18
27

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMAS CUADRATICAS Y PRODUCTOS DE SUMAS DE CUADRADOS

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

Miguel Angel Melara del Angel

MEXICO, D. F. 1990

INDICE

INTRODUCCION

El objeto de èste trabajo es el estudio de fòrmulas de <u>productos de sumas de cuadrados</u> del tipo

$$(x_1^2 + \dots + x_r^2)(y_1^2 + \dots + y_s^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2$$

en donde $z_1, \dots, z_n$ son formas bilineales en los dos conjuntos de variables $x_1, \dots, x_r$ e $y_1, \dots, y_s$ con coeficientes en un campo .

Encontrar enteros r , s y n para los que existe una fòrmula de ese tipo es un problema interesante propuesto por A. Hurwitz [1] en 1898 . El sugiriò las cuestiones siguientes :

a) Dados s y n encontrar el màximo valor de r .

b) Dados r y s encontrar el mìnimo valor de n .

En el caso especial en que $s = n$, la soluciòn al problema (a) fuè encontrada independièntemente por Hurwitz [2] y Radon [3] teniendo como campo de coeficientes los nùmeros complejos y los nùmeros reales, respectivamente.

El màximo valor de r se obtiene como sigue: Sea $n = 2^{4a+b}(2k+1)$, en donde $0 \leqslant b \leqslant 3$.

La expresiòn $r = \rho(n) = 8a + 2^b$, determina el màximo valor de r.

<u>La expresiòn $\rho(n)$ se conoce como la funciòn de Hurwitz-Radon .</u>

Reciènternente J. Adem [4] y D. B. Shapiro [10] han generalizado estos resultados para cualquier campo F de caracterìstica diferente de 2.

Este trabajo contiene la descripciòn del problema generalizado y la prueba del <u>teorema principal de Hurwitz-Radon</u> :
"Sea n como antes se especificò y s = n ; existe una fòrmula de producto de sumas de cuadrados si y solo si $r \leq \rho(n)$ " .

La necesidad del teorema se probarà utilizando el mètodo clàsico de Hurwitz en donde se analizan las biparticiones sucesivas de n, encontrando en cada una de ellas sistemas de matrices con propiedades que dependen de la paridad de r y de los valores posibles de b.

La suficiencia se demostrarà con uno de los varios procedimientos existentes ; el que se presenta se debe a A. V. Geramita y N. J. Pullman [12] fundamentado en la tesis de M.R. Gabel [13] .

Este se desarrolla en el campo de los nùmeros reales y consiste en construir inductivamente fòrmulas de productos de sumas de cuadrados en los que $r = \rho(n)$.

La construcciòn surge efectuando el producto Kronecker o tensorial de matrices especialmente seleccionadas.

Espero que ademàs del interès natural del tema el lector encuentre atractiva esta exposiciòn.

1. RESULTADOS PRELIMINARES.

Sea F un campo de característica distinta de 2. Sea F^n el espacio vectorial n-dimensional sobre F, formado con las colecciones ordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_i \in F$. La base estándar de F^n está dada por los vectores $e_1 = (1,0, \ldots ,0), \ldots, e_n = (0,0, \ldots ,1)$

Claramente las n-columnas tienen también la estructura de un espacio vectorial n-dimensional sobre F. La traspuesta de $x \in F^n$ es el vector columna

$$x^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si $y = (y_1, \ldots, y_n)$ es otro vector en F^n, usando la multiplicación matricial, pongamos

$$B_n(x,y) = xy^t = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Aquí x e y pueden considerarse como variables en F^n. Entonces

$B_n : F^n \times F^n \rightarrow F$ es una función bilineal y simétrica que define un producto interno sobre F^n. La transformación $Q_n : F^n \rightarrow F$ dada por $Q_n(x) = B_n(x,x)$ es cuadrática y (F^n, Q_n) (o equivaléntemente (F^n, B_n)) es un **espacio cuadrático** en donde $Q_n(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ es la forma cuadrática determinada por Q_n respecto a la base estándar de F^n. Q_n es llamada **norma de x**.

Dos vectores x e y son ortogonales si $B_n(x,y) = xy^t = 0$. Se sigue que (F^n, Q_n) es un espacio cuadràtico no-singular, ya que si $x \in F^n$ y $B_n(x,y) = 0$ para todo $y \in F^n$ entonces $x = 0$.

Note que la forma cuadrática Q_n tiene las propiedades siguientes:

(1) $Q_n(x) = B_n(x,x)$

(2) $Q_n(ax) = a^2 Q_n(x)$

$$(3) \quad B_n(x,y) = (1/2)(Q_n(x+y) - Q_n(x) - Q_n(y))$$

para todo $a \in F$, $x, y \in F^n$.

Sean (F^r, Q_r), (F^s, Q_s) y (F^n, Q_n) espacios cuadráticos definidos como antes. Una transformacion bilineal $f : F^r \times F^s \longrightarrow F^n$ es una <u>transformación normada</u> si $Q_r(x)\, Q_s(y) = Q_n(z)$ para todo $x \in F^r$, $y \in F^s$ y $z = f(x,y)$.

Equivaléntemente, una transformaciòn $f(x,y) = z = (z_1, \dots, z_n)$ es normada si satisface

$$(I) \qquad (x_1^2 + \dots + x_r^2)(y_1^2 + \dots + y_s^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2$$

en donde $z_1, \dots, z_n$ son formas bilineales en x e y.

En el caso especial $r = s = n$ se tiene

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2$$

<u>Ejemplo 1</u>. Sea $F = R$ el campo de los nùmeros reales. Un nùmero complejo $x = (x_1, x_2)$ se representa como $x = x_1 + x_2 i$ en donde $i = \sqrt{-1}$. Si $y = y_1 + y_2 i$ es otro nùmero complejo, el producto

se calcula como sigue:

$$xy = (x_1 + x_2 i)(y_1 + y_2 i) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

La norma de xy es el número real

$$\|xy\|^2 = (x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = x_1^2 y_1^2 - x_2^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2$$

$$= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = \|x\|^2 \|y\|^2$$

Esto prueba que la transformación $f : R^2 \times R^2 \rightarrow R$ dada por

$$f(x_1 + x_2 i, y_1 + y_2 i) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

es normada.

<u>Ejemplo 2</u> . Sea nuevamente $F = R$. Un cuaternio es un símbolo $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ con a_0 , a_1 , a_2 , a_3 números reales.

De esta manera x se identifica con un punto en R^4 . Se define el producto de x con otro cuaternio $y = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ en la forma siguiente:

$$xy = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i$$

$$+ (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1)k$$

Para llegar a esta fòrmula aparèntemente complicada se usan las relaciones

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = -ji = k \quad , \quad jk = -kj = i \quad , \quad ki = -ik = j$$

La norma de xy es el nùmero

$$\|xy\|^2 = (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)^2 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)^2$$
$$+ (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 + a_2b_1)^2$$

Por la identidad de Lagrange se sabe que la expresiòn anterior es igual al nùmero

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \|x\|^2 \|y\|^2$$

Entonces la transformaciòn $f : R^4 \times R^4 \longrightarrow R^4$ que lleva una pareja de cuaternios en su producto, es normada.

Hurwitz probò que cuando r , s y n son iguales , los valores posibles son 1, 2, 4 y 8 . Tambièn sugiriò los problemas siguientes :

(1) Si s = n determinar el màximo valor de r para que exista una identidad de la forma (I).

(2) Dados r y s determinar el mìnimo valor que puede tener n .

Para el problema (1) , Hurwitz encontrò que si $n = 2^m q$, con q un nùmero impar, entonces

$$\text{màximo } r = \begin{cases} 2m+1 & \text{si } m \equiv 0 \\ 2m & \text{si } m \equiv 1 \\ 2m & \text{si } m \equiv 2 \\ 2m+2 & \text{si } m \equiv 3 \end{cases} \pmod 4$$

Iguales valores obtuvo, en forma independiente Radon, quien los escribiò en una sola expresiòn como sigue:

Si $n = 2^{4a+b}(2k+1)$ en donde $0 \leqslant b \leqslant 3$ entonces $\rho(n) = 8a + 2^b$ es el màximo valor de r.

<u>La funciòn $\rho(n)$ se conoce como la funciòn de Hurwitz-Radon.</u>

Hurwitz utilizò coeficientes complejos mientras que Radon trabajò con coeficientes reales.

En lo que sigue se demostrarà que esos resultados pueden extenderse para cualquier campo F <u>algebraicamente cerrado</u> de caracterìstica distinta de dos.

2. COMPOSICION DE FORMAS CUADRATICAS.

Sean $x = (x_1, \ldots, x_r)$ e $y = (y_1, \ldots, y_s)$ vectores en F^r y F^s respectivamente. Sea $z = (z_1, \ldots, z_n)$ en F^n tal que

$$z_k = a_{k1} y_1 + \ldots + a_{ks} y_s$$

en donde cada a_{kl} $(k = 1, \ldots, n)$ es una función lineal homogénea en $x_1, \ldots, x_r$ con coeficientes en F.

Si se considera la matriz de $n \times s$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

se verifica fácilmente que $z^t = Ay^t$ (o equivalèntemente $z = yA^t$).

Si se cumple la condición (I), se tiene

$$\left(\sum_{j=1}^{r} x_j^2\right) yy^t = zz^t = (yA^t)(Ay^t)$$

entonces

$$y\left(\left(\sum_{j=1}^{r} x_j^2\right) I_s\right) y^t = y\,(A^t A)\,y^t$$

en donde I_s es la matriz identidad de orden s. Se concluye que

$$A^t A = \left(\sum_{j=1}^{r} x_j^2\right) I_s$$

Esta identidad indica la condición necesaria y suficiente que debe cumplir una matriz A para determinar una transformación normada.

En efecto, si se tiene la transformación normada $f : F^r \times F^s \longrightarrow F^n$, puede encontrarse la matriz A y viceversa, la matriz A permite determinar la transformación $f(x,y) = z = yA^t$.

Ahora , A puede escribirse como

$$A = x_1 A_1 + \dots + x_r A_r$$

en donde cada A_j es una matriz constante de orden nxs.

Al desarrollar el producto $A^t A$ se tiene una ecuación polinomial

$$(x_1 A_1^t + \dots + x_r A_r^t)(x_1 A_1 + \dots + x_r A_r) =$$

$$(x_1^2 + \dots + x_r^2)\, I$$

y de aqui se sigue que

$$\sum_{j=1}^{r} x_j^2 \ (A_j^t A_j) + \sum_{j\neq k} x_j x_k \ (A_j^t A_k + A_k^t A_j) =$$

$$(x_1^2 + \dots + x_r^2) I$$

Por lo tanto se llega a las <u>ecuaciones matriciales de Hurwitz</u>

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} A_j^t A_j = I & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant r \\ A_j^t A_k + A_k^t A_j = 0 & j \neq k \ , \ 1 \leqslant j, k \leqslant r \end{cases}$$

Supóngase $s = n$. Sea $i = \sqrt{-1}$ y hacer

$$B_1 = -i \ A_r^t A_1 \ , \dots , \ B_{r-1} = -i \ A_r^t A_{r-1}$$

Se tiene entonces

$$B_j^t B_k = (-iA_r^t A_j)^t (-iA_r^t A_k) = - A_j^t A_k$$

si j = k el producto que se obtiene es

$$B_j^t B_j = -I \qquad\qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1$$

Tambien se tiene

$$B_j^t B_k + B_k^t B_j = -A_j^t A_k - A_k^t A_j = \emptyset$$

cuando $j \neq k$, $1 \leqslant j$, $k \leqslant r-1$.

Si se toma $A_j = iA_r B_j$ se tiene $A_j^t = iB_j^t A_r^t$, de donde

$$A_j^t A_r = iB_j^t A_r^t A_r = iB_j^t = -A_r^t A_j = -iA_r^t A_r B_j = -iB_j$$

cuando $1 \leqslant j \leqslant r-1$.

De lo anterior se desprende que el nuevo sistema de r-1 matrices de orden n tiene las siguientes propiedades:

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} B_j^t = -B_j & \\ & 1 \leqslant j \leqslant r-1 \\ B_j^2 = I & \\ B_j B_k = -B_k B_j & j \neq k , \quad 1 \leqslant j , k \leqslant r-1 \end{cases}$$

3. REDUCCION DE SISTEMAS MATRICIALES DE HURWITZ.

Aqui se verà la forma que , bajo similitud, tienen las matrices B_j , $j = 1 , \dots , r-1$, las cuales, como se estableciò, son cuadradas de orden n . Su nueva presentaciòn dependerà de que n sea un nùmero par. Si èsto sucede y ademàs $r > 3$, entonces, a partir de las matrices B_j se encontrarà otro sistema con r-3 matrices de orden n/2 ; si resulta què n/2 es tambièn par y $r > 5$ serà posible llegar a un tercer sistema con r-5 matrices de orden n/4 y asì sucesivamente.

Lo importante es que los sistemas por obtener conservaràn casi todas las propiedades del sistema original. Desafortunàdamente la antisimetrìa no puede transferirse a las matrices similares y por èsta razòn se dejarà su anàlisis para mas adelante.De momento nos referiremos a sistemas de $r-1$ matrices de orden n que no satisfacen la propiedad de antisimetrìa $B_j^t = -B_j$.

Sea $\sum = \{ B_1 , B_2 , \dots , B_{r-1} \}$ un sistema que cumple con la anticonmutatividad $B_j B_k = - B_k B_j$ y donde cada matriz B_j tiene cuadrado I . Entonces las mismas propiedades tiene el sistema

$$T \sum T^{-1} = \{ TB_1 T^{-1} , \dots , TB_{r-1} T^{-1} \}$$

para cada matriz no-singular T de orden n.

Esto permite , tomando B_1 , ponerla como una matriz diagonal con entradas 1 y -1 . A la vez es similar con una matriz

$$\begin{pmatrix} I_q & \\ & -I_{n-q} \end{pmatrix}$$

Ahora, por anticonmutatividad $B_2 B_1 B_2^{-1} = -B_1$, de manera que B_1 y $-B_1$ resultan también similares y entonces tienen los mismos valores caracteristicos, lo cual solo puede ocurrir cuando $q = n - q$, es decir, $n = 2q$ es un número par.

Observe que esto justifica que en lo sucesivo se considere que n es de la forma $n = 2^{4a+b} q$ con q un número impar y $0 \leqslant b \leqslant 3$. (ver página 9). Asimismo se ve que n no puede ser impar cuando el sistema $\sum$ tiene dos matrices o más .

Por lo anterior, se tiene

$$B_1 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}$$

en donde I es la matriz identidad de orden n/2 (cuando no hay confusión los índices de I se suprimen) .

Supóngase que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden n , con a , b , c y d matrices de orden n/2 . Se comprueba fàcilmente que

$$B_1 B = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \quad y \quad BB_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$$

Como el producto es anticonmutativo se tiene $B_1 B = - BB_1$ y de aquí

$$B = \begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}$$

Si se calcula el cuadrado de èsta matriz se tiene

$$B^2 = \begin{pmatrix} bc & \\ & cb \end{pmatrix}$$

Suponiendo el cuadrado de B igual a I se sigue que b^{-1} existe y

$$B = \begin{pmatrix} & b \\ b^{-1} & \end{pmatrix}$$

El resultado que se ha obtenido es cierto para cualquier matriz $B_2 , \ldots , B_{r-1}$. Supòngase ahora que

$$B_2 = \begin{pmatrix} & b_2 \\ b_2^{-1} & \end{pmatrix}$$

y considerar la siguiente matriz no-singular de orden n

$$T = \begin{pmatrix} I & \\ & b_2 \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica que

$$TB_2T^{-1} = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}$$

De èsta manera puede escribirse las dos primeras matrices de $\sum$,

como sigue

$$B_1 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}$$

Para $j = 3, 4, \ldots, r-1$ se tiene tambièn que

$$B_j = \begin{pmatrix} & b_j \\ b_j^{-1} & \end{pmatrix}$$

Ahora, por la anticonmutatividad se tiene $B_2B_j = -B_jB_2$, de donde

se sigue $b_j^{-1} = -b_j$, es decir $b_j^2 = -I$. Entonces $b_j = iC_j$

para alguna matriz C_j y puede escribirse cada B_j en la forma

$$B_j = \begin{pmatrix} & iC_j \\ -iC_j & \end{pmatrix}$$

Además se tiene, derivado de las relaciones entre las B_j, que

$$C_j^2 = I \qquad j = 3, 4, \ldots, r-1$$

$$C_jC_k = -C_kC_j \qquad j \neq k \quad ; \quad j,k = 3, 4, \ldots, r-1$$

Se ha probado que el sistema $\sum$, da origen a otro sistema $\sum_1 = \{ C_3 , C_4 , \ldots , C_{r-1} \}$ que consta de $r - 3$ matrices de orden $n/2$ y que también satisface las ecuaciones de anticonmutatividad y cuadrado igual a la unidad.

De la misma manera puede verse que si $r>5$, $\sum_1$ genera el sistema $\sum_2 = \{ D_5 , D_6 , \ldots , D_{r-1} \}$ que tiene $r - 5$ matrices de orden $n/4$ cumpliendo con el siguiente sistema de ecuaciones

$$D_j^2 = I \qquad j = 5, 6, \ldots , r-1$$

$$D_j D_k = - D_k D_j \qquad j \neq k \quad ; \quad j,k = 5, 6, \ldots , r-1$$

Si se continùa el procedimiento , el ùltimo sistema que se puede generar depende de que $r - 1 = 2p$ o que $r - 1 = 2p + 1$.

Si $r - 1 = 2p$ se obtiene $\sum_{p-1} = \{ L_{2p-1} , L_{2p} \}$.

Como se probò para las matrices B_1 y B_2 se tiene que

$$L_{2p-1} = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} \qquad L_{2p} = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}$$

siendo ambas matrices de orden $n / 2^{p-1}$.

Si $r - 1 = 2p + 1$ se tiene $\sum_p = \{ L_{2p+1} \}$ con la ùnica matriz de orden $n / 2^p$.

Usando el mismo argumento que en B_1 , L_{2p+1} puede diagonalizarse en la forma

$$L_{2p+1} = \begin{pmatrix} I_\alpha & \\ & -I_\beta \end{pmatrix}$$

con α , β nùmeros positivos tales que $\alpha + \beta = n / 2^p$.

4. SISTEMAS DE HURWITZ MAXIMOS.

Si T es una matriz no-singular de orden $n/2$, sea

$$\overline{\sum}_1 = T \sum_1 T^{-1} = \{ TC_3 T^{-1} , \ldots , TC_{r-1} T^{-1} \}$$

La "conjugación" de $\sum_1$ permite escribir el conjugado de $\sum$ como sigue:

$$\bar{B}_1 = B_1 , \quad \bar{B}_2 = B_2 , \ldots , \quad \bar{B}_j = \begin{pmatrix} & iTC_j T^{-1} \\ -iTC_j T^{-1} & \end{pmatrix}$$

en donde $3 \leqslant j \leqslant r-1$. El nuevo sistema se denota por $\overline{\sum}$ y por similitud no es esencialmente diferente de $\sum$.

Esto significa que no solo se puede reducir un sistema de matrices de orden n , a un sistema de matrices de orden $n/2$, sino también es posible pasar de matrices de orden $n/2$ hasta las de orden n , conservando anticonmutatividad y cuadrado la identidad.

Si se supone que M es un numero màximo de matrices de orden n , anticonmutativas y cuadrado igual a la identidad, y N un número correspondiente de tales matrices de orden $n/2$, entonces la reducción del sistema de matrices de orden n a las de orden $n/2$, indica $M - 2 \leqslant N$. Por otra parte, el paso de las matrices de orden n/2 a las de orden n implica $N + 2 \leqslant M$. Combinando las desigualdades se sigue $M = N + 2$.

Si n es impar, el nùmero màximo de matrices no puede ser mayor que 1, porque la anticonmutatividad de B_1 , con cualquier otra matriz, permitiria concluir que n es par. Por tanto, en èste caso $M = 1$.

Si $n = 2^{4a+b} q$, q impar y $0 \leqslant b \leqslant 3$, entonces en base a lo que antes se dijo $M = 2(4a+b)+1$. En particular , $r-1$ es menor o igual que esa cota.

5. LA CONDICION DE ANTISIMETRIA EN SISTEMAS DE HURWITZ.

Sea $\sum = (B_1 , B_2 , \dots , B_{r-1})$ un sistema de r-1 matrices de orden n que cumplen con la anticonmutatividad y tienen cuadrado I. Se ha probado en las secciones anteriores que $\sum$ puede escribirse en la forma:

$$\sum = \left\langle \left[\underset{B_1}{\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}} , \underset{B_2}{\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}} , \underset{B_3}{\begin{pmatrix} & iC_3 \\ -iC_3 & \end{pmatrix}} , \dots , \underset{B_{r-1}}{\begin{pmatrix} & iC_{r-1} \\ -iC_{r-1} & \end{pmatrix}} \right] \right\rangle$$

Como indica el sistema (III) , las matrices asociadas con una fòrmula de producto de sumas de cuadrados (I) son antisimètricas. Esta condición no la satisfacen las matrices construidas hasta ahora. Por lo tanto èstas matrices no pueden ser usadas directamente para establecer la existencia de dichas fòrmulas.

Si las matrices B_j son antisimètricas y P es la inversa de la matriz que permitiò llevar $\sum$ a la forma reducida que se viò en la secciòn 3, entonces, debido a que $B_j = P\bar{B}_j P^{-1}$, para $j = 1, 2, \ldots , r-1$, se tiene

$$(P\bar{B}_j P^{-1})^t = (P^t)^{-1} \bar{B}_j^t P^t = -P\bar{B}_j P^{-1}$$

de donde se sigue

$$\bar{B}_j^t P^t P = -P^t P\bar{B}_j$$

y haciendo $U_\emptyset = P^t P$ se llega a que

$$\bar{B}_j^t U_\emptyset = -U_\emptyset \bar{B}_j$$

siendo $U_\emptyset$ una matriz no-singular y simètrica .

Una vez que se ha mostrado esta propiedad del sistema reducido, se conviene en denotar cada $\tilde{B}_j$ simplemente por B_j .

Resumiendo lo anterior se tiene

$$(1) \quad \begin{cases} U_\emptyset B_j = - B_j^t U_\emptyset & j = 1, 2, \dots , r-1 \\ U_\emptyset^t = U_\emptyset \quad , & \det U_\emptyset \neq \emptyset \end{cases}$$

Ahora, supòngase

$$U_\emptyset = \begin{pmatrix} X & U_1 \\ V & W \end{pmatrix}$$

en donde X, U_1 , V y W son matrices de orden n/2 . La primera ecuaciòn de (1) para $j = 1$ tiene el desarrollo siguiente

$$\begin{pmatrix} X & U_1 \\ V & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & U_1 \\ V & W \end{pmatrix}$$

de donde se sigue $X = W = \emptyset$. Su aplicaciòn cuando $j = 2$ tiene por resultado

$$\begin{pmatrix} & U_1 \\ V & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & U_1 \\ V & \end{pmatrix}$$

y de aquí $V = -U_1$. Se sigue que

$$U_\emptyset = \begin{pmatrix} & U_1 \\ -U_1 & \end{pmatrix}$$

Como $U_\emptyset^t = U_\emptyset$ entonces $U_1^t = -U_1$ y a partir de que $\det U_\emptyset \neq \emptyset$, se obtiene $\det U_1 \neq \emptyset$.

Desarrollando ahora la primera ecuación de (1) para $j > 2$ se tiene

$$\begin{pmatrix} & U_1 \\ -U_1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & iC_j \\ -iC_j & \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} & -iC_j^t \\ iC_j^t & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & U_1 \\ -U_1 & \end{pmatrix}$$

o sea

$$\begin{pmatrix} -iU_1C_j & \\ & -iU_1C_j \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} iC_j^tU_1 & \\ & iC_j^tU_1 \end{pmatrix}$$

lo que se expresa en forma resumida como

$$(2) \qquad \begin{cases} U_1C_j = C_j^tU_1 & j = 3, 4, \ldots, r-1 \\ U_1^t = -U_1 \quad , & \det U_1 \neq \emptyset \end{cases}$$

De esta manera, $\sum$ origina la matriz $U_{\emptyset}$ y $\sum_1$ da lugar a la matriz U_1 .

Supóngase ahora que

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_2 & X \\ V & W \end{pmatrix}$$

En donde U_2 , X , V y W son matrices de orden n/4 . La primera ecuación de (2) para $j = 3$ tiene el desarrollo

$$\begin{pmatrix} U_2 & X \\ V & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_2 & X \\ V & W \end{pmatrix}$$

de donde se sigue $X = V = \emptyset$. Si se aplica cuando $j = 4$ tiene como resultado

$$\begin{pmatrix} U_2 & \\ & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_2 & \\ & W \end{pmatrix}$$

y de aqui $W = U_2$. Se sigue que

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_2 & \\ & U_2 \end{pmatrix}$$

Como $U_1 = -U_1^t$ se tiene $U_2 = -U_2^t$ y a partir de que det $U_1 \neq Ø$, se obtiene det $U_2 \neq Ø$.

Sustituyendo las ecuaciones (2) para $j > 4$ y haciendo

$$C_j = \begin{pmatrix} & iD_j \\ -iD_j & \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{pmatrix} & iU_2D_j \\ -iU_2D_j & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -iD_j^tU_2 \\ iD_j^tU_2 & \end{pmatrix}$$

expresàndose en forma resumida como

$$(3) \qquad \begin{cases} U_2D_j = D_j^tU_2 & j = 5, 6, \ldots, r-1 \\ U_2^t = -U_2 \quad , & \det U_2 \neq Ø \end{cases}$$

El procedimiento puede continuar como se muestra en la tabla siguiente:

Si $j = 5$

$$U_2 D_5 = - D_5^t U_2$$

Si $j=6$

$$U_2 D_6 = - D_6^t U_2$$

▷

$$U_2 = \begin{pmatrix} & U_3 \\ - U_3 & \end{pmatrix}$$

Si $j > 6$

$$U_2 D_j = - D_j^t U_2$$

▷

$$U_3 E_j = E_j^t U_3 \qquad j = 7, 8, \ldots , r-1$$

$$U_3^t = U_3 \quad , \quad \det U_3 \neq 0$$

Si $j = 7$

$$U_3 E_7 = E_7^t U_3$$

Si $j = 8$

$$U_3 E_8 = E_8^t U_3$$

▷

$$U_3 = \begin{pmatrix} U_4 & \\ & U_4 \end{pmatrix}$$

Si $j > 8$

$$U_3 E_j = E_j^t U_3$$

▷

$$U_4 F_j = - F_j^t U_4 \qquad j = 9, \ldots , r-1$$

$$U_4^t = U_4 \quad , \quad \det U_4 \neq 0$$

Al obtener U_4 se observa que esta sucesión de matrices tiene periodicidad cuatro y se describe mediante las ecuaciones siguientes:

$$
\text{(IV)} \qquad \begin{cases}
U_j \Sigma_j U_j^{-1} = (-1)^{j+1} \Sigma_j^t \\[2mm]
U_j^t = (-1)^{j(j+1)/2} U_j \\[2mm]
U_j = \begin{cases}
\begin{pmatrix} & U_{j+1} \\ -U_{j+1} & \end{pmatrix} & j \text{ par} \\[4mm]
\begin{pmatrix} U_{j+1} & \\ & U_{j+1} \end{pmatrix} & j \text{ impar}
\end{cases}
\end{cases}
$$

en donde Σ_j es el sistema de matrices que se obtiene en cada una de las etapas, U_j es una matriz no-singular de orden $n / 2^j$ con $j = 0, 1, \ldots , [(r-2)/2]$, siendo este último número la parte entera de $(r-2)/2$, que es $p-1$ si $r-1 = 2p$, o bien p en el caso de que $r-1 = 2p+1$.

Se analiza la estructura del último término $U_{[(r-2)/2]}$ de la sucesión .

Si $r-1 = 2p$, entonces, según p sea par o impar, se tiene

$$U_{p-1} = \begin{pmatrix} U & \\ & U \end{pmatrix} \qquad\qquad U_{p-1} = \begin{pmatrix} & U \\ -U & \end{pmatrix}$$

en donde $U^t = (-1)^{p(p+1)/2} U$.

Si $r-1 = 2p + 1$, entonces la forma de U_p depende tanto de la paridad de p como de las ecuaciones

$$U_p \begin{pmatrix} I_\alpha & \\ & -I_\beta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_\alpha & \\ & -I_\beta \end{pmatrix} U_p \qquad \text{p par}$$

$$U_p \begin{pmatrix} I_\alpha & \\ & -I_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_\alpha & \\ & -I_\beta \end{pmatrix} U_p \qquad \text{p impar}$$

en donde $U_p^t = (-1)^{p(p+1)/2} U_p$.

Como puede apreciarse el signo de $(-1)^{p(p+1)/2}$ da por resultado ocho posibilidades para el ùltimo tèrmino de la sucesiòn U_j .

6. EL TEOREMA DE HURWITZ-RADON.

En esta secciòn quedarà establecido que la funciòn de Hurwitz-Radon proporciona el valor màximo de r , cuando el valor de $n = s$ es fijo.

Es conveniente introducir la notaciòn que sigue con el fin de simplificar la escritura de la demostraciòn del teorema ùnico de este trabajo .

Sean r, s, n enteros positivos. Suponemos que $x = (x_1 , \ldots , x_r) \in F^r$ y que $y = (y_1 , \ldots , y_s) \in F^s$. La terna (r,s,n) se llamarà admisible sobre F si existe una fòrmula

$$(x_1^2 + \ldots + x_r^2)(y_1^2 + \ldots + y_s^2) = (z_1^2 + \ldots + z_n^2)$$

en donde cada z_j es bilineal en x , y con coeficientes en F .

En otras palabras (r,s,n) es admisible si la transformaciòn bilineal

$$f : F^r \times F^s \longrightarrow F^n$$

dada por $z = f(x,y) = (z_1, \ldots, z_n)$ es normada.

<u>TEOREMA PRINCIPAL (HURWITZ-RADON). EN CUALQUIER CAMPO F , (r,n,n) ES ADMISIBLE SI Y SOLO SI $r \leqslant \rho(n)$.</u>

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $n = 2^{4a+b}q$ en donde q es un nùmero impar y $\emptyset \leqslant b \leqslant 3$. Se probarà primero que si (r,n,n) es admisible, entonces $r \leqslant \rho(n) = 8a + 2^b$.

Para la demostraciòn de èsta parte debe tomarse encuenta que la admisibilidad implica la existencia de un sistema de $r - 1$ matrices de orden n con las propiedades (III) de la pàgina 13. Claramente, cualquier subconjunto de esas matrices reune las mismas caracterìsticas y entonces (s,n,n) es admisible para $1 \leqslant s \leqslant r-1$.

En tèrminos de transformaciones esto significa que, si existe una transformaciòn normada $f: F^r \times F^n \rightarrow F^n$, entonces las restricciones respecto a r, son tambièn normadas.

Por el contrario, si no es posible encontrar un conjunto de $r-1$ matrices de orden n que cumplan las propiedades (III) , entonces es imposible tener un mayor nùmero de tales matrices, que si las satisfagan, ya que cualquier subconjunto con $r-1$ matrices lo impedirìa.

De èsta manera, para probar que $r \leqslant \rho(n)$ ùnicamente serà necesario demostrar que no es posible para r tomar el valor $\rho(n)+1$.

La demostraciòn tambièn tiene que ver con la estructura del ùltimo tèrmino de la sucesiòn U_j , $j = 0, 1, \ldots, [(r-2)/2]$, que fuè construida en la secciòn anterior.

De acuerdo con los valores de b se presentan cuatro casos .

__b=0__ . Se tiene en este caso $n = 2^{4a}$ y si se supone que $r-1 = \rho(n) = 8a+1$, resulta $r-1 = 2p+1$ en donde $p = 4a$.
Aplicando la estructura de $U_{[(r-2)/2]}$ con p par, se obtiene

$$U_p \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} U_p .$$

Si U_p es la matriz $\begin{pmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} \end{pmatrix}$, la ecuaciòn matricial indica $A_{\alpha\alpha} = A_{\beta\beta} = \emptyset$, es decir

$$U_p = \begin{pmatrix} & A_{\alpha\beta} \\ A_{\beta\alpha} & \end{pmatrix}$$

Ahora, se tiene $U_p^t = U_p$ y de aquí que $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}^t$, luego

$\alpha = \beta$ .Pero $\alpha + \beta = n/2^p = q$ es impar y entonces $\alpha = \beta$ es imposible , de donde $r-1 < \rho(n)$. Por lo tanto $r \leqslant \rho(n)$.

b=1 . Se tiene $n = 2^{4a+1} q$, $\rho(n) = 8a + 2$. Si $r-1 = 8a + 2$ entonces $p = 4a + 1$ y

$$U_{p-1} = \begin{pmatrix} & U \\ -U & \end{pmatrix}$$

con $U^t = -U$ y $\det U \neq \emptyset$. El orden de U es $n / 2^{4a+1} = q$ impar y ya que es antisimétrica su determinante es cero. Esto no es posible, por lo tanto $r-1 < \rho(n)$ o sea $r \leqslant \rho(n)$.

b=2 . Se tiene $n = 2^{4a+2} q$, $\rho(n) = 8a + 4$. Si $r-1 = 8a + 4$ entonces $p = 4a + 2$ y

$$U_{p-1} = \begin{pmatrix} U & \\ & U \end{pmatrix}$$

con $U^t = -U$ y $\det U \neq 0$. El mismo razonamiento anterior demuestra que $r \leq \rho(n)$.

$\underline{b=3}$. En èste caso se tiene $n = 2^{4a+3} q$ y $\rho(n) = 8a + 8$. Como se probò en la secciòn 4 un sistema maximo de matrices anticonmutativas y cuadrado la identidad puede llegar a tener cuando mucho $8a + 2(3) + 1 = 8a + 7$ matrices, siendo èste el lìmite de $r-1$; entonces $r \leq \rho(n)$.

Se demostrarà ahora la otra direcciòn del teorema que se hace construyendo ternas admisibles de la forma $(\rho(n), n, n)$.
Al respecto, varios autores, el mismo Hurwitz, han desarrollado sus propias construcciones, destacando la de T.Y. Lam que utiliza operadores de Clifford. Su trabajo puede consultarse en [4] .

Aquì se presenta una de las construcciones, que se debe a A.V. Geramita y N.J. Pullman [12], realizada con base en las ideas de M.R. Gabel [13]. Se efectùa sobre el campo de los nùmeros reales.

A continuación se introducen los conceptos de producto de Kronecker o tensorial de matrices y de sistemas de Hurwitz-Radon, en los que se apoya este trabajo. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y $B = (b_{k\ell})$ una de $p \times q$. <u>EL producto tensorial de A y B</u> es la matriz

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

que tiene mp renglones y nq columnas.

En general el producto tensorial no es conmutativo. Si A, B, C y D son matrices de orden $m \times n$, $p \times q$, $n \times s$ y $q \times t$ respectivamente, se demuestra fácilmente

$$(1) \qquad (A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

$$(2) \qquad (A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$$

Un sistema de matrices ortogonales $(A_1, \dots, A_s)$ que cumple las condiciones

$$A_i = -A_i^t \qquad i = 1, \dots, s$$

$$A_i A_j = -A_j A_i \qquad i \neq j \;, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant s$$

se llamará <u>sistema de Hurwitz-Radon (H-R)</u>.

Esto es, un sistema H-R al que se agrega la matriz identidad del orden correspondiente cumple con las ecuaciones (II) y a partir de él, usando la construcción de Hurwitz, puede determinarse otro sistema que satisface las condiciones (III).

Se demostrará que para cualquier entero n mayor que 1, de la forma $n = 2^{4a+b} q$ con q impar, existe un H-R sistema con $\rho(n) - 1$ matrices.

Para esto sean las matrices A, P y Q como sigue

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con base en estas matrices, se iràn construyendo los H-R sistemas adecuados para cubrir, primero los casos $n = 2$, 4 , 8 , 16 y $16n$ a partir de los cuales, resulta la extension para cualquier potencia de 2. Un ùltimo caso se referirà a la forma de encontrar el H-R adecuado para el valor general de n. Cabe señalar que para $n = 4$ y $n = 8$ el mètodo consiste en realizar todos los productos de Kronecker posibles, de 2 y 3 matrices a la vez y determinar el H-R que corresponde.

i) { A } es un H-R sistema de $\rho(2) - 1$ matrices de orden 2 .

En efecto, $\rho(2) - 1 = 1$, A es antisimètrica y no existe otra matriz que contradiga la propiedad anticonmutativa.
Inductivamente este es el caso $n = 2$ y determina la fòrmula conocida de la multiplicaciòn de nùmeros complejos. Si para todo punto (x_1 , x_2) en R^2 se define la matriz.

$$M = x_1 I + x_2 A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Entonces M conduce a la transformaciòn normada

$$T : R^2 \times R^2 \longrightarrow R^2$$

de la siguiente manera: Sean $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ puntos de R^2 y $T(X,Y) = YM$, es decir

$$T(X,Y) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} = (x_1y_1 - x_2y_2 , x_2y_1 + x_1y_2)$$

ii) $\{ A \otimes I , P \otimes A , Q \otimes A \}$ es un H-R sistema de $\rho(4) - 1$ matrices de orden 4.

Esto se sigue de que A es antisimètrica, I, P y Q son simètricas. Tambièn es sencillo comprobar la anticonmutatividad de las matrices. En este caso el valor de n es 4 y permite llegar a la multiplicaciòn de los cuaternios. Las matrices son

$$A \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P \otimes A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q \otimes A = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 & \emptyset & \emptyset \\ -1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & -1 \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{pmatrix}$$

Se define para cada punto (x_1, x_2, x_3, x_4) en R^4, la matriz

$$M = x_1 I + x_2 (Q \otimes A) + x_3 (A \otimes I) + x_4 (P \otimes A) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

La matriz M lleva a una transformación normada $T : R^4 \times R^4 \longrightarrow R^4$

en la forma siguiente:

Sean $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ dos puntos en R^4

y defínase $T(X,Y) = YM$, entonces

$$T(X,Y) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \,,\; x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_4 y_3 - x_3 y_4 \,,\; x_3 y_1 - x_4 y_2 +$$

$$+ x_1 y_3 + x_2 y_4 \,,\; x_4 y_1 + x_3 y_2 - x_2 y_3 + x_1 y_4)$$

iii) $\{Q \otimes Q \otimes A\,,\; I \otimes A \otimes I\,,\; I \otimes P \otimes A\,,\; A \otimes Q \otimes I\,,\; P \otimes Q \otimes A\,,\; A \otimes P \otimes Q$ y $A \otimes P \otimes P\}$ es un H-R sistema de $\rho(8) - 1$ matrices de orden 8 .

Este es el caso de $n = 8$ relativo a la multiplicación de los octonios. Las propiedades del producto tensorial sirven para comprobar que el sistema es H-R .

Las matrices son las siguientes :

$$Q \otimes Q \otimes A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I \otimes A \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I \otimes P \otimes A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes Q \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \otimes Q \otimes A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes P \otimes Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes P \otimes F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz M se define por :

$$M = x_1 I + x_2 (Q \otimes Q \otimes A) + x_3 (I \otimes A \otimes I) + x_4 (I \otimes P \otimes A) +$$

$$x_5 (A \otimes Q \otimes I) + x_6 (P \otimes Q \otimes A) + x_7 (A \otimes P \otimes Q) + x_8 (A \otimes P \otimes P)$$

En donde $x_1 , \ldots , x_8$ son las coordenadas de un punto $x \in R^8$.

Las matrices I dentro de parèntesis son de orden 2 , mientras la de fuera tiene orden 8.

La matriz M con la cual se puede definir una transformaciòn normada de $R^8 \times R^8 \longrightarrow R^8$ es

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & -x_5 & x_8 & -x_7 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & x_7 & x_8 & x_5 & -x_6 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & -x_7 & x_6 & -x_5 \\ -x_5 & x_6 & -x_7 & -x_8 & x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_6 & x_5 & x_8 & x_7 & x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_7 & -x_8 & -x_5 & -x_6 & -x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

iv) Suponer que $\{ M_1 , \ldots , M_s \}$ es un H-R sistema de matrices de orden n ; entonces el sistema $\{ A \otimes I \} \cup \{ Q \otimes M_i \ / \ i = 1, \ldots , s\}$ es H-R con $s + 1$ matrices de orden $2n$.

Se sigue de las propiedades del producto tensorial, así como de la antisimetría y ortogonalidad de las matrices. Si las matrices M_i son las siguientes:

$$M_1 = Q \otimes Q \otimes A \qquad M_5 = P \otimes Q \otimes A$$

$$M_2 = I \otimes Q \otimes I \qquad M_6 = A \otimes P \otimes Q$$

$$M_3 = I \otimes P \otimes A \qquad M_7 = A \otimes P \otimes P$$

$$M_4 = A \otimes Q \otimes I$$

entonces el nuevo sistema contiene $\rho(16) - 1 = 8$ matrices de orden 16 . Este es el caso en que n toma el valor 16, de manera que cubre la transicion desde que n tiene el valor 2^3 hasta el nuevo valor 2^4 .

v) Si $\{M_1, \ldots, M_s\}$ es un H-R sistema de matrices de orden n y $\{L_1, \ldots, L_m\}$ es un H-R sistema de matrices de orden k, entonces

$$\{P \otimes I_k \otimes M_i \;/ i=1, \ldots, s\} \cup \{Q \otimes L_j \otimes I_n \;/ j=1, \ldots, m\}$$

$$\cup \{A \otimes I_{nk}\}$$

también es un sistema H-R que consta de $s + m + 1$ matrices de orden 2nk .

Este caso hace posible pasar desde n hasta 16n , tomando $k = 8$ y $m = 7$. Por ejemplo, si $n = 16$ se pasa al valor $2^8 = 256$ con

$\rho(2^8) - 1 = (8)(2) + 1 - 1 = 16$ matrices de orden 256 .

vi) Finalmente la transición desde $n = 2^a$ para $2^a q$, q impar , es obtenida al efectuar el producto tensorial de las $\rho(n) - 1$ matrices que componen el H-R sistema, con la matriz I_q , resultando un H-R sistema compuesto por $\rho(n) - 1$ matrices de orden $2^a q$.

7. CALCULO DE ALGUNOS VALORES DE LA FUNCION DE HURWITZ-RADON.

A continuaciòn se escriben las ternas admisibles que se obtienen tomando como base las ternas admisibles clàsicas, asì como los valores $k = 8$, $m = 7$.

Si se inicia con $n = 2$, son ternas admisibles con $b \equiv 1 \pmod 4$ las siguientes:

$$(2 , 2 , 2)$$

$$(10 , 2^{5} , 2^{5})$$

$$(18 , 2^{9} , 2^{9})$$

$$(26 , 2^{13} , 2^{13})$$

$$\vdots$$

Si se inicia en $n = 4$, las ternas admisibles con $b \equiv 2 \pmod 4$ son :

$$(4 , 4 , 4)$$

$$(12 , 2^{6} , 2^{6})$$

$$(20 , 2^{10} , 2^{10})$$

$$(28 , 2^{14} , 2^{14})$$

$$\vdots$$

Al iniciar en $n = 8$, las ternas admisibles con $b \equiv 3 \pmod 4$

$$(8\ ,\ 8\ ,\ 8)$$

$$(16\ ,\ 2^{7}\ ,\ 2^{7})$$

$$(24\ ,\ 2^{11}\ ,\ 2^{11})$$

$$(32\ ,\ 2^{15}\ ,\ 2^{15})$$

$$\vdots$$

Por último iniciando con $n = 16$ y $b \equiv 0 \pmod 4$ se tienen

$$(9\ ,\ 2^{4}\ ,\ 2^{4})$$

$$(17\ ,\ 2^{8}\ ,\ 2^{8})$$

$$(25\ ,\ 2^{12}\ ,\ 2^{12})$$

$$(33\ ,\ 2^{16}\ ,\ 2^{16})$$

$$\vdots$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. HURWITZ . Uber die Komposition der quadratische Formen von beliebig viele variabeln . Nachr. k. Gesellsch. Gottingen M. Ph. kl. (1898) , 309 - 316. Reimpreso en: A. Hurwitz, Mathematische Werke II, Brikhauser Verlag, Basel 1933, pp. 565-571.

[2] A. HURWITZ . Uber die Komposition der quadratische Formen . Mathematische Annalen , Bd. 88 , 1923 , S. 1 - 25. Reimpreso en: A. Hurwitz, Mathematische Werke II, Brikhauser Verlag, Basel 1933, pp. 641-666.

[3] J. RADON . Lineare Scharen orthogonaler Matrizen . Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg , 1 (1922) , 1 -14 .

[4] J. ADEM . Algebra Lineal , Campos Vectoriales e Inmersiones . Instituto de Matemàtica Pura y Aplicada , III Escuela Latinoamericana de Matemàticas , 1978 .

[5] J. ADEM . On The Hurwitz Problem over an arbitrary Field I . Boletin de la Sociedad Matemàtica Mexicana , Vol. 25 , No. 1 , 1980.

[6] J. ADEM . On The Hurwitz Problem over an arbitrary Field II . Boletin de la Sociedad Matemàtica Mexicana , Vol. 26 , No. 1 , 1981.

[7] J. ADEM . Construction of some Normed Maps . Boletin de la Sociedad Matemàtica Mexicana , Vol. 20 , No. 2 , 1975 .

[8] J. ADEM . On Maximal Sets of Anticommuting Matrices . Boletin de la Sociedad Matemàtica Mexicana , Vol. 23 , No. 2 , 1978 .

[9] J. ADEM . Classification of Low Dimensional Orthogonal Pairings. Boletin de la Sociedad Matemàtica Mexicana , Vol. 31 , No. 1 , 1986.

[10] D. B. SHAPIRO . Products of Sums of Squares . Expo. Math. 2 (1984) . 235 - 261 .

[11] D. B. SHAPIRO . On the Hurwitz Problem over an arbitrary Field . Boletin de la Sociedad Matemàtica Mexicana , Vol. 29 , No. 1 , 1984.

[12] A. V. GERAMITA y N. J. PULLMAN . A Theorem of Hurwitz and Radon and Orthogonal Projective Modules . Proceedings of the American Mathematical Society , Vol. 42 , Num. 1 , January 1974 .

[13] M. R. GABEL . Generic Orthogonal Stably Free Projectives . Journal of Algebra 29 , 477 -478 , 1974 .

[14] T. Y. LAM . The Algebraic Theory of Quadratic Forms . W. A. Benjamin , Inc. Reading Massachusetts 1973 .

[15] I. N. HERSTEIN . Topics in Algebra . Blaisdel Publishing Company, 1964 .

[16] T. M. APOSTOL . Mathematical Analysis . A Modern Approach to Advanced Calculus . Addison-Wesley Publishing Company , Inc. 1957 .

NOTACIONES

$\sum$	Sigma, del alfabeto griego , símbolo de sumatoria; tambien se usa para denotar sistemas de matrices.
$\in$	Pertenencia de la teoría de conjuntos
$\neq$	Diferente de
$\leqslant$	Menor o igual que
R	Campo de los nùmeros reales
C	Campo de los nùmeros complejos
F	Campo arbitrario
F^n	Espacio vectorial n-dimensional
$F^r \times F^s$	Producto cartesiano de los espacios r y s- dimensionales.
A^t	Matriz transpuesta de A
T^{-1}	Matriz inversa de una matriz no-singular T
I_q	Matriz identidad de orden q
f(x,y)	Funciòn de las variables x , y

$B_n(x,y)$	Producto interno de x e y en F^n, cuya regla es xy^t
$Q_n(x)$	Forma cuadràtica que expresa la norma de $x \in F^n$ que se calcula por $x_1^2 + \dots + x_n^2$
$\rho(n)$	Funciòn de Hurwitz-Radon cuyo valor es $8a + 2^b$ cuando $n = 2^{4a+b} q$, q impar y $0 < b < 3$.
i , j , k	Cuando no son subìndices su significado es -1
(r,s,n)	Terna admisible que indica la existencia de una fòrmula de producto de sumas de cuadrados
$A \otimes B$	Producto de Kronecker o tensorial de las matrices A y B
H-R	Abreviatura de Hurwitz-Radon
[ ]	Referencia bibliogràfica