VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
U.N.A.M.

SERIES TRIGONOMETRICAS CONJUGADAS

TESIS

Que para obtener el
título de matemático
presenta

Luis Valero Elizondo

Octubre, 1990.

CONTENIDO

Introducción

1. Primeros criterios de convergencia para series de Fourier conjugadas ____ 1

2. Abel-Poisson sumabilidad de series de Fourier conjugadas ____ 30

3. Función conjugada ____ 45

4. Métodos complejos I ____ 81

5. Métodos complejos II ____ 105

6. Funciones conjugadas y espacios $\mathcal{L}^p$ ____ 125

Apéndice ____ 149

Bibliografía 165

Indice de símbolos 167

Indice analítico 168

INTRODUCCION.

El presente trabajo es una introducción al estudio de las series de Fourier conjugadas y a las funciones conjugadas. Empezamos abordando la "teoría conjugada" de forma paralela a la teoría clásica, de la cual el lector encontrará un resumen en el apéndice, que recomendamos leer simultáneamente con los dos primeros capítulos, para poder apreciar la enorme relación existente entre ambas ramas.

Sin duda alguna, el lector observará que los primeros criterios de convergencia para series de Fourier conjugadas son "duales" (si se nos permite usar la palabra en un contexto formalmente incorrecto, pero intuitivamente claro) de los criterios usuales en la teoría clásica, salvo por la notoria excepción de que la convergencia de la serie conjugada en un punto, en caso de haberla, es a una extraña y aparentemente misteriosa integral impropia, que más tarde será conocida como la función conjugada de la función original.

En el capítulo tres se define con todo rigor la función conjugada, se observan algunas de sus propiedades e incluso se calculan las funciones conjugadas en casos sencillos. Demostramos la existencia de la función conjugada c.d. y damos un criterio de Lusin para la convergencia de la serie de Fourier usual de una función de cuadrado integrable en términos de un cierto límite que involucra a la función conjugada, y que constituyó la motivación de la célebre conjetura de Lusin.

A partir del capítulo cuatro abandonamos el análisis real y usamos herramienta propia de la variable compleja, en donde la función conjugada para funciones en $\mathcal{L}^1$ juega un rol semejante al de la conjugada armónica de una función de variable compleja. Empleamos la teoría de los espacios de Hardy y algunos resultados sobre series de potencias y representación integral de Poisson de medidas de Borel complejas finitas para garantizar continuidad absoluta de funciones y convergencia absoluta de series de Fourier en contextos aparentemente no relacionados.
En la parte final del trabajo estudiamos el comportamiento de la conjugación con respecto a los espacios $\mathcal{L}^p$ y $\mathcal{L}^1 log^+ \mathcal{L}^1$, empleando aún métodos complejos (principalmente la fórmula integral de Cauchy). Usamos un concepto de integrabilidad definido por Boks para demostrar que si la conjugada de una función integrable es a su vez integrable, entonces la serie conjugada de la función original es la serie de la función conjugada; con esto y un resultado de análisis de Fourier clásico, damos un ejemplo de una función integrable cuya función conjugada no lo es, lo que muestra el gran alcance de los teoremas anteriores.

CAPITULO UNO.
PRIMEROS CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SERIES DE FOURIER CONJUGADAS.

En este capítulo definimos la conjugada de una serie trigonométrica, así como los núcleos conjugados de Dirichlet y Fejér, propios del estudio de la convergencia de las series de Fourier conjugadas. Con ellos calculamos las fórmulas integrales para las sumas parciales de una serie de Fourier conjugada y sus promedios, y probamos para series conjugadas el principio de localización de Riemann, así como los "duales" de los teoremas de Dini y Dirichlet-Jordan, conocidos como teoremas de Pringsheim y Young respectivamente. También se estudia la convergencia puntual en promedios de la serie conjugada de una serie de Fourier, y probamos el análogo al teorema de Lebesgue.

1.1. DEFINICION.

Sea $S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nt) + b_n sen(nt)$ una serie trigonométrica con $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Definimos formalmente la **serie conjugada** de S como

$$\tilde{S}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} -b_n cos(nt) + a_n sen(nt).$$

En caso de tener una serie trigonométrica con coeficientes complejos, la serie conjugada se obtiene conjugando formalmente a las partes real e imaginaria, es decir, si

$$S(t) = S_1(t) + iS_2(t)$$

con S_1, S_2 series trigonométricas con coeficientes reales, entonces definimos

$$\tilde{S}(t) := \tilde{S}_1(t) + i\tilde{S}_2(t).$$

1.2. *Observación.*
Claramente de la definición y del hecho de que las operaciones formales con series trigonométricas se realizan en cada coeficiente, tenemos que la conjugación de series es un operador $\mathbb{C}$-lineal, cuyo núcleo son las series trigonométricas con únicamente término constante. También se ve que la restricción $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ es innecesaria.

En la mayor parte de este trabajo manejaremos series trigonométricas con coeficientes reales y, a menos que se especifique lo contrario, se supondrá esa condición tácitamente. Sin embargo, algunas veces trabajaremos con el sistema ortonormal $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ (con la medida normalizada), y en ese caso las series trigonométricas adoptan la forman

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

con $c_n \in \mathbb{C}$. Esta serie se puede escribir de manera única como $S_1(t)+iS_2(t)$ con S_1, S_2 series con coeficientes reales y en términos de senos y cosenos (esto se considera implícitamente muchas veces al hablar de coeficientes reales). Veamos cómo: Si $S_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nt) + b_n sen(nt)$, $S_2(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n cos(nt) + \beta_n sen(nt)$, por la fórmula de Euler: $e^{int} = cos(nt) + isen(nt)$, la igualdad $S = S_1 + iS_2$ se da si y sólo si:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0 + i\alpha_0}{2} &= c_0 \\
c_n + c_{-n} &= a_n + i\alpha_n \\
c_n - c_{-n} &= \beta_n - ib_n,
\end{aligned}$$

por lo que se debe tener:

$$\begin{aligned}
a_n &= Re(c_n) + Re(c_{-n}) \\
b_n &= Im(c_{-n}) - Im(c_n) \\
\alpha_n &= Im(c_n) + Im(c_{-n}) \\
\beta_n &= Re(c_n) - Re(c_{-n}).
\end{aligned}$$

Inversamente, para obtener la forma compleja de la serie $S = S_1 + iS_2$ debemos tener que:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0 + i\alpha_0}{2} \\
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} + \frac{i\alpha_n + \beta_n}{2} \\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} + \frac{i\alpha_n - \beta_n}{2}.
\end{aligned}$$

Aparte de mostrar que efectivamente hay una única manera de pasar de series trigonométricas complejas a series reales, los cálculos anteriores muestran que la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ es de hecho una de la forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nt) + b_n sen(nt)$ si y sólo si $c_0 \in \mathbb{R}$ y $c_{-n} = \bar{c}_n$, hecho que se usa para demostrar casos sencillos de teoremas clásicos de análisis de Fourier, (véanse, por ejemplo, los teoremas de Cantor-Lebesgue y Lusin-Denjoy). Esta simplificación nos servirá para caracterizar a la conjugada de una serie trigonométrica cuando está en su forma compleja.

1.3. PROPOSICION.

Sea $S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ *una serie trigonométrica. Entonces*

$$\begin{aligned}\tilde{S}(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} -i(sgn\ n)c_n e^{int} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} -ic_n e^{int} + \sum_{n=-1}^{-\infty} ic_n e^{int}.\end{aligned}$$

Demostración.

Veamos primero que el resultado es cierto para series S que admiten una forma real (y por definición $\tilde{S}$ también la admite), por lo que en las fórmulas obtenidas anteriormente, las α_n, β_n tendrán valor de 0.

Si denotamos el n-ésimo coeficiente complejo de $\tilde{S}$ como $c_n(\tilde{S})$, y haciendo la distinción entre $a_n(S)$ y $a_n(\tilde{S})$ y análogamente para $b_n(S)$ y $b_n(\tilde{S})$, tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$ que:

$$
\begin{aligned}
c_0(\tilde{S}) &= 0 \\
c_n(\tilde{S}) &= \frac{a_n(\tilde{S}) - ib_n(\tilde{S})}{2} \\
&= \frac{-b_n(S) - ia_n(S)}{2} \\
&= -i\frac{(a_n(S) - ib_n(S))}{2} \\
&= -ic_n(S), \\
c_{-n}(\tilde{S}) &= \frac{a_n(\tilde{S}) + ib_n(\tilde{S})}{2} \\
&= \frac{-b_n(S) + ia_n(S)}{2} \\
&= i\frac{(a_n(S) + ib_n(S))}{2} \\
&= ic_{-n}(S),
\end{aligned}
$$

por lo que la expresión compleja propuesta para $\tilde{S}$ es la correcta. Visto esto, notamos que para el caso $S = S_1 + iS_2$ con S_1 y S_2 con coeficientes reales, tenemos (ya que la obtención del n-ésimo coeficiente complejo de una serie trigonométrica es una operación $\mathbb{C}$-lineal) que para toda $n \in \mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
c_n(\tilde{S}) &= c_n(\tilde{S}_1 + i\tilde{S}_2) \\
&= c_n(\tilde{S}_1) + ic_n(\tilde{S}_2) \\
&= -i(sgn\ n)c_n(S_1) + (sgn\ n)c_n(S_2) \\
&= -i(sgn\ n)(c_n(S_1) + ic_n(S_2)) \\
&= -i(sgn\ n)c_n(S).
\end{aligned}
$$

∎

En lo sucesivo, usaremos la forma compleja cuando ésta sea más fácil de manejar, como por ejemplo en la siguiente

1.4.PROPOSICION.
Se tiene que $-\sum_{-\infty}^{\infty} i(sgn\ k)c_k e^{ikt}$ *es la serie de Fourier de alguna* $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ *si y sólo si* $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$.

Demostración.
Basta notar que $|i(sgn\ k)c_k| = |c_k|$ para $k \neq 0$, y el resultado se sigue del teorema de Riesz-Fischer. ∎

1.5. DEFINICION.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el **n-ésimo núcleo conjugado de Dirichlet** como la función $\tilde{D}_n : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\tilde{D}_n(t) := \sum_{k=1}^{n} sen(kt).$$

1.6. PROPOSICION.
Para toda $t \neq 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ *se tiene que*

$$\tilde{D}_n(t) = \frac{cos(t/2) - cos(n+\frac{1}{2})t}{2sen(t/2)}.$$

Demostración.
Se tiene que:

$$\tilde{D}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} sen(kt) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} 2sen(kt)sen(t/2)}{2sen(t/2)}$$
$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} cos(kt - \frac{t}{2}) - cos(kt + \frac{t}{2})}{2sen(t/2)}$$
$$= \frac{cos(t/2) - cos(n + \frac{1}{2})t}{2sen(t/2)}.$$

∎

1.7. **PROPOSICION.**

Los núcleos conjugados de Dirichlet tienen las siguientes propiedades:

(i) Para toda $n \in \mathbb{N}$, la función $\tilde{D}_n$ es periódica, (de periodo 2π), impar y diferenciable. Además se tiene que $\int\limits_{[-\pi,\pi]} \tilde{D}_n(t)dt = 0$.

(ii) Para toda $n \in \mathbb{N}$ y $t \in (0,\pi]$, $|\tilde{D}_n(t)| \leq \frac{\pi}{|t|}$.

(iii) La familia $\{\tilde{D}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está uniformemente acotada, es decir, no existe una constante $M > 0$ tal que $|\tilde{D}_n(t)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-\pi,\pi]$.

Demostración.

(i) Por definición, $\tilde{D}_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} sen(kt)$ es suma de funciones periódicas, impares y diferenciables, y en consecuencia ella misma lo es. Además $\int\limits_{[-\pi,\pi]} \tilde{D}_n(t)dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{[-\pi,\pi]} sen(kt)dt = 0$.

(ii) Para $0 < t \leq \pi$ tenemos $\frac{1}{|sen(t/2)|} \leq \frac{\pi}{|t|}$, por lo que $|\tilde{D}_n(t)| = \frac{|cos(t/2) - cos(n+\frac{1}{2})t|}{2|sen(t/2)|} \leq \frac{1}{|sen(t/2)|} \leq \frac{\pi}{|t|}$.

(iii) Calculemos algunos valores especiales de $\tilde{D}_n$:

$\tilde{D}_n(\pi/n) = \frac{cos(\pi/2n) - cos(\pi + \frac{\pi}{2n})}{2sen(\pi/2n)} = \frac{2cos(\pi/2n)}{2sen(\pi/2n)} = cot(\pi/2n) \approx \frac{2n}{\pi}$

$\rightarrow \infty \ (n \longrightarrow \infty)$. ∎

1.8. **PROPOSICION.**

Los núcleos conjugados de Dirichlet tienen las siguientes propiedades:

(i) $\int\limits_{[0,\pi]} \tilde{D}_n(t)dt \approx ln\ n$

(ii) $\int\limits_{[0,\pi]} |\tilde{D}_n(t)|dt \approx ln\ n$

(iii) Para toda $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ *tal que* $f(t) \longrightarrow 0\ (t \longrightarrow 0)$, *se tiene* $\int\limits_{[0,\pi]} |f(t)\tilde{D}_n(t)|dt = o(ln\ n)$ *(y por lo tanto se tiene también* $\int\limits_{[0,\pi]} f(t)\tilde{D}_n(t)dt = o(ln\ n)$*).*

Demostración.

(i) $\int\limits_{[0,\pi]} \tilde{D}_n(t)dt = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{cos(kt)}{k} \Big|_{t=0}^{\pi} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx O(1) + ln\ n$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_n(t) &= \frac{cos(t/2) - cos(n+\frac{1}{2})t}{2sen(t/2)} \\
&= \frac{cos(t/2) - cos(nt)cos(t/2) + sen(nt)sen(t/2)}{2sen(t/2)} \\
&= \frac{cos(t/2)[1 - cos(nt)]}{2sen(t/2)} + \frac{sen(nt)}{2} \\
&= \frac{[1 - cos(nt)]}{2sen(t/2)} \\
&+ \frac{[cos(t/2) - 1]}{2sen(t/2)}[1 - cos(nt)] + O(1) \\
&= \frac{[1 - cos(nt)]}{2sen(t/2)} + O(1)O(1) + O(1) \\
&= \frac{sen^2(nt/2)}{sen(t/2)} + O(1).
\end{aligned}
$$

Así, $\int\limits_{[0,\pi]} |\tilde{D}_n(t)|dt = \int\limits_{[0,\pi]} \frac{sen^2(nt/2)}{sen(t/2)}dt + O(1)$ $= 2 \int\limits_{[0,\pi/2]} \frac{sen^2(nt)}{sen(t)}dt + O(1)$, y como $\int\limits_{[0,\pi/2]} \frac{sen^2(nt)}{sen(t)}dt \approx \frac{1}{2}ln\ n$ (véase el apéndice), se tiene que $\int\limits_{[0,\pi]} |\tilde{D}_n(t)|dt \approx ln\ n$.

(iii) Sea $\varepsilon > 0$. Como $f(t) \longrightarrow 0$ $(t \longrightarrow 0)$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(t)| \leq \varepsilon \forall\ t \in (-\delta, \delta)$, entonces $\int\limits_{[0,\delta]} |f(t)\tilde{D}_n(t)|dt \leq \varepsilon \int\limits_{[0,\pi]} |\tilde{D}_n(t)|dt = \varepsilon O(ln\ n)$. Además, ya que $|\tilde{D}_n(t)| \leq \frac{\pi}{t}$, tenemos que $\int\limits_{[\delta,\pi]} |f(t)\tilde{D}_n(t)|dt \leq \frac{\pi}{\delta} \int\limits_{[\delta,\pi]} |f(t)|dt = O(1)$, por lo que $\frac{\int\limits_{[0,\pi]} |f(t)\tilde{D}_n(t)|dt}{ln\ n} \leq \varepsilon O(1) + \frac{O(1)}{ln\ n}$, con lo que se demuestra que $\int\limits_{[0,\pi]} |f(t)\tilde{D}_n(t)|dt = o(ln\ n)$. ∎

1.9. DEFINICION.
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ dada. Definimos la **n-ésima suma parcial conjugada** de f como la función $\tilde{S}_n(f) : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\tilde{S}_n(f)(t) := -\sum_{k=-n}^{n} i(sgn\ k)\hat{f}(k)e^{ikt}.$$

En lo sucesivo, dada una función $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, denotaremos

$$\rho_x(t) := f(x+t) - f(x-t).$$

1.10. **PROPOSICION.** (Fórmulas integrales para $\tilde{S}_n(f)$.)
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Entonces:
(i) $\tilde{S}_n(f)(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} f(x+t)\tilde{D}_n(t)dt =$
$\frac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} f(x-t)\tilde{D}_n(t)dt.$

(ii) $\tilde{S}_n(f)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \rho_x(t)\tilde{D}_n(t)dt.$
(iii) $\tilde{S}_n(f)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \rho_x(t)\left(\frac{1}{2tan(t/2)} - \frac{cos(nt)}{2tan(t/2)}\right)dt + o(1)$

Demostración.
(i) Por definición,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n(f)(x) &= -\sum_{k=-n}^{n} i(sgn\ k)\hat{f}(k)e^{ikx} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} i(sgn\ k)\int\limits_{[-\pi,\pi]} f(t)e^{-ik(t-x)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} f(t)\left(-\sum_{k=-n}^{n} i(sgn\ k)e^{-ik(t-x)}\right)dt.\end{aligned}$$

Calculamos: $-\sum_{k=-n}^{n} i(sgn\ k)e^{-ikz} = -i(\sum_{k=1}^{n} e^{-ikz} - \sum_{k=1}^{n} e^{ikz}) = i\sum_{k=1}^{n} 2isen(kz) = -2\tilde{D}_n(z)$.
Así, $\tilde{S}_n(f)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} 2f(t)\tilde{D}_n(t-x)dt = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} f(x+t)\tilde{D}_n(t)dt$.
Haciendo el cambio de variable $u=-t$ y aprovechando que $\tilde{D}_n$ es impar, obtenemos

$$\tilde{S}_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} f(x-u)\tilde{D}_n(u)du.$$

(ii) Sumando las dos expresiones anteriores para $\tilde{S}_n(f)(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n(f)(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} \{f(x+t)-f(x-t)\}\tilde{D}_n(t)dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} \rho_x(t)\tilde{D}_n(t)dt.\end{aligned}$$

Como ρ_x y $\tilde{D}_n$ son funciones impares, su producto es par, y por lo tanto $\tilde{S}_n(f)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \rho_x(t)\tilde{D}_n(t)dt$.
(iii) Se obtiene de (ii) y desarrollando $\tilde{D}_n(t)$ en su fórmula cerrada, usando luego el lema de Riemann- Lebesgue para obtener el término $o(1)$. ∎

1.11. TEOREMA. (A. Pringsheim)
Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $x \in [-\pi,\pi]$ *tales que* $\frac{\rho_x(t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$.
Entonces $\tilde{S}_n(f)(x) \longrightarrow -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt$.

Demostración.
Probaremos que

$$\tilde{S}_n(f)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt + o(1).$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n(f)(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}cos(nt)dt + o(1) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt + I_1(n,x) + o(1).\end{aligned}$$

Veremos que $I_1(n,x) \to 0$ $(n \longrightarrow \infty)$.
Ya que $t \approx 2sen(t/2)$ y que $cos(t/2) \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, tenemos que $\frac{\rho_x(t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ si y sólo si $\frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Por el lema de Riemann-Lebesgue, $I_1(n,x) = o(1)$. ∎

1.12. TEOREMA. (Principio de localización de Riemann para series de Fourier conjugadas)

Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]), x_0 \in [-\pi,\pi]$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x) = 0$ para toda x en $A = \{x \in [-\pi,\pi] : |x - x_0| < \varepsilon \ (mod\ 2\pi)\}$.

Entonces:

(i) $\tilde{S}_n(f)(x) \longrightarrow -\frac{1}{\pi} \int\limits_{[0,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2\tan(t/2)} dt \ \forall\, x \in A$.

(ii) La convergencia de (i) es uniforme en cada subintervalo cerrado contenido en A.

(iii) Si $g, h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]), x_0 \in [-\pi,\pi], \varepsilon > 0$ son tales que $g(t) = h(t) \ \forall\ t \in A = \{x \in [-\pi,\pi] \mid |x - x_0| < \varepsilon (mod 2\pi)\}$, entonces $\tilde{S}_n(g)(x) - \tilde{S}_n(h)(x) \ \to\ -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \frac{(g-h)(x+t)-(g-h)(x-t)}{2\tan(t/2)} dt \ (n \to \infty)$, y la convergencia es uniforme en todo subintervalo cerrado contenido en A. Es decir, las series $\tilde{S}_n(g)(x)$ y $\tilde{S}_n(h)(x)$ son equiconvergentes, pero a diferencia del caso de series de Fourier clásicas, no necesariamente al mismo valor.

Demostración.

(i) Sea $x \in A$. Sea $\delta = \varepsilon - |x - x_0| > 0$. Entonces para $0 \leq t < \delta$ tenemos que $|x_0 - (x \pm t)| \leq |x_0 - x| + |t| < |x_0 - x| + \delta = \varepsilon$, por lo tanto $(x \pm t) \in A$ y $f(x \pm t) = 0 = \rho_x(t)\ \forall t \in [0,\delta)$. Así, $\frac{\rho_x(t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ y por el teorema de Pringsheim se tiene la convergencia deseada.

(ii) Sea $0 < \eta < \varepsilon$, y sea $B = \{x \in [-\pi,\pi] : |x - x_0| \leq \eta \ (mod\ 2\pi)\}$. Si $\delta = \varepsilon - \eta > 0$, entonces para toda $x \in B$, $0 \leq t < \delta$, se tiene que $|x_0 - (x \pm t)| \leq |x_0 - x| + |t| < \varepsilon$, por lo tanto $\rho_x(t) = 0 \ \forall\ x \in B$.

Así, $\forall x \in B$:

$$\tilde{S}_n(f)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{[\delta,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2sen(t/2)}cos(n+\frac{1}{2})tdt,$$

y $\frac{1}{\pi}\int_{[\delta,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2sen(t/2)}cos(n+\frac{1}{2})tdt \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ uniformemente en $x \in B$ por el lema generalizado de Riemann-Lebesgue (ver apéndice).

(iii) Se sigue de (i) y (ii), y de que $\tilde{S}_n(g-h)(x) = \tilde{S}_n(g)(x) - \tilde{S}_n(h)(x)$. ∎

1.13. **PROPOSICION.**

Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, y sea $x \in [-\pi,\pi]$ un punto de discontinuidad de f del primer tipo (es decir, $f(x^+)$, $f(x^-)$ existen pero son distintos). Sea $d = f(x^+) - f(x^-)$. Entonces

$$\tilde{S}_n(f)(x) \approx -\frac{d}{\pi}ln(n).$$

En particular, $\tilde{S}(f)(x)$ diverge.

Demostración.

Para toda $t \in [-\pi,\pi]$ se tiene que

$$f(x+t) - f(x-t) = d + \varepsilon(t),$$

donde $\varepsilon(t) \longrightarrow 0$ $(t \longrightarrow 0)$, por lo que usando 1.8.(iii):

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_n(f)(x) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{[0,\pi]} [f(x+t)-f(x-t)]\tilde{D}_n(t)dt \\
&= -\frac{d}{\pi}\int\limits_{[0,\pi]} \tilde{D}_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{[0,\pi]} \varepsilon(t)\tilde{D}_n(t)dt \\
&\approx -\frac{d}{\pi} ln\ n + o(ln\ n) \\
&\approx -\frac{d}{\pi} ln\ n,
\end{aligned}$$

pues $ln\ n \to \infty \quad (n \to \infty)$. ∎

1.14. DEFINICION.

Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]), x \in [-\pi,\pi]$ y $h \in (0,\pi]$. Definimos:

$$\tilde{f}(x,h) := -\frac{1}{\pi}\int\limits_{[h,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt,$$

donde $\rho_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$.

Nuestro siguiente objetivo es probar el resultado correspondiente al criterio de Dirichlet-Jordan sobre funciones de variación acotada, y empezamos con un resultado preliminar.

1.15. LEMA.

(i) Para cualesquiera $n > 1$, *y* $\frac{\pi}{n} \leq a < b < \pi$ *se tiene que:*

$$\left| \int_{[a,b]} \frac{cos(nt)}{2tan(t/2)} dt \right| \leq 1.$$

(ii) Si $P : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona creciente, continua en 0 y tal que $P(0) = 0$, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[\frac{\pi}{n}, \pi]} \frac{P(t)}{2tan(t/2)} cos(nt) dt = 0.$$

Demostración.
(i) Dado que $\frac{1}{2tan(t/2)}$ es monótona decreciente y no negativa en $[\frac{\pi}{n}, b]$, por el teorema de Bonnet existe $\xi \in [a, b]$ tal que:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[a,b]} \frac{cos(nt)}{2tan(t/2)} dt \right| &= \left| \frac{1}{2tan(a/2)} \int_{[a,\xi]} cos(nt) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2tan(\pi/2n)} \frac{|sen(n\xi) - sen(na)|}{n} \\
&\leq \frac{1}{2sen(\pi/2n)} \frac{2}{n} \\
&\leq \frac{\pi}{2} \frac{2n}{\pi} \frac{1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Como $P(0) = 0$ y P es continua en 0, existe δ positiva y menor que π tal que $0 \leq P(t) < \varepsilon/2$ para toda $t \in [0, \delta]$. Tenemos para dicha δ fija que:

$$\frac{1}{2tan(t/2)} \in \mathcal{L}^{\infty}_{\mathbb{R}}([\delta, \pi]), \quad \text{por lo que } \frac{P(t)}{2tan(t/2)} \in \mathcal{L}^{1}_{\mathbb{R}}([\delta, \pi]),$$

y por el lema de Riemann-Lebesgue,

$$\int_{[\delta,\pi]} \frac{P(t)}{2tan(t/2)} cos(nt)dt = o(1).$$

Así, existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_0$, $\frac{\pi}{n} < \delta$ y $|\int_{[\delta,\pi]} \frac{P(t)}{2tan(t/2)} cos(nt)dt| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Por otro lado, como P es monótona creciente y no negativa en $[\frac{\pi}{n}, \delta]$ y $\frac{cos(nt)}{2tan(t/2)}$ es continua en el mismo intervalo, por el teorema de Bonnet nuevamente existe $\xi' \in [\frac{\pi}{n}, \delta]$ tal que:

$$\left| \int_{[\frac{\pi}{n},\delta]} \frac{P(t)}{2tan(t/2)} cos(nt)dt \right| = P(\delta) \left| \int_{[\xi',\delta]} \frac{cos(nt)}{2tan(t/2)} dt \right|,$$

y por el inciso (i) lo anterior es menor o igual que $P(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Así, tenemos que para $n \geq N_0$, $|\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \frac{P(t)}{2tan(t/2)} cos(nt)dt| < \varepsilon$. ∎

Antes de enunciar el teorema de Young sobre convergencia de la serie conjugada para funciones de variación acotada, queremos notar que, puesto que toda función de variación acotada tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades, tiene en particular a lo más una cantidad numerable de discontinuidades removibles; modificándola en tales discontinuidades (que forman un conjunto de medida cero) obtenemos una función de variación acotada, sin discontinuidades removibles e igual c.d. a la función original.

1.16. TEOREMA. (W. H. Young)
Sean f una función de variación acotada en $[-\pi,\pi]$, y $x \in [-\pi,\pi]$. Entonces $(\tilde{S}_n(f)(x))$ converge si y sólo si existe

$$\tilde{f}(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\pi} \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)} dt,$$

en cuyo caso $\tilde{S}(f)(x) = \tilde{f}(x)$.

Demostración.
Por lo observado anteriormente, podemos suponer que f no tiene discontinuidades removibles. Si x es punto de discontinuidad de f, debe darse entonces que los límites bilaterales $f(x^+)$ y $f(x^-)$ existen y son distintos. Por la proposición 1.13., $\tilde{S}_n(f)(x)$ diverge en este punto. Por otro lado,

$$\int_{[0,\pi]} \frac{dt}{tan(t/2)} = +\infty,$$

y además $\lim_{t \to 0} \rho_x(t) = f(x^+) - f(x^-) \neq 0$, por lo que $\tilde{f}(x)$ no existe. Supondremos entonces que f es continua en x. La demostración se divide en las siguientes dos etapas:
(i) Probar que las sucesiones $(\tilde{S}_n(f)(x))$ y $(\tilde{f}(x, \frac{\pi}{n}))$ son equivalentes (es decir, su diferencia es $o(1)$). Esto probará que: $(\tilde{S}_n(f)$ $(x))$ converge si y sólo si $\lim_{n \to \infty} \tilde{f}(x, \frac{\pi}{n})$ existe, en cuyo caso ambos límites coinciden con $\tilde{S}(f)(x)$.
(ii) Probar que cuando f está acotada, la existencia del límite de la sucesión $(\tilde{f}(x, \frac{\pi}{n}))$ equivale a la existencia del límite de $\tilde{f}(x,h)$ cuando $h \to 0$. Así, la convergencia de $(\tilde{S}_n(f)(x))$ equivale a la convergencia de $(\tilde{f}(x,h))$ y a la existencia de $\tilde{f}(x)$, que desde luego coincide con $\tilde{S}(f)(x)$.

(i) Por demostrar que $\tilde{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x, \frac{\pi}{n}) = o(1)$. Tenemos por la fórmula aproximativa para las sumas conjugadas parciales 1.10. (iii) y por 1.14. que:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x, \frac{\pi}{n}) &= -\frac{1}{\pi} \int\limits_{[0,\pi]} \rho_x(t)[\frac{1}{2tan(t/2)} - \frac{cos(nt)}{2tan(t/2)}]dt \\
&\quad + o(1) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \rho_x(t) \frac{cos(nt)}{2tan(t/2)} dt \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int\limits_{[0,\frac{\pi}{n}]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)} [1 - cos(nt)]dt + o(1) \\
&= I_1(x,n) + I_2(x,n) + o(1).
\end{aligned}$$

Demostraremos que $I_1(x,n) = o(1)$, $I_2(x,n) = o(1)$. Como f es de variación acotada y continua en x, entonces las funciones $f(x+t)$, $f(x-t)$ son de variación acotada y continuas en $t = 0$, así como la función $\rho_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$. Por tanto, $\rho_x(t)$ se puede escribir como $\rho_x(t) = P(t) - N(t)$, donde P, N son monótonas crecientes, continuas en $t = 0$ y además $P(0) = 0 = N(0)$. De esta manera, hemos pasado de funciones de variación acotada a funciones monótonas, y de continuidad en x a continuidad en 0. Tenemos que la integral:

$$\begin{aligned}
I_1(x,n) &= \int\limits_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)} cos(nt)dt \\
&= \int\limits_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \frac{P(t)}{2tan(t/2)} cos(nt)dt - \int\limits_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \frac{N(t)}{2tan(t/2)} cos(nt)dt.
\end{aligned}$$

Por el lema 1.15.(ii), las últimas integrales tienden a cero cuando n tiende a infinito, es decir, $I_1(x,n) = o(1)$.

Para $I_2(x,n)$ tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
|I_2(x,n)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{n}]} \rho_x(t)\frac{1-cos(nt)}{2tan(t/2)}dt\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{n}]} |\rho_x(t)|\frac{2sen^2(nt/2)}{2sen(t/2)}dt \\
&\leq \frac{\|\rho_x\|_{[0,\frac{\pi}{n}]}}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{n}]} \frac{\pi(\frac{n^2t^2}{4})}{t}dt \\
&= \|\rho_x\|_{[0,\frac{\pi}{n}]}\frac{n^2}{4}\int_{[0,\frac{\pi}{n}]} tdt \\
&= \frac{\pi^2}{8}\|\rho_x\|_{[0,\frac{\pi}{n}]} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty),
\end{aligned}$$

pues $\rho_x(0) = 0$ y ρ_x es continua en 0.(También se usó la desigualdad $sen(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ para $t \in [0,\pi/2]$.) Así, hemos probado que $\tilde{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x,\frac{\pi}{n}) = o(1)$.

(ii) Supongamos que $(\tilde{f}(x,\frac{\pi}{n}))$ converge, y demostremos que existe $\tilde{f}(x) = \lim_{h\to 0}\tilde{f}(x,h)$. Sea $h>0$ y sea $n\in\mathbf{N}$ tal que $\frac{\pi}{n+1}\leq h < \frac{\pi}{n}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
|\tilde{f}(x,h)-\tilde{f}(x,\frac{\pi}{n})| &= \left|\int_{[h,\frac{\pi}{n}]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt\right| \\
&\leq \|\rho_x\|_{[0,\frac{\pi}{n}]}(\frac{\pi}{n}-h)\|\frac{1}{2tan(t/2)}\|_{[h,\frac{\pi}{n}]} \\
&\leq \|\rho_x\|_{[0,\frac{\pi}{n}]}(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n+1})\frac{1}{2tan(\pi/2(n+1))}. \\
&\leq \|\rho_x\|_{[0,\frac{\pi}{n}]}\frac{\pi}{n(n+1)}\frac{1}{2sen(\pi/2(n+1))} \\
&\leq \|\rho_x\|_{[0,\frac{\pi}{n}]}\frac{\pi}{n(n+1)}\frac{1}{2}\frac{\pi 2(n+1)}{2\pi} \\
&= \|\rho_x\|_{[0,\frac{\pi}{n}]}\frac{\pi}{2n} = o(1)
\end{aligned}
$$

Así, la convergencia de $\tilde{f}(x,\frac{\pi}{n})$ a $\tilde{S}(f)(x)$ equivale a la existencia de $\tilde{f}(x)$ y además $\tilde{S}(f)(x)=\tilde{f}(x)$. ∎

1.17. **COROLARIO.** (Versión local del teorema de Young)
Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]), x \in [-\pi,\pi], \varepsilon > 0$ tales que f restringida a $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ es de variación acotada. Entonces $\tilde{S}_(f)(x)$ existe si y sólo si existe $\tilde{f}(x)$, en cuyo caso son iguales.

Demostración.
Sea $g:[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$
g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } |t-x| < \varepsilon(mod 2\pi) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

Tenemos que g es de variación acotada en todo $[-\pi,\pi]$, y por el teorema de Young $\tilde{S}(g)(x)$ existe si y sólo si existe $\tilde{g}(x)$, en cuyo caso son iguales. Por el principio de localización de Riemann para series de Fourier conjugadas 1.12.(iii), $\tilde{S}(g)(x)$ existe si y sólo si existe $\tilde{S}(f)(x)$, en cuyo caso $\tilde{S}(f)(x) = \tilde{S}(g)(x) - \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \frac{(f-g)(x+t)-(f-g)(x-t)}{2\tan(t/2)}dt$, donde esta última integral es igual a $\widetilde{(f-g)}(x)$ y siempre existe; además, si $\tilde{f}(x)$ o $\tilde{g}(x)$ existe, entonces existe la otra y $\widetilde{(f-g)}(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)$. Así, $\tilde{S}(f)(x)$ existe si y sólo si existe $\tilde{f}(x)$, en cuyo caso $\tilde{S}(f)(x) = \tilde{S}(g)(x) + (\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)) = \tilde{f}(x)$. ∎

1.18. DEFINICION.

Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $x \in [-\pi,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\tilde{\sigma}_n(f)(x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \tilde{S}_k(f)(x).$$

Algunos autores definen $\tilde{\sigma}_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{S}_k(f)(x)$.

Así como el núcleo de Fejér es una herramienta poderosa en el estudio de la convergencia en promedios para las series de Fourier clásicas, su contraparte conjugada es útil en el estudio de la $(C,1)$-sumabilidad para series conjugadas. Esto nos lleva naturalmente a la siguiente

1.19. DEFINICION.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el **n-ésimo núcleo conjugado de Fejér** como la función:

$$\tilde{K}_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\tilde{D}_k(t).$$

Los autores que definen $\tilde{\sigma}_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{S}_k(f)(x)$, definen

$\tilde{K}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{D}_k(t)$.

1.20. **PROPOSICION.**

Para toda $n \in \mathbb{N}$, $t \not\equiv 0(mod\ 2\pi)$, se tiene:

$$\tilde{K}_n(t) = \frac{1}{4sen^2(t/2)}\left(sen(t) - \frac{sen(n+1)t}{n+1}\right)$$
$$\frac{1}{2tan(t/2)} - \frac{sen(n+1)t}{(n+1)4sen^2(t/2)}.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}_n(t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\tilde{D}_k(t)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{cos(t/2)-cos(k+\frac{1}{2})t}{2sen(t/2)}\\
&= \frac{1}{2tan(t/2)}-\frac{1}{(n+1)2sen(t/2)}\sum_{k=0}^{n}cos(k+\frac{1}{2})t\\
&= \frac{1}{2tan(t/2)}-\frac{1}{(n+1)2sen(t/2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{2sen(t/2)cos(k+\frac{1}{2})t}{2sen(t/2)}\\
&= \frac{1}{2tan(t/2)}\\
&\quad -\frac{1}{(n+1)4sen^2(t/2)}\sum_{k=0}^{n}(sen(k+1)t-sen(kt))\\
&= \frac{1}{2tan(t/2)}-\frac{sen(n+1)t}{(n+1)4sen^2(t/2)}\\
&= \frac{1}{4sen^2(t/2)}[2sen(t/2)cos(t/2)-\frac{sen(n+1)t}{n+1}]\\
&= \frac{1}{4sen^2(t/2)}[sen(t)-\frac{sen(n+1)t}{n+1}].
\end{aligned}
$$

∎

1.21. PROPOSICION.

Los núcleos conjugados de Fejér tienen las siguientes propiedades:
(i) $\tilde{K}_n$ *es impar, diferenciable y periódica (de periodo* 2π*).*
(ii) $\tilde{K}_n(0)=0, \quad (\tilde{K}_n)'(0)=\frac{n^2+2n}{6}$ *y* $|(\tilde{K}_n)'(t)|\leq(\tilde{K}_n)'(0)$
$\forall t\in\mathbb{R}$.

(iii) $\tilde{K}_n(t)>0$ *si* $0<t<\pi,\ n>0$.

(iv) $|\tilde{K}_n(t)| \leq \frac{n}{2}$, $\quad |\frac{\tilde{K}_n(t)}{t}| \leq (\tilde{K}_n)'(0) = \frac{n^2+2n}{6}$ $\forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(v) $\int_{[-\pi,\pi]} \tilde{K}_n(t)dt = 0.$

(vi) $sup\{|\frac{\tilde{K}_n(t)}{n^2 t}| : n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2}$.

Demostración.

(i) Se sigue del hecho de que $\tilde{K}_n$ es el promedio de los (n+1) primeros núcleos conjugados de Dirichlet, que son funciones impares, diferenciables y periódicas (de periodo 2π).

(ii) $\tilde{K}_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \tilde{D}_k(0) = 0$.

Para $t \in \mathbb{R}$ arbitraria,

$$\begin{aligned}(\tilde{K}_n)'(t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{D}_k)'(t)\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(\sum_{l=1}^{k}(sen(lt))'\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} lcos(lt).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}|(\tilde{K}_n)'(t)| \leq (\tilde{K}_n)'(0) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} l\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2(n+1)}(\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k)\\ &= \frac{1}{2(n+1)}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n^2+2n}{6}.\end{aligned}$$

(iii) Se sigue de la fórmula:

$$\tilde{K}_n(t) = \frac{1}{4sen^2(t/2)}[sen(t) - \frac{sen(n+1)t}{n+1}]$$

y que para $0 < t < \pi$ se tiene que $|sen(n+1)t| < (n+1)sen(t)$.

(iv) $|\tilde{K}_n(t)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} |sen(lt)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}$.

Para $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ arbitrario, por el teorema del valor medio, existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\tilde{K}_n(t)}{t} = \tilde{K}_n'(\xi)$, y por (ii), $|\frac{\tilde{K}_n(t)}{t}| \leq (\tilde{K}_n)'(0) = \frac{n^2+2n}{6}$.

(v)

$$\begin{aligned}\int_{[-\pi,\pi]} \tilde{K}_n(t)dt &= \int_{[-\pi,\pi]} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \tilde{D}_k(t)dt \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \int_{[-\pi,\pi]} \tilde{D}_k(t)dt = 0.\end{aligned}$$

(vi) $sup\{|\frac{\tilde{K}_n(t)}{n^2 t}| : n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}\} = sup\{\frac{sup\{|\frac{\tilde{K}_n(t)}{t}| : t \in \mathbb{R}\}}{n^2} : n \in \mathbb{N}\} = sup\{\frac{(\tilde{K}_n)'(0)}{n^2} : n \in \mathbb{N}\} = sup\{\frac{n^2+2n}{6n^2} : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}$. ∎

1.22. **PROPOSICION.** (Fórmulas integrales para $\tilde{\sigma}_n(f)$)
Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $x \in [-\pi,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$. *Entonces:*

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_n(f)(x) &= \mp\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x \pm t)\tilde{K}_n(t)dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \rho_x(t)\tilde{K}_n(t)dt.\end{aligned}$$

Demostración.

Por la primera fórmula integral para las sumas parciales conjugadas 1.10.(i):

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_n(f)(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\tilde{S}_k(f)(x) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\mp\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x\pm t)\tilde{D}_k(t)dt \\
&= \mp\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x\pm t)\Big(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\tilde{D}_k(t)\Big)dt \\
&= \mp\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x\pm t)\tilde{K}_n(t)dt.
\end{aligned}$$

Análogamente, se sigue de la segunda fórmula integral para $\tilde{S}_k(f)(x)$ que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_n(f)(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}-\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]}\rho_x(t)\tilde{D}_k(t)dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]}\rho_x(t)\tilde{K}_n(t)dt.
\end{aligned}$$

∎

1.23. **PROPOSICION.** *Sean* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $x \in [-\pi,\pi]$ *tales que*

$$\int_{[0,h]}|f(x+t)-f(x-t)|dt = o(h),$$

entonces las sucesiones $(\tilde{\sigma}_n(f)(x))$ *y* $(\tilde{f}(x,\frac{\pi}{n}))$ *son equivalentes.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_n(f)(x) - \tilde{f}_n(x, \frac{\pi}{n}) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \rho_x(t)\tilde{K}_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{n}]} \rho_x(t)\tilde{K}_n(t)dt \\
&- \frac{1}{\pi}\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \rho_x(t)(\frac{1}{2tan(t/2)} - \frac{sen(n+1)t}{(n+1)4sen^2(t/2)}) \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{n}]} \rho_x(t)\tilde{K}_n(t)dt \\
&+ \frac{1}{4(n+1)\pi}\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]} \rho_x(t)\frac{sen(n+1)t}{sen^2(t/2)}dt \\
&= I_1(x,n) + I_2(x,n).
\end{aligned}
$$

Sea $\Psi^*(h) = \int_{[0,h]} |\rho_x(t)|dt$. Por hipótesis $\Psi^*(t) = o(t)$. Tenemos entonces:

$$
\begin{aligned}
|I_1(x,n)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{n}]} \rho_x(t)\tilde{K}_n(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{n}]} |\rho_x(t)|\tilde{K}_n(t)dt \\
&\leq \frac{1}{\pi}\frac{n}{2}\Psi^*(\frac{\pi}{n}) = O(n)o(\frac{\pi}{n}) = o(1).
\end{aligned}
$$

Procedamos a acotar a $I_2(x,n)$.

$$
\begin{aligned}
|I_2(x,n)| &= \frac{1}{4(n+1)\pi}\left|\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]}\rho_x(t)\frac{sen(n+1)t}{sen^2(t/2)}dt\right| \\
&\leq \frac{\pi}{4(n+1)}\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]}\frac{|\rho_x(t)|}{t^2}dt.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
|I_2(x,n)| \leq \frac{\pi}{4(n+1)}\{[&\frac{\Psi^*(\pi)}{\pi^2} - \frac{\Psi^*(\frac{\pi}{n})n^2}{\pi^2}] \\
&+ 2\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]}\frac{\Psi^*(t)}{t^3}dt\} \\
&= o(1) + o(1) + O(\frac{1}{n})\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]}\frac{\Psi^*(t)}{t^3}dt.
\end{aligned}
$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\Psi^*(t) = o(t)$, existe $\delta > 0$ tal que $\Psi^*(t) < \varepsilon t$ para $0 \leq t \leq \delta$, por lo que para n suficientemente grande $\frac{\pi}{n} < \delta$ y:

$$
\begin{aligned}
O(\frac{1}{n})\int_{[\frac{\pi}{n},\delta]}\frac{\Psi^*(t)}{t^3}dt &\leq O(\frac{1}{n})\varepsilon\int_{[\frac{\pi}{n},\delta]}\frac{dt}{t^2} \\
&= \varepsilon O(\frac{1}{n})[-\frac{1}{\delta} + \frac{n}{\pi}] = \varepsilon O(1),
\end{aligned}
$$

y por otro lado

$$
\int_{[\delta,\pi]}\frac{\Psi^*(t)}{t^3}dt = O(1).
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
O(\frac{1}{n})\int_{[\frac{\pi}{n},\pi]}\frac{\Psi^*(t)}{t^3}dt &= \varepsilon O(1) + O(\frac{1}{n})O(1) \\
&= \varepsilon O(1) + o(1).
\end{aligned}
$$

Como ε es arbitraria, entonces $I_2(x,n) = o(1)$. ∎

CAPITULO DOS.
ABEL-POISSON SUMABILIDAD DE SERIES DE FOURIER CONJUGADAS.

En este capítulo estudiamos la contraparte conjugada de la Abel-Poisson sumabilidad de las series de Fourier, en la cual juega un papel central el núcleo de Poisson conjugado. Definimos las sumas conjugadas de Poisson de una serie trigonométrica, y en el caso de series de Fourier, la fórmula integral correspondiente a la Abel-Poisson sumabilidad conjugada.

Dada una serie trigonométrica

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sen(nx)$$

podemos obtener su serie conjugada

$$\sum_{n=1}^{\infty} -b_n cos(nx) + a_n sen(nx)$$

y la r-ésima suma de Poisson de esta última,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n(-b_n cos(nx) + a_n sen(nx)). \tag{1}$$

Por otra parte, si primero obtenemos la r-ésima suma de Poisson de la serie

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n cos(nx)+b_n sen(nx))$$

y luego la serie conjugada, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} -(r^n b_n)cos(nx)+(r^n a_n)sen(nx)$$

que es la serie (1). Estas series nos serán de utilidad para demostrar en el capítulo tres la existencia de la función conjugada $\tilde{f}$ casi dondequiera para el caso particular $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Procedamos a definirlas.

2.1. **DEFINICION.**
Sean $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n cos(nx)+b_n sen(nx)$ una serie trigonométrica, $r \in [0,1)$. Definimos la **r-ésima suma conjugada de Poisson de S** como la serie

$$v(S,r,x):=\sum_{n=1}^{\infty} r^n(-b_n cos(nx)+a_n sen(nx)).$$

Si la serie S es la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, denotaremos su r-ésima suma conjugada de Poisson por

$$v(f,r,x):=v(S(f),r,x)$$

y la llamaremos la **r-ésima suma conjugada de Poisson de la función f**. Lo que se observó en el párrafo anterior a la definición puede abreviarse como sigue:

$$\tilde{u}(S,r,x)=u(\tilde{S},r,x) \quad \forall\, r \in [0,1),$$

donde $u(S,r,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$ es la **r-ésima suma de Poisson** de la serie S.

Al igual que en el análisis clásico de Fourier, existe una forma integral para la r-ésima suma conjugada de Poisson de una función, en la que interviene el "dual" del núcleo clásico de Poisson. A continuación lo definiremos y anotaremos algunas de sus propiedades más destacadas.

2.2. DEFINICION.

A la función

$$Q : [0,1) \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por:

$$Q(r,\theta) := \frac{rsen(\theta)}{1 + r^2 - 2rcos(\theta)}$$

se le llama **núcleo conjugado de Poisson.**

2.3. PROPOSICION. *Para toda $r \in [0,1)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, se tiene:*

$$\begin{aligned}
Q(r,\theta) &= \frac{rsen(\theta)}{1+r^2-2rcos(\theta)}\\
&= \frac{rsen(\theta)}{(1-r)^2+4rsen^2(\theta/2)}\\
&= \frac{rsen(\theta)}{|1-re^{i\theta}|^2}\\
&= Im\left(\frac{1+re^{i\theta}}{2(1-re^{i\theta})}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^n sen(n\theta).
\end{aligned}$$

Demostración.

Para establecer la primera igualdad usamos que

$$2sen^2(\theta/2) = 1 - cos(\theta),$$

por lo que

$$\begin{aligned}
1+r^2-2rcos(\theta) &= 1+r^2+2r(2sen^2(\theta/2)-1)\\
&= 1-2r+r^2+4rsen^2(\theta/2).
\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad calculamos:

$$\begin{aligned}
|1-re^{i\theta}|^2 &= |1-r(cos(\theta)+isen(\theta)|^2\\
&= (1-rcos(\theta))^2+r^2sen^2(\theta)\\
&= 1+r^2cos^2(\theta)-2rcos(\theta)+r^2sen^2(\theta)\\
&= 1+r^2-2rcos(\theta).
\end{aligned}$$

Para las restantes calculamos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n cos(n\theta)+ir^n sen(n\theta) &= -\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} \\
&= -\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(re^{i\theta})^n \\
&= \frac{1}{1-re^{i\theta}}-\frac{1}{2} \\
&= \frac{1+re^{i\theta}}{2(1-re^{i\theta})} \\
&= \frac{1-r^2+i2rsen(\theta)}{2|1-re^{i\theta}|^2}.
\end{aligned}
$$

Tomando partes imaginarias obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} r^n sen(n\theta) &= \frac{rsen(\theta)}{|1-re^{i\theta}|^2} \\
&= Im\left(\frac{1+re^{i\theta}}{2(1-re^{i\theta})}\right).
\end{aligned}
$$

∎

Observemos que tomando partes reales en las igualdades anteriores se obtienen varias expresiones para el núcleo usual de Poisson.

2.4. TEOREMA.

El núcleo conjugado de Poisson tiene las siguientes propiedades:

(i) $Q(r,\theta) > 0 \ \forall \ r \in (0,1), \ \theta \in (0,\pi)$.

(ii) $Q(r,-\theta) = -Q(r,\theta) \ \forall \ r \in [0,1), \ \theta \in [-\pi,\pi]$.

(iii) $\int_{[-\pi,\pi]} Q(r,\theta)d\theta = 0 \ \forall \ r \in [0,1)$ *fija.*

(iv) Q es armónica considerada como función $: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Demostración.

(i) Se sigue de que

$$Q(r,\theta) = \frac{r sen(\theta)}{|1 - re^{i\theta}|^2}$$

y que el seno es positivo en $(0,\pi)$.

(ii) Evidente.

(iii) Sea $r \in [0,1)$ fija. Entonces

$$Q(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n sen(n\theta)$$

y la convergencia es uniforme en θ. Tenemos entonces convergencia de las integrales, por lo que:

$$\int_{[-\pi,\pi]} Q(r,\theta)d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{[-\pi,\pi]} sen(n\theta)d\theta = 0.$$

(iv) Es consecuencia de que $Q(r,\theta) = Im\left(\frac{1+re^{i\theta}}{2(1-re^{i\theta})}\right)$. ∎

2.5. **TEOREMA.** (Fórmula integral para la r-ésima suma conjugada de Poisson de una función)

Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $r \in [0,1)$, $\theta \in [-\pi,\pi]$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
v(f,r,\theta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(\theta+t)Q(r,t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(\theta-t)Q(r,t)dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \rho_\theta(t)Q(r,t)dt.
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
v(f,r,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n(-b_n(f)cos(n\theta)+a_n(f)sen(n\theta)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(-\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)sen(nt)dt\right)cos(n\theta) \\
&+ r^n\left(\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)cos(nt)dt\right)sen(n\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^n\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)(cos(nt)sen(n\theta) \\
&- cos(n\theta)sen(nt))dt \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n\int_{[-\pi,\pi]} f(t)sen(n(\theta-t))dt.
\end{aligned}
$$

Para (r,θ) fijas, la serie

$$
\sum_{n=1}^{\infty} r^n f(t)sen(n(\theta-t))
$$

converge en todo $t\in[-\pi,\pi]$, y para toda $m\in\mathbb{N}$ se tiene:

$$\left|\sum_{n=1}^{m} r^n f(t) sen(n(\theta - t))\right| \le \sum_{n=1}^{m} r^n |f(t)|$$
$$\le \frac{1}{1-r}|f(t)|,$$

por lo que es posible aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
v(f,r,\theta) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[-\pi,\pi]} r^n f(t) sen(n(\theta-t))dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n f(t) sen(n(\theta-t))\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n sen(n(\theta-t))\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)Q(r,\theta-t)dt.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \theta - t$, tenemos:

$$\begin{aligned}
v(f,r,\theta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi} f(\theta-u)Q(r,u)du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(\theta-t)Q(r,t)dt.
\end{aligned}$$

Y haciendo ahora el cambio de variable $u = -t$,

$$\begin{aligned}
v(f,r,\theta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(\theta+u)Q(r,-u)du \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(\theta+t)Q(r,t)dt,
\end{aligned}$$

pues $Q(r,t)$ es impar en t para r fija. Sumando las integrales obtenidas y usando que $\rho_\theta(t) = f(\theta+t) - f(\theta-t)$ es impar en t, obtenemos:

$$\begin{aligned} v(f,r,\theta) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}(f(\theta+t)-f(\theta-t))Q(r,t)dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]}\rho_\theta(t)Q(r,t)dt. \end{aligned}$$

∎

Las siguientes estimaciones del núcleo conjugado de Poisson y funciones relacionadas con él serán indispensables para demostrar la existencia de la función conjugada para funciones en $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$.

2.6. **LEMA.**
Sea $r \in [0,1)$ *y sea* $\eta = arc\ sen(1-r)$. *Sean*

$$\begin{aligned} \Delta(r,t) &:= 1 + r^2 - 2r cos(t) = (1-r)^2 + 4r sen^2(t/2) \\ q(r,t) &:= \frac{1}{2tan(t/2)} - Q(r,t). \end{aligned}$$

Entonces:
(a) $Q(r,\eta) = O(1/\eta)$.
(b) $q(r,\eta) = O(1/\eta)$.
(c) $\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t} = O(1/\eta^2)$ para $0 \leq t \leq \eta$.
(d) $\frac{\partial q(r,t)}{\partial t} = O(\eta^2/t^4)$ *para toda* $t \in [-\pi,\pi]$

Demostración.
(a)

$$\eta Q(r,\eta) = \frac{\eta r sen(\eta)}{(1-r)^2 + 4r sen^2(\eta/2)}$$
$$= \frac{\eta r sen(\eta)}{sen^2(\eta) + 4r sen^2(\eta/2)}.$$

Dividiendo numerador y denominador por η^2, vemos que cuando $\eta \to 0$, el denominador tiende a $1 + 16r$ y el numerador a r, por lo que $Q(r,\eta) = O(1/\eta)$.

(b)

$$q(r,\eta) = \frac{cos(\eta/2)}{2sen(\eta/2)} - Q(r,\eta)$$
$$= O(1/\eta) + O(1/\eta) = O(1/\eta),$$

la última igualdad obtenida usando (a).

(c)

$$\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r sen(t)}{\Delta(r,t)}\right)$$
$$= \frac{r cos(t)\Delta(r,t) - r sen(t)\frac{\partial}{\partial t}\Delta(r,t)}{\Delta^2(r,t)}$$
$$= \frac{r cos(t)(1 + r^2 - 2r cos(t)) - 2r^2 sen^2(t)}{\Delta^2(r,t)}$$
$$= \frac{r cos(t) + r^3 cos(t) - 2r^2 cos^2(t) - 2r^2 sen^2(t)}{\Delta^2(r,t)}$$
$$= \frac{r\{(1+r^2)cos(t) - 2r\}}{\delta^2(r,t)}$$
$$= \frac{r\{(1+r^2)cos(t) - 2r(cos(t) + 2sen^2(t/2))\}}{\Delta^2(r,t)}$$
$$= \frac{r\{(1-r^2)cos(t) - 4r sen^2(t/2)\}}{\Delta^2(r,t)}.$$

Tenemos que para $0 \leq t \leq \eta \leq \pi/2$, $r \in [0,1)$, se cumplen las desigualdades:

$$\Delta(r,t) = (1-r)^2 + 4rsen^2(t/2) \geq (1-r)^2 = sen^2(\eta) \geq sen^2(t/2).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t}\right| &\leq \frac{(1-r)^2 + 4(1-r)^2}{(1-r)^4} \\ &= \frac{5}{(1-r)^2} = \frac{5}{sen^2(\eta)} \\ &\approx \frac{5}{\eta^2} = O(1/\eta^2)\end{aligned}$$

(recuerde que $\eta = arc\ sen(1-r)$).

(d) Tenemos que:

$$\begin{aligned} q(r,t) &= \frac{1}{2}cot(t/2) - \frac{rsen(t)}{1+r^2-2rcos(t)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}cot(t/2)(1+r^2-2rcos(t)) - rsen(t)}{1+r^2-2rcos(t)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}cot(t/2)\{1+r^2-2rcos(t) - \frac{2rsen(t)sen(t/2)}{cos(t/2)}\}}{\Delta(r,t)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}cot(t/2)\{1+r^2-2r\left(\frac{cos(t)cos(t/2)+sen(t)sen(t/2)}{cos(t-\frac{1}{2})}\right)\}}{\Delta(r,t)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}cot(t/2)(1-r)^2}{\Delta(r,t)}, \end{aligned}$$

de donde:

$$\frac{\partial q(r,t)}{\partial t} = (1-r)^2\left(\frac{\frac{-1}{4}csc^2(t/2)\Delta(r,t) - \frac{1}{2}cot(t/2)2rsen(t)}{\Delta^2(r,t)}\right)$$
$$= sen^2(\eta)\left(\frac{-1}{4sen^2(t/2)\Delta(r,t)} - \frac{rcos(t/2)sen(t)}{\Delta^2(r,t)sen(t/2)}\right).$$

Y como $sen(t) = 2cos(t/2)sen(t/2)$, $cos(t/2) \geq 0$ en $[-\pi,\pi]$ y $\Delta(r,t) \geq 4rsen^2(t/2)$, tenemos que:

$$\left|\frac{\partial q(r,t)}{\partial t}\right| \leq sen^2(\eta)\left(\frac{1}{4sen^2(t/2)\Delta(r,t)} + \frac{2rcos^2(t/2)}{\Delta^2(r,t)}\right)$$
$$\leq sen^2(\eta)\left(\frac{1}{16rsen^4(t/2)} + \frac{2}{16rsen^4(t/2)}\right)$$
$$= O\left(\frac{\eta^2}{t^4}\right).$$

∎

2.7. TEOREMA.

Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $x \in [-\pi,\pi]$ tales que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{[0,h]}(f(x+t) - f(x-t))dt = 0,$$

(es decir, casi dondequiera). Entonces para $\eta = arc\ sen(1-r)$, se tiene

$$\lim_{r\to 1^-}(v(f,r,x) - \tilde{f}(x,\eta)) = 0.$$

Demostración.

Por la fórmula integral para la r-ésima suma conjugada de Poisson 2.5. tenemos que:

$$\begin{aligned}
v(f,r,x)-\tilde{f}(x,\eta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]}\rho_x(t)Q(r,t)dt+\\
&+\frac{1}{\pi}\int_{[\eta,\pi]}\frac{\rho_x(t)}{2tan(t/2)}dt\\
&=-\frac{1}{\pi}\int_{[0,\eta]}\rho_x(t)Q(r,t)dt+\\
&+\frac{1}{\pi}\int_{[\eta,\pi]}\rho_x(t)\left(\frac{1}{2tan(t/2)}-Q(r,t)\right)dt\\
&=J_1(x,r)+J_2(x,r).
\end{aligned}$$

Sea

$$q(r,t)=\frac{1}{2tan(t/2)}-Q(r,t)$$

como en el lema anterior, y sea

$$\Psi_x(t)=\int_{[0,t]}\rho_x(u)du.$$

Por hipótesis, $\Psi_x(t)=o(t)$, lo que será usado al integrar por partes expresiones que involucren a $\rho_x(t)$.
Integrando por partes (con respecto a t) a $J_1(x,r)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
J_1(r,x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{[0,\eta]}\rho_x(t)Q(r,t)dt\\
&=-\frac{1}{\pi}\left(\Psi_x(\eta)Q(r,\eta)-\Psi_x(0)Q(r,0)\right)+\\
&+\frac{1}{\pi}\int_{[0,\eta]}\Psi_x(t)\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t}dt.
\end{aligned}$$

Pero $\Psi_x(0) = 0 = Q(r,0)$. Además, por el inciso (a) del lema 2.6., $Q(r,\eta) = O(1/\eta)$, y por el inciso (c), $\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t} = O(1/\eta^2)$ para $0 \leq t \leq \eta$ (recordemos que $\eta = arc\ sen(1-r)$), por lo que:

$$\begin{aligned}
J_1(r,x) &= -\frac{1}{\pi} o(\eta) O(1/\eta) \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{[0,\eta]} \Psi_x(t) O(1/\eta^2) dt \\
&= o(1) + O(1/\eta^2)\int_{[0,\eta]} o(t)dt \\
&= o(1) + O(1/\eta^2) o\left(\int_{[0,\eta]} t dt\right) \\
&= o(1) + O(1/\eta^2) o(\eta^2/2) \\
&= o(1) + o(1) = o(1).
\end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos para $J_2(x,r)$:

$$\begin{aligned}
J_2(x,r) &= \frac{1}{\pi}\int_{[\eta,\pi]} \rho_x(t) q(r,t) dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\Psi_x(\pi) q(r,\pi) - \Psi_x(\eta) q(r,\eta)\right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_{[\eta,\pi]} \Psi_x(t) \frac{\partial q(r,t)}{\partial t} dt.
\end{aligned}$$

Tenemos que $q(r,\pi) = 0$, y por los incisos (b) y (d) del lema 2.6.,

$$q(r,\eta) = O(1/\eta)$$

y

$$\frac{\partial q(r,t)}{\partial t} = O(\eta^2/t^4),$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
J_2(x,r) &= \frac{1}{\pi}o(\eta)O(1/\eta) - \frac{1}{\pi}\int_{[\eta,\pi]} o(t)O(\eta^2/t^4)dt \\
&= o(1) + O(1)\int_{[\eta,\pi]} o(t)\frac{\eta^2}{t^4}dt \\
&= o(1) + O(1)o(1)\left(\eta^2 \int_{[\eta,\pi]} \frac{1}{t^3}dt\right) \\
&= o(1) + o(1)O(1) = o(1).
\end{aligned}
$$

∎

CAPITULO TRES.
FUNCION CONJUGADA.

En este capítulo definimos la función conjugada de una función integrable. Calculamos las funciones conjugadas de funciones sencillas, como polinomios trigonométricos, y demostramos la existencia y propiedades de conjugadas de funciones que satisfacen una condición de Lipschitz de orden estrictamente entre 0 y 1. Demostramos la existencia c.d. de la función conjugada de cualquier función integrable, y damos el criterio de Lusin para la convergencia de la serie de Fourier usual de una función de cuadrado integrable en términos de un cierto límite que involucra a la función conjugada, y que constituyó la motivación de su célebre conjetura. Terminamos el capítulo con el ejemplo de una función continua f tal que $\int_{[0,\pi]} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{tan(t/2)}dt = +\infty \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, lo que demuestra que la existencia de la función conjugada se debe a cancelaciones de "áreas positivas y negativas", y no a la pequeñez del argumento que se integra.

En los últimos resultados ha aparecido con frecuencia el límite

$$\tilde{f}(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\pi} \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2tan(t/2)}dt,$$

aunque la importancia que reviste éste y las propiedades de la función $\tilde{f}$ que define aún no se han hecho sentir en toda su fuerza, lo que haremos en éste y posteriores capítulos. Por lo pronto, procedemos a dar la siguiente

3.1. DEFINICION.

Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. La función $\tilde{f}$, llamada **conjugada** de la función f, está dada por

$$\tilde{f}(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2tan(t/2)}dt$$

para las $x \in \mathbb{R}$ en donde este límite exista.

3.2. *Observación.*

Es posible que $\tilde{f}(x)$ no esté definida para algunas $x \in \mathbb{R}$; por ejemplo, $\tilde{f}(x) = -\infty$ si x es una discontinuidad del primer tipo de f. Sin embargo, cuando existe satisface varias propiedades fácilmente verificables:

(i) Si $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ y $x \in \mathbb{R}$ son tales que $\tilde{f}(x)$ y $\tilde{g}(x)$ existen, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $(\widetilde{f+\alpha g})(x)$ y se tiene que $(\widetilde{f+\alpha g})(x) = \tilde{f}(x) + \alpha\tilde{g}(x)$. (Linealidad de la conjugación)

(ii) Si $\tilde{f}(x)$ existe, entonces para toda $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\tilde{f}(x+2\pi k)$ existe y es igual a $\tilde{f}(x)$. (Periodicidad de $\tilde{f}$)

(iii) Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$, $\theta \in \mathbb{R}$ y h_θ la función en $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ dada por $h_\theta(t) = f(\theta+t)$. Si $\tilde{f}(\theta+x)$ existe, entonces existe $\tilde{h}_\theta(x)$ y $\tilde{h}_\theta(x) = \tilde{f}(\theta+x)$. (Estabilidad con respecto a traslaciones)

(iv) Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, y sea g la función en $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ dada por $g(t) = f(-t)$. Si $\tilde{f}(x)$ existe, entonces existe $\tilde{g}(-x)$ y $\tilde{g}(-x) = -\tilde{f}(x)$. (Comportamiento con respecto a simetrías)

(v) Si g_θ está dada por $g_\theta(t) = f(\theta - t)$ y si $\tilde{f}(\theta - x)$ existe, entonces existe $\tilde{g}_\theta(x)$ y $\tilde{g}_\theta(x) = -\tilde{f}(\theta - x)$. Esto nos servirá para analizar el comportamiento de la conjugación con respecto a la convolución de funciones.

Más adelante veremos que de hecho $\tilde{f}(x)$ existe c.d. $x \in [-\pi, \pi]$, sin importar cúal sea la función integrable f. Por el momento nos conformamos con calcular las conjugadas de algunas funciones sencillas.

3.3. PROPOSICION.

Sea $n \in \mathbb{N}$. La conjugada de la función $cos(nx)$ es $sen(nx)$, y la conjugada de $sen(nx)$ es $-cos(nx)$. La conjugada de cualquier función constante es la función constante cero. Todas las funciones conjugadas mencionadas anteriormente existen en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Examinemos primero el caso de $cos(nx)$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{cos(nx+nt) - cos(nx-nt)}{2tan(t/2)}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{-2sen(nx)sen(nt)}{2tan(t/2)}dt \\
&= sen(nx)\left(\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{sen(nt)}{tan(t/2)}dt\right).
\end{aligned}$$

Analicemos la expresión entre paréntesis. Como $sen(n+\frac{1}{2})t = sen(nt)cos(t/2) + cos(nt)sen(t/2)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{sen(nt)}{tan(t/2)}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{sen(t/2)}dt - \frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\left(\frac{sen(n\pi) - sen(n\varepsilon)}{n}\right),
\end{aligned}
$$

y tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$ (la n es fija) obtenemos el resultado.

Para la función $sen(nx)$ calculamos:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{sen(nx+nt) - sen(nx-nt)}{2tan(t/2)}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{2cos(nx)sen(nt)}{2tan(t/2)}dt \\
&= -cos(nx)\left(\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{sen(nt)}{tan(t/2)}dt\right),
\end{aligned}
$$

y por lo visto en la parte anterior, al tomar el límite cuando $\varepsilon \to 0$ obtenemos $-cos(nx)$. El hecho de que la conjugada de cualquier función constante es cero se sigue inmediatamente de la definición. ∎

3.4. *Observación.*

Una vez calculadas las funciones conjugadas de $cos(nx), sen(nx)$, es fácil calcular las funciones conjugadas de los polinomios trigonométricos. En efecto, si $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) +$

$b_n sen(nx)$, entonces $\tilde{f}(x)$ existe para toda $x \in \mathbb{R}$ y $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{N} -b_n cos(nx) + a_n sen(nx)$.(Nótese que la expresión anterior se interpreta como una función bien definida para todo número real x, y que no es más que un polinomio trigonométrico usual). En particular, notamos que los núcleos de sumabilidad tan útiles para el estudio de la convergencia de las series trigonométricas conjugadas son las funciones conjugadas de los núcleos usuales de Dirichlet y Fejér. En el caso del núcleo de Poisson $P(r,\theta)$ también se tiene que su función conjugada (vista como función de θ dejando fija la r) es el núcleo conjugado de Poisson, pero la demostración directa es más complicada que en los casos anteriores, donde se trataba de sencillas combinaciones lineales de $cos(nx)$ y $sen(nx)$.

El siguiente ejemplo de función conjugada $\tilde{f}$ que analizaremos es cuando f satisface una condición de Lipschitz "periódica" de orden $\alpha \in (0,1)$.

3.5. *Observación.*

Sea $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ y supongamos que f satisface una condición "periódica" de Lipschitz de orden α $(0 < \alpha < 1)$ con constante M (es decir, extendiendo periódicamente a f a todo $\mathbb{R}$, se tiene que $|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|^\alpha$ para todo $x, h \in \mathbb{R}$). Entonces para toda $x \in [-\pi,\pi]$, la función

$$\frac{|f(x \pm t) - f(x)|}{|tan(t/2)|} \leq \frac{M|t|^\alpha}{\frac{|t|}{\pi}} = \pi M|t|^{\alpha-1} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]),$$

y también tenemos que

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\pi} \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2tan(t/2)} dt$$

existe para toda $x \in [-\pi, \pi]$, y se puede ver como la integral en $[0, \pi]$ en el sentido de Lebesgue. Podemos además partir esta integral (sumando y restando $f(x)$) y aprovechar que la función $tan(t/2)$ es impar para obtener

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi]} \frac{f(x+t) - f(x)}{2tan(t/2)} dt - \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi]} \frac{f(x) - f(x-t)}{2tan(t/2)} dt \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{f(x+t) - f(x)}{2tan(t/2)} dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos para $\tilde{f}(x+h)$ que:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x+h) &= -\frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{f(x+h+t) - f(x+h)}{2tan(t/2)} dt \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{f(x+t) - f(x+h)}{2tan(\frac{t-h}{2})} dt.
\end{aligned}$$

Estamos preparados para demostrar que la propiedad de satisfacer una condición de Lipschitz se transmite a la función conjugada para todos los órdenes estrictamente entre 0 y 1.

3.6. **TEOREMA.** (Privalov, 1916)
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Supongamos que f satisface una condición de Lipschitz de orden α para $0 < \alpha < 1$. Entonces $\tilde{f}$ también satisface una condición de Lipschitz de orden α.

Demostración.
Sean $x, h \in \mathbb{R}$. Debemos demostrar que

$$\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) = \tilde{O}(|h|^\alpha),$$

donde $\tilde{O}$ denota uniformidad en x. Como no nos interesa dar una constante particular para la condición de Lipschitz, podemos tomar siempre $0 < h < \pi/2$.
Sea M una constante de la condición de Lipschitz para f. Entonces

$$\frac{|f(x+t) - f(x)|}{|tan(t/2)|} \leq \pi M |t|^{\alpha-1}$$

por lo que

$$\left| -\frac{1}{\pi} \int_{[-2h,2h]} \frac{f(x+t) - f(x)}{2tan(t/2)} dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{[-2h,2h]} \pi M \frac{|t|^{\alpha-1}}{2} = \frac{M 2^\alpha h^\alpha}{\alpha} = \tilde{O}(h^\alpha).$$

Análogamente tenemos para $\tilde{f}(x+h)$, tomando $u = t - h$:

$$\left| -\frac{1}{\pi} \int_{[-2h,2h]} \frac{f(x+t) - f(x+h)}{2tan(\frac{t-h}{2})} dt \right|$$
$$= \left| -\frac{1}{\pi} \int_{[-3h,h]} \frac{f(x+h+u) - f(x+h)}{2tan(u/2)} du \right|$$
$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{[-3h,h]} \frac{|f(x+h+u) - f(x+h)|}{|2tan(u/2)|} du$$
$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{[-3h,3h]} \frac{\pi M}{2} |u|^{\alpha-1} du$$
$$= \frac{M 3^\alpha h^\alpha}{\alpha} = \tilde{O}(h^\alpha).$$

Así, tenemos que

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{2h<|t|\leq\pi} \frac{f(x+t)-f(x)}{2tan(t/2)}dt + \tilde{O}(h^{\alpha})$$
$$\tilde{f}(x+h) = -\frac{1}{\pi}\int_{2h<|t|\leq\pi} \frac{f(x+t)-f(x+h)}{2tan(\frac{t-h}{2})}dt + \tilde{O}(h^{\alpha}).$$

Sumando y restando $\frac{f(x)}{2tan(\frac{t-h}{2})}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{2h<|t|}\left(\frac{f(x+t)-f(x+h)}{2tan(\frac{t-h}{2})} - \frac{f(x+t)-f(x)}{2tan(t/2)}\right)dt \\
&+ \tilde{O}(h^{\alpha}) + \tilde{O}(h^{\alpha}) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{2h<|t|}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{2tan(t/2)} - \frac{f(x+t)}{2tan(\frac{t-h}{2})} + \frac{f(x)}{2tan(\frac{t-h}{2})}\right) + \\
&+ \left(\frac{f(x+h)}{2tan(\frac{t-h}{2})} - \frac{f(x)}{2tan(\frac{t-h}{2})}\right)dt + \tilde{O}(h^{\alpha}) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{2h<|t|}(f(x+t)-f(x))\left(\frac{1}{2tan(t/2)} - \frac{1}{2tan(\frac{t-h}{2})}\right)dt \\
&+ \frac{1}{\pi}(f(x+h)-f(x))\int_{2h<|t|}\frac{1}{2tan(\frac{t-h}{2})}dt + \tilde{O}(h^{\alpha}) \\
&= I_1(x,h) + I_2(x,h) + \tilde{O}(h^{\alpha}).
\end{aligned}$$

Basta que demostremos que $I_1(x,h) = \tilde{O}(h^{\alpha})$, $I_2(x,h) = \tilde{O}(h^{\alpha})$. Empecemos analizando los componentes de I_1. De la condición de Lipschitz tenemos que

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^{\alpha},$$

y para el otro factor en I_1 vemos que

$$\frac{1}{2tan(t/2)} - \frac{1}{2tan(\frac{t-h}{2})} = \frac{cos(t/2)sen(\frac{t-h}{2}) - cos(\frac{t-h}{2})sen(t/2)}{2sen(t/2)sen(\frac{t-h}{2})}$$
$$= -\frac{sen(h/2)}{2sen(t/2)sen(\frac{t-h}{2})},$$

y para $|t| \geq 2h > 0$ se tiene $\frac{3\pi}{2} \geq |t-h| \geq |t| - h \geq \frac{|t|}{2}$, por lo que (véase después de (*) en la página siguiente para la justificación de esta estimación)

$$\frac{|sen(h/2)|}{|2sen(t/2)sen(\frac{t-h}{2})|} \leq \frac{h/2}{2\frac{|t|}{\pi}\frac{\sqrt{2}|t-h|}{3\pi}} \leq \frac{3\pi^2 h}{2\sqrt{2}t^2}.$$

Así, para $I_1(x,h)$ tenemos

$$|I_1(x,h)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{2h<|t|\leq\pi} M|t|^\alpha \frac{3\pi^2 h}{2\sqrt{2}t^2}dt$$
$$= \tilde{O}(1)h\left(\frac{\pi^{\alpha-1}}{\alpha-1} - \frac{2^{\alpha-1}h^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right)$$
$$= \tilde{O}(1)h^{1-\alpha}h^\alpha + \tilde{O}(h^\alpha) = \tilde{O}(h^\alpha).$$

(Esto último porque $0 \leq h \leq \pi/2$, $0 < 1-\alpha$.)

Para los factores de I_2 se tiene que

$$|f(x+h) - f(x)| = \tilde{O}(h^\alpha)$$

y también que

$$
\begin{aligned}
&\int_{2h<|t|} \frac{1}{tan(\frac{t-h}{2})} dt \\
&= \int_{[2h,\pi]} \frac{1}{tan(\frac{t-h}{2})} dt + \int_{[-\pi,-2h]} \frac{1}{tan(\frac{t-h}{2})} dt \\
&= 2log(sen(\frac{t-h}{2}))\Big|_{2h}^{\pi} + 2log(sen(\frac{h-t}{2}))\Big|_{-\pi}^{-2h} \\
&= 2log\left(\frac{sen(\frac{\pi-h}{2})sen(\frac{3h}{2})}{sen(\frac{h}{2})sen(\frac{\pi+h}{2})}\right) \\
&\leq 2log\left(\frac{\frac{\pi-h}{2}\frac{3h}{2}}{sen(\frac{h}{2})sen(\frac{\pi+h}{2})}\right). \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Para las estimaciones de $sen(h/2)$ y $sen(\frac{\pi+h}{2})$ usamos que

$$|sen(x)| \geq \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}x$$

para $|x| \leq \frac{3\pi}{4}$ (recuerde que $0 < h \leq \pi/2$). Tenemos entonces que $sen(h/2) \geq \frac{\sqrt{2}h}{3\pi}$ y $sen(\frac{\pi+h}{2}) \geq \frac{\sqrt{2}(\pi+h)}{3\pi}$, por lo que $\frac{1}{sen(h/2)sen(\frac{\pi+h}{2})} \leq \frac{9\pi^2}{2h(\pi+h)}$, y la expresión en (*) es menor o igual que

$$2log\left(\frac{27\pi^2(\pi-h)}{8(\pi+h)}\right) = \tilde{O}(1) + 2log\left(\frac{\pi-h}{\pi+h}\right) = \tilde{O}(1),$$

esto último porque $0 \leq h \leq \pi/2$. Así, $I_2(x,h) = \tilde{O}(h^\alpha)$, y por lo tanto

$$\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) = \tilde{O}(h^\alpha),$$

es decir,

$$\tilde{f} \in \Lambda_\alpha([-\pi, \pi]).$$

∎

Para $\alpha = 0$ el teorema es falso, como lo muestra el ejemplo de Lusin que damos en 5.13. Para $\alpha = 1$ el teorema también es falso, pero el contraejemplo es más difícil de dar.

3.7. **TEOREMA.** (Lusin-Privalov para $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$.)
Sea $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Entonces existe casi dondequiera

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[\varepsilon, \pi]} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2tan(t/2)} dt.$$

Más aún, $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ y $S(\tilde{f}) = \tilde{S}(f)$.

Demostración.
Hay que probar que c.d. $x \in [-\pi, \pi]$ la función $\tilde{f}(x, \eta) : (0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tiende a algún límite cuando η tiende a 0.
Como $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, se tiene que su serie de Fourier $S(f)$ es cuadrado integrable y, por lo tanto, la serie conjugada también. Por el teorema de Riesz- Fischer, existe una función $g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}$ tal que

$$S(g) = \tilde{S}(f).$$

Procedamos a demostrar que g es precisamente una función conjugada para f. Sabemos por el análisis clásico de Fourier que la serie $S(g)$ es sumable a g por el método de Abel-Poisson casi dondequiera en $[-\pi, \pi]$, es decir:

$$\lim_{r \to 1^-} u(g, r, x) = g(x) \quad \text{c. d.}$$

donde $u(g, r, x)$ es la r-ésima suma usual de Poisson de la función g. Por otro lado, el teorema 2.7 afirma que:

$$\lim_{r \to 1^-} v(f, r, x) - \tilde{f}(x, \eta) = 0 \text{ c.d. en } [-\pi, \pi],$$

donde $\eta = arc\ sen(1 - r)$.
Como $S(g) = \tilde{S}(f)$, tenemos que la r-ésima suma de Poisson de g coincide con la r-ésima suma conjugada de Poisson de f, por lo que:

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{r \to 1^-} u(g, r, x) = \lim_{r \to 1^-} v(f, r, x) \\ &= \lim_{r \to 1^-} \tilde{f}(x, \eta) = \lim_{\eta \to 0} \tilde{f}(x, \eta) \\ &= \tilde{f}(x) \end{aligned}$$

casi dondequiera en $[-\pi, \pi]$. Además, de la construcción de la g se ve que $S(\tilde{f}) = \tilde{S}(f)$. ∎

Una de las aplicaciones de la teoría de funciones conjugadas es un famoso teorema de Lusin (1919) que relaciona la convergencia casi dondequiera de la serie de Fourier de una función de cuadrado integrable con la existencia de un límite que involucra a la función conjugada. Para poder establecer tal teorema necesitaremos algunos resultados auxiliares.

3.8. LEMA.
Sea $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sen(nx)$. Entonces

$$\tilde{\tilde{S}} = -S + \frac{a_0}{2}.$$

Demostración.
Tenemos que $\tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n cos(nx) + a_n sen(nx)$, por lo que

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{S}}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -a_n cos(nx) - b_n sen(nx)\\ &= -(\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sen(nx) + \frac{a_0}{2}) + \frac{a_0}{2}\\ &= -S(x) + \frac{a_0}{2}.\end{aligned}$$

∎

3.9. PROPOSICION.
(i) Sea $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ *tal que* $a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(t)dt = 0$. *Entonces* $\tilde{\tilde{f}}(x) = -f(x)$ *casi dondequiera.*
(ii) Sea $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ *tal que* $a_0(f) = 0$. *Entonces*

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{[\epsilon,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{2tan(t/2)} dt \quad \text{c.d.}$$

Demostración.
(i) Se demostró que para $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, $\tilde{f}(x)$ existe casi dondequiera, $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ y $S(\tilde{f}) = \tilde{S}(f)$. Aplicando este resultado a $\tilde{f}$ obtenemos que

$$S(\tilde{\tilde{f}}) = \tilde{S}(\tilde{f}) = \tilde{\tilde{S}}(f) = -S(f) + \frac{a_0(f)}{2} = S(-f),$$

por lo que $\tilde{\tilde{f}} = -f$ casi dondequiera. ∎

(ii) Para $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ tenemos que casi dondequiera $\tilde{\tilde{f}}(x) = -f(x)$ y que también casi dondequiera

$$-f(x) = \tilde{\tilde{f}}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{2tan(t/2)}dt.$$

∎

Ahora podemos probar una versión sencilla del teorema de Lusin.

3.10. **TEOREMA.** (Criterio de Lusin para $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$)
Sea $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. *Entonces casi dondequiera se tiene que* $S(f)(x) = f(x)$ *si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|t|\le\pi} \frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}cos(nt)dt = 0.$$

Demostración.
Tomando $g(x) = f(x) - \frac{a_0(f)}{2}$ vemos que $a_0(g) = 0$, $\tilde{g} = \tilde{f}$ y que $S(f)(x) = f(x)$ si y sólo si $S(g)(x) = g(x)$, por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_0(f) = 0$.
Por 3.8., 3.7. y 1.10.(i), tenemos que:

$$
\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= -\tilde{S}_n(\tilde{f})(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(x+t)\tilde{D}_n(t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t)[cos(t/2) - cos(n+\frac{1}{2})t]}{2sen(t/2)}dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\pi\geq|t|>\varepsilon} \\
&\frac{\tilde{f}(x+t)[cos(t/2) - cos(n+\frac{1}{2})t]}{2sen(t/2)}dt.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, sabemos por 3.9. que casi dondequiera

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]}\frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{2tan(t/2)}dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\left(\int_{[\varepsilon,\pi]}\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}dt - \int_{[\varepsilon,\pi]}\frac{\tilde{f}(x-t)}{2tan(t/2)}dt\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\left(\int_{[\varepsilon,\pi]}\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}dt + \int_{[-\varepsilon,-\pi]}\frac{\tilde{f}(x+u)}{2tan(-u/2)}du\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\pi\geq|t|>\varepsilon}\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}dt.
\end{aligned}
$$

A partir de las dos igualdades anteriores, tenemos que c.d.

$$S_n(f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\pi\geq|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)} dt$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\pi\geq|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(n+\frac{1}{2})t}{2sen(t/2)} dt$$

$$= f(x) - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\pi\geq|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{2tan(t/2)}$$

$$- \frac{\tilde{f}(x+t)sen(nt)}{2} dt$$

$$= f(x) - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\pi\geq|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{2tan(t/2)} dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(x+t)sen(nt)dt.$$

Ya que $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, por el lema de Riemann-Lebesgue la última integral es $o(1)$, por lo que

$$S_n(f)(x) - f(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{2tan(t/2)} dt + o(1).$$

Así, casi dondequiera, $S_n(f)(x) - f(x) = o(1)$ si y sólo si

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{2tan(t/2)} dt = o(1)$$

si y sólo si

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{2tan(t/2)} dt = o(1).$$

∎

3.11. *Observación.*

En la prueba del teorema anterior se mostró que casi dondequiera existe

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|t|\leq\pi}\frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{2tan(t/2)}dt.$$

Como la función $\frac{1}{2tan(t/2)}-\frac{1}{t}$ puede definirse continuamente en 0, la función $\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}-\frac{\tilde{f}(x+t)}{t}$ es cuadrado integrable, y por el lema de Riemann-Lebesgue,

$$\int_{[-\pi,\pi]}\left(\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}-\frac{\tilde{f}(x+t)}{t}\right)cos(nt)dt=o(1).$$

Así, vemos que casi dondequiera existe

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{\tilde{f}(x+t)}{t}cos(nt)dt\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon}\left(\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}-\left[\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}-\frac{\tilde{f}(x+t)}{t}\right]\right)cos(nt)dt\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}cos(nt)dt+o(1),\end{aligned}$$

de donde inmediatamente se sigue que casi dondequiera

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)}cos(nt)dt=o(1)$$

si y sólo si

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{\tilde{f}(x+t)}{t}cos(nt)dt=o(1).$$

Partiendo la integral anterior y haciendo un cambio de variable,

$$\begin{aligned}
&\int_{|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)}{t} cos(nt)dt \\
&= \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{t} dt + \int_{[-\pi,-\varepsilon]} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{t} dt \\
&= \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t)cos(nt)}{t} dt - \int_{[\pi,\varepsilon]} \frac{\tilde{f}(x-u)cos(-nu)}{-u} du \\
&= \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{t} cos(nt)dt.
\end{aligned}$$

Así, tenemos pues que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\tilde{f}(x+t)}{2tan(t/2)} cos(nt)dt = o(1)$$

si y sólo si

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{t} cos(nt)dt = o(1).$$

3.12. *Observación.*
Es un resultado de análisis de Fourier clásico que, casi dondequiera, la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ converge en promedios (es decir, es Césaro sumable) a $f(x)$. Además, si la serie $S(f)(x)$ converge, entonces la serie es Césaro sumable al mismo límite. Por lo anterior, tenemos que, casi dondequiera, $S(f)(x)$ converge si y sólo si $S(f)(x)$ converge a $f(x)$.

Usando las dos observaciones anteriores y la versión sencilla del teorema de Lusin, es inmediata la demostración de la versión usual del teorema, que enunciamos a continuación.

3.13. TEOREMA. (Versión simétrica del criterio de Lusin para la convergencia de series de Fourier de funciones de cuadrado integrable).

Sea $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Entonces, casi dondequiera, la serie de Fourier de f en un punto x converge si y sólo si

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[\varepsilon, \pi]} \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{t} cos(nt)dt = 0.$$

En particular, $S(f)(x)$ converge casi dondequiera si y sólo si casi dondequiera existe el límite arriba mencionado. ∎

Es posible, a partir del criterio de Lusin, obtener el siguiente sencillo criterio de convergencia para funciones en $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$.

3.14. COROLARIO.

Sea $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ tal que $\frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ c.d. en $[-\pi, \pi]$. Entonces $S(f)(x)$ converge c.d. en $[-\pi, \pi]$.

Demostración.

Para $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $\frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, por el lema de Riemann-Lebesgue se tiene que

$$o(1) = \int_{[0,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{t} cos(nt)dt$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{t} cos(nt)dt$$

y casi dondequiera se satisface la condición del criterio de Lusin. ∎

Lusin demostró que para toda función $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ existe

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[\varepsilon,\pi]} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt$$

c.d. en $[-\pi,\pi]$. Esto y el hecho de que los valores positivos y negativos de la función $cos(nt)$ están, en algún sentido, uniformemente distribuidos en el intervalo $[-\pi,\pi]$, llevó a Lusin a conjeturar (en 1919) que para cualquier función en $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ su serie de Fourier converge casi dondequiera, lo que pasó a ser uno de los grandes problemas abiertos de la teoría de Fourier.
El problema fue resuelto afirmativamente (en 1966) por L. Carleson, aunque los argumentos dados por Lusin para una posible demostración habían sido rechazados tiempo atrás. Un año más tarde P. Hunt probó el teorema correspondiente para funciones en $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $p \in (1,2)$. El resultado para $p = 1$ es rotundamente falso, como lo prueba un ejemplo de A. N. Kolmogorov (1926) de una función en $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ cuya serie de Fourier es divergente en **todo punto** (ver Zygmund o Natanson). Dicho ejemplo confiere especial importancia a los teoremas de Fejér y de Lebesgue sobre la convergencia puntual de los promedios aritméticos. También se demostró que dado cualquier conjunto de medida cero en $[-\pi,\pi]$,

existe una función continua y periódica cuya serie de Fourier diverge en todo punto de ese conjunto (ver Katznelson, capítulo II, sección 3.4).

Procedemos ahora a demostrar la versión general del teorema de Lusin-Privalov (para funciones en $\mathcal{L}^1$).

3.15. **TEOREMA.** (Lusin-Privalov)
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. *Entonces existe c.d.* $x \in [-\pi, \pi]$ *la función conjugada* $\tilde{f}(x)$

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[\varepsilon, \pi]} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2tan(t/2)} dt.$$

Demostración.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_0(f) = 0$. Es claro que $\tilde{f}(x)$ existe si y sólo si existe

$$\lim_{\eta \to 0} f^*_\eta(x) := \lim_{\eta \to 0} \int_{[\eta, \pi]} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt.$$

Probaremos que $f^*_\eta(x)$ tiene un límite cuando $\eta \to 0$ c.d. $x \in [-\pi, \pi]$. Sea F dada por

$$F(x) = \int_{[0,x]} f(t) dt.$$

Entonces F es absolutamente continua y periódica, pues $a_0(f) = 0$. Más aún, $F'(x) = f(x)$ c.d. $x \in [-\pi, \pi]$. Por la versión continua del teorema de Egoroff, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto perfecto $P \subset [-\pi, \pi]$ de medida mayor o igual a $2\pi - \varepsilon$ y tal que

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f(x)$$

uniformemente en $x \in P$. Así, f es continua en P, por lo que existe M constante tal que

$$|f(x)| \leq M \; \forall \; x \in P,$$

y por lo que

$$|F(x+h)-F(x)| \leq 2M|h|$$

para toda $x \in P$ y $|h| \leq h_0 = h_0(\varepsilon)$.
El conjunto $[-\pi, \pi]\backslash P$ es un abierto que se puede escribir como unión numerable de intervalos $\{\delta_n\}$ donde $\sum_{n+1}^{\infty} \mu(\delta_n) < \varepsilon$. Si los puntos 0 y 2π no están en P, los consideraremos como extremos de intervalos δ_n, y cualquier otro punto extremo de los δ_n pertenece a P. Si sustituimos cada δ_n por el intervalo abierto con igual centro y de radio tal que mida el triple de lo que δ_n mide, obtenemos un nuevo abierto, cuyo complemento (que denotaremos P^*) cumple $P^* \subset P$ y $\mu P^* \geq 2\pi - 3\varepsilon$. Como la ε fue arbitraria, basta demostrar que $\tilde{f}(x)$ existe c.d. $x \in P^*$.
Sea $\Phi(x)$ la función continua periódica tal que coincide con F en $P \cup \{0, 1\}$ y que en los δ_n "aumentados" está interpolada linealmente. Entonces:

$$\Phi(x) = \int_{[0,x]} \varphi(x)dx,$$

donde $\varphi(x) = f(x)$ en P y $\varphi(x) = \frac{F(b_n)-F(a_n)}{\delta_n}$, en $\delta_n = (a_n, b_n)$ (usamos la misma letra para el intervalo abierto y su longitud, pero esto no debe causar confusión). Ya que $\sum_{n+1}^{\infty} \delta_n < +\infty$, entonces

$\delta_n < h_0$ para $n > N$ si N es suficientemente grande. Para $x \in \delta_n$ y $n > N$, se tiene que $0 < x - a_n < h_0$ y $0 < a_n < 2\pi$, por lo que:

$$|F(x) - F(a_n)| \leq 2M\delta_n,$$

y por lo que $|F(b_n) - F(a_n)| \leq 2M\delta_n$. Tenemos entonces que φ es una función acotada (y en particular en $\mathcal{L}^2$), y por la versión ya demostrada, $\tilde{\varphi}(x)$ existe c.d.
Sean $r(x) = f(x) - \varphi(x)$, y $R(x)$ dada por

$$R(x) = F(x) - \Phi(x) = \int_{[0,x]} (f(t) - \varphi(t))dt = \int_{[0,x]} r(t)dt.$$

Basta demostrar que $\tilde{r}(x)$ existe c.d. $x \in P^*$.
Es claro que R es continua y periódica, $R(0) = R(2\pi) = 0$ y que $R(x) = 0$ para $x \in P$. En particular R está acotada, por lo que existe C tal que

$$|R(x)| \leq C \quad \forall\, x \in [-\pi, \pi].$$

Más aún, si $x \in \delta_n$ y $n > N$, se tiene:

$$\begin{aligned}|\Phi(x) - \Phi(a_n)| &= \frac{|x - a_n|}{\delta_n}|F(b_n) - F(a_n)| \\ &\leq |F(b_n) - F(a_n)| \leq 2M\delta_n,\end{aligned}$$

por lo que

$$|R(x)| = |R(x) - R(a_n)| \leq |F(x) - F(a_n)| + |\Phi(x) - \Phi(a_n)| \leq 4M\delta_n.$$

Supongamos ahora que $x \in P^*$. Entonces:

$$r_\eta^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{[\eta,\pi]} \frac{r(x+t)-r(x-t)}{t}dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{R(x+t)+R(x-t)}{t}\right)_\eta^\pi$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{[\eta,\pi]} \frac{R(x+t)+R(x-t)}{t^2}dt$$
$$= u_\eta(x) + v_\eta(x).$$

Queremos ver que $u_\eta(x), v_\eta(x)$ tienden a un límite c.d. $x \in P^*$ cuando $\eta \to 0$. Para $u_\eta(x)$ vemos que

$$\frac{R(x\pm\eta)}{\eta} = \frac{R(x\pm\eta)-R(x)}{\eta} \to \pm r(x)$$

c.d. $x \in P^*$. Para $v_\eta(x)$ notamos que basta con probar que

$$I(x) = \int_{[0,\pi]} \frac{|R(x\pm t)|}{t^2}dt < +\infty$$

c.d. $x \in P^*$. Verifiquemos el caso $R(x+t)$. Se tiene:

$$\int_{P^*} I(x)dx = \int_{P^*}\int_{[x,\pi+x]} \frac{|R(t)|}{(t-x)^2}dtdx \leq$$
$$2\int_{[-\pi,\pi]}\int_{P^*} \frac{dx}{(t-x)^2}|R(t)|dt.$$

Pero para $t \in P$, se tiene $R(t) = 0$. Si $x \in \delta_n$ y $x \in P^*$ se debe tener $|x-t| \geq \delta_n$, por lo que

$$\int_{P^*} \frac{dx}{(t-x)^2} \leq 2\int_{\delta_n} \frac{du}{u^2} = \frac{2}{\delta_n},$$

y por lo tanto

$$\int_{P^*} I(x)dx \leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n}|R(t)|dt$$
$$\leq 4\sum_{n\leq N} C + 16M\sum_{n>N}\delta_n < +\infty,$$

por lo que, en particular, la función $I(x)$ debe ser finita c.d. $x \in P^*$, lo cual termina la demostración. ∎

Ha sido demostrada la existencia del límite

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[\varepsilon,\pi]}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2tan(t/2)}dt$$

c. d. $x \in [-\pi,\pi]$ para toda $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Surge de inmediato la pregunta de si el límite existe gracias a la pequeñez del numerador o a las cancelaciones entre las cantidades positivas y negativas. La respuesta es que el límite existe debido a las cancelaciones, y para demostrarlo exhibiremos un ejemplo (debido a Kaczmarz) de una función continua f tal que:

$$\int_{[0,\pi]}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{2tan(t/2)}dt = +\infty$$

para toda $x \in [-\pi,\pi]$. Para facilitar la construcción de una función con tales propiedades, necesitaremos algunos resultados preliminares.

3.16. LEMA.

Se tienen los siguientes límites:

(a) $\sum_{j=2}^{k-1}\frac{j!}{k!} \to 0 \quad (k\to\infty)$.

(b) $\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{k!}{j!} \to 0 \quad (k \to \infty)$.

Demostración.
(a) $\sum_{j=2}^{k-1} \frac{j!}{k!} \le \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j!}{k!} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j!}{(k-1)!}$, por lo que basta demostrar que $\sum_{j=1}^{n} \frac{j!}{n!} = O(1)$. Recordemos que para $j, n \in \mathbb{N}, j \le n$, se tiene $\frac{n!}{j!(n-j)!} \ge 1$ (de hecho, es el número de combinaciones de n objetos tomados de j en j), por lo que:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j!}{n!} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j!(n-j)!}{n!(n-j)!} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-j)!} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l!} < e.$$

(b) $\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{k!}{j!} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{j!}$. Procediendo de manera análoga a la del inciso (a), basta demostrar que $\sum_{j=n}^{\infty} \frac{n!}{j!} = O(1)$.

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{n!}{j!} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{n!(j-n)!}{j!(j-n)!} \le \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j-n)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = e.$$

∎

3.17. **LEMA.**
Existe una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, de periodo 1, y tal que
(a) $g(0) = 0 = g(1)$.
(b) $|g(x)| \le 1$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$.
(c) g *satisface una condición de Lipschitz de orden 1 en* $\mathbb{R}$.
(d) Para toda $x \in \mathbb{R}$, *la función continua* $\rho_x(u) = g(x+u) - g(x-u)$ *no es idénticamente cero.*

Demostración.
Tómese a la función $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ (que luego extenderemos periódicamente a todo $\mathbb{R}$) como:

$$g(x) = \begin{cases} 4t, & \text{si } t \in [0,1/4]; \\ \frac{4}{3}(1-t), & \text{si } t \in [1/4,1]. \end{cases}$$

Es decir, g se construye definiéndola como 0 en 0 y 1, $g(1/4) = 1$ e interpolando linealmente en el resto del intervalo $[0,1]$. g está bien definida y es continua en $[0,1]$; además, por ser $g(0) = g(1)$, se puede extender a una función continua y periódica (de periodo 1) en todo $\mathbb{R}$, y claramente $|g(x)| \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Verifiquemos que g satisface una condición de Lipschitz de orden 1 en todo $\mathbb{R}$. Como g satisface una condición de Lipschitz de orden 1 en $[0,1/4]$ con constante 4 y la misma condición en $[1/4,1]$ con constante $4/3$, entonces g satisface una condición de Lipschitz de orden 1 en $[0,1]$ con constante 4, pues si tomamos $x \in [0,1/4], y \in [1/4,1]$, entonces:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq |g(x) - g(1/4)| + |g(1/4) - g(y)| \\ &\leq 4|x - \frac{1}{4}| + \frac{4}{3}|\frac{1}{4} - y| \\ &\leq 4((\frac{1}{4} - x) + (y - \frac{1}{4})) = 4|y - x|. \end{aligned}$$

Además, en cada intervalo de la forma $[k, k+\frac{1}{4}]$ con $k \in \mathbb{Z}$, g satisface una condición de Lipschitz de orden 1 con constante 4, y en cada intervalo de la forma $[k+\frac{1}{4}, k+1]$ con $k \in \mathbb{Z}$, g satisface una condición de Lipschitz de orden 1 con constante $4/3$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, yuxtaponiendo un número finito de intervalos de las formas anteriores que unan a x y y, comprobamos que g satisface la condición de Lipschitz de orden 1 en todo $\mathbb{R}$.

Para verificar la condición (d) del lema, sea $x \in \mathbb{R}$ fija. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $x \in [0,1)$. Si $0 < x < 1/2$, entonces $0 < 2x < 1$ y $g(x+x) - g(x-x) = g(2x) \neq 0$. Si $1/2 < x < 1$, entonces $1 < 2x < 2$ y nuevamente

$g(x+x)-g(x-x)=g(2x)\neq 0$. Si $x=1/2$, entonces $g(x+\frac{1}{4})-g(x-\frac{1}{4})=g(3/4)-g(1/4)=\frac{1}{3}-1\neq 0$. Finalmente, para $x=0$, $g(x+\frac{1}{4})-g(x-\frac{1}{4})=g(1/4)-g(-1/4)\neq 0$, por lo que (d) se cumple. ∎

3.18. LEMA.

Cualquier función g con las propiedades (a)-(d) del lema anterior, satisface además lo siguiente:

(e) Existen constantes positivas $A=A(g), B=B(g)$ tales que para toda $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, y para toda $x\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
A\ln n &\leq \int_{[1/n,1]}\frac{|g(nx-nt)-g(nx-nt)|}{t}dt\\
&\leq \int_{[0,1]}\frac{|g(nx-nt)-g(nx-nt)|}{t}dt\leq B\ln n.
\end{aligned}
$$

Demostración.

Sabemos de la teoría de la medida que la asignación

$$x\mapsto\int_{[0,1]}|g(x+u)-g(x-u)|du$$

es continua. Como cada una de las funciones $g(x+u)-g(x+u)$ es continua y no nula en u, $[0,1]$ es compacto y la función continua $\int_{[0,1]}|g(x+u)-g(x+u)|du>0$ para toda $x\in[0,1]$, entonces existe una constante $C>0$ tal que

$$\int_{[0,1]}|g(x+u)-g(x-u)|du>C \tag{1}$$

para toda $x\in[0,1]$.

Por otro lado, como $|g(x)| \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\int_{[0,1]} |g(x+u) - g(x-u)| du \leq 2 \qquad (2)$$

Tenemos también que, haciendo $y = nx$, $u = nt$,

$$\begin{aligned}
&\int_{[1/n,1]} \frac{|g(nx+nt) - g(nx-nt)|}{t} dt = \\
&= \int_{[1,n]} \frac{|g(y+u) - g(y-u)|}{u} du \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[k.k+1]} \frac{|g(y+u) - g(y-u)|}{u} du \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[0,1]} \frac{|g(y+t+k) - g(y-t-k)|}{t+k} dt \\
&= \int_{[0,1]} |g(y+t) - g(y-t)| \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t+k} \right) dt \qquad (3)
\end{aligned}$$

Notamos que para $0 \leq t \leq 1$, se tiene $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t+k} \geq \frac{1}{k+1}$, por lo que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t+k} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Además, si tomamos $B_1 \geq \frac{1}{ln\ 2} + 1$, vemos que para $n \geq 2$,

$$B_1 ln\ n \geq 1 + ln\ n \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \qquad (4)$$

Por otro lado, para $0 < A_1 \leq min\{\frac{1}{2ln\ 2}, 1 - \frac{1}{ln\ 3}\}$, tenemos que $A_1 ln\ 2 \leq 1/2$, y para $n \geq 3$,:

$$A_1 ln\ n \leq ln\ n - 1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \tag{5}$$

Reuniendo todo lo que tenemos, vemos que por (3),(5) y (1):

$$\begin{aligned}
&\int_{[1/n,1]} \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t} dt \\
&= \int_{[0,1]} |g(y+t)-g(y-t)| \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t+k} \right) dt \\
&\geq \int_{[0,1]} |g(y+t)-g(y-t)| \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) dt \\
&\geq A_1 ln\ n \int_{[0,1]} |g(y+t)-g(y-t)| dt \\
&\geq A_1 C ln\ n,
\end{aligned}$$

donde $A_1 C = A \neq 0$ es la constante buscada.
Estudiando ahora (3),(4) y (2), obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{[1/n,1]} \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t} dt \\
&= \int_{[0,1]} |g(y+t)-g(y-t)| \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t+k} \right) dt \\
&\leq \int_{[0,1]} |g(y+t)-g(y-t)| \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) dt \\
&\leq B_1 ln\ n \int_{[0,1]} |g(y+t)-g(y-t)| dt \\
&\leq 2B_1 ln\ n. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Como g satisface una condición de Lipschitz de orden 1, digamos con constante K, tenemos que:

$$\int_{[0,1/n]} \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t}dt$$
$$\leq \int_{[0,1/n]} \frac{2ntK}{t}dt = 2K.$$

Añadiendo esto último a (6), vemos que:

$$\int_{[0,1]} \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t}dt$$
$$\leq 2B_1 ln\ n + 2K \leq 2B_1 ln\ n + \frac{2K}{ln\ 2} ln\ 2$$
$$= (2B_1 + \frac{2K}{ln\ 2}) ln\ n,$$

lo cual termina la demostración del lema. ∎

Finalmente, antes de pasar a la construcción de la función continua mencionada anteriormente, hacemos unas sencillas observaciones que nos permiten simplificar los cálculos.

3.19. *Observación.*
La función

$$h(t) = \frac{1}{2sen(t/2)} - \frac{1}{t} = \frac{t - 2sen(t/2)}{2tsen(t/2)}$$

es continua en $[0,\pi]$, extendiéndola en el 0 como 0 (basta usar la regla de L'Hospital dos veces para la continuidad en 0). En particular, $h \in \mathcal{L}^{\infty}_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, y por la desigualdad de Hölder, $fh \in \mathcal{L}^{1}_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])\ \forall\ f \in \mathcal{L}^{1}_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Tenemos entonces que para $f \in \mathcal{L}^{1}_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$,

$$\frac{f(t)}{2sen(t/2)} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]) \Rightarrow \frac{f(t)}{2sen(t/2)} - f(t)h(t) = \frac{f(t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}},$$

e inversamente

$$\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]) \Rightarrow \frac{f(t)}{t} + f(t)h(t) = \frac{f(t)}{2sen(t/2)} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}.$$

Así, son equivalentes que $\frac{f(t)}{2sen(t/2)} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ y que $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$; como esta última expresión es más manejable, es la que usaremos.

3.20. *Observación.*
Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow [0,1]$, $\alpha(t) = \frac{t-a}{b-a}$. Entonces $\alpha'(t) = \frac{1}{b-a}$, y para toda $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$,

$$\int_{[0,1]} f(t)dt = \int_{[a,b]} f(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f\alpha(t)dt.$$

Así, si encontramos $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que para toda $x \in [0,1]$, se tenga $\int_{[0,1]} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}dt = +\infty$, entonces, definiendo $r : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = f(2\pi x)$, se tiene que r es continua y $\int_{[0,2\pi]} \frac{|r(x+t)-r(x-t)|}{t}dt = +\infty$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, $\int_{[0,\pi]} \frac{|r(x+t)-r(x-t)|}{2sen(t/2)}dt = +\infty$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, que es lo que deseamos.

Procedamos ahora a realizar la construcción mencionada.

3.21. TEOREMA. (Kaczmarz, 1931)
Existe una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periódica (de periodo 2π) tal que

$$\int_{[0,\pi]} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|}{2tan(t/2)} dt = +\infty$$

para toda $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.
Por las observaciones anteriores, basta construir una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periodica (de periodo 1) tal que

$$\int_{[0,1]} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|}{t} dt = +\infty$$

para toda $x \in [0, 1]$.
Por los lemas anteriores, existe una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, de periodo 1, que satisface una condición de Lipschitz de orden 1, de norma uniforme igual a 1, tal que $g(0) = 0 = g(1)$ y para toda $x \in [0, 1]$ la función $g(x + u) - g(x - u)$ no es idénticamente cero en u. Sean $\varepsilon_k = \frac{1}{k!}$, $n_k = 2^{(k!)^2}$. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$, y por lo tanto la serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_k g(n_k x)$$

converge $\forall\ x \in \mathbb{R}$ y define una función f continua y de periodo 1 (por ser límite uniforme de funciones continuas de periodo 1). Demostremos que f cumple lo requerido. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, se tiene

$$\int_{[1/n_k,1]} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}dt$$
$$= \int_{[1/n_k,1]} \frac{|(\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l g(n_l x + n_l t)) - (\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l g(n_l x - n_l t))|}{t}dt$$
$$\geq \varepsilon_k \int_{[1/n_k,1]} \frac{|g(n_k x + n_k t) - g(n_k x - n_k t)|}{t}dt$$
$$- \int_{[1/n_k,1]} \sum_{l=1}^{k-1} \varepsilon_l \frac{|g(n_l x + n_l t) - g(n_l x - n_l t)|}{t}dt$$
$$- \int_{[1/n_k,1]} \sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l \frac{|g(n_l x + n_l t) - g(n_l x - n_l t)|}{t}dt.$$

Como la convergencia de la serie de funciones es uniforme en u, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, por lo que:

$$\int_{[1/n_k,1]} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}dt$$
$$\geq \varepsilon_k \int_{[1/k,1]} \frac{|g(n_k x + n_k t) - g(n_k x - n_k t)|}{t}dt$$
$$- \sum_{l=2}^{k-1} \varepsilon_l \int_{[1/n_k,1]} \frac{|g(n_l x + n_l t) - g(n_l x - n_l t)|}{t}dt$$
$$- \sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l \int_{[1/n_k,1]} \frac{|g(n_l x + n_l t) - g(n_l x - n_l t)|}{t}dt \qquad (1)$$

Por el lema anterior, g cumple adicionalmente que:

$$\int_{[0,1]} \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t}dt \leq Bln\ n$$

para toda $n \geq 2$, por lo que

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{l=2}^{k-1} \varepsilon_l \int_{[1/n_k,1]} \frac{|g(n_l x + n_l t) - g(n_l x - n_l t)|}{t} dt \\
&\geq -\sum_{l=2}^{k-1} \varepsilon_l \int_{[0,1]} \frac{|g(n_l x + n_l t) - g(n_l x - n_l t)|}{t} dt \\
&\geq -B \sum_{l=2}^{k-1} \varepsilon_l ln\ n_l \\
&= -B \sum_{l=2}^{k-1} \frac{1}{l!}(l! ln\ 2) \\
&= -B ln\ 2 \sum_{l=2}^{k-1} l! \qquad (2)
\end{aligned}
$$

También por ese lema, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_k \int_{[1/n_k,1]} \frac{|g(n_k x + n_k t) - g(n_k x - n_k t)|}{t} dt \\
&\geq \varepsilon_k A ln\ n_k = A \frac{1}{k!}(k!)^2 ln\ 2 \\
&= A ln\ 2k! \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Además, tenemos:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l \int_{[1/n_k,1]} \frac{|g(n_l x + n_l t) - g(n_l x - n_l t)|}{t} dt \\
&\geq -\sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l \int_{[1/n_k,1]} \frac{2}{t} dt = -2 \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{l!} ln\ n_k \\
&= -2(k!)^2 ln\ 2 \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{l!} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Juntando lo que tenemos en (1),(2),(3) y (4) tenemos:

$$\int_{[1/n_k,1]} \frac{|g(n_k x + n_k t) - g(n_k x - n_k t)|}{t} dt$$

$$\geq -B\ln 2 \sum_{l=2}^{k-1} l! + A(\ln 2)k! - 2(k!)^2 \ln 2 \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{l!}$$

$$= (\ln 2)k! \left(A - B \sum_{l=2}^{k-1} \frac{l!}{k!} - 2 \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{k!}{l!} \right)$$

$$= (\ln 2)k!(A - Bo(1) - 2o(1)) \to +\infty (k \to \infty),$$

por lo que:

$$\int_{[0,1]} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|}{t} dt = +\infty$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. ∎

CAPITULO CUATRO.
METODOS COMPLEJOS I.

En este capítulo usamos herramienta propia del análisis complejo, principalmente de los espacios de Hardy. Mostramos una estrecha relación entre los espacios H^p y $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, así como entre las series de Taylor de las $F \in H^p$ y las series de Fourier de las $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$. Probamos un teorema que da condiciones necesarias y suficientes para que tanto una serie trigonométrica como su conjugada sean series de Fourier. Finalizamos el capítulo con un teorema de Hardy que da condiciones suficientes para garantizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n}$ en términos de la función analítica $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Para continuar con el estudio de las series trigonométricas conjugadas necesitaremos algunas definiciones y resultados del análisis complejo, particularmente de la teoría de espacios de Hardy (véase Rudin).

4.1. *Notación.*
Escribiremos $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ y $\partial\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dada una función $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ con $f(-\pi) = f(\pi)$ se le considerará como una función de $\partial\mathbb{D}$ en el codominio de f mediante la correspondencia $f(e^{i\theta}) := f(\theta)$, y escribiremos $f \in \mathcal{L}^p(\partial\mathbb{D})$ o $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ indistintamente.

4.2. **DEFINICION.**

Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, y sea $p \in (0, \infty)$. Definimos para $r \in [0, 1)$ el número $M_p(r, f)$ como

$$M_p(r,f) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Análogamente, para una función $u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica se define

$$M_p(r,u) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} |u(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

4.3. *Observación.*

Si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica, entonces $|f|^p$ es subarmónica, y por el teorema del valor medio de Hardy (véase Rudin, página 330, teorema 17.5) si $0 \leq r_1 \leq r_2 < 1$ se tiene:

$$\int_{|z|=r_1} |f(z)|^p dz \leq \int_{|z|=r_2} |f(z)|^p dz,$$

es decir, dada $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica y $p \in (0, \infty)$ fijas, la función $M_p(\cdot, f) : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es no decreciente. De igual modo, se tiene que para $u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica la función $M_p(\cdot, u) : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es no decreciente.

4.4. **DEFINICION.**

Sea $p \in (0, \infty)$. Definimos el espacio H^p (llamado **espacio de Hardy**) como sigue:

$$H^p := \{f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ f \text{ es analítica y } \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty\}.$$

También definimos

$$h^p := \{u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \ u \text{ es armónica y } \sup_{0<r<1} M_p(r,u) < \infty\}.$$

Si $f \in H^p$ diremos que f **pertenece a la clase** H^p, y denotaremos

$$H^p(f) := \sup_{0<r<1} M_p(r,f).$$

Si $u \in h^p$, denotaremos

$$h^p(u) := \sup_{0<r<1} M_p(r,u).$$

4.5. *Observación.*

Las clases H^p que revisten mayor importancia para el estudio que vamos a desarrollar son H^1 y H^2.

Es claro de la definición que toda función analítica acotada en $\mathbb{D}$ pertenece a la clase H^p para toda $p > 0$. También es claro que para $0 < p_1 \leq p_2 < \infty$, se tiene

$$|f(re^{i\theta})|^{p_1} \leq 1 + |f(re^{i\theta})|^{p_2}$$

por lo que

$$M_{p_1}^{p_1}(r,f) \leq M_{p_2}^{p_2}(r,f) + 1$$

lo cual implica que

$$H^{p_2} \subset H^{p_1}.$$

4.6. LEMA.
Sea $p \in (0,\infty)$. Entonces H^p es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y h^p un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

Demostración.
Sean $f, g \in H^p$, $r \in [0,1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |(f+g)(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |g(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} \\
&\leq (H^p(f))^{1/p} + (H^p(g))^{1/p}.
\end{aligned}$$

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |\alpha f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} \\
&= |\alpha| \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} \\
&\leq |\alpha|(H^p(f))^{1/p}.
\end{aligned}$$

El caso h^p es enteramente análogo. ∎

4.7. **TEOREMA.** (Descomposición de F. Riesz 1923)
Sea $f \in H^p$, $p > 0$. Entonces existen funciones $B, F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ analíticas tales que

$$f(z) = B(z)F(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{D}$$

con $|B(z)| \leq 1$, $F(z) \neq 0\ \forall\, z \in \mathbb{D}$ y $F \in H^p$. Además, si $f \not\equiv 0$, se tiene $H^p(F) = H^p(f)$.

Demostración.
Para $f \equiv 0$ podemos tomar $B \equiv 0$, $F \equiv 1$, por lo que podemos suponer $f \not\equiv 0$. En este caso, si 0 es un cero de f de orden m, entonces $f(z) = z^m \varphi(z)$, con φ analítica y tal que $\varphi(0) \neq 0$. Vemos que para una tal φ se tiene

$$|f(re^{i\theta})|^p = r^p |\varphi(re^{i\theta})|^p,$$

por lo que si $r \in (0,1)$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{r^p 2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

y del hecho de que $f \in H^p$ se tendría $\varphi \in H^p$ y $H^p(\varphi) = H^p(f)$. Además, si la proposición es válida para φ, digamos $\varphi = B_1 F_1$, entonces se tendría $f(z) = (z^m B_1(z))F_1(z)$, con $z^m B_1(z)$ analítica en $\mathbb{D}$, $|z^m B_1(z)| \leq |B_1(z)| \leq 1\ \forall\, z \in \mathbb{D}$ y $H^p(F_1) = H^p(\varphi) = H^p(f)$, y la proposición es válida para f. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $f(0) \neq 0$.
Primer caso: Supongamos que f tiene sólo un número finito de ceros en $\mathbb{D}$. Si $f(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{D}$, entonces $B \equiv 1$, $F = f$ sirven. Supongamos que los ceros de f son $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, donde los ceros múltiples están contados según sus multiplicidades.

Sea $B_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} |\alpha_k| \frac{1 - \frac{z}{\alpha_k}}{1 - \overline{\alpha}_k z}.$$

B_n es analítica en $\mathbb{D}$, y tiene como únicos ceros (incluyendo multiplicidades) a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Note que cada factor de B_n corresponde a un mapeo conforme de $\mathbb{D}$ **sobre** $\mathbb{D}$ que lleva α_k en 0. Del análisis complejo se tiene que, por tanto, existe una función analítica $F_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F_n(z) \neq 0 \; \forall \; z \in \mathbb{D}$ y

$$f(z) = B_n(z) F_n(z).$$

También se tiene que, para $|z| = 1$, $\overline{z} = 1/z$ y por lo tanto

$$\frac{|\alpha_k||1 - \frac{z}{\alpha_k}|}{|1 - \overline{\alpha}_k z|} = \frac{|\alpha_k - z|}{|z||\frac{1}{z} - \overline{\alpha}_k|} = \frac{|\alpha_k - z|}{|\overline{z} - \overline{\alpha}_k|} = 1,$$

por lo que $|B_n(z)| = 1 \; \forall \; z \in \partial\mathbb{D}$, y por el teorema del módulo máximo, $|B_n(z)| < 1 \; \forall \; z \in \mathbb{D}$.
Resta verificar que $F_n \in H^p$ y que $H^p(F_n) = H^p(f)$. Como B_n es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, B_n es uniformemente continua, y para toda $\varepsilon \in (0, 1)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|B_n(z_1) - B_n(z_2)| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad |z_1 - z_2| < \delta.$$

En particular, para $\theta \in [-\pi, \pi]$ arbitraria, $z_1 = e^{i\theta}$ y $z_2 = re^{i\theta}$ con $0 < 1 - r < \delta$, se tiene que $|1 - B_n(re^{i\theta})| < \varepsilon$, por lo que

$$|B_n(re^{i\theta})| > 1 - \varepsilon.$$

Tenemos entonces que para toda $\theta \in [-\pi, \pi]$ y r cercana a 1,

$$|f(re^{i\theta})|^p = |B_n(re^{i\theta})|^p |F_n(re^{i\theta})|^p \geq (1-\varepsilon)^p |F_n(re^{i\theta})|^p$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |F_n(re^{i\theta})|^p d\theta &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p}\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \\ &\leq \frac{H^p(f)}{(1-\varepsilon)^p}.\end{aligned}$$

Como la desigualdad es válida para toda $\varepsilon \in (0,1)$, vemos que $(M_p(r, F_n))^p \leq H^p(f)$, por lo que $F_n \in H^p$ y $H^p(F_n) \leq H^p(f)$. Por otra parte, como

$$|f(re^{i\theta})|^p = |B_n(re^{i\theta})|^p |F_n(re^{i\theta})|^p \leq |F_n(re^{i\theta})|^p,$$

tenemos que $H^p(f) \leq H^p(F_n)$, por lo que $H^p(f) = H^p(F_n)$.

Segundo caso: f tiene una infinidad de ceros. Ya que $f \not\equiv 0$, $f^{-1}(0)$ no tiene puntos de acumulación, y en particular f tiene sólo una cantidad numerable de ceros en $\mathbb{D}$, digamos $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. Vemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es posible definir B_n y F_n como en el primer caso, cumpliéndose todo excepto que $F_n(z)$ no se anule en todo $\mathbb{D}$. Aún así, tenemos que

$$|F_n(0)|^p = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |F_n(0)|^p d\theta \leq H^p(F_n) \leq H^p(f),$$

y por otro lado

$$|F(0)| = \frac{|f(0)|}{|B_n(0)|} = \frac{|f(0)|}{|\alpha_1|\ldots|\alpha_n|}$$

por lo que

$$|\alpha_1 \ldots \alpha_n|^p \geq \frac{|f(0)|^p}{H^p(f)} > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Esto significa que el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ converge (a un número no nulo), y por un resultado de variable compleja (ver Rudin, Teorema 15.4) el producto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \frac{1-\frac{z}{\alpha_k}}{1-\overline{\alpha}_k z}$$

converge uniformemente en todo disco cerrado de radio $r < 1$, y determina una función analítica $B : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$B(z) = \lim_{n\to\infty} B_n(z) = \prod_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \frac{1-\frac{z}{\alpha_k}}{1-\overline{\alpha}_k z}.$$

Puesto que $|B_n(z)| \leq 1 \ \forall\, z \in \mathbb{D} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, la función B (conocida como **función de Blaschke** de f, noción introducida en 1915) cumple también que $|B(z)| < 1 \ \forall\, z \in \mathbb{D}$. Además, B tiene los mismos ceros (incluso hasta multiplicidad) que f, por lo que existe una función analítica $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(z) \neq 0 \ \forall\, z \in \mathbb{D}$ y

$$f(z) = B(z)F(z).$$

Verifiquemos que $F \in H^p$ y $H^p(F) = H^p(f)$. Para $r \in (0,1)$ vemos que $F_m(re^{i\theta}) = \frac{f(re^{i\theta})}{B_m(re^{i\theta})}$ salvo una cantidad finita de ceros de B_m, y por tanto $F_m(re^{i\theta})$ converge a $F(re^{i\theta})$ para casi toda $\theta \in [-\pi, \pi]$. Por el lema de Fatou,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |F(re^{i\theta})|^p d\theta &\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |F_m(re^{i\theta})|^p d\theta \\ &\leq H^p(f),\end{aligned}$$

por lo que $F \in H^p$ y $H^p(F) \leq H^p(f)$. Nuevamente por ser $|f(re^{i\theta})| \leq |F(re^{i\theta})|$ tenemos que $H^p(f) \leq H^p(F)$ y se tiene $H^p(f) = H^p(F)$. ∎

4.8. **COROLARIO.**
Sea $f \in H^p$, $p > 0$. Entonces existen $f_1, f_2 \in H^p$ tales que $f_1(z) \neq 0 \neq f_2(z)\ \forall\ z \in \mathbb{D}$ y $f = f_1 - f_2$.

Demostración.
Sean B y F como en el lema anterior. Sean $f_1(z) = 2F(z)$, $f_2(z) = 2F(z) - f(z) = F(z)(2 - B(z))$. Como F no posee ceros en $\mathbb{D}$, tampoco los tiene f_1, y como además $|B(z)| \leq 1\ \forall\ z \in \mathbb{D}$, f_2 tampoco tiene ceros en $\mathbb{D}$. Finalmente, del hecho de que $F, f \in H^p$ se sigue que $f_1, f_2 \in H^p$. ∎

A continuación daremos una útil caracterización de las funciones en H^2 en términos de su serie de Taylor.

4.9. **TEOREMA.**
Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, con serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Entonces $f \in H^2$ si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$. En ese caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = H^2(f).$$

Demostración.
Sea $r \in [0,1)$. Sea $f_r : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}.$$

Como f es continua, f_r también lo es, y por lo tanto $f_r \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$. Usando el sistema ortonormal completo $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ (con la medida normalizada) y la identidad de Parseval, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f_r(\theta)|^2 d\theta \tag{1}$$

Supongamos que $f \in H^2$. Entonces de (1) se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq H^2(f).$$

Mostremos que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq H^2(f)$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m} |c_n|^2 &= \sum_{n=0}^{m} |c_n|^2(1-r^{2n}) + \sum_{n=0}^{m} |c_n|^2 r^{2n} \\ &\leq (1-r^{2m}) \sum_{n=0}^{m} |c_n|^2 + H^2(f).\end{aligned}$$

Como m está fija y la desigualdad vale para toda $r \in (0,1)$ haciendo tender r a 1 vemos que

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n|^2 \leq H^2(f).$$

Supongamos ahora que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$. Nuevamente tomando $r \in (0,1)$ y considerando a la función f_r, de (1) se sigue que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 < +\infty,$$

por lo que $f \in H^2$ y $H^2(f) \leq \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2$. Juntando esta desigualdad con la obtenida en la primera parte de la demostración tenemos que $H^2(f) = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2$. ∎

4.10. *Observación.*

Si cada una de las c_n del teorema anterior se escribe como

$$c_n = a_n - ib_n$$

con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, el teorema dice que $f \in H^2$ si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2 < +\infty$, y que $H^2(f) = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2$. Esta versión del teorema nos servirá después, y en los casos en que la utilicemos nos encontraremos frecuentemente con que $b_0 = 0$, es decir, la función analítica f cumple $f(0) \in \mathbb{R}$ (es oportuno señalar cierta analogía con el problema de variable compleja de encontrar una conjugada armónica). También tendremos que es más cómodo tener $c_0 = a_0/2$.

En la teoría clásica del análisis de Fourier se demuestra que para una función $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, $(1 \leq p < \infty)$, existe una función $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)P(r,\theta - t)dt$$

con la propiedad de que c.d. $\theta \in [-\pi,\pi]$ existe

$$\lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) =: f(\theta) \qquad \text{y} \qquad \|F_r - f\|_p \to 0 \; (r \to 1^-).$$

(Véase el apéndice.) Recordemos que se define $F_r : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ como $F_r(\theta) = F(re^{i\theta})$, y a $f(\theta)$ se le llama **límite radial** de F en θ. Además, F puede desarrollarse en $z = re^{i\theta}$ como

$$F(z) = F(re^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} r^n e^{-in\theta}$$

donde $c_0 = a_0(f)/2$, $c_n = a_n(f) - ib_n(f)$, $c_{-n} = a_n(f) + ib_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$. A los números $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se les llama **coeficientes de Fourier complejos** de f. Estos corresponden al sistema ortonormal completo $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con la medida normalizada por $1/2\pi$, es decir, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)e^{-int}dt$.
Así, si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ con $1 \leq p < \infty$ es tal que $0 = c_{-n} = a_n(f) + ib_n(f)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tenemos que la F inducida al convolucionar a f con el núcleo de Poisson es analítica en $\mathbb{D}$ y su desarrollo en serie de Taylor es:

$$F(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

con $c_0 = a_0(f)/2$, $c_n = a_n(f) - ib_n(f)$. También en este caso se tiene, puesto que $\|F_r - f\|_p \to 0$ $(r \to 1^-)$, que $\|F_r\|_p^p \to \|f\|_p^p$, por lo que $F \in H^p$ y $H^p(f) = \|f\|_p^p$.
El recíproco del resultado anterior es cierto, y empezamos por demostrar una versión sencilla (cuando $p = 2$).

4.11. **TEOREMA.**
Sea $F \in H^2$. Entonces c.d. $\theta \in [-\pi, \pi]$ existe

$$\lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) =: f(\theta)$$

Además, $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, $\|F_r - f\|_2 \to 0$ $(r \to 1^-)$ (y por tanto $\|f\|_2^2 = H^2(F)$) y si $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, entonces

$$c_0 = a_0(f)/2, \quad c_n = a_n(f) - ib_n(f) \text{ y } a_n(f) + ib_n(f) = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.
Sean $\alpha_0 = 4c_0$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tales que $c_n = \alpha_n - i\beta_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $F \in H^2$, $+\infty > \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = |\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2$. Por el teorema de Riesz-Fischer existe $f_1 \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ tal que $\alpha_0 = a_0(f_1)$, $\alpha_n = a_n(f_1)$, $\beta_n = b_n(f_1)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Sea $f = \frac{f_1 + i\tilde{f}_1}{2} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, donde $\tilde{f}_1$ se define como $\tilde{u} + i\tilde{v}$ para $u, v \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $u + iv = f_1$. Como el cálculo de los coeficientes de Fourier a_n y b_n es un proceso lineal, vemos que

$$\frac{a_0(f)}{2} = \frac{a_0(f_1) + a_0(\tilde{f}_1)}{4} = c_0$$

$$a_n(f) = \frac{a_n(f_1) + ia_n(\tilde{f})}{2} = \frac{\alpha_n - i\beta_n}{2}$$

$$b_n(f) = \frac{b_n(f_1) + ib_n(\tilde{f}_1)}{2} = \frac{\beta_n + i\alpha_n}{2}.$$

Tenemos entonces que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) - ib_n(f) = \frac{(\alpha_n - i\beta_n) - i(\beta_n + i\alpha_n)}{2} = c_n$$

$$a_n(f) + ib_n(f) = \frac{(\alpha_n - i\beta_n) + i(\beta_n + i\alpha_n)}{2} = 0$$

Resta verificar que $\lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) = f(\theta)$ c.d. y que $\|F_r - f\|_2 \to 0\,(r \to 1^-)$. Por lo que habíamos notado antes del teorema, f induce una función analítica $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ cuya serie de Taylor es

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = F(z),$$

es decir, f induce a la función original F, y para G sabemos que c.d. $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$f(\theta) = \lim_{r\to 1^-} G(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta})$$

y que

$$\|F_r - f\|_2 = \|G_r - f\|_2 \to 0 \quad (r \to 1^-).$$

∎

4.12. **COROLARIO.** (de la demostración del teorema)
Sea $F \in H^2$. Entonces c.d. existe el límite radial f de F, y la función $F(re^{i\theta})$ es la convolución de f con $P(r,\theta)$, es decir,

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)P(r,\theta - t)dt.$$

∎

Para demostrar la versión con $p \geq 1$ arbitraria, necesitamos un lema previo de análisis funcional, que enunciamos sin demostrar.

4.13. LEMA.

Sean X un espacio de Banach, X^* su dual. Si (F_n) es una sucesión en X^* y $(F_n(x))$ converge para todo $x \in X$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $F_n(x) \to f(x)$ para toda $x \in X$. ∎

Con ayuda del lema anterior es posible demostrar la siguiente proposición de análisis de Fourier clásico.

4.14. PROPOSICION.

Sea $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica. Entonces F es la integral de Poisson de una función $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ con $1 < p < \infty$ (es decir, $F(re^{i\theta}) = f * P_r(\theta)\ \forall\ r \in (0,1),\ \theta \in [-\pi,\pi]$) si y sólo si $F \in h^p$.

Demostración.

Necesidad: Ya se conoce (véase el párrafo siguiente a la observación 4.10.).

Suficiencia: Supongamos que $F \in h^p$. Sea $q \in (1,\infty)$ el exponente conjugado de p y consideremos a $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ como el espacio dual de $\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ (teorema de F. Riesz). Sean $r < R$ dadas en $(0,1)$, entonces por ser F armónica tenemos $R^{|n|}\hat{F}_r(n) = r^{|n|}\hat{F}_R(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$, se tiene que $|\hat{F}_r(n)| < |\hat{F}_R(n)|$.

Por otro lado, considerando a $F_R \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ y a $e^{-int} \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ obtenemos:

$$\begin{aligned} |\hat{F}_r(n)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{[-\pi,\pi]} F_r(t)e^{-int}dt\right| \\ &\leq \|F_r\|_p\|e^{-int}\|_q = \|F_r\|_p. \end{aligned}$$

Por hipótesis, entonces, $\{\hat{F}_r(n)\}_{r\in[0,1)}$ es un conjunto acotado, por lo que para cada $n \in \mathbb{Z}$ fija existe una sucesión $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (que en general, depende de n) tal que:

$$\lim_{r_k\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} F_{r_k}(t)e^{-int}dt$$

existe. Usando el método diagonal de Cantor se puede suponer que $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ funciona para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por linealidad de la integral, $\lim_{r_k\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} F_{r_k}(t)h(e^{it})dt$ existe para todo h polinomio trigonométrico con coeficientes en $\mathbb{C}$. Como dichos polinomios trigonométricos son $\|\ \|_q$-densos en $\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ obtenemos:

$$\lim_{r_k\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} F_{r_k}(t)g(e^{it})dt$$

existe para toda $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Por el lema anterior (para $X = \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $X^* = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ y $F_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} F_{r_k}(t)$ $g(e^{it})dt$), existe una función $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\subset])$ a la cual (F_{r_k}) converge débilmente. Afirmamos que F es la integral de Poisson de f. Sea $\rho \in [0,1)$ arbitrario, entonces:

$$\begin{aligned}
F(re^{i\theta}) &= \lim_{r_k\to 1} F(r_k\rho e^{i\theta}) \\
&= \lim_{r_k\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} F(r_k e^{it})P(\rho,\theta-t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)P(\rho,\theta-t)dt.
\end{aligned}$$

∎

4.15. *Observación.*

Este resultado se puede extender a funciones F analíticas en vez de armónicas, cambiando h^p por H^p y $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ por $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$. También es cierta la versión para $p = 1$ (véase Duren). Además, sabiendo que la función f induce a F convolucionando con el núcleo de Poisson, se deduce inmediatamente que $f(\theta)$ es el límite puntual de $F_r(\theta)$ cuando $r \to 1^-$, entre otras cosas más ya conocidas y que enunciamos juntas en el siguiente teorema, que ya no demostramos.

4.16. **TEOREMA.**

Sean $1 \leq p < \infty$, $F \in H^p$. Entonces c.d. $\theta \in [-\pi, \pi]$ existe

$$\lim_{r \to 1^-} F(re^{i\theta}) =: f(\theta).$$

Además $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$, $\|f\|_p^p = H^p(F)$, $\|F_r - f\|_p \to 0$ $(r \to 1^-)$ y si $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, entonces

$$c_0 = a_0(f)/2, \ c_n = a_n(f) - ib_n(f) \ y \ a_n(f) + ib_n(f) = 0.$$

Más aún,

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(t) P(r, \theta - t) dt.$$

∎

El siguiente resultado da condiciones necesarias y suficientes para que tanto una serie trigonométrica como su conjugada sean series de Fourier.

4.17. **TEOREMA.**
Sean

$$S(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sen(nx),$$
$$\tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n cos(nx) + a_n sen(nx)$$

series trigonométricas con $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. *Entonces ambas son series de Fourier si y sólo si la función* $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

donde $c_0 = a_0/2, c_n = a_n - ib_n$, *pertenece a la clase* H^1.

Demostración.
Necesidad: Supongamos que $S = S(g), \tilde{S} = S(h)$ con $g, h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Entonces $\frac{g+ih}{2} =: f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$, y

$$a_0(f) = \frac{a_0(g) + ia_0(h)}{2} = a_0$$
$$a_n(f) = \frac{a_n(g) + ia_n(h)}{2} = \frac{a_n - ib_n}{2}$$
$$b_n(f) = \frac{b_n(g) + ib_n(h)}{2} = \frac{b_n + ia_n}{2},$$

por lo que

$$a_n(f) - ib_n(f) = \frac{(a_n - ib_n) - i(b_n + ia_n)}{2} = a_n - ib_n$$
$$a_n(f) + ib_n(f) = \frac{(a_n - ib_n) + i(b_n + ia_n)}{2} = 0.$$

Así, la función analítica en $\mathbb{D}$ inducida por f (convolucionando con el núcleo de Poisson) es justamente la función F del enunciado, que está en H^1 ya que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$.

Suficiencia: Supongamos que $F \in H^1$. Por el teorema 4.16. existe c.d. el límite radial f de F, y $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$. También del teorema anterior sabemos que:

$$c_0 = a_0(f)/2, c_n = a_n(f) - ib_n(f), a_n(f) + ib_n(f) = 0,$$

por lo que:

$$a_n(f) = c_n/2, \qquad b_n(f) = -c_n/2i.$$

Sean $g, h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ tales que $f = \frac{g+ih}{2}$. Demostraremos que $S(g) = S$, $S(h) = \tilde{S}$. Como g, h son funciones reales, $a_0(g), a_n(g), b_n(g)$ y $a_0(h), a_n(h), b_n(h)$ son números reales para toda $n \in \mathbb{N}$, y tenemos que:

$$\begin{aligned} a_0 = 2c_0 = a_0(f) &= \frac{a_0(g) + ia_0(h)}{2} \\ \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{c_n}{2} = a_n(f) &= \frac{a_n(g) + ia_n(h)}{2} \\ \frac{b_n + ia_n}{2} = \frac{-c_n}{2i} = b_n(f) &= \frac{b_n(g) + ib_n(h)}{2}, \end{aligned}$$

por lo que $a_0(g) = 2a_0$, $a_n(g) = a_n$, $b_n(g) = b_n$ y $S(g) = S$, y análogamente $a_0(h) = 0$, $a_n(h) = -b_n$, $b_n(h) = a_n$ con lo que $S(h) = \tilde{S}$. ∎

4.18. **TEOREMA.** (Hardy)
Sea $F \in H^1$, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. *Entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|}{n+1} \leq \pi H^1(F).$$

Demostración.

La función

$$log(\frac{1}{1-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

es analítica en $\mathbb{D}$, y como F también lo es, entonces por el teorema de Cauchy, para toda $r \in (0,1)$

$$\int_{|z|=r} F(z) log(\frac{1}{1-z}) dz = 0.$$

Así pues:

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|=r} F(z) Im(log(\frac{1}{1-z}))dz \\
&= \frac{\int_{|z|=r} F(z) log(\frac{1}{1-z})dz - \int_{|z|=r} F(z)\overline{log(\frac{1}{1-z})}dz}{2i} \\
&= \frac{-1}{2i} \int_{|z|=r} F(z) \overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right)} dz \\
&= \frac{-1}{2i} \int_{[-\pi,\pi]} F(re^{i\theta}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{-in\theta}}{n}\right) ire^{i\theta} d\theta.
\end{aligned}$$

Dada $r \in (0,1)$ fija, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(re^{i\theta}) r^{n+1} e^{i\theta(-n+1)}}{n}$ converge uniformemente en θ, por lo que integrando término a término obtenemos:

$$\int_{|z|=r} F(z)Im(log(\frac{1}{1-z}))dz = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}\pi \hat{F}_r(n-1)}{n},$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{F}_r(n-1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} F(re^{i\theta})e^{-i\theta(n-1)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\theta}\right) e^{-i\theta(n-1)}d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k c_k}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{i\theta(k-n+1)}d\theta \\
&= r^{n-1}c_{n-1}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|=r} F(z)Im(log(\frac{1}{1-z}))dz \\
&= -\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}c_{n-1}}{n} = -\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2(n+1)}c_n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Pero $Re(1-z) > 0 \ \forall \ z \in \mathbb{D}$, por lo que

$$|Im(log(\frac{1}{1-z}))| = |arg(\frac{1}{1-z})| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2(n+1)}c_n}{n+1}\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\left|\int_{|z|=r} F(z)Im(log(\frac{1}{1-z}))dz\right| \\
&\leq \frac{\pi}{2\pi}\int_{|z|=r}|F(z)|dz \leq \pi H^1(F) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Caso 1: $c_n \in \mathbb{R}$ y $c_n \geq 0 \; \forall \; n = 0, 1, 2, \ldots$ Por (1),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2(n+1)} c_n}{n+1} \leq \pi H^1(F),$$

y haciendo tender r a 1 tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \leq \pi H^1(F) < +\infty.$$

Caso 2: $c_n \in \mathbb{C}$. Podemos suponer $F \not\equiv 0$, y por el teorema 4.7. F se puede escribir como $F = BG$ con B el producto de Blaschke de F, $G \in H^1$, $G(z) \neq 0 \; \forall \; z \in \mathbb{D}$ y $H^1(G) = H^1(F)$. Sea g el límite radial de G. Por el teorema 4.16. $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ y $\|g\|_1 = H^1(G)$, y claramente $|g|^{1/2} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$.
Como G no se anula en $\mathbb{D}$ hay una rama analítica de $log\ G$, por lo que si definimos

$$G_1 = G^{1/2}, \qquad G_2 = B(G)^{1/2},$$

entonces tenemos que $G_1, G_2 \in H^2$, y $F = G_1 G_2$. Además, como $|B(e^{i\theta})| = 1$ c.d. $\theta \in [-\pi, \pi]$, se tiene para los límites radiales (denotados por las respectivas letras minúsculas) que

$$|g_1(\theta)| = |g(\theta)|^{1/2} = |g_2(\theta)| \;\text{ c.d. } \theta \in [-\pi, \pi],$$

por lo que

$$H^2(G_1) = \|g_1\|_2 = \||g|^{1/2}\|_2$$

$$H^2(G_2) = \|g_2\|_2 = \||g|^{1/2}\|_2$$

Escribamos a G_1 y G_2 en series de potencias, digamos $G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_1c_n z^n$, $G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2c_n z^n$. Como $G_1, G_2 \in H^2$, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |{}_ic_n|^2 = H^2(G_i)$, $i = 1, 2$. Por otro lado, como $F = G_1 G_2$, vemos que

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} {}_1c_k\, {}_2c_{n-k} \text{ (producto de Cauchy de series).}$$

Sean $H_1, H_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ las funciones analíticas dadas por

$$H_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |{}_1c_n| z^n$$

$$H_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |{}_2c_n| z^n$$

.

Tenemos que $H_1, H_2 \in H^2$ y además

$$H^2(H_1) = \sum_{n=0}^{\infty} |{}_1c_n|^2 = H^2(G_1)$$

$$H^2(H_2) = \sum_{n=0}^{\infty} |{}_2c_n|^2 = H^2(G_2)$$

Sea $H_1 H_2 =: H : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$. Para toda $r \in [0, 1)$ se tiene por la desigualdad de Hölder que

$$\int_{[-\pi,\pi]} |H(re^{i\theta})| d\theta \leq \|(H_1)_r\|_2 \|(H_2)_r\|_2 \leq H^2(H_1) H^2(H_2),$$

por lo que $H \in H^1$ y $H^1(H) \leq H^2(H_1) H^2(H_2)$. Si la serie de potencias de H está dada por $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$, tenemos que

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} |{}_1c_k||{}_2c_{n-k}| \geq \left| \sum_{k=0}^{n} {}_1c_k {}_2c_{n-k} \right| = |c_n|.$$

Así, como a H se le puede aplicar el primer caso, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n+1} &\leq \pi H^1(H) \\
&\leq \pi H^2(H_1) H^2(H_2) \\
&= \pi H^2(G_1) H^2(G_2) \\
&= \pi \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \\
&= \pi \||g|^{1/2}\|_2 \||g|^{1/2}\|_2 \\
&= \pi \|g\|_1 = \pi H^1(G) = \pi H^1(F).
\end{aligned}$$

∎

4.19. *Observación.*

Como $\frac{1}{n} \leq \frac{2}{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, el teorema anterior afirma que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|}{n} \leq 2\pi H^1(F) < +\infty,$$

que es la forma como comúnmente se enuncia.

CAPITULO CINCO.
METODOS COMPLEJOS II.

En este capítulo continuamos el estudio de las series de potencias. Definimos el concepto de serie de potencias de variación acotada y demostramos el teorema de Hardy-Littlewood sobre la convergencia absoluta de sus coeficientes. A partir de esto, deducimos la convergencia absoluta de la serie de Fourier de cualquier función continua, periódica, de variación acotada y cuya función conjugada tenga idénticas propiedades. Usamos la unicidad de la representación integral de Poisson de medidas de Borel complejas finitas para obtener el teorema de los hermanos Riesz, que garantiza la continuidad absoluta de una tal medida de Borel que además tenga coeficientes de Fourier iguales a cero en todos los órdenes negativos. Finalizamos el capítulo con un ejemplo de Lusin de una función absolutamente continua F tal que la serie de Fourier de F' converge c.d., pero $\tilde{F}$ es esencialmente no acotada en todo subintervalo contenido en $[-\pi, \pi]$.

5.1. DEFINICION.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias. Decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es de **variación acotada** si existe una función $\Phi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, periódica, de variación acotada, tal que $\tilde{\Phi}(x)$ existe para toda $x \in [-\pi, \pi]$, $\tilde{\Phi}$ es también continua, periódica, de variación acotada y tales que

$$S(\Phi)(\theta) + iS(\tilde{\Phi})(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

5.2. *Observación.*

Algunos autores definen a una serie de potencias de variación acotada como aquella cuyas partes real e imaginaria (para $|z| = 1$) son series de Fourier de funciones de variación acotada. En este caso, si $\Phi, \Psi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de variación acotada tales que

$$S(\Phi)(\theta) + iS(\Psi)(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

haciendo $c_n = \alpha_n - i\beta_n$, tomando partes reales vemos que

$$S(\Phi)(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n cos(n\theta) - \beta_n sen(n\theta)$$

y tomando partes imaginarias que

$$S(\Psi)(\theta) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n cos(n\theta) + \alpha_n sen(n\theta).$$

Si pedimos que $c_0 \in \mathbb{R}$, tenemos que $S(\Psi) = \tilde{S}(\Phi)$, y como $\Phi \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, existe $\tilde{\Phi}$ y $\tilde{S}(\Phi) = S(\tilde{\Phi})$, y como los coeficientes de Fourier caracterizan a las funciones en $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, tenemos que $\Psi = \tilde{\Phi}$ c.d.

Además, Φ no puede tener discontinuidades del primer tipo, pues si x_0 fuera una de ellas, por la proposición 1.13. $S_n(\Psi)(x_0) = \tilde{S}_n(\Phi)(x_0) \to -\infty (n \to \infty)$, pero Ψ es de variación acotada, y por el criterio de Dirichlet-Jordan $S_n(\Psi)(x_0) \to \frac{1}{2}(\Psi(x_0^+) + \Psi(x_0^-))$, contradiciendo la divergencia. Análogamente se prueba que Ψ no puede tener discontinuidades del primer tipo (pues $\tilde{\Psi} = \Phi - a_0(\Phi))$, y ya que tanto Φ como Ψ son funciones de variación acotada, sólo pueden tener una cantidad numerable de discontinuidades removibles. (Obsérvese que también se tiene continuidad en $-\pi$ y π)

Así, redefiniéndolas en los puntos de discontinuidades removibles, obtenemos dos funciones Φ_1, Ψ_1 de variación acotada en todo $[-\pi, \pi]$ (de hecho variaciones menores que las variaciones de Φ y Ψ respectivamente), continuas en todo punto de $[-\pi, \pi]$, periódicas y tales que $\Phi_1 = \Phi$ c.d., $\Psi_1 = \Psi = \tilde{\Phi}_1$ c.d. Es decir, excepto por un "casi dondequiera", se tiene la definición que dimos al principio y que será la que usaremos.

5.3. LEMA.

Sea $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *una serie de potencias de variación acotada. Entonces*

$$G(z) = zF'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n$$

pertenece a la clase H^1. *Más aún, si* Φ *es la función de variación acotada asociada a* $F(z)$, $H^1(G)$ *es menor o igual que la suma de las variaciones totales en* $[0, 2\pi]$ *de* Φ *y* $\tilde{\Phi}$.

Demostración.

Sea $\Phi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada, periódica y continua tal que $\tilde{\Phi}$ también es de variación acotada, periódica y continua, y tales que

$$S(\Phi)(\theta) + iS(\tilde{\Phi})(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Sean $\varphi, \psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ las **integrales de Poisson-Stieljes generadas por** Φ y $\tilde{\Phi}$ respectivamente, es decir,

$$\varphi(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} P(r, \theta - t) d\Phi(t)$$
$$\psi(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} P(r, \theta - t) d\tilde{\Phi}(t)$$

Notemos que están bien definidas, pues el núcleo de Poisson en cada nivel P_r es una función continua (de hecho, infinitamente diferenciable) en la segunda variable. Si denotamos por $V(t)$ la variación total de Φ en $[0, t]$ y por $W(t)$ la de $\tilde{\Phi}$, tenemos que para toda $x \in [-\pi, \pi]$

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} P(r, \theta - t) dV(t)$$
$$|\psi(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} P(r, \theta - t) dW(t)$$

Integrando con respecto a θ y usando el teorema de Fubini obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi]} |\varphi(re^{i\theta})| d\theta &\leq \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,2\pi]} P(r, \theta - t) dV(t) d\theta \\
&= \int_{[0,2\pi]} \left(\frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} P(r, \theta - t) d\theta \right) dV(t) \\
&= \int_{[0,2\pi]} dV(t) = V(2\pi),
\end{aligned}$$

y para ψ nos queda

$$\int_{[0,2\pi]} |\psi(re^{i\theta})|d\theta \leq W(2\pi).$$

Por otra parte, para $r \in [0,1)$, el núcleo de Poisson P_r es una función infinitamente diferenciable con respecto a su segunda variable, y como Φ es periódica y de variación acotada en $[0,2\pi]$, la siguiente integral de Riemann-Stieljes se puede escribir, usando integración por partes, como:

$$\begin{aligned}
\pi\varphi(re^{i\theta}) &= \int_{[0,2\pi]} P(r,\theta-t)d\Phi(t) \\
&= P_r\Phi\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{[0,2\pi]} \Phi(t)dP_r(\theta-t) \\
&= 0 - \int_{[0,2\pi]} \Phi(t)\frac{\partial}{\partial t}P_r(\theta-t)dt \\
&= \int_{[0,2\pi]} \Phi(t)\left(\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}ni\right)dt \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} inr^{|n|}e^{in\theta}\int_{[0,2\pi]} \Phi(t)e^{-int}dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} inr^{n}e^{in\theta}(a_n(\Phi)+ib_n(\Phi)) \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} inr^{n}e^{-in\theta}(a_n(\Phi)-ib_n(\Phi)).
\end{aligned}$$

Para ψ sólo hay que cambiar Φ por $\tilde{\Phi}$:

$$
\begin{aligned}
\psi(re^{i\theta}) &= \sum_{n=1}^{\infty} inr^n e^{in\theta}(a_n(\tilde{\Phi}) + ib_n(\tilde{\Phi})) \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} inr^n e^{-in\theta}(a_n(\tilde{\Phi}) - ib_n(\tilde{\Phi})) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} inr^n e^{in\theta}(-b_n(\Phi) + ia_n(\Phi)) \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} inr^n e^{-in\theta}(-b_n(\Phi) - ia_n(\Phi)).
\end{aligned}
$$

Así, vemos que

$$
\begin{aligned}
&\psi(re^{i\theta}) + i\varphi(re^{i\theta}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nr^n e^{in\theta}(-ib_n(\Phi) - a_n(\Phi) - a_n(\Phi) - ib_n(\Phi)) \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} inr^n e^{-in\theta}(-b_n(\Phi) - ia_n(\Phi) + ia_n(\Phi) + b_n(\Phi)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n = G(z).
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que para toda $r \in [0,1)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi]} |G(re^{i\theta})|d\theta &\leq \int_{[0,2\pi]} (|\varphi(re^{i\theta})| + |\psi(re^{i\theta})|)d\theta \\
&\leq V(2\pi) + W(2\pi) < +\infty,
\end{aligned}
$$

por lo que $G \in H^1$ y de hecho $H^1(G)$ es menor o igual que la suma de las variaciones totales en $[0,2\pi]$ de Φ y $\tilde{\Phi}$. ∎

Una importante consecuencia del lema anterior es el siguiente

5.4. **TEOREMA.** (Hardy y Littlewood, 1926)
Sea $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias de variación acotada. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \pi H^1(zF'(z))$$

Demostración.
Por el lema anterior, $zF'(z) \in H^1$, y por la observación 4.19. hecha al teorema de Hardy, tenemos que

$$\pi H^1(zF'(z)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|nc_n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

∎

Obtenemos como fácil dividendo un criterio de convergencia absoluta de series de Fourier.

5.5. **COROLARIO.**
Sea $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ periódica, continua, de variación acotada y tal que $\tilde{f}$ lo es también. Entonces las series de Fourier de f y $\tilde{f}$ convergen absolutamente, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| + |b_n(f)| < +\infty.$$

Demostración.
Sean $c_n = a_n(f) - ib_n(f)$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

es de variación acotada. Por el teorema de Hardy- Littlewood,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$$

y como $|a_n(f)| + |b_n(f)| \leq 2|c_n|$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| + |b_n(f)| < +\infty.$$

∎

Probaremos un último resultado concerniente a series de potencias de variación acotada, pero para demostrarlo necesitaremos algunos resultados preliminares. El siguiente lema es bien conocido, y lo enunciamos sin demostración.

5.6. LEMA.
Sea $\nu : \mathbb{B}([-\pi, \pi]) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una medida de Borel compleja finita. Supongamos que*

$$\int_{[-\pi,\pi]} g(t)d\nu(t) = 0$$

para toda $g : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Entonces* $\nu \equiv 0$.

Como consecuencia de este lema se demuestra la siguiente

5.7. PROPOSICION. (Unicidad de la representación integral de Poisson)
Sean μ, σ medidas complejas finitas definidas en los borelianos de $[-\pi,\pi]$. Supongamos que

$$\int_{[-\pi,\pi]} P(r,\theta - t)d\mu(t) = \int_{[-\pi,\pi]} P(r,\theta - t)d\sigma(t)$$

para todas $r \in [0,1)$, $\theta \in [-\pi,\pi]$. Entonces $\mu \equiv \sigma$.

Demostración.
Sea $\nu = \mu - \sigma$. Tenemos inmediatamente que

$$\int_{[-\pi,\pi]} P(r,\theta - t)d\nu(t) = 0 \quad \forall\, r \in [0,1), \theta \in [-\pi,\pi].$$

Por el lema anterior, basta probar que

$$\int_{[-\pi,\pi]} g(t)d\nu(t) = 0$$

para toda función continua g. Sea pues $g : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. g induce una función $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$G(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} g(t)P(r,\theta - t)dt.$$

Por el teorema de Abel-Fejér sabemos que $G_r \to g$ uniformemente en θ cuando $r \to 1^-$. Así, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]} G_r(\theta)d\nu(\theta) \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} g(t)P(r,\theta-t)dt\right) d\nu(\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} g(t)\left(\int_{[-\pi,\pi]} P(r,\theta-t)d\nu(\theta)\right) dt = 0,
\end{aligned}
$$

por lo que $\int_{[-\pi,\pi]} g(\theta)d\nu(\theta) = 0$ y por tanto $\nu \equiv 0$. ∎

Ahora ya estamos en condiciones de probar el último resultado concerniente a series de potencias de variación acotada, el cuál es un famoso teorema debido a los hermanos Riesz y que relaciona dos condiciones sobre una medida compleja que en apariencia nada tienen que ver entre sí.

5.8. **TEOREMA.** (F. y M. Riesz, 1916)
Sea $d\mu$ una medida de Borel compleja finita en $\partial\mathbb{D}$ tal que

$$\hat{\mu}(n) := \int_{\partial\mathbb{D}} e^{-int}d\mu(t) = 0$$

para $n = -1, -2, \ldots$ Entonces μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Demostración.
Sea f la función inducida por la medida μ, es decir,

$$f(re^{i\theta}) = \int_{\partial\mathbb{D}} P(r,\theta-t)d\mu(e^{it}).$$

Tenemos que para $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}
f(re^{i\theta}) &= \int_{\partial\mathbb{D}} P(r, \theta - t) d\mu(e^{it}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} e^{-int} \right) d\mu(e^{it}) \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{r^{|n|} e^{in\theta}}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} e^{-int} d\mu(e^{it}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} e^{-int} d\mu(e^{it}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n,
\end{aligned}$$

por lo que f es **analítica** en $\mathbb{D}$ (pues $|\hat{\mu}(n)| \leq |\mu|(2\pi)$ $\forall$ n y por lo tanto el radio de convergencia es mayor o igual que 1). Tenemos también que

$$|f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} P(r, \theta - t) d|\mu|(e^{it}),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\|f_r\|_1 &= \int_{[-\pi,\pi]} |f_r(re^{i\theta})| dt \\
&\leq \int_{[-\pi,\pi]} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} P(r, \theta - t) d|\mu|(e^{it}) dt \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} \left(\frac{1}{2\pi} P(r, \theta - t) dt \right) d|\mu|(e^{it}) \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} d|\mu|(e^{it}) = |\mu|(\partial\mathbb{D}) < +\infty,
\end{aligned}$$

por lo que f pertenece a la clase H^1. Entonces c.d. existe el límite radial $f^* \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, y

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} P(r, \theta - t) f^*(t) dt$$

Así, las medidas $\mu(t)$ y $f^*(t)dt$ inducen a la misma función f, y por la proposición 5.7. $\mu(t) = f^*(t)dt$, por lo que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. ∎

5.9. *Observación.*

También se ha probado que si $\hat{\mu}(n) = 0 \ \forall \ n = -1, -2, \ldots$, entonces

$$\frac{d\mu}{dt}(\theta) = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} P(r, \theta - t) d\mu \quad \text{c.d.}$$

5.10. COROLARIO.

Sea $\Phi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ periódica, continua, de variación acotada y tal que $\tilde{\Phi}$ tiene las mismas propiedades. Entonces Φ y $\tilde{\Phi}$ son absolutamente continuas.

Demostración.

Sea $\mu(x) = \Phi(x) - i\Phi(x)$. Entonces $d\mu$ es una medida compleja finita y tal que

$$\begin{aligned}&\int_{[-\pi,\pi]} e^{-int} d\mu(t)\\ &= e^{-int}\mu\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{[-\pi,\pi]} \mu(t) de^{-int}\\ &= 0 + in(\hat{\Phi}(n) + i\hat{\tilde{\Phi}}(n)) = 0\end{aligned}$$

para $n = -1, -2, \ldots$ Aplicando el teorema de F. y M. Riesz, vemos que μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, por lo que también lo son sus partes real e imaginaria, que son Φ y $-\tilde{\Phi}$ respectivamente. ∎

5.11. **PROPOSICION.** (Fórmula de Lusin)
Sea $F : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ periódica y absolutamente continua, y sea $f = F'$. Entonces c.d. $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\tilde{F}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x+t)\big|log|sen(t/2)|\big|dt,$$

donde la integral está considerada en el sentido de Lebesgue.

Demostración.
Por el trabajo previo, $\tilde{F}(x)$ está definida c.d. y se tiene:

$$\tilde{F}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} -\frac{1}{\pi} \int_{[\epsilon,\pi]} \frac{F(x+t) - F(x-t)}{tan(t/2)} dt.$$

Como F es absolutamente continua, integrando por partes obtenemos:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]}\frac{F(x+t)-F(x-t)}{tan(t/2)}dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)\right)log(sen(\varepsilon/2))$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{[\varepsilon,\pi]}(f(x+t)+f(x-t))\,log(sen(t/2))dt.$$

Como F' existe c.d., tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

existe c.d. $x\in[-\pi,\pi]$. Por otro lado, sabemos que

$$sen(\varepsilon/2)log(sen(\varepsilon/2))\to 0\ (\varepsilon\to 0)$$

y $sen(\varepsilon)\approx\varepsilon$, por lo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon))\,log(sen(\varepsilon/2))=0$$

c.d. $x\in[-\pi,\pi]$.
En cuanto a la integral

$$\int_{[\varepsilon,\pi]}(f(x+t)+f(x-t))log(sen(t/2))dt$$

la podemos descomponer en dos integrales, y haciendo un cambio de variable obtener

$$\int_{\varepsilon<|t|}f(x+t)log|sen(t/2)|dt.$$

Tenemos entonces que c.d.

$$\tilde{F}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|t|}f(x+t)log|sen(t/2)|dt.$$

Es un resultado de teoría de la medida que dadas $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, c.d. $x \in [-\pi, \pi]$ la función $h_x : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_x(t) = f(x+t)g(t)$ está en $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. En nuestro caso particular, $f(t)$ y $log(sen(t/2)) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ ($|log(sen(t/2))| \leq -log(t/\pi)$, y una primitiva para $log(at)$ es $t(log(at) - \frac{1}{a})$). Ya que además $log|sen(t/2)| \leq 0$, tenemos que c.d. $x \in [-\pi, \pi]$

$$\tilde{F}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x+t)\big|log|sen(t/2)|\big|dt$$

existe como integral de Lebesgue. ∎

Usando la fórmula de Lusin es posible construir una función F periódica, absolutamente continua y tal que F' tiene serie de Fourier convergente c.d. pero $\tilde{F}$ es esencialmente no acotada en **todo** subintervalo de $[-\pi, \pi]$. Para facilitar la construcción de tal función necesitaremos una función auxiliar, cuya existencia está garantizada en el siguiente

5.12. **LEMA.**

Existe una función $\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(a) Para toda $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$\{\frac{|\varphi(x+h) - \varphi(x)|}{|h|} \mid x, x+h \notin (-\varepsilon, \varepsilon) mod\ 2\pi\}$$

está acotado superiormente.

(b) $\varphi(x) \geq 0\ \forall\ x \in [0, 2\pi]$.

(c) $\varphi \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,2\pi])$.
(d) $\int_{[0,2\pi]} \varphi(x)\big|log|sen(t/2)|\big|dx = +\infty$.

Demostración.
Tomemos como φ a la siguiente función, definida en $(0,2\pi)$ como:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{cos(t/2)}{sen(|t|/2)(-log(sen(|t|/2))^{3/2}} & \text{si } 0 < |t| < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como φ es una función par, basta notar que en $(0,\pi/2)$ φ tiene derivada continua. Para los requisitos sobre la integrabilidad de φ, notamos que una primitiva para φ en $(0,\pi/2)$ es

$$\Phi(t) = 4(-log(sen(t/2)))^{-1/2},$$

y que para $\varphi(t)(-log(sen(t/2)))$ es

$$\Psi(t) = -4(-log(sen(t/2)))^{1/2}.$$

∎

5.13. **TEOREMA.** (Lusin)
Existe una función absolutamente continua $F(x)$ tal que la serie de Fourier de su derivada $f(x)$ converge c.d., pero la función $\tilde{F}(x)$ conjugada de $F(x)$ es esencialmente no acotada en todo subintervalo $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$.

Demostración.
Sea (r_n) un subconjunto denso de $[-\pi,\pi]$, y sea $\varphi : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ como en el lema anterior. Sea (ε_n) una sucesión de reales

estrictamente positivos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$. Para cada ε_n, sea M_n una cota superior del conjunto

$$\{\frac{|\varphi(x+h)-\varphi(x)|}{|h|} \mid x, x+h \notin (-\varepsilon_n, \varepsilon_n) mod\ 2\pi\}.$$

Finalmente, sea (A_n) una sucesión de números reales tales que

$$A_n < \frac{\varepsilon_n}{M_n}$$

y que

$$A_n \int_{[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]} \varphi(x)dx \leq \varepsilon_n^2.$$

Definamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi(x - r_n). \tag{1}$$

f está bien definida c.d. y es una función en $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ por el teorema de la convergencia monótona (la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{[-\pi,\pi]} \varphi(x - r_n)dx < +\infty$ y $\varphi \geq 0$). Demostremos que la función F definida como la integral de f cumple lo requerido. Primero demostremos que c.d. $x \in [-\pi, \pi]$, existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que

$$\int_{[0,\delta]} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} dt < +\infty, \tag{2}$$

y por el criterio de Dini se tendrá que $S(f)(x)$ converge. Sea E el conjunto que consta de aquellas x para las cuales (1) no converge, de todas las r_n y, finalmente, de las x que pertenezcan a una infinidad de intervalos $(r_n - 2\varepsilon_n, r_n + 2\varepsilon_n)$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$, el conjunto E tiene medida cero. Tomemos x cualquier punto que no esté en E y verifiquemos que x satisface la condición

(2). Como $x \notin E$, en particular x pertenece sólo a un número finito de intervalos $(r_n - 2\varepsilon_n, r_n + 2\varepsilon_n)$; sea N el mayor natural para el cual $x \in (r_N - 2\varepsilon_N, r_N + 2\varepsilon_N)$. Más aún, ya que $x \notin \{r_n\}_{n\in N}$, existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que

$$\int_{[0,\delta]} \frac{|\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)|}{t} dt < +\infty \; \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

(esto último por la proposición (a) de la función φ). Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\delta]} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} dt \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} A_n \int_{[0,\delta]} \frac{|\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)|}{t} dt \\
&+ \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \int_{[0,\delta]} \frac{|\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)|}{t} dt.
\end{aligned}$$

Por lo antes notado, la primera suma es finita. Examinemos la segunda. Notemos que para $n > N$, el punto x no está en el intervalo $(r_n - 2\varepsilon_n, r_n + 2\varepsilon_n)$, es decir, haciendo $\alpha_n = x - r_n$, vemos que $\alpha_n \notin (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$. Si denotamos por E_n el conjunto de las $t \in (0, \delta)$ para las cuales $\alpha_n + t \notin (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$, debido a la elección de M_n y A_n tenemos que:

$$A_n \int_{E_n} \frac{|\varphi(\alpha_n + t) - \varphi(\alpha_n)|}{t} dt \leq A_n M_n \delta < \varepsilon_n \delta.$$

Si denotamos como $D_n = [0, \delta] \backslash E_n$, entonces para $t \in D_n$ se tiene $(\alpha_n + t) \in (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$, y como $\alpha_n \notin (-2\varepsilon_n, 2\varepsilon_n)$, debemos tener que $|t| \geq \varepsilon_n$. Así,

$$
\begin{aligned}
&A_n \int_{D_n} \frac{|\varphi(\alpha_n + t) - \varphi(\alpha_n)|}{t} dt \\
&\leq \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{D_n} \varphi(\alpha_n + t)dt + \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{D_n} \varphi(\alpha_n)dt \\
&= I_1(n) + I_2(n).
\end{aligned}
$$

Pero $\alpha_n + t \in (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$ si y sólo si $-\varepsilon_n - \alpha_n < t < -\alpha_n + \varepsilon_n$, por lo que para $I_1(n)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
I_1(n) &\leq \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{[-\varepsilon_n - \alpha_n, -\alpha + \varepsilon_n]} \varphi(\alpha_n + t)dt \\
&= \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]} \varphi(u)du \leq \varepsilon_n.
\end{aligned}
$$

Para I_2 notamos que:

$$
I_2(n) = \frac{A_n}{\varepsilon_n} \varphi(\alpha_n) \mu(D_n) \leq \frac{A_n}{\varepsilon_n} \delta \varphi(x - r_n).
$$

Juntando lo anterior, vemos que:

$$
\sum_{n=N+1}^{\infty} I_1(n) + I_2(n) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n + \frac{A_n}{\varepsilon_n} \delta \varphi(x - r_n) < +\infty,
$$

esto último porque $x \notin E$ y por tanto la serie (1) convergía. Hemos pues demostrado que la condición del criterio de Dini se satisface c.d. y por lo tanto $S(f)(x)$ converge c.d.

Sólo nos resta demostrar que $\tilde{F}$ es esencialmente no acotada en $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Por la fórmula de Lusin tenemos que:

$$
-\tilde{F}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(x + t) \big| log|sen(t/2)| \big| dt,
$$

por lo que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$-\tilde{F}(x) \geq \frac{A_n}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \varphi(x - r_n + t)\big|\log|sen(t/2)|\big|dt.$$

Pero por la condición (d) para la función φ, se tiene que dada cualquier cota fija, para x en una pequeña vecindad de r_n $\tilde{F}(x)$ rebasa dicha cota, y como el conjunto $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en el intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces $\tilde{F}$ es esencialmente no acotada en cualquier intervalo $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, que era lo que faltaba demostrar. ∎

CAPITULO SEIS.
FUNCIONES CONJUGADAS Y ESPACIOS $\mathcal{L}^p$.

En este capítulo demostramos que la conjugación es una transformación continua de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ en sí mismo para $p > 1$ (teorema de M. Riesz), y que manda a la clase $\mathcal{L}^1 log^+ \mathcal{L}^1$ en $\mathcal{L}^1$ (teorema de Zygmund). También analizamos el comportamiento de la conjugación con respecto a convoluciones, y mostramos un recíproco parcial del teorema de Zygmund. Usamos el concepto de B-integrabilidad para demostrar que si $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$, entonces $\tilde{S}(f) = S(\tilde{f})$, y basándonos en un resultado de análisis de Fourier clásico, exhibimos una serie de Fourier cuya serie conjugada no es de Fourier, obteniendo de paso una función integrable cuya conjugada no es integrable.

Estudiaremos el comportamiento de la operación conjugación en los espacios $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Para el caso $1 < p \leq 2$ necesitaremos el siguiente

6.1. **LEMA.**
Sea $1 < p \leq 2$. Entonces existen constantes positivas α, β que dependen sólo de p, tales que para toda $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$|sen(\phi)|^p \leq \beta cos^p(\phi) - \alpha cos(p\phi).$$

Demostración.

Basta considerar $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pues ambos miembros son funciones pares. Como $1 < p \leq 2$, tenemos $\frac{\pi}{2} < p\frac{\pi}{2} \leq \pi$, por lo que $cos(p\frac{\pi}{2}) < 0$. Por la continuidad del coseno, existen $\delta > 0$ y $A \in \mathbb{R}$ tales que

$$cos(p\phi) \leq A < 0 \quad \forall\, \phi \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}].$$

Tomando $\alpha = -1/A > 0$ tenemos que

$$-\alpha cos(p\phi) \geq 1 \quad \forall\, \phi \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}],$$

por lo que la desigualdad deseada se tiene para $\frac{\pi}{2} - \delta \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ independientemente de la constante positiva β que se elija (pues $cos(\phi) \geq 0$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). Ahora bien, para toda $\phi \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$, $cos(\phi) > 0$, por lo que existe K constante tal que

$$cos^p(\phi) \geq K > 0 \quad \forall\, \phi \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta].$$

Sea $\beta = \frac{1+\alpha}{K}$. Entonces, para $\phi \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$,

$$\beta cos^p(\phi) \geq 1 + \alpha \geq 1 + \alpha cos(p\phi),$$

por lo que para toda $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se tiene

$$|sen(\phi)|^p \leq 1 \leq \beta cos^p(\phi) - \alpha cos(p\phi).$$

∎

La siguiente proposición muestra una curiosa "antisimetría" de la conjugación con respecto al producto interior usual en el espacio $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, y nos servirá más adelante.

6.2. PROPOSICION.

Sean $f,g\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$. *Entonces*

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\overline{\tilde{g}(x)}dx = -\int_{[-\pi,\pi]}\tilde{f}(x)\overline{g(x)}dx.$$

Demostración.

Usando la igualdad de Parseval (en la versión para coeficientes de Fourier, no la de normas) para el producto interior en $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ y el sistema ortonormal $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (es decir, con coeficientes de Fourier complejos) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\overline{\tilde{g}(x)}dx &= < f,\tilde{g} > = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{\tilde{g}}(n)}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{(-i(sgn\ n))\hat{g}(n)}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)i(sgn\ n)\overline{\hat{g}(n)}\\
&= -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{\tilde{f}}(n)\overline{\hat{g}(n)} = -< \tilde{f},g >\\
&= -\int_{[-\pi,\pi]}\tilde{f}(x)\overline{g(x)}dx.
\end{aligned}$$

∎

6.3. COROLARIO.

Si $f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, *entonces*

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\tilde{g}(x)dx = -\int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(x)g(x)dx.$$

∎

6.4. *Observación.*

Claramente no se puede tener en general la igualdad de funciones $\tilde{f}\overline{g} = -f\overline{\tilde{g}}$, por ejemplo si $g = f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ es tal que $f\tilde{f} \not\equiv 0$.

6.5. COROLARIO.

Sean $f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. *Entonces*

$$\tilde{f} * g = f * \tilde{g}.$$

Demostración.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ fija y sea $h_\theta(t) = g(\theta - t)$. Entonces $h_\theta \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ y $\tilde{h}_\theta(t) = -\tilde{g}(\theta - t)$, por lo que:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f} * g(\theta) &= \int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(t) g(\theta - t) dt \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(t) h_\theta(t) dt \\
&= -\int_{[-\pi,\pi]} f(t) \tilde{h}_\theta(t) dt \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} f(t) \tilde{g}(\theta - t) dt \\
&= f * \tilde{g}(\theta).
\end{aligned}
$$

∎

El resultado anterior es susceptible de ser extendido a $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, donde p y q son exponente conjugados.

6.6. **COROLARIO.**
Sean $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, donde p y q son exponente conjugados. Entonces

$$\tilde{f} * g = f * \tilde{g}.$$

Demostración.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer $1 < p < 2 < q$. Entonces $g \in \mathcal{L}^2$, y el resultado es válido para ella y cualquier función en $\mathcal{L}^2$. Aproximando a f por funciones en $\mathcal{L}^2$, y usando que tanto la convolución fijando una entrada como la conjugación

son continuas, obtenemos que el resultado se sigue del corolario 6.5. ∎

En el párrafo que sigue introduciremos algunas funciones y una importante igualdad que necesitaremos en los teoremas subsecuentes.

6.7. *Observación.*
Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $f \not\equiv 0$, $p > 0$. Entonces la función analítica

$$F(re^{i\theta}) = u(f,r,\theta) + iv(f,r,\theta)$$

tiene parte real estrictamente positiva (pues es la convolución de $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$ con el núcleo de Poisson), por lo que podemos escribir

$$F(z) = R(z)e^{i\Phi(z)},$$

donde $R, \Phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $R(z) > 0$, $|\Phi(z)| \leq \pi/2 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}$. Como F no se anula en $\mathbb{D}$, podemos definir $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$G(z) = F^p(z) = R^p(z)e^{ip\Phi(z)}$$

que es analítica en $\mathbb{D}$. Aplicando a G la fórmula integral de Cauchy para el círculo $|z| = r \in (0,1)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} F^p(0) = G(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{G(z)}{z}dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} R^p(re^{i\theta})e^{ip\Phi(re^{i\theta})}d\theta. \end{aligned}$$

Ya que $F(0) \in \mathbb{R}$, al tomar partes reales nos queda:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(\theta)d\theta\right)^p = (u(0))^p$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} R^p(re^{i\theta})cos(p\Phi(re^{i\theta}))d\theta \qquad (1)$$

6.8. **TEOREMA.** (M. Riesz, 1927)
Sea $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $1 < p < +\infty$. *Entonces* $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. *Más aún, existe una constante* A_p *que depende sólo de* p *tal que*

$$\|\tilde{f}\|_p \leq A_p\|f\|_p.$$

En términos de análisis funcional, la transformación lineal que a cada función le asigna su función conjugada va de $\mathcal{L}^p$ *a* $\mathcal{L}^p$ *para* $1 < p < \infty$, *y es continua con norma menor o igual que la constante* A_p.

Demostración.
Claramente el resultado es válido para $f \equiv 0$. Supongamos $f \not\equiv 0$.

Primera parte: $1 < p \leq 2$.

Primer caso: $f \geq 0$. Por el lema anterior, ya que $|\Phi(re^{i\theta})| \leq \pi/2$, existen constantes positivas α, β que dependen sólo de p tales que $\forall\ r \in (0,1)$, $\theta \in [-\pi,\pi]$:

$$|sen(p\Phi(re^{i\theta}))| \leq \beta|cos(\Phi(re^{i\theta}))|^p - \alpha cos(p\Phi(re^{i\theta})).$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $R^p(re^{i\theta})$ e integrando con respecto a θ tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]} R^p(re^{i\theta})|sen(\Phi(re^{i\theta}))|^p d\theta \\
&\leq \beta \int_{[-\pi,\pi]} R^p(re^{i\theta})|cos(\Phi(re^{i\theta}))|^p d\theta \\
&- \alpha \int_{[-\pi,\pi]} R^p(re^{i\theta}) cos(p\Phi(re^{i\theta}))d\theta.
\end{aligned}$$

Pero

$$u(f,r,\theta) + iv(f,r,\theta) = F(re^{i\theta}) = R(re^{i\theta})e^{i\Phi(re^{i\theta})}.$$

Por esta igualdad y por (1) de la observación anterior,

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]} |v(f,r,\theta)|^p d\theta \\
&\leq \beta \int_{[-\pi,\pi]} |u(f,r,\theta)|^p d\theta \\
&- 2\pi\alpha \left(\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x)dx \right)^p \\
&\leq \beta \int_{[-\pi,\pi]} |u(f,r,\theta)|^p d\theta,
\end{aligned}$$

esta última desigualdad pues $\alpha \geq 0$, $f \geq 0$. Sabemos de la Abel-Poisson sumabilidad conjugada que $v(f, r\theta) \to \tilde{f}(\theta)$ $(r \to 1^-)$ c.d. $\theta \in [-\pi, \pi]$, y por el lema de Fatou (para una sucesión $(r_n) \to 1^-$ si se quiere) tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(\theta)|^p d\theta &\leq \underline{\lim}_{r\to 1^-} \int_{[-\pi,\pi]} |v(f,r,\theta)|^p d\theta \\ &\leq \lim_{r\to 1^-} \beta \int_{[-\pi,\pi]} |u(f,r\theta)|^p d\theta \\ &= \beta \|f\|_p^p,\end{aligned}$$

por lo que $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ y $\|\tilde{f}\|_p \leq A'_p\|f\|_p$ para $A' = \beta^{1/p}$.

Segundo caso: el signo de f es variable. Sean f^+, f^- las usuales. Entonces $f^+, f^- \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, y además

$$f = f^+ - f^-, \qquad \tilde{f} = \widetilde{f^+} - \widetilde{f^-}.$$

Por el primer caso, tenemos que:

$$\|\widetilde{f^+}\|_p \leq A'\|f^+\|_p \leq A'\|f\|_p,$$

$$\|\widetilde{f^-}\|_p \leq A'\|f^-\|_p \leq A'\|f\|_p,$$

por lo que tomando $A = 2A'$ se tiene:

$$\|\tilde{f}\|_p \leq \|\widetilde{f^+}\|_p + \|\widetilde{f^-}\|_p \leq A\|f\|_p.$$

Segunda parte: $2 < p < +\infty$.

Sea $q \in (1,2)$ el exponente conjugado de p (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), y sea A_q la constante que ya probamos existe para el caso $\mathcal{L}^q$ (es decir, $\|\tilde{f}\|_q \leq A_q\|f\|_q \ \forall \ f \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$). Demostraremos que $A_p := A_q$ funciona para $\mathcal{L}^p$. Para esto, sea g cualquier polinomio trigonométrico con $\|g\|_q \leq 1$. Como $f \in \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^2$ se tiene $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$, y por la proposición 6.2. y la desigualdad de Hölder,

$$\left| \int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(x)g(x)dx \right| = \left| - \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\tilde{g}(x)dx \right|$$
$$\leq \|f\|_p \|\tilde{g}\|_q \|\|f\|_p A_q \|g\|_q \leq A_q \|f\|_p.$$

Como los polinomios trigonométricos son densos en $\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, tenemos que:

$$\|\tilde{f}\|_p = sup\left\{ \left| \int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(x)g(x)dx \right| : \ g \text{ es un polinomio}\right.$$
$$\left.\text{trigonométrico, } \|g\|_q \leq 1 \right\} \leq A_q \|f\|_p,$$

por lo que tomando $A_p = A_q$ se tiene la desigualdad deseada. ∎

La proposición anterior falla para el caso $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Sin embargo, se tiene el

6.9. **TEOREMA.**

Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Entonces $\tilde{f} \in \mathcal{L}^\mu_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ $\forall\, 0 < \mu < 1$. Más aún, para cada μ existe una constante B_μ, que sólo depende de μ, tal que

$$\int_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(x)|^\mu dx \leq B_\mu \left(\int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|dx \right)^\mu.$$

Demostración.

Supongamos que $f \not\equiv 0$.

Primer caso: $f \geq 0$. Partamos de la igualdad (1) de la observación 6.7., es decir,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} R^{\mu}(re^{i\theta})cos(\mu(\Phi(re^{i\theta}))d\theta = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)dx\right)^{\mu}.$$

Ya que $R(re^{i\theta}) \geq |v(f,r,x)|$, y como $0 \leq \mu|\Phi(re^{i\theta})| \leq \frac{\mu\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, tenemos que $cos(\mu\Phi(re^{i\theta})) \geq cos(\frac{\mu\pi}{2}) > 0$, por lo que:

$$\begin{aligned}
&\frac{cos(\frac{\mu\pi}{2})}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |v(f,r,\theta)|^{\mu} d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} R^{\mu}(re^{i\theta})cos(\mu\Phi(re^{i\theta}))d\theta \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(\theta)d\theta\right)^{\mu}.
\end{aligned}$$

Hagamos $B_{\mu} = \frac{2\pi^{1-\mu}}{cos(\frac{\mu\pi}{2})}$. Cuando $r \to 1^{-}$, $|v(f,r,\theta)| \to |\tilde{f}(\theta)|$ c.d. $\theta \in [-\pi,\pi]$, y por el lema de Fatou

$$\int_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(\theta)|^{\mu} d\theta \leq B_{\mu}\int_{[-\pi,\pi]} f(\theta)d\theta.$$

Segundo caso: el signo de f es variable. El teorema es válido para f^{+} y f^{-}, y como $\widetilde{f^{+}} - \widetilde{f^{-}} = \tilde{f}$, tenemos

$$\int_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(\theta)|^\mu d\theta \leq \left(\int_{[-\pi,\pi]} |\widetilde{f^+}(\theta)|^\mu d\theta + \int_{[-\pi,\pi]} |\widetilde{f^-}(\theta)|^\mu d\theta\right)$$
$$\leq B_\mu \int_{[-\pi,\pi]} |f^+(\theta) d\theta|$$
$$+ B_\mu \int_{[-\pi,\pi]} |f^-(\theta)| d\theta$$
$$\leq 2B_\mu \int_{[-\pi,\pi]} |f(\theta)| d\theta,$$

con lo que se tiene la desigualdad deseada incrementando B_μ con el factor 2. ∎

6.10. LEMA.
Existen constantes absolutas positivas γ, δ tales que para toda $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se tiene

$$|sen(\phi)| \leq \gamma(cos(\phi)log(cos(\phi)) + \phi sen(\phi)) + \delta cos(\phi).$$

Demostración.
Basta considerar $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Como $\lim_{r\to 0} x log(x) = 0$, tenemos que

$$\lim_{\phi\to\frac{\pi}{2}} cos(\phi)log(cos(\phi)) = 0,$$

mientras que $\frac{\pi}{2} sen(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Así, existen $\varepsilon > 0$ y $c \in \mathbb{R}$ fijas tales que

$$cos(\phi)log(cos(\phi)) + \phi sen(\phi) \geq c > 0 \; \forall \; \phi \in [\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}].$$

Sea $\gamma = \frac{1}{c} > 0$. Entonces el problema está arreglado para $\phi \in [\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}]$ independientemente de la constante positiva δ que se elija. Para $\phi \in [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$, $cos(\phi) \geq cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) > 0$, y como la función

$$\gamma(cos(\phi)log(cos(\phi)) + \phi sen(\phi))$$

está acotada para $\phi \in [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$, podemos escoger $\delta > 0$ tal que

$$\delta cos(\phi) \geq 1 - \gamma(cos(\phi)log(cos(\phi)) + \phi sen(\phi)) \; \forall \; \phi \in [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon],$$

y se tiene la desigualdad deseada. ∎

6.11. **TEOREMA.** (Zygmund, 1929)
Si $flog^+|f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ (y por lo tanto $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$), entonces $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Más aún, existen constantes positivas absolutas A, B tales que

$$\int_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(x)|dx \leq A \int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|log^+|f(x)|dx + B.$$

Demostración.
Podemos suponer $f \not\equiv 0$.
Primer caso: $f(x) \geq e \; \forall \; x \in [-\pi, \pi]$. Definamos las funciones F, R, Φ como en la observación 6.7., es decir:

$$
\begin{aligned}
F(re^{i\theta}) &= \int_{[-\pi,\pi]} (f(\theta) + i\tilde{f}(\theta))P(r,\theta - t)dt \\
&= u(f,r,\theta) + iv(f,r\theta) \\
&= R(re^{i\theta})e^{i\Phi(re^{i\theta})}.
\end{aligned}
$$

Sea $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función analítica dada por

$$
G(z) = F(z)log(F(z))
$$

(posible, pues $Re(F(z)) \geq e \ \forall \ z \in \mathbb{D}$). Aplicando a G la fórmula integral de Cauchy para el círculo $|z| = r \in (0,1)$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
G(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{G(z)}{z} dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} G(re^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} F(re^{i\theta})log(F(re^{i\theta}))d\theta.
\end{aligned}
$$

Tomando partes reales (recordemos que $F(0) \in \mathbb{R}$) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
F(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} Re\{R(re^{i\theta})(cos\Phi(re^{i\theta}) \\
&\quad + isen\Phi(re^{i\theta}))(log(R(re^{i\theta})) + i\Phi(re^{i\theta}))\}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} R(re^{i\theta})(cos\Phi(re^{i\theta})log(R(re^{i\theta})) \\
&\quad - \Phi(re^{i\theta})sen\Phi(re^{i\theta}))d\theta,
\end{aligned}
$$

de donde (omitiendo la variable $re^{i\theta}$)

$$\int_{[-\pi,\pi]} R(cos\Phi log(cos\phi) + \Phi sen\Phi)\, d\theta$$
$$= \int_{[-\pi,\pi]} Rcos\Phi log(Rcos\Phi)d\theta - 2\pi u(0)log(u(0))$$
$$= \int_{[-\pi,\pi]} u(f,r,\theta)log(u(f,r,\theta))d\theta - 2\pi u(0)log(u(0)).$$

Multiplicando por γ, añadiendo $\delta \int_{[-\pi,\pi]} R(re^{i\theta})cos(\Phi(re^{i\theta}))d\theta$ y aplicando la desigualdad demostrada en el lema 6.10. obtenemos:

$$\gamma \int_{[-\pi,\pi]} u(f,r\theta)log(u(f,r,\theta))d\theta - 2\pi\gamma u(0)log(u(0))$$
$$+ \delta \int_{[-\pi,\pi]} u(f,r,\theta)d\theta$$
$$= \int_{[-\pi,\pi]} R(\gamma(cos\Phi log(cos\Phi) + \Phi sen\phi)$$
$$+ \delta cos\Phi)d\theta$$
$$\geq \int_{[-\pi,\pi]} R|sen\Phi|d\theta$$
$$= \int_{[-\pi,\pi]} |v(f,r\theta)|d\theta.$$

Ya que $u \geq e$, tenemos que $ulog(u) \geq u > 0$, por lo que se tiene

$$\int_{[-\pi,\pi]} |v(f,r,\theta)|d\theta \leq (\gamma+\delta) \int_{[-\pi,\pi]} u(f,r,\theta)log(u(f,r,\theta))d\theta,$$

y haciendo tender r a 1 (por una sucesión (r_n)) y aplicando el lema de Fatou nuevamente tenemos

$$\int_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(\theta)|d\theta \leq (\gamma+\delta) \int_{[-\pi,\pi]} f(\theta)log(f(\theta))d\theta,$$

que es la desigualdad deseada, con $A = \gamma + \delta$, $B = 0$ provisionalmente.

Segundo caso: $f \not\geq e$. Sean

$$E_1 = f^{-1}(e, +\infty), \qquad E_2 = f^{-1}(-\infty, -e).$$

Sean

$$f_1 = max(f, e), \qquad f_2 = min(f, -e), \qquad f_3 = f - f_1 - f_2.$$

Así, $|f_3| \leq e$. Claramente $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1 log^+ \mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^1$, y por lo tanto $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \tilde{f}_3$. Por el primer caso (usando $-f_2$ en vez de f_2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]} |f(\theta)| d\theta &\leq A \int_{[-\pi,\pi]} f_1(\theta) log f_1(\theta) d\theta \\
&= A \int_{E_1} f(\theta) log f(\theta) d\theta + A \int_{[-\pi,\pi]\setminus E_1} elog(e) d\theta \\
&\leq A \int_{E_1} |f(\theta)| log^+ |f(\theta)| d\theta + A2\pi e,
\end{aligned}$$

y

$$\int_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(\theta)| d\theta \leq A \int_{E_2} |f(\theta)| log^+ |f(\theta)| d\theta + A2\pi e.$$

Para f_3, usando que $f_3 \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2$ y que la medida de $[-\pi, \pi]$ es 2π, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}_3\|_1 &\leq (2\pi)^{1/2} \|\tilde{f}_3\|_2 \leq (2\pi)^{1/2} \|f_3\|_2 \\
&\leq (2\pi)^{1/2} \|e\|_2 = 2\pi e.
\end{aligned}$$

Juntando las desigualdades anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\|_1 &\leq \|\tilde{f}_1\|_1 + \|\tilde{f}_2\|_1 + \|\tilde{f}_3\|_1 \\ &\leq A \int_{E_1 \cup E_2} |f(\theta)| log^+ |f(\theta)| d\theta + 2\pi e(2A+1) \\ &\leq A \int_{[-\pi,\pi]} |f(\theta)| log^+ |f(\theta)| d\theta + B,\end{aligned}$$

con $A = \gamma + \delta$, $B = 2\pi e(2A+1)$. ∎

El teorema de Zygmund admite un recíproco parcial, a saber

6.12. **TEOREMA.** (M. Riesz, 1927)
Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ es tal que existe una constante c con la propiedad de que $f(x) \geq c \ \forall \ x \in [-\pi,\pi]$, y tal que $\tilde{S}(f)$ es una serie de Fourier, entonces $f log^+|f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi)$.

Demostración.
Primer caso: $f(x) \geq 1 \ \forall \ x \in [-\pi,\pi]$. Sean F, R, Φ y G como en el teorema de Zygmund. Como $f \geq 1$, entonces $u(f,r,\theta) \leq 1$, y $|\Phi(z)| \leq \frac{\pi}{2} \ \forall \ z \in \mathbb{D}$, por lo que para toda $z \in \mathbb{D}$,

$$1 \geq cos\Phi(z) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad cos(\Phi(z) log(cos\Phi(z)) \leq 0.$$

Aplicamos la fórmula integral de Cauchy a $G(z) = F(z) log F(z)$ y tomamos partes reales para obtener

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} R(cos\Phi log R - \Phi sen\Phi) d\theta = u(0) log(u(0)),$$

de donde

$$\int_{[-\pi,\pi]} u(f,r,\theta)log(R)d\theta = \int_{[-\pi,\pi]} R\Phi sen\Phi d\theta + 2\pi u(0)log(u(0)).$$

Además, $1 \leq u(f,r,\theta) \leq R(re^{i\theta})$, $log(u(f,r,\theta)) \leq log(R(re^{i\theta}))$ y $R(re^{i\theta})sen\Phi(re^{i\theta}) = v(f,r,\theta)$, por lo que

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]} u(f,r,\theta)log(u(f,r,\theta))d\theta \\
&\leq \int_{[-\pi,\pi]} u(f,r,\theta)logR(re^{i\theta})d\theta \\
&\leq \int_{[-\pi,\pi]} |\Phi||Rsen\Phi|d\theta + 2\pi u(0)log(u(0)) \\
&\leq \frac{\pi}{2}\int_{[-\pi,\pi]} |v(f,r,\theta)|d\theta + 2\pi u(0)log(u(0)).
\end{aligned}$$

Por hipótesis, $\tilde{S}(f)$ es una serie de Fourier, digamos $\tilde{S}(f) = S(g)$. Entonces, por el teorema de Abel-Fejér- Lebesgue (ya que $v(f,r,\theta) = u(g,r,\theta)$), se tiene:

$$\int_{[-\pi,\pi]} |v(f,r,\theta)|d\theta \to \|g\|_1 \quad (r \to 1^-).$$

Por otro lado,

$$u(f,r,\theta)log(u(f,r,\theta)) \to f(\theta)log(f(\theta)) \ (r \to 1^-) \text{ c.d.}$$

Por el lema de Fatou, se tiene que $f \ log \ f \in \mathcal{L}^1$.

Segundo caso: $f \not\geq 1$. Recordemos que $f(x) \geq c$ para alguna c fija. Sea $h(x) = f(x) + (1+2|c|) \geq 1 \ \forall \ x \in [-\pi,\pi]$. Entonces

$\tilde{S}(h) = \tilde{S}(f)$. Por el caso anterior, $|h| log^+ |h| \in \mathcal{L}^1$. Es fácil verificar que $|h| \geq |f|$, y como la función $|x| log^+ |x|$ es no decreciente, se tiene que $f \; log^+ |f| \in \mathcal{L}^1$. ∎

Para nuestros últimos resultados importantes necesitamos una nueva definición de integrabilidad debida a Boks.

6.13. **DEFINICION.**
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ borel medible, extendida por periodicidad a $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es **B-integrable** en $[a,b]$ al número real J si $\forall \; \varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda P partición de $[a,b]$, $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ con $\|P\| < \delta$ y toda elección $\{\xi_j \mid j = 0, \ldots, n-1, \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)\}$, se tiene

$$\mu\left(\left\{t \in [a,b] : \left|J - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j + t)(x_j - x_{j-1})\right| \geq \epsilon\right\}\right) < \varepsilon.$$

También se dice que f es **Riemann-integrable "en medida"**.

6.14. *Notación.*
Dada una función, una partición $P = (a = x_0, \ldots, x_n = b)$ y una elección $\{\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)\}_{j=1}^{n}$ y $t \in [a,b]$, escribiremos

$$I(t) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j + t)(x_j - x_{j-1}).$$

Estrictamente hablando, deberíamos escribir $I(t, f, P, \{\xi_j\})$ en vez de $I(t)$, pero de hecho siempre se sabrá de qué función se trata (incluso si hay varias), y la partición y elección de puntos ya estarán fijas cuando mencionamos a $I(t)$.

6.15. TEOREMA.
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Entonces f es B-integrable en (a, b) a su integral de Lebesgue.

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$. Por un teorema de Lusin de teoría de la medida, existen funciones $f_1, f_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que f_1 es continua, $\|f_2\|_2 \leq \frac{\varepsilon^2}{3(b-a)}$ y $f = f_1 + f_2$. Sean $I(t), I_1(t)$ e $I_2(t)$ las expresiones mencionadas en 6.14. para f, f_1 y f_2 respectivamente. Tenemos entonces que

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} |I_2(t)| dt &\leq \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \int_{[a,b]} |f_2(\xi_j + t)| dt \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \frac{\varepsilon^2}{3(b-a)} = \frac{\varepsilon^2}{3}. \end{aligned}$$

Así, el conjunto T formado por las $t \in [a, b]$ tales que $|I_2(t)| > \frac{\varepsilon}{3}$ tiene medida menor que ε.
Sean J, J_1, J_2 las integrales de Lebesgue sobre $[a, b]$ de f, f_1, f_2 respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned}|I(t)-J| &= |I_1(t)+I_2(t)-J_1-J_2|\\ &\leq |I_1(t)-J_1|+|I_2(t)|+|J_2|.\end{aligned}$$

Como f_1 es continua (y por tanto Riemann-integrable),

$$|I_1(t)-J_1|<\frac{\varepsilon}{3}$$

si $\|P\|<\delta=\delta(\varepsilon)$ para toda $t\in[a,b]$. Nuevamente, para $t\notin T$, $|I_2(t)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$, y si $\varepsilon<b-a$, por hipótesis de f_2, $|J_2|=\int_{[a,b]}f_2(x)dx<\frac{\varepsilon}{3}$, por lo que

$$|I(t)-J|<\varepsilon$$

si $t\notin T$, y $\mu(T)<\varepsilon$ si $\|P\|<\delta$. ∎

Necesitamos un último prerreqisito de B-integrabilidad para poder aplicarlo a las series trigonométricas, que está contenido en el siguiente

6.16. **TEOREMA.**

Sea $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Entonces $\tilde{f}$ es B-integrable en $[-\pi,\pi]$. Más aún, para todo $k\in\mathbb{Z}$, la función $\tilde{f}(x)e^{-ikx}$ es B-integrable en $[-\pi,\pi]$ y $\tilde{S}(f)=S(\tilde{f})$, donde $S(\tilde{f})$ usa las B-integrales.

Demostración.

Sea $k\in\mathbb{Z}$ fijo, y sea $\tilde{I}^k(t)$ la suma correspondiente a $\tilde{f}(t)e^{-ikt}$. Entonces:

$$|\tilde{I}^k(t)| = |\sum_{j=1}^{n} \tilde{f}(\xi_j + t)e^{-ik(\xi_j+t)}\delta_j| = |\sum_{j=1}^{n} \tilde{f}(\xi_j + t)e^{-ik\xi_j}\delta_j|,$$

donde $\delta_j = x_j - x_{j-1}$. La última suma es conjugada a $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j + t)e^{-ik\xi_j}\delta_j$. Así, por el teorema 6.9. tenemos:

$$\|\tilde{I}^k(t)\|_{1/2} \leq B_{1/2}\int_{[-\pi,\pi]} |\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j + t)e^{-ik\xi_j}\delta_j|dt$$

$$\leq 2\pi B_{1/2}\int_{[-\pi,\pi]} |f(t)|dt.$$

Esto prueba que $|\tilde{I}^k(t)| < \varepsilon$ fuera de un conjunto de medida menor que ε, siempre y cuando $\|f\|_1$ sea suficientemente pequeña, digamos menor que $\eta = \eta(\varepsilon)$.

Como los polinomios trigonométricos son $\| \ \|_1$-densos en $\mathcal{L}^1$, podemos hacer $f = f_1 + f_2$, con f_1 un polinomio trigonométrico y $\|f_2\|_1 < \eta$. Tenemos entonces para las sumas que $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$, y para los coeficientes de Fourier complejos que $c_k = c'_k + c''_k$. Es claro que cuando $\rho \to 0$ se tiene que $\tilde{I}_1^k(t) \to 2\pi c_k(\tilde{f}) = -2\pi i(sgn\ k)c'_k$ uniformemente en t. Por otro lado, $|\tilde{I}_2^k(t)| < \varepsilon$ para $t \notin T$, $\mu(T) < \varepsilon$ y $|c''_k| < \eta/2\pi$.

Así entonces, para ρ suficientemente pequeña y $t \notin T$, la suma $\tilde{I}^k(t)$ difiere de $-2\pi i(sgn\ k)c'_k$ en menos que 2ε, y de $-2\pi i$-$(sgn\ k)c_k$ en menos que $2\varepsilon + \eta$. Ya que ε, η son arbitrariamente pequeños, $\tilde{I}^k(t)$ tiende en medida a $-2\pi i(sgn\ k)c_k$ cuando $\rho \to 0$. Esto prueba que $\tilde{f}(t)e^{-ikt}$ es B-integrable en $(-\pi, \pi)$ y que $S(\tilde{f}) = \tilde{S}(f)$. En particular, para $k = 0$, la función $\tilde{f}$ es B-integrable sobre $(-\pi, \pi)$ y el valor de su B-integral es cero. ∎

Como fácil dividendo de la teoría de B-integrabilidad, tenemos el

6.17. TEOREMA.
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ *tal que* $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. *Entonces*

$$\tilde{S}(f) = S(\tilde{f}).$$

En particular, esto se puede concluir en los teoremas de M. Riesz, Zygmund y el recíproco parcial del teorema de Zygmund.

Demostración.
Es consecuencia inmediata de los teoremas 6.15. y 6.16. ∎

En análisis clásico de Fourier se demuestra que la serie

$$S_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nt)}{log\ n}$$

es una serie de Fourier, pero que su serie conjugada

$$S_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nt)}{log\ n}$$

no es serie de Fourier de ninguna función en $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Usando esto y el teorema 6.17. obtenemos

6.18. TEOREMA.
Existe una serie de Fourier cuya conjugada no es serie de Fourier.

Existe por tanto una función integrable cuya función conjugada no es integrable. ∎

Esto nos muestra el gran alcance de los teoremas de Zygmund y M. Riesz, y que es difícil mejorar las condiciones que se requieren en los mismos.

APENDICE

Algunas definiciones y resultados clásicos de Series de Fourier.

A.1. **DEFINICION.** (Símbolos de Landau para sucesiones y funciones)
(i) Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones de números complejos no nulos.
Decimos que (x_n) es de **menor orden de magnitud** que (y_n) (denotado $x_n = o(y_n)$) si $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|y_n|} = 0$.
Decimos que (x_n) es **dominada** por (y_n) (denotado $x_n = O(y_n)$) si $\{\frac{|x_n|}{|y_n|} \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente.
Decimos que (x_n) y (y_n) son del **mismo orden** (denotado $x_n \sim y_n$) si $x_n = O(y_n)$ y $y_n = O(x_n)$.
Finalmente, decimos que (x_n) y (y_n) son **asintóticamente equivalentes** si $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|y_n|} = 1$.
(ii) Sean f, g funciones definidas en una vecindad $V \subset \mathbb{R}$ del 0, y que toman valores complejos.

$$
\begin{aligned}
f(t) = o(g(t)) \;&:\Leftrightarrow\; \lim_{t\to 0} \frac{|f(t)|}{|g(t)|} = 0,\\
f(t) = O(g(t)) \;&:\Leftrightarrow\; \exists M, \varepsilon > 0 \text{ tales que } \frac{|f(t)|}{|g(t)|} \leq M \forall 0 \leq |t| \leq \varepsilon\\
f(t) \sim g(t) \;&:\Leftrightarrow\; f(t) = O(g(t)) \text{ y } g(t) = O(f(t)),\\
f(t) \approx g(t) \;&:\Leftrightarrow\; \lim_{t\to 0} \frac{|f(t)|}{|g(t)|} = 1.
\end{aligned}
$$

En el caso de funciones, a veces se usan los mismos símbolos cuando $t \to +\infty$, $t \to -\infty$ o $t \to t_0$, donde $t_0 \in \mathbb{R}$ es fijo. Si se escribe sólo $o(x_n)$, damos a entender que se trata de una sucesión (y_n) cuya única característica importante es que $(y_n) = o(x_n)$; análogamente para O y funciones.

A.2. **PROPOSICION.**

Denotemos por ξ una sucesión o una función. Los símbolos de Landau tienen las siguientes propiedades:
(i) $o(\xi) \pm o(\xi) = o(\xi)$.
(ii) $O(\xi) \pm O(\xi) = O(\xi)$.
(iii) Si $c \neq 0$, $o(c\xi) = o(\xi)$ y $O(c\xi) = O(\xi)$.
(iv) $o(\xi)O(\xi) = o(\xi^2)$.
(v) $\int_{[0,\eta]} o(t)dt = o\left(\int_{[0,\eta]} tdt\right)$.

A.3. **DEFINICION.**

Sea $n \geq 0$ entero. Definimos el **enésimo nucleo de Dirichlet** como la función

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(kt)$$

Algunos autores definen al enésimo núcleo de Dirichlet como el doble de $D_n(t)$.

A.4. **PROPOSICION.**

Los núcleos de Dirichlet tienen las siguientes propiedades:
(i) Para toda $n \in \mathbb{N}$, D_n es una función continua, periódica (de periodo 2π) y par.

(ii) $D_n(t) = \frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{sen(\frac{t}{2})}$ *si* $t \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
(iii) $\int\limits_{[-\pi,\pi]} D_n(t)dt = 2\pi$ *(note que* $D_0 \equiv \frac{1}{2}$*).*

A.5. **TEOREMA.** (Propiedad fundamental de los núcleos de Dirichlet)
Sea $\delta \in (0,\pi)$ *arbitraria y sea* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$*, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\pi \geq |t| > \delta} f(t)D_n(t)dt = 0.$$

A.6. **PROPOSICION.** (Fórmula integral para las sumas parciales).
Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, $x \in [-\pi,\pi]$, *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces:*
(i) $S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(x \pm t)D_n(t)dt$
(ii) $S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} [f(x \pm t) - f(x)]D_n(t)dt$

A.7. **TEOREMA.** (U. Dini 1880)
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ *dada. Supongamos que para* $x \in [-\pi,\pi]$ *fija, existe* $\rho = \rho(x) \in (0,\pi]$ *tal que* $\int\limits_{(-\rho,\rho)} \frac{|f(x\pm t)-f(x)|}{t}dt < +\infty$, *entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x).$$

A.8. DEFINICION.

Para $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ y $x \in [-\pi,\pi]$, definimos la función $\varphi_x(t) := \frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]$.

A.9. TEOREMA. (Versión simétrica del teorema de Dini)

Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, supongamos que para $x \in [-\pi,\pi]$ fija existe $\rho = \rho(x) \in [0,\pi]$ tal que la función $\frac{\varphi_x(t)}{t} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ entonces $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f)(x)$.

A.10. TEOREMA. (Lema Generalizado de Riemann-Lebesgue)

Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ y $g \in \mathcal{L}^\infty_\lambda([-\pi,\pi])$ entonces:

$$\lim_{|n|\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} f(t+\theta)g(t)e^{-int}dt = 0$$

uniformemente en $\theta \in \mathbb{R}$. También es válido el resultado para $cos(nt)$ y para $sen(nt)$ en vez de e^{-int}.

A.11. PROPOSICION. (Fórmulas aproximativas para $S_n(f)$)

Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ entonces $\forall\, \varepsilon \in (0,\pi)$ fija se tiene:

(i) $S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{(-\varepsilon,\varepsilon)} f(x-t)\frac{sen(nt)}{t}dt + \tilde{o}(1)$, donde el término $\tilde{o}(1)$ tiende a cero uniformemente en x.

(ii) $S_n(f)(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{[0,\varepsilon)} \varphi_x(t)\frac{sen(nt)}{t}dt + \tilde{o}(1)$, donde el término $\tilde{o}(1)$ tiende a cero uniformemente en cada conjunto donde f esté acotada.

A.12. PROPOSICION.
$\int\limits_{[0,\pi/2]} \frac{sen^2(nt)}{sen(t)}dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$

Demostración.
Tenemos que $\sum\limits_{k=1}^{n} sen(t)sen(2k-1)t = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[cos(2(k-1)t) - cos(2kt)] = \frac{1}{2}[1-cos(2nt)] = sen^2(nt)$, por lo que $\int\limits_{[0,\pi/2]} \frac{sen^2(nt)}{sen(t)}dt$ $= \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{[0,\pi/2]} sen(2k-1)tdt = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{-cos(2k-1)t}{2k-1} \Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - 0.$
∎

A.13. PROPOSICION.
$\int\limits_{[0,\pi/2]} \frac{sen^2(nt)}{sen(t)}dt \approx \frac{1}{2}ln\ n.$

Demostración.
Observamos que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$, de donde $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \approx ln\ 2n - \frac{1}{2}ln\ n$, y ya que $ln\ 2n \approx ln\ n$, concluimos que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \approx \frac{1}{2}ln\ n.$ ∎

A.14. DEFINICION.
Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es de **variación acotada** en $[a,b]$ denotado $f \in BV_{\mathbb{R}}([a,b])$ si existe $M > 0$ constante fija tal que para toda partición finita $\{a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b\}$ de

$[a,b]$ se tiene que: $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq M$. Si éste es el caso, denotamos $V_a^b(f) := sup\{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \mid (a = t_0 < \ldots < t_n = b) = \text{P}$ partición de $[a,b]\}$.

A.15. **TEOREMA.** (C. Jordan)
$f \in BV_{\mathbb{R}}([a,b])$ si y sólo si existen $m_1, m_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótonas crecientes (no necesariamente únicas) tales que $f = m_1 - m_2$. Además, si f es continua en $x_0 \in [a,b]$, es posible encontrar m_1, m_2 continuas en x_0.

A.16. **TEOREMA.** (O. Bonnet)
Sea $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b \varphi(t)h(t)dt = \varphi(a)\int_a^c h(t)dt + \varphi(b)\int_c^b h(t)dt.$$

También es válida la versión análoga para φ monótona decreciente. Es oportuno mencionar el caso particular en el que la función φ se anula en uno de los extremos, y sólo aparece un sumando.

A.17. **TEOREMA.** (Criterio de Dirichlet-Jordan)
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, supongamos que f es de variación acotada en el intervalo abierto $\{x \in [-\pi,\pi] : |x - x_0| < \delta(mod 2\pi)\} = A$ (i.e., f es diferencia de dos funciones monótonas crecientes en ese intervalo abierto). Entonces:

(i) Si $x \in A$ entonces $S_n(f)(x) \longrightarrow \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$. En particular $S_n(f)(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in A$ punto de regularidad de f.

(ii) Si f es además continua en A, entonces $S_n(f)(x) \longrightarrow f(x)$ **uniformemente** *en cada subintervalo cerrado contenido en A.*

A.18. **DEFINICION.**

Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **absolutamente continua** (denotado $f \in AC_{\mathbb{R}}([a,b])$) si: para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\{(x_i, x_i')\}_{i\in I}$ es cualquier familia finita de intervalos abiertos **disjuntos** contenidos en $[a,b]$ tal que $\sum_{i\in I}(x_i' - x_i) < \delta$ entonces $\sum_{i\in I} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$.

A.19. **TEOREMA.** (H. Lebesgue)

Sea $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ dada y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_{[a,x]} h(t)dt$ entonces $f \in AC_{\mathbb{R}}([a,b])$. Inversamente, sea $f \in AC_{\mathbb{R}}([a,b])$, entonces:

(i) f es diferenciable casi dondequiera.

(ii) $f' \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$.

(iii) $f(x) = \int_{[a,x]} f'(t)dt + f(a)\ \forall\ x \in [a,b]$.

Notación:

Si f satisface una condición de Lipschitz de orden α en su dominio, lo denotaremos como $f \in \Lambda_\alpha$.

A.20. **DEFINICION.** (Sumabilidad de Cèsaro).

Decimos que una sucesión $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **sumable por el método de promedios aritméticos (o (C,1)-sumable)** si la sucesión $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\sigma_n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ $(n \geq 1)$ converge. Una **serie es (C,1)-sumable** si la sucesión de sus sumas parciales es (C,1)-sumable.

A.21. **TEOREMA.** (Cauchy)

Si (x_n) converge a L, entonces (σ_n) converge a L (i.e. (x_n) es (C,1)-sumable a L).

A.22. **DEFINICION.**

Sea n un entero no negativo. Definimos el **enésimo núcleo de Fejér** como la función:

$$K_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$$

Algunos autores definen $K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)$.

A.23. **PROPOSICION.**

Los núcleos de Fejér tienen las siguientes propiedades:

(i) $K_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{sen(nt/2)}{sen(t/2)} \right)^2$ *si* $t \neq 2\pi l$, *y* $K_n(2\pi l) = n$.

(ii) $K_n \geq 0$, *K_n es continua, es par y periódica (de periodo 2π).*

(iii) $\int_{[-\pi,\pi]} K_n(t)dt = 2\pi$.

A.24. PROPOSICION. (Propiedad fundamental de $K_n(t)$)
Para toda $\delta \in (0, \pi]$ *fija, se tiene que:*

$$\lim_{n \to \infty} sup\{K_n(t) : \delta \leq |t| \leq \pi\} = 0.$$

A.25. COROLARIO.
Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, $\delta \in [0\pi]$ *entonces:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} f(t) K_n(t) dt = 0.$$

A.26. PROPOSICION. (Fórmulas integrales para los promedios)
Sean $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ *y* $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_n(f)(x)$. *Entonces:*
(i) $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x \pm t) K_n(t) dt$
(ii) $\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} [f(x \pm t) - f(x)] K_n(t) dt \ \forall \ x \in [-\pi, \pi]$.

A.27. TEOREMA. (Fejér, 1904)
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$.
(i) Si $f(x^+)$ *y* $f(x^-)$ *existen para* $x \in [-\pi, \pi]$ *entonces:* $\sigma_n(f)(x) \longrightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. *En particular, si* x *es un punto de regularidad de* f *se tiene que* $\sigma_n(f)(x) \longrightarrow f(x)$.

(ii) Si f es continua en $A = \{x \in [-\pi, \pi] : |x - x_0| < \varepsilon (mod\ 2\pi)\}$ entonces $\sigma_n(f) \longrightarrow f$ uniformemente en cada "subintervalo cerrado" contenido en A.

A.28. COROLARIO.
Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ es tal que admite límites bilaterales en x y $S_n(f)(x)$ converge entonces:

$$S_n(f)(x) \longrightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

A.29. TEOREMA. (Fejér-Lebesgue)
Si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ entonces $\|\sigma_n(f) - f\|_p \longrightarrow 0, (n \longrightarrow \infty)$, $(1 \leq p < \infty)$.

A.30. COROLARIO. (Unicidad según los coeficientes de Fourier)
Sean $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, entonces: $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $f = g$ c.d.

A.31. DEFINICION.
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ fija. Un punto $x \in [-\pi, \pi]$ se llama de **Lebesgue** si $\int_{[0,h]} |f(x \pm t) - f(x)| dt = o(h)$ cuando $h \longrightarrow 0^+$, es decir,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int\limits_{[0,h]} |f(x \pm t) - f(x)| dt = 0.$$

A.32. TEOREMA. (Lebesgue)
Si $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ *es fija entonces:*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int\limits_{[0,h]} |f(x \pm t) - f(x)| dt = 0 \text{ c.d. } x \in [a,b].$$

A.33. TEOREMA. (Lebesgue)
Sea $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ *dada, entonces* $\sigma_n(f)(x) \longrightarrow f(x)$ *en todo* $x \in [-\pi,\pi]$ *en el que la función*

$$\Phi_x(h) := \int_{[0,h]} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| dt$$

es de tipo $o(h)$ *(y por el teorema anterior, ocurre c.d.).*

A.34. TEOREMA. (P. Du Bois Raymond 1873)
Existe una función $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua con* $f(-\pi) = f(\pi)$ *tal que* $(S_n(f)(0))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

A.35. LEMA. (Transformación de Abel)
Sean $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ *y* $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ *sucesiones con valores en* $\mathbb{C}$*, definimos* $v_{-1} = 0$ *y* $v_m = u_0 + \ldots + u_m \ \forall\, 0 \le m \le n$*, entonces:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k u_k = \sum_{k=m}^{n-1} v_k(a_k - a_{k+1}) - v_{m-1}a_m + a_n v_n.$$

A.36. **TEOREMA.**

Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión monótona decreciente de números reales con* $\lim_{n\downarrow\infty} a_n = 0$. *Sea* $(u_n(x))_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones complejas definidas en* $[a,b]$. *Definimos* $v_n = u_0 + \ldots + u_n \ \forall\, n \in \{0,1,\ldots\}$. *Si* $|v_N(x)| \leq M \ \forall\, N \geq 0$, *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$ *converge uniformemente en* $[a,b]$ *y* $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)| \leq M a_0$.

A.37. **TEOREMA.**

Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión decreciente de números reales positivos con* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Entonces la serie trigonométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$$

converge $\forall\, x \in [-\pi,\pi]$ *salvo posiblemente en* $x = 0$; *además la convergencia es uniforme en todo "subintervalo cerrado"* $A \subset [-\pi,\pi]\backslash\{0\}$.

A.38. **TEOREMA.**

Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de reales no negativos entonces:*

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n cos(nx)$ *converge uniformemente si y sólo si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

(ii) Si además $a_n \geq a_{n+1} \downarrow 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$ converge uniformemente si y sólo si $a_n = o(1/n)$.

A.39. **COROLARIO.**

La serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{sen(kx)}{k log\ k}$ es una función continua, periódica (de periodo 2π) cuya serie de Fourier converge uniforme pero no absolutamente en $[-\pi, \pi]$.

Notación.

Escribiremos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Dada $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ con $f(-\pi) = f(\pi)$ se le considerará como una función : $\partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la correspondencia $f(\theta) = f(e^{i\theta})$ y escribiremos $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{D})$ o $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ $(1 \leq p \leq \infty)$ indistintamente.

A.40. **DEFINICION.** (Método de sumabilidad de Abel)

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ una serie con valores en $\mathbb{R}$ tales que $|u_k| \leq M \quad \forall k = 0, 1, \ldots \quad M > 0$. Decimos que la serie es **sumable por el método de Abel** (o **A-sumable**) a L si $\lim_{r\to 1^-}(\sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k) = L$. Asimismo si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ es una serie con valores en $\mathbb{R}$ y $|u_k| \leq M \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$, $M > 0$, diremos que es **A-sumable** a L si $\lim_{r\to 1^-}(\sum_{k=0}^{\infty} u'_k r^k) = L$ en donde $u'_0 = u_0$ y $u'_k = u_k + u_{-k} \quad \forall\, k \geq 1$.

A.41. **DEFINICION.**
Sean $f \in \mathcal{L}^1(\partial\mathbb{D})$ y $r \in [0,1)$. Definimos $f_r : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f_r(e^{i\theta}) := \sum_{-infty}^{\infty} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta}$$

llamada el **límite radial** en $e^{i\theta}$.

A.42. **DEFINICION.**
Sea $P : [0,1) \times [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$P(r,\theta) := \frac{1-r^2}{1+r^2-2rcos(\theta).}$$

A P se le llama el **núcleo de Poisson.** Algunos autores definen el núcleo de Poisson como $\frac{1}{2}P(r,\theta)$.

A.43. **PROPOSICION.**
Sean $r \in [0,1)$, $\theta \in [-\pi,\pi]$. *Tenemos entonces:*

$$\begin{aligned} P(r,\theta) &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2rcos(\theta)} \\ &= \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \frac{1-r^2}{(1-r)^2+4rsen^2(\theta/2)} \\ &= Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) \end{aligned}$$

A.44. TEOREMA.

El núcleo de Poisson tiene las siguientes propiedades:

(i) $P(r,\theta) > 0 \quad \forall\, r \in [0,1),\ \forall\theta \in [-\pi,\pi]$ *y* $P(r,\theta) = P(r,-\theta)$.

(ii) $\int_{[-\pi,\pi]} P(r,\theta)d\theta = 2\pi$.

(iii) $\forall\, \delta \in (0,\pi)$ *fija:*

$$\lim_{r\to 1^-} sup\{P(r,\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\} = 0.$$

(iv) P *es armónica considerada como función* $: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

A.45. TEOREMA. (Frobenius)

Sea $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones* $: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Si*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\theta)$$

es (C,1)-sumable a $\sigma(\theta)$, *entonces la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\theta)$ *es A-sumable a* $\sigma(\theta)$. *Si* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\theta)$ *es (C,1)-sumable a* $\sigma(\theta)$ *uniformemente en* $A \subset [-\pi,\pi]$, *entonces*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\theta)$$

es A-sumable a $\sigma(\theta)$ *uniformemente en* $A \subset [-\pi,\pi]$.

A.46. **COROLARIO.** (Abel-Fejér)
Sea $f \in \mathcal{L}^1(\partial\mathbb{D})$ *fija.*
(i) Si $f(\theta^+)$ *y* $f(\theta^-)$ *existen* $(\theta \in [-\pi,\pi])$ *entonces*

$$\lim_{r\to 1^-} f_r(e^{i\theta}) = \frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}.$$

En particular si θ *es un punto regular de* f *se tiene* $f_r(e^{i\theta}) \longrightarrow f(\theta)$ $(r \longrightarrow 1^-)$.
(ii) Si f *es continua en un "intervalo abierto" contenido en el intervalo* $[-\pi,\pi]$, *entonces* $f_r(e^{i\theta}) \longrightarrow f(\theta)$ $(r \longrightarrow 1^-)$ *uniformemente para* θ *en cada "subintervalo cerrado" contenido en el abierto.*

A.47. **TEOREMA.** (Abel-Fejér-Lebesgue)
Si $f \in \mathcal{L}^p(\partial\mathbb{D})$, *entonces* $\|f_r - f\|_p \longrightarrow 0$ $(r \longrightarrow 1^-)$ $(1 \le p < \infty)$.

A.48. **TEOREMA.** (Abel-Lebesgue)
Sea $f \in \mathcal{L}^1(\partial\mathbb{D})$ *dada, entonces* $f_r(e^{i\theta}) \longrightarrow f(\theta)$ *en todo* θ *punto de Lebesgue de* f. *En particular* $f_r(e^{i\theta}) \longrightarrow f(\theta)$ *casi dondequiera en* $[-\pi,\pi]$.

Bary, "A treatise on trigonometric series", Vol I y II, Ed. Cambridge, 1964.

Conway, "Functions of one complex variable", 2a. edición (1978), Springer-Verlag GTM 11.

Duren, "Theory of H^p Spaces", Academic Press, New York, 1970.

Grabinsky, "Notas para el curso Análisis de Fourier", Facultad de Ciencias, UNAM.

Hewitt y Stromberg, "Real and Abstract Analysis", 1975, Springer-Verlag GTM 25.

Katznelson, "An introduction to harmonic analysis", Ed. Dover, 1976.

Koosis, "Introduction to H_p Spaces", Ed. Cambridge, 1980.

Natanson, "Theory of functions of a real variable", Vols I y II, Ed. Ungar.

Rudin, "Análisis Real y Complejo", Ed. McGraw Hill, 1987.

Zygmund, "Trigonometric Series", Vol I, Ed. Cambridge, 1959.

INDICE DE SIMBOLOS

$\tilde{S}(t)$	1.1.	$M_p(r,f)$	4.2.
$\tilde{D}_n(t)$	1.5.	H^p	4.4.
$\tilde{S}_n(f)$	1.9.	h^p	4.4.
$\rho_x(t)$	1.9.	$H^p(f)$	4.4.
$\tilde{f}(x,h)$	1.14.	$o(\cdot)$	A.1.
$\tilde{f}(x)$	1.16.	$O(\cdot)$	A.1
$\tilde{\sigma}_n(f)$	1.18.	$\sim$	A.1.
$\tilde{K}_n(t)$	1.19.	$\approx$	A.1.
$v(S,r,x)$	2.1.	$D_n(t)$	A.3
$v(f,r,x)$	2.1.	$\varphi_x(t)$	A.8.
$u(S,r,x)$	2.1.	$BV_{\mathbb{R}}$	A.14
$Q(r,\theta)$	2.2.	$AC_{\mathbb{R}}$	A.18
$f_\eta^*(x)$	3.15.	$(C,1)$	A.20.
$\mathbb{D}$	4.1.	σ_n	A.20.
$\overline{\mathbb{D}}$	4.1.	$K_n(t)$	A.22.
$\partial\mathbb{D}$	4.1.	$P(r,\theta)$	A.42.
$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{D})$	4.1.		

INDICE ANALITICO

absolutamente continua, A.18.

B-integrabilidad, 6.13.

coeficientes de Fourier complejos, 4.10
condición periódica de Lipschitz, 3.5.
conjugado:
  función conjugada, 3.1.
  núcleo conjugado:
    - - de Dirichlet, 1.5.
    - - de Fejér, 1.19.
    - - de Poisson, 2.2.
  serie conjugada, 1.1.
  suma parcial conjugada de una función, 1.9.

espacio de Hardy, 4.4.

fórmulas aproximativas para $S_n(f)$, A.11.
fórmulas integrales:
  - para $S_n(f)$, A.6.
  - para $\tilde{S}_n(f)$, 1.10.
  - para $\sigma_n(f)$
  - para $\tilde{\sigma}_n(f)$, 1.22.
  - para $v(f,r,\theta)$, 2.5.

función de Blaschke, 4.7.

integral de Poisson-Stieljes de una función, 5.3.

límite radial, 4.10.

núcleo:
- conjugado, véase **conjugado**
- de Dirichlet, A.3.
- de Fejér, A.22.
- de Poisson, A.42.

punto de Lebesgue, A.31.

Riemann-integrable en medida, 6.13.

serie de potencias de variación acotada, 5.1.
símbolos de Landau, A.1.
sumabilidad de Abel-Poisson, A.40.
sumabilidad de Cèsaro, A.20.

teorema:
Abel-Fejér, A.46.
Abel-Fejér-Lebesgue, A.47.
Abel-Lebesgue, A.48.
Bonnet, A.16.
Cauchy, A.21.
Criterio de Dirichlet-Jordan, A.17.
Criterio de Lusin para $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, 3.10. y 3.13.
Descomposición de F. Riesz, 4.7.

Dini, A.7. y A.9.
Du Bois Raymond, A.34.
Fejér, A.27.
Fejér-Lebesgue, A.29.
Fórmula de Lusin, 5.11.
Frobenius, A.45.
Hardy, 4.18.
Hardy-Littlewood, 5.4.
Jordan, A.15.
Kaczmarz, 3.21.
Lebesgue, A.19., A.32. y A.33.
Lema generalizado de Riemann-Lebesgue, A.10.
Lusin, 5.13.
Lusin-Privalov para $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, 3.7.
Lusin-Privalov para $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, 3.15.
Principio de localización de Riemann, 1.12.
Pringsheim, 1.11.
Privalov, 3.6.
Propiedad fundamental de:
  $D_n(t)$, A.5.
  $K_n(t)$, A.24.
Riesz, (F. y M.), 5.8.
Riesz, (M.), 6.8. y 6.12.
Transformación de Abel, A.35.
Unicidad de la representación integral de Poisson, 5.7.
Unicidad según los coeficientes de Fourier, A.30.
Young, 1.16.
Zygmund, 6.11.

variación acotada:
función de -, A.14.
serie de potencias de -, 5.1.

'Would you tell me, please, which way I ought to go from here?'

'That depends a good deal on where you want to get to,' said the Cat.

'I don't much care where –' said Alice.

'Then it doesn't matter which way you go,' said the Cat.

'– so long as I get *somewhere*,' Alice added as an explanation.

'Oh, you're sure to do that,' said the Cat, 'if you only walk long enough.'

Alice in Wonderland,

Lewis Carroll.