9 AJUSTE DEL CONTROLADOR.

El paso final en el diseño de un circuito de control es usualmente el ajuste de los parámetros del sistema. En realidad esto constituye una prueba sobre el diseño de un sistema de control. Si el controlador puede ser ajustado dará una respuesta satisfactoria; es costumbre asumir que todos los elementos del circuito son adecuados para la tarea y en el orden adecuado para la misma.

Donde el controlador no puede ser ajustado satisfactoriamente, debe revisarse la selección de los elementos restantes del circuito y la configuración global (selección de las variables a controlar y manipular). El controlador inajustable es consecuencia de una falla en el diseño del circuito. Los circuitos que son propiamente diseñados y aplicados deben ser ajustables; aquellos que son inaplicables o tienen un diseño equivocado no serán ajustados hasta que el problema sea corregido.

El ajuste de un controlador es complejo e involucra:

1. Características del proceso (ganancias, constante de tiempo, tiempos muertos, etc.).
2. Controladores adecuados (PI, PID, etc.).
3. Respuesta deseada.

Uno de los primeros problemas encontrados en el ajuste de un controlador es definir que es un "buen" control y esto desafortunadamente, difiere de un proceso a otro. El criterio más

común es ajustar el controlador para que la curva de la respuesta del sistema tenga una relación de amplitud o relación de decaimiento de 1:4, por ejemplo, la proporción de la amplitud de la segunda onda comparada a la amplitud de la primer onda es 1:4 como se muestra en la fig. 3.35.

No hay una justificación matemática directa para el requerimiento de la relación de decaimiento de 1:4. Esto es un compromiso entre una respuesta inicial rápida y un corto tiempo de la respuesta de salida. En muchos casos, ésto no es suficiente para especificar una única combinación en el arreglo de los controladores. Puede haber un infinito número de arreglos que permitan una relación de decaimiento de 1:4. En tales situaciones esto es frecuentemente aprovechado para requerir que cualquiera de los dos, el corrimiento a régimen permanente (diferencia entre la salida actual y el set point) o el área de control (tiempo integral de las salidas negativas del set point) sean minimizadas.

En la práctica, las técnicas de ajuste no dan exactamente el tipo de respuesta deseada. Así, algunos ajustes finales para los parámetros deben hacerse manualmente. Sin embargo, se debe obtener al final un punto de inicio razonable del cual puedan obtenerse las características de la respuesta deseable.

Las técnicas de ajuste para controladores pueden ser divididas en dos grupos. En el primero, pocos métodos están basados en valores determinados para la respuesta de circuito cerrado del sistema, por ejemplo, con el controlador en

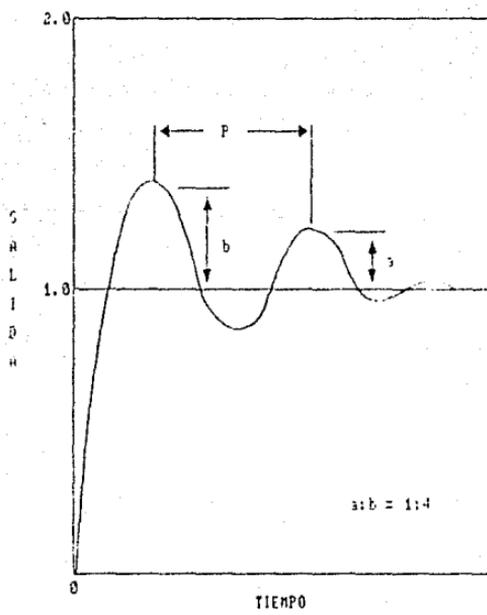


FIGURA 3.35 AJUSTE DEL CONTROLADOR PARA UNA RELACION DE DECAIMIENTO DE 1:4.

automático. En el segundo, una variedad de métodos están basados en variables determinadas para la curva de la respuesta del circuito abierto, llamada comúnmente curva de la respuesta dinámica del proceso.

#### 1. METODO DE CIRCUITO CERRADO.

EL método propuesto por Ziegler y Nichols es el más usado comúnmente en la categoría de los métodos de circuito cerrado. También se conoce con el nombre de método "último". Este nombre es debido a que se requiere determinar la última ganancia o sensibilidad y el último periodo para el sistema. Esta última ganancia es el máximo valor aceptable de ganancia (para un controlador con modo de control proporcional) para el cual el sistema es estable.

El método consta de los siguientes pasos:

1. Desajustar toda la acción integral y derivativa ( $\tau_I = \infty$ ,  $\tau_D = 0$ ) y poner el controlador en automático.
2. Introducir una perturbación al circuito y ajustar la ganancia proporcional  $K_c$ , hasta que el circuito oscile continuamente.
3. Registrar el valor del paso 2 como la última sensibilidad o ganancia  $K_u$ , y registrar el periodo como el último periodo  $P_u$ .
4. Determinar los parámetros de las ecuaciones a partir de la tabla 3.9.

La perturbación en el paso 2 puede ser introducida por una

Tabla 3.9 ECUACIONES DE AJUSTE PARA EL ARREGLO DEL CONTROLADOR.

CONTROLADOR	PARAMETRO	ZIEGLER-NICHOLS CIRCUITO CERRADO	ZIEGLER-NICHOLS CIRCUITO ABIERTO
PROPORCIONAL	$K_c$	$0.5 S_u$	$\Delta v/L_r R_r$
PROPORCIONAL-INTEGRAL	$K_c$	$0.45 S_u$	$0.9 \Delta v/L_r R_r$
	$\tau_I$	$P_u/1.2$	$3.33 L_r$
PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVADO	$K_c$	$0.6 S_u$	$1.2 \Delta v/L_r R_r$
	$\tau_I$	$0.5 P_u$	$3.0 L_r$
	$\tau_D$	$P_u/8$	$0.5 L_r$
$K_c = \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{\text{cambio en la salida}}{\text{cambio en la entrada}}$			

variedad de caminos. Una aproximación es simplemente mover el set point arriba o abajo de su valor por una cantidad arbitraria, hasta esperar que el proceso comience a responder y entonces restaurar el set point a su valor previo.

El objetivo de este método es obtener una respuesta con una relación de decaimiento de 1:4 así como aplicarse a las diferentes combinaciones de modos de control (tabla 3.9).

Una de las desventajas de este método, es que la disminución en la ganancia hace que el proceso sea inestable, en estos casos, el método "último" probablemente no dará un buen arreglo. Usualmente en casos de este tipo, el sistema es estable a altos y bajos valores de la ganancia, pero inestable a valores intermedios. Así, la última ganancia para sistemas de este tipo se define ligeramente diferente. La utilización de este método requiere la disminución del valor de la última ganancia, por ejemplo, este método aplica solamente cuando un incremento de la ganancia decrece la estabilidad, el cual es un caso usual.

Para utilizar la última ganancia y el último período para el arreglo del controlador, Ziegler y Nichols correlacionaron, en el caso de un controlador proporcional, la relación de decaimiento obtenida contra la ganancia en el controlador expresada como una fracción de la última ganancia. Después de hacer ésto para una variedad de procesos concluyeron que un valor de la ganancia es igual a un medio de la última ganancia, para dar una relación de decaimiento de 1:4.

## 2. METODO DE CIRCUITO ABIERTO.

En contraste al método de circuito cerrado, el método de circuito abierto requiere sólo una perturbación que afecte al proceso. Realmente el controlador no está en el circuito cuando el proceso es probado. Así, este método busca caracterizar el proceso, y luego determina el arreglo del controlador para las características del proceso.

En general, no es posible analizar completamente un proceso típico; de aquí, que se empleen técnicas de aproximación. Muchas de estas técnicas aplican a la curva de la respuesta dinámica del proceso, la cual es simplemente la respuesta del proceso para un cambio de paso unitario de la variable manipulada; por ejemplo, la salida del controlador. Para determinar la curva de la respuesta dinámica del proceso, se recomiendan los siguientes pasos:

1. Establecer el sistema a régimen permanente.
2. Poner el controlador en operación manual.
3. Colocar manualmente la salida del controlador al valor al cual éste operaba automáticamente.
4. Permitir que el sistema alcance el régimen permanente.
5. Con el controlador fijado en operación manual, aceptar un cambio de paso unitario en la salida del controlador; como el aire en la válvula.
6. Registrar la respuesta de la variable controlada. Aunque la respuesta es usualmente registrada por el mismo controlador, es frecuentemente deseable tener un

registrador complementario o un indicador gráfico para el controlador.

7. Retornar la salida del controlador a su valor previo, y retornar el controlador a operación automática.

Uno de los primeros métodos usado para obtener la curva de la respuesta dinámica del proceso es el propuesto por Ziegler y Nichols. Para poder usar este método es necesario determinar  $R_r$  y  $L_r$ . Usando estos parámetros y las ecuaciones de la tabla 3.9 se puede aproximar el ajuste del controlador.

Este método de circuito abierto también puede ser empleado para controladores tales como el PI o PID (tabla 3.9).

CAPITULO 4

DISEÑO Y ANALISIS DE UN  
SISTEMA DE CONTROL

#### 4.1 DESARROLLO Y ANALISIS DINAMICO DEL MODELO MATEMATICO PARA UN REACTOR DE TANQUE AGITADO CONTINUO NO ISOTERMICO.

Este último capítulo está dedicado a la aplicación de los conceptos generales obtenidos a lo largo del presente trabajo y que conducen al diseño de sistemas de control multivariable. Con este propósito se ha seleccionado un sistema multivariable particular, un reactor de tanque agitado continuo (RTAC) no isotérmico, que servirá de base para ilustrar paso a paso la metodología a seguir en el diseño de un sistema de control.

Como ya se mencionó, el primer paso para lograr este objetivo es el conocimiento del comportamiento dinámico del sistema por lo que es necesario el desarrollo de un modelo matemático para el RTAC.

##### 4.1.1 DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO.

Considerando un reactor de tanque agitado continuo (RTAC) no isotérmico, en el que se lleva a cabo una reacción exotérmica irreversible  $A \longrightarrow B$ , el calor de reacción se remueve por medio de agua de enfriamiento que fluye a través de una chaqueta que rodea al reactor, fig.4.1.

De acuerdo a la sección 2.1.1, las cantidades fundamentales dependientes para el reactor son:

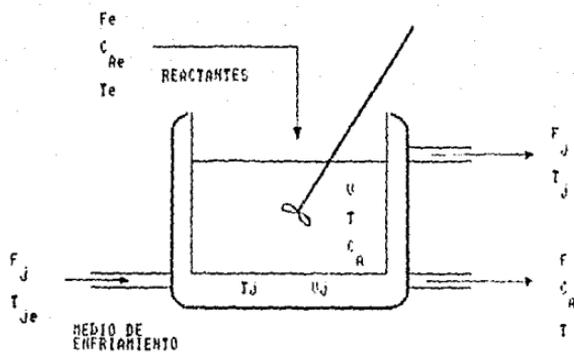


FIGURA 4.1 REACTOR DE TANQUE AGITADO  
 CONTINUO NO ISOTERMICO.

- a) Masa total de la mezcla de reacción en el tanque.
- b) Masa del componente A en la mezcla de reacción.
- c) Energía de la mezcla de reacción en el tanque.
- d) Energía del medio de enfriamiento en la chaqueta.

Ahora, aplicando los principios de conservación a las cuatro cantidades fundamentales se tiene:

Balance de masa total:

<u>Acumulación de masa total</u>	<u>=</u>	<u>Entrada de masa total</u>	<u>-</u>	<u>Salida de masa total</u>
período de tiempo		período de tiempo		período de tiempo
	+	<u>Masa total generada o consumida</u>		
	-	período de tiempo		

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_e F_e - \rho F + 0 \quad (4.1)$$

Balance de masa para el componente A:

Acumulación del componente A <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>	=	Entrada del componente A <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>
período de tiempo		período de tiempo
		Salida del componente A <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>
		período de tiempo
		Consumo del componente A debido a la reacción <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>
		período de tiempo

$$\frac{d(N_A)}{dt} = \frac{d(C_A V)}{dt} = C_{Ae} F_e - C_A F - r V$$

(4.2)

Balance de energía en el reactor:

Acumulación de energía total <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>	=	Energía total en la corriente de entrada al RTAC <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>
período de tiempo		período de tiempo
		Energía total en la corriente de salida del RTAC <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>
		período de tiempo

$$\begin{array}{r}
 \text{Energía absorbida o generada} \\
 \text{por la reacción} \\
 + \\
 \hline
 \text{período de tiempo} \\
 \\
 \text{Energía removida por el medio} \\
 \text{de enfriamiento} \\
 - \\
 \hline
 \text{período de tiempo}
 \end{array}$$

En este balance de energía se despreja el trabajo de flecha ejercido por el impulsor del mecanismo agitador. La energía total de la mezcla de reacción es:

$$\bar{E} = \bar{U} + \bar{K} + \bar{P}$$

donde,  $\bar{U}$  es la energía interna,  $\bar{K}$  es la energía cinética y  $\bar{P}$  es la energía potencial de la mezcla de reacción. Por tanto asumiendo que el reactor no se mueve (es decir,  $d\bar{K}/dt = d\bar{P}/dt = 0$ ):

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d(\bar{U} + \bar{K} + \bar{P})}{dt} \approx \frac{d\bar{U}}{dt}$$

Ya que el sistema es líquido se puede hacer la siguiente aproximación:

Acumulación de energía total en el RTAC por unidad de tiempo	=	$\frac{d\bar{U}}{dt}$	≈	$\frac{dH}{dt}$	=	Acumulación de entalpía total en el RTAC por unidad de tiempo
--	---	-----------------------	---	-----------------	---	---

De esta forma:

$$\begin{array}{l} \text{Energía total en la} \\ \text{corriente de entrada} \\ \text{por unidad de tiempo} \end{array} = \rho_e F_e h_e(T_e)$$

$$\begin{array}{l} \text{Energía total en la} \\ \text{corriente de salida} \\ \text{por unidad de tiempo} \end{array} = \rho F h(T)$$

Consecuentemente el balance de energía total conduce a la ecuación:

$$\frac{dH}{dt} = \rho_e F_e h_e(T_e) - \rho F h(T) - Q \quad (4.3)$$

Balance de energía en la chaqueta:

$$\begin{array}{l} \text{Acumulación de} \\ \text{energía total} \\ \hline \text{período de} \\ \text{tiempo} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Energía total en la corriente} \\ \text{de alimentación a la chaqueta} \\ \hline \text{período de tiempo} \\ \\ \text{Energía total en la corriente} \\ \text{de salida de la chaqueta} \\ \hline \text{período de tiempo} \\ \\ \text{Energía absorbida por el} \\ \text{medio de enfriamiento} \\ \hline \text{período de tiempo} \end{array}$$

Como en el balance de energía para el reactor:

$$\bar{E} = \bar{U} + \bar{K} + \bar{P}$$

y

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d\bar{P}}{dt} = 0$$

por lo tanto:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\bar{U}}{dt} \approx \frac{dH}{dt}$$

Así, el balance de energía en la chaqueta:

$$\rho_j V_j \frac{dH_j}{dt} = F_j \rho_j h_{je}(T_e) - F_j \rho_j h_j(T_j) + Q \quad (4.4)$$

El siguiente paso es identificar las variables de estado apropiadas para el sistema.

#### A. CARACTERIZACION DE LA MASA TOTAL.

Para la caracterización de la masa total se necesita la densidad de la mezcla de reacción  $\rho$ , y su volumen  $V$ . La densidad es función de la concentración  $C_A$ ,  $C_B$  y de la temperatura  $T$ . Frecuentemente esta dependencia es débil y la densidad puede considerarse constante a lo largo de la reacción.

Por lo tanto, el lado derecho de la ecuación (4.1) produce:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt}$$

ya que,  $\rho = \rho_e$

Bajo esta suposición,  $V$  es la única variable de estado que se necesita para caracterizar la masa total, entonces la ecuación (4.1) se obtiene como:

$$\frac{dV}{dt} = F_e - F \quad (4.5)$$

#### B. CARACTERIZACION DE LA MASA DEL COMPONENTE A.

De la ecuación (4.2) se tiene que las variables de estado son  $C_A$  y  $V$ .

$$\begin{aligned} \frac{d(N_A)}{dt} &= \frac{d(C_A V)}{dt} = C_A \frac{dV}{dt} + V \frac{dC_A}{dt} \\ \frac{d(C_A V)}{dt} &= F_e C_{Ae} - F C_A - r V \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde:

$$r = k C_A$$

$$k = \alpha e^{(-E/R T)}$$

por lo tanto:

$$\frac{d(C_A V)}{dt} = F_e C_{Ae} - F C_A - \alpha e^{(-E/R T)} C_A V \quad (4.6)$$

o

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_e (C_{Ae} - C_A)}{V} - \alpha e^{(-E/R T)} C_A \quad (4.7)$$

Para el componente B se tiene:

$$\frac{d(N_B)}{dt} = \frac{d(C_B V)}{dt} = F_e C_{Be} - F C_B + r V \quad (4.8)$$

si  $C_{Be} = 0$ , se tiene:

$$\frac{d(N_B)}{dt} = -F C_B + r V \quad (4.9)$$

### C. CARACTERIZACION DE LA ENERGIA TOTAL DEL REACTOR.

Se sabe que la entalpía de un sistema líquido es función de la temperatura y de su composición:

$$H = H(T, N_A, N_B)$$

donde  $N_A$  y  $N_B$  son las moles de A y B en el RTAC.

Diferenciando la expresión anterior se tiene:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial H}{\partial(N_A)} \frac{d(N_A)}{dt} + \frac{\partial H}{\partial(N_B)} \frac{d(N_B)}{dt} \quad (4.10)$$

donde:

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \rho V C_p$$

$$\frac{\partial H}{\partial(N_A)} = \hat{H}_A(T)$$

$$\frac{\partial H}{\partial(N_B)} = \hat{H}_B(T)$$

Sustituyendo estas expresiones y las ecuaciones (4.2) y (4.9) en la ecuación (4.10), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = \rho V C_p \frac{dT}{dt} + \hat{H}_A (F_e C_{Ae} - F C_A - r V) \\ + \hat{H}_B (-F C_B + r V) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sustituyendo la última expresión en la ecuación (4.3), se tiene:

$$\begin{aligned} \rho V C_p \frac{dT}{dt} = - \hat{H}_A (F_e C_{Ae} - F C_A - r V) \\ - \hat{H}_B (-F C_B + r V) \\ + \rho_e F_e h_e(T_e) - \rho F h(T) - Q \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si,

$$\begin{aligned} \rho_e F_e h_e(T_e) &= F_e [ \rho_e h_e(T) + \rho_e C_{p_e} (T_e - T) ] \\ &= F_e [ C_{Ae} \hat{H}_A(T) + \rho_e C_{p_e} (T_e - T) ] \end{aligned} \quad (4.13)$$

y

$$\rho V h(T) = F [ C_A \hat{H}_A(T) + C_B \hat{H}_B(T) ] \quad (4.14)$$

Consecuentemente, la ecuación (4.12) se desarrolla en:

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = \rho_e F_e C_{p_e} (T_e - T) + (\hat{H}_A - \hat{H}_B) r V - Q \quad (4.15)$$

Finalmente, ya que  $(\hat{H}_A - \hat{H}_B) = (-\Delta H_r)$  y  $\rho = \rho_e$ ,  $C_p = C_{p_e}$  y si  $Q = U A_T (T - T_j)$ , es el calor transferido entre el proceso a temperatura  $T$  y el agua de enfriamiento a temperatura  $T_j$ , el balance de energía tiene la forma:

$$V \frac{dT}{dt} = F_e (T_e - T) + \frac{(-\Delta H_r) r V}{\rho C_p} - \frac{U A_T (T - T_j)}{\rho C_p} \quad (4.16)$$

o

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_e (T_e - T)}{V} + \frac{(-\Delta H_r) \alpha e^{(-E/R T)} C_A}{\rho C_p} - \frac{U A_T (T - T_j)}{\rho C_p V} \quad (4.17)$$

De la ecuación (4.17) se concluye que la temperatura  $T$ , es la variable de estado que caracteriza la energía total del sistema.

#### D. CARACTERIZACION DE LA ENERGIA TOTAL DE LA CHAQUETA.

$$\text{Si, } h_j = C_{p_j} T_j$$

y sustituyendo en la ecuación (4.4) se tiene:

$$\rho_j C_{p_j} V_j \frac{dT_j}{dt} = \rho_j F_j C_{p_j} (T_{je} - T_j) + U A_T (T - T_j) \quad (4.18)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = \frac{F_j (T_{je} - T_j)}{V_j} + \frac{U A_T (T - T_j)}{\rho_j C_{p_j} V_j} \quad (4.19)$$

De la ecuación (4.19) se concluye que la temperatura  $T_j$ , es la variable de estado que caracteriza la energía total de la chaqueta.

Por lo tanto, el modelo dinámico matemático del RTAC no isotérmico se establece como:

$$\frac{dV}{dt} = F_e - F \quad (4.5)$$

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_e (C_{Ae} - C_A)}{V} - \alpha e^{(-E/R T)} C_A \quad (4.7)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_e (T_e - T)}{V} + \frac{(-\Delta H_r) \alpha e^{(-E/R T)} C_A}{\rho C_p} - \frac{U A_T (T - T_j)}{\rho C_p V} \quad (4.17)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = \frac{F_j(T_{je} - T_j)}{V_j} + \frac{U A_T(T - T_j)}{\rho_j C_{p_j} V_j} \quad (4.19)$$

Suposiciones hechas para la solución del modelo:

- 1) El tanque del reactor está perfectamente mezclado, es decir, las condiciones dentro del tanque son las mismas que en la corriente de salida.
- 2) Las pérdidas de calor en el sistema son despreciables.
- 3) La densidad de la mezcla de reacción y del fluido de enfriamiento se consideran constantes.
- 4) La capacidad calorífica de la mezcla de reacción y del fluido de enfriamiento se consideran constantes.
- 5) No hay acumulación del fluido de enfriamiento dentro de la chaqueta, es decir,  $F_{je} = F_j$ .
- 6) El agua en la chaqueta está perfectamente mezclada.
- 7) El área de transferencia de calor en el sistema es constante.

#### 4.1.2 OBJETIVOS DEL SISTEMA DE CONTROL.

Los objetivos operacionales cualitativos de control para el RTAC son:

- a) Mantener la temperatura de la mezcla de reacción  $T$ , a una temperatura constante  $T_s$ .
- b) Evitar que el volumen de la mezcla de reacción en el

reactor sobrepase el límite establecido Vs.

#### 4.1.3 ANALISIS DE GRADOS DE LIBERTAD PARA EL MODELO MATEMATICO DEL RTAC.

El número de grados de libertad de un sistema es el número de variables independientes que deben ser especificadas para definirlo completamente. Por lo tanto, el control de cualquier proceso será logrado sólo cuando todos los grados de libertad hayan sido especificados.

Para un sistema en particular su modelo matemático es la base para encontrar sus grados de libertad. El análisis de grados de libertad para el RTAC no isotérmico es el siguiente:

Cuando las ecuaciones (4.5), (4.7), (4.17) y (4.19) se resuelven simultáneamente, se puede observar como las variables  $V$ ,  $C_A$ ,  $T$  y  $T_j$  cambian con el tiempo cuando las variables de entrada ( $F_e$ ,  $C_{Ae}$ ,  $T_e$  y  $F_j$ ) cambian.

El número de grados de libertad está dado por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \text{Grados de libertad} &= f = (\text{número de variables}) \\ &\quad - (\text{número de ecuaciones}) \end{aligned}$$

Para el modelo del RTAC se tiene:

Número de ecuaciones = 4 ; ecuaciones (4.5), (4.7), (4.17) y (4.19).

Número de variables = 9 ; variables  $V$ ,  $C_A$ ,  $T$ ,  $T_j$ ,  $F_e$ ,  $C_{Ae}$ ,  $T_e$ ,  $F_j$  y  $F$

Se asume que  $\alpha$ ,  $E$ ,  $R$ ,  $\Delta H_r$ ,  $\rho$ ,  $C_p$ ,  $U$ ,  $A_T$ ,  $\rho_j$ ,  $V_j$ ,  $C_{p_j}$  y  $T_{j_e}$  son parámetros con valores constantes dados.

Por lo tanto:

$$f = 9 - 4 = 5$$

Como se sabe, existe un infinito número de soluciones a las ecuaciones del modelo ya que se pueden especificar arbitrariamente los valores de 5 variables y resolver las ecuaciones que representan el modelo matemático para las cuatro variables restantes.

Así, si se desea que el sistema esté completamente especificado, el número de grados de libertad debe ser cero.

Para reducir el número de grados de libertad a cero se deben introducir cinco ecuaciones, las cuales pueden provenir 1) de los alrededores del sistema y 2) de un sistema de control;

1) Las principales perturbaciones del RTAC son  $C_{A_e}$ ,  $T_e$  y  $F_e$ , y son especificadas por los alrededores del sistema (por ejemplo, la unidad que precede al reactor). Así, se disminuyen a 2 grados de libertad, es decir, se tiene ahora,  $f = 5 - 3 = 2$ .

2) De acuerdo a los objetivos de control, el nivel del líquido del reactor y su temperatura deben mantenerse dentro de valores establecidos. Esto puede lograrse con dos estructuras de control. Introduciendo estos ciclos de control, se adicionan dos ecuaciones, con las que los grados de libertad se reducen a cero, es decir,  $f = 2 - 2 = 0$ .

#### 4.1.4 CLASIFICACION DE LAS VARIABLES DEL RTAC.

En base a los objetivos de control y a la sección 4.1, la clasificación de las variables involucradas en el sistema es la siguiente:

VARIABLES DE ENTRADA:  $F_e$ ,  $T_e$ ,  $C_{Ae}$ ,  $F_{je}$  y  $T_{je}$ .

VARIABLES DE SALIDA:  $F_j$ ,  $T_j$ ,  $F$ ,  $C_A$  y  $T$ .

VARIABLES DE ESTADO:  $V$ ,  $C_A$ ,  $T$  y  $T_j$ .

VARIABLES DE PERTURBACION:  $F_e$ ,  $C_{Ae}$  y  $T_e$ .

VARIABLES A MEDIR:  $T$  y  $V$ . (a controlar)

VARIABLES A MANIPULAR:  $F$  y  $F_j$ .

#### 4.1.5 SELECCION DE LA ESTRUCTURA DE CONTROL.

El uso de una técnica de síntesis (ver capítulo 3), permite hacer la selección de la mejor estructura de control que relacione las diferentes variables involucradas en el sistema, sin embargo, para el propósito de este trabajo y considerando las ventajas de los diferentes tipos de configuraciones (sección 3.1) se utilizará la estructura de control feedback para el sistema en estudio.

Así, la estructura del sistema de control propuesta para el RTAC es la que se muestra en la fig. 4.2.

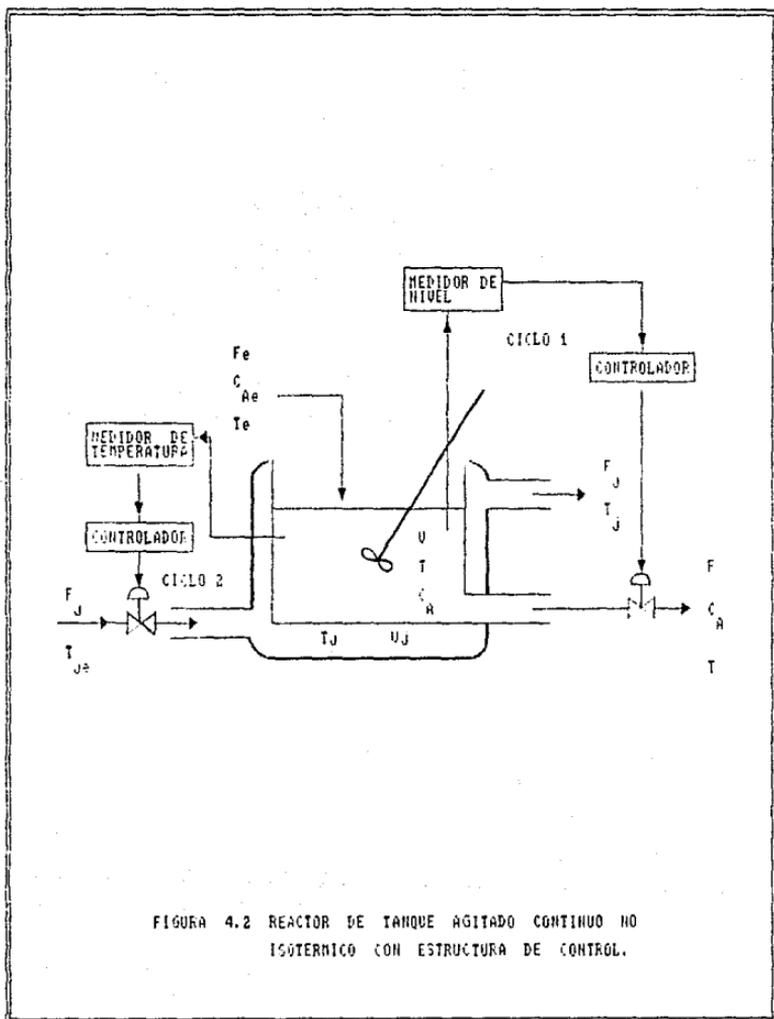


FIGURA 4.2 REACTOR DE TANQUE AGITADO CONTINUO NO ISOTERMICO CON ESTRUCTURA DE CONTROL.

#### 4.1.6 SOLUCION DEL MODELO MATEMATICO PARA EL RTAC.

##### A. SOLUCION ANALITICA PARA EL MODELO PARTICULAR DEL RTAC SIN CONTROL POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE.

La solución analítica para el modelo del RTAC no isotérmico utilizando transformadas de Laplace para las condiciones particulares establecidas en la tabla 4.1, y analizando un circuito sin control es:

Aplicando la técnica de linealización por medio de series de Taylor (Apéndice B) a las ecuaciones (4.5), (4.7), (4.17) y (4.19), para las variables de estado ( $V$ ,  $C_A$ ,  $T$  y  $T_j$ ) se tiene:

$$\text{Si, } F_e = F :$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \implies V = \text{constante} = 48 \text{ ft}^3$$

Las condiciones a régimen permanente para el sistema particular sin control, se obtuvieron de la solución numérica (método de Euler) del modelo matemático:

$$\bar{V} = 48 \text{ ft}^3$$

$$\bar{C}_A = 0.4753 \text{ mol/ft}^3$$

$$\bar{T} = 536.7319 \text{ }^\circ\text{R}$$

$$\bar{T}_j = 536.2166 \text{ }^\circ\text{R}$$

así, se tiene:

$$\frac{dC_A}{dt} = 0.99136 - 0.8763 C_A - 0.00107 T \quad (4.20)$$

TABLA 4.1 VALORES DE LOS PARAMETROS PARA EL  
MODELO DEL FTAC NO ISOTERMICO.

$U = 48 \text{ ft}^3$	$R = 1.987 \text{ BTU}/(\text{mol } ^\circ\text{R})$
$F_e = 40 \text{ ft}^3/\text{h}$	$(-\Delta H_R) = -30,000 \text{ BTU}/\text{mol}$
$C_{Ae} = 0.5 \text{ mol}/\text{ft}^3$	$P = 50 \text{ lb}/\text{ft}^2$
$T_e = 530 \text{ } ^\circ\text{R}$	$C_p = 0.75 \text{ BTU}/(\text{lb } ^\circ\text{R})$
$F_j = 49.2 \text{ ft}^3$	$\rho_j = 62.3 \text{ lb}/\text{ft}^3$
$U_j = 3.85 \text{ ft}^3$	$C_{pj} = 1.0 \text{ BTU}/(\text{lb } ^\circ\text{R})$
$T_j = 530 \text{ } ^\circ\text{R}$	$U = 150 \text{ BTU}/(\text{h ft}^2 \text{ } ^\circ\text{R})$
$\kappa = 7.08 \times 10^{10} \text{ h}^{-1}$	$A_T = 250 \text{ ft}^2$
$E = 30,000 \text{ BTU}/\text{mol}$	

CONDICIONES A REGIMEN PERMANENTE:

SISTEMA SIN CONTROL

$$\begin{aligned} \bar{U} &= 48 \text{ ft}^3 \\ \bar{C}_A &= 0.4753 \text{ mol}/\text{ft}^3 \\ \bar{T}_j &= 536.2166 \text{ } ^\circ\text{R} \\ \bar{T} &= 536.7319 \text{ } ^\circ\text{R} \end{aligned}$$

SISTEMA CON CONTROL

$$\begin{aligned} \bar{U} &= U_s = 48 \text{ ft}^3 \\ \bar{C}_A &= 0.245 \text{ mol}/\text{ft}^3 \\ \bar{T}_j &= 594.6 \text{ } ^\circ\text{R} \\ \bar{T} &= T_s = 600 \text{ } ^\circ\text{R} \end{aligned}$$

CONDICIONES AL TIEMPO = 0:

$$\begin{aligned} U(0) &= 48 \text{ ft}^3 \\ C_A(0) &= 0.245 \text{ mol}/\text{ft}^3 \\ A & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0) &= 600 \text{ } ^\circ\text{R} \\ T_j(0) &= 594.6 \text{ } ^\circ\text{R} \\ J & \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dt} = -18.1413 + 34.4 C_A - 20.8106 T + 20.8333 T_j \quad (4.21)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = 6,869.3506 + 156.3445 T - 169.3055 T_j \quad (4.22)$$

donde las condiciones al tiempo = 0 son:

$$V(0) = 48 \text{ ft}^3$$

$$C_A(0) = 0.245 \text{ mol/ft}^3$$

$$T(0) = 600 \text{ }^\circ\text{R}$$

$$T_j(0) = 594.6 \text{ }^\circ\text{R}$$

Transformando estas ecuaciones a su correspondiente forma en el espacio de Laplace, utilizando transformadas de Laplace (Apéndice D) se tiene:

$$0.245 + \frac{0.99136}{s} = (0.8763 + s) C_A(s) + 0.00107 T(s) \quad (4.23)$$

$$600 - \frac{18.1413}{s} = -34.4 C_A(s) + (20.8106 + s) T(s) - 20.8333 T_j(s) \quad (4.24)$$

$$594.6 + \frac{6,869.3506}{s} = -156.3445 T(s) + (169.3055 + s) T_j(s) \quad (4.25)$$

Arreglando el sistema de ecuaciones de la forma:

$$A x = b \quad (4.26)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} (0.8763 + s) & 0.00107 & 0 \\ -34.4 & (20.8106 + s) & -20.8333 \\ 0 & -156.3445 & (169.3055 + s) \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} C_A(s) \\ T(s) \\ T_j(s) \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.245 + \frac{0.99136}{s} \\ 600 - \frac{18.1413}{s} \\ 594.6 + \frac{6,869.3506}{s} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para  $C_A(s)$ ,  $T(s)$  y  $T_j(s)$ , se tienen las siguientes funciones de transferencia:

$$C_A(s) = \frac{0.245 s^2 + 46.9278 s + \frac{113.9773}{s} + 131.7507}{s^3 + 190.9924 s^2 + 432.8126 s + 239.4828} \quad (4.27)$$

$$T(s) = \frac{600 s^2 + 114,486.85 s + \frac{128,490.54}{s} + 241,357.51}{s^3 + 190.9924 s^2 + 432.8126 s + 239.4828} \quad (4.28)$$

$$T_j(s) = \frac{594.6 s^2 + 113,571.08 s + \frac{128,370.67}{s} + 240,524.3}{s^3 + 190.9924 s^2 + 432.8126 s + 239.4828} \quad (4.29)$$

donde la ecuación característica para el sistema es:

$$s^3 + 190.9924 s^2 + 432.8126 s + 239.4828$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = -0.94759$$

$$r_2 = -1.33927$$

$$r_3 = -188.70554$$

Utilizando el método de fracciones parciales (Apéndice D), en las funciones de transferencia, se antitransforma al dominio del tiempo para obtener la respuesta particular del sistema (ver resultados sección 4.2, gráficas 4.1 y 4.2) y cuyas expresiones para las variables de estado son:

$$C_A(t) = 0.4759 - 0.4457 e^{(-0.94759 t)} + 0.2148 e^{(-1.33927 t)} + 2.037 e^{(-188.70554 t)} \quad (4.30)$$

$$T(t) = 536.5348 - 29.7455 e^{(-0.94759 t)} + 93.1470 e^{(-1.33927 t)} + 0.0637 e^{(-188.70554 t)} \quad (4.31)$$

$$T_j(t) = 536.0343 - 27.6214 e^{(-0.94759 t)} + 86.7008 e^{(-1.33927 t)} - 0.5137 e^{(-188.70554 t)} \quad (4.32)$$

$$\frac{\bar{F}_j}{V_j} T_{je} - \frac{\bar{F}_j}{V_j} \bar{T}_j + \frac{U A_T (\bar{T} - \bar{T}_j)}{\rho_j C_{p_j} V_j} = 0 \quad (4.38)$$

Utilizando variables de desviación (Apéndice C), el modelo matemático se establece como:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A^d}{dt} = & - \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} + \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \right] C_A^d - \left[ \frac{E \bar{C}_A}{R \bar{T}^2} \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \right] T^d \\ & + \left[ \frac{(\bar{C}_{Ae} - \bar{C}_A)}{V} \right] F_e^d + \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} \right] C_{Ae}^d \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT^d}{dt} = & - \left[ \frac{(\Delta H_r) \alpha e^{(-E/R \bar{T})}}{\rho C_p} \right] C_A^d \\ & - \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} + \frac{(\Delta H_r) \bar{C}_A E}{R \bar{T}^2 \rho C_p} \alpha e^{(-E/R \bar{T})} + \frac{U A_T}{\rho C_p V} \right] T^d \\ & + \left[ \frac{U A_T}{\rho C_p V} \right] T_j^d + \left[ \frac{(\bar{T}_e - \bar{T})}{V} \right] F_e^d + \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} \right] T_e^d \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_j^d}{dt} = & \left[ \frac{U A_T}{\rho_j C_{p_j} V_j} \right] T^d - \left[ \frac{U A_T}{\rho_j C_{p_j} V_j} + \frac{\bar{F}_j}{V_j} \right] T_j^d \\ & + \left[ \frac{(T_{je} - \bar{T}_j)}{V_j} \right] F_j^d \end{aligned} \quad (4.41)$$

Estableciendo las ecuaciones anteriores, en términos del modelo de variable de estado:

$$\frac{dx}{dt} = A x + B u + \Gamma d \quad (4.42)$$

$$y = C x \quad (4.43)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A^d}{dt} = & a_{11} C_A^d + a_{12} T^d + a_{13} T_j^d + b_{11} F_j^d \\ & + \gamma_{11} F_e^d + \gamma_{12} C_{Ae}^d + \gamma_{13} T_e^d \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT^d}{dt} = & a_{21} C_A^d + a_{22} T^d + a_{23} T_j^d + b_{22} F_j^d \\ & + \gamma_{21} F_e^d + \gamma_{22} C_{Ae}^d + \gamma_{23} T_e^d \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_j^d}{dt} = & a_{31} C_A^d + a_{32} T^d + a_{33} T_j^d + b_{33} F_j^d \\ & + \gamma_{31} F_e^d + \gamma_{32} C_{Ae}^d + \gamma_{33} T_e^d \end{aligned} \quad (4.46)$$

En lo sucesivo se omitirán los superíndices "d" para la formación del modelo de variable de estado.

B. SOLUCION ANALITICA PARA EL MODELO PARTICULAR DEL RTAC SIN CONTROL POR VARIABLE DE ESTADO.

La solución analítica para el modelo del RTAC no isotérmico para las condiciones particulares, tabla 4.1, para un sistema sin control, utilizando la técnica de variable de estado es:

Aplicando la técnica de linealización (Apéndice B), al modelo matemático del RTAC no isotérmico, ecuaciones: (4.5), (4.7), (4.17) y (4.19); para las variables de estado ( $V$ ,  $C_A$ ,  $T$  y  $T_j$ ), para las variables de perturbación ( $F_e$ ,  $C_{Ae}$  y  $T_e$ ) y las variables a manipular ( $F$  y  $F_j$ ) se tiene:

Si,  $F_e = F$ ;

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad V = \text{constante} = 48 \text{ ft}^3$$

Las condiciones a régimen permanente para el sistema sin control (tabla 4.1) son:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= 48 \text{ ft}^3 & \bar{T} &= 536.7319 \cdot R \\ \bar{C}_A &= 0.4753 \text{ mol/ft}^3 & \bar{T}_j &= 536.2166 \cdot R \end{aligned}$$

así, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{dt} &= \frac{\bar{F}_e (\bar{C}_{Ae} - \bar{C}_A)}{V} - \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \bar{C}_A + \frac{(\bar{C}_{Ae} - \bar{C}_A)}{V} (F_e - \bar{F}_e) \\ &- \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} + \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \right] (C_A - \bar{C}_A) + \frac{\bar{F}_e}{V} (C_{Ae} - \bar{C}_{Ae}) \\ &- \frac{E \bar{C}_A}{R \bar{T}^2} \alpha e^{(-E/R \bar{T})} (T - \bar{T}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} = & \frac{\bar{F}_e (\bar{T}_e - \bar{T})}{V} - \frac{(-\Delta H_r) \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \bar{C}_A}{\rho C_p} - \frac{U A_T (\bar{T} - \bar{T}_j)}{\rho C_p V} \\
& - \frac{(\Delta H_r) \alpha e^{(-E/R \bar{T})}}{\rho C_p} (C_A - \bar{C}_A) + \frac{U A_T}{\rho C_p V} (T_j - \bar{T}_j) \\
& - \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} + \frac{(\Delta H_r) \bar{C}_A E}{R \bar{T}^2 \rho C_p} \alpha e^{(-E/R \bar{T})} + \frac{U A_T}{\rho C_p V} \right] (T - \bar{T}) \\
& + \frac{(\bar{T}_e - \bar{T})}{V} (F_e - \bar{F}_e) + \frac{\bar{F}_e}{V} (T_e - \bar{T}_e)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT_j}{dt} = & \frac{F_j T_{je}}{V_j} - \frac{\bar{F}_j \bar{T}_j}{V_j} + \frac{U A_T (T - T_j)}{\rho_j C_{pj} V_j} - \frac{\bar{T}_j}{V_j} (F_j - \bar{F}_j) \\
& - \frac{\bar{F}_j}{V_j} (T_j - \bar{T}_j)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Se establecen las ecuaciones del modelo matemático a régimen permanente:

$$\frac{\bar{F}_e}{V} (\bar{C}_{Ae} - \bar{C}_A) - \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \bar{C}_A = 0 \tag{4.36}$$

$$\frac{\bar{F}_e}{V} (\bar{T}_e - \bar{T}) - \frac{(-\Delta H_r) \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \bar{C}_A}{\rho C_p} - \frac{U A_T (\bar{T} - \bar{T}_j)}{\rho C_p V} = 0 \tag{4.37}$$

$$\frac{\bar{F}_j}{V_j} T_{je} - \frac{\bar{F}_j}{V_j} \bar{T}_j + \frac{U A_T (\bar{T} - \bar{T}_j)}{\rho_j C_{p_j} V_j} = 0 \quad (4.38)$$

Utilizando variables de desviación (Apéndice C), el modelo matemático se establece como:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A^d}{dt} = & - \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} + \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \right] C_A^d - \left[ \frac{E \bar{C}_A}{R \bar{T}^2} \alpha e^{(-E/R \bar{T})} \right] T^d \\ & + \left[ \frac{(\bar{C}_{Ae} - \bar{C}_A)}{V} \right] F_e^d + \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} \right] C_{Ae}^d \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT^d}{dt} = & - \left[ \frac{(\Delta H_r) \alpha e^{(-E/R \bar{T})}}{\rho C_p} \right] C_A^d \\ & - \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} + \frac{(\Delta H_r) \bar{C}_A E}{R \bar{T}^2 \rho C_p} \alpha e^{(-E/R \bar{T})} + \frac{U A_T}{\rho C_p V} \right] T^d \\ & + \left[ \frac{U A_T}{\rho C_p V} \right] T_j^d + \left[ \frac{(\bar{T}_e - \bar{T})}{V} \right] F_e^d + \left[ \frac{\bar{F}_e}{V} \right] T_e^d \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_j^d}{dt} = & \left[ \frac{U A_T}{\rho_j C_{p_j} V_j} \right] T^d - \left[ \frac{U A_T}{\rho_j C_{p_j} V_j} + \frac{\bar{F}_j}{V_j} \right] T_j^d \\ & + \left[ \frac{(T_{je} - \bar{T}_j)}{V_j} \right] F_j^d \end{aligned} \quad (4.41)$$

Estableciendo las ecuaciones anteriores, en términos del modelo de variable de estado:

$$\frac{dx}{dt} = A x + B u + \Gamma d \quad (4.42)$$

$$y = C x \quad (4.43)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A^d}{dt} = & a_{11} C_A^d + a_{12} T^d + a_{13} T_j^d + b_{11} F_j^d \\ & + \gamma_{11} F_e^d + \gamma_{12} C_{Ae}^d + \gamma_{13} T_e^d \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT^d}{dt} = & a_{21} C_A^d + a_{22} T^d + a_{23} T_j^d + b_{22} F_j^d \\ & + \gamma_{21} F_e^d + \gamma_{22} C_{Ae}^d + \gamma_{23} T_e^d \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_j^d}{dt} = & a_{31} C_A^d + a_{32} T^d + a_{33} T_j^d + b_{33} F_j^d \\ & + \gamma_{31} F_e^d + \gamma_{32} C_{Ae}^d + \gamma_{33} T_e^d \end{aligned} \quad (4.46)$$

En lo sucesivo se omitirán los superíndices "d" para la formación del modelo de variable de estado.

así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} C_A \\ T \\ T_j \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} F_e \\ C_{Ae} \\ T_e \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$$

El flujo de entrada  $F$ , no se involucra en el análisis del modelo de variable de estado, ya que la variable a controlar  $V$ , se mantiene constante, y la manipulación de  $F$ , no afecta a las demás variables de estado.

Sustituyendo las condiciones particulares para el sistema tabla 4.1, en las ecuaciones (4.39), (4.40) y (4.41), y arreglando en base al sistema de ecuaciones (4.44), (4.45) y (4.46), para formar el modelo de variable de estado, se tiene:

Así, de la matriz  $A$  se tiene:

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda + 0.8763 & 0.00107 & 0 \\ -34.3974 & \lambda + 20.8098 & -20.8333 \\ 0 & -156.3445 & \lambda + 169.3055 \end{bmatrix}$$

donde los eigenvalores son:

$$\lambda_1 = -0.94771$$

$$\lambda_2 = -1.33853$$

$$\lambda_3 = -188.70545$$

La matriz  $M$ , formada por los eigenvectores se establece como:

$$M = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.01613 & -0.00250 & 0 \\ -1.07684 & -1.07435 & 0.1226 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\Delta = M A M^{-1} = \begin{bmatrix} -0.94771 & 0 & 0 \\ 0 & -1.33849 & 0 \\ 0 & 0 & -188.71756 \end{bmatrix}$$

La solución del modelo de variable de estado ecuación (4.47), establece:

$$e^{A(t-t_0)} x(0) = \begin{bmatrix} -1.37631 e^{\lambda_1(t-t_0)} + 1.61534 e^{\lambda_2(t-t_0)} \\ -91.84595 e^{\lambda_1(t-t_0)} + 695.69075 e^{\lambda_2(t-t_0)} \\ -85.29141 e^{\lambda_1(t-t_0)} + 647.5431 e^{\lambda_2(t-t_0)} \\ + 0 \\ -3.97033 e^{\lambda_3(t-t_0)} \\ + 32.34846 e^{\lambda_3(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

donde:

$$x(0) = \begin{bmatrix} C_A(0) \\ T(0) \\ T_j(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.245 \\ 600 \\ 594.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B u(\tau) + \Gamma d(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00051 d_1(\tau) + 0.8333 d_2(\tau) \\ -0.1402 d_1(\tau) + 0.8333 d_3(\tau) \\ -1.6147 u(\tau) \end{bmatrix}$$

Utilizando condiciones particulares para las variables a

manipular y de perturbación se tiene:

Suponiendo una perturbación tipo escalón unitario para la variable a manipular  $F_j$ :

$$u(\tau) = \left[ F_j(\tau) \right] = \left[ 1 \right]$$

Suponiendo perturbaciones tipo escalón para las variables de perturbación  $F_e$ ,  $C_{Ae}$  y  $T_e$ , de 1, 0.01 y 5, respectivamente, se tiene:

$$d(\tau) = \begin{bmatrix} F_e(\tau) \\ C_{Ae}(\tau) \\ T_e(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.01 \\ 5 \end{bmatrix}$$

así, simplificando:

$$\left[ B u(\tau) + \Gamma d(\tau) \right] = \begin{bmatrix} 0.00884 \\ 4.0263 \\ -1.6147 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$e^{A(t-\tau)} \left[ B u(\tau) + \Gamma d(\tau) \right] = \begin{bmatrix} 0.00102 e^{\lambda_1(t-\tau)} \\ 0.06707 e^{\lambda_1(t-\tau)} \\ 0.06229 e^{\lambda_1(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ 0.00784 e^{\lambda_2(t-\tau)} + 0 \\ &+ 3.36887 e^{\lambda_2(t-\tau)} + 0.59003 e^{\lambda_3(t-\tau)} \\ &+ 3.13573 e^{\lambda_2(t-\tau)} - 4.81271 e^{\lambda_3(t-\tau)} \end{aligned} \right\}$$

integrando el término anterior:

$$\int e^{A(t-\tau)} [B u(\tau) + \Gamma d(\tau)] = \begin{bmatrix} 0.00108 \left[ 1 - e^{\lambda_1(t-t_0)} \right] \\ 0.07007 \left[ 1 - e^{\lambda_1(t-t_0)} \right] \\ 0.06573 \left[ 1 - e^{\lambda_1(t-t_0)} \right] \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ 0.00586 \left[ 1 - e^{\lambda_2(t-t_0)} \right] + 0 \\ &+ 2.51703 \left[ 1 - e^{\lambda_2(t-t_0)} \right] + 0.00313 \left[ 1 - e^{\lambda_3(t-t_0)} \right] \\ &+ 2.34284 \left[ 1 - e^{\lambda_2(t-t_0)} \right] - 0.0255 \left[ 1 - e^{\lambda_3(t-t_0)} \right] \end{aligned} \right\}$$

finalmente, la solución del modelo de variable de estado, ecuación (4.47), para el sistema (gráficas 4.3 y 4.4, ver resultados), es:

$$\begin{aligned}
 C_A(t) = & 0.00694 - 1.37739 e^{-0.94771(t - t_0)} \\
 & + 1.60948 e^{-1.33843(t - t_0)} \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(t) = & 2.59093 - 91.91672 e^{-0.94771(t - t_0)} \\
 & + 693.17372 e^{-1.33843(t - t_0)} - 3.97346 e^{-188.70545(t - t_0)} \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_j(t) = & 2.38307 - 85.35714 e^{-0.94771(t - t_0)} \\
 & + 645.2003 e^{-1.33843(t - t_0)} + 32.37396 e^{-188.70545(t - t_0)} \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

C. SOLUCION ANALITICA PARA EL MODELO GENERAL DEL RTAC CON CONTROL POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE.

La solución analítica de un modelo matemático general para el RTAC no isotérmico, para las condiciones particulares de la tabla 4.1, utilizando transformadas de Laplace, analizando un circuito con control y estableciendo la solución en función de las variables de perturbación así como las ganancias de los controladores es:

Aplicando la técnica de linealización (Apéndice B) a las ecuaciones (4.5), (4.7), (4.17) y (4.19) para las variables de estado ( $V$ ,  $C_A$ ,  $T$ , y  $T_j$ ), incluyendo las expresiones para las variables a manipular, y expresando las ecuaciones linealizadas en función de las variables de perturbación ( $F_e$ ,  $C_{Ae}$  y  $T_e$ ) y las ganancias para los controladores ( $K_r$  y  $K_c$ ) para los flujos de salida del reactor y de entrada a la chaqueta, respectivamente, se tiene:

Las expresiones para las variables a manipular son:

$$F = 40 - K_r(48 - V) \quad (4.52)$$

$$F_j = 49.9 - K_c(600 - T) \quad (4.53)$$

Las condiciones a régimen permanente para el sistema con control son:

$$\bar{V} = 48 \text{ ft}^3$$

$$\bar{C}_A = 0.245 \text{ mol/ft}^3$$

$$\bar{T} = 600 \cdot R$$

$$\bar{T}_j = 594.6 \cdot R$$

así, se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = -(Kr) V + (F_e - 40 + 4B Kr) \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{dt} &= (0.00011 F_e - 0.00043 F_e C_{Ae}) V \\ &- (0.83774 + 0.02103 F_e) C_A - (0.00858) T \\ &+ (5.14794 + 0.04167 F_e C_{Ae} - 0.00506 F_e) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= (0.258 F_e + 2.322 - 0.00043 F_e T_e) V \\ &+ (670.192) C_A - (14.16608 + 0.02103 F_e) T \\ &+ (21.03) T_j + (0.04167 F_e T_e - 4,229.808 - 12.384 F_e) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_j}{dt} &= (156.34446 - 16.77922 Kc) T - (169.3055) T_j \\ &+ (6,869.3506 + 10,067.532 Kc) \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde las condiciones al tiempo = 0 son:

$$V(0) = 48 \text{ ft}^3$$

$$C_A(0) = 0.245 \text{ mol/ft}^3$$

$$T(0) = 600 \text{ }^\circ\text{R}$$

$$T_j(0) = 594.6 \text{ }^\circ\text{R}$$

Transformando al espacio de Laplace las ecuaciones anteriores se tiene:

$$48 + \frac{(F_e - 40 + 48 Kr)}{s} = (Kr + s) V(s) \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} 0.245 + \frac{(5.14794 + 0.04167 F_e C_{Ae} - 0.00506 F_e)}{s} \\ = - (0.00011 F_e - 0.00043 F_e C_{Ae}) V(s) \\ + (0.83774 + 0.02103 F_e + s) C_A(s) + (0.00858) T(s) \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} 600 + \frac{(0.04167 F_e T_e - 4,229.808 - 12.384 F_e)}{s} \\ = - (0.258 F_e + 2.322 - 0.00043 F_e T_e) V(s) \\ - (670.192) C_A(s) + (14.16608 + 0.02103 F_e + s) T(s) \\ - (21.03) T_j(s) \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}
& (6,869.3506 + 10,067.532 \text{ Kc}) \\
594.6 + & \frac{\quad}{s} \\
= & - (156.34446 - 16.77922 \text{ Kc}) T(s) \\
& + (169.3055 + s) T_j(s) \qquad \qquad \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

Arreglando el sistema de ecuaciones de la forma:

$$A x = b \qquad \qquad \qquad (4.26)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix}
(Kr + s) & 0 \\
-(0.00011 F_e - 0.00043 F_e C_{Ae}) & (0.83774 + 0.02103 F_e + s) \\
-(0.258 F_e + 2.322 - 0.00043 F_e T_e) & -(670.192) \\
0 & 0 \\
\dots & 0 \\
\dots & (0.00858) \\
\dots & (14.16608 + 0.02103 F_e + s) \\
\dots & -(156.34446 - 16.77922 \text{ Kc})
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
0 \\
(169.3055 + s) \\
-(21.03) \\
\dots \\
\dots
\end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} V(s) \\ C_A(s) \\ T(s) \\ T_j(s) \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 + \frac{(F_e - 40 + 48 Kr)}{s} \\ 0.245 + \frac{(5.14794 + 0.04167 F_e C_{Ae} - 0.00506 F_e)}{s} \\ 600 + \frac{(0.04167 F_e T_e - 4,229.808 - 12.384 F_e)}{s} \\ 594.6 + \frac{(6,869.3506 + 10,067.532 Kc)}{s} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para  $V(s)$ ,  $C_A(s)$ ,  $T(s)$  y  $T_j(s)$ , se tienen las siguientes funciones de transferencia:

$$\begin{aligned}
(48) \quad & S^3 + (8,806.8474 + 3.01888 F + 48 Kr) S^2 \\
& + (541.2618 F + 0.06918 F^2 + 16,937.616 Kc - 42,417.75 \\
& + 8,846.8474 Kr + 2.01888 F \cdot Kr) S + (837.31459 F \\
& - 18.71922 F^2 - 1.2208 F \cdot Kc + 0.07488 F^3 - 0.194.1876 \\
& + 7.42079 F^2 \cdot Kc - 11,824.432 Kc + 10,061.025 Kr \\
& - 754.75296 F \cdot Kr + 14,180.818 Kc \cdot Kr + 9.59424 F^2 \cdot Kr \\
& + 356.19792 F \cdot Kc \cdot Kr) S^{-1} + (40,164.104 - 1,782.2809 F \\
& - 0.0044 F^3 + 11.01915 F^2 + 709.06492 F \cdot Kc + 74.638 Kc \\
& + 356.05248 F \cdot Kr - 95,043.095 Kr + 0.02112 F^2 \cdot Kr \\
& + 16,937.616 Kc \cdot Kr)
\end{aligned}$$

$V(s) =$

---

$$\begin{aligned}
& S^4 + (184.80992 + 0.04206 F + Kr) S^3 + (184.80992 Kr \\
& + 0.04206 F \cdot Kr + 7.43651 F - 790.07697 + 0.00044 F^2 \\
& + 352.867 Kc) S^2 + (7.43651 F \cdot Kr - 790.07697 Kr \\
& + 0.00044 F^2 \cdot Kr + 352.867 Kc \cdot Kr + 7.42079 F \cdot Kc \\
& + 228.35469 - 15.72042 F + 295.6108 Kc + 0.07488 F^2) S \\
& + (228.35469 Kr - 15.72042 F \cdot Kr + 295.6108 Kc \cdot Kr \\
& + 0.07488 F^2 \cdot Kr + 7.42079 F \cdot Kc \cdot Kr)
\end{aligned}$$

(4.62)

$$\begin{aligned}
& (0.245) S^3 + (0.04997 F \cdot C_{A^*} + 0.00597 F \cdot + 0.245 Kr \\
& + 44.95048) S^2 + (8.87574 F \cdot C_{A^*} + 0.00005 F^2 \cdot C_{A^*} \\
& - 0.00019 F \cdot T + 0.00042 F^2 \cdot + 1.01669 F \cdot + 86.45241 Kc \\
& + 0.02108 F \cdot C_{A^*} Kr + 44.95048 Kr - 216.97177) S \\
& + (45.59217 F \cdot + 0.00620 F^2 \cdot T - 0.15179 F^2 \cdot C_{A^*} Kc \\
& + 0.44247 F^2 \cdot C_{A^*} + 0.09882 F^2 \cdot Kc + 0.00099 F^3 \cdot \\
& - 0.48829 F^2 \cdot - 0.0248 F \cdot T + 6.0602 F \cdot C_{A^*} Kc \\
& - 15.9 F \cdot C_{A^*} - 1.5528 F \cdot Kc + 169.79926 Kr + 184.9212 \\
& - 0.09077 F \cdot T Kr + 7.42099 F \cdot C_{A^*} Kc Kr - 0.0474 Kc Kr \\
& + 0.07492 F^2 \cdot C_{A^*} Kr - 18.70666 F \cdot C_{A^*} Kr \\
& + 0.07785 F \cdot Kc Kr + 0.0007 F^2 \cdot Kr + 18.19944 F \cdot Kr) S^{-1} \\
& + (1.86936 F \cdot Kc - 0.09091 F \cdot T - 7.284 F \cdot C_{A^*} Kc \\
& - 0.00964 F^2 \cdot C_{A^*} - 15.55106 F \cdot C_{A^*} + 0.01857 F^2 \cdot \\
& + 17.99472 F \cdot + 9.85854 F \cdot C_{A^*} Kr + 0.00044 F^2 \cdot C_{A^*} Kr \\
& - 216.97187 Kr - 0.00019 F \cdot T Kr + 0.00005 F^2 \cdot Kr \\
& + 1.02102 F \cdot Kr + 86.45241 Kc Kr - 0.0474 Kc \\
& + 14.70997 F \cdot C_{A^*} Kc - 1.78531 F \cdot Kc + 164.59966)
\end{aligned}$$

$C_A(S) =$

---


$$\begin{aligned}
& S^4 + (184.90992 + 0.04206 F \cdot + Kr) S^3 + (184.90992 Kr \\
& + 0.04206 F \cdot Kr + 7.49651 F \cdot - 790.07697 + 0.00044 F^2 \cdot \\
& + 852.867 Kc) S^2 + (7.49651 F \cdot Kr - 790.07697 Kr \\
& + 0.00044 F^2 \cdot Kr + 352.867 Kc Kr + 7.42079 F \cdot Kc \\
& + 228.95469 - 15.72402 F \cdot + 295.6108 Kc + 0.07488 F^2 \cdot) S \\
& + (228.95469 Kr - 15.72402 F \cdot Kr + 295.6108 Kc Kr \\
& + 0.07488 F^2 \cdot Kr + 7.42079 F \cdot Kc Kr)
\end{aligned}$$

(4.63)

$$\begin{aligned}
& (600) S^3 + (110,696.227 + 12.618 F_{\bullet} + 0.02109 F_{\bullet} T_{\bullet}) \\
& + 600 Kr) S^2 + (2,904.80296 F_{\bullet} + 14.09426 F_{\bullet} C_{A_0}) \\
& + 9.50539 F_{\bullet} T_{\bullet} - 429,514.7504 + 0.25821 F_{\bullet}^2 \\
& + 0.00001 F_{\bullet}^2 T_{\bullet} + 110,696.227 Kr + 12.618 F_{\bullet} Kr \\
& + 0.02109 F_{\bullet} T_{\bullet} Kr + 211,720.198 Kc) S + (20.59769 F_{\bullet}^2 \\
& - 1,064.94268 F_{\bullet} - 11,600.94877 F_{\bullet} Kr - 48.79089 F_{\bullet}^2 C_{A_0} \\
& + 1,051.6956 F_{\bullet} C_{A_0} + 2,986.21509 F_{\bullet} C_{A_0} Kr \\
& + 0.00021 F_{\bullet}^2 T_{\bullet} + 2.4896 F_{\bullet} T_{\bullet} + 2.0627 F_{\bullet} T_{\bullet} Kr \\
& - 15,178.5408 + 121,021.9415 Kr + 0.01861 F_{\bullet}^3 \\
& + 0.00017 F_{\bullet}^2 Kr - 0.00159 F_{\bullet}^3 T_{\bullet} + 0.07492 F_{\bullet}^2 T_{\bullet} Kr \\
& + 177,366.4565 Kc Kr + 4,452.4667 F_{\bullet} Kc Kr) S^{-1} \\
& + (2,997.74229 F_{\bullet} C_{A_0} - 12,966.05657 F_{\bullet} + 5.9091 F_{\bullet} T_{\bullet}) \\
& + 105,219.0375 + 49.80248 F_{\bullet}^2 + 0.00212 F_{\bullet}^2 T_{\bullet} \\
& + 2,912.80096 F_{\bullet} Kr - 0.28818 F_{\bullet}^2 C_{A_0} + 0.00549 F_{\bullet}^3 \\
& + 14.09426 F_{\bullet} C_{A_0} Kr + 9.57819 F_{\bullet} T_{\bullet} Kr - 429,421.8795 Kr \\
& + 0.00021 F_{\bullet}^2 Kr - 0.00001 F_{\bullet}^3 T_{\bullet} + 0.00044 F_{\bullet}^2 T_{\bullet} Kr \\
& + 177,366.4565 Kc + 4,452.4667 F_{\bullet} Kc + 211,720.198 Kc Kr)
\end{aligned}$$

T(s) =

---


$$\begin{aligned}
& S^4 + (184.90932 + 0.04206 F_{\bullet} Kr) S^3 + (184.90932 Kr \\
& + 0.04206 F_{\bullet} Kr + 7.48651 F_{\bullet} - 790.07697 + 0.00044 F_{\bullet}^2 \\
& + 352.867 Kc Kr) S^2 + (7.48651 F_{\bullet} Kr - 790.07697 Kr \\
& + 0.00044 F_{\bullet}^2 Kr + 352.867 Kc Kr + 7.42079 F_{\bullet} Kc \\
& + 228.85469 - 15.72042 F_{\bullet} + 295.6108 Kc + 0.07488 F_{\bullet}^2) S \\
& + (228.85469 Kr - 15.72042 F_{\bullet} Kr + 295.6108 Kc Kr \\
& + 0.07488 F_{\bullet}^2 Kr + 7.42079 F_{\bullet} Kc Kr)
\end{aligned}$$

(4.64)

$$\begin{aligned}
& (594.6) S^3 + (109,597.298 + 25.00888 F + 594.6 Kr) S^2 \\
& + (208,905.1089 Kc - 426,082.61 + 211.71834 F \cdot Kc \\
& + 2,449.29103 F + 9.28783 F \cdot T - 0.95263 F \cdot T \cdot Kc \\
& + 109,597.297 Kr + 25.00888 F \cdot Kr + 0.26162 F^2 \cdot S \\
& + (19.02106 F^2 - 2.04195 F^2 \cdot Kc + 0.00015 F^3 \cdot T \cdot Kc \\
& - 0.09104 F^3 \cdot Kc + 195.17952 F \cdot Kc + 0.84828 F^3 \\
& + 0.00005 F^2 \cdot T \cdot Kc - 0.00141 F^3 \cdot T + 0.00008 F^2 \cdot T \\
& - 1,818.96411 F + 4.89548 F^2 \cdot C_{A_0} \cdot Kc - 45.05575 F^2 \cdot C_{A_0} \\
& + 4,627.97749 F \cdot Kc \cdot Kr - 11,350.2781 F \cdot Kr - 12,165.052 \\
& - 0.0075 F^2 \cdot T \cdot Kc \cdot Kr + 4.42979 F^2 \cdot Kc \cdot Kr + 2.2528 F \cdot T \\
& + 177,907.144 Kc \cdot Kr - 0.20534 F \cdot T \cdot Kc \cdot Kr + 1,305.579 Kc \\
& + 121,022.49 Kr + 9.02295 F^2 \cdot Kr + 0.06093 F^2 \cdot T \cdot Kr \\
& + 2.75441 F \cdot T \cdot Kr - 296.48857 F \cdot C_{A_0} \cdot Kc \cdot Kr \\
& + 2,203.5404 F \cdot C_{A_0} \cdot Kr - 0.242 F \cdot T \cdot Kc \\
& + 1,802.29 F \cdot C_{A_0} - 199.4102 F \cdot C_{A_0} \cdot Kc) S^{-1} \\
& + (106,501.168 - 12,641.48366 F + 4,761.57774 F \cdot Kc \\
& + 178,925.598 Kc - 426,082.61 Kr + 5.44861 F \cdot T \\
& - 296.48857 F \cdot C_{A_0} \cdot Kc + 2,203.5404 F \cdot C_{A_0} + 84.07682 F^2 \\
& + 208,905.1089 Kc \cdot Kr + 0.10069 F^2 \cdot Kc + 0.0021 F^2 \cdot T \\
& + 2,449.29103 F \cdot Kr - 0.58414 F \cdot T \cdot Kc + 0.26162 F^2 \cdot Kr \\
& - 0.00028 F^2 \cdot T \cdot Kc + 211,71814 F \cdot Kc \cdot Kr \\
& + 9.28783 F \cdot T \cdot Kr - 0.95263 F \cdot T \cdot Kc \cdot Kr)
\end{aligned}$$

 $T_j(s) =$ 

$$\begin{aligned}
& S^4 + (184.80982 + 0.04206 F + Kr) S^3 + (184.80932 Kr \\
& + 0.04206 F \cdot Kr + 7.49651 F - 790.07697 + 0.00044 F^2 \\
& + 952.867 Kc \cdot Kr) S^2 + (7.49651 F \cdot Kr - 790.07697 Kr \\
& + 0.00044 F^2 \cdot Kr + 952.867 Kc \cdot Kr + 7.42079 F \cdot Kc \\
& + 228.95469 - 15.72402 F + 295.6108 Kc + 0.07488 F^2) S \\
& + (228.95469 Kr - 15.72402 F \cdot Kr + 295.6108 Kc \cdot Kr \\
& + 0.07488 F^2 \cdot Kr + 7.42079 F \cdot Kc \cdot Kr)
\end{aligned}$$

(4.65)

Expresando las funciones de transferencia anteriores en términos de constantes se tiene:

$$V(s) = \frac{V1}{P(s)} \quad (4.62)$$

$$C_A(s) = \frac{C1}{P(s)} \quad (4.63)$$

$$T(s) = \frac{T1}{P(s)} \quad (4.64)$$

$$T_j(s) = \frac{T2}{P(s)} \quad (4.65)$$

donde,  $P(s)$  es la ecuación característica del sistema y está representada por el denominador de las funciones de transferencia (polos del sistema), la cual puede ser representada por:

$$r^4 + b r^3 + c r^2 + d r + e = 0 \quad (4.66)$$

La solución de la ecuación (4.66) por el método de Ferrari<sup>(4)</sup> consta de los siguientes pasos;

- 1) Especificar los valores de las constantes  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$ , de acuerdo al polinomio  $P(s)$ .
- 2) Evaluar  $\eta$  de la ecuación:

$$\eta^3 - c\eta^2 + (bd - 4e)\eta - b^2e + 4ce - d^2 = 0$$

donde  $\eta$  es una raíz real.

3) Evaluar las constantes A y B, haciendo:

$$A_1 = \left[ \frac{1}{4} b^2 - c + \eta \right]^{1/2}$$

$$B_1 = \left[ -e + \frac{1}{4} \eta^2 \right]^{1/2}$$

si,

$$2 A_1 B_1 = (-d + \frac{1}{2} b \eta) \implies A = A_1 \text{ y } B = B_1$$

si,

$$2 A_1 B_1 = -(-d + \frac{1}{2} b \eta) \implies A = -A_1 \text{ y } B = B_1$$

4) Evaluar las raíces de las ecuaciones cuadráticas:

$$r^2 + (\frac{1}{2} b - A) r + (\frac{1}{2} \eta - B) = 0$$

$$r^2 + (\frac{1}{2} b + A) r + (\frac{1}{2} \eta + B) = 0$$

donde,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  y  $r_4$  son las raíces del sistema, las cuales indican la estabilidad o inestabilidad del sistema.

La representación de las variables de estado para el sistema en función del tiempo, a partir de las funciones de transferencia utilizando el método de fracciones parciales (Apéndice D), establece las funciones como:

$$V(t) = f(t, F_e, C_{Ae}, T_e \text{ y } Kr) \quad (4.67)$$

$$C_A(t) = f(t, F_e, C_{Ae} \text{ y } T_e) \quad (4.68)$$

$$T(t) = f(t, F_e, C_{Ae} \text{ y } T_e) \quad (4.69)$$

$$T_j(t) = f(t, F_e, C_{Ae}, T_e \text{ y } Kc) \quad (4.70)$$

Ver sección 4.1.7.

#### 4.1.7 DISEÑO DE LOS CONTROLADORES PARA RTAC.

Para el diseño de los controladores proporcionales del RTAC, se utilizó el método del lugar geométrico de las raíces (root locus), ajustando los controladores mediante un factor de amortiguamiento  $\zeta = 0.707$  obteniéndose los valores para las ganancias de  $K_c = 4$  y  $K_r = 10$ , como se observa en las figs. 4.3 y 4.4, respectivamente. El ajuste de los controladores se analizó conjuntamente con una simulación dinámica del sistema para comprobar la estabilidad y el comportamiento adecuado para el proceso. El diseño y elección de los controladores proporcionales se llevó a cabo debido a que la solución analítica se facilitaba para su análisis.

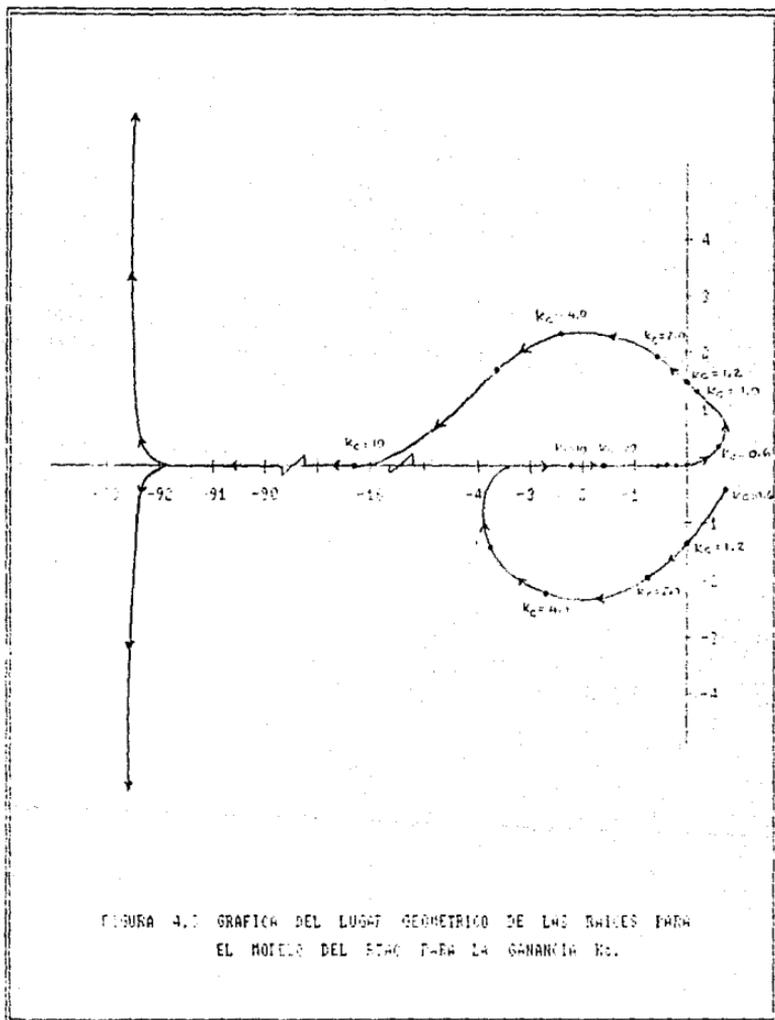


FIGURA 4.1. GRAFICA DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES PARA EL MODELO DEL BONO PARA LA GANANCIA  $K_c$ .

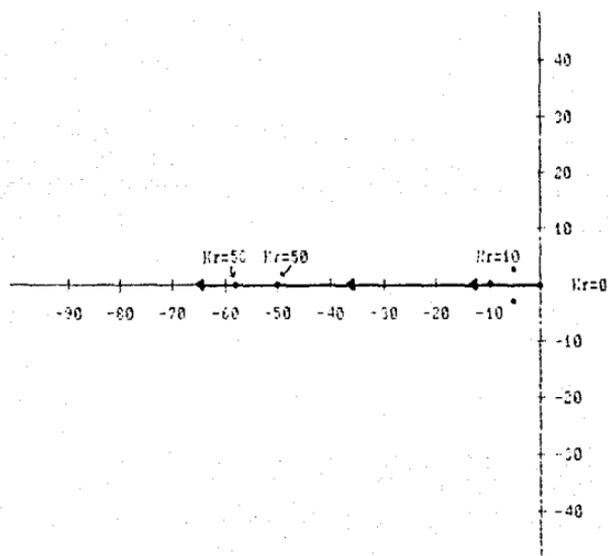


FIGURA 4.4 GRÁFICA DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES PARA EL MODELO DEL RTAC PARA LA GANANCIA  $K_r$ .

A. SOLUCION ANALITICA PARA EL MODELO GENERAL DEL RTAC  
CON CONTROL POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE.

La solución analítica, utilizando transformadas de Laplace, para el modelo del RTAC no isotérmico con condiciones particulares tabla 4.1, e introduciendo dos controladores proporcionales, el circuito con control se establece como:

Aplicando la técnica de linealización (Apéndice B) a las ecuaciones (4.5), (4.7), (4.17) y (4.19) para las variables de estado ( $V$ ,  $C_A$ ,  $T$ , y  $T_j$ ), e incluyendo las expresiones de los controladores para las variables a manipular (ecs. 4.52 y 4.53) se tiene:

Las condiciones a régimen permanente para el sistema con control son:

$$\bar{V} = 48 \text{ ft}^3$$

$$\bar{C}_A = 0.245 \text{ mol/ft}^3$$

$$\bar{T} = 600 \text{ }^\circ\text{R}$$

$$\bar{T}_j = 594.6 \text{ }^\circ\text{R}$$

así, se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = 480 - 10 V \quad (4.71)$$

$$\frac{dC_A}{dt} = 5.7766 - 0.0042 V - 1.6667 C_A - 0.0086 T \quad (4.72)$$

$$\frac{dT}{dt} = -3,846.856 + 3.6 V + 667.792 C_A - 14.752 T + 20.8 T_j \quad (4.73)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = 47,153.34 + 89.2251 T - 169.3289 T_j \quad (4.74)$$

donde las condiciones al tiempo = 0 son:

$$V(0) = 48 \text{ ft}^3$$

$$C_A(0) = 0.245 \text{ mol/ft}^3$$

$$T(0) = 600 \text{ }^\circ\text{R}$$

$$T_j(0) = 594.6 \text{ }^\circ\text{R}$$

Transformando estas ecuaciones al espacio de Laplace se tiene:

$$48 + \frac{480}{s} = (10 + s) V(s) \quad (4.75)$$

$$0.245 + \frac{5.7766}{s} = 0.0042 V(s) + (1.6667 + s) C_A(s) + 0.0086 T(s) \quad (4.76)$$

$$600 - \frac{3,846.856}{s} = -3.6 V(s) - 667.792 C_A(s) + (14.752 + s) T(s) - 20.8 T_j(s) \quad (4.77)$$

$$594.6 + \frac{47,153.34}{s} = -89.2251 T(s) + (169.3289 + s) T_j(s) \quad (4.78)$$

Arreglando el sistema de ecuaciones de la forma:

$$A x = b \quad (4.26)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} (10 + s) & 0 & 0 & 0 \\ 0.0042 & (1.6667 + s) & 0.0086 & 0 \\ -3.6 & -667.792 & (14.752 + s) & -20.8 \\ 0 & 0 & -89.2251 & (169.3289 + s) \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} V(s) \\ C_A(s) \\ T(s) \\ T_j(s) \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 + \frac{480}{s} \\ 0.245 + \frac{5.7766}{s} \\ 600 - \frac{3,846.856}{s} \\ 594.6 + \frac{47,153.34}{s} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para  $V(s)$ ,  $C_A(s)$ ,  $T(s)$  y  $T_j(s)$ , se tienen las siguientes funciones de transferencia:

$$V(s) = \frac{\left[ 48 s^3 + 9,395.8848 s^2 + 134,980.05 s + \frac{980,436.19}{s} + 556,255.65 \right]}{\left[ s^4 + 195.7476 s^3 + 2,812.0844 s^2 + 11,588.659 s + 20,425.754 \right]} \quad (4.79)$$

$$C_A(s) = \frac{\left[ 0.245 s^3 + 47.9648 s^2 + 690.3054 s + \frac{4,675.924}{s} + 2,18.9471 \right]}{\left[ s^4 + 195.7476 s^3 + 2,812.0844 s^2 + 11,588.659 s + 20,425.754 \right]} \quad (4.80)$$

$$T(s) = \frac{\left[ 600 s^3 + 117,445.59 s^2 + 1,691,413.5 s + \frac{12,332,884.0}{s} + 7,002,863.9 \right]}{\left[ s^4 + 195.7476 s^3 + 2,812.0844 s^2 + 11,588.659 s + 20,425.754 \right]} \quad (4.81)$$

$$T_j(s) = \frac{\left[ 594.6 s^3 + 116,617.26 s^2 + 1,677,766.4 s + \frac{12,213,189.18}{s} + 6,931,837.067 \right]}{\left[ s^4 + 195.7476 s^3 + 2,812.0844 s^2 + 11,588.659 s + 20,425.754 \right]} \quad (4.82)$$

donde la ecuación característica del sistema es:

$$s^4 + 195.7476 s^3 + 2,812.0844 s^2 + 11,588.659 s + 20,425.754$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = -10.0$$

$$r_2 = -180.5222$$

$$r_3 = -2.6127 + 2.1186 i$$

$$r_4 = -2.6127 - 2.1186 i$$

Antitransformando al dominio del tiempo, utilizando el método de fracciones parciales (Apéndice A) en las funciones de transferencia anteriores, se obtiene la respuesta particular del sistema (gráficas 4.5 y 4.6, ver resultados) para las variables de estado y cuyas expresiones son:

$$V(t) = 48.0005 + 1.0922 e^{-10 t} - 1.0835 e^{-180.5222 t} + 0.0003 e^{-2.6127 t} \left[ \cos(2.1186 t) - 10.8333 \operatorname{sen}(2.1186 t) \right] \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
 C_A(t) = & 0.2289 - 2.1775t^{-5} e^{(-10 t)} + 8.2602t^{-6} e^{(-180.5222 t)} \\
 & + 0.0161 e^{(-2.6127 t)} [ \cos (2.1186 t) \\
 & + 5.7081 \operatorname{sen} (2.1186 t) ] \quad (4.84)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(t) = & 603.797 - 4.9647t^{-5} e^{(-10 t)} + 0.1479 e^{(-180.5222 t)} \\
 & - 3.9357 e^{(-2.6127 t)} [ \cos (2.1186 t) \\
 & - 0.7952 \operatorname{sen} (2.1186 t) ] \quad (4.85)
 \end{aligned}$$

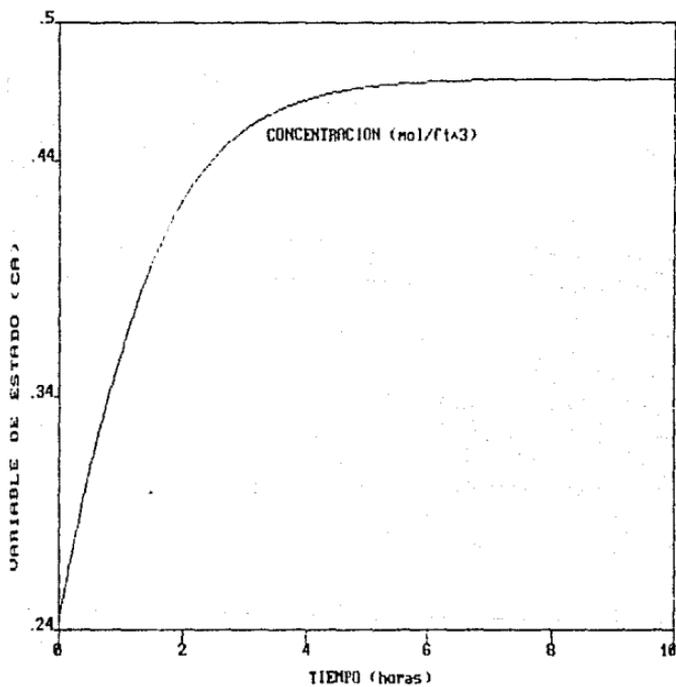
$$\begin{aligned}
 T_j(t) = & 597.937 - 0.002 e^{(-10 t)} - 1.1798 e^{(-180.5222 t)} \\
 & - 2.1461 e^{(-2.6127 t)} [ \cos (2.1186 t) \\
 & - 0.6935 \operatorname{sen} (2.1186 t) ] \quad (4.86)
 \end{aligned}$$

## 4.2 RESULTADOS.

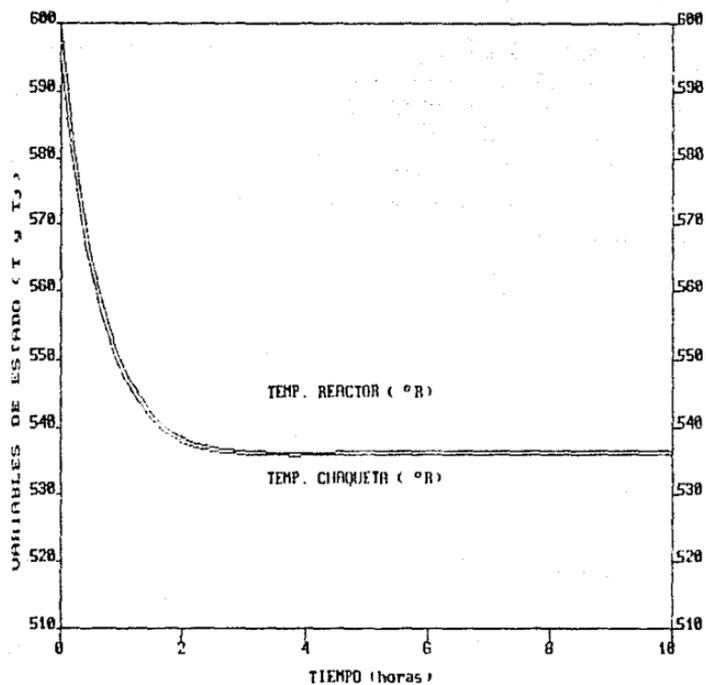
La solución analítica para el modelo del RTAC no isotérmico para un sistema sin control utilizando transformadas de Laplace y el modelo de variable de estado, así como la solución para un sistema con control estructurado para modos de control proporcionales se muestran en las gráficas 4.1 a 4.6.

El diseño para los diferentes tipos de controladores P, PI, PD y PID, se llevó a cabo mediante la simulación dinámica del sistema, ajustando los valores para las ganancias, los tiempos integrales y los tiempos derivados más adecuados para la estabilidad y operación normal del sistema. El ajuste para cada tipo de controlador se muestra en las gráficas 4.7 a 4.30, en las cuales se observa el comportamiento para cada una de las variables a controlar en el sistema y donde las unidades para las variables de perturbación son:  $F_e = \text{ft}^3/\text{hr}$ ,  $C_{Ae} = \text{mol}/\text{ft}^3$  y  $T_e = ^\circ\text{R}$ .

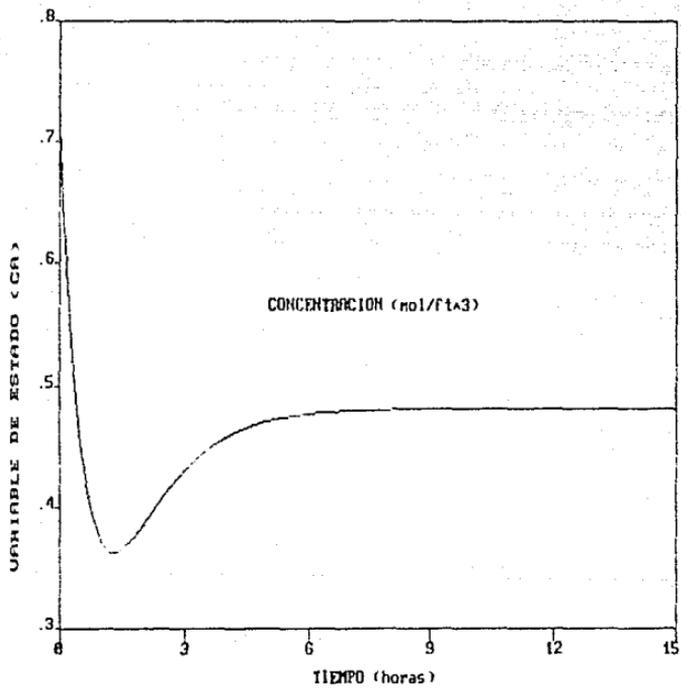
GRAFICA 4.1 RTAC SIN CONTROL EN EL ESPACIO  
DE LAPLACE



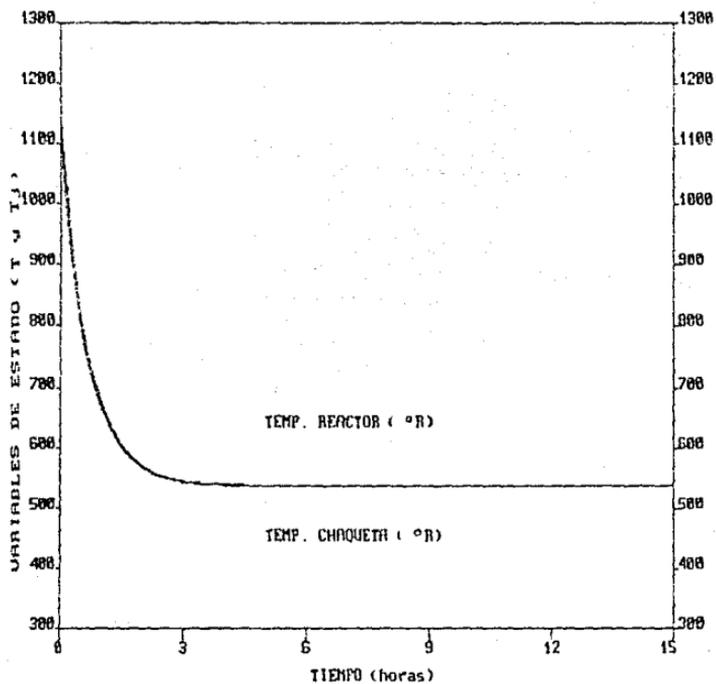
GRAFICA 4.2 RTAC SIN CONTROL EN EL ESPACIO  
DE LAPLACE



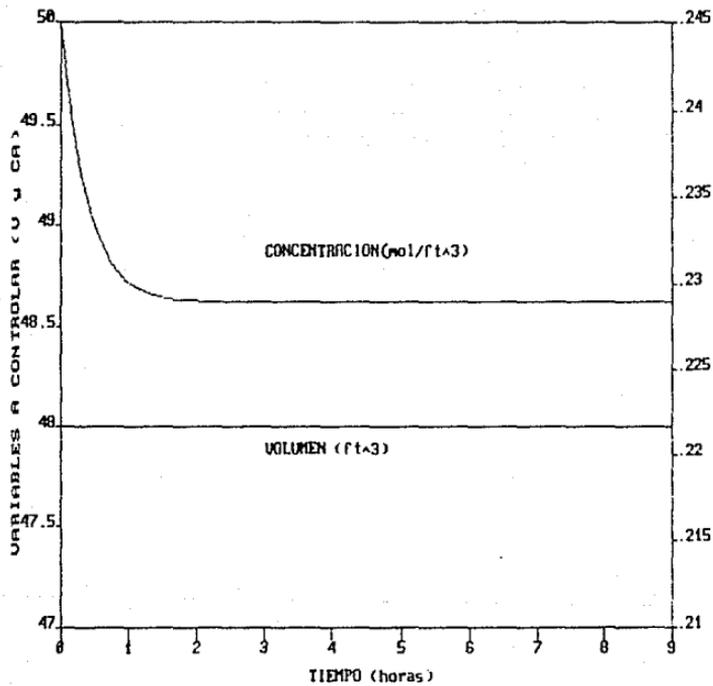
GRAFICA 4.3 ETAC SIN CONTROL EN VARIABLE  
DE ESTADO



GRAFICA 4.4 RTAC SIN CONTROL EN VARIABLE  
DE ESTADO



GRAFICA 4.5 RTAC CON CONTROL EN EL ESPACIO  
DE LAPLACE



GRAFICA 4.6 RIAC CON CONTROL EN EL ESPACIO DE LAPLACE

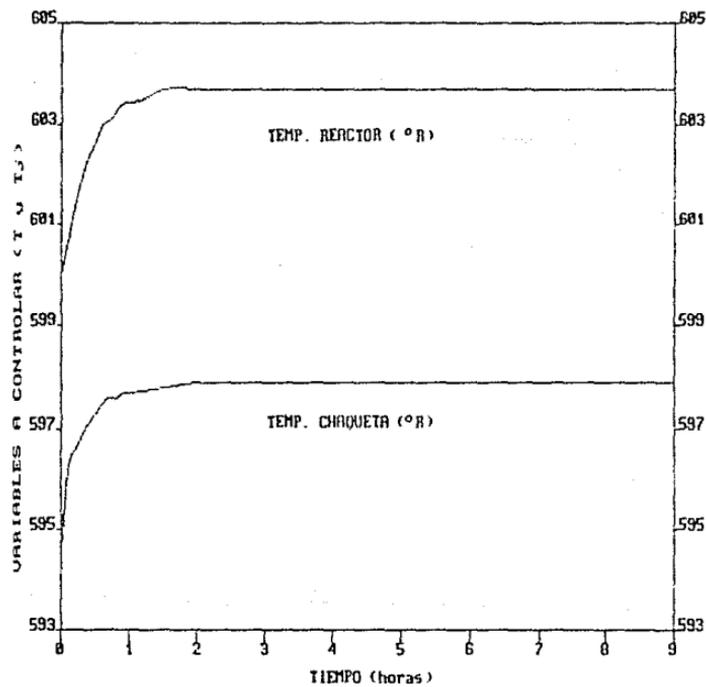
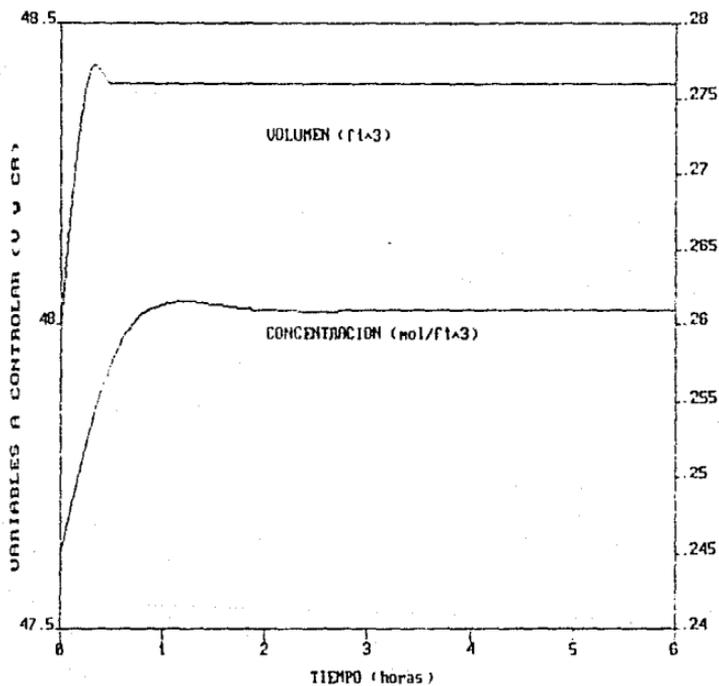


TABLE 4.2

CONTROLADORES PROPORCIONALES

TIEMPO	CO=	TO=	FJ0=	KC1=	FD=	KC2=	TJ=	TJC=	FJ
	15000	500.00	49.90	10.00	44.00	4.00	00	530.00	
	C	T	V	V	F	TJ	OC		FJ
.00	.2450	600.0	48.0	44.0	594.6	202874.0			49.9
.25	.2522	598.0	48.4	44.7	593.9	177048.0			44.7
.50	.2575	598.0	48.4	44.0	594.0	160775.5			45.2
.75	.2600	599.0	48.4	44.0	594.3	148703.9			47.1
1.00	.2610	599.0	48.4	44.0	594.5	139325.5			48.6
1.25	.2615	599.0	48.4	44.0	594.5	132124.9			49.4
1.50	.2615	600.0	48.4	44.0	594.6	126676.7			49.8
1.75	.2611	600.0	48.4	44.0	594.6	122081.1			49.9
2.00	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200814.1			49.8
2.25	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200580.6			49.8
2.50	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200402.1			49.8
2.75	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
3.00	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
3.25	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
3.50	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
3.75	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
4.00	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
4.25	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
4.50	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
4.75	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
5.00	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
5.25	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
5.50	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
5.75	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7
6.00	.2609	600.0	48.4	44.0	594.6	200308.2			49.7

GRAFICA 4.7 ETAC CON CONTROLADORES PROPORCIONALES  
FRENTE A UNA PERTURBACION  $F_{e4}=44$ , CON  $K_r=10$   
Y  $K_c=4$



GRAFICA 4.8 RTAC CON CONTROLADORES PROPORCIONALES  
PARA UNA PERTURBACION  $F=44$ , CON  $K_r=10$   
Y  $K_c=4$

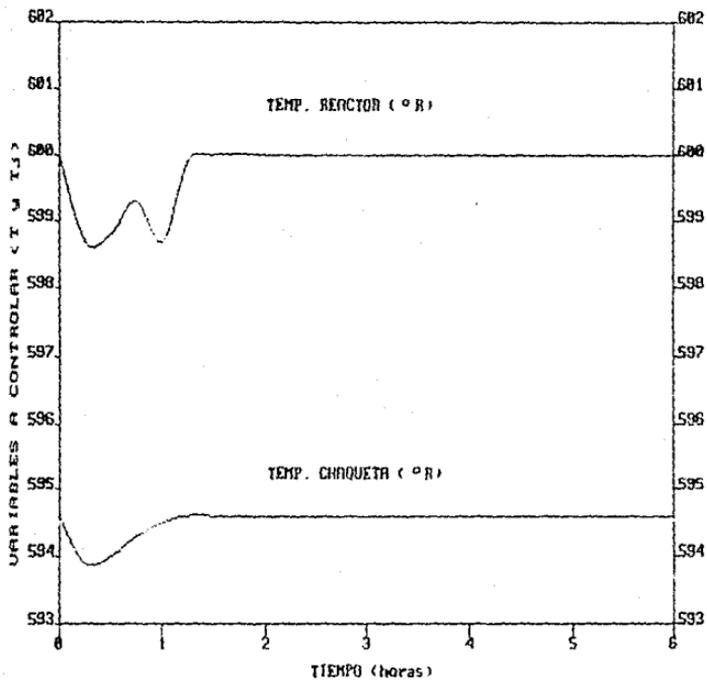
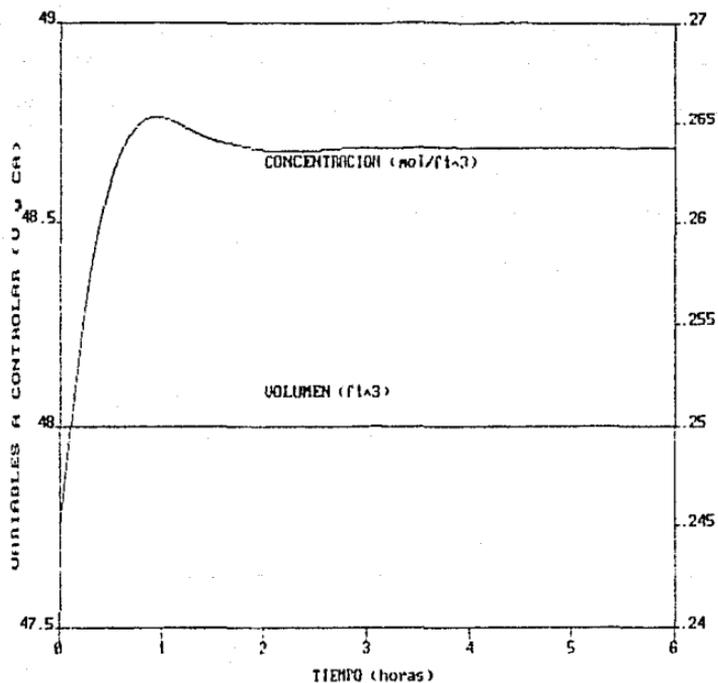


TABLA 4.3

CONTROLADORES PROPORCIONALES

CO=	.5500	TO=	530.00	FO=	40.00	TJO=	530.00
FJO=	49.90	XFC1=	10.00	XFC2=	4.00		
TIEMPO	C	T	V	F	TJ	OC	FJ
1.00	.2450	600.0	48.0	40.0	594.6	202874.0	49.9
1.25	.2550	599.7	48.0	40.0	594.5	195394.1	49.8
1.50	.2622	600.4	48.0	40.0	594.8	200859.3	51.6
1.75	.2646	601.2	48.0	40.0	595.3	223265.1	54.6
1.00	.2650	601.8	48.0	40.0	595.5	232011.7	56.9
1.25	.2647	602.0	48.0	40.0	595.7	237062.1	57.9
1.50	.2641	602.0	48.0	40.0	595.7	237874.6	58.1
1.75	.2638	602.0	48.0	40.0	595.7	237233.7	57.9
2.00	.2634	602.0	48.0	40.0	595.7	236398.3	57.8
2.25	.2634	601.9	48.0	40.0	595.6	235058.2	57.6
2.50	.2636	601.9	48.0	40.0	595.6	235604.1	57.6
2.75	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235585.8	57.6
3.00	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235585.8	57.6
3.25	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235599.5	57.6
3.50	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235622.4	57.6
3.75	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
4.00	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
4.25	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
4.50	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
4.75	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
5.00	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
5.25	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
5.50	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
5.75	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6
6.00	.2637	601.9	48.0	40.0	595.6	235631.6	57.6

GRAFICA 4.º RTAC CON CONTROLADORES PROPORCIONALES  
 PARA UNA PERTURBACION  $K_e=0.55$ , CON  $K_r=10$   
 Y  $K_c=4$



GRAFICA 4.10 PIAC CON CONTROLADORES PROPORCIONALES  
PARA UNA PERTURBACION  $CAE=0.55$ , CON  $Kr=10$   
Y  $Kc=4$

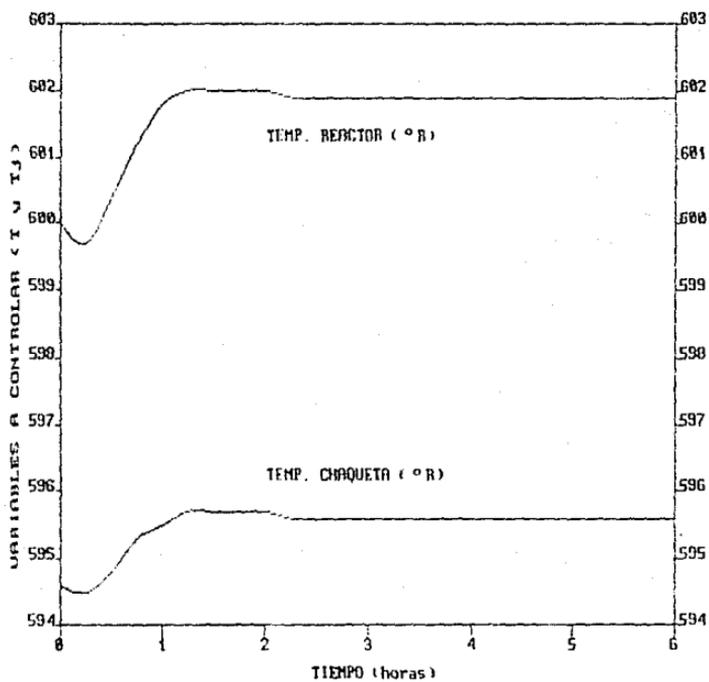
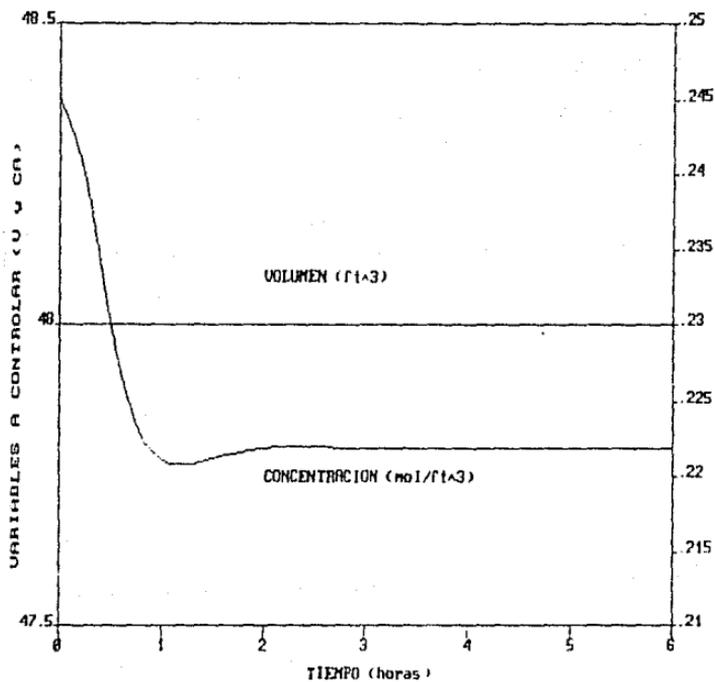


TABLE 4.4

CONTROLADORES PROPORCIONALES

TIEMPO	C	T	M	F	TJ	OC	FJ
0.00	.2450	605.0	48.0	40.0	594.6	202874.0	49.9
0.25	.2399	605.0	48.0	40.0	597.6	209478.0	73.1
0.50	.2300	607.3	48.0	40.0	598.3	227022.0	79.1
0.75	.2235	606.0	48.0	40.0	598.1	236639.6	77.1
1.00	.2211	606.0	48.0	40.0	597.7	241055.0	75.8
1.25	.2208	605.5	48.0	40.0	597.4	241991.2	71.9
1.50	.2212	605.3	48.0	40.0	597.4	240823.6	71.2
1.75	.2216	605.3	48.0	40.0	597.3	238613.0	71.1
2.00	.2219	605.3	48.0	40.0	597.4	239256.1	71.2
2.25	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	239007.0	71.4
2.50	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240109.9	71.4
2.75	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
3.00	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
3.25	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
3.50	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
3.75	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
4.00	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
4.25	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
4.50	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
4.75	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
5.00	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
5.25	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
5.50	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
5.75	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5
6.00	.2219	605.4	48.0	40.0	597.4	240187.7	71.5

GRÁFICA 4.11 RTAC CON CONTROLADORES PROPORCIONALES  
 PARA UNA PERTURBACION  $T_e=503$ , CON  $K_r=10$   
 Y  $K_c=4$



GRAFICA 4.12 RTAC CON CONTROLADORES PROPORCIONALES  
PARA UNA PERTURBACION  $T_e=593$ , CON  $K_r=10$   
Y  $K_c=4$

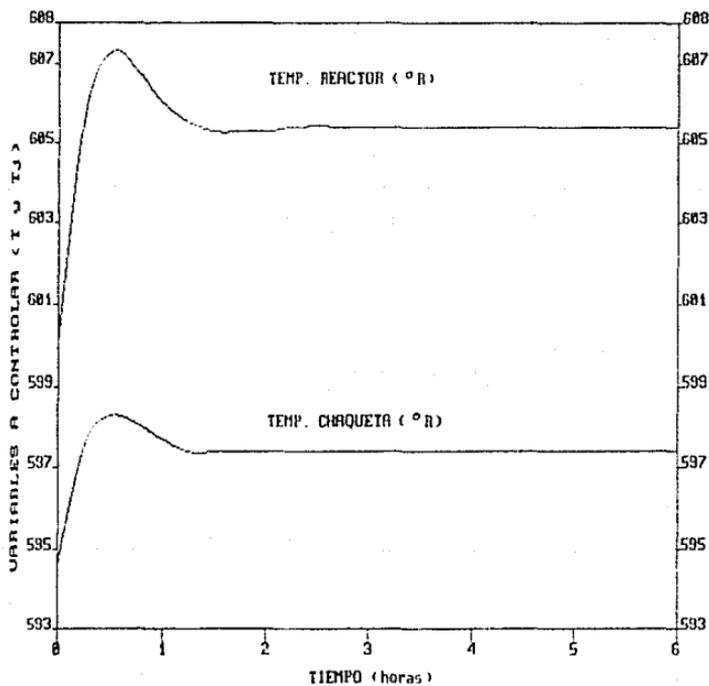
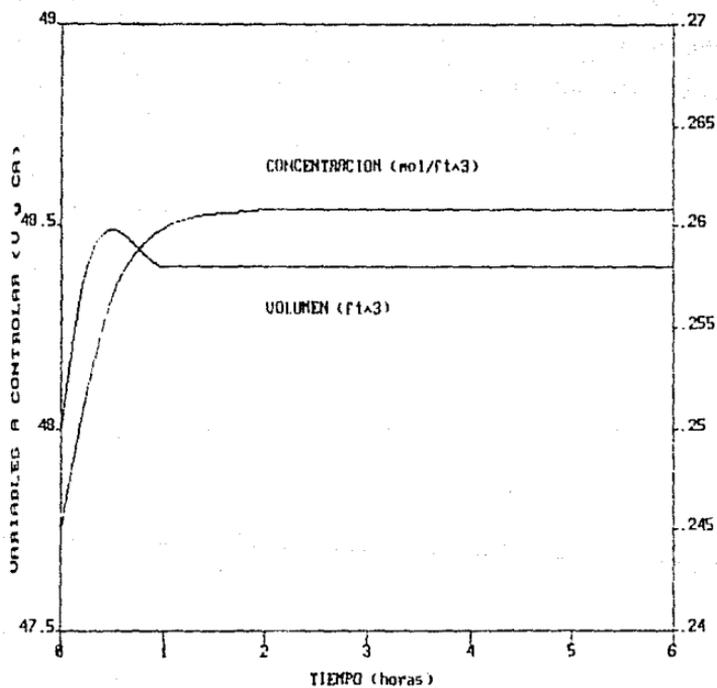


TABLA 4.5

CONTROLADORES PD							
CO=	.5000	TO=	530.00	FO=	44.00	TJU=	530.00
FJO=	49.90	KFC1=	10.00	KFC2=	6.00	TAUD1=	.80
TAUD2=	.20						
TIEMPO	C	T	V	F	TJ	QC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	40.0	594.6	202874.0	49.9
.25	.2519	599.1	48.4	42.7	594.3	179230.5	44.7
.50	.2563	599.4	48.4	44.0	594.4	186293.8	46.4
.75	.2586	599.7	48.4	44.0	594.5	192782.6	47.9
1.00	.2598	599.8	48.4	44.0	594.6	198646.1	48.8
1.25	.2603	599.9	48.4	44.0	594.6	198596.2	49.3
1.50	.2606	599.9	48.4	44.0	594.6	199548.3	49.5
1.75	.2607	600.0	48.4	44.0	594.6	199789.9	49.6
2.00	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200196.1	49.7
2.25	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200251.0	49.7
2.50	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200278.5	49.7
2.75	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200292.2	49.7
3.00	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
3.25	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
3.50	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
3.75	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
4.00	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
4.25	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
4.50	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
4.75	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
5.00	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
5.25	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
5.50	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
5.75	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7
6.00	.2608	600.0	48.4	44.0	594.6	200303.7	49.7

GRAFICA 4.13 ETAC CON CONTROLADORES PD PARA UNA  
 PERTURBACION  $F_{e2}=44$ , CON  $N_r=10$ ,  $N_c=6$ ,  
 $\tau_r=0.3$  Y  $\tau_c=0.2$



GRAFICA 4.14 RTAC CON CONTROLADORES PD PARA UNA  
 PERTURBACION  $F=44$ , CON  $K_i=10$ ,  $K_c=6$ ,  
 $\tau_i=0.8$  Y  $\tau_{bc}=0.2$

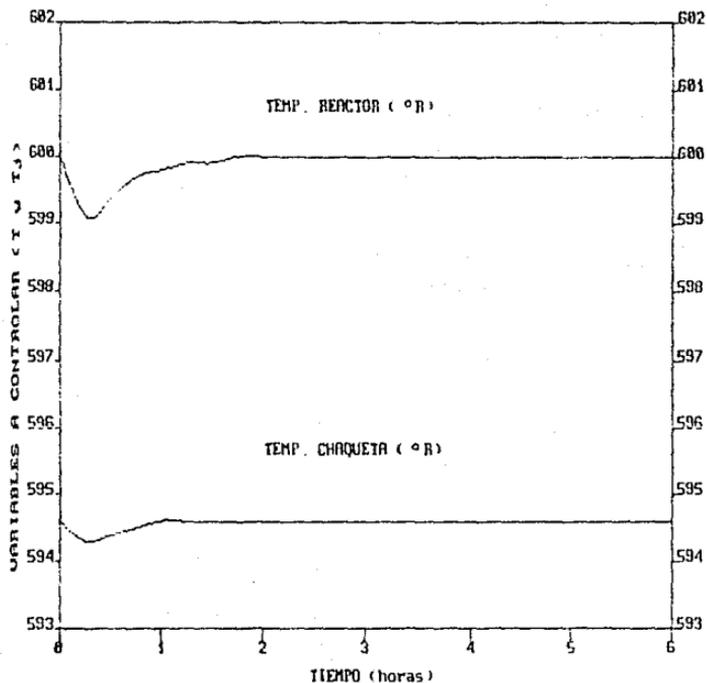


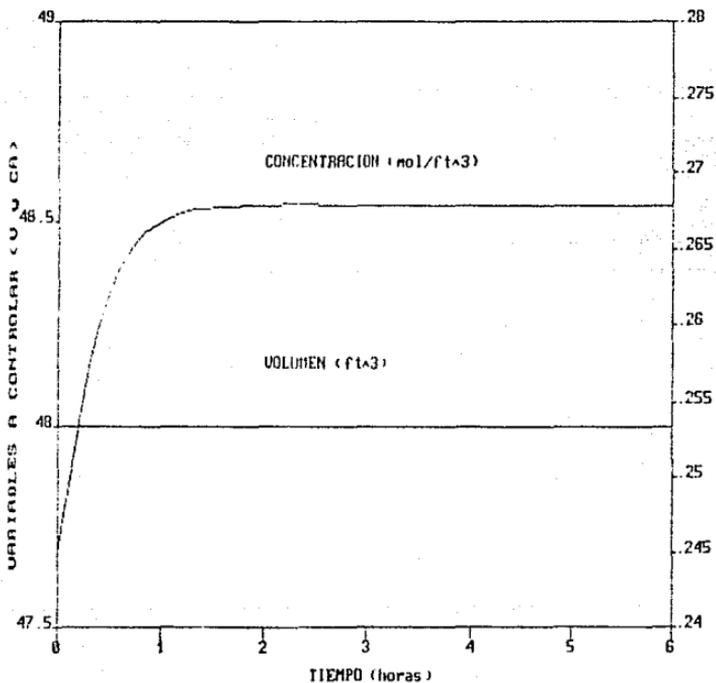
TABLE 4.6

CONTROLADORES PD

TIEMPO	C	T	V	F	TJ	DC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	40.0	594.6	202874.0	49.9
.25	.2556	599.8	48.0	40.0	594.6	198020.1	48.9
.50	.2617	600.4	48.0	40.0	594.8	210656.0	52.1
.75	.2651	600.8	48.0	40.0	594.9	220980.8	54.6
1.00	.2666	601.0	48.0	40.0	595.0	226776.4	56.0
1.25	.2673	601.1	48.0	40.0	595.0	229628.0	56.7
1.50	.2676	601.2	48.0	40.0	595.0	230928.0	57.0
1.75	.2677	601.2	48.0	40.0	595.0	231488.8	57.1
2.00	.2677	601.2	48.0	40.0	595.0	231736.0	57.2
2.25	.2677	601.2	48.0	40.0	595.0	231781.6	57.2
2.50	.2677	601.2	48.0	40.0	595.0	231807.0	57.2
2.75	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231818.4	57.2
3.00	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
3.25	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
3.50	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
3.75	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
4.00	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
4.25	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
4.50	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
4.75	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
5.00	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
5.25	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
5.50	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
5.75	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2
6.00	.2678	601.2	48.0	40.0	595.0	231823.0	57.2

GRAFICA 4.15 RTAC CON CONTROLADORES PD PARA UNA  
 PERTURBACION CAE=0.55, CON Kr=10, Kc=6.

$$\tau_{Dr} = 0.8 \text{ y } \tau_{Dc} = 0.2$$



GRAFICA 4.16 RTAC CON CONTROLADORES PD PARA UNA  
PERTURBACION  $C_{Ae}=0.55$ , CON  $K_r=10$ ,  $K_c=6$ ,

$$\tau_{Dr} = 0.8 \text{ y } \tau_{Dc} = 0.2$$

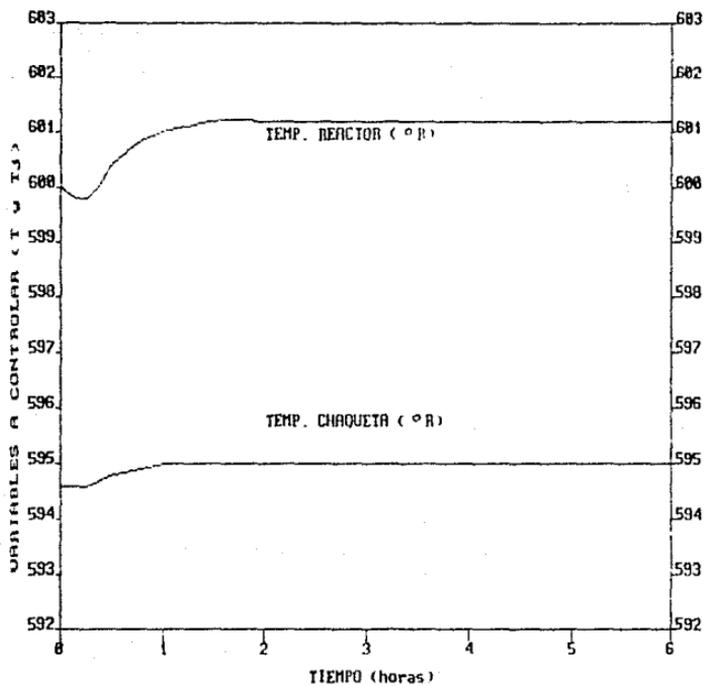
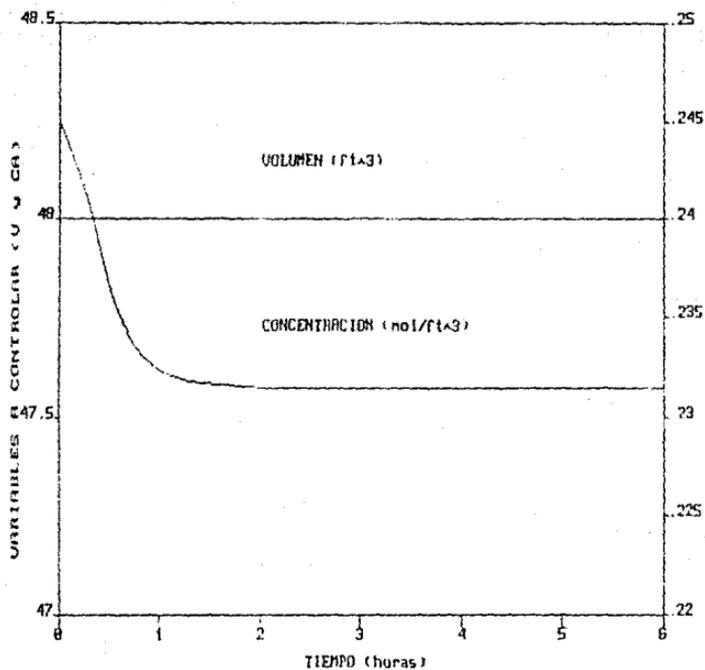


TABLA 4.7

CONTROLADORES PD		FO=	583.00	FO=	40.00	TJO=	530.00
CO=	.5000	XFC1=	10.00	XFC2=	6.00	TAUD1=	.80
FJO=	49.90						
TAUD2=	.20						
TIEMPO	C	T	V	F	TJ	GC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	40.0	595.6	203874.0	49.9
.25	.2415	604.0	48.0	40.0	595.9	203689.6	73.9
.50	.2365	604.2	48.0	40.0	596.0	203532.7	75.1
.75	.2337	603.9	48.0	40.0	595.9	201116.9	75.0
1.00	.2324	603.7	48.0	40.0	595.8	200003.7	72.0
1.25	.2318	603.6	48.0	40.0	595.8	200488.3	71.6
1.50	.2316	603.6	48.0	40.0	595.8	201371.4	71.0
1.75	.2315	603.5	48.0	40.0	595.8	201909.0	71.2
2.00	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201689.3	71.2
2.25	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201638.9	71.1
2.50	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201613.8	71.1
2.75	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201600.0	71.1
3.00	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
3.25	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
3.50	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
3.75	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
4.00	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
4.25	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
4.50	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
4.75	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
5.00	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
5.25	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
5.50	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
5.75	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1
6.00	.2314	603.5	48.0	40.0	595.8	201595.5	71.1

GRAFICA 4.17 RTAC CON CONTROLADORES PD PARA UNA  
 PERTURBACION  $T=583$ , CON  $Kr=10$ ,  $Kc=6$ ,

$$\tau_r = 0.8 \text{ Y } \tau_c = 0.2$$



GRAFICA 4.10 RTAC CON CONTROLADORES PD PARA UNA  
 PERTURBACION  $T_e=593$ , CON  $K_r=10$ ,  $K_c=6$ ,

$$\tau_{Dr} = 0.8 \quad \text{Y} \quad \tau_{Dc} = 0.2$$

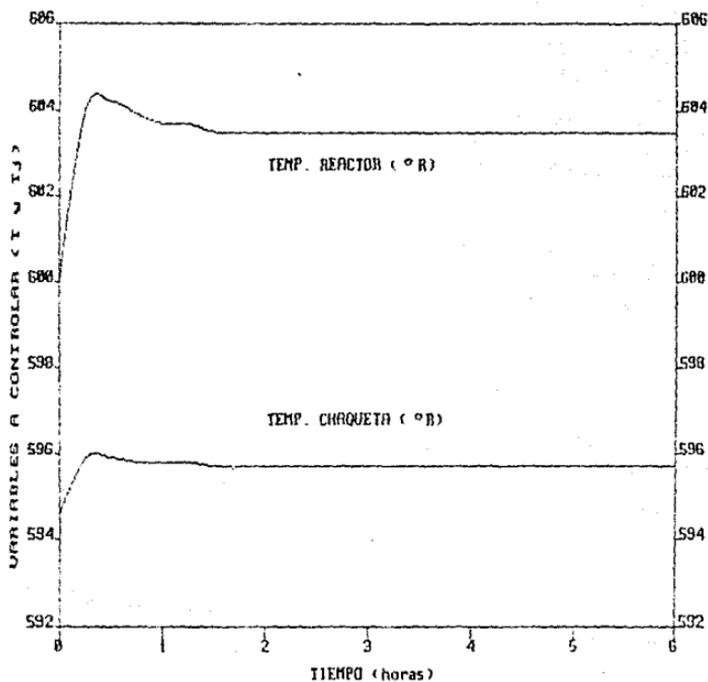


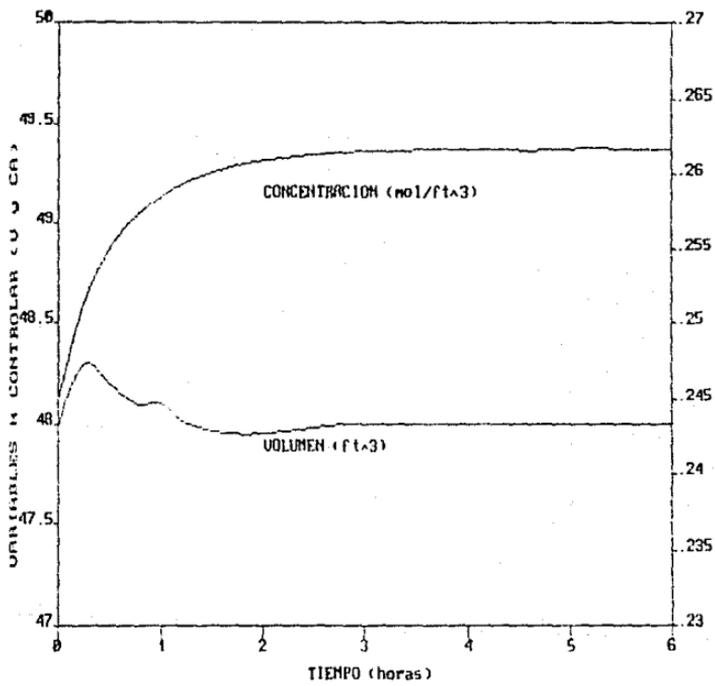
TABLE 4.8

CONTROLADORES PI							
CO=	.5000	TO=	530.00	FO=	44.00	TJO=	530.00
FJO=	49.90	XIC1=	10.00	XIC2=	10.00	TAU11=	.50
TAU12=	.50						
TIEMPO	C	T	V	F	TJ	GC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	44.0	594.8	202874.0	49.9
.25	.2514	600.0	48.3	44.2	594.8	182313.5	49.1
.50	.2550	600.0	48.2	44.4	594.7	191182.7	47.3
.75	.2572	600.0	48.1	44.3	594.9	194913.5	48.2
1.00	.2585	600.0	48.1	44.2	594.8	196588.9	48.7
1.25	.2595	600.0	48.0	44.1	594.8	197481.5	48.9
1.50	.2601	600.0	48.0	44.0	594.8	198021.7	49.0
1.75	.2606	600.0	48.0	44.0	594.7	198365.0	49.2
2.00	.2609	600.0	48.0	44.0	594.7	198526.2	49.2
2.25	.2611	600.0	48.0	44.0	594.7	198730.1	49.3
2.50	.2613	600.0	48.0	44.0	594.7	198876.8	49.3
2.75	.2614	600.0	48.0	44.0	594.7	198990.3	49.3
3.00	.2615	600.0	48.0	44.0	594.7	199046.4	49.3
3.25	.2615	600.0	48.0	44.0	594.7	199087.6	49.3
3.50	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	199015.0	49.3
3.75	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	199035.6	49.4
4.00	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	199047.1	49.4
4.25	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	199058.3	49.4
4.50	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	199065.4	49.4
4.75	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	199067.7	49.4
5.00	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	199072.3	49.4
5.25	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	199076.8	49.4
5.50	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	199079.1	49.4
5.75	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	199076.8	49.4
6.00	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	199074.5	49.4

GRAFICA 4.19 RTAC CON CONTROLADORES PI PARA UNA  
 PERTURBACION  $F_0=44$ , CON  $K_r=10$ ,  $K_c=10$ ,

$$\tau_r = 0.5 \quad \tau_c = 0.5$$

$$I_r \quad I_c$$



GRAFICA 4.20 ETAC CON CONTROLADORES PI PARA UNA  
 PERTURBACION  $F_c=44$ , CON  $K_r=10$ ,  $K_c=10$ ,  
 $\tau_c=0.5$  Y  $\tau_c=0.5$

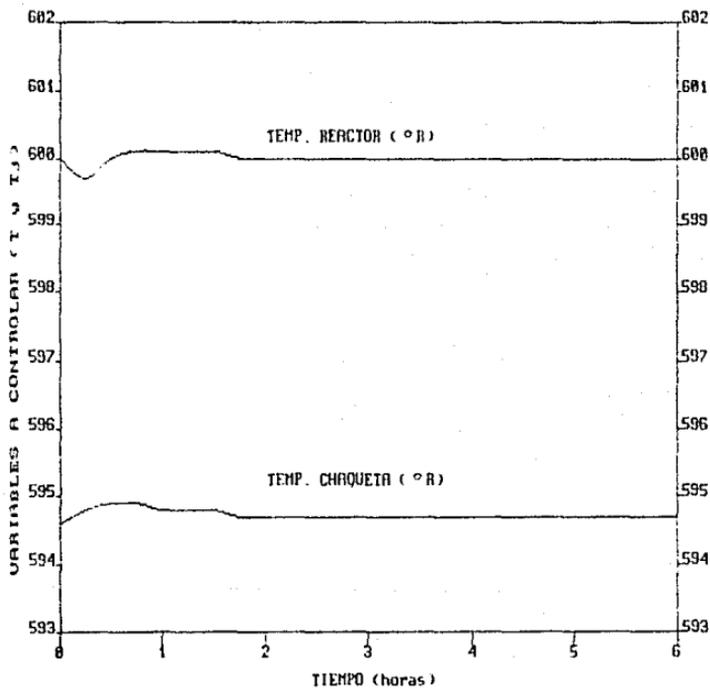


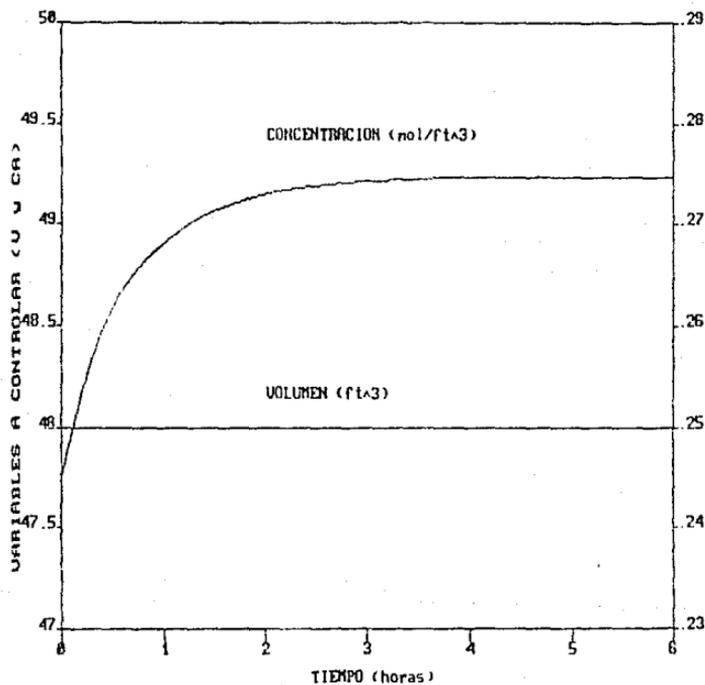
TABLA 4.9

CONTROLADORES PI

CONTROLADORES PI		TD=	520.00	FD=	40.00	TJO=	530.00
CO=	.5500	XFC1=	10.00	XFC2=	10.00	TAU11=	.50
FJO=	49.90						
TAU12=	.50						
TIEMPO	C	T	V	F	TJ	OC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	40.0	594.6	202874.0	49.9
.25	.2554	600.0	48.0	40.0	594.7	179383.5	49.4
.50	.2617	600.3	48.0	40.0	594.6	211935.4	52.7
.75	.2656	600.3	48.0	40.0	594.5	217072.6	54.2
1.00	.2682	600.2	48.0	40.0	594.3	220662.7	55.0
1.25	.2701	600.2	48.0	40.0	594.2	222212.2	55.5
1.50	.2714	600.1	48.0	40.0	594.2	223143.0	55.6
1.75	.2723	600.1	48.0	40.0	594.1	223777.0	56.0
2.00	.2730	600.1	48.0	40.0	594.1	224210.4	56.1
2.25	.2735	600.0	48.0	40.0	594.1	224482.7	56.2
2.50	.2738	600.0	48.0	40.0	594.0	224755.1	56.3
2.75	.2741	600.0	48.0	40.0	594.0	224913.0	56.4
3.00	.2743	600.0	48.0	40.0	594.0	224993.1	56.4
3.25	.2744	600.0	48.0	40.0	594.0	225098.4	56.4
3.50	.2745	600.0	48.0	40.0	594.0	225169.4	56.4
3.75	.2746	600.0	48.0	40.0	594.0	225217.4	56.5
4.00	.2746	600.0	48.0	40.0	594.0	225254.1	56.5
4.25	.2746	600.0	48.0	40.0	594.0	225279.2	56.5
4.50	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225297.5	56.5
4.75	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225311.3	56.5
5.00	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225320.4	56.5
5.25	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225327.3	56.5
5.50	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225331.9	56.5
5.75	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225334.2	56.5
6.00	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225338.8	56.5

GRAFICA 4.21 PTWC CON CONTROLADORES PI PARA UNA  
 PERTURBACION (Ae=0.55, CON Kr=10, Kc=10,

$$\tau_r = 0.5 \text{ Y } \tau_c = 0.5$$



GRAFICA 4.22 FIC CON CONTROLADORES PI PARA UNA  
PERTURBACION CAE=0,55, CON Kr=10, Kc=10,

$\tau = 0,5$  Y  $\tau_c = 0,5$   
 $t_r$   $t_c$

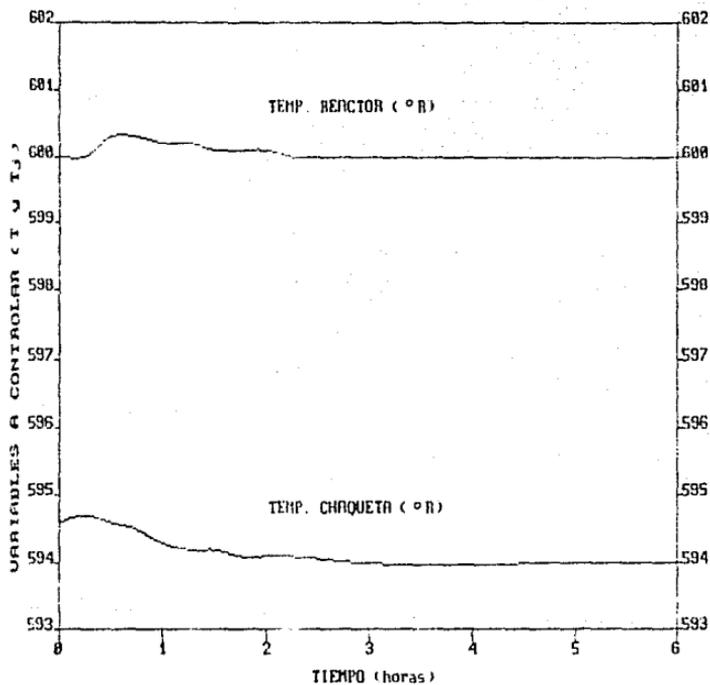
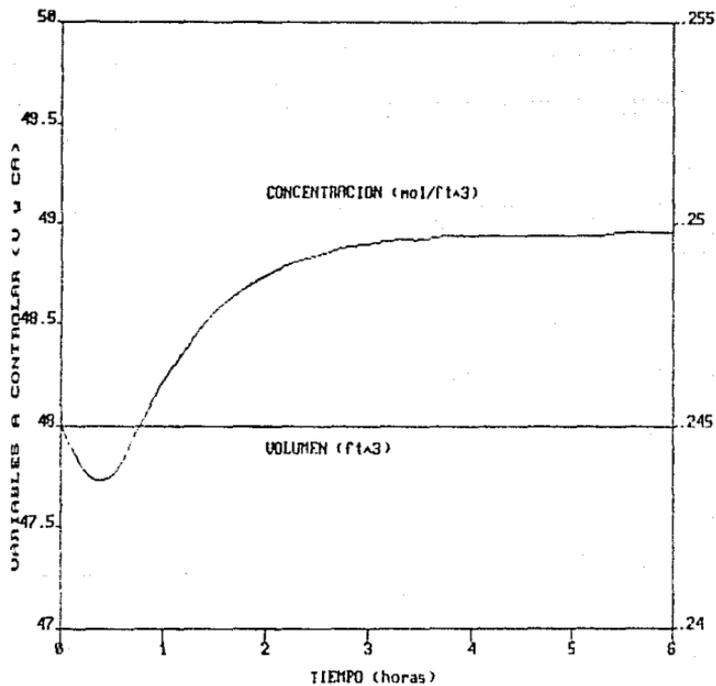


TABLA 4.10

CONTROLADORES PI							
CO=	.5000	T0=	500.00	FO=	40.00	TJO=	500.00
FJO=	49.90	XIC1=	10.00	XIC2=	10.00	TAU11=	.50
TAU12=	.50						
TIEMPO	C	T	V	F	TJ	QC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	40.0	594.6	202874.0	49.9
.25	.2438	601.6	48.0	40.0	593.8	202533.9	73.7
.50	.2438	600.8	48.0	40.0	593.3	200277.3	71.1
.75	.2449	600.4	48.0	40.0	593.1	274848.2	70.0
1.00	.2461	600.2	48.0	40.0	592.9	272477.2	69.7
1.25	.2470	600.1	48.0	40.0	592.8	273385.6	69.8
1.50	.2478	600.1	48.0	40.0	592.8	273628.3	69.9
1.75	.2483	600.1	48.0	40.0	592.8	273921.2	70.0
2.00	.2487	600.0	48.0	40.0	592.7	274120.3	70.1
2.25	.2490	600.0	48.0	40.0	592.7	274346.1	70.2
2.50	.2492	600.0	48.0	40.0	592.7	274429.3	70.2
2.75	.2494	600.0	48.0	40.0	592.7	274525.4	70.2
3.00	.2495	600.0	48.0	40.0	592.7	274610.1	70.3
3.25	.2496	600.0	48.0	40.0	592.7	274669.7	70.3
3.50	.2496	600.0	48.0	40.0	592.7	274710.8	70.3
3.75	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274742.9	70.3
4.00	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274761.2	70.3
4.25	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274777.2	70.3
4.50	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274786.4	70.3
4.75	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274795.5	70.3
5.00	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274802.4	70.3
5.25	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274804.7	70.3
5.50	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274807.0	70.3
5.75	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274813.8	70.3
6.00	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274811.6	70.3

GRAFICA 4.23 RTAC CON CONTROLADORES PI PARA UNA  
 PERTURBACION  $T_e=503$ , CON  $K_r=10$ ,  $K_c=10$ ,  
 $\tau_r=0.5$  Y  $\tau_{lc}=0.5$



GRAFICA 4.24 RTAC CON CONTROLADORES PI PARA UNA  
PERTURBACION  $T_e=583$ , CON  $K_r=10$ ,  $K_c=10$ ,

$$\tau_r = 0.5 \text{ Y } \tau_{lc} = 0.5$$

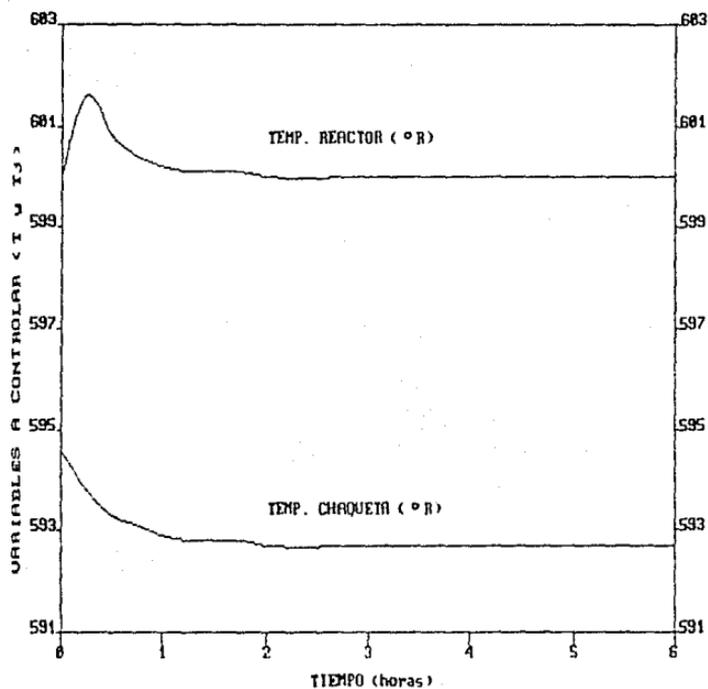


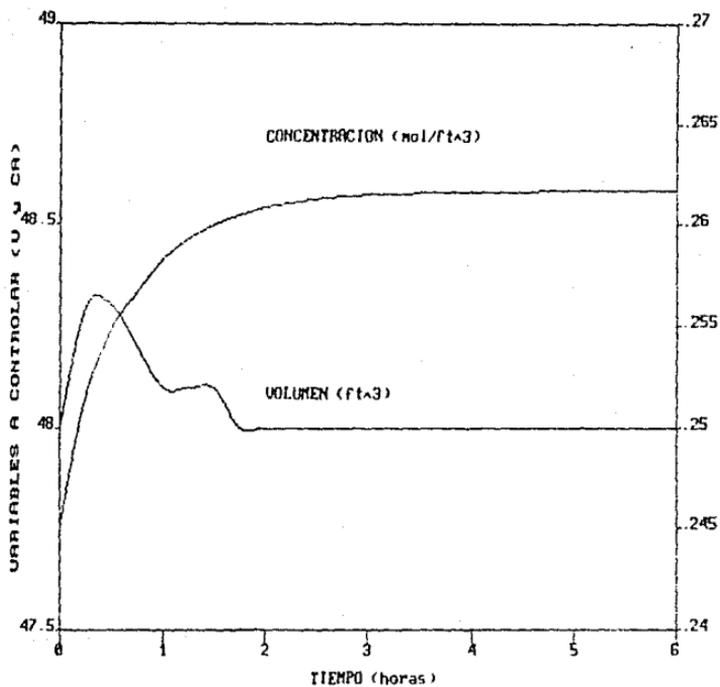
TABLE 4.11

CONTROLADRES FJD		TG= 530.00		FG= 44.00		TJO= 530.00	
CO= .5000	FJO= 49.90	XFC1= 10.00	XFC2= 6.00	TAUD1= .80	TAUD2= .20	TAUI1= .80	TAUI2= .20
TIEMPO	C	T	V	F	FJ	QC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	40.0	594.6	202874.0	49.9
.25	.2516	599.6	48.3	44.0	594.9	177921.3	49.8
.50	.2548	600.3	48.3	44.3	595.1	194088.3	48.1
.75	.2566	600.1	48.2	44.3	594.9	197321.3	48.8
1.00	.2582	600.0	48.1	44.2	594.8	195054.2	48.5
1.25	.2593	600.0	48.1	44.1	594.8	197060.4	48.8
1.50	.2600	600.0	48.1	44.1	594.8	197969.1	49.1
1.75	.2605	600.0	48.0	44.1	594.7	198211.7	49.1
2.00	.2609	600.0	48.0	44.0	594.7	198454.3	49.2
2.25	.2611	600.0	48.0	44.0	594.7	198664.9	49.3
2.50	.2613	600.0	48.0	44.0	594.7	198804.5	49.3
2.75	.2614	600.0	48.0	44.0	594.7	198875.4	49.3
3.00	.2615	600.0	48.0	44.0	594.7	198941.8	49.3
3.25	.2615	600.0	48.0	44.0	594.7	198971.6	49.3
3.50	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	198998.2	49.3
3.75	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	198995.6	49.4
4.00	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	198920.3	49.4
4.25	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	198904.7	49.4
4.50	.2616	600.0	48.0	44.0	594.7	198909.0	49.4
4.75	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	198976.8	49.4
5.00	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	198979.1	49.4
5.25	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	198976.8	49.4
5.50	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	198976.8	49.4
5.75	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	198976.8	49.4
6.00	.2617	600.0	48.0	44.0	594.7	198976.8	49.4

GRAFICA 4.25 RTAC CON CONTROLADORES PID PARA  
 UNA PERTURBACION  $F_0=44$ , CON  $K_r=10$ .

$F_0=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$ ,  $\gamma_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ir}=0.8$

y  $\tau_{Ic}=0.2$



GRAFICA 4.26 RTAC CON CONTROLADORES PID PARA

UNA PERTURBACION  $F_c=44$ , CON  $K_r=10$ ,

$K_c=6$ ,  $\tau_{Pr}=0.8$ ,  $\tau_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ic}=0.8$

Y  $\tau_{Ic}=0.2$

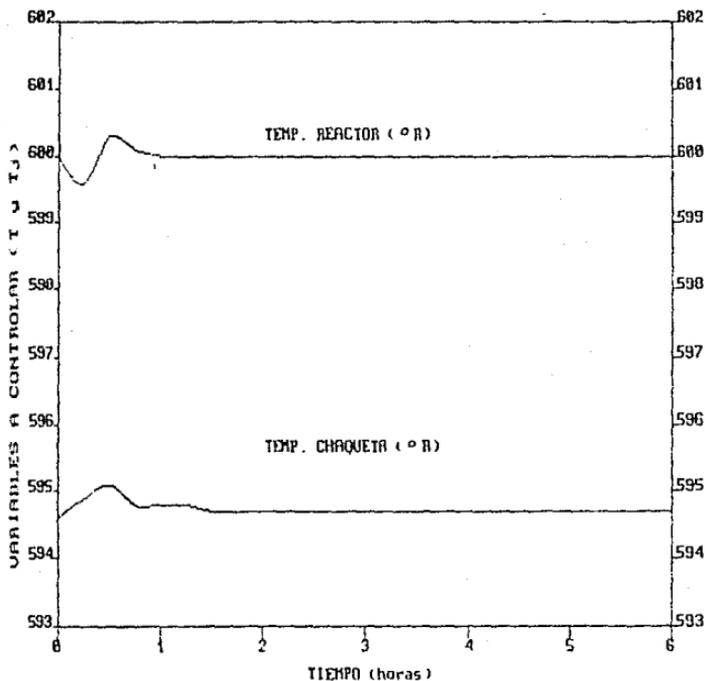
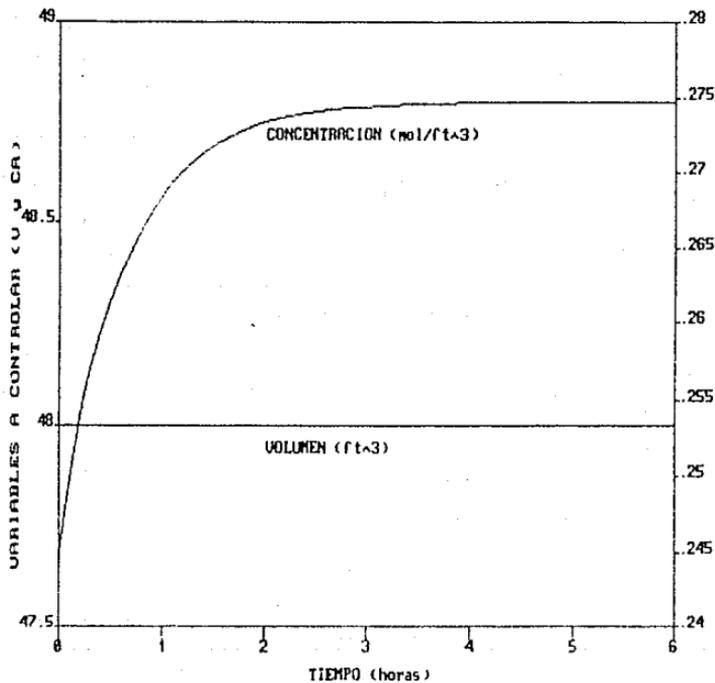


TABLA 4.12

CONTROLADORES PID

CO= .5500		TD= 530.00	FO= 40.00		TJO= 530.00		
FJO= 49.90		XEC1= 10.00	XEC2= 6.00		TAUD1= .80		
TAUD2= .20		TAUI1= .80	TAUI2= .20				
TIEMPO	C	T	V	F	TJ	QC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	40.0	594.6	202874.0	49.9
.25	.2555	600.0	48.0	40.0	594.8	197193.1	48.8
.50	.2615	600.4	48.0	40.0	594.7	214636.2	53.3
.75	.2654	600.2	48.0	40.0	594.4	218074.0	54.4
1.00	.2684	600.1	48.0	40.0	594.3	218004.2	54.6
1.25	.2704	600.1	48.0	40.0	594.2	221143.3	55.3
1.50	.2717	600.1	48.0	40.0	594.1	223358.5	55.7
1.75	.2727	600.0	48.0	40.0	594.1	223341.8	55.9
2.00	.2733	600.0	48.0	40.0	594.1	223386.0	56.1
2.25	.2738	600.0	48.0	40.0	594.0	224388.9	56.2
2.50	.2741	600.0	48.0	40.0	594.0	224390.7	56.3
2.75	.2743	600.0	48.0	40.0	594.0	224397.0	56.4
3.00	.2744	600.0	48.0	40.0	594.0	225036.6	56.4
3.25	.2745	600.0	48.0	40.0	594.0	225132.8	56.4
3.50	.2746	600.0	48.0	40.0	594.0	225196.8	56.4
3.75	.2746	600.0	48.0	40.0	594.0	225242.6	56.5
4.00	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225274.7	56.5
4.25	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225297.5	56.5
4.50	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225311.3	56.5
4.75	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225320.4	56.5
5.00	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225329.6	56.5
5.25	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225331.9	56.5
5.50	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225336.5	56.5
5.75	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225341.0	56.5
6.00	.2747	600.0	48.0	40.0	594.0	225338.8	56.5

GRAFICA 4.27 RTAC CON CONTROLADORES PID PARA  
 UNA PERTURBACION CAE=0.55, CON Kr=10,  
 $Kc=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$ ,  $\tau_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ir}=0.8$   
 Y  $\tau_{Ic}=0.2$



GRAFICA 4.28 RTAC CON CONTROLADORES PID PARA  
 UNA PERTURBACION  $Q_{a0}=0.55$ , CON  $K_r=10$ ,  
 $K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$ ,  $\tau_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ir}=0.8$   
 Y  $\tau_{Ic}=0.2$

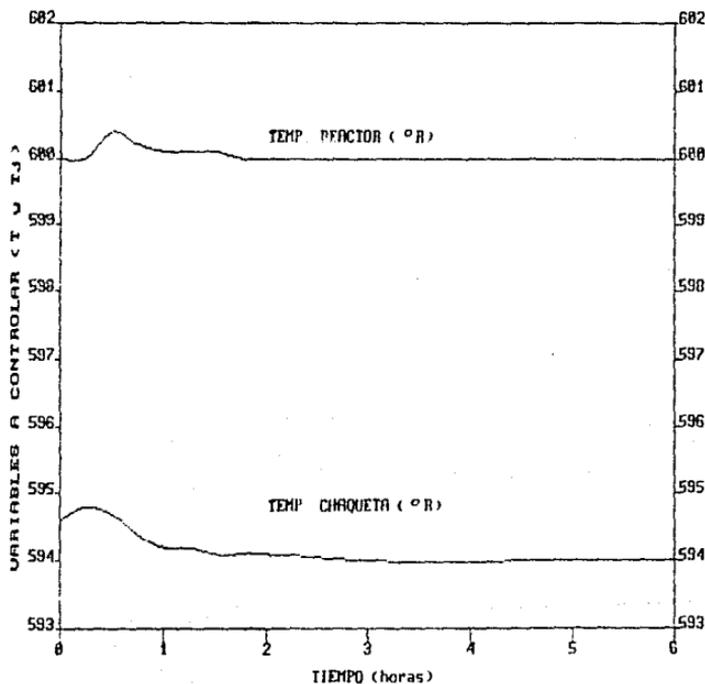


TABLE 4.13

CONTROLADORES PID

CO= .5000 TD= 503.00 FO= 40.00 TJO= 550.00  
 FJO= 49.90 XFC1= 10.00 AFC2= 6.00 TAUD1= .90  
 TAUD2= .20 TAU11= .80 TAU12= .20

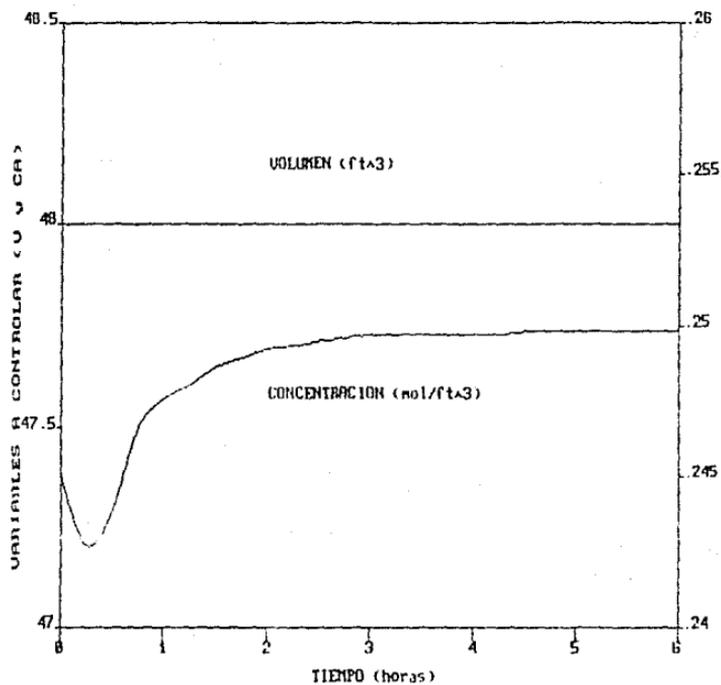
TIEMPO	C	I	V	F	TJ	QC	FJ
.00	.2450	600.0	48.0	40.0	592.6	202874.0	49.9
.25	.2428	600.1	48.0	40.0	593.9	300187.1	77.9
.50	.2439	599.8	48.0	40.0	592.5	273072.1	70.1
.75	.2465	599.8	48.0	40.0	592.7	264841.5	67.6
1.00	.2475	600.1	48.0	40.0	592.9	273133.8	69.7
1.25	.2481	600.1	48.0	40.0	592.7	274305.7	70.1
1.50	.2486	600.0	48.0	40.0	592.7	273509.2	70.0
1.75	.2490	600.0	48.0	40.0	592.7	273714.3	70.1
2.00	.2492	600.0	48.0	40.0	592.7	274542.3	70.2
2.25	.2494	600.0	48.0	40.0	592.7	274468.2	70.2
2.50	.2495	600.0	48.0	40.0	592.7	274573.5	70.3
2.75	.2496	600.0	48.0	40.0	592.7	274649.1	70.3
3.00	.2496	600.0	48.0	40.0	592.7	274701.7	70.3
3.25	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274738.3	70.3
3.50	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274761.2	70.3
3.75	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274779.5	70.3
4.00	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274791.0	70.3
4.25	.2497	600.0	48.0	40.0	592.7	274800.1	70.3
4.50	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274802.4	70.3
4.75	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274807.3	70.3
5.00	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274811.6	70.3
5.25	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274811.6	70.3
5.50	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274811.6	70.3
5.75	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274811.6	70.3
6.00	.2498	600.0	48.0	40.0	592.7	274811.6	70.3

GRAFICA 4.29 RTAC CON CONTROLADORES PID PARA

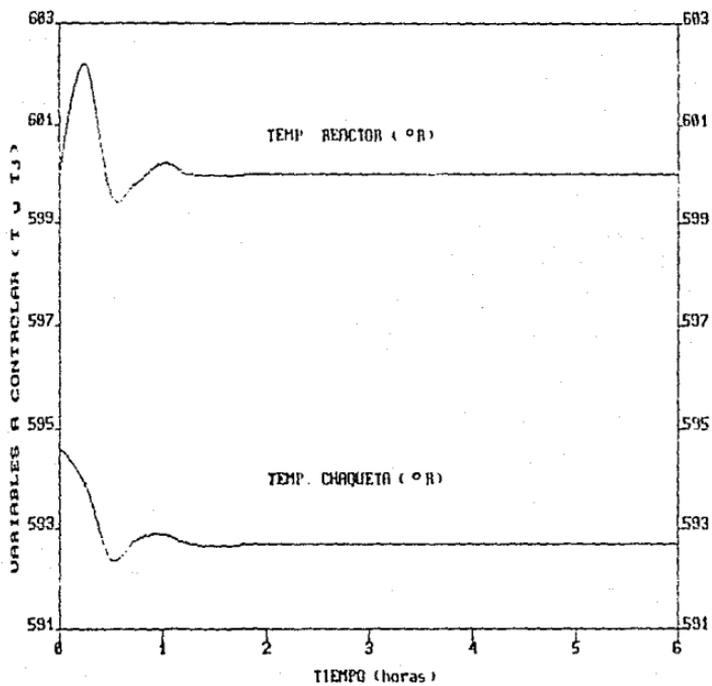
UNA PERTURBACION  $T_e=503$ , CON  $K_r=10$ ,

$K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$ ,  $\tau_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ic}=0.8$

Y  $\tau_{Ic}=0.2$



GRAFICA 4.30. RTAC CON CONTROLADORES PID PARA  
 UNA PERTURBACION  $T_e=583$ , CON  $K_r=10$ ,  
 $K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$ ,  $\tau_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ir}=0.3$   
 Y  $\tau_{Ic}=0.2$



#### 4.3 ANALISIS DE RESULTADOS.

La solución analítica del modelo dinámico del RTAC no isotérmico para el circuito abierto, utilizando transformadas de Laplace o el modelo de variable de estado, permitió analizar la respuesta del sistema (sección 4.1.6, inciso A y B), observándose que es estable por sí mismo (las raíces de la ecuación característica caen en el lado izquierdo del eje imaginario del plano "s"), aunque las variables del proceso se mantuvieron alejadas de las condiciones de operación requeridas, por lo anterior fue necesario diseñar un sistema de control y analizar su comportamiento.

Así, después de obtener un modelo del sistema de control con modos de control proporcionales que estuviera en función de las variables de perturbación y las ganancias de los controladores, fue necesario analizar las características de estabilidad del sistema de ciclo cerrado utilizándose el método del lugar geométrico de las raíces (root locus), ya que éste además de proporcionar información acerca de la estabilidad, establece también las características de la respuesta dinámica general, cuando la o las ganancias de los controladores cambian.

Debido a que es necesario diseñar dos controladores a la vez, el análisis se apoyó inicialmente en la simulación del proceso (sistema de ciclo cerrado con controladores proporcionales) por medio de un programa de cómputo para elegir al menos una aproximación de la ganancia del controlador de nivel

Kr. La razón de aproximar de esta manera Kr y no la ganancia del controlador de temperatura Kc, es que el ciclo 1 afecta al ciclo 2 y no en forma inversa como se ve a continuación:

El ciclo 1 (fig. 4.2) controla el nivel del líquido manipulando el flujo del efluente y el ciclo 2 regula la temperatura de la mezcla de reacción manipulando el flujo de la chaqueta.

1. Cuando  $F_e$  cambia, el ciclo 1 compensa los cambios manipulando los valores del flujo del efluente F. Esto a su vez, perturbará la temperatura del líquido en el tanque y el ciclo 2 lo compensará ajustando apropiadamente el flujo de la chaqueta.
2. Si, por otro lado la temperatura o la concentración de la corriente de entrada cambian, el ciclo 2 ajustará el flujo de la chaqueta para compensar los cambios y esto no perturbará el nivel del líquido en el reactor.

Así, se puede decir que el controlador 1 es más independiente del sistema de control que el controlador 2, lo que facilita la elección de Kr.

Haciendo algunas simulaciones para diferentes valores de Kr, se encontró que una  $K_r = 10$  cumple los objetivos de control sin alejar a las variables del proceso de las condiciones adecuadas de operación.

En la gráfica de localización de raíces que se obtiene cuando Kc cambia se puede observar que el sistema para valores

de  $K_c > 1.3$  el sistema es estable (fig. 4.3), siendo el problema el decidir que valor de  $K_c$  de operación se utilizará, es decir, el ajuste del controlador.

Ya que se desea que el sistema de ciclo cerrado tenga un coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = 0.707$ , asegurando que la respuesta del sistema sea poco amortiguada, se obtuvo una  $K_c = 4$ .

Partiendo de esta ganancia,  $K_c = 4$ , se obtiene la figura 4.4 en la que se observa que cualquier valor de  $K_r$  mantiene al sistema estable. Por lo tanto, se eligió una  $K_r = 10$  como se hizo en un principio. Posteriormente, con las ganancias obtenidas se hicieron pruebas para diferentes perturbaciones del sistema, considerando una variación del 10% para las mismas, observando que el sistema es estable, con una respuesta rápida y sin oscilaciones como se observa en las gráficas de resultados (sección 4.1.7).

En la solución del modelo del RTAC en forma numérica para un circuito cerrado, utilizando controladores proporcionales y con las ganancias obtenidas en la sección 4.1.7, se muestra el comportamiento del sistema para las variables a controlar  $V$  y  $T$  desde un tiempo  $= 0$  hasta un tiempo preestablecido, y la presencia de diferentes perturbaciones que pudieran afectar al sistema, se observa la estabilidad del mismo y el comportamiento adecuado, dentro de las condiciones de operación para las variables a controlar, confirmando con ello el ajuste adecuado de los controladores.

En la solución analítica para el reactor, ya sea utilizando

transformadas de Laplace o el modelo de variable de estado, es de suma importancia el punto que se tome como referencia para llevar a cabo la linealización, ya que la solución únicamente es válida alrededor de ese punto (gráficas 4.1 a 4.6).

La solución analítica del sistema permitió establecer un modelo para un conjunto de condiciones particulares, tabla 4.1 y un modelo general, en función de las variables de perturbación y las ganancias de los controladores, siendo ésto una ventaja, ya que permite analizar el comportamiento del sistema para cualquier cambio de condiciones de operación de una manera más rápida, además de poder conocer el comportamiento del sistema a un tiempo dado sin necesidad de obtener una serie de datos anteriores (siendo ésto una ventaja con respecto a la solución numérica).

Otra ventaja de una solución analítica, es el poder obtener la ecuación característica para el sistema, la cual permite determinar la estabilidad o inestabilidad del mismo, utilizando el criterio de root locus.

Debido a las características del sistema a resolver, la inclusión y diseño de controladores proporcionales satisface los objetivos de control propuestos, aunque también es posible llevar a cabo la solución del sistema utilizando diferentes tipos de controladores como PI, PD o PID, así como una combinación entre ellos. Para el diseño de diferentes tipos de controladores se llevó a cabo una simulación dinámica en la cual el modelo se adecuó a las características de cada controlador, obteniéndose para cada uno de ellos los parámetros más adecuados que

satisfacen los objetivos de control.

Una vez ajustados los controladores proporcionales ( $K_r = 10$  y  $K_c = 4$ ), en la simulación dinámica, se observa en las gráficas 4.7 a 4.12 la estabilidad del sistema, así como las variables a controlar dentro de las condiciones normales de operación.

En la simulación dinámica para los otros tipos de controladores, se tomaron en cuenta las características de cada uno de ellos, las ventajas que presentan en la acción de control, así como la estabilidad y adecuada operación del sistema.

Para los controladores PD, que se caracterizan por alcanzar una estabilidad más rápida, sin tomar en cuenta la acción del corrimiento, se obtuvieron las ganancias para los controladores de:  $K_r = 10$  y  $K_c = 6$ , y para los tiempos derivados de:  $\tau_{Dr} = 0.8$  y  $\tau_{Dc} = 0.2$ , obteniéndose para el sistema una rápida estabilidad y las condiciones adecuadas de operación para las variables a controlar como se observa en las gráficas 4.13 a 4.18.

El ajuste de los controladores PI, que se caracterizan por disminuir el corrimiento, llevan al sistema a las condiciones de operación más adecuadas, y para los cuales se obtuvieron las ganancias de:  $K_r = 10$  y  $K_c = 10$ , y para los tiempos integrales de:  $\tau_{Ir} = 0.5$  y  $\tau_{Ic} = 0.5$ . La inclusión de este tipo de controladores al sistema se refleja en su adecuada operación, así como su estabilidad como se observa en las gráficas 4.19 a 4.24.

Para el ajuste de los controladores PID, se tomaron en cuenta las características y ventajas de cada uno de los

controladores individuales, obteniéndose las ganancias de:  $K_r = 10$  y  $K_c = 6$ , para los tiempos derivados de:  $\tau_{Dr} = 0.8$  y  $\tau_{Dc} = 0.2$ , y para los tiempos integrales de:  $\tau_{Ir} = 0.8$  y  $\tau_{Ic} = 0.2$ , y cuya acción de control se observa en la estabilidad y adecuada operación del sistema como se muestra en las gráficas 4.25 a 4.30.

En los resultados de la simulación del proceso en estudio, a régimen dinámico, para cada uno de los diferentes tipos de controladores se observa (gráficas 4.7 a 4.30) que el sistema a controlar llega a un nuevo régimen permanente alrededor de un tiempo de 2 horas, manteniéndose dentro de los límites de operación.

Después de comparar la respuesta del sistema para los diferentes modos de control, se puede establecer que los modos de control PI y PID dan al sistema un comportamiento adecuado, ya que además de corregir el corrimiento en las variables a controlar garantizan un tiempo mínimo de recuperación de las condiciones normales de operación.

Finalmente, se establece que las técnicas analíticas que implican linealización del modelo no son del todo adecuadas para este sistema debido a que el modelo matemático que lo representa es altamente no lineal, ya que como se dijo anteriormente la respuesta obtenida es real sólo a condiciones muy cercanas alrededor del punto en donde las funciones fueron linealizadas; sin embargo, para sistemas que puedan ser representados por modelos matemáticos lineales es recomendable tener la solución

analítica, ya que ésto ahorra grandes esfuerzos computacionales dentro de la simulación del proceso.

## NOMENCLATURA:

- $C_{Ae}, C_A$  : Concentración molar (mol/volumen) del componente A en las corrientes de entrada y salida, respectivamente.
- $T_e, T$  : Temperatura de las corrientes de entrada y salida del reactor, respectivamente.
- $F_e, F$  : Flujo de las corrientes de entrada y salida de la chaqueta, respectivamente.
- $T_{je}, T_j$  : Temperatura de la corriente de entrada y salida de la chaqueta, respectivamente.
- $F_{je}, F_j$  : Flujo de las corrientes de entrada y salida de la chaqueta, respectivamente.
- $V$  : Volumen de la mezcla de reacción en el tanque.
- $V_j$  : Volumen del medio de enfriamiento en la chaqueta.
- $\rho$  : Densidad de la mezcla de reacción.
- $\rho_j$  : Densidad del medio de enfriamiento.
- $C_p$  : Capacidad calorífica de la mezcla de reacción.
- $C_{p_j}$  : Capacidad calorífica del medio de enfriamiento.
- $Q$  : Velocidad de transferencia de calor.
- $U$  : Coeficiente global de transferencia de calor.
- $A_T$  : Área de transferencia de calor.
- $r$  : Velocidad de reacción por unidad de volumen.
- $\alpha$  : Constante cinética para la ecuación de Arrhenius.
- $E$  : Energía de activación para la reacción.
- $R$  : Constante de la ecuación del gas ideal.
- $N_A$  : Número de moles de A en la mezcla de reacción.

- $N_B$  : Número de moles de B en la mezcla de reacción.
- $h_{e, h}$  : Entalpía por unidad de masa en las corrientes de entrada y salida del reactor, respectivamente.
- $\hat{H}_A, \hat{H}_B$  : Entalpías molares parciales de A y B.
- $h_{je}, h_j$  : Entalpía por unidad de masa en las corrientes de entrada y salida de la chaqueta, respectivamente.
- $H$  : Entalpía por unidad de masa de la mezcla de reacción.
- $H_j$  : Entalpía por unidad de masa del medio de enfriamiento.
- $\Delta H_r$  : Calor de reacción por mol del componente B formado.
- $K_r$  : Ganancia para el controlador de nivel en el reactor.
- $K_c$  : Ganancia para el controlador de temperatura en el reactor.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

La necesidad de aumentar la producción, elevar la calidad de los productos, obtener la mayor seguridad de operación, es decir, operar de la manera más eficiente un equipo o proceso para obtener los mayores beneficios, establecen la base fundamental para llevar a cabo el análisis de la dinámica y control de procesos, la cual ha mostrado grandes avances teóricos (especialmente en las últimas décadas, gracias a la ayuda de las computadoras) y prácticos en el control de sistemas multivariables, en donde es posible analizar de una forma más completa, la interrelación de las múltiples variables que intervienen en un proceso.

Este desarrollo teórico permitió establecer la técnica de modelo de variable de estado, especialmente para sistemas multivariables, la cual puede ser analizada dentro del espacio del tiempo y en el espacio de Laplace, y a su vez puede llegar a establecer la controlabilidad y estabilidad del sistema y con ello el diseño de los controladores.

La técnica de modelado, dentro del análisis de sistemas de control multivariable, establece un modelo a régimen dinámico y la solución de éste permite observar el comportamiento del sistema y a su vez determinar la acción de control a seguir. Así, un adecuado modelado del sistema utilizando técnicas de solución, ya sea en el espacio del tiempo, el espacio de Laplace o el espacio de la frecuencia, permitirá llevar a cabo un adecuado

análisis de la dinámica y control del sistema o proceso.

En la dinámica y control de procesos, es posible llevar a cabo la elección de una estructura de control para el sistema (feedback, feedforward, etc), dependiendo de las características del sistema en cuanto a costos del equipo, complejidad del proceso, interrelación de las variables, etc.

La importancia de una técnica de síntesis, está en el hecho de encontrar la mejor estructura de control de entre varias estructuras alternativas, logrando obtener la mejor interrelación entre las variables del proceso y con ello establecer el modo de control más apropiado para controlar el sistema, mediante técnicas de ajuste como controlabilidad (modelo de variable de estado) o la técnica convencional del lugar geométrico de la raíces (root locus).

El diseño del sistema de control multivariable para el RTAC no isotérmico, utilizando diferentes modos de control (P, PD, PI y PID), se llevó a cabo mediante una simulación dinámica, con la cual se encontraron los parámetros más adecuados para cada tipo de controlador en la solución del sistema. El diseño para controladores proporcionales se apoyo en el método de ajuste del lugar geométrico de la raíces, estableciendo las ganancias que permiten la controlabilidad y estabilidad del sistema.

Debido a que el modo de control proporcional, presentaba mayor facilidad de análisis dentro de la solución analítica, el diseño se efectuó para dichos controladores, sin embargo, como se observa en las diferentes simulaciones dinámicas, el controlador

PID es el que presenta las mayores ventajas para llevar a cabo la acción de control, evitando el efecto de corrimiento, una respuesta más rápida y llegando a la estabilidad del sistema en un menor tiempo, ya que en él se combinan las características de los modos de control individuales.

Finalmente, en base a los objetivos planteados para llevar a cabo este trabajo, el cumplimiento de los mismos se ha llevado a cabo de la forma más completa, llegando a establecer la importancia que tiene la dinámica y control de procesos, así como la adecuada aplicación de las técnicas de solución en base a las características del problema, para obtener la mejor acción de control del sistema.

Se sugiere para tener una visión más completa de la aplicación de las técnicas de solución y analizar con más detalle las características de un sistema de control, llevar a cabo el diseño de una estructura de control para el RTAC no isotérmico, utilizando diferentes modos de control, así como la aplicación de las técnicas más adecuadas para sistemas multivariables, como el modelo de variable de estado, el cual al llevar a cabo un análisis de controlabilidad, ajusta al mismo tiempo el controlador o los controladores del sistema.

Además, este trabajo puede servir como base para que los temas contenidos en él, se desarrollen con más profundidad en otros trabajos, ampliando el estudio de la dinámica y control de procesos para sistemas multivariables.

## APENDICES

## APENDICE A

### SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SIMULTANEAS Y TECNICAS ANALITICAS DE SOLUCION.

Una ecuación diferencial es LINEAL si tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

y se caracteriza por:

- La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado, ésto es, la potencia de cada término en "y" es 1.
- Cada coeficiente depende sólo de la variable independiente "x".
- No hay productos de "y" con alguna de sus derivadas, ni productos entre derivadas.
- No contiene funciones trascendentes de "y" y/o sus derivadas.

Además, el teorema de superposición establece que una ecuación diferencial lineal tiene las siguientes propiedades:

- Si  $x(t)$  es una solución, entonces  $cx(t)$ , donde  $c$  es una constante, también es una solución.
- Si  $x_1(t)$  es una solución y  $x_2(t)$  es también una solución, entonces  $x_1(t) + x_2(t)$  es también una solución.

DEFINICION.

Un sistema de ecuaciones diferenciales es LINEAL si todas las ecuaciones que lo conforman son lineales.

DEFINICION.

Una SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES es un conjunto de funciones  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $z = h(t)$ , etc., que satisfacen cada ecuación del sistema en algún intervalo I.

#### A.1 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

El estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{A.1}$$

es especialmente importante, ya que toda ecuación diferencial de orden n, como la que se muestra abajo:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

y así mismo, la mayoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales pueden ser reducidos a la forma de la ecuación (A.1). Los métodos de solución que se describirán aquí aplican solamente a aquellos sistemas que tienen la forma lineal normal o canónica:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde los coeficientes  $a_{ij}$  y las  $f_i$  son funciones continuas en un intervalo común  $I$ . Cuando  $f_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  al sistema (A.2) se le llama homogéneo, en cualquier otro caso se le llama no homogéneo.

## A.2 REDUCCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES A UNA ECUACION.

Un sistema lineal con coeficientes constantes y  $n$  variables dependientes que está escrito en la forma normal puede ser reducido a una sola ecuación diferencial lineal de orden  $n$ . Se debe suponer adicionalmente que las  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

que aparecen en el sistema (A.2) son lo suficientemente diferenciables. Por ejemplo, si al siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{A.3}$$

se le aplica el operador  $D$ , donde  $Dx = \frac{dx}{dt}$

$$\begin{aligned} (D - a_{11})x - a_{12}y &= 0 \\ -a_{21}x + (D - a_{22})y &= 0 \end{aligned}$$

entonces se puede usar una técnica de eliminación algebraica para obtener una ecuación diferencial, ya sea en  $x(t)$  o en  $y(t)$ .

### A.3 FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

Si  $x$  y  $A(t)$  denotan, respectivamente, las matrices:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

y

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

entonces el sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n$$

puede ser escrito como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o simplemente,

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x \qquad (A.4)$$

Además, si

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

entonces el sistema no homogéneo:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

puede ser escrito como:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \qquad (A.5)$$

#### DEFINICION.

Un VECTOR SOLUCION en un intervalo I es cualquier matriz columna  $x$ , cuyos elementos son funciones diferenciables, tal que satisface el sistema de ecuaciones (A.5) en el intervalo I, donde  $x$  es:

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

DEFINICION.

Sea  $t_0$  un punto en un intervalo  $I$  y sean:

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

donde las  $\gamma_i$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  son constantes dadas. Entonces el problema:

$$\text{Resuelva : } \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

(A.6)

$$\text{Sujeto a : } x(t_0) = x_0$$

es un PROBLEMA DE VALOR INICIAL en el intervalo  $I$ .

TEOREMA.

Supóngase que los elementos de las matrices  $A(t)$  y  $f(t)$  son funciones continuas en un intervalo común  $I$  que contiene el punto  $t_0$ . Entonces, existe una única solución del problema de valor inicial (A.6) en el intervalo  $I$ .

#### A.4 SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES AUTONOMOS.

En esta parte se obtendrá la solución general de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos. Es decir, aquellos sistemas de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f$$

donde  $A$  y  $f$  son matrices constantes. Primero se considerará la solución para sistemas homogéneos y luego la solución para sistemas no homogéneos.

##### A.4.1 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS.

Antes de empezar a resolver ecuaciones diferenciales en notación vectorial-matricial se repasará la solución de la ecuación diferencial escalar:

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{A.7}$$

Para resolver esta ecuación, se supone una solución  $x(t)$  de la forma:

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \tag{A.8}$$

Reemplazando esta solución supuesta en la ecuación (A.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + kb_k t^{k-1} + \dots \\
 & = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots) \quad (A.9)
 \end{aligned}$$

Si la solución supuesta es correcta, la ecuación (A.9) debe ser válida para todo  $t$ . Igualando entonces los coeficientes de igual potencia de  $t$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= ab_0 \\
 b_2 &= \frac{1}{2!} ab_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0 \\
 b_3 &= \frac{1}{3!} ab_2 = \frac{1}{3 \times 2} a^3 b_0 \\
 &\vdots \\
 b_k &= \frac{1}{k!} a^k b_0
 \end{aligned}$$

Se determina el valor de  $b_0$  reemplazando  $t=0$  en la ecuación (A.8), es decir:

$$x(0) = b_0$$

Por tanto, se puede escribir la solución  $x(t)$  como:

$$x(t) = \left( 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots \right) x(0)$$

Ahora se resolverá la ecuación diferencial vectorial-matricial:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (A.10)$$

donde:

$x$  : vector n-dimensional

$A$  : matriz constante de orden  $n \times n$

Por analogía con el caso escalar, se supone que la solución es de la forma de un vector en serie de potencias en  $t$ , o sea:

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (A.11)$$

Reemplazando esta solución supuesta en la ecuación (A.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + kb_k t^{k-1} + \dots \\ = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots) \end{aligned} \quad (A.12)$$

Si la solución supuesta es solución verdadera, la ecuación (A.12) debe cumplirse para todo  $t$ . Entonces, se requiere que los coeficientes de igual potencia de  $x$  sean idénticos, o sea:

$$b_1 = Ab_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2!} Ab_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3!} Ab_2 = \frac{1}{3 \times 2} A^3 b_0$$

$\vdots$

$$b_k = \frac{1}{k!} A^k b_0$$

Reemplazando  $t=0$  en la ecuación (A.11) se obtiene:

$$x(0) = b_0$$

Entonces, se puede escribir la solución  $x(t)$  como:

$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots) x(0)$$

La expresión entre paréntesis en el segundo miembro de esta última ecuación es una matriz de orden  $n \times n$ . Debido a su similitud con una serie infinita de potencias, para un exponencial escalar, se denomina a ésta MATRIZ EXPONENCIAL, y se escribe:

$$I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots = e^{At}$$

Se puede escribir la solución a la ecuación (A.10), en términos de la matriz exponencial como:

$$x(t) = e^{At} x(0) \quad (A.13)$$

Debido a que la matriz exponencial es muy importante en el análisis en espacio de estado de sistemas lineales, a continuación se presentan las propiedades de la matriz exponencial:

a) Exponencial de la matriz nula, 0

$$e^{0t} = I$$

b) Derivada

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

c) Producto

$$e^{A t_1} * e^{A t_2} = e^{A(t_1 + t_2)}$$

d) Representación en series

$$e^{A t} = I + A t + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Hay otras propiedades importantes de la matriz exponencial, pero éstas son suficientes para el propósito del apéndice.

#### METODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS.

Primero se considerará el caso escalar:

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (A.7)$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (A.7) se obtiene:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) \quad (A.14)$$

donde  $X(s) = \mathcal{L}(x)$ . Despejando  $X(s)$  de la ecuación (A.8):

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1} x(0)$$

La transformación inversa de Laplace de la última ecuación da la solución:

$$x(t) = e^{at} x(0)$$

Se puede extender el procedimiento de solución de la ecuación diferencial escalar homogénea al sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \quad (A.10)$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (A.10) se obtiene:

$$s\underline{x}(s) - x(0) = A\underline{x}(s)$$

donde  $\underline{x}(s) = \mathcal{L}(x)$ . Por lo tanto:

$$(sI - A)\underline{x}(s) = x(0)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $(sI - A)^{-1}$ , se obtiene:

$$\underline{x}(s) = (sI - A)^{-1} x(0)$$

La transformada inversa de Laplace de  $\underline{x}(s)$  da la solución  $x(t)$ .

Así,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) \quad (\text{A.15})$$

Debe notarse que:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{0}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

Por lo tanto, la transformada inversa de Laplace de  $(sI - A)^{-1}$  da:

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = 0 + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = e^{At} \quad (\text{A.16})$$

Se debe recordar que la transformada inversa de Laplace de una matriz es la matriz consistente de las transformadas inversas de Laplace de todos sus elementos.

De las ecuaciones (A.15) y (A.16) se obtiene la solución de la ecuación (A.10) como:

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

La importancia de la ecuación (A.16) está en el hecho de que brinda un medio adecuado para hallar la solución exacta de la matriz exponencial.

#### MATRIZ DE TRANSICION.

La solución de la ecuación (A.10) se puede escribir como:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) \quad (\text{A.17})$$

donde  $\Phi(t)$  es una matriz de orden  $n \times n$  y es solución única de:

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi(t) \quad \Phi(0) = I$$

Para verificarlo, debe verse que:

$$x(0) = \Phi(0)x(0) = I x(0)$$

y

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} x(0) = A\Phi(t)x(0) = Ax(t)$$

Se confirma así que la ecuación (A.17) es la solución de la ecuación (A.10). De las ecuaciones (A.13), (A.15) y (A.17) se obtiene:

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Se hace notar que:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \Phi(-t)$$

De la ecuación (A.17) se ve que la solución de la ecuación (A.10) es simplemente una transformación de la condición inicial. Por tanto, la matriz única  $\Phi(t)$  se denomina matriz de transición.

Si las raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de la matriz  $A$  son distintas,  $\Phi(t)$  contendrá los  $n$  exponenciales:

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

En particular, si la matriz  $A$  es diagonal se tiene:

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (A: \text{diagonal})$$

Por otra parte si existen raíces repetidas, por ejemplo, si las raíces de  $A$  son

$$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_n$$

$\Phi(t)$  contendrá, además de los exponentiales  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_4 t}, e^{\lambda_5 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ , términos tales como  $t e^{\lambda_1 t}$  y  $t^2 e^{\lambda_1 t}$ .

A continuación se resumen las propiedades más importantes de la matriz de transición  $\Phi(t)$ . Para el sistema autónomo:

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

para el cual:

$$\Phi(t) = e^{At}$$

se tiene:

$$1. \bar{\phi}(0) = e^{\Lambda 0} = \mathbb{I}$$

$$2. \bar{\phi}(t) = e^{\Lambda t} = (e^{-\Lambda t})^{-1} = [\bar{\phi}(-t)]^{-1}$$

$$3. \bar{\phi}^{-1}(t) = \bar{\phi}(-t)$$

$$4. \bar{\phi}(t_1 + t_2) = e^{\Lambda(t_1 + t_2)} = e^{\Lambda t_1} e^{\Lambda t_2} = \bar{\phi}(t_1) \bar{\phi}(t_2) = \bar{\phi}(t_2) \bar{\phi}(t_1)$$

$$5. [\bar{\phi}(t)]^n = \bar{\phi}(nt)$$

$$6. \bar{\phi}(t_2 - t_1) \bar{\phi}(t_1 - t_0) = \bar{\phi}(t_2 - t_0) = \bar{\phi}(t_1 - t_0) \bar{\phi}(t_2 - t_1)$$

#### A.4.2 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS.

Considerando el caso escalar:

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu + \Gamma d \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando esta ecuación por  $e^{-at}$  se obtiene:

$$e^{-at} \left[ \frac{dx}{dt} - ax(t) \right] = \frac{d}{dt} \left[ e^{-at} x(t) \right] = e^{-at} [bu(t) + \Gamma d(t)]$$

Integrando esta ecuación entre 0 y t, se tiene:

$$e^{-at} x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau} [bu(\tau) + \Gamma d(\tau)] d\tau$$

o

$$x(t) = e^{at}x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} [bu(\tau) + \Gamma d(\tau)] d\tau$$

El primer término en el segundo miembro es la respuesta a la condición inicial, y el segundo término es la respuesta a las entradas  $u(t)$  y  $d(t)$ .

Considerando ahora la ecuación diferencial no homogénea descrita por:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + \Gamma d \quad (\text{A.19})$$

donde:

$x$  : vector  $n$ -dimensional

$u$  : vector  $r$ -dimensional

$A$  : matriz constante de orden  $n \times n$

$B$  : matriz constante de orden  $n \times r$

$\Gamma$  : matriz constante de orden  $n \times k$

Escribiendo la ecuación (A.19) como:

$$\frac{dx}{dt} - Ax(t) = Bu(t) + \Gamma d(t)$$

y multiplicando ambos lados de la ecuación por  $e^{-At}$ , se obtiene:

$$e^{-At} \frac{dx}{dt} - Ax(t) = \frac{d}{dt} e^{-At} x(t) = e^{-At} [Bu(t) + \Gamma d(t)]$$

Integrando la ecuación anterior entre 0 y t se tiene:

$$e^{-At} x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A\tau} [Bu(\tau) + \Gamma d(\tau)] d\tau$$

o

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} [Bu(\tau) + \Gamma d(\tau)] d\tau \quad (A.20)$$

Se puede escribir la ecuación (A.20) como:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) [Bu(\tau) + \Gamma d(\tau)] d\tau \quad (A.21)$$

donde:

$$\Phi(t) = e^{At}$$

La ecuación (A.20) o (A.21) es la solución de la ecuación (A.19). La solución  $x(t)$  es claramente la suma de un término consistente en la transición de estado inicial y un término que se produce, en el caso del estudio de dinámica de procesos, por los vectores de entrada y perturbación.

METODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS.

También se puede obtener la solución de la ecuación (A.19)

por el procedimiento de la transformada de Laplace.

Transformando al espacio de Laplace la ecuación (A.19) se tiene:

$$s\underline{X}(s) - x(0) = A\underline{X}(s) + B\underline{U}(s) + \Gamma\underline{D}(s)$$

$$(sI - A)\underline{X}(s) = x(0) + B\underline{U}(s) + \Gamma\underline{D}(s)$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por  $(sI - A)^{-1}$  se tiene:

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}[B\underline{U}(s) + \Gamma\underline{D}(s)]$$

Utilizando la relación dada por la ecuación (A.16):

$$\underline{X}(s) = \mathcal{L} \left[ e^{At} \right] x(0) + \mathcal{L} \left[ e^{At} \right] [B\underline{U}(s) + \Gamma\underline{D}(s)]$$

Se puede obtener la transformada inversa de Laplace de esta última ecuación, utilizando el teorema de convolución:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} [B u(\tau) + \Gamma d(\tau)] d\tau$$

SOLUCION EN TERMINOS DE  $x(t_0)$

Si el tiempo inicial no es cero sino  $t_0$ , la solución de la ecuación (A.19) se modifica a:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} [B u(\tau) + \Gamma d(\tau)] d\tau \quad (A.22)$$

## A.5 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO AUTONOMOS.

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es no autónomo si tiene la forma:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

donde las matrices  $A(t)$  y  $f(t)$  son variantes con el tiempo.

La mayor parte de los resultados obtenidos en la sección B.4 son válidos también para sistemas lineales no autónomos si se modifica la matriz de transición  $\Phi(t)$  a  $\Phi(t, t_0)$  (Para los sistemas no autónomos, la matriz de transición depende tanto de  $t$  como de  $t_0$ , y no de la diferencia  $t-t_0$ . Por lo tanto, no siempre se puede fijar el tiempo inicial igual a cero. Por supuesto, hay casos en que  $t_0$  es cero). Sin embargo, en general, la matriz de transición para un sistema no autónomo no se puede expresar como una matriz exponencial.

### A.5.1 SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEOS, NO AUTONOMOS.

Para una ecuación diferencial escalar:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \tag{A.24}$$

la solución es:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \quad (\text{A.25})$$

y la función de transición de estado está dada por:

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] \quad (\text{A.26})$$

sin embargo para una ecuación diferencial vectorial-matricial

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

donde:

$x(t)$  : vector  $n$ -dimensional

$A(t)$  : matriz de orden  $n \times n$  cuyos elementos son funciones de  $t$  fragmentariamente continuas en el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$

la solución de la ecuación (A.22) está dada por:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

donde  $\Phi(t, t_0)$  es la matriz no singular de orden  $n \times n$  que satisface la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad \Phi(t_0, t_0) = I \quad (A.29)$$

La solución de la ecuación (A.27) es la transformación del estado inicial. La matriz  $\Phi(t, t_0)$  es la matriz de transición de estado del sistema variable en el tiempo, descrito por la ecuación (A.27).

MATRIZ DE TRANSICION DE ESTADO PARA EL CASO VARIABLE EN EL TIEMPO.

Es importante notar que la matriz de transición de estado  $\Phi(t, t_0)$  está dada por una matriz exponencial únicamente si:

$$A(t) \quad \text{y} \quad \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$$

son conmutables. Es decir:

$$\Phi(t, t_0) = \left[ \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] \text{ si y sólo si } A(t) \text{ y } \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$$

son conmutables.

Nótese que si  $A(t)$  es una matriz constante o diagonal,  $A(t)$  y  $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$  son conmutables.

Si  $A(t)$  y  $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$  no son conmutables, no existe ningún modo simple de calcular la matriz de transición de estado.

Para calcular numéricamente  $\Phi(t, t_0)$  se puede utilizar el desarrollo en serie siguiente de  $\Phi(t, t_0)$ :

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \left[ \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 + \dots \quad (\text{A.30})$$

En general, esto no ha de dar  $\Phi(t, t_0)$  en una forma cerrada.

A continuación se indican las propiedades de la matriz de transición de estado  $\Phi(t, t_0)$ :

1.  $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$
2.  $\Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1)$

#### SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SISTEMAS NO AUTONOMOS.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \quad (\text{A.31})$$

donde:

- $x$  : vector de orden  $n$
- $u$  : vector de orden  $r$
- $A(t)$  : matriz de orden  $n \times n$ .
- $B(t)$  : matriz de orden  $n \times r$

Se supone que los elementos de  $A(t)$  y  $B(t)$  son funciones fragmentarias continuas de  $t$  en el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Para obtener la solución de la ecuación (A.31), se establece:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \xi(t)$$

donde  $\Phi(t, t_0)$  es la matriz única que satisface la ecuación siguiente:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0) \qquad \Phi(t_0, t_0) = I$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) \xi(t) \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) \right] \xi(t) + \Phi(t, t_0) \left[ \frac{d}{dt} \xi(t) \right] \\ &= A(t) \Phi(t, t_0) \xi(t) + \Phi(t, t_0) \left[ \frac{d}{dt} \xi(t) \right] \\ &= A(t) \Phi(t, t_0) \xi(t) + B(t) u(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\Phi(t, t_0) \left[ \frac{d}{dt} \zeta(t) \right] = B(t)u(t)$$

$$\frac{d}{dt} \zeta(t) = \Phi^{-1}(t, t_0) B(t)u(t)$$

Así:

$$\zeta(t) = \zeta(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau)u(\tau) d\tau$$

Como:

$$\zeta(t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_0) x(t_0) = x(t_0)$$

se obtiene la solución a la ecuación (A.31):

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau)u(\tau) d\tau$$

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau)u(\tau) d\tau \quad (\text{A.32})$$

## APENDICE B.

### LINEALIZACION.

En muchos casos las ecuaciones diferenciales no lineales que describen un sistema tendrán que linealizarse si se quiere usar la ventaja que ofrecen las técnicas matemáticas lineales para la solución de un modelo multivariable.

La técnica de linealización es muy usada en el estudio de la dinámica de procesos y diseño de sistemas de control ya que:

- a) De esta forma se pueden obtener soluciones analíticas que permiten tener una visión general del comportamiento de un proceso, independientemente de los valores particulares de valores y parámetros.
- b) El desarrollo del diseño de sistemas de control ha sido limitado a procesos lineales.

Primeramente se debe recordar que una ecuación diferencial lineal es aquella que contiene solamente variables de primera potencia en cualquiera de sus términos. Si aparecen en ella productos de variables o variables afectadas por raíces cuadradas, exponenciales, etc., ésta es no lineal.

Si la forma analítica de las funciones no lineales es conocida, la aplicación del método de la serie de Taylor produce directamente la linealización. Todo lo que se hace es tomar las funciones no lineales, expandirlas en series de Taylor alrededor

del nivel de operación a régimen permanente y despreciar todos los términos después de la primera derivada.

Los valores a régimen permanente de las variables se denotarán como:

$\bar{x}_1$  : valor de  $x_1$  a régimen permanente.

$\bar{x}_2$  : valor de  $x_2$  a régimen permanente.

### B.1 LINEALIZACION DE SISTEMAS CON UNA VARIABLE.

Considerando la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (\text{B.1})$$

Expandiendo la función no lineal  $f(x)$  en una serie de Taylor alrededor del punto  $\bar{x}$  se tiene:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left[ \frac{df}{dx} \right]_{\bar{x}} \frac{(x - \bar{x})}{1!} + \left[ \frac{d^2f}{dx^2} \right]_{\bar{x}} \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} + \dots$$

$$+ \left[ \frac{d^n f}{dx^n} \right]_{\bar{x}} \frac{(x - \bar{x})^n}{n!} + \dots \quad (\text{B.2})$$

Ignorando todos los términos de orden igual o mayor a dos, la aproximación al valor de  $f(x)$  es:

$$f(x) \cong f(\bar{x}) + \left[ \frac{df}{dx} \right]_{\bar{x}} (x - \bar{x}) \quad (\text{B.3})$$

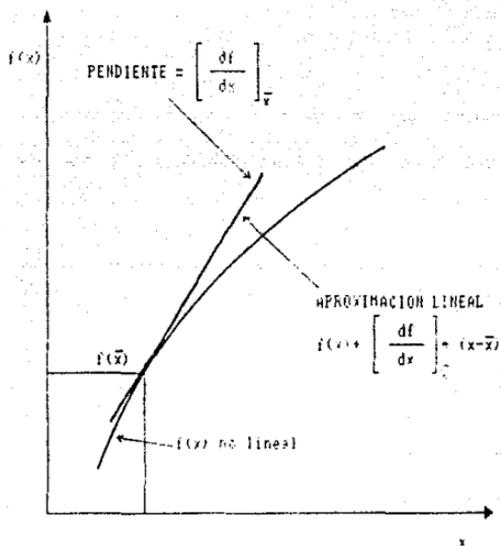


FIGURA B.1 LINEALIZACION DE UNA FUNCION UNIVARIABLE.

El error introducido en la aproximación (B.3) es del mismo orden de magnitud que el término:

$$I = \frac{\left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_{\bar{x}}}{2!} (x - \bar{x})^2 \quad (\text{B.4})$$

Consecuentemente, la aproximación lineal (B.3) es satisfactoria sólo cuando  $x$  está muy cerca de  $\bar{x}$ , donde el valor del término  $I$  es muy pequeño.

Reemplazando, en la ecuación (B.1),  $f(x)$  por su aproximación lineal:

$$\frac{dx}{dt} = f(\bar{x}) + \left[ \frac{df}{dx} \right]_{\bar{x}} (x - \bar{x}) \quad (\text{B.5})$$

Esta es la aproximación linealizada para el sistema dinámico expresado por la ecuación (B.1).

## B.2 LINEALIZACIÓN DE SISTEMAS MULTIVARIABLES.

Considerando el siguiente sistema dinámico:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (\text{B.7})$$

Expandiendo las funciones no lineales  $f_1(x_1, x_2)$  y  $f_2(x_1, x_2)$  en series de Taylor alrededor del punto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1) \\
 &+ \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_2 - \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} \\
 &+ \left[ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} + \left[ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1) \\
 &+ \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_2 - \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!}
 \end{aligned}$$

$$+ \left[ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} + \left[ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

despreciando los términos de orden mayor o igual a dos:

$$f_1(x_1, x_2) \cong f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1) + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$f_2(x_1, x_2) \cong f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1) + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_2 - \bar{x}_2)$$

Sustituyendo las expresiones lineales precedentes de  $f_1(x_1, x_2)$  y  $f_2(x_1, x_2)$  en las ecuaciones (B.6) y (B.7) del sistema inicial:

$$\frac{dx_1}{dt} \cong f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1) + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_2 - \bar{x}_2) \quad (B.9)$$

$$\frac{dx_2}{dt} \cong f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1) + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_2 - \bar{x}_2)$$

Estas dos últimas ecuaciones constituyen las aproximaciones lineales del sistema inicial descrito por las ecuaciones (B.6) y (B.7).

Es necesario recalcar que la aproximación se deteriora cuando el punto  $(x_1, x_2)$  se aleja del punto de linealización  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

## APENDICE C.

### VARIABLES DE DESVIACION.

Para la solución de los problemas de control es deseable la eliminación del manejo de condiciones iniciales. Para evitar este problema existe un grupo de técnicas llamadas métodos de desviación y entre ellas está el uso de variables de desviación.

En la mayoría de los trabajos de Ingeniería Química se piensa en términos de variables totales o absolutas: la altura de un tanque, el flujo a través de un tubo, la concentración en un recipiente de almacén. En el caso de la temperatura y la presión, sin embargo, frecuentemente se habla en términos que representan la desviación de una condición base: por ejemplo °C o psig. En los problemas de dinámica es conveniente usualmente trabajar con variables que representan la desviación de condiciones de régimen permanente o condiciones promedio.

Puesto que las variables totales son funciones del tiempo,  $x(t)$ , sus desviaciones de los valores de régimen permanente serán también funciones del tiempo, como se ve en la fig. C.1. Generalmente, se usa el superíndice "d" para denotar una variable de desviación.

Así, la desviación es definida como:

$$x(t)^d = x(t) - \bar{x}$$

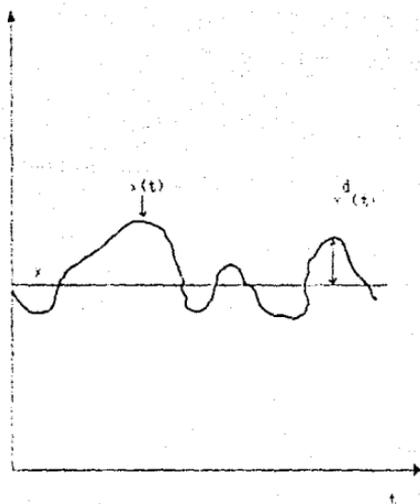


FIGURA 0.1 VARIABLES DE DESVIACION.

donde:

$\bar{x}$  : valor de la variable  $x$  a régimen permanente.

Las ventajas de usar variables de desviación son:

- a) Los términos  $\frac{dc}{dt}$  que se generan, en donde  $c$  es una constante desaparecen.
- b) Las condiciones iniciales para las variables de desviación son todas iguales a cero (si el punto de comienzo es el régimen permanente).

## APENDICE D

### D.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE.

#### 1. DEFINICION.

Sea  $f(t)$  una función definida para  $t \geq 0$ , la integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \quad (D.1)$$

se llama la transformada de Laplace de  $f$ , siempre que el límite exista.

Simbólicamente, la transformada de Laplace de " $s$ " se denota por  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , es decir:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (D.2)$$

La integral que define la transformada de Laplace no converge necesariamente, por lo que se formulan condiciones suficientes que garantizan la existencia de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ :

- Si  $f(t)$  es seccionalmente continua en cada intervalo finito  $0 \leq t \leq N$  de orden exponencial  $\gamma$  para  $t > N$ , entonces existe la transformada de Laplace  $F(s)$  para toda  $s > \gamma$ .

## 2. ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

### a) Propiedad de linealidad.

Si  $C_1$  y  $C_2$  son constantes y  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son funciones cuyas transformadas de Laplace son, respectivamente,  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$ , entonces:

$$\mathcal{L} \left\{ C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \right\} = C_1 \mathcal{L} \left\{ f_1(t) \right\} + C_2 \mathcal{L} \left\{ f_2(t) \right\} \quad (D.3)$$

### b) Primera propiedad de translaci3n.

$$\mathcal{L} \left\{ e^{at} f(t) \right\} = F(s - a) \quad (D.4)$$

### c) Segunda propiedad de translaci3n.

$$\text{Si } \mathcal{L} \left\{ f(t) \right\} = F(s) \quad \text{y} \quad G(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

entonces:

$$\mathcal{L} \left\{ G(t) \right\} = e^{-as} F(s) \quad (D.5)$$

### d) Propiedad del cambio de escala.

$$\mathcal{L} \left\{ f(at) \right\} = (1/a) f(s/a) \quad (D.6)$$

e) Transformada de Laplace de la derivada.

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (D.7)$$

donde  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n-1)}(0)$  y  $df(t)/dt, \dots$ ,  $d^{n-1}f(t)/dt^{n-1}$ , representan los valores de  $f(t)$  y las derivadas de  $f(t)$  respectivamente, evaluadas en  $t = 0$ .

f) Transformada de Laplace de la integral.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (D.8)$$

- Teorema de la convolución.

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones que son seccionalmente continuas en todo intervalo cerrado finito  $0 \leq t \leq N$  y de orden exponencial  $\gamma$ . La función representada por  $f * g$  y definida por:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) dt \quad (D.9)$$

se llama convolución de las funciones  $f$  y  $g$ .

Cambiando la variable de integración de la ecuación (D.9) por medio de la sustitución  $u = t - \tau$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 f(t) * g(t) &= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\
 &= - \int_t^0 f(t-u) g(u) du \\
 &= \int_0^t g(u) f(t-u) du = g(t) * f(t)
 \end{aligned}$$

g) Multiplicación de  $t^n$

$$\mathcal{L} \left\{ t^n f(t) \right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^n(s) \quad (D.10)$$

h) División por  $t$ .

$$\mathcal{L} \left\{ f(t)/t \right\} = \int_0^\infty f(u) du \quad (D.11)$$

esta transformada aplica solamente si:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ f(t)/t \right] \quad \text{existe}$$

i) Teorema del valor inicial.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad (D.12)$$

j) Teorema del valor final.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) \quad (D.13)$$

### 3. TABLAS DE TRANSFORMADAS.

En la tabla D.1 se listan pares de transformadas de Laplace. Se puede utilizar esta tabla para obtener la transformada de Laplace de una función de tiempo dada, o para hallar la función de tiempo correspondiente a una transformada de Laplace dada.

La tabla D.1 también puede ser adecuada para resolver problemas ordinarios en el campo de los sistemas de control.

#### D.2 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.

##### 1. DEFINICION.

Si la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  es  $F(s)$ , es decir,  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , entonces  $f(t)$  se llama transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  y se expresa por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (D.14)$$

donde  $\mathcal{L}^{-1}$  se llama el operador de la transformada inversa de Laplace.

Existen varios métodos para poder encontrar la transformada

TABLA D.1 T-RES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES.

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
t	$\frac{1}{s^2} \quad s > 0$
t <sup>n</sup> n = 0, 1, 2, ...	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
e <sup>at</sup>	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
sen at	$\frac{a}{s^2+a^2} \quad s > 0$
cos at	$\frac{s}{s^2+a^2} \quad s > 0$

inversa de Laplace, de los cuales los más utilizados son el de fracciones parciales y el de expansión de Heaviside, que se tratarán a continuación.

a) Metodo de fracciones parciales.

Asumir que la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  es dada por:

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (D.15)$$

donde  $Q(s)$  y  $P(s)$  son polinomios en "s" de orden  $m$  y  $n$ , respectivamente.

La inversión de la transformada de Laplace usando la expansión en fracciones parciales está compuesta por los siguientes tres pasos:

a.1) Expandir  $Q(s)/P(s)$  dentro de una serie de fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{C_1}{r_1(s)} + \frac{C_2}{r_2(s)} + \dots + \frac{C_n}{r_n(s)} \quad (D.16)$$

donde  $r_1(s)$ ,  $r_2(s)$ , ...,  $r_n(s)$  pueden ser polinomios de 1er.orden, 2do. orden, etc.

La expansión en una serie de fracciones parciales toma en cuenta las siguientes reglas:

- Si un factor lineal  $(as + b)$  está como denominador hay

una fracción parcial que corresponde a este factor.

Este es:

$$\frac{A}{(as + b)} \quad \text{donde } A = \text{constante} \neq 0$$

- Si un factor lineal  $(as + b)$  está como denominador  $n$ -veces, entonces hay  $n$ -fracciones parciales las cuales corresponden a los  $n$ -factores. Estas fracciones son:

$$\frac{A_1}{(as + b)} + \frac{A_2}{(as + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(as + b)^n}$$

donde  $A_1, A_2, \dots, A_n = \text{constantes} \neq 0$

- Si un factor cuadrático  $(as^2 + bs + c)$  está una vez como denominador, hay una fracción parcial la cual corresponde al siguiente factor:

$$\frac{As + B}{(as^2 + bs + c)} \quad \text{donde } A \text{ y } B = \text{constantes} \neq 0$$

- Si un factor cuadrático  $(as^2 + bs + c)$  está  $n$ -veces como denominador, hay  $n$ -fracciones parciales las cuales corresponden a  $n$ -factores los cuales son:

$$\frac{A_1s + B_1}{(as^2 + bs + c)} + \frac{A_2s + B_2}{(as^2 + bs + c)^2} + \frac{A_3s + B_3}{(as^2 + bs + c)^3} + \dots + \frac{A_n s + B_n}{(as^2 + bs + c)^n}$$

donde A y B = constantes y  $A_i s + B_i \neq 0$

a.2) Encontrar los valores de las constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  de la ecuación (D.16).

a.3) Encontrar la transformada inversa de cada fracción parcial; ésta se puede encontrar usando tablas de transformadas de Laplace para varias funciones típicas, tales como las de la tabla D.1. Entonces la función  $f(t)$  es dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C_1}{r_1(s)} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C_2}{r_2(s)} \right] + \dots + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C_n}{r_n(s)} \right]$$

b) Método de expansión de Heaviside.

En este método el numerador y el denominador deben de ser polinomios en "s".

Definiendo una función de transferencia como:

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad \text{donde } P(s) > Q(s)$$

es posible factorizar  $P(s)$  en n-factores y si  $P(s)$  tiene n-raíces distintas, entonces:

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(s + a_i)}$$

Para evaluar  $C_j$ , multiplicamos ambos lados por  $(s + a_j)$ .

$$\frac{Q(s)(s + a_j)}{P(s)} = \sum_{l=1}^n \frac{C_l(s + a_j)}{(s + a_l)}$$

evaluando ambos lados con  $s = -a_j$ , todos los términos de la sumatoria son iguales a 0, excepto el  $j$ -ésimo término; y se puede escribir:

$$C_j = \frac{Q(a_j)}{P'(a_j)}$$

donde:

$$P'(s) = \frac{P(s)}{(s + a_j)}$$

**INDICES DE FIGURAS,  
TABLAS Y GRAFICAS**

## INDICE DE FIGURAS

FIGURA	pags.
1.1 Variables de proceso.....	25
1.2 Circuito de control de retroalimentación.....	32
2.1 Desarrollo de un modelo matemático.....	41
2.2 Clasificación de los modelos matemáticos.....	43
2.3 Localización de polos en el plano complejo.....	62
2.4 Comportamiento de los polos en una gráfica.....	63
2.5 Diagrama de bloques para un proceso con dos entradas y dos salidas.....	80
2.6 Entrada onda senoidal.....	83
2.7 Proceso lineal forzado por una entrada onda senoidal.....	85
2.8 Respuesta de un sistema a una entrada tipo onda senoidal.....	93
2.9 Forma de una gráfica de Nyquist.....	98
2.10 Gráficas de Nyquist para varios sistemas.....	100
2.11 Gráficas de Bode para varios sistemas.....	101
2.12 Gráficas de Nichols para varios sistemas.....	102
3.1 (a) Proceso y (b) Ciclo feedback correspondiente.....	106
3.2a Sistema feedback para control de flujo.....	108
3.2b Sistema feedback para control de presión.....	109

3.2c	Sistema feedback para control de nivel de líquido.....	110
3.2d	Sistema feedback para control de composición.....	111
3.2e	Sistema feedback para control de temperatura.....	112
3.3	Representación simplificada de un ciclo feedback.....	114
3.4	Sistema multivariable feedback: (a) Ciclo abierto y (b) Ciclo cerrado.....	117
3.5	Sistema de control feedback multivariable.....	118
3.6	Estructura de un sistema de control: (a) Feedback y (b) Feedforward.....	120
3.7a	Ejemplo de un control feedforward para un intercambiador de calor.....	121
3.7b	Ejemplo de un control feedforward para un tanque evaporador.....	123
3.8a	Sistema multivariable feedforward para una columna de destilación.....	124
3.8b	Sistema multivariable feedforward para un RTAC.....	125
3.9	Circuito de control abierto.....	127
3.10	RTAC con chaqueta de enfriamiento.....	129
3.11a	Control de temperatura de un RTAC con feedback convencional.....	131
3.11b	Control de temperatura de la chaqueta de un RTAC en cascada.....	132

3.12	(a) Representación esquemática de proceso de ciclo abierto y (b) Feedback convencional.....	134
3.12c	Representación esquemática de un control en cascada.....	135
3.13a	Ejemplo de un control en cascada para un intercambiador de calor.....	136
3.13b	Ejemplo de un control en cascada para una columna de destilación.....	138
3.14	Configuración alternativa de un sistema de control de relación.....	140
3.15	(a) Reactor de control de rango dividido y (b) Acción de dos válvulas.....	142
3.16	Control de predominio para protección de un sistema calentador.....	146
3.17	Control de predominio para protección de un compresor.....	148
3.18	Perfiles de temperatura en un reactor catalítico tubular.....	149
3.19	Sistema de control subastado para un reactor catalítico tubular.....	151
3.20	Diagrama de bloques de un controlador.....	163
3.21	Corrimiento (offset).....	167
3.22	Respuesta de un controlador PI a un cambio de paso unitario en error.....	170
3.23	Respuesta de un controlador PD a una entrada lineal en error.....	173

3.24	Principales partes de una válvula de control.....	177
3.25	Tipos de curvas de flujo característico.....	181
3.26	La curva característica de flujo parabólico modificado.....	182
3.27	Partes que forman un diagrama de bloques.....	192
3.28	Configuración básica de un sistema de control por retroalimentación.....	193
3.29	Forma canónica de un sistema de control por retroalimentación.....	195
3.30	Diagrama de la estrategia empleada durante la síntesis de estructuras de control.....	204
3.31	Raíces de segundo orden dominantes en el plano "s".....	209
3.32	Ajuste secuencial de controladores para un sistema multivariable 2X2.....	219
3.33	Estructura de control multivariable que incluye un compensador no interactuante.....	227
3.34	Diagrama de bloques para un control feedback modal.....	237
3.35	Arreglo del controlador para una relación de decaimiento 1:4.....	240
4.1	Reactor de tanque agitado continuo no isotérmico.....	250

4.2	RTAC no isotérmico con estructura de control.....	265
4.3	Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el modelo del RTAC no isotérmico para la ganancia $K_c$ .....	295
4.4	Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el modelo del RTAC no isotérmico para la ganancia $K_r$ .....	296
B.1	Linealización de una función univariable.....	389
C.1	Variables de desviación.....	395

## INDICE DE TABLAS

TABLA	pags.
1.1 Algunos eventos en la historia del control.....	15
1.2 Tipos de perturbaciones.....	21
2.1 Factores para la respuesta a la frecuencia.....	91
3.1 Ventajas y desventajas relativas del control feedback y del control feedforward.....	115
3.2 Señal de salida y coordinación de las válvulas.....	143
3.3 Ejemplos de la relación entre rango y span de un instrumento.....	155
3.4 Dispositivos de medición típicos para procesos de control.....	160
3.5 Modos de control y sus aplicaciones.....	175
3.6 Diferentes tipos de válvulas.....	184
3.7 Transmisores de proceso más comúnmente usados.....	188
3.8 Teoremas de transformaciones de diagramas de bloques.....	197
3.9 Ecuaciones de ajuste para el arreglo del controlador.....	242
4.1 Valores de los parámetros para el modelo del RTAC no isotérmico.....	267
4.2 Controladores proporcionales con $F_e=44$ , $K_r=10$ y $K_c=4$ .....	310

4.3	Controladores proporcionales con $C_{Ae}=0.55$ , $Kr=10$ y $Kc=4$ .....	313
4.4	Controladores proporcionales con $Te=583$ , $Kr=10$ y $Kc=4$ .....	316
4.5	Controladores PD con $Fe=44$ , $Kr=10$ , $Kc=6$ , $\tau_{Dr}=0.8$ y $\tau_{Dc}=0.2$ .....	319
4.6	Controladores PD con $C_{Ae}=0.55$ , $Kr=10$ , $Kc=6$ , $\tau_{Dr}=0.8$ y $\tau_{Dc}=0.2$ .....	322
4.7	Controladores PD con $Te=583$ , $Kr=10$ , $Kc=6$ , $\tau_{Dr}=0.8$ y $\tau_{Dc}=0.2$ .....	325
4.8	Controladores PI con $Fe=44$ , $Kr=10$ , $Kc=10$ , $\tau_{Ir}=0.5$ y $\tau_{Ic}=0.5$ .....	328
4.9	Controladores PI con $C_{Ae}=0.55$ , $Kr=10$ , $Kc=10$ , $\tau_{Ir}=0.5$ y $\tau_{Ic}=0.5$ .....	331
4.10	Controladores PI con $Te=583$ , $Kr=10$ , $Kc=10$ , $\tau_{Ir}=0.5$ y $\tau_{Ic}=0.5$ .....	334
4.11	Controladores PID con $Fe=44$ , $Kr=10$ , $Kc=6$ , $\tau_{Dr}=0.8$ , $\tau_{Dc}=0.2$ , $\tau_{Ir}=0.8$ y $\tau_{Ic}=0.2$ .....	337
4.12	Controladores PID con $C_{Ae}=0.55$ , $Kr=10$ , $Kc=6$ , $\tau_{Dr}=0.8$ , $\tau_{Dc}=0.2$ , $\tau_{Ir}=0.8$ y $\tau_{Ic}=0.2$ .....	340
4.13	Controladores PID con $Te=583$ , $Kr=10$ , $Kc=6$ , $\tau_{Dr}=0.8$ , $\tau_{Dc}=0.2$ , $\tau_{Ir}=0.8$ y $\tau_{Ic}=0.2$ .....	343
D.1	Pares de transformadas de Laplace de algunas funciones elementales.....	402

## INDICE DE GRAFICAS

GRAFICA	pags.
4.1 RTAC sin control en el espacio de Laplace ( $C_A$ ).....	304
4.2 RTAC sin control en el espacio de Laplace ( $T$ y $T_j$ ).....	305
4.3 RTAC sin control en variable de estado ( $C_A$ ).....	306
4.4 RTAC sin control en variable de estado ( $t$ y $T_j$ ).....	307
4.5 RTAC con control en el espacio de Laplace ( $V$ y $C_A$ ).....	308
4.6 RTAC con control en el espacio de Laplace ( $T$ y $T_j$ ).....	309
4.7 RTAC con controladores proporcionales para una perturbación $F_e=44$ , con $K_r=10$ , y $K_c=4$ ( $V$ y $C_A$ ).....	311
4.8 RTAC con controladores proporcionales para una perturbación $F_e=44$ , con $K_r=10$ , y $K_c=4$ ( $T$ y $T_j$ ).....	312
4.9 RTAC con controladores proporcionales para una perturbación $C_{Ae}=0.55$ , con $K_r=10$ , y $K_c=4$ ( $V$ y $C_A$ ).....	314
4.10 RTAC con controladores proporcionales para una perturbación $C_{Ae}=0.55$ , con $K_r=10$ , y $K_c=4$ ( $T$ y $T_j$ ).....	315

- 4.11 RTAC con controladores proporcionales para una perturbación  $T_e=583$ , con  $K_r=10$ , y  $K_c=4$  (V y  $C_A$ ).....317
- 4.12 RTAC con controladores proporcionales para una perturbación  $T_e=583$ , con  $K_r=10$ , y  $K_c=4$  (T y  $T_j$ ).....318
- 4.13 RTAC con controladores PD para una perturbación  $F_e=44$ , con  $K_r=10$ ,  $K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$  y  $\tau_{Dc}=0.2$  (V y  $C_A$ ).....320
- 4.14 RTAC con controladores PD para una perturbación  $F_e=44$ , con  $K_r=10$ ,  $K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$  y  $\tau_{Dc}=0.2$  (T y  $T_j$ ).....321
- 4.15 RTAC con controladores PD para una perturbación  $C_{Ae}=0.55$ , con  $K_r=10$ ,  $K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$  y  $\tau_{Dc}=0.2$  (V y  $C_A$ ).....323
- 4.16 RTAC con controladores PD para una perturbación  $C_{Ae}=0.55$ , con  $K_r=10$ ,  $K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$  y  $\tau_{Dc}=0.2$  (T y  $T_j$ ).....324
- 4.17 RTAC con controladores PD para una perturbación  $T_e=583$ , con  $K_r=10$ ,  $K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$  y  $\tau_{Dc}=0.2$  (V y  $C_A$ ).....326
- 4.18 RTAC con controladores PD para una perturbación  $T_e=583$ , con  $K_r=10$ ,  $K_c=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$  y  $\tau_{Dc}=0.2$  (T y  $T_j$ ).....327
- 4.19 RTAC con controladores PI para una perturbación  $F_e=44$ , con  $K_r=10$ ,  $K_c=10$ ,  $\tau_{Ir}=0.5$  y  $\tau_{Ic}=0.5$  (V y  $C_A$ ).....329

4.20 RTAC con controladores PI para una perturbación $F_e=44$ , con $K_r=10$ , $K_c=10$ , $\tau_{I_r}=0.5$ y $\tau_{I_c}=0.5$ (T y Tj).....	330
4.21 RTAC con controladores PI para una perturbación $C_{Ae}=0.55$ , con $K_r=10$ , $K_c=10$ , $\tau_{I_r}=0.5$ y $\tau_{I_c}=0.5$ (V y $C_A$ ).....	332
4.22 RTAC con controladores PI para una perturbación $C_{Ae}=0.55$ , con $K_r=10$ , $K_c=10$ , $\tau_{I_r}=0.5$ y $\tau_{I_c}=0.5$ (T y Tj).....	333
4.23 RTAC con controladores PI para una perturbación $T_e=583$ , con $K_r=10$ , $K_c=10$ , $\tau_{I_r}=0.5$ y $\tau_{I_c}=0.5$ (V y $C_A$ ).....	335
4.24 RTAC con controladores PI para una perturbación $T_e=583$ , con $K_r=10$ , $K_c=10$ , $\tau_{I_r}=0.5$ y $\tau_{I_c}=0.5$ (T y Tj).....	336
4.25 RTAC con controladores PID para una perturbación $F_e=44$ , con $K_r=10$ , $K_c=6$ , $\tau_{D_r}=0.8$ , $\tau_{D_c}=0.2$ , $\tau_{I_r}=0.8$ y $\tau_{I_c}=0.2$ (V y $C_A$ ).....	338
4.26 RTAC con controladores PID para una perturbación $F_e=44$ , con $K_r=10$ , $K_c=6$ , $\tau_{D_r}=0.8$ , $\tau_{D_c}=0.2$ , $\tau_{I_r}=0.8$ y $\tau_{I_c}=0.2$ (T y Tj).....	339
4.27 RTAC con controladores PID para una perturbación $C_{Ae}=0.55$ , con $K_r=10$ , $K_c=6$ , $\tau_{D_r}=0.8$ , $\tau_{D_c}=0.2$ , $\tau_{I_r}=0.8$ y $\tau_{I_c}=0.2$ (V y $C_A$ ).....	341

- 4.28 RTAC con controladores PID para una perturbación  $C_{Ae}=0.55$ , con  $Kr=10$ ,  $Kc=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$ ,  $\tau_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ir}=0.8$  y  $\tau_{Ic}=0.2$  (T y Tj).....342
- 4.29 RTAC con controladores PID para una perturbación  $Te=583$ , con  $Kr=10$ ,  $Kc=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$ ,  $\tau_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ir}=0.8$  y  $\tau_{Ic}=0.2$  (V y  $C_A$ ).....344
- 4.30 RTAC con controladores PID para una perturbación  $Te=583$ , con  $Kr=10$ ,  $Kc=6$ ,  $\tau_{Dr}=0.8$ ,  $\tau_{Dc}=0.2$ ,  $\tau_{Ir}=0.8$  y  $\tau_{Ic}=0.2$  (T y Tj).....345

## BIBLIOGRAFIA.

1. Andrew W.G., William H.B. Applied Instrumentation in the Process Industries. Vol.I. Gulf Publishing Company Book Division. U.S.A 1979.
2. Burghes D. N., Graham A. Introduction to Control Theory, Including Optimal Control. Ellis Horwood Limited. England 1980.
3. Buckley Page S. Techniques of Process Control. Wiley. U.S.A. 1964.
4. Cárdenas, H, et al. Algebra Superior. Ed. Trillas. México 1979.
5. Coughanowr D.R., Koppel L.B. Process Systems Analysis and Control. Mc. Graw Hill Book Company. U.S.A 1965.
6. Díaz-Andreu García Francisco. ¿Qué es el control avanzado?. Ingeniería Química, Agosto 1988, pp. 690-693.
7. Dennis G. Zill. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1982.
8. Distefano Joseph J. Retroalimentación y Sistemas de Control. Serie Schaum Mc. Graw Hill. México 1983.
9. García de Paz José Luis. Control Avanzado de Procesos Industriales. Ingeniería Química, Agosto 1988, pp. 51-59.
10. Govind Rakesh, Powers G. J. Control System Synthesis Strategies Aiche Journal, January 1982, Vol. 28, No. 1.

11. Guy John L. Fundamentals of Chemical Process Dynamics. CErefresher : Process Dynamics/1. Chemical Engineering, June 28, 1981, pp. 74-80.
12. Guy John L. Process Control Loops. CErefresher: Process Dynamics/2. Chemical Engineering, August 24, 1981, pp. 111-117.
13. Guy John L. Dynamic Modeling of Tank-Type Reactor Systems. CErefresher: Process Dynamics/7. Chemical Engineering, June 28, pp. 97-102.
14. Himmelblau David M., Kenneth B. Bischoff. Análisis y Simulación de Procesos. Reverté S.A. Barcelona, España 1976.
15. Howard Harrison. Controles Automáticos. Centro Regional de Ayuda Técnica, Agencia para el Desarrollo Internacional. México 1969.
16. Jensen N., Fisher D.G., Shah S.L. Interaction, Analysis in Multivariable Control Systems. Aiche Journal, June 1986, Vol. 32, No. 6, pp. 959-969.
17. Kinney Thomas B. Tuning Process Controllers. CErefresher: Process Automation/3. Chemical Engineering, September 19, 1983, pp. 67-72.
18. Leslie M. Zoss. Applied Instrumentation in the Process Industries. Vol. IV. Control Systems: Theory Troubleshooting, and Desing. Gulf Publishing Company

Book Division. Houston, U.S.A 1979.

19. Lewis M. Gordon. Feedback Control Modes. Cerefrasher 2. Chemical Engineering, August 8, 1983, pp. 79-85.
20. Lewis M. Gordon. Advanced Control Methods. CErefresher B. Chemical Engineering, August 20, 1984, pp. 151-158.
21. Luyben W.L. Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers. Mc. Graw Hill Book Company. USA 1964.
22. Morari Manfred, Arkun Yaman, Stephanopoulos George. Studies in the Synthesis of Control Structures for Chemical Process. Aiche Journal, March 1980, Vol. 26, No. 2, pp. 220-231.
23. Morari Manfred, Stephanopoulos George. Structural Aspects and the Synthesis of Alternative Feasible Control Schemes. Aiche Journal, March 1980, Vol. 26, No. 2, pp. 232-246.
24. Morari Manfred, Stephanopoulos George. Optimal Selection of Secondary Measurements within the Framework of State Estimation in the Presence of Persistent Unknown Disturbances. Aiche Journal, March 1980, Vol. 26, No.2, pp. 247-260.
25. Morari Manfred, Stephanopoulos George. Design of Steady-State Optimizing Control Structures For Chemical Process Units. Aiche Journal, November 1980, Vol.26, No. 6, pp. 975-991.

26. Morari Manfred, Stephanopoulos George. Design of Steady-State Optimizing Control Structures for Integrated Chemical Plants. Aiche Journal, September 1981, Vol. 27, No. 5, pp. 779-793.
27. Murray R. Spiegel. Transformadas de Laplace. Serie de Compendios Shaum Mc. Graw Hill. México 1970.
28. Nishida Naonori, Stephanopoulos George, Westerberg A. W. A Review of Process Synthesis. Aiche Journal, May 1981, Vol. 27, No. 3.
29. Ogunnaikke B.A., Ray W.H. Multivariable Controller Design for Linear Systems Having Multiple Time Delays. Aiche Journal, November 1979, Vol. 25, No. 25, pp. 1043-1057.
30. Owens D.H. Multivariable Optimal Systems. Academic Press Inc. London, Great Britain 1981.
31. Palm William J. Modeling Analysis and Control of Dynamic Systems. Library of Congress Cataloging in Publication Data. Wiley. U.S.A 1983.
32. Palmor Z. J., Shinnar R. Design of Advanced Process Controllers. Aiche Journal, September 1981, Vol. 27, No. 5, pp. 793-805.
33. Pericles Emanuel. Introduction to Feedback Control Systems. Mc. Graw Hill, International Book Company. USA 1982.

34. Pollard A. Process Control. Heinemann Educational Book. London, Great Britain 1971.
35. Raven Francis H. Automatic Control Engineering. Mc. Graw Hill International Book Company. México 1983.
36. Ray W. Harmon. Advanced Process Control. Mc Graw Hill Book Company. New York, U.S.A. 1981.
37. Reid J. Gary. Linear System Fundamentals. Mc Graw Hill International Book Company. Tokio, Japan 1983.
38. Richards R.J. An Introduction to Dynamics & Control. Longman Group Limited London. U.S.A. 1979.
39. Rugh W. J. Design of Nonlinear PID Controllers. Aiche Journal, October 1987, Vol. 33, No. 10, pp. 1738-1742.
40. Shannon Robert E. Systems Simulations: The Art and Science. Prentice -Hall, Inc. New York, U.S.A 1975.
41. Shinskey F.G. Process Control Systems. Mc. Graw Hill Book Company. U.S.A 1979.
42. Smith Cecil L., Pike Ralph W., Murril Paul W. Formulation and Optimization of Mathematical Models. International Textbook Company. U.S.A 1970.
43. Smith Cecil L. Fundamentals of Control Theory. Chemical Engineering, October 15, 1979.
44. Stephanopoulos George. Chemical Process Control. Prentice-Hall Inc. U.S.A 1984.

45. Takahashi Yosudo. Control and Dynamic Systems. Addison Wesley Publishing Company. U.S.A 1970.
46. Tung L.S., Edgar T.F. Analysis of Control-output Interactions in Dynamic Systems. Aiche Journal, July 1981, Vol. 27, No. 4, pp. 690-693.
47. Vega Aurelio, Coca José. Métodos de Ajuste de Controladores. Ingeniería Química, Parte 1, Agosto 1988, pp. 93-99.