87-0120

Universidad Autónoma de Guadalajara

INCORPORADA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA
Fundada en 1935

"Solución de Ecuaciones Diferenciales Mediante Productos Infinitos"

Tesis Profesional

que para obtener el título de:

MATEMATICO

presenta:

José del Carmen Aréchiga Maravillas

Guadalajara, Jalisco 1988

CONTENIDO

1.- INTRODUCCION

La historia de las ecuaciones diferenciales comenzó en el siglo XVII cuando Newton, Leibniz y los Bernoulli resolvieron algunas ecuaciones diferenciales sencillas de primero y segundo orden que se presentaron en problemas de Geometría y Mecánica. Estos primeros conocimientos, iniciados alrededor de 1690, hicieron creer que las soluciones de todas las ecuaciones diferenciales originadas en problemas geométricos y físicos podrían expresarse por medio de funciones elementales del cálculo. Por ello gran parte de los primeros esfuerzos fueron orientados al desarrollo de técnicas ingeniosas para resolver ecuaciones diferenciales por medio de recursos sencillos como son la adición, sustracción, multiplicación, división, composición e integración, aplicadas tan sólo un número finito de veces a las funciones ordinarias del cálculo.

Los métodos especiales, tales como la separación de variables y el empleo de factores integrantes, fueron ideados de manera más o menos casual antes de fines del siglo XVII. Durante el siglo XVIII, fueron desarrollados procedimientos más sistemáticos, principalmente por Euler, Lagrange y Laplace. Pronto se vió que relativamente pocas ecuaciones diferenciales podían resolverse con recursos elementales. Poco a poco, los matemáticos fueron dándose cuenta que era vano empeño el intentar descubrir métodos para resolver todas las ecuaciones diferenciales. En lugar de ello, encontraron más provechoso averiguar si una ecuación diferencial dada tenía o no solución a partir de la misma ecuación diferencial. Con ello, los matemáticos empezaron a considerar las ecuaciones diferenciales como fuentes de nuevas funciones.

A principios del siglo XIX se desarrlló una fase importante de esa teoría, siguiendo una tendencia paralela a la de conseguir un desarrollo más riguroso del cálculo. En 1820, Cauchy obtuvo el primer " Teorema de existencia " para las ecuaciones diferenciales. Demostró que toda ecuación de primer orden de la forma $y'=f(x,y)$ tiene solución, siempre que el segundo miembro, $f(x,y)$ satisfaga ciertas condiciones generales. Un ejemplo importante es la ecuación de Ricatti, $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$, en la que P,Q y R son funciones dadas. El trabajo de Cauchy implica la existencia de una solución de la ecuación de Ricatti en cualquier intervalo abierto $(-r,r)$ en torno al origen, con tal que P,Q y R admitan desarrollos de serie de potencias en $(-r,r)$. En 1841 José Liouville (1809-1882) demostró que en algunos casos esa solución no puede obtenerse con medios elementales.

La experiencia ha puesto de manifiesto que es difícil obtener resultados de tipo general relativos a las soluciones de las ecuaciones diferenciales, salvo para unos pocos tipos.

Para la resolución de las ecuaciohes diferenciales lineales ordinarias con coeficientes variables y de orden superior al primer orden, probablemente el método más efectivo es el que se basa en el uso de las series de potencias.

Este trabajo trata de mostrar un nuevo método de solución para las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes variables de segundo orden, donde los coeficientes variables cumplen con ciertos requisitos. Este método se fundamenta en la teoría de los productos infinitos.

En el siguiente capítulo daré los conceptos básicos que he considerado necesarios, con el objeto que la tesis sea "autosuficiente", y para evitar incompatibilidad con definiciones de otros autores.

La tesis esta basada en un proyecto propuesto por Robert G. Bartle en su libro "The Elements of Real Analysis". El proyecto original que trata sobre el tema de los productos infinitos, lo he desarrollado con la intención de presentarlo como una aplicación, para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes variables de segundo orden de la forma $y''+f(x)y=0$.

Así mismo en el capítulo seis analizaremos un ejemplo de ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes variables, la ecuación de Bessel, de la forma

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

donde p es una constante no negativa. Esta ecuación se emplea en problemas relativos a vibraciones de membranas, flujo de calor en cilindros, y propagación de corrientes eléctricas en conductores cilíndricos.

Solo me queda agradecer por su labor docente y el haberme inculcado, con el mejor de los propósitos y disposición, el buen gusto por las matemáticas a los señores profesores:

Ingeniero Rogelio Gil Mendez, Maestro en ciencias, a los matemáticos Javier Gómez Pelayo, Rafael Gutiérrez Cornejo y Guillermo Uribe, y muy especialmente al ingeniero Eduardo M. Ojeda Peña, Maestro en ciencias y asesor principal de esta tesis, por quien, gracias a su orientación y valiosos consejos, se hizo posible el presente trabajo.

2. CONCEPTOS BASICOS

2.1 Definición de número complejo.

Si a y b son números reales, el par (a,b) se llama número complejo, si la igualdad, la adición y la multiplicación de pares se definen del modo siguiente:

a) Igualdad: $(a,b)=(c,d) \Longleftrightarrow a=c$ y $b=d$

b) Suma: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

c) Multiplicación: $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

En las siguientes definiciones se utilizará la representación del complejo $z=(a,b)$ en la forma de binomio $a+bi$ donde el número $i=\sqrt{-1}$ ó, en su forma de par ordenado, $i=(0,1)$.

2.2 Representación geométrica

Definición: Si z es un número complejo de la forma $z=x+iy$ entonces $z=r(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)$ donde $r=\sqrt{x^2+y^2}=|x+iy|$ se llama módulo o valor absoluto y $\theta=\text{arc tan}\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x\neq 0$ ó $\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$ si $x=0$, se llama argumento de $x+iy$; si $-\pi\leq\theta\leq\pi$, lo llamaremos argumento principal.

2.3 Exponencial compleja

Definición: Si $z=x+iy$, definimos e^z como el número complejo dado por la ecuación

$$e^z=e^x\ (\cos y + i\ \text{sen}\ y)$$

2.4 Norma uniforme

Definición: Si $D\subseteq R^p$ y $f: D\longrightarrow R^q$, se dice que es acotada siempre que exista $M>0$ tal que $\|f(x)\|<M$ para todo $x\in D$. Entonces se deduce que el número $\|f\|_D$ definido por medio de

$$\|f\|_D = \text{Sup}\left\{\|f(x)\| : x\in D\right\} \text{ existe en } R$$

Definición: Si $D\subseteq R^p$, entonces la colección de todas las funciones acotadas en D a R^q se designa por medio de $B_{pq}(D)$. Este resulta ser un espacio vectorial cuando se definen la suma vectorial y la multiplicación de escalares(reales) por vectores como sigue:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (cf)(x)=c\ f(x) \quad \text{para todo } x\in D$$

2.5 Función Entera

Definición: Una función $F(z)$ es entera cuando es diferenciable sobre todo el plano (z). Si $F(z)$ es una función entera lo es también $Q(z)=e^{F(z)}$ y ésta es una función que no se anula.

2.6 Sucesiones

Definición: Si $S\subset R^p$ es cualquier conjunto, una sucesión en S es una función con dominio en el conjunto $N=\{1,2,3,\ldots\}$ de números naturales y cuyo contradominio está en S. Donde su notación funcional está dada por:

$$X: N \longrightarrow S\subset R^p$$

otras notaciones para sucesiones serían $X=(X_n)$ o bien $\{X_n\}$ sus elementos están representados por $X(n)=X_n$.

Definición: Sea $X=(X_n)$ una sucesión en R^p , se dice que un elemento x de R^p es un límite de X si para cada vecindad V de x hay un número natural K_v , tal que para todo $n\geq K_v$, X_n pertenece a V. Si una sucesión tiene límite se dice que la sucesión es convergente. Si una sucesión no tiene límite se dice que es divergente.

La notación K_v se usa para indicar que la elección de K dependerá de la vecindad V.

Teorema: Sea $X=(X_n)$ una sucesión en R^p. Un elemento x de R^p es un límite de X si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ hay un número natural $K(\varepsilon)$ tal que para todo $n\geq K(\varepsilon)$, $\|X_n-x\| \leq \varepsilon$.

La demostración de este teorema se encuentra en el libro de Robert G. Bartle titulado "The elements of Real Analysis".

Definición: Sea (f_n) una sucesión de funciones en $D\subseteq R^p$ a R^q , sea D_o un subconjunto de D y sea f una función con un dominio que contiene a D_o y contradominio en R^q . Se dice que la sucesión (f_n) converge en D_o a f si , para cada x en D_o la sucesión $\big(f_n(x)\big)$ converge en R^q a $f(x)$. En este caso a la función f se le llama el límite en D_o de la sucesión (f_n).

Definición: Una sucesión (f_n) de funciones en $D \subseteq R^p$ a R^q converge uniformemente en un subconjunto D_o de D a una función f cuando para cada $\varepsilon > 0$ hay un número natural $K(\varepsilon)$ (depende solo de ε no de $x \in D_o$) tal que para todo $n \geq K(\varepsilon)$ y $x \in D_o$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ en este caso se dice que la sucesión es uniformemente convergente en D_o .

Criterio de Cauchy para convergencia uniforme.

Sea (f_n) una sucesión de funciones en $B_{pq}(D)$. Entonces, hay una función $f \in B_{pq}(D)$ a la cual (f_n) converge uniformemente en D si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ hay un número natural $M(\varepsilon)$ tal que para todos $m, n \geq M(\varepsilon)$, $\|f_m - f_n\|_D \leq \varepsilon$.

2.7 Series

Definición: Si $X = (X_n)$ es una sucesión en R^p, entonces la serie infinita que genera X es la sucesión $S = (S_k)$ definida por $S_1 = X_1$, $S_2 = S_1 + X_2 = X_1 + X_2$, ..., $S_k = S_{k-1} + X_k = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_k$, ...

El número S_k es la suma parcial k-ésima de la serie y X_k es el término k-ésimo de la serie. Se dice que la serie es convergente o divergente según que $\{S_k\}$ sea convergente o divergente respectivamente.

Para designar la serie infinita se usan los siguientes símbolos:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_k + \ldots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} X_k$$

Definición:

a) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ se dice que converge a la suma S si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. En este caso escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = S$.

b) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ se dice que diverge, si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe; en este caso escribimos $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ no existe.

Criterio de Cauchy para series.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ en R^p converge si y sólo si para cada número $\varepsilon > 0$ hay un número natural $M(\varepsilon)$ tal que si $m \geq n \geq M(\varepsilon)$, entonces $\|S_m - S_n\| = \|X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3} + \ldots + X_m\| < \varepsilon$

Definición: Sea $X=(X_n)$ una sucesión en R^p. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\|X_n\|$ es convergente en R. Se dice que una serie es condicionalmente convergente si es convergente pero no absolutamente convergente.

Definición: Si (f_n) es una sucesión de funciones definidas en un subconjunto D de R^p con valores en R^q, la sucesión de sumas parciales (S_n) de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ está definida para x en D por medio de

$S_1(x)=f_1(x)$, $S_{n+1}(x)=S_n(x)+f_{n+1}(x)$ para $n=1,2,3,\ldots$

En caso de que la sucesión (S_n) converja en D a una función f, se dice que la serie infinita de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a f en D.

Criterio de Cauchy para series infinitas de funciones.

Sea (f_n) una sucesión de funciones de $D\subseteq R^p$ a R^q, la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente convergente en D si y sólo si para todo $\epsilon>0$ existe un $M(\epsilon)$ tal que si $m\geq n\geq M(\epsilon)$ entonces

$$\|f_n + f_{n+1} + \ldots + f_m\|_D < \epsilon$$

3. PRODUCTOS INFINITOS

3.1 Concepto. Sea $U_1, U_2, \ldots$ una sucesión de números complejos, entonces se entenderá por producto infinito una expresión de la forma $U_1 . U_2 . U_3 \ldots = \prod_{k=1} U_k$

La expresión P_n, definida por $P_n = \prod_{k=1}^{n} U_k = U_1 . U_2 \ldots U_n$ para $n=1,2,\ldots$ es llamado n-ésimo producto parcial asociado al producto infinito.

3.2 Convergencia.

Definición: Se dice que el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} U_k$ converge a un valor no cero P si la sucesión (P_n) converge al valor $P \neq 0$ y decimos que P es el valor del producto. De otra manera se dice que el producto diverge o es divergente.

A continuación se dará una condición necesaria para la convergencia de un producto infinito.

Teorema: Si $\prod_{n=1}^{\infty} U_n = P$ converge entonces $\lim_{n \to \infty} U_n = 1$

Demostración: Si el producto converge a $P \neq 0$ entonces

$$1 = \frac{P}{P} = \frac{\lim_{n\to\infty} P_n}{\lim_{n\to\infty} P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\prod_{k=1}^{n} U_k}{\prod_{k=1}^{n-1} U_k}\right] = \lim_{n\to\infty} U_n$$

El teorema anterior puede reacomodarse como sigue, si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

El teorema anterior mostró una condición necesaria más no suficiente; como lo demuestra el siguiente ejemplo:

El producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge, pues

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(k)} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k)}{\prod_{k=1}^{n}(k)} = n+1$$

y $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} n+1 =$ no existe.

No obstante, $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$

$$y \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

A continuación se mostrará una condición necesaria y suficiente para la convergencia de productos infinitos y la de serie infinita.

Teorema: El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ con factores cero eliminados converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\,(1+a_n)$ converge.

Demostración: Se supone que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ con factores cero eliminados converge al valor $P\neq 0$, entonces el n-ésimo producto parcial

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \quad \text{satisface} \quad \lim_{n\to\infty} P_n=P\neq 0 \text{ y } P_n\neq 0 \quad n=1,2,\ldots$$

Esto implica que $\lim_{n\to\infty}|P_n| = |P|>0$ y $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Arg}\, P_n= \mathrm{Arg}\, P$ además se sabe que $\mathrm{Arg}\, P_n= \mathrm{Arg}\left[\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Arg}\,(1+a_k)+2\pi U_n$ donde U_n es un entero apropiadamente escogido y $n=1,2,3,\ldots$ puesto que $\mathrm{Arg}\, P_n\longrightarrow \mathrm{Arg}\, P$,**entonces** existe un entero $N>0$ tal que $|\mathrm{Arg}\, P_{n+1}- \mathrm{Arg}\, P_n|<\pi$, $\forall\, n>N$ (criterio de Cauchy para sucesiones)

$$\text{Pero } |\mathrm{Arg}\, P_{n+1}- \mathrm{Arg}\, P_n| = \left|\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{Arg}\,(1+a_k) - \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Arg}\,(1+a_k)+2\pi(U_{n+1}-U_n)\right|$$

$$= \left|\mathrm{Arg}\,(1+a_{n+1}) + 2\pi(U_{n+1}-U_n)\right|$$

$$\geqslant 2\pi|U_{n+1}-U_n| - |\mathrm{Arg}\,(1+a_{n+1})|$$

(por desigualdad triángular)

$$|\mathrm{Arg}\, P_{n+1}- \mathrm{Arg}\, P_n|\geqslant 2\pi|U_{n+1}-U_n| -\pi \quad \text{pués} \quad |\mathrm{Arg}\, z|\leq\pi$$

Ahora $2\pi|U_{n+1}-U_n|-\pi<\pi$ entonces $|U_{n+1}-U_n|<1$, $\forall\, n>N$

puesto que los U_n son enteros esto implica que $U_n= U$ constante $\forall\, n>N$, así $U_n\longrightarrow U$

$$\text{entonces} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Arg}\,(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{Arg}\,(P_n) - 2\pi U_n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Arg}\, P_n - 2\pi\lim_{n\to\infty} U_n$$

$$= \mathrm{Arg}\, P - 2\pi U$$

$$= V$$

donde V es constante

puesto que $0<|P_n|\longrightarrow|P|>0$ por continuidad de Log z, sobre el eje real (positivo) tenemos que

$$\mathrm{Log}\,|P_n|\longrightarrow \mathrm{Log}\,|P|$$

pero $\mathrm{Log}\,P_n = \mathrm{Log}\,\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right|$

$$= \mathrm{Log}\,\prod_{k=1}^{n}|(1+a_k)| = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Log}\,|1+a_k|$$

así se tiene las siguientes sucesiones de números reales.

$$W_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Log}\,|1+a_k| \qquad \text{y} \qquad V_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Arg}\,(1+a_k)$$

convergen en los límites respectivamente W y V por consiguiente la sucesión $S_n = W_n + iV_n$ por lo tanto converge al límite $S= W + iV$, pero

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Log}\,|1+a_k| + i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Arg}\,(1+a_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{Log}\,|1+a_k| + i\ \mathrm{Arg}\,(1+a_k)\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Log}\,(1+a_k) \qquad n=1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Así la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\,(1+a_k)$ converge

($\Leftarrow$) Ahora se supone que $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\,(1+a_n)$ converge, digamos al valor S. Esto implica que las series $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\,|1+a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Arg}\,(1+a_n)$ convergen, digamos a los límites reales W y V respectivamente, dado que

$$W_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Log}\,|1+a_k| \qquad V_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Arg}\,(1+a_k)$$

$$S_n= W_n + iV_n = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Log}\,(1+a_k) \quad n=1,2,3,\ldots$$

Así $W_n\longrightarrow W$ y $V_n\longrightarrow V$, $S_n\longrightarrow S= W + iV$

$W_n= \mathrm{Log}\,\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right| = \mathrm{Log}\,|P_n|$ $n=1,2,3,\ldots$ donde $P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ también $V_n= \arg\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) + 2\pi U_n = \mathrm{Arg}\,P_n + 2\pi U_n$ para un entero U_n escogido apropiadamente $n=1,2,3,\ldots$ por continuidad de la función exponencial, tenemos

$$\begin{aligned} e^S = \exp S= \exp(\lim_{n\to\infty} S_n) &= \lim_{n\to\infty}\exp S_n\\ &= \lim_{n\to\infty}\exp\,(W_n + i\,V_n) \end{aligned}$$

$$e^{S} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \exp\left[\operatorname{Log}|P_n|\right] \cdot \exp\left[i \arg P_n + 2\pi i\, U_n\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[|P_n| \exp\left(i \operatorname{Arg} P_n\right)\right] = \lim_{n\to\infty} P_n$$

puesto que $\exp z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ entonces $\exp S \neq 0$ dejando que $P = \exp S$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$ así el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge, el teorema queda establecido.

3.3 Convergencia absoluta.

Definición: El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ se dice que es absolutamente convergente si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+a_n)$ es absolutamente convergente.

Teorema: El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ con factores cero eliminados es absolutamente convergente si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es absolutamente convergente.

Demostración: Sin pérdida de generalización podemos suponer que los factores iguales a uno han sido también eliminados del producto.

La convergencia absoluta del producto implica su convergencia lo cual implica $a_n \to 0$. De la misma manera la convergencia absoluta de la serie implica su convergencia lo cual implica $a_n \to 0$.

Para N suficientemente grande, decimos que para todo $n>N$ $|a_n| < \frac{1}{2}$ por lo tanto para cada $n>N$ tenemos

$$\frac{\operatorname{Log}(1+a_n)}{a_n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_n^k}{k+1}$$

consecuentemente $\forall n>N$ veremos que

$$\left|\frac{\operatorname{Log}(1+a_n)}{a_n} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_n^k}{k+1}\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_n|^k}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}|a_n|^k < \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2}$$

Así $\forall\, n>N$ $\left|\operatorname{Log}(1+a_n) - a_n\right| < \frac{|a_n|}{2}$

consecuentemente

$$\left|\mathrm{Log}\,(1+a_n)\right| - |a_n| < \frac{|a_n|}{2} \qquad \text{y} \qquad |a_n| - \left|\mathrm{Log}\,(1+a_n)\right| < \frac{|a_n|}{2}$$

por consiguiente

$$\frac{1}{2}|a_n| < \left|\mathrm{Log}\,(1+a_n)\right| < \frac{3}{2}|a_n| \qquad \forall\, n > N$$

Ahora se supone que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es absolutamente convergente entonces por la definición de convergencia absoluta de este capítulo, la serie $\sum_{n=1}\mathrm{Log}\,(1+a_n)$ es absolutamente convergente, además $\frac{1}{2}|a_n| < |\mathrm{Log}\,(1+a_n)|$ $\forall n > N$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n$ es absolutamente convergente por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ también lo es.

($\Leftarrow$) Inversamente, supóngase que la serie es absolutamente convergente.

Además $|\mathrm{Log}\,(1+a_n)| < \frac{3}{2}|a_n|$ y esto implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\,(1+a_n)$ es absolutamente convergente por la definición antes mencionada por lo tanto el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ también lo es.

Así el teorema queda establecido.

3.4 Productos infinitos de funciones.

Definición: Sea (F_n) una sucesión de funciones definida en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+F_n)$ se dice que converge uniformemente a la función F en D si la sucesión (P_n) de productos parciales definidos por $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+F_k(z)\right)$ converge uniformemente a la función F en D.

Teorema: Suponiendo que (F_n) es una sucesión de funciones analíticas en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\,(1+F_n)$ es uniformemente convergente en cada conjunto compacto $R \subset D$, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+F_n)$ converge uniformemente a una función F, donde F es analítica y $F(z) \neq 0$ $\forall z \in R$, para cada conjunto compacto $R \subset D$.

Prueba: Dados $G_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Log}\left(1+F_k(z)\right)$, $F_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+F_k(z)\right)$
se han definido en algún conjunto compacto $R\subset D$.

Entonces $G_n(z)\longrightarrow G(z)$ $\forall z\in R$ y por el segundo teorema de convergencia de este capítulo $\left(F_n(z)\right)$ converge (puntualmente) a algún $F(z)$ en R .

En la prueba del teorema antes mencionado se vió que

$$F(z)=\lim_{n\to\infty}F_n(z)=\exp\left[\lim_{n\to\infty}G_n(z)\right]=e^{G(z)}$$

por lo tanto F es analítica en R, si G es analítica en R, ahora la sucesión $\left(G_n\right)$ converge al menos uniformemente a la función G en D .

En particular $\left(G_n\right)$ converge (puntualmente) a G en D, de esta manera $\operatorname{Log}\left(1+F_n(z)\right)\longrightarrow 0$ $\forall z\in D$; esto implica $F_n(z)\longrightarrow 0$ $\forall z\in D$, así, dado $\varepsilon>0$ existe un entero positivo $N>0$ tal que $\left|F_n(z)\right|<\varepsilon$ $\forall n>N$, $z\in D$, esto implica $\left|R\left[F_n(z)\right]\right|<\varepsilon$ por lo tanto $\left\{1+R\left[F_n(z)\right]\right\}>1-\varepsilon$ $\forall n>N$, $z\in D$
consecuentemente, para un ε suficientemente pequeño, $\varepsilon<1$, tenemos $\left\{1+R\left[F_n(z)\right]\right\}>0$ $\forall n>N$, $z\in D$
por consiguiente $\left(1+F_n\right)$ no asume valores reales no positivos $\forall n>N$, $z\in D$.

Además, por la convergencia de G_n en R, $F_n(z)\neq -1$ $\forall z\in R$ $n=1,2,3,\ldots$ y por la hipótesis F_n es una sucesión de funciones analíticas en D, entonces $\operatorname{Log}\left[1+F_n\right]$ es analítica en R $\forall n>N$.

Entonces se puede concluir que G es analítica en R. Así F es analítica en R, como se había anticipado. Además

$$F(z)=e^{G(z)}\qquad \forall z\in R$$

lo que muestra que $F(z)\neq 0$ $\qquad\forall z\in R$

Resta probar que $\left(F_n\right)$ converge a F uniformemente en R. Definamos $M=\max_{z\in R}\left\{\left|F(z)\right|>0\right\}$, y sea dado un ε , tal que $0<\varepsilon<M$, por la convergencia uniforme en R de la sucesión $\left(G_n\right)$ existe un entero positivo $N_1=N_1(\varepsilon)$ tal que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\operatorname{Log}\left[1+F_k(z)\right]\right|<\frac{\varepsilon}{2M}<\frac{1}{2}\qquad \forall n>N_1 \text{ , } z\in R$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
|F(z)-F_n(z)| &= \left|e^{G(z)} - e^{G_n(z)}\right| \\
&= \left|e^{G(z)}\right| \cdot \left|1 - e^{G_n(z)-G(z)}\right| \\
&= \left|e^{G(z)}\right| \cdot \left|1 - \exp\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} -\mathrm{Log}\left(1+F_k(z)\right)\right]\right| \\
&< M\left|\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2\frac{1}{2!} + \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^3\frac{1}{3!} + \dots\right| \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\left|1 + \frac{\varepsilon}{2M}\,\frac{1}{2!} + \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2\frac{1}{3!} + \dots\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\left|1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \dots\right| \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2 = \varepsilon \qquad \forall n > N\ ,\ z \in R
\end{aligned}$$

Puesto que N es independiente de $z \in R$, la sucesión (F_n) converge uniformemente a F en el conjunto compacto R. Puesto que R es un subconjunto compacto arbitrario de D, el teorema queda establecido.

Con los teoremas anteriores se ha venido preparando la base para el siguiente teorema el cual nos permitirá hallar representaciones infinitas de producto de funciones arbitrarias con infinidad de ceros(conocidos).

Teorema (WEIERSTRASS)

Sea μ un entero no negativo y (A_n) una sucesión no acotada tal que $|A_n|$ es una sucesión no decreciente de números positivos. Entonces existe una función (F) entera con un cero en $z=0$ de orden μ y ceros en $z=A_n$, $n=1,2,3,\dots$(posiblemente de orden múltiple). Si

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k\,(A_n)^k} \qquad n=1,2,3,\dots$$

define una sucesión (P_n) de funciones polinomiales, entonces el producto

$$F(z) = z^{\mu}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{A_n}\right)e^{P_n(z)}$$

es una función entera que satisface los requerimientos de arriba.

Demostración.

Se considera la sucesión F_n definida por

$$F_n(z) = z^{\mu}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{A_k}\right)e^{P_k(z)} \qquad n=1,2,3,\dots$$

Claramente cada F_n es una función entera; aún más , tiene un cero $z=0$ de orden μ y ceros en los puntos $z=A_k$ $k=1,2,\dots$ (posiblemente de multiplicidad mayor que cero).

Primero se mostrará que la sucesión (F_n) es uniformemente convergente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Sea $M>0$, entonces puesto que $|A_n|$ es una sucesión no acotada, no decreciente de números positivos, existe un entero positivo $N=N(M)$ tal que

$|A_n| > 2M$ $\forall n > N$ entonces si $n > N$ y $|z| < M$

$$F_n(z) = F_N(z)\prod_{k=N+1}^{n}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)e^{P_k(z)}$$
$$= F_N(z)\ \exp\left\{\sum_{k=N+1}^{n}\left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)+P_k(z)\right]\right\}$$

Podemos expander cada término logarítmico en una serie de potencias

ya que $\left|\frac{z}{A_k}\right| = \frac{|z|}{|A_k|} < \frac{M}{2M} = \frac{1}{2} < 1$ $\qquad k=N+1,N+2,\dots$

Llamemos

$$\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(z/A_k)^j}{j} \qquad k=N+1,N+2,\dots$$

Usando la definición de $P_k(z)$, vemos que si $|z|<M$

$$\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)+P_k(z) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(z/A_k)^j}{j} + \sum_{j=1}^{k}\frac{(z/A_k)^j}{j}$$
$$= -\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{(z/A_k)^j}{j}$$

por lo tanto

$$\left|\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)+P_k(z)\right| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|z/A_k|^j}{j}$$

$$< \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^j = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \qquad k=N+1, N+2, \ldots$$

se sigue que para z M , n=N+1,N+2,...

$$\sum_{k=N+1}^{n} \left|\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)+P_k(z)\right| < \sum_{k=N+1}^{\infty} \left|\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)+P_k(z)\right|$$

$$< \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^N < 1$$

Así por la prueba M de Weierstrass para series de funciones, la sucesión $(S_n(z,N))$ definida por

$$S_n(z,N) = \sum_{k=N+1}^{n} \left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)+P_k(z)\right]$$

converge uniformemente en el disco D_M: $|z|<M$ y consecuentemente en todo subconjunto de D_M a la función

$$S(z,N) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)+P_k(z)\right] .$$

por lo tanto la sucesión $(S_n(z,N))$ converge uniformemente a $S(z,N)$ en D_M .

Ahora $\left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{A_k}\right)+P_k(z)\right]$ es claramente analítica en D_M , para $k=N+1, N+2, \ldots$ donde $|z|<M<|A_k|$, así $\left(1-\frac{z}{A_k}\right)$ no puede ser un número real no negativo, entonces $S(z,N)$ es analítica en D_M . Como la función exponencial es entera , se sigue que $\exp\left[S(z,N)\right]$ es analítica en D_M . Así vemos que $F(z)=\lim_{n\to\infty} F_n(z) = F_N(z)\cdot\exp\left[S(z,N)\right]$ es analítica en D_M . Puesto que M es arbitraria, permitiendo que M sea aumentada sin Límite (esto es $M\longrightarrow\infty$) la sucesión (F_n) se ve que es uniformemente convergente a F en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Puesto que F es analítica en $\mathbb{C}$, esto es , entera con los propios ceros como se requiere la hipótesis. Esto establece el teorema.

4. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN DOS

Este trabajo se enfoca exclusivamente al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de orden dos, con coeficientes variables. A continuación se estudiarán dos resultados extraordinariamente valiosos que describen el comportamiento de los ceros de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden.

Teorema de separación de Sturm.

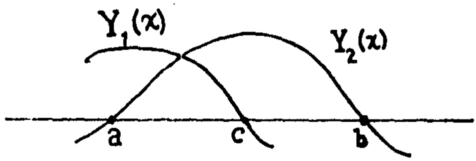
Si Y_1 y Y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea de segundo orden

$$a_2(x)\, Y'' + a_1(x)\, Y' + a_0(x)\, Y = 0$$

en un intervalo I en que a_2 no se anula, entonces los ceros de Y_1 y Y_2 se alternan en I.

Demostración:

Sean a y b $\in$ I $(a < b)$ tales que $Y_2(a)=Y_2(b)=0$, y $Y_2 \neq 0$ para $a < x < b$, debemos demostrar que existe exactamente un punto c entre a y b tal que $Y_1(c)=0$ como se ilustra en la siguiente figura:



Como Y_1 y Y_2 son soluciones linealmente independientes, su wronskiano nunca se anula en I. Luego la constante en la fórmula de Abel ($W\left[Y_1(x), Y_2(x)\right] = Ke^{\int}$) es distinta de cero, y $W\left[Y_1(x), Y_2(x)\right] = Y_1(x)\, Y_2'(x) - Y_2(x)\, Y_1'(x)$ tiene el mismo signo algebraico en todos los puntos de I. Además los valores del wronskiano en x=a y x=b son respectivamente $Y_1(a)\, Y_2'(a)$ y $Y_1(b)\, Y_2'(b)$ por lo tanto $Y_1(a), Y_2'(a), Y_1(b), Y_2'(b)$ son todos diferentes de cero. Pero como a y b son ceros sucesivos de Y_2 , la derivada de Y_2 debe tener signos opuestos en a y b .

Luego $Y_1(a)$ y $Y_1(b)$ tienen signos opuestos y de ello se sigue que $Y_1(c)=0$ para cuando menos un punto c entre a y b .

Para terminar la demostración invertimos los papeles de Y_1 y Y_2 en el anterior razonamiento y concluimos que Y_2 tiene al menos un cero entre cada par ceros sucesivos de Y_1 en I.

A continuación trataremos con un resultado importante para determinar el número de ceros de una solución.

Teorema de comparación de Sturm.

Sean Y_1 y Y_2 , respectivamente soluciones no triviales de las ecuaciones diferenciales

$$Y'' + P_1(x)\ Y = 0 \quad \text{y} \quad Y'' + P_2(x)\ Y = 0$$

en un intervalo I, y supongamos que $P_1(x) > P_2(x)$ en todos los puntos de I. Entonces, entre dos ceros cualesquiera de Y_2 hay al menos un cero de Y_1.

Demostración:

Sean a y b ceros adyacentes de Y_2 , con $a<b$, y supóngase que Y_1 no se anula en el intervalo (a,b) , como los ceros de una función Y son los mismos que los de $-Y$, Se puede suponer que Y_1 y Y_2 son ambas positivas en todo (a,b). Haciendo el razonamiento como el de la prueba pasada se tiene

$$W(a)=Y_1(a)\ Y_2'(a) \geq 0 \quad , \quad W(b)= Y_1(b)\ Y_2'(b) \leq 0$$

pero
$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}\left[Y_1(x), Y_2(x)\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[Y_1(x)Y_2'(x)-Y_2(x)Y_1'(x)\right]\\ &= Y_1(x)\ Y_2''(x) - Y_2(x)\ Y_1''(x)\\ &= -Y_1(x)\ P_2(x)\ Y_2(x) + Y_2(x)\ P_1(x)\ Y_1(x)\\ &= Y_1(x)\cdot Y_2(x)\ \left[P_1(x) - P_2(x)\right] > 0\end{aligned}$$

Se concluye de que el wronskiano de Y_1 y Y_2 es una función creciente en $[a,b]$. Esto, contradice la suposición de que Y_1 no se anula en el intervalo (a,b) .

A continuación de darán algunos resultados que son consecuencia de los teoremas de Sturm.

Ejercicio 1: Demostrar que Sen K_1x tiene al menos un cero entre dos ceros cualesquiera de Sen K_2x , siempre que $K_1 > K_2 > 0$

Demostración:

Si $K_1 > K_2 > 0$ entonces $K_1^2 > K_2^2$ entonces las ecuaciones diferenciales

$$Y'' + K_1^2\, Y = 0 \qquad y \qquad Y'' + K_2^2\, Y = 0$$

tienen como soluciones a Sen K_1x y Sen K_2x respectivamente. Si tomamos $K_1^2 = P_1(x)$ y $K_2^2 = P_2(x)$ en la hipótesis del teorema de comparación de Sturm, entonces se cumple lo que pide el ejercicio.

Ejercicio 2: Toda solución de la ecuación $Y'' + xY = 0$ tiene infinidad de ceros en $(0,\infty)$

Demostración: Sin pérdida de generalidad tomaremos un valor $M > 0$ arbitrariamente pequeño de tal manera que $x > M$ para todo $x \in [M,\infty)$, construyamos la ecuación diferencial $Y'' + MY = 0$ donde se sabe que su solución $\mathrm{Sen}\sqrt{M}\,x$ tiene un número infinito de ceros.

Ahora se aplica el teorema de compáración a las ecuaciones

$$Y'' + x\, Y = 0 \qquad y \qquad Y'' + M\, Y = 0$$

tomando $P_1(x) = x$, $P_2(x) = M$ por lo tanto se concluye que la solución $S(x)$ de $Y'' + xY = 0$ tiene al menos un cero entre dos ceros cualesquiera de $\mathrm{Sen}\sqrt{M}\,x$, esto deduce que $S(x)$ tiene un número infinito de ceros en el intervalo $[M,\infty)$.

Ahora demostraremos otro ejercicio un poco más general que el anterior.

Ejercicio 3: Sea f continua en $(0,\infty)$, y supongamos que $f(x) \geq \epsilon > 0$ para todo $x > 0$. Entonces toda solución de

$$Y'' + f(x)\, Y = 0$$

tiene infinidad de ceros en $(0,\infty)$

Demostración:

Tenemos la ecuación $Y''+\varepsilon Y=0$ que tiene como solución a la función $\operatorname{Sen}\sqrt{\varepsilon}x$,que tiene infinidad de ceros para todo $x\in(0,\infty)$, ahora se construirá una partición infinita $I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n\cup\ldots=(0,\infty)$ de tal manera que $\operatorname{Sen}\sqrt{\varepsilon}x$ se anule dos veces.

Utilizando la hipótesis de que $f(x)\geq\varepsilon$ con $P_1(x)=f(x)$ y $P_2(x)=\varepsilon$ para cada intervalo I_n y el teorema de comparación de Sturm deducimos que entre dos ceros de $\operatorname{Sen}\sqrt{\varepsilon}x$, hay al menos un cero de $Y(x)$, pero como $\operatorname{Sen}\sqrt{\varepsilon}x$ tiene un número infinito de ceros en $(0,\infty)$, concluimos que $Y(x)$ tiene un número infinito de ceros en $(0,\infty)$.

Como consecuencia inmediata del ejercicio anterior, se enunciará el siguiente resultado como un lema.

Lema 1: Sea f continua en $(-\infty,\infty)$, supongamos que $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ entonces toda solución de

$$Y''+f(x)Y=0$$

tiene infinidad de ceros en $(-\infty,\infty)$.

Demostración: Construiremos una partición de $(-\infty,\infty)$ como en el ejercicio anterior de tal manera que para todo intervalo I_n se cumpla el teorema de comparación de Sturm.

Lema 2: Sea $a_0(x)$ continua en $(0,\infty)$ y supongamos que existen números positivos b,B tales que $b^2\leq a_0(x)\leq B^2$ para todo $x>0$, entonces toda solución no trivial de

$$Y''+a_0(x)Y=0$$

tiene infinidad de ceros en $(0,\infty)$, y la distancia "d" entre ceros sucesivos puede estimarse como

$$\frac{\pi}{B}\leq d\leq\frac{\pi}{b}$$

Demostración:

Por el Lema 1 la solución tiene infinidad de ceros en $(0,\infty)$, faltaría por demostrar la estimación de la distancia entre los ceros sucesivos.

I parte

Se supone que $d > \frac{\pi}{b} \Longrightarrow d = \frac{\pi}{b} + \varepsilon \quad \varepsilon > 0$

por lo tanto la distancia d_i entre los ceros sucesivos S_i y S_{i+1} de la solución de la ecuación $Y'' + a_o(x)Y = 0$, se puede representar $d_i = \frac{\pi}{b} + \varepsilon_i \quad i=1,2,3,\ldots$ donde $\varepsilon_i > 0$ además los ceros S_i , $i=2,3,4,\ldots$ pueden representarse por

$S_i = S_{i-1} + d_i$ de tal manera que

$S_1 = S_1$

$S_2 = S_1 + d_1 = S_1 + \frac{\pi}{b} + \varepsilon_1$

$S_3 = S_2 + d_2 = S_2 + \frac{\pi}{b} + \varepsilon_2 = S_1 + 2\frac{\pi}{b} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\vdots$

$S_n = S_1 + (n-1)\frac{\pi}{b} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}$

este procedimiento se seguiría hasta encontrar un $n=N$ suficientemente grande para concluir que $S_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N-1} > \frac{\pi}{b}$

así tendriamos que $S_N = (N-1)\frac{\pi}{b} + S_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N-1} > \frac{N\pi}{b}$

pero el cero S_N debe pertenecer a $\left(\frac{(N-1)\pi}{b}, \frac{N\pi}{b}\right)$, esto quiere decir que entre dos ceros de la ecuación $Y'' + b^2 Y = 0$ no habría ningún cero de la solución de la ecuación $Y'' + a_o(x)Y = 0$, lo cual contradice el teorema de comparación de Sturm, por lo tanto $d \leq \frac{\pi}{b}$

II parte

Ahora se supone que $\frac{\pi}{B} > d \Longrightarrow \frac{\pi}{B} - \varepsilon = d$

por lo tanto la distancia d_i entre los ceros sucesivos S_i y S_{i+1} de la solución de la ecuación $Y'' + a_o(x)Y=0$, se puede representar como $d_i = \frac{\pi}{B} - \varepsilon_i$ $i=1,2,\ldots$ donde $\varepsilon_i > 0$

además los ceros S_i para $i=2,3,\ldots$ pueden representarse por $S_i = S_{i-1} + d_i$

$$S_1 = S_1$$

$$S_2 = S_1 + d_1 = S_1 + \frac{\pi}{B} - \varepsilon_1$$

$$S_3 = S_2 + d_2 = S_1 + d_1 + d_2 = S_1 + 2\frac{\pi}{B} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$S_n = S_1 + \frac{(n-1)\pi}{B} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_{n-1}$$

si continuamos este procedimiento se encontrará un $n=N$ lo suficientemente grande tal que

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N-1} > S_1 \qquad\qquad S_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_{N-1} < 0$$

$\Longrightarrow S_N < \frac{(N-1)\pi}{B}$, pero la solución S_N debe pertenecer a $\left(\frac{(N-1)\pi}{B}, \frac{N\pi}{B}\right)$, esto quiere decir que entre dos ceros de la solución de la ecuación $Y'' + B^2 Y=0$ no habría ningún cero de la solución de la ecuación $Y'' + a_o(x)Y=0$, lo cual contradice el teorema de comparación de Sturm, por lo tanto $\frac{\pi}{B} \leq d$.

Así queda establecido el Lema 2.

5. TEOREMA Z

En este teorema se establece que las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma $Y'' + P(x) Y=0$ pueden ser representadas como productos infinitos además proporcionará una manera de como aproximar los ceros de las soluciones antes mencionadas.

Teorema Z: Sea $P(x)$ continua en $(0,\infty)$ y supongamos que existen números positivos b,B tales que $b^2 \leq P(x) \leq B^2$ para todo $x>0$ entonces la solución de la ecuación diferencial $Y'' + P(x) Y=0$ puede ser representada por el producto infinito

$$Y(x)= x^{\mu}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{A_n}\right)e^{P_n(x)} \qquad x \in (0,\infty)$$

donde $P_n(x)= \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{kA_n^k}$ $\qquad n=1,2,3,\ldots \qquad \mu\geq 0$

y $A_1,A_2,A_3,\ldots$ es una sucesión no acotada de ceros de la solución además la distancia entre ellos se puede estimar de la siguiente manera

$$\frac{\pi}{B} \leq d \leq \frac{\pi}{b}$$

Demostración: La prueba de este teorema ya se ha desarrollado en partes en los capítulos anteriores.

Por el Lema 2 del capítulo anterior se deduce que la solución tiene un número infinito de ceros $A_1,A_2,A_3,\ldots$ en $(0,\infty)$ y que la distancia entre ellos se estima por

$$\frac{\pi}{B} \leq d \leq \frac{\pi}{b}$$

Los ceros $A_1,A_2,A_3,\ldots$ forma una sucesión no decreciente de números positivos de aquí por el teorema de WEIERSTRASS para productos infinitos se cumple el resto del teorema.

6. ANALISIS DE LA ECUACION DE BESSEL

En este capítulo se analizará el comportamiento de los ceros de la solución de la ecuación diferencial de Bessel de la forma $x^2Y''+xY'+(x^2-P^2)Y=0$ donde P es número real no negativo, se conoce como la ecuación de Bessel de orden P. Es una de las ecuaciones diferenciales más importantes de la física matemática, y se estudia con algún detalle en este capítulo.

Se empezará por eliminar el término en que aparece Y' . Esto puede hacerse con el cambio de variable $Y=u/\sqrt{x}$, que transforma

$$x^2Y''+xY'+(x^2-P^2)Y=0 \quad \text{en}$$

$$u''+F(x)u=0 \quad \text{donde} \quad F(x)=\left(1+\frac{1-4P^2}{4x^2}\right)$$

sin perturbar los ceros de su solución.

Se verá algunos casos para el valor de P , que significa la multiplicidad del cero de la solución en x=0 .

Caso I P=0 entonces $F(x)=\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)$ que es continua en $(0,\infty)$ y además F(x) es acotada de tal manera que existen cantidades b,B tal que $b^2\leq F(x)\leq B^2 \quad x\in[\epsilon,\infty) \quad \epsilon>0$

Con las consideraciones anteriores podemos aplicar el teorema Z y deducimos que la solución tiene infinidad de ceros $A_1, A_2, \ldots$ como P=0 entonces $\mu=0$ y además la solución puede ser representada por

$$u_P(x)=x^P\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{A_n}\right)e^{P_n(x)} \qquad x\in(0,\infty)$$

y $$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{kA_n^k} \qquad P=0$$

$$u_0(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{A_n}\right)e^{P_n(x)}$$

Se observa que F(x) es decreciente.

Si se conoce como valor inicial a A_1 y ubicando la hipótesis del teorema "Z" para el intervalo (A_1, ∞) y también el hecho de que $F(x) \longrightarrow 1$ cuando $x \longrightarrow \infty$, entonces se toma $b^2=1$ y $B^2 = 1 + \frac{1}{4A_1^2}$, de tal manera que

$$b^2 \leq F(x) \leq B^2 \qquad x \in [A_1, \infty)$$

$$1 \leq F(x) \leq 1 + \frac{1}{4A_1^2}$$

Ahora estimaremos la distancia entre A_1 y el A_2 de la siguiente manera.

$$\frac{\pi}{B} \leq d \leq \frac{\pi}{b} \qquad\qquad d \approx \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right)$$

$$B^2 = 1 + \frac{1}{4A_1^2} = \frac{4A_1^2+1}{4A_1^2} \Longrightarrow B = \frac{\sqrt{4A_1^2+1}}{2A_1}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{B} = \frac{2A_1}{\sqrt{4A_1^2+1}}, \qquad b^2=1 \Longrightarrow b=1 \Longrightarrow d = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2A_1}{\sqrt{4A_1^2+1}} + 1\right)$$

De está manera se podrá estimar A_2 a partir de A_1

$$A_2 = A_1 + d$$

$$A_2 = A_1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{2A_1}{\sqrt{4A_1^2+1}} + 1\right)$$

El procedimiento anterior se puede generalizar para A_n y A_{n+1} entonces obtenemos

$$A_{n+1} = A_n + \frac{\pi}{2}\left(\frac{2A_n}{\sqrt{4A_n^2+1}} + 1\right) \qquad x \in [A_n, \infty)$$

por ejemplo si $A_1=2.4$

$$A_2 = 2.4 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{2(2.4)}{\sqrt{4(2.4)^2+1}} + 1\right) \qquad x \in [A_1, \infty)$$

$A_2=5.575319048$

Caso $P=1$, entonces la ecuación resulta de la forma

$$u'' + \left(1 - \frac{3}{4x^2}\right)u = 0$$

Se obsrva que existe un $x=x_o > 0$ tal que

$$F(x) = \left(1 - \frac{3}{4x^2}\right) > 0 \qquad \text{en } [x_o, \infty)$$

También se deduce que $F(x)$ es continua, creciente y además acotada en $[x_o, \infty)$ pues $F(x) \longrightarrow 1$ cuando $x \longrightarrow \infty$.

Como $F(x)$ es creciente y $F(x) < 1$ para $[x_o, \infty)$ entonces existen $b^2 = \left(1 - \frac{3}{4x_o^2}\right)$ y $B^2=1$ tal que

$$b^2 \leq F(x) \leq B^2$$

$$\left(1 - \frac{3}{4x_o^2}\right) \leq F(x) \leq 1$$

De igual manera que para el caso anterior se cumple con la hipótesis del teorema "Z", por lo tanto la solución a la ecuación diferencial $u'' + \left(1 - \frac{3}{4x^2}\right)u = 0$ tiene la forma

$$u_p = x^p \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{A_n}\right)e^{P_n} \qquad \text{como } p=1 \text{ entonces}$$

$$u_1 = x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{A_n}\right)e^{P_n} \qquad \text{donde } P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{kA_n^k}$$

con ceros $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Ahora se estimará la distancia entre los ceros sucesivos A_1 y A_2 . Se tiene que $B^2=1 \Rightarrow B=1 \Rightarrow \frac{1}{B}=1$, también

$$b^2 = \left(1 - \frac{3}{4A_1^2}\right) = \frac{4A_1^2-3}{4A_1^2} \qquad b = \frac{\sqrt{4A_1^2-3}}{2A_1} \qquad \frac{1}{b} = \frac{2A_1}{\sqrt{4A_1^2-3}}$$

Entonces de $d \approx \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right)$ se tiene que

$$d \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2A_1}{\sqrt{4A_1^2-3}}\right) \qquad A_2 = A_1 + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2A_1}{\sqrt{4A_1^2-3}}\right)$$

Generalizando para A_n y A_{n+1} se tiene

$$A_{n+1} = A_n + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2A_n}{\sqrt{4A_n^2-3}}\right)$$

Por ejemplo: Si se conoce $A_1=3.8$ entonces

$$A_2= 3.8 + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2(3.8)}{\sqrt{4(3.8)^2-3}}\right)$$

$A_2= 6.900255908$

Caso $P>1$ los resultados que se obtendrán son similares a los obtenidos para $P=1$, por lo tanto la función

$$F(x)= \left(1 + \frac{1-4P^2}{4x^2}\right) \qquad \text{es creciente}$$

Además existe un valor x_o tal que $F(x)\geq 0 \quad x \in [x_o, \infty)$ y existen valores $b, B > 0$ tal que $b^2 \leq F(x) \leq B^2$ dichos valores se tomarán de la siguiente manera

$$b^2= 1 + \frac{1-4P^2}{4x_o^2} \qquad y \qquad B^2=1$$

entonces $$d \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2x_o}{\sqrt{4x_o^2 +1-4P^2}}\right)$$

Los ceros de la solución u_p de la ecuación diferencial $u'' + F(x)u=0$, se pueden aproximar con la relación siguiente

$$A_{n+1}= A_n + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2A_n}{\sqrt{4A_n^2+1-4P^2}}\right)$$

donde la solución de la ecucción diferencial es de la forma

$$u_p=x^p \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{A_n}\right)e^{P_n(x)}$$

7. CONCLUSIONES

La técnica más usada para resolver las ecuaciones diferenciales de la forma $Y'' + P(x)Y=0$ con coeficientes variables es la utilización de las series de potencias. En este trabajo se desarrolló una manera diferente de representar las soluciones de las ecuaciones antes mencionadas. Se planteó la problemática de que si una función con un número infinito de ceros, se podía representar como un producto infinito. Después resolviendo la ecuación diferencial $Y''+P(x)Y=0$ se obtuvo la información necesaria de las soluciones acerca del comportamiento de sus ceros en un intervalo determinado.

De la combinación temática de los productos infinitos, teorema de WEIERSTRASS , con la de la resolución de ecuaciones diferenciales de la forma $Y''+P(x)Y=0$, se obtuvo un resultado que se planteó en forma de teorema al cual se le denominó como el teorema "Z" . Para dar una aplicación de este teorema, se analizó la ecuación diferencial de BESSEL $x^2Y''+xY'+(x^2-P^2)Y=0$ de orden P .

Con el apoyo y uso de los equipos electrónicos modernos será posible obtener buenas aproximaciones a las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes variables de segundo orden.

8. BIBLIOGRAFIA

BARTLE, ROBERT G. The Elements of Real Analysis
Second Edition
John Wiley Sons. 1976

BOYCE WILLIAM E. y DIPRIMA RICHARD Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera
Limusa-Wiley, S.A 1976

HIRSCHMAN I.I; Jr Infinite Series
Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1962

KREIDER DONALD L. KULLER ROBERT G. OSTBERG DONALD R. Ecuaciones diferenciales
Fondo Educativo Interamericano, S.A
1973

MARSDEN, JERROLD E. Basic Complex Analysis
W.H Freeman and Company 1973

RAINVILLE EARL D. BEDIENT PHILLIP E. Ecuaciones Diferenciales
Primera Edición
Interamericana 1977.